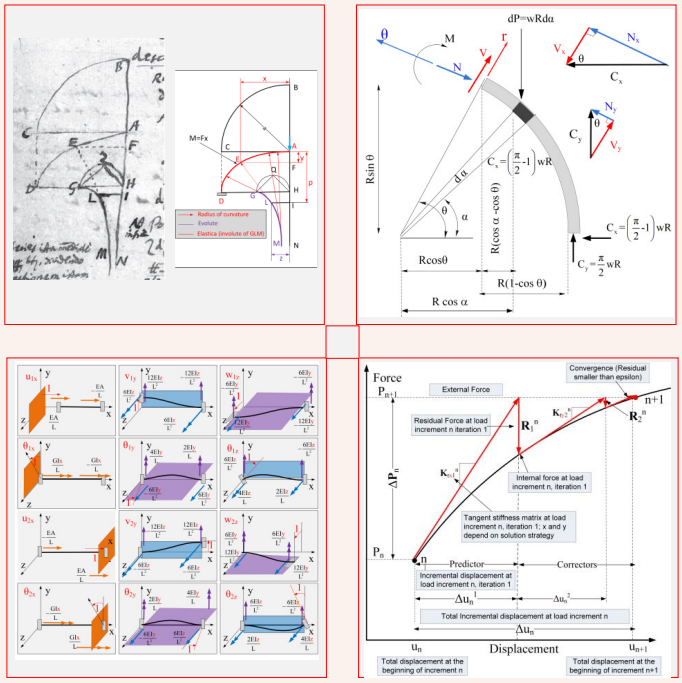
I QUATTRO LIBRI DELL'ANALISI STRUTTURALE

DALLA STORIA DELLA MECCANICA AI MODERNI METODI COMPUTAZIONALI

VICTOR E. SAOUMA &

PROFESSORE EMERITO, UNIVERSITÀ DEL COLORADO A BOULDER



V. 1.0
Agosto 2026

Sito web del progetto: https://structuralanalysisbook.org/

Quest'opera è distribuita con licenza Creative Commons «Attribuzione – Non commerciale – Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale».

COPIA DI REVISIONE

Verba volant, scripta manent[‡]

[‡]«Le mie lezioni sono volate via, ma questo libro resterà». ☺

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

Avvertenza legale

Questo libro è distribuito con licenza CC BY-NC-SA, ossia *Attribuzione–Non commerciale–Condividi allo stesso modo*. In sintesi, la licenza consente di condividere e adattare liberamente il contenuto, purché siano rispettate alcune condizioni. È consentito:

Condividere: copiare e ridistribuire il materiale con qualsiasi mezzo e in qualsiasi formato, anche mettendolo a disposizione di amici, colleghi o piattaforme sulle quali altri possano trarne beneficio.

Adattare: rielaborare, trasformare e sviluppare il contenuto, purché per finalità non commerciali.

Attribuire: indicare correttamente l'autore e fornire un collegamento all'opera originale. L'attribuzione deve essere chiara, affinché la provenienza del materiale sia riconoscibile.

Si applicano inoltre le seguenti limitazioni:

Non commerciale: il materiale non può essere usato per scopi commerciali; non può essere venduto, incluso in prodotti a pagamento o monetizzato in altro modo.

Stessa licenza: ogni opera derivata deve essere distribuita alle medesime condizioni CC BY-NC-SA. In questo modo si conserva lo spirito di apertura e anche altri potranno beneficiare della nuova versione.

COPIA DI REVISIONE

Nota sulla traduzione

Il lettore italiano, abituato a una particolare tradizione nell'insegnamento dell'analisi strutturale, potrà trovare in queste pagine un'impostazione in parte insolita. È una scelta deliberata. L'organizzazione, la progressione didattica e la filosofia dell'opera sono decisamente anglosassoni, più precisamente statunitensi. Sarebbe presuntuoso affermare che una tradizione sia superiore all'altra; il confronto con una diversa tradizione intellettuale può però arricchire la pratica e ampliare la comprensione.

È opportuna un'avvertenza: questo libro non è destinato a chi rifugge l'impegno. La materia è talvolta esigente, sia sul piano matematico e concettuale sia per l'ampiezza degli argomenti trattati. Si rivolge a chi cerca una comprensione profonda e rigorosa, non una semplice familiarità con i metodi dell'analisi strutturale. Il lettore perseverante troverà tuttavia che lo sforzo è ampiamente ricompensato.

Questo libro è la traduzione dell'edizione originale inglese, *The Four Books of Structural Analysis*, realizzata con l'assistenza di OpenAI ChatGPT e con una revisione limitata dell'autore. Il lettore potrà incontrare occasionalmente una formulazione poco naturale o una scelta terminologica inconsueta; si confida nella sua comprensione.

Infine, si raccomanda di leggere attentamente gli altri testi preliminari prima di affrontare il testo principale: contengono indicazioni importanti che faciliteranno notevolmente la lettura.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Dedicazione

Alla memoria di mio nonno Victor, e di mia moglie Rhea



e ai miei figli Richard, Caroline e Sophie

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Prefazione

XXX, YYYY
Busytown, Stati Uniti

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Prolegomeni[4]

Contenuto dei prolegomeni

I. Origine e scopo
Sul titolo
Genesi
Copertura
Note di lezione
Ancora un altro libro?

II. Filosofia strutturale
Perché tutto in uno?
Meccanica

III. Destinatari e uso
Destinatari
Navigazione

IV. Influenze personali
Influenza straniera
Insegnamento alla CU

V. Stile e Presentazione
Stile
Notazione
Ripetizioni
Colori
Tipografia
Carattere del titolo

VI. Concezione e produzione
LaTeX
Codici Matlab
Codici Mathcad
AI
Figure

VII. Fonti e attribuzione
Riferimenti
Fotografie
Libri consultati

VIII. Disponibilità e Statistica
Perché è libero?
Sito web
Statistiche

I. ORIGINE E SCOPO

Sul titolo Il titolo di questo lavoro ricorda intenzionalmente il Palladio *Quattro libri di architettura*.

Qui, la struttura quadruplica riflette una progressione pedagogica: dalle fondamenta storiche dell'analisi strutturale, attraverso formulazioni introduttive e intermedie, Il parallelo sta nella convinzione che anche i soggetti complessi beneficiano di una esposizione attentamente messa in scena.

Genesi Mentre la mia carriera accademica si avvicinava al suo crepuscolo, ho sentito – forse con un tocco di orgoglio – che era giunto il momento di condividere le conoscenze raccolte in quasi quattro decenni di insegnamento dell'analisi strutturale. *magnum opuscolo* è il risultato.

Le sue origini si trovano in due flussi paralleli: la prima è costituita da note di lezione accumulate e continuamente raffinate in quegli stessi quattro decenni, aggiornate per riflettere entrambi i progressi del campo e le esigenze in evoluzione degli studenti. La seconda è una collezione più tranquilla riunita accanto all'insegnamento: carte, monografie,

[4]Dal greco *prolegomena* (προλεγόμενα), «cose dette in precedenza»: il testo preliminare nel quale un autore espone l'ambito, il metodo e gli intenti di un'opera prima che inizi il testo principale. Il termine acquistò l'uso accademico moderno con i *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik* (1783) di Kant.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

curiosità storiche e dettagli tecnici che raramente trovavano la loro strada in classe, sia perché il pubblico non era ancora pronto o perché la profondità necessaria superava quello che un corso unico poteva ospitare.

Una prima bozza completa è stata assemblata da questi due flussi prima dell'avvento dell'intelligenza artificiale come strumento di scrittura pratica. Ciò che seguito non è stata una delegazione di giudizio autorevole ma piuttosto l'accesso ad una terza ed efficace fonte sconfinata: attraverso innumerevoli scambi, pushback, rifiuti e raffinazioni successive, AI ha fornito una ricchezza di materiale che nessuna visita di biblioteca o ricerca di letteratura avrebbe potuto abbinare.

Ho pensato al mio ruolo in tutto come quello di un *curatore* assemblare una mostra — che riceve input da flussi distinti e deve poi decidere cosa merita un posto nella raccolta e cosa non, in quale stanza ogni pezzo appartiene, come dovrebbe essere illuminato, e in quale ordine un visitatore dovrebbe incontrarla. Per la parte di analisi strutturale del libro, questo compito curatorio era relativamente semplice: il materiale tecnico segue una logica pedagogica ben consolidata, e la sequenza di capitoli più o meno si impone.

La parte storica ha presentato una sfida del tutto diversa: come si traccia l'evoluzione dell'analisi strutturale in una sequenza lineare di capitoli — dalle prime scoperte di numeri e alfabeti, attraverso i grandi salti intellettuali dell'antichità e del Rinascimento, fino al metodo degli elementi finiti — mentre si fa giustizia anche a temi che intrinsecamente sono temi tematici piuttosto che cronologici? Alcuni capitoli seguono il filo del tempo; altri si tagliano attraverso di essa, raccogliendo idee, figure, figure, figure, figure, figure, figure, figure, figure, figure, figure, figure, figure, figure, figure,

---

📖 **Copertura** In generale il libro è diviso in quattro parti:

In generale il libro è diviso in quattro parti:

Libro I Questo libro fornisce un'approfondita esplorazione della storia dell'analisi strutturale. Mentre non pretende di essere esaustivo, ho trovato questo aspetto del trattato particolarmente coinvolgente da scrivere. Inizialmente, ho selezionato eventi chiave e figure senza vincoli rigorosi, ma come la narrazione ha raggiunto l'era di Galileo Galilei, un approccio più strutturato e disciplinato è diventato necessario.

Libro II Questo libro copre il materiale che si aspetterebbe in un primo corso di analisi strutturale, seguendo lo studio di Statics e Meccanica di corpi deformabili. Tuttavia, ho notevolmente ampliato la portata oltre il livello introduttivo, da cui il sottotitolo *Fondamenti; Analitico*I temi trattati spesso in modo inadeguato nei manuali standard, come cavi, archi e strutture tridimensionali, ricevono una copertura approfondita qui. Ho anche incluso argomenti avanzati come piastre e conchiglie, che sono raramente affrontati in questa fase ma essenziali per una comprensione completa. Il libro conclude con un capitolo sui metodi approssimativi e il design preliminare. Credo fortemente che l'analisi strutturale non dovrebbe esistere in isolamento; gli studenti

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

devono sviluppare un'intuizione per la progettazione a fianco delle loro competenze analitiche.

Libro III Questo libro si rivolge a quello che viene spesso chiamato "analisi strutturale della matrice", ma è fondamentalmente un trattato sul metodo degli elementi finiti. La prima parte riguarda il metodo di rigidità diretta in dettaglio, inclusa la sua implementazione per le strutture quadro. Questo è seguito da un ampio trattamento dei metodi variazionali - il calcolo delle variazioni, il principio del lavoro virtuale e i teoremi energetici - che formano il fondamento teorico su cui introduco il metodo contium.

Un'idea comune sostiene che i metodi di matrice per i quadri sono "più facili" degli elementi finiti per la continuazione. Infatti, spesso il contrario è vero. Gli elementi di continuum si occupano di stress e tensori di tensione—legant e quantità ben definite. Gli elementi quadro, nella loro forma più generale, coinvolgono tre gruppi di forze e tre set di momenti in ogni nodo, insieme ai loro spostamenti associati e le loro forze sottili.

Libro IV Questo libro si basa su un nuovo corso che ho personalmente introdotto (e sulle eccellenti tesi di alcuni miei studenti), un programma con relativamente pochi equivalenti nel panorama accademico. Il corso è incentrato soprattutto sull'analisi non lineare delle strutture intelaiate. Tratta inoltre temi fondamentali quali plasticità, stabilità, dinamica e, in particolare, ingegneria sismica basata sulle prestazioni.

Appendici Durante il trattamento, ho trovato necessario integrare il testo principale con materiale aggiuntivo—codici MATLAB, un'introduzione alla meccanica continuum, funzioni di distribuzione delle probabilità, e altro ancora.Queste diciotto appendici servono sia come riferimento che come rinforzo, permettendo ai lettori di approfondire senza interrompere la narrazione primaria.

L'approccio che ho adottato in questo trattato può essere paragonato ad un metodo euclideo: iniziamo con definizioni fondamentali e sistematicamente costruiamo su di loro in ogni capitolo successivo. L'obiettivo è quello di presentare il materiale in modo che ogni passo fluisca logicamente da quelli precedenti, basandosi su nozioni di base, definizioni e teoremi precedenti come base.

Mentre il contenuto dei Libri II-IV proviene in gran parte dalle mie note di lezione, ho fatto sforzi estensivi per integrare, ampliare e affinare il materiale consultando numerose fonti.

 **Note di conferenza di accompagnamento** Questo libro è cresciuto da centinaia di conferenze tenute durante la mia carriera in una sequenza di tre corsi di analisi strutturale. LaTeX e Beamer per preparare le mie note di corso, che alla fine divennero la base di questo lavoro, che sono state compilate in un unico documento, liberamente disponibile per download.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

📖 **Ancora un altro libro?** La domanda che può sorgere per il lettore casual è, *Perché un altro libro sull'analisi strutturale?* È una domanda valida considerando che molti libri di testo esistenti su questo argomento tendono ad essere ripetitivi e, in alcuni casi, hanno visto numerose edizioni. Purtroppo, alcuni di questi testi possono venire come uninspiring, eccessivamente semplificato, e mancante in profondità.

Un inconveniente comune è la loro copertura limitata della teoria sottostante, spesso accompagnata da una dipendenza da esempi strutturali semplici e semplici.

In risposta a queste limitazioni, in tutto questo libro, ho fatto un deliberato sforzo per stabilire un legame tra le varie procedure di analisi strutturale e i principi fondamentali della meccanica applicata e della matematica su cui sono costruiti, che mira a fornire ai lettori una comprensione più profonda e approfondita dell'analisi strutturale, distinguendola dalle offerte tipiche di questo settore.

II. PHILOSOFIA EDITORIALE

Perché tutto in uno? La decisione di presentare i quattro libri come un unico trattato unificato è deliberata e fondata in due considerazioni fondamentali: in primo luogo, essa riflette la convinzione che gli ingegneri debbano rimanere costantemente consapevoli dei processi storici attraverso i quali è emersa la conoscenza presente. Le teorie, i metodi e le strutture computazionali impiegate oggi non sono sorti in isolamento; sono il risultato cumulativo di secoli di perfezionamento concettuale, di dibattito e di correzione.

In secondo luogo, la struttura del lavoro è intesa ad affrontare gli storici della scienza e dell'ingegneria, sottolineando che l'indagine storica acquisisce profondità e rilevanza quando si vede in relazione allo stato attuale della disciplina. I formalismi matematici, le tecniche analitiche e i principi di progettazione che caratterizzano l'analisi strutturale moderna non sono solo i punti di fine della storia; essi forniscono un contesto essenziale per interpretare le motivazioni, i limiti e i risultati dei pensatori precedenti.

Di conseguenza, il trattato è concepito come un quadro esplicitamente bidirezionale, che delinea per lo storico una chiara traiettoria intellettuale dallo sviluppo storico delle idee alla loro formulazione analitica attuale. Per l'ingegnere, traccia il cammino reciproco, dalla pratica contemporanea e dai metodi formali alle loro origini storiche. Sostenendo questo dialogo a due vie, il lavoro integra intuizioni storiche e rigore tecnico in una prospettiva coerente e reciprocamente rafforzata.

Per dettagli analitici, vedere § XX; or Per lo sfondo storico, vedi § XX.

Infine, oltre a queste motivazioni concettuali, la decisione di consolidare i quattro libri in un unico volume serve anche a scopo pedagogico e tecnico. Presentando livelli di analisi strutturale introduttivi, intermedi e avanzati all'interno di un lavoro continuo, facilita una

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

progressione senza interruzioni tra i livelli di complessità, garantendo al contempo una rigorosa coerenza di formulazioni, definizioni e convenzioni in tutta l'opera.

Meccanica Sia chiaro: l'ingegneria strutturale è, nella sua essenza, meccanica applicata. La conoscenza procedurale e la comodità numerica non devono sostituire la comprensione dell'origine dei nostri strumenti. Occorre mantenere il rigore analitico e matematico proprio della meccanica e, quando necessario, tornare esplicitamente ai suoi principi. Per questo motivo, ogni equazione presentata nell'opera è riconducibile ai principi primi; ho inoltre incluso un'appendice sui concetti essenziali della meccanica del continuo e un'altra dedicata a Westergaard, ingegnere capace di risolvere problemi profondamente pratici ragionando direttamente dalla meccanica fondamentale.

III. DESTINATARI E USO

Destinatari

Studenti Questo libro è adatto per una sequenza di tre corsi consecutivi: Introduzione all'analisi strutturale, all'analisi strutturale intermedia e all'analisi strutturale non lineare. Si consolida in un unico volume ciò che richiede tradizionalmente almeno due libri di testo separati. Inoltre, mantiene una notazione coerente in tutto e include esempi illustrativi intenzionalmente progettati per essere impegnativi.

Tuttavia, va notato che questo libro è destinato a un "sentiero di caratteri"; per questo, intendo gli studenti che non cercano un trattamento semplificato e verboso delle basi. Pertanto, per la maggior parte degli studenti, questo libro non dovrebbe essere assegnato come il libro di testo primario in un corso.

Questo libro si rivelerà anche prezioso per gli studenti che desiderano un approccio "unificato" all'ingegneria strutturale, caratterizzato da una notazione coerente e da una prospettiva filosofica coerente, offrendo una transizione fluida dai concetti fondamentali ai temi intermedi e avanzati.

Educatori: Gli istruttori di ingegneria strutturale troveranno questo libro una risorsa preziosa, in particolare come antidoto alla sovrasemplificazione che affligge molti La sua larghezza e profondità lo rendono adatto per assegnare argomenti di tesi, progetti di termine, o Ph.D. problemi di esame di qualificazione.

Ingegneri Questo libro è destinato anche agli ingegneri strutturali che sono abbastanza discernenti da allontanarsi dai programmi informatici e approfondire l'eleganza delle soluzioni analitiche, che possono offrire molto più valore di quanto comunemente realizzato. Spesso, molti ingegneri si precipitano a soluzioni basate su computer senza prima esplorare la possibilità di ottenere soluzioni analitiche precise o approssimative, che potrebbero poi essere convalidate utilizzando il software.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Storici  Il primo dei quattro libri offre un'esplorazione completa della storia dell'analisi strutturale. Accanto alle note opere classiche dedicate all'argomento, propone una delle trattazioni più ampie disponibili nella letteratura sull'analisi strutturale.

Navigazione A causa delle centinaia di collegamenti ipertestuali interni, i lettori non dovrebbero esitare a seguirli, sapendo che un semplice `Arrow del braccio` ritorna alla pagina invocato (e `ALT+Right Arrow` ti riporta all'ipertestuale)

IV. INFLUENZE PERSONALI

Influenza straniera Durante la mia collaborazione di nove anni con la Tokyo Electric Power Company (TEPCO) sull'analisi sismica non lineare delle dighe ad arco alto, mi sono considerato straordinariamente fortunato. *No! Prof. Saouma, in Giappone, un programma non deve solo funzionare senza difetto, deve anche possedere bellezza estetica*Questa osservazione, fatta dal signor Yagome, incapsulato di un profondo principio giapponese: un'attenzione senza compromessi ai dettagli, un'insistenza sull'eccellenza, e la ricerca di armonia che si estende ben oltre la semplice correttezza tecnica.

Ho avuto anche la fortuna di possedere una casa di famiglia in Svizzera, dove abbiamo trascorso molte estati e diversi periodi sabatici.Dagli svizzeri, ho imparato - in modo tranquillo ma decisivo - l'importanza della precisione, del lavoro eseguito senza scorciatoie, e di resistere a qualsiasi senso artificiale di urgenza. In Svizzera, le cose vengono fatte accuratamente, deliberatamente, e correttamente, senza bisogno percepito di fretta. L'attenzione al dettaglio non è un vincolo ma una virtù, e la qualità è il risultato naturale.

Questa ethos si trova in netto contrasto con la frase di Orson Welles: *In Italia, per trent'anni sotto i Borgia, avevano guerra, terrore, omicidio e spargimento di sangue, ma producevano Michelangelo, Leonardo da Vinci e il Rinascimento. In Svizzera, avevano amore fraterno, cinquecento anni di democrazia e di pace, e che cosa produceva?*Orson, la Svizzera ha coltivato un'inutile ricerca di "complicazioni" orsiche, pionieristicamente micro-macchinarie ad alta precisione, e ha prodotto una lunga linea di architetti e ingegneri eccezionali. Si dovrebbe anche ricordare i signori di Basilea, Euler e Bernoullis, che non si trovavano molto dietro Newton nella forma stessa della meccanica, ponendo fondazioni che avrebbero infine sostenuto l'analisi strutturale.

Infine, crescendo in Italia, ho spesso sentito il proverbio *Chi va piano, va sano e lontano*—letteralmente, "Chi va lentamente, va in modo sicuro e lontano." Il messaggio è inconfondibile: non affrettatevi, prenda il tempo necessario, e faccia le cose correttamente.

Insieme, questi tre paesi – Giappone, Svizzera e Italia – hanno profondamente plasmato il mio temperamento intellettuale e la mia pratica professionale, più di tutti hanno influenzato lo spirito in cui questo libro è stato scritto: rigoroso, paziente, attento ai dettagli e rispettoso del lavoro svolto bene.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Insegnamento presso l'Università del Colorado Ho insegnato all'Università del Colorado dal 1984 al 2023 – una durata di quasi quarant'anni. All'inizio della mia carriera, sono stato profondamente influenzato da due eminenti colleghi: il professor Kurt Gerstle in ingegneria strutturale e il professor Kaspar Willam nella meccanica strutturale. Il loro rigore, precisione e insistenza sui primi principi ha lasciato un'impressione duratura, e ho cercato durante tutta la mia carriera di emulare il loro approccio: mai allontanarsi dalla teoria, dalle derivazioni e dalla disciplina matematica.

Molti, per metterlo chiaramente, sono stati ridotti - limitata a strutture bidimensionali, privi di qualsiasi copertura di archi, e pestata da notazione inconsistente attraverso la progressione da introduttivo a intermedio a analisi strutturale avanzata (corsi 3525, 4525, e 6525, rispettivamente) Queste discontinuità mi hanno colpito come entrambi arrruolati e pedagogicamente confondere.

Nei primi anni, l'insegnamento era un vero piacere. Gli studenti erano motivati, curiosi e disposti a impegnarsi con materiale impegnativo. Le difficoltà iniziarono quando il corso introduttivo divenne un requisito per tutti gli studenti di ingegneria civile e architettonica. Gli studenti di ingegneria ambientale, desiderosi di salvare il pianeta, spesso avevano poca pazienza per l'analisi strutturale - anche se la maggior parte erano intellettualmente in grado.

La mia filosofia era semplice: dato il numero limitato di formule coinvolte, gli studenti dovrebbero capire il materiale concettualmente piuttosto che affidarsi a memoria di rote. Di conseguenza, i miei esami erano libro chiuso e note chiuse. Ogni esame in genere includeva un problema diretto che tutti dovrebbero risolvere, una delle difficoltà artificiali intermedie, e un problema impegnativo progettato per distinguere gli studenti eccezionali dal resto. Il primo esame spesso servito come una chiamata di wake-up, con medie di classe inferiore al cinquanta per cento.

Per complicare ulteriormente le questioni, anche quando gli studenti sono catturati barare oltre ogni ragionevole dubbio, l'Università del Colorado ha tendeto a guardare l'altro modo - dopotutto, gli studenti stanno pagando i clienti, e l'Università si piega indietro per evitare antagonizzarli. Semplicemente mettere, a meno che uno studente ammette apertamente alla disonestà accademica, l'istituzione estende il beneficio del dubbio, lasciando una facoltà frustrato senza alcun ricorso, ma per accettare il risultato.

Infine, una parola sulle valutazioni didattiche. Non mi hanno mai preoccupato troppo, anche se non le ignoravo completamente. Uno studente di vent'anni, per quanto brillante, non è sempre nella posizione migliore per giudicare ciò che dovrebbe essergli insegnato.

V. STILE E PRESENTAZIONE

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

✍ **Stile** Un libro comprende non solo il suo contenuto ma anche la sua forma, ed è nella forma in cui l'individualità e lo stile personale brillano. Mentre c'è generalmente consenso sulle equazioni di governo e i principi del contenuto, la forma o lo stile può variare in modo significativo. Alcuni libri sono eccessivamente verbosi, portando alla confusione, mentre altri omettono derivazioni o forniscono esempi eccessivamente semplicistici.

In tutto questo libro, ho incorporato commenti personali, e la profondità e la larghezza di copertura riflettono la mia prospettiva individuale sulla materia tematica, il che significa che alcuni lettori possono trovare alcuni argomenti trascurati (come linee di influenza), mentre altri potrebbero percepire che io approfondisco argomenti arcani in modo eccessivo. Una nota sulla lingua: l'inglese non è la mia lingua madre — è infatti la quinta e l'ultima lingua che ho acquisito. Mentre l'IA ha fatto molto per affinare la prosa in tutto questo libro, rimangono imperfezioni senza dubbio. Ho fatto del mio meglio, e chiedo solo per la comprensione del lettore e una misura di generosità in cambio.

αKΩ **Notazione** La nozione di meccanica strutturale e di pubblicazioni ingegneristiche è spesso inconsistente, mentre l'utilizzo di distinti set di notazioni per ogni capitolo, basati su aree specifiche, mi sarebbe stato più conveniente come autore, sarebbe stato impraticabile e confuso per i lettori di un libro che copre una così ampia gamma di argomenti.

È stata una delle sfide più grandi che ho affrontato, e si è subito accorto che mantenere una notazione coerente in tutte le discipline e all'interno di varie discipline avrebbe presentato difficoltà per i lettori che cercano una comprensione completa del soggetto.

Ho quindi fatto ogni sforzo per stabilire un sistema di notazione uniforme in tutto il libro, inoltre ho preso l'iniziativa di ridisegnare numerose figure per allineare con la notazione del libro piuttosto che aderire rigorosamente alla notazione utilizzata all'interno di specifiche sotto-disciplina.

🔄 **Ripetizioni** Nella maggior parte dei libri di testo, si evitano figure duplicatrici, equazioni o testi precedentemente coperti, ma, a causa della natura completa di questo libro e per facilitare la comprensione, non ho esitato a ripetere alcuni elementi da sezioni precedenti. Inoltre, ho fatto sforzi per fare riferimento al contenuto originale quando necessario.

Colori Mentre la maggior parte dei libri di ingegneria sono stampati in scala di grigi — con conseguente aspetto piatto, visivamente sstimolante — questo libro è concepito esclusivamente per la lettura su schermo. Liberato dai vincoli di stampa, il colore è stato abbracciato non come decorazione ma come strumento comunicativo deliberato.

Inoltre, ho scelto di partire dal tipico sfondo bianco, che può essere percepito come un po

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

'aggressivo, e invece optato per un colore di sfondo con il codice esadecimale `#Fbf2e`Questa scelta trae ispirazione dal Financial Times, anche se per motivi completamente diversi.

Infine, si può notare che a volte uso il colore all'interno del testo stesso per evidenziare e sottolineare alcuni punti o concetti.

Tipografia

Questa edizione è ambientata in un serif Palatino-famiglia a 12pt, con un testo colonna dimensionata per mantenere ogni riga all'interno dei tipi di gamma in genere per quanto riguarda comodo per la lettura continua—circa 45-75 personaggi, con un ideale vicino a 66[5]. All'impostazione originale 11pt del libro, le linee si avvicinano a 85 caratteri, oltre il punto in cui l'occhio traccia una linea di testo comodamente; l'aumento a 12pt è stato fatto specificamente per correggere questo, non come preferenza stilistica.

Carattere del titolo Il titolo del carattere garantisce una breve spiegazione: le lettere sulla copertina sono rese all'interno di cornici quadrate con diagonali incrociate — un deliberato omaggio al celebre alfabeto di Leonardo da Vinci in De Divina Proportione (Venezia, 1509), il trattato sulle proporzioni matematiche *La relazione* in quel lavoro, Leonardo costruì geometricamente ogni lettera capitale, inscritta all'interno di una geometria quadrata e costruita dalle stesse regole proporzionali che governano l'architettura, il corpo umano, le forme naturali. La scelta non è solo decorativa. Un quadrato suddiviso nelle sue diagonali è anche il più semplice elemento finito — il blocco stesso dei metodi computazionali che occupano la maggior parte di questo libro.

VI. CONCEZIONE E PRODUZIONE

LaTeX (Questa sezione su LaTeX è impaginata per puro divertimento, sulla base di un esempio contenuto nel TeXbook originale di Knuth.)

[5] Robert Bringhurst, Gli elementi di stile tipografico, 4° ed. (Vancouver: Hartley & Marks Publishers, 2012).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Questo
libro non avrebbe potuto essere
prodotto con un comune elaboratore di
testi: soltanto LaTeX, con la sua impareggiabile
padronanza della tipografia, della matematica, dei riferimenti incrociati e della struttura dei documenti, poteva affrontare una simile sfida. L'uso di LaTeX per oltre quarant'anni mi ha fornito una base solida, ma questo progetto ne ha spinto le capacità fino al limite. Il solo preambolo è cresciuto fino a quasi 1,400 righe e orchestra con cura circa 80 pacchetti che governano la notazione simbolica, gli ambienti per teoremi ed esempi, gli schemi cromatici, la geometria della pagina, le testatine, la generazione degli indici, la gestione bibliografica, i collegamenti ipertestuali e il supporto multilingue. Decine di macro specifiche, molte delle quali perfezionate iterativamente con l'assistenza di strumenti di intelligenza artificiale, assicurano una rigorosa coerenza tra migliaia di definizioni, proposizioni, derivazioni e figure distribuite nei quattro volumi. Una difficoltà persistente è stata l'esaurimento dei registri di LaTeX: il solo pacchetto `morewrites` ha richiesto l'assegnazione dedicata di altri 50 flussi di scrittura per evitare il temuto errore *no room for a new write*. La compilazione dell'opera completa richiede più passaggi sequenziali di pdfLaTeX, BibTeX e MakeIndex, coordinati da uno script di compilazione che gestisce i file ausiliari, i diversi flussi degli indici e le sezioni bibliografiche separate delle quattro parti.

Per gli appassionati di LaTeX, rendo disponibile il mio `Preambule.tex`.

Codici Matlab I libri comprendono una consistente raccolta di codici MATLAB illustrativi, raccolti in un'appendice dedicata per la facilità di accesso. MATLAB è ampiamente utilizzato in tutte le comunità di ingegneria e ricerca per algebra lineare numerica, sviluppo di algoritmi e analisi computazionali su larga scala, e la sua inclusione riflette questo ruolo centrale. I codici presentati qui non sono destinati ad essere ottimizzati o stilisticamente compatti; piuttosto, sono scritti per sottolineare la correttezza, la trasparenza e la chiarezza concettuale e avanzata.

Codici Mathcad Mathcad è diventato un ambiente computazionale ampiamente usato tra gli ingegneri strutturali praticanti, grazie alla sua sintassi matematica naturale, alla gestione integrata delle unità e alla trasparenza dei calcoli.Per scopi illustrativi,

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

un'appendice dedicata di circa 160 pagine presenta soluzioni complete a numerosi problemi di esempio implementati in Mathcad, fornendo un ponte diretto tra lo sviluppo analitico e il calcolo professionale quotidiano.

AI Ciò che pensavo fosse il completamento di questo libro si è rivelato altrimenti, mentre mi sono avvicinato a quello che sembrava un progetto finale, i grandi modelli di lingua sono diventati disponibili e gradualmente si sono dimostrati di essere assistenti preziosi. Avrei potuto fermarmi molto prima, ma questi strumenti—ChatGPT (OpenAI) e Claude (Antropico)—ha fatto il mio senso di perfezionismo. Ogni nuova capacità mi ha tentato di perfezionare ulteriormente, verificare ancora una volta, lucidare un'altra sezione, rigenerare una tavola riassuntiva. Il risultato era che il progetto si estendeva circa due anni oltre a quello che avrebbe dovuto essere la sua conclusione naturale. Il lettore non dovrebbe, tuttavia, essere ingannato nel pensare che questo era un indumento senza sforzo o passivo.

Il manoscritto iniziale, compreso quasi tutto il libro La narrazione storica che contiene rappresenta anni di lettura delle fonti primarie e di accurata sintesi – lavoro svolto sostanzialmente prima di essere impegnato con questi strumenti. Quando ho iniziato a utilizzarli, è stato inizialmente solo per lucidare la prosa inglese e riempire le lacune minori. Presto è diventato evidente, tuttavia, che limitarmi a un utilizzo così modesto sarebbe stato un grave errore. Questi strumenti avevano capacità ben oltre la mera lucidatura; dovevo invece avagliare i fatti sommari.

Sul ruolo dell'IA in questo lavoro: Nel corso di questo progetto, l'assistenza AI non è mai stata una scorciatoia ma piuttosto un partner di dialogo strutturato per la verifica, la sintesi e la raffinatezza. Il mio flusso di lavoro tipico inizia con un progetto o un testo di seme, dopo di che in uno scambio disciplinato interviene l'IA: è il mio account che effettivamente è corretto?

Il mio impegno con diversi strumenti AI si è evoluto come il progetto è progredito. Ho iniziato con ChatGPT ma ho scoperto rapidamente che Claude eccelleva in compiti cerebrali – editing non rispettato, sintesi storica, dialogo studioso – ed è stato sostanzialmente superiore per la sintesi storica richiesta da Book I. Tuttavia, quando si completano le pagine finali dei Libri II-IV, ultimo modello di ChatGPT (Pro, generosamente fornito da mia figlia Sophie, che lavora all'OpenAI) si è rivelata immensamente superiore per la generazione di esempi numerici e la lucidatura degli aspetti meccanici del testo.

In più occasioni, ho deliberatamente giocato un AI contro l'altro come una strategia di verifica. Otterrei una risposta da uno strumento, quindi porre la stessa domanda o sfida all'altro, chiedendogli di valutare in modo indipendente o di controllare il primo risultato. Questa verifica incrociata si è rivelata inestimabile: Claude spesso avrebbe preso oversemplificazioni o salti logici nell'output di ChatGPT, mentre ChatGPT eccelleva nel rilevare i dettagli non soddisfatti quando Claude era stato sopra

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Per **Prenota I (Storia)**, il ruolo di Claude era strettamente limitato: chiarire i fatti storici e lucidare l'intero documento. Non ho mai permesso che generasse o ampliasse sostanzialmente il contenuto. Sono completamente mio.

Per **Libri II-IV (analisi strutturale)**, l'assistenza AI era allo stesso modo limitata e focalizzata. È stata utilizzata principalmente per perfezionare le derivazioni selezionate, colmare le lacune nella copertura teorica e generare esempi numerici per argomenti complessi. In tutti i casi, ho accuratamente esaminato l'output per proteggere contro affermazioni allucinate o overreach stilistico. Un logo AI appare in questi libri solo in due contesti specifici: quando una derivazione era AI-assisted o quando una sezione è stata scritta principalmente da parte da parte da parte di AI.

Si dica chiaramente una cosa: nel 2026, per aver rifiutato l'IA sarebbe stato un grave errore; non c'è virtù nel declinare uno strumento di questa portata e di questo potere—solo un senso sbagliato della purezza intellettuale che non serve né l'autore né il lettore.

Figure Ho dedicato meticolosa attenzione al layout e alla presentazione visiva, realizzando personalmente tutte le figure utilizzando vari strumenti, da Xfig su Unix a Visio su Windows, e autore dei programmi MATLAB presenti nell'appendice. Per il materiale storico del Libro I, ho spesso ridisegnato figure da fonti originali per migliorare la chiarezza o evidenziare i dettagli chiave.

Attraverso questo processo, ho apprezzato due intuizioni: prima, l'importanza fondamentale di produrre figure chiare, nitide e concise; e secondo, il valore pedagogico di ricreare figure personalmente, che approfondisce la comprensione dei concetti sottostanti. In questo senso, mi identifico di più con la sensibilità artistica di Vermeer – che valorizza profondità e dettaglio – che con il minimalismo di Mondrian.

Confesso di essere un po' ossessivo per le figure, ognuna di esse è stata accuratamente preparata per garantire la consistenza visiva, incluso l'uso di sfondi trasparenti in modo che le illustrazioni si meschino senza soluzione di continuità con il colore della pagina, piuttosto che insabbiare l'occhio con rettangoli bianchi.

VII. FONTI E ATTRIBUZIONE

Riferimenti Durante il libro I (History), ho volutamente fatto affidamento su fonti primarie per tutti i riferimenti, molti dei quali il lettore può scaricare cliccando sul logo rosso che segue la citazione – e ho evitato fonti secondarie, tranne dove erano veramente necessarie per una piena comprensione. Si noti che, laddove possibile, tutti i documenti sono stati elaborati da OCR e le loro dimensioni dei file compressi.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

 **Fotografie** Questo lavoro è concesso in licenza Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International È liberamente disponibile e non deriva alcun vantaggio finanziario dalla sua distribuzione.

Tutte le figure pubblicate prima del 1900 sono nel dominio pubblico, e le fotografie ottenute attraverso la ricerca di immagini di Google sono state, al meglio delle mie conoscenze, autorizzate per il riutilizzo non commerciale. Ho occasionalmente incluso immagini senza attribuzione completa—un compito che, fatto rigorosamente per centinaia di figure, avrebbe permesso a questo spirito di libertà tedioso. *uso equo* e data la natura non commerciale di questo lavoro. Se un qualsiasi oggetto di diritto, fornirà volentieri credito adeguato o rimuovere il materiale su richiesta.

 **Libri consultati**

I Libro I Per questo primo libro, sono molto in debito con Google Scholar, con la biblioteca dell'Università del Colorado (ILLIAD) e con la poco conosciuta HathiTrust Digital Library[6].

Molti dei documenti storici citati in questo lavoro sono disponibili per il download come file PDF. Quando una piccola icona PDF appare a destra di una citazione, facendo clic su di esso recupera una copia scansionata della fonte originale.I lettori sono fortemente incoraggiati a consultare questi riferimenti primari - offrono inestimabile intuizione sull'evoluzione di idee e metodi che hanno plasmato l'analisi strutturale, rivelando spesso sfumature e contesto che nessun account secondario può catturare pienamente.

La mia fluenza in francese, italiano e spagnolo ha notevolmente facilitato l'accesso a fonti che rimangono intranslate, mentre purtroppo la mia mancanza di latino e tedesco ha limitato il coinvolgimento diretto con alcuni testi fondamentali. Tuttavia, non ho esitato a includere e commentare numerose citazioni da fonti originali in tutto questo lavoro, permettendo ai lettori di incontrare in prima persona le voci delle figure storiche e fornendo una più profonda comprensione dello sviluppo delle idee presentate.

Libri II - IV I tre libri seguenti si disegnano principalmente dai miei lecture notes, comprendendo problemi risolti, tra cui esempi, compiti di lavoro a domicilio e esami, mentre questi materiali sono stati meticolosamente curati per mantenere il rigore appropriato, riferimenti aggiuntivi si sono rivelati essenziali.

Durante il processo di compilazione delle mie note e scrittura di questo libro, ho cercato *ispirazione* da numerosi testi che hanno influenzato la mia copertura teorica – spesso ampliata – e hanno guidato la selezione di esempi numerici, tra le fonti primarie (anche se non una lista esaustiva):

[6] HathiTrust è una collaborazione senza scopo di lucro fra biblioteche accademiche e di ricerca che conserva oltre 17 milioni di documenti digitalizzati. Offre l'accesso alla lettura nella misura massima consentita dalla normativa statunitense sul diritto d'autore, l'accesso computazionale all'intero corpus per la ricerca scientifica e altri servizi emergenti basati sulla raccolta combinata.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

- Billington, D. 1965. *Strutture in calcestruzzo sottile Shell*. Princeton University: McGraw-Hill, Inc.
- Billington, David P. e Robert Mark. 1970. *Ingegneria civile - Storia, Patrimonio e le scienze umane: documenti di sfondo della prima conferenza nazionale*. Princeton, NJ: Dipartimento di Ingegneria Civile, Princeton University.
- Gerstle, K. 1974. *Analisi strutturale di base*. McGraw-Hill. (Out of print.)
- Kinney, J. S. 1957. *Analisi strutturale indeterminata*. Addison-Wesley. (Out of print.)
- Norris, C. H. e J. H. Wilbur. 1960. *Analisi strutturale elementare*McGraw-Hill.
- Pilkey, W. D. e Wunderlich. 1994. *Meccanica delle strutture, dei metodi variabili e computazionali*. CRC Press.
- Przemieniecki, J. S. 1968. *Teoria dell'analisi strutturale di Matrix*. New York: McGraw-Hill. Ristampato da Courrier (ex Dover).

Ogni sforzo è stato fatto per fornire un credito adeguato in tutto questo lavoro. Se esiste un'omissione, sono del tutto involontario, e offro le mie sincere scuse per tali omissioni.

VIII. DISPONIBILITÀ E STATISTICHE

Perché è libero? Sul lato "fornire" della scrittura del libro, gli autori sono tipicamente guidati da due motivazioni: la ricompensa finanziaria e/o la soddisfazione personale – forse anche il riconoscimento – che deriva dal contribuire al proprio campo. In entrambi i casi, c'è una speranza che l'editore gestisca la redazione del testo, la disposizione della pagina e il marketing, le attività spesso al di là della competenza o dell'interesse dell'autore.

Siamo sinceri: nelle nostre discipline accademiche, pochissimi autori ricevono rettifiche sufficienti a coprire anche un volo transatlantico; e in questa fase della mia carriera, non sto cercando il riconoscimento che viene con l'essere un autore pubblicato, qualunque modesta fama possa aver guadagnato riposa sul lavoro già fatto.

Dal lato dell'11demand, studenti e lettori hanno assistito ai prezzi del libro che si alzano a livelli che deformano i budget personali e le acquisizioni di biblioteca.Gli editori rispondono con strategie intelligenti - la scrittura di libri o capitoli individuali per periodi limitati, molto come lo streaming di un film - ma questi non fanno poco per affrontare il problema fondamentale dell'accesso.

Come professori universitari, la nostra responsabilità è di acquisire e condividere le conoscenze. Siamo ragionevolmente compensati dalle nostre istituzioni per questa missione. Le maestose royalties offerte dagli editori non valgono semplicemente un affare Faustiano che pone il nostro lavoro dietro le pareti pagane e fuori dalla portata di coloro che ne hanno più bisogno.

Quindi, questo libro può essere liberamente scaricato e condiviso senza restrizioni, in linea con lo spirito di indagine accademica aperta.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Sito web Un'edizione dedicata website Oltre a servire come piattaforma primaria da cui è possibile scaricare il libro (e le relative note di lezione) il sito fornisce un forum per l'interazione con i lettori attraverso un blog. Questo spazio consente ai lettori di segnalare errori, porre domande, o offrire commenti e feedback.

In parallelo, sto prendendo in considerazione ulteriori iniziative: LaTeXML per generare una versione web-based del libro, organizzata dal capitolo;

Alcune statistiche Il la portata dell'impresa si riflette nel suo contenuto: circa 3,246 pagine, 68 capitoli distribuiti su quattro volumi (17, 22, 13, e 16 rispettivamente, 16 appendici, 451 sezioni, 300 esempi lavorati, 854 cifre, 187 tavoli, circa 3.000 equazioni, 908 citazioni, e 3,352 link di riferimento interconnessi —un testamento che disciplinato, paziente e precisa scelta di tipi possono raggiungere.

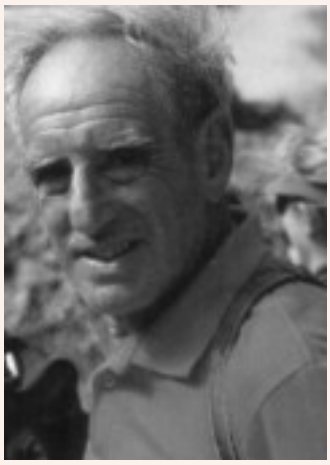
Victor E. Saouma Boulder, CO — Luglio 2026

COPIA DI REVISIONE

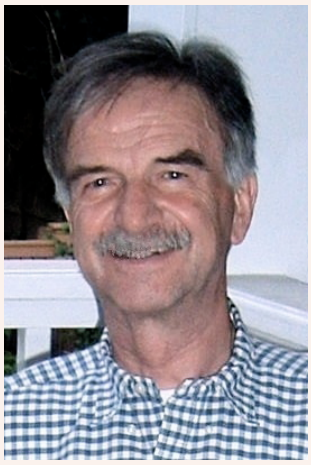
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Riconoscimenti

In primo luogo, la mia gratitudine è stata accolta da due colleghi eccezionali che, forse a loro non hanno avuto una profonda influenza su di me, il loro carattere personale notevole e le eccezionali realizzazioni professionali sono state una fonte costante di ispirazione.



Kurt Gerstle (1923-2013)



Kaspar Willam (1940–2024)

Antropico (2021–TBD)

OpenAI (2015–TBD)

Mentre Kurt e Kaspar hanno plasmato la mia comprensione dell'ingegneria strutturale e della meccanica attraverso decenni di confronto accademico, Claude si è dimostrato un collaboratore prezioso nel perfezionamento della narrazione storica del Libro I, offrendo un'assistenza instancabile nella sintesi delle ricerche, nella revisione editoriale e nelle occasionali verifiche della realtà, senza mai chiedere un congedo sabbatico né una cattedra.

Desidero inoltre ringraziare gli studenti, le cui numerose domande hanno talvolta offerto intuizioni inattese, e l'Università del Colorado per l'ambiente accademico che ha reso possibile questa lunga impresa.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Guida del lettore

- Questo libro è progettato intenzionalmente per la lettura digitale, non per la stampa, è meglio esperto in un computer, permettendo una navigazione senza interruzioni attraverso numerosi collegamenti ipertestuali e segnalibri per un'esperienza di lettura arricchita.
- È essenziale cominciare con la Prefazione, in quanto questo libro si diverte dal formato tipico e include caratteristiche uniche e intuizioni che vorrai capire fin dall'inizio.
- Questo libro non è per il lettore casual o un rapido sostituto per i manuali di analisi strutturale standard, ma è rivolto a coloro che cercano di andare oltre la copertura convenzionale e di routine.
- Per raggiungere un livello modestamente soddisfacente come ingegnere strutturale non è necessario questo libro. Un approccio tradizionale, completato da programmi informatici, è sufficiente.
- Tuttavia, se si desidera una comprensione più approfondita del comportamento strutturale prima di immergersi in analisi basate su computer, questo libro può aiutare come tutte le equazioni e i risultati sono derivati da principi di primo piano, garantendo uno sviluppo completo e trasparente di ogni concetto.
- Avere una solida comprensione della teoria, consentendo analisi rapide e affidabili delle mani "back-of-the-velope", può essere inestimabile prima di rivolgersi al computer.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Programma di scoperta degli errori

Come autore, capisco che nonostante il mio rigoroso montaggio, gli errori possono ancora esistere all'interno delle pagine di questo libro. *Programma di ricompenso per la scoperta di errori* per arruolare il vostro aiuto nell'identificazione di tali errori.

Se si verificano errori all'interno del testo:

- Storico nel libro I;
- Equazioni, cifre o dichiarazioni relative nei Libri II-IV,

Vi invito a sollevare questo punto nella sezione del blog del sito del libro

Per ogni errore che si identifica e si riferisce con successo a me, includo il tuo nome in questa pagina con l'errore scoperto. Inoltre, come segno di apprezzamento per la vostra diligenza, ti invierò un assegno di 1 USD per ogni errore verificato trovato.

Si prega di notare le seguenti linee guida per la partecipazione a questo *Programma di ricompenso per la scoperta di errori*:

- Gli errori devono essere sostanziali e genuini. Le affermazioni frivole o errate non saranno considerate.
- Per segnalare un errore, si prega di fornire informazioni dettagliate sulla sua posizione all'interno del libro e una breve spiegazione / giustificazione della natura dell'errore.
- È possibile inviare più rapporti di errore, ma ogni rapporto deve attenersi a un errore unico.
- Il file verrà aggiornato ogni mese nel primo anno, trimestre nel secondo anno, semestralmente nel terzo anno, e circa l'anno successivo.
- Questo programma è soggetto a modifiche o terminazioni a mia discrezione.

Errato

Data	Nome	email	Versione	Errore
4/4/2025	Trump, Donald	trump@maga.com	11 gennaio 2025	Equazione 2.5 in la stima della dimensione della folla

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Notazione

Ho fatto ogni sforzo per mantenere una notazione coerente in tutti i quattro libri, particolarmente impegnativo perché la notazione varia tra riferimenti introduttivi e avanzati, e gli autori spesso prendono libertà. Nonostante i miei sforzi, alcune discrepanze possono essere scivolate attraverso, ma dovrebbero essere riconoscibili al lettore astuto.

Nota: In più casi un tenore viene denotato[7] by *entrambi* faccia audace e/o entro parentesi quadrate (cioè. $\mathbf{K}$ [$\mathbf{K}$], $\{\delta\}$.

Analisi elastica lineare

Scalatori

A	Area
B	Matrice di spostamento di strane (cinematica)
C	Proseguimento (C^0, C^1)
E	Modulo elastico
G	Modulo di taglio
G_f	Energia frangitura
H	Forza orizzontale in cavi
	Indurimento o plastica modulo
I_e	Momento scalare dell'inerzia sull'asse e
J, I_{xx}	Momento polare dell'inerzia
K	Energia cinetica
L	Area Coordinata triangolare
M	Momento
N	Forza assiale
	Funzioni di forma
U	Energia di strane
U^*	Energia di deformazione complementare
U_0	Densità energetica interna
U_0^*	Densità energetica interna di ceppo
T	Temperatura
	Tensione (in cavo)
	Torsione
V	Forza di taglio
W	Lavoro
W_e	Lavori esterni
W_i	Lavoro interno

[7] Anche se questo chiaramente devia dalla notazione accettata, ho trovato utile sottolineare la natura vettoriale o matrica del tenore

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

$\mathcal{W}_e$ Potenziale di lavoro esterno
$\mathcal{W}_e^*$ Possibilità di lavoro esterno

f_c' Resistenza alla compressione
f_t' Resistenza alla trazione
q Carico distribuito
s Sag di un cavo
t Tempo
w Carico distribuito

Tenori

$\mathcal{A}$ Matrice di cinema
$\mathcal{B}$ Matrice statica
D Matrice costitutiva
FEMME Momenti fissi di fine
I Tensore dell'inerzia di secondo ordine
J Jacobian
K Stiffness nelle coordinate globali
M Momento (M_{zz}, M_{yy})
N Forza assiale (N_x)
NEF Forze equivalenti nodali
P Forze in coordinate globali
T Torsione (M_{xx})
V Forza di taglio (V_y, V_z)

b Forza corporea
Matrice di flessibilità
k Matrice di stiffness nelle coordinate locali
LM Matrice di posizione
n Unità vettoriale normale
p Forze in coordinate locali
t Trazione di superficie
u vettore di spostamento

Δ Soggetti nelle coordinate globali
Γ Matrice di trasformazione nelle coordinate globali

Γ_t Limite naturale (trazione nota)
Γ_u Limite essenziale (sostituto noto)
Φ Campo Scalare
Π Energia potenziale
Π^* Energia potenziale complementare
Ω Volume del corpo

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

α Coefficiente di espansione termica
$\boldsymbol{\delta}$ Scadenza nelle coordinate locali
$\boldsymbol{\varepsilon}$ Tenore di fragole
$\boldsymbol{\gamma}$ Matrice di trasformazione nelle coordinate locali
κ Numero di condizioni
κ Curvatura
λ Valore di esercizio
Lame è costante
μ Lame è costante
ν Rapporto di veleno
ρ Densità di massa
Radio di curvatura
$\boldsymbol{\sigma}$ Tenore di tensione
ω Frequenza angolare

Funzioni

$\mathcal{H}$ Ermiziano
$\mathcal{L}$ Lagrangian

Operatori

B Operatore lineare (mappa di spostamenti per estrarre)
$\mathbf{L}$ Operatore lineare (stress e ceppo)

Simboli di matematica

$\oint$ Linea integrale
$\mathbf{\nabla\cdot}$ Divergenza (div)
∇ Gradiente (grad)
[.] Matrice
∂ Partiale (derivato)
δ Operatore di variazione
{.} Vector (colonna)
⌊.⌋ Vettore (row)
$\delta\tilde{}$ Quantità virtuale

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Formulazione di elementi non lineari

Grandezze nodali

$\mathbf{P}_S^{int}$ Vettore della forza nodale interna
$\mathbf{P}_t^{ext}$ Vettore di forza nodale esterno a libero grado di libertà a livello strutturale
$\mathbf{P}_t^{int}$ Vettore interno di forza nodale a libero grado di libertà a livello strutturale
$\mathbf{P}_u^{int}$ Vettore interno della forza nodale a livelli di libertà vincolanti a livello strutturale
$\mathbf{P}_t^{R}$ Vettore di forza nodale residente a libero grado di libertà a livello strutturale
$\mathbf{u}_t$ Vettore di spostamento nodale a libero grado di libertà a livello strutturale
$\mathbf{F}_e$ vettore di forza nodale di elemento in riferimento globale; $\lfloor N_{X1},\ V_{Y1},\ M_{Z1},\ N_{X2},\ V_{Y2},\ M_{Z2} \rfloor^T$
$\mathbf{F}_e^{int}$ Elemento interno vettore forza nodale in riferimento globale
$\boldsymbol{\delta}_e$ vettore di spostamento nodale di elementi in riferimento globale; $\lfloor u_{X1},\ v_{Y1},\ \theta_{Z1},\ u_{X2},\ v_{Y2},\ \theta_{Z2} \rfloor^T$
$\overline{\mathbf{f}}_e$ Vettore di forza nodale di elemento in riferimento locale con modalità rigide del corpo; $\lfloor \overline{N}_{x1},\ \overline{V}_{y1},\ \overline{M}_{z1},\ \overline{N}_{x2},\ \overline{V}_{y2},\ \overline{M}_{z2} \rfloor^T$
$\overline{\mathbf{f}}_e^{int}$ Elemento interno vettoriale forza nodale in riferimento locale con modalità corpo rigido
$\overline{\mathbf{d}}_e$ Vettore di spostamento nodale elemento in riferimento locale con modalità rigide del corpo; $\lfloor \overline{u}_{x1},\ \overline{v}_{y1},\ \overline{\theta}_{z1},\ \overline{u}_{X2},\ \overline{v}_{Y2},\ \overline{\theta}_{Z2} \rfloor^T$
$\tilde{\mathbf{f}}_e$ Vettore di forza nodale elemento in riferimento locale senza modalità rigide del corpo; $\lfloor \tilde{M}_{z1},\ \tilde{M}_{z2},\ \tilde{N}_{x2} \rfloor^T$
$\tilde{\mathbf{f}}_e^{int}$ Elemento interno vettoriale forza nodale in riferimento locale senza rigide modalità corpo
$\tilde{\mathbf{f}}_e^{R}$ Vettore di forza nodale elemento residenziale in riferimento locale senza modalità rigide del corpo
$\tilde{\mathbf{d}}_e$ Vettore di spostamento nodale elemento in riferimento locale senza modalità rigide del corpo; $\lfloor \tilde{\theta}_{z1},\ \tilde{\theta}_{z2},\ \tilde{u}_{x2} \rfloor^T$
$\tilde{\mathbf{d}}_e^{R}$ Vettore di spostamento nodale elemento residenziale in riferimento locale senza modalità rigide del corpo
$\delta\overline{\mathbf{d}}_e$ Vettore di spostamento nodale elemento virtuale in riferimento locale

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese, potrebbero verificarsi errori.

Grandezze di sezione

$\mathbf{d}_s(x)$	vettore di spostamento della sezione; $\lfloor u(x),\ v(x) \rfloor^T$
Φ	Curvatura
$\boldsymbol{\sigma}_s(x)$	vettore di forza di sezione; $\lfloor N(x),\ M(x) \rfloor^T$
$\boldsymbol{\sigma}_s^{int}(x)$	Sezione interna
$\boldsymbol{\sigma}_s^{R}(x)$	vettore della forza della sezione residua
$\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$	Sezione vettori di deformazione; $\lfloor \varepsilon_x(x),\ \phi_z(x) \rfloor^T$
$\boldsymbol{\varepsilon}_s^{int}(x)$	Vettore di deformazione della sezione residua
$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$	Sezione virtuale disformazione vettoriale
κ	stress plastico

Quantitativi

σ	stress non assiale
ε	Ceppo uniassico
σ_r	stress non assiale di strato/fibra
ε_r	Ceppo uniassiale di strato/fibra

Matrici di rigidezza

$\mathbf{N}_d(x)$	Funzione di forma sul campo di spostamento
$\mathbf{B}_d(x)$	La matrice derivata dai derivati di $\mathbf{N}_d(x)$
$\mathbf{N}_f(x)$	Funzione di forma sul campo di forza
$\mathbf{K}_S$	Matrice di rigidità aumentata a livello strutturale
$\mathbf{K}_{tt}$	Matrice di stiffness associata condizioni di confine naturali
$\mathbf{K}_{tu}$	Matrice di stiffness associata condizioni di confine naturali ed essenziali
$\mathbf{K}_{ut}$	Matrice di stiffness associata condizioni essenziali e naturali
$\mathbf{K}_{uu}$	Matrice di stiffness associata condizioni di confine essenziali
$\mathbf{K}_e$	Matrice di rigidità degli elementi in riferimento globale
$\overline{\mathbf{k}}_e$	Matrice di rigidità degli elementi in riferimento locale con modalità rigide del corpo
$\overline{\mathbf{k}}_e^{tan}$	Matrice di rigidità tangente elemento in riferimento locale con modalità rigide corpo
$\tilde{\mathbf{k}}_e$	Matrice di rigidità degli elementi in riferimento locale senza modalità rigide del corpo
$\tilde{\mathbf{c}}_e$	Matrice di flessibilità degli elementi in riferimento locale senza modalità rigide del corpo
$\mathbf{k}_s(x)$	Matrice di rigidità della sezione
$\mathbf{k}_s^{tan}(x)$	Sezione tangente rigidità matrice
$\mathbf{c}_s(x)$	Matrice di flessibilità della sezione

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Varie

$E(x)$ Modulo elastico
$A(x)$ Sezione
$I_z(x)$ Momento di inerzia su area di sezione
L_e Lunghezza dell'elemento
$\mathbf{\Gamma}_e$ Matrice di trasformazione tra sistema di coordinate locale e globale
$\tilde{\mathbf{\Gamma}}_e$ Matrice di trasformazione tra modalità rigide del corpo e senza modalità rigide del corpo

Pedici

t Trazione conosciuta
u Sospeso noto
S Livello strutturale
e Livello di elemento o e^{th} elemento alla determinazione dello stato dell'elemento
r Livello di livello/fibra o r^{th} strato/fibra a livello/fibra di determinazione dello stato
s Livello di sezione o s^{th} sezione alla determinazione dello stato di sezione
d Campo di dislocamento
f Campo di forza
n Fase attuale del vettore di forza/spostamento esterno

Apici

int Interno
ext Esterno
R Residui
k k^{th} iterazione a livello strutturale
j j^{th} iterazione a livello di elemento

Modelli costitutivi non lineari

A_g area trasversale lorda
A_{st} zona trasversale di rinforzo dell'acciaio
b larghezza di sezione trasversale
c fattore di degrado isterico
E Il modulo di Young
$E_{adjusted}$ modello plasticità lumped, elemento elastico lineare regolato modulo elastico
E_{axial} elemento a zero-lunghezza, elastico a molla assiale (Young) modulus
E_{bp} modulo di ricarica punto di rottura
E_c post-capping (ammorbidimento a tendina) modulo
E_{hys} capacità energetica isterica ($= \gamma \sigma_y \varepsilon_y$)
E_i energia isterica dissipata durante l'escursione di carico "i" ($= \Delta\varepsilon[\sigma_{i-1} + \frac{1}{2}(\sigma_i - \sigma_{i-1}]$)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

E_s	modulo temprante
E_{shear}	elemento a zero-lunghezza, elastico a molla trasversale (Young's) modulus
E_t	modulo di ricarica di destinazione
E_{tan}	modulo tangente
E_u	modulo in alo
f'_c	resistenza alla compressione del calcestruzzo
F_y	forza di produzione
G	modulo di taglio
h	altezza sezione trasversale
$K_{adjusted}$	plasticità lumped modello, elastico lineare regolato rigidità iniziale
K_{BC}	colonna rigidità iniziale
$K_{combined}$	plasticità lumped modello, elastico lineare e plastica lumpeda combinata rigidità rotazionale iniziale
K_{deg}	elemento zero-lunghezza post-peak rigidità degradata
K_e	rigidità elastica iniziale
K_{linear}	plasticità lumped modello, elasticità lineare elemento di rigidità iniziale
K_{LP}	plasticità lumped modello, non lineare ratazionale elemento di rigidità iniziale
$K_{rotation}$	rigidità rotazionale iniziale
K_s	durezza del ceppo
K_{shear}	rigidità iniziale del taglio
K_{stiff}	Limite modello di stato, zero-lunghezza traswerse prima rigidità della molla
K^t_{deg}	rigidità degradata post-peak
K_{unload}	scarico della rigidità
L	lunghezza dell'elemento
M_r	manteggio residuo
M_u	momento finale (peak)
M_y	momento di rendimento
p	forza assiale
V_{fail}	forza di taglio al punto di guasto della cinghia
V_r	resistenza al taglio residuo
V_u	capacità di taglio
β	parametro di dissipazione isterica
γ	fattore di capacità energetica isterica ($E_{hys} = \gamma\sigma_y\varepsilon_y$)
$\gamma_{adjusted}$	modello di plasticità lumped, fattore di capacità isteretica calibrato
Δ_{BC}	colonna deformazione laterale
Δ_5	deformazione laterale interstoria al punto di guasto della cinghia come definito da Elwood &
Δ_{spring}	deformazione a molla a zero-lunghezza
Δ_y	sviamento dei rendimenti
ε_{10}	punto di inflessione tra scarico di stress negativo e positivo ricarica dello stress
ε_5	punto di inflessione tra scarico di stress positivo e negativo ricarica dello stress

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

ε_{bp}	ceppo di break-point
ε_r	Ceppo residuo
ε_t	sforzo al punto di ricarica target
ε_u	tensione al punto di picco
ε_y	ceppo di rendimento
θ_r	rotazione residua
θ_u	ultima rotazione (peak)
θ_y	rotazione del rendimento
κ_d	fattore di determinazione del punto di rottura (slocamento)
κ_f	fattore di stress (forza) di determinazione del punto di rottura
λ	fattore di resistenza residuo ($V_r = \lambda V_{fail}$)
ν	nominale resistenza alla cesoia (=V_u/A_g)
ρ''	razione di rinforzo trasversale (= A_{st}/bh)
σ_{bp}	stress break-point
σ_r	stress residuo
σ_{ref}	post-capping ramo riferimento stress
$\sigma_{ref,bp}$	determinazione del punto di rottura
σ_t	stress al punto di ricarica target
σ_u	stress finale (peak)
σ_y	stress da rendimento

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Nomenclatura

Concetti di base nell'analisi strutturale

Forza assiale: La forza che agisce lungo la lunghezza di un membro, causando tensione o compressione.

Momento flettente: Il momento interno che causa un membro di piegarsi.

Compatibilità: Condizioni che garantiscono continuità di deformazione su una struttura.

Deformazione: Cambiare forma o dimensione di una struttura a causa di carichi applicati.

Grado di libertà (GDL): Sviluppi indipendenti o rotazione possibile a un punto strutturale.

Equilibrio: Uno stato in cui tutte le forze e i momenti che agiscono su una struttura sono bilanciati.

Flessibilità: Inversa della rigidità, che rappresenta la facilità di deformazione.

Forza di taglio: Forza interna perpendicolare all'asse longitudinale di un membro, resistendo allo scorrimento.

Decisione statica: Una struttura le cui forze interne possono essere determinate utilizzando solo le equazioni di equilibrio.

Indeterminanza statica: Una struttura che richiede ulteriori equazioni di compatibilità da risolvere per le forze interne.

Rigidezza: Resistenza di una struttura o di un componente alla deformazione.

Deformazione unitaria: Deformazione per lunghezza unitaria in un materiale.

Tensione: Forza interna per area unitaria all'interno di un materiale.

Proprietà dei materiali e comportamento

Deformazione viscosa (creep): Deformazione dipendente dal tempo sotto costante stress.

Elasticità: Proprietà materiale che consente il recupero della forma originale dopo la rimozione dei carichi.

Degradazione materiale: Riduzione della resistenza o della rigidità del materiale dovuta all'invecchiamento o al caricamento ripetuto.

Plasticità: Comportamento materiale oltre il limite elastico, che comporta deformazioni permanenti.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Coefficiente di Poisson: Rapporto di ceppo laterale a sforzo assiale in un materiale sotto carico assiale.

L'espansione termica: Deformazione causata da variazioni di temperatura.

Resistenza ultima: Lo stress massimo che un materiale può sopportare prima del fallimento.

Tensione di snervamento: Tensione a cui un materiale passa da un comportamento elastico a quello plastico.

Modulo di Young: Misura della rigidità del materiale in elasticità lineare.

Standard e linee guida

AASHTO: Associazione americana di State Highway e Trasporti Ufficiali.

ACI 318: I "Costruire i requisiti di codice per il cemento strutturale" sviluppati dall'American Concrete Institute (ACI).

AISC: La specifica "American Institute of Steel Construction" .

ASCE 7: Caricamenti di progettazione minimi e Criteri associati per edifici e altre strutture.

ASCE 41: Lo standard "Valutazione Sismica e Retrofit degli Edifici esistenti".

Eurocodice 2: Standard europeo per strutture in cemento armato e prefornito.

Eurocodice 8: Standard europeo per la progettazione strutturale resistente al terremoto.

FEMA P-58: Una linea guida dell'Agenzia federale di gestione delle emergenze per la valutazione sismica basata sulle prestazioni.

IBC: Il "Codice Internazionale dell'Edifici", che fornisce linee guida di progettazione basate sulle prestazioni.

SEAOC Vision 2000: Un quadro per l'ingegneria sismica basata sulle prestazioni.

UBC: Il "Codice di costruzione uniforme", un modello storico codice di costruzione.

Analisi strutturale lineare

Spostamento: Lo spostamento verticale o orizzontale di un punto in una struttura.

Carico richiesto: Le forze laterali o spostamenti stimati che una struttura dovrebbe sperimentare durante un evento sismico, basato su un determinato movimento terra o obiettivo di prestazione.

Metodo degli elementi finiti (FEM): Metodo numerico per approssimare soluzioni a complessi problemi strutturali.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Analisi elastica lineare: Assume proporzionalità tra carichi e deformazione all'interno della gamma elastica.

Analisi di Matrice: Approccio computazionale con matrici per risolvere sistemi strutturali lineari.

Metodo di distribuzione dei momenti: Metodo iterativo per l'analisi di travi e cornici statically indeterminate.

Principio di sovrapposizione: Stati che la risposta combinata di un sistema è la somma di risposte individuali ai carichi.

Analisi non lineare

Non linearità geometrica: Arises quando grandi deformazioni causano cambiamenti nella geometria che influenzano la risposta della struttura.

Isteresi: dissipazione dell'energia durante il carico ciclico, spesso visto in sistemi non lineari.

Metodi iterativi: Tecniche come Newton-Raphson per la risoluzione di equazioni non lineari nell'analisi strutturale.

Dipendenza dal percorso di carico: Sistemi non lineari in cui la risposta dipende dalla sequenza dei carichi applicati.

Non linearità del materiale: Si occupa quando le relazioni tra stress e tensione deviano dalla linearità, ad esempio, plasticità o cracking.

Instabilità non lineare: Instabilità che si verificano in membri snelli sotto carichi assiali oltre il limite elastico.

Effetto P–Delta: Effetti secondari delle forze assiali sulla deformazione strutturale a causa dei cambiamenti nella geometria.

Comportamento degradante: Una riduzione della rigidità con crescente deformazione, tipica nelle strutture danneggiate.

Dinamica strutturale

Isolamento alla base: Tecnica per decouple una struttura dal movimento terra, riducendo le forze sismiche.

Smorzamento: Meccanismo di dissipazione dell'energia che riduce il movimento vibratorio.

Analisi dinamica: Valutazione della risposta strutturale in carichi di tempo.

Forma modale: Il modello di deformazione di una struttura in una particolare frequenza naturale.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Frequenza naturale: Frequenza in cui una struttura tende a vibrare liberamente.

Spettro di risposta: Graph che mostra la massima risposta strutturale su una gamma di frequenze naturali per un moto terra specifico.

Analisi nel dominio del tempo: Analisi dinamica utilizzando i record di movimento terra dettagliati come input.

Ingegneria del terremoto basata sulle prestazioni (PBEE)

tasso annuale di superamento (λ): Probabilità che il moto terra superi un determinato livello di intensità in un anno.

Curva della città: Un complotto che mostra il rapporto tra domanda strutturale (ad esempio, spostamento) e la parte inferiore applicata della cinghia o della forza.

Diagramma di Capacità: Una rappresentazione grafica della risposta non lineare di una struttura, che mostra spesso il comportamento di spostamento della forza.

Spettro di capacità: Una trasformazione della curva di capacità in coordinate spettrali, in genere confrontando la domanda strutturale con la domanda sismica.

Funzione di capienza: Una funzione matematica che descrive la resistenza strutturale come funzione di spostamento o deformazione.

Meccanismo di crollo: Il modo di fallimento di una struttura caratterizzata dalla formazione di cerniere di plastica sufficienti o modelli di deformazione, che portano ad una perdita di stabilità o capacità di carico-portante.

Spettro di risposta: Spettro di risposta che rappresenta le accelerazioni spettrali attesi a più periodi, condizionato su un'accelerazione spettrale di destinazione ad un determinato periodo.

Stato di Damage (DS): Categorizzazione dei danni strutturali a livelli, come minori, moderati, gravi o collassi.

Demand Curve: Rappresenta le richieste sismiche, tipicamente in termini di accelerazione spettrale e spostamento.

Motore di domanda di ingegneria: (EDP) Quantità di risposta misurabile (ad esempio, spostamento, accelerazione, sforzo) utilizzata per valutare le prestazioni di una struttura in condizioni di carico specificate.

Engineering Analisi dei rischi sismici (ESRA): Processo di quantificazione dei potenziali impatti del terremoto.

Curva di fragilità: Rappresentazione probabilistica della probabilità di superare uno stato di danno ad una misura di intensità data.

Equazione di previsione del moto del suolo (GMPE): Modello matematico che stima l'intensità del movimento terra prevista (ad esempio PGA, accelerazione spettrale)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

in un sito basato su magnitudine del terremoto, distanza, condizioni del sito e altri parametri.

Distanza centrale: Distanza linea retta da un sito all'ipocente (o messa a fuoco) di un terremoto, dove la rottura inizia all'interno della Terra.

Stato limite: La soglia oltre la quale una struttura non soddisfa più i criteri di prestazione.

Obiettivi di conformità: Desired risultati strutturali durante eventi sismici, come occupazione immediata, sicurezza della vita, o prevenzione del collapse.

Punto di prestazione: Intersezione delle curve di capacità e domanda, indicando le prestazioni previste sotto carico sismico.

Post-Earthquake Funzionalità: Capacità di una struttura di rimanere operativa o di tornare al servizio poco dopo un terremoto.

Analisi probabilistica della pericolosità sismica (PSHA): Metodo che incorpora incertezze per stimare le probabilità di rischio sismico.

Redundancy e Robustezza: Gli attributi strutturali assicurano la ridistribuzione del carico e la resistenza al fallimento durante gli eventi estremi.

Spettro di risposta: Trama che mostra la risposta di picco (ad esempio, accelerazione, velocità o spostamento) di una serie di oscillatori monogrado di libertà con periodi naturali variabili, sottoposti allo stesso movimento di terra.

Strategie di reintroduzione: Metodi per rafforzare o aggiornare le strutture esistenti per migliorare le prestazioni sismiche.

Curva di pericolosità sismica: Rapporto tra intensità del movimento terra e la sua probabilità annuale di superamento in un sito specifico.

Deaggregazione Sismica Hazard: Il processo di abbattere i risultati probabilistici di rischio sismico per identificare i contributi relativi di diversi scenari di terremoto (magnitudine, distanza e caratteristiche di sorgente) al pericolo in un sito specifico.

Mappe di pericolosità sismica: Rappresenta visivamente la distribuzione spaziale dei livelli di rischio del terremoto, per diversi livelli di probabilità in un determinato periodo di tempo.

Risilienza Sismica: Capacità di una struttura o di una comunità per recuperare rapidamente la funzionalità dopo un terremoto.

Modello di origine sismica: Distribuzione spaziale e temporale del potenziale terremoto.

Stato di limite di servizio (SLS): Garantisce che la struttura rimanga funzionale con deformazione limitata sotto carichi normali o terremoti minori.

Indice di vulnerabilità strutturale: Misura quantitativa della suscettibilità di una struttura ai danni sismici.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Target Hazard Spectrum: spettro di risposta derivato dall'analisi del rischio sismico utilizzata per selezionare o scalare i movimenti di terra.

Ultimate Stato limite (ULS): Previene il collasso o il fallimento catastrofico in gravi eventi sismici.

Spettro a pericolosità uniforme (UHS): Spettro di risposta che rappresenta le accelerazioni spettrali con la stessa probabilità di superamento in un dato sito, garantendo livelli di rischio costanti in diversi periodi strutturali.

Meccanismi falliti

Instabilità: Improbabile instabilità in un membro sotto carichi di compressione.

Fatica: Danni progressivi causati dal carico ciclico, che portano a guasto nel tempo.

Rottura flessionale: Mancanza dovuta alla flessione, spesso coinvolgendo la resa o la frattura di un membro.

Meccanica di frattura: Studio di propagazione della crepa e fallimento nei materiali.

Rottura a taglio: Modalità di guasto caratterizzata da scivolare lungo un aereo a causa di eccessivi stress di taglio.

Tecniche computazionali

Criteri di convergenza: Condizioni che assicurano che le soluzioni iterative raggiungano una precisione accettabile.

Metodo delle differenze finite (FDM): Approccio numerico per risolvere equazioni differenziali nell'analisi strutturale.

Stabilità numerica: Assurance che le soluzioni computazionali rimangono legate alle iterazioni.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Indice generale (I–IV)

Pagine preliminari i

Epigrafe . . . i
Avvertenza legale . . . ii
Nota sulla traduzione . . . iii
Dedicazione . . . iv
Prefazione . . . v
Prolegomeni . . . vi
Riconoscimenti . . . xxi
Guida del lettore . . . xxii
Programma di scoperta degli errori . . . xxiii
Notazione . . . xxiv
Nomenclatura . . . xxxii
Indice generale (I–IV) . . . xxxviii
Elenco delle figure (I–IV) . . . lxxxix
Elenco delle tabelle (I–IV) . . . cxv
Informazioni sull'autore . . . cxxii

I Fondamenti storici della meccanica e dell'analisi strutturale 1

Linea di tempo BCE **3**

Linea di tempo CE **4**

1 Introduzione **6**
1.1 L'importanza della storia dell'ingegneria strutturale . . . 6
1.2 Approccio e Intento . . . 7
1.3 Grande immagine . . . 8
1.3.1 Tematicamente . . . 8
1.3.2 Storicamente . . . 9
1.4 Riferimenti in modo chiaro . . . 10

2 Prima delle Strutture: Numeri e Lettere **12**

COPIA DI REVISIONE

2.1 Numeri . . . 12
2.1.1 Sistemi sessuali e duodecimali . . . 12
2.1.2 Angolo . . . 14
2.1.3 Tempo . . . 14
2.1.4 Sistema Decimale e Numeri indù-arabi . . . 15
2.1.5 La storia della π . . . 15
2.1.6 Numeri irrazionali e il rapporto d'oro . . . 16
2.2 Lettere: La storia dei sistemi di scrittura . . . 17
2.2.1 I primi dischi: Tokens, Tallies e Clay . . . 17
2.2.2 Cuneiform: il primo sistema di scrittura del mondo . . . 18
2.2.3 Geroglifi egiziani e la tradizione pittorica . . . 18
2.2.4 I Fenici e l'Invenzione dell'Alfabeto . . . 20

3 Civilizzazioni antiche **24**
3.1 Civilizzazioni e origini monumentali . . . 25
3.1.1 Mesopotamia: Ziggurats e Strutture in Argilla; c. 3100-500 BCE . . . 25
3.1.2 Mesoamerica: Piramidi Maya e Azteca; c. 400 BCE-1521 CE . . . 25
3.1.3 Egitto; c.~2700-1000 a.C. . . . 27
3.1.4 Mesopotamomico comparato, mesoamericano ed egiziano . . . 30
3.2 Antichità classica: Geometria, Teoria e Impero . . . 34
3.2.1 Persia: Piattaforme imperiali, Ponti, e Qanats . . . 34
3.2.2 Contributi arabi-islamici: innovazioni nell'ingegneria strutturale . . . 36
3.2.3 Contributi greci agli Statici e Meccanica strutturale . . . 37
3.2.4 Roma: Concrete, Arches e Infrastrutture . . . 41
3.2.4.1 Vitruvio: Il primo teorico strutturale . . . 43
3.3 Tradizioni matematiche e strutturali dell'India, della Cina e del Giappone . . . 45
3.3.1 Cina: Sessologia, Ponti e Innovazione Meccanica . . . 45
3.3.2 India: Matematica, Materiali e Architettura Monumentale . . . 46
3.3.3 Giappone: Resilienza Sismica e Strutture Adattative . . . 46
3.3.4 Sintesi e influenza globale . . . 47

4 Cattedrali gotici **49**
4.1 Introduzione . . . 49
4.2 Dalla Messa romanica allo Scheletro Gotico . . . 50
4.3 cattedrali gotiche: storia e logica strutturale . . . 50
4.3.1 Le pietre miliari storiche . . . 51
4.3.2 Terminologia essenziale e elementi strutturali . . . 52
4.3.3 La rivoluzione strutturale gotica . . . 54
4.3.4 Caratteristiche strutturali . . . 56
4.3.4.1 Esecuzione strutturale notevole . . . 57
4.3.4.2 Evoluzione dell'analisi strutturale . . . 58
4.4 Una storia di quattro cattedrali . . . 61
4.4.1 Cattedrale di Beauvais: uno studio di casi iconici in limiti strutturali . . . 61

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

4.4.2 Il Duomo di Milano: Geometria, Politica e Dibattito Strutturale 68
4.4.3 Basilica di San Pietro: dalla crisi all'analisi scientifica 73
4.4.4 Santa Maria del Fiore: Trionfo dell'Intuizione di Ingegneria Brunelleschi 77
4.5 Tavola sinottica 82

5 L'ascesa del pensiero scientifico 85
5.1 Introduzione 85
5.2 Islamico: Bayt al-Hikma 86
5.3 La rivoluzione scientifica 88
5.3.1 Fondazioni del Nuovo Metodo 88
5.3.1.1 La fine della filosofia naturale 88
5.3.1.2 Il ruolo della matematica e l'illuminismo 88
5.3.1.3 Francesco Bacon e la nascita dell'Empiricismo 88
5.3.1.4 Razionalismo: Approccio deduttivo di Cartesio 89
5.3.1.5 La trasformazione delle università 89
5.3.2 Scoperte rivoluzionarie e nuovi metodi 89
5.3.2.1 Astronomia osservazionale: Tycho Brahe 89
5.3.2.2 Astronomia matematica: Johannes Kepler 90
5.3.2.3 Dall'osservazione alla teoria: un modello per il progresso scientifico 90
5.3.2.4 Rivoluzione anatomica: Andreas Vesalius 91
5.3.2.5 Sistema circolatorio: William Harvey 91
5.3.2.6 Galileo: La lingua matematica della natura 91
5.3.3 Istituzioni scientifiche 92
5.3.3.1 Italia: I Lincei 92
5.3.3.2 Italia: La *Cimento* 92
5.3.4 Sintesi e istituzionalizzazione 93
5.3.4.1 Newton: La sintesi dei metodi 93
5.3.4.2 La Royal Society e la *Académie des Sciences* 93
5.3.4.3 Sperimentazione e teoria nella scienza moderna 94
5.4 Illuminismo: un ponte culturale 95
5.4.1 La diffusione del pensiero scientifico 96
5.4.2 L'ascesa dell'istruzione tecnica: le scuole di ingegneria militare 96
5.4.3 Dalla filosofia naturale alla scienza applicata 96
5.5 Conclusioni 97

Interludio I: Dalla filosofia naturale alla Meccanica analitica 100

6 Il Pantheon 101
6.1 Introduzione 102
6.2 Filosofia, Geometria e Statici primi 104
6.2.1 Mozi (c. 470–391 a.C.) 104
6.2.2 Aristotele (384–322 a.C.) 105
6.2.3 Euclid (c. 300 a.C.) 106

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

6.2.4 Archimedes (c. 287–212 a.C.) . . . 107
6.2.5 Apollonio di Perga (c. 262–190 a.C.) . . . 108
6.3 Ingegneria, macchine e trasmissione della conoscenza . . . 109
6.3.1 Marco Vitruvio Pollio, c. 80–70 a.C. – dopo il 15 a.C.) . . . 109
6.3.2 Eroe di Alessandria (fl. c. 62 CE) . . . 110
6.3.3 Ibn al-Haytham (c. 965–1040 CE) . . . 111
6.3.4 Abu Rayhan al-Biruni (973–1048) . . . 112
6.3.5 Al-Khazini (fl. 1115–1130 CE) . . . 113
6.3.6 Villard de Honnecourt (fl. c. 1225–1250) . . . 114
6.4 Architettura, Proporzione e Forma Umanista . . . 115
6.4.1 Leon Battista Alberti (1404-1472) . . . 115
6.4.2 Leonardo da Vinci (1452–1519) . . . 116
6.4.3 Andrea Palladio (1508–1580) . . . 127
6.4.4 Sebastiano Serlio (1475–1554) . . . 128
6.4.5 Giacomo Barozzi da Vignola (1507–1573) . . . 128
6.4.6 Hubert Gautier (1660–1737) . . . 129
6.4.6.1 Jean-Rodolphe Perronet . . . 135
6.4.6.2 La transizione dalla proporzione all'esperienza . . . 136
6.5 Dall'Ordine Matematico alla Meccanica . . . 137
6.5.1 Francesco Bacon (1561–1626) . . . 138
6.5.2 Nicolaus Copernicus (1473–1543) . . . 139
6.6 Dal Proto-Statics alla Rivoluzione Scientifica . . . 140
6.6.1 Simon Stevin (1548–1620) . . . 140
6.6.2 Galileo Galilei (1564–1642) . . . 141
6.6.3 René Descartes (1596–1650) . . . 148
6.6.4 Christiaan Huygens (1623–1695) . . . 149
6.6.5 Blaise Pascal (1623–1662) . . . 151
6.6.6 Robert Hooke (1635–1703) . . . 152
6.6.7 Isaac Newton (1642–1727) . . . 159
6.6.8 Gottfried Leibniz (1646–1716) . . . 165
6.6.9 Famiglia Bernoulli (1654–1782) . . . 168
6.6.9.1 Jakob Bernoulli (1654–1705) . . . 169
6.6.9.2 Johann Bernoulli (1667–1748) . . . 172
6.6.9.3 Intermedio *Opera Omnia* . . . 172
6.6.9.4 Daniel Bernoulli (1700–1782) . . . 172
6.6.10 Leonhard Euler (1707–1783) . . . 175
6.7 Dalla meccanica analitica alla teoria strutturale e del continuo . . . 181
6.7.1 Charles-Augustin de Coulomb (1736–1806) . . . 181
6.7.2 Simmon Simsésu Denis Poisson (1781–1840) . . . 183
6.7.3 Claude Louis Marie Henri Navier (1785–1836) . . . 184
6.7.4 Jean le Rond d'Alembert (1717–1783) . . . 190
6.7.5 Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) . . . 191

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

6.7.6 Cauchy (Augustin-Louis 1789–1857) . . . 192
6.7.7 George Green (1793–1841) . . . 193
6.7.8 - No.Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797–1886) . . . 194
6.8 L'ascesa dell'ingegneria strutturale come disciplina . . . 196
6.8.1 Karl Culmann (1821-1881) . . . 196
6.8.2 William John Macquorn Rankine (1820-1872) . . . 197
6.8.3 Christian Otto Mohr (1835-1918) . . . 198
6.8.4 Henry Moseley (1801–1872) . . . 200
6.8.5 James Clerk Maxwell (1831–1879) . . . 200
6.9 Le principali storie della Meccanica . . . 202
6.9.1 Isaac Todhunter (1820–1884) . . . 202
6.9.2 Stephen Prokofievich Timoshenko (1878–1972) . . . 203
6.9.3 René Dugas (1897-1957) . . . 204
6.9.4 Clifford Ambrose Truesdell III (1919-2000) . . . 204
6.10 Donne notevoli . . . 206
6.11 Analisi e contesto . . . 207
6.11.1 Concorrenza, Segreteria e Progressi Scientifici . . . 207
6.11.1.1 Metodi di occultamento . . . 207
6.11.1.2 Controversie e loro impatti . . . 214
6.11.2 La transizione alla scienza dell'ingegneria moderna . . . 216
6.11.3 La rivoluzione francese nell'educazione ingegneristica . . . 216
6.12 Conclusione: Dalla filosofia naturale alla scienza dell'ingegneria . . . 217
6.12.1 Tavole di sintesi . . . 218
6.12.1.1 Principali Contributori e loro influenza . . . 219
6.12.1.2 Pubblicazioni . . . 221
6.12.1.3 Istituzioni di formazione . . . 224
6.12.1.4 Principali controversie intellettuale . . . 224
6.12.1.5 Scadenza storica . . . 225

Interludio II: Dalle intuizioni medievali alla Meccanica strutturale moderna: (1351-1879) 230

7 Forza, asse neutro e stringhe flessibili 235
7.1 Introduzione . . . 236
7.2 Forza . . . 236
7.2.1 Leonardo (Libera)≃ 1490) . . . 236
7.2.2 Galileo (1564-1642) . . . 237
7.2.3 Beeckman (1588-1637) . . . 238
7.2.4 Musschenbroek (1692–1761) . . . 239
7.3 Interno Flexural Stresses: Uno studio in tre atti . . . 240
7.3.1 Atto I: Lignaggio empirico . . . 241
7.3.1.1 Leonardo (Libera)≃ 1490) . . . 242
7.3.1.2 Galileo (1632) . . . 244

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

7.3.2 Atto II: tradizione empirica del continuo . . . 247
7.3.2.1 Cartesio (1644) . . . 247
7.3.2.2 Leibniz (1684) . . . 248
7.3.2.3 Mariotte (1686) . . . 250
7.3.2.4 Parent (1713) . . . 252
7.3.2.5 Coulomb (1773) . . . 252
7.3.2.6 Giovane (1807) . . . 256
7.3.2.7 Saint-Venant (1855) . . . 258
7.3.2.8 Clebsch (1862) . . . 259
7.3.2.9 Saint-Venant (1866) . . . 259
7.3.3 Atto III: Lignaggio analitico . . . 260
7.3.3.1 Jakob Bernoulli (1687) . . . 260
7.3.3.2 Euler (1727) . . . 261
7.4 Sintesi . . . 264
7.5 Transizione . . . 266

8 Geometria differenziale delle curve 268
8.1 Introduzione: origini geometriche della curvatura e dell'elastica . . . 269
8.2 Curvatura . . . 269
8.2.1 Oresme (1351) . . . 271
8.2.2 Newton (1671) . . . 272
8.2.3 Leibniz (1686) . . . 274
8.2.4 Johann Bernoulli (1691) . . . 275
8.2.5 Jakob Bernoulli; Theorem d'oro (1694) . . . 277
8.2.6 Kästner (1758) . . . 281
8.2.7 Sintesi . . . 282
8.3 Evoluto/Involuto . . . 283
8.3.1 Huygens (1658-1673) . . . 284
8.3.2 Limitazioni pratiche e Legacy . . . 286
8.3.3 Riferimenti conclusivi . . . 286
8.4 Dalle curve geometriche alla meccanica strutturale . . . 288
8.5 Attendere con ansia: . . . 290

9 Le grandi sfide: Catenario, Elastica e la nascita della Meccanica analitica 292
9.1 Fondazioni matematiche: dalla geometria al calcio . . . 293
9.1.1 La Legacy greca: da Euclide alla Divide geometrica-meccanica . . . 293
9.1.2 Rivoluzione di Cartesio: Coordinate e Algebra . . . 294
9.1.3 La rivoluzione del Calcolo . . . 294
9.1.4 Da Curve a Meccanica: Il Ponte . . . 296
9.1.5 La trasformazione completa . . . 296
9.1.6 Notazione matematica . . . 297
9.2 La sfida del Catenary (maggio 1690-giugno 1691) . . . 297
9.2.1 Studi precoci . . . 298

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

9.2.1.1 Leonardo . . . 298
9.2.1.2 Galileo . . . 299
9.2.1.3 Stevin; (1634) . . . 299
9.2.1.4 Huygens (c. 1646) . . . 300
9.2.2 Sfide . . . 302
9.2.2.1 Interludio: terminologia . . . 302
9.2.2.2 Jakob Bernoulli's *Funicolare* sfida; 1690 . . . 302
9.2.2.3 La risposta di Leibniz e la modifica della sfida: fine del 1690 . 304
9.2.3 Le tre principali soluzioni . . . 305
9.2.3.1 Johann Bernoulli; (ammessi dicembre 1690, pubblicato giugno 1691) . . . 305
9.2.3.2 Huygens; (ammessi ottobre 1690, pubblicato maggio 1691) . . 306
9.2.3.3 Leibniz; (ammessi maggio 1691, pubblicato giugno 1691) . . . 308
9.2.3.4 Pubblicazione e Risoluzione finale; giugno 1691 . . . 309
9.2.3.5 Analisi post-pubblicazione e Legacy . . . 310
9.2.4 Epiloga . . . 312
9.2.4.1 Unificazione dimenticata . . . 312
9.2.4.2 La Lega della Matematica . . . 312
9.2.4.3 Paradosso di Jakob . . . 313
9.3 La sfida elastica (1690-1744) . . . 313
9.3.1 La sfida di Jakob Bernoulli (1690) . . . 313
9.3.2 Soluzioni . . . 318
9.3.2.1 La soluzione di Jakob Bernoulli (1694) . . . 319
9.3.2.1.1 Reazione da Huygen (1694) . . . 324
9.3.2.1.2 Interludi . . . 325
9.3.2.1.2.1 Leibniz's *Vis Viva* e l'evoluzione dei concetti energetici . . . 326
9.3.2.1.2.2 La sfida del Brachistochrone (1696) . . . 328
9.3.2.1.2.3 La soluzione di Johann Bernoulli (1697) . . . 331
9.3.2.1.2.4 La soluzione di Daniel Bernoulli (1742) . . . 335
9.3.2.1.2.5 Problemi isoperimetrici vs. Calcolo delle variazioni . . . 338
9.3.2.2 La soluzione di Euler (Calcolo delle Variazioni) (1744) . . . 339
9.3.2.2.1 Classificazione delle specie elastiche . . . 346
9.3.2.3 Il moderno quadro Variational . . . 357
9.3.3 Riepilogo cronologico delle prime due sfide . . . 360
9.4 An Anonymous Challenge: un ponte tra i problemi (1724) . . . 361
9.4.1 La collaborazione di Bernoulli-Euler: prima unificazione (1728) . . . 363
9.4.1.1 Daniel Bernoulli (Establishing the Moment-Curvature Principle) 1728 . . . 363
9.4.1.2 Euler (dall'ottica geometrica alla rivoluzione matematica) (1732) 365
9.4.1.3 Teoria Euler-Bernoulli . . . 370

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

9.5 Teoria di chiusura: dall'osservazione ai carichi critici . . . 373
9.5.1 Lavoro prematuro . . . 373
9.5.1.1 Leonardo (ca. 1490s) . . . 373
9.5.1.2 Pieter van Musschenbroek (1729) . . . 375
9.5.2 Euler(1759) . . . 375
9.6 Teoria Generale di Euler: Unificazione Completa (1771) . . . 380
9.7 Conclusioni . . . 384

10 Meccanica del continuo: fondamenti dell'analisi strutturale 392
10.1 Molecolare molecolare *vs* Teorie di elasticità . . . 393
10.1.1 Panoramica . . . 394
10.1.2 Da Galileo alla Scuola Molecolare Francese . . . 394
10.1.3 L'ascesa dell'approccio continuo . . . 395
10.1.4 Tabella di confronto . . . 396
10.1.5 Quale teoria ha prevalso? . . . 396
10.1.6 Riferimenti storici . . . 397
10.2 Meccanica del continuum . . . 399
10.3 Introduzione . . . 400
10.3.1 Rivoluzioni francesi e la nascita di una moderna elasticità . . . 400
10.3.2 Fondamenti di Meccanica e Teoria di Elasticità . . . 400
10.3.2.1 Coulomb (1736-1806) e la Fondazione Ingegneria . . . 400
10.3.2.2 Lagrange (1736-1813) e la Fondazione analitica . . . 402
10.3.2.3 Metodi matematici di Fourier(1768-1830) . . . 402
10.3.2.4 Cauchy (1789-1857) e il concetto di stress . . . 403
10.3.2.5 Rapporto di Poisson (1781-1840) e semplificazione di Cauchy 407
10.3.2.6 Navier's (1785-1836) Sintesi e applicazione . . . 408
10.3.2.7 Lamé's (1795-1870) Costanti elastici . . . 409
10.3.2.8 Saint-Venant (1797-1886) e il metodo semi-inverso . . . 409
10.3.2.9 Metodi energetici di Clapeyron (1799-1864) . . . 410
10.3.2.10 Il successo francese in prospettiva . . . 411
10.4 Il quadro matematico completo . . . 412
10.4.1 Euler e la Conservazione della Messa . . . 412
10.4.2 Cauchy (1789-1857) e il bilanciamento del moto lineare . . . 413
10.4.3 Bilancia del Momento angolare . . . 413
10.4.4 Clausius (1822-1888), Thomson (1824-1907), e Duhem (1861-1916) Leggi termodinamiche . . . 414
10.4.4.1 Prima legge (Energy Balance): . . . 414
10.4.5 Seconda Legge (Diseguaglianza intropia): . . . 415
10.4.6 Sviluppo storico e Sintesi moderna . . . 415
10.5 Teoria costitutiva: comportamento materiale . . . 416
10.5.1 Il quadro generale . . . 416
10.5.2 Noll (1925-2017) e l'oggettività: Il principio dell'indifferenza della struttura dei materiali . . . 417

COPIA DI REVISIONE

10.5.3 Verde (1793-1841) e Iperelasticità . . . 418
10.5.4 Voigt (1850-1919) e simmetria dei materiali . . . 419
10.5.5 Coleman (1930-1992) e Noll: Restrizioni termodinamiche . . . 419
10.5.6 Prospettiva storica: dall'empiricismo alla teoria . . . 420
10.5.7 Connessione all'analisi strutturale . . . 421
10.5.8 Che cosa c'è in un nome? L'evoluzione della Meccanica e dei suoi praticanti . . . 421
10.5.8.1 L'identità mutante dell'analista strutturale . . . 422
10.5.8.2 Dall'identità professionale ai contenuti disciplinari . . . 424
10.5.8.3 Il paesaggio disciplinare oggi . . . 427
10.5.8.4 Convenzioni e relazioni terminologiche . . . 428
10.5.8.5 Convenzioni adottate in questo libro . . . 428
10.6 Conclusioni . . . 429

11 L'analisi strutturale: sintesi e applicazione 432
11.1 Introduzione . . . 433
11.2 Ingegneria strutturale, etimologia . . . 434
11.3 Sviluppo precoce: fasci di indeterminamento statica . . . 436
11.3.1 Navier (1785–1836): Il primo trattamento sistemico . . . 436
11.3.2 Clapeyron (1799–1864): L'Equazione dei Tre Momenti . . . 437
11.4 Trasmissione ai metodi generali . . . 437
11.4.1 Maxwell (1831–1879): Il teorema reciproco . . . 438
11.4.2 Mohr (1835-1918): Metodi geometrici e analogici . . . 438
11.4.3 Castigliano (1847–1884): Metodi energetici . . . 439
11.4.4 Müller-Breslau (1851-1925): Linee di sistematizzazione e influenza . . . 440
11.4.5 Il metodo della Forza: Compatibilità e Flessibilità . . . 441
11.4.6 Concetti e procedure fondamentali . . . 441
11.4.7 Il metodo della Forza: Riepilogo e Legacy . . . 443
11.5 Il metodo di spostamento: dalla teoria alla pratica . . . 443
11.5.1 Fondazioni teoriche: Formulazioni di prima stiffness . . . 444
11.5.2 Metodo di riduzione della pendenza: Formulazione sistemica . . . 445
11.5.3 Hardy Cross (1885–1959): Il metodo di distribuzione del momento . . . 446
11.5.4 Prolungamenti e Variazioni . . . 449
11.5.5 Il metodo di spostamento: Riepilogo e Legacy . . . 451
11.6 Linee di influenza e carichi mobili . . . 451
11.6.1 Winkler (1835–1888): Sviluppo precoce . . . 451
11.6.2 Principio di Müller-Breslau . . . 452
11.6.3 Applicazioni e Legacy . . . 452
11.7 Verso la Formulazione Matrix: Il Ponte Concettuale alla Computazione . . . 452
11.7.1 La struttura matrice dei metodi classici . . . 453
11.7.2 Dall'itterazione alla soluzione Matrix . . . 453
11.7.3 I limiti della calcolatore della mano: Impostazione della fase per la computazione . . . 454

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

11.7.4 Conclusione: Prosecuzione e Trasformazione . . . 454
11.8 Requisiti fondamentali dell'analisi strutturale . . . 455
11.9 Riassunto cronologico dei contributori . . . 458
11.9.1 Conclusioni . . . 460

12 Metodi computazionali **463**
12.1 Metodi di Differenze Finite per Continua . . . 464
12.1.1 Pearson e Richardson: Analisi della Stress di Dam (1905–1911) . . . 464
12.1.2 Metodi di soluzione iterativa . . . 466
12.2 Analisi strutturale della matrice . . . 467
12.2.1 Kron: Analisi della rete e Analogie strutturali . . . 467
12.2.2 Johann H. Argyris (1913-2004) . . . 467
12.2.3 L'Aerospaziale (Ali d'Ali) Contesto: 1950 . . . 468
12.2.4 NBS/Navy; Samuel Levy . . . 469
12.2.5 Boeing; Turner e il metodo diretto di stiffness . . . 471
12.2.5.1 Flessibilità contro la stanchezza: un dibattito continuo . . . 473
12.3 Il metodo degli elementi finiti . . . 474
12.3.1 Fondazioni matematiche . . . 475
12.3.2 Priorità e Terminologia: Che cosa è (e non è) il metodo degli elementi finiti . . . 479
12.3.3 Ray Clough (1920-2016) . . . 479
12.3.4 Il computer e il programma di Berkeley . . . 480
12.3.5 Norfork Dam: la prima domanda principale . . . 481
12.3.6 Analisi non lineare e dinamica (1960-1962) . . . 482
12.4 Consolidamento e Disseminazione . . . 483
12.4.1 Oleg Zienkiewicz (1921-2009) . . . 483
12.4.2 La conferenza di Wright-Patterson (1965) . . . 484
12.4.3 Richard Gallagher (1927-1997) . . . 484
12.4.4 Metodo di forza Versus Stiffness Metodo Dibattito . . . 484
12.4.5 La decisione NASTRAN (1969) . . . 485
12.4.6 Generalizzazione . . . 486
12.4.7 Libri di testo e Adozione in tutto il mondo . . . 486
12.4.8 Impatto e applicazioni attuali . . . 487
12.5 Riepilogo e contributi chiave . . . 488
12.6 Conclusioni . . . 490

13 Dall'abaco agli algoritmi: storia del calcolo nella scienza e nell'ingegneria **492**
13.1 Introduzione . . . 493
13.2 Dispositivi antico e primitivi computazionali . . . 493
13.3 Automata meccanica e macchine di calcolo anticipate . . . 495
13.4 Babbage e Lovelace: Origini concettuali della programmazione . . . 497
13.5 Calcolo scientifico analogico (1900–1945) . . . 498
13.6 La rivoluzione digitale (1945-1960) . . . 499

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

13.7 Lingue di programmazione e software scientifico precoce . . . 500
13.8 Timeline delle principali evoluzioni computazionali . . . 501
13.9 Software di ingegneria e strutturale (1960-1980) . . . 501
13.10 L'era del PC e l'espansione della ingegneria computing (1980-2000) . . . 502
13.11 Ecosistemi computazionali moderni (2000-Present) . . . 503
13.12 Evoluzione della Scrittura Tecnica e del Reporting . . . 504
13.13 Conclusioni . . . 506

14 L'evoluzione della forza e i principi virtuali 508
14.1 Introduzione . . . 509
14.2 Antichità e il Divino . . . 511
14.2.1 Egitto . . . 511
14.2.2 Mesopotamia . . . 512
14.2.3 India . . . 513
14.3 Antichità classica e filosofia naturale . . . 514
14.3.1 Greci . . . 514
14.3.1.1 Empedocle (494-434 a.C.) . . . 514
14.3.1.2 Platone (427-348 a.C.) . . . 515
14.3.1.3 Aristotele (384-322 a.C.) . . . 517
14.3.1.4 Archimede (287–212 a.C.): La dimostrazione di "What"" . . . 518
14.3.1.5 Posidonio (135-51 a.C.) e la Stoica . . . 520
14.3.2 Romani, Plotino (204–270) . . . 521
14.3.3 Bizantino, Filoposio (490–570) . . . 522
14.4 Periodo medievale e sciolasticismo . . . 523
14.4.1 Gli studiosi islamici . . . 523
14.4.1.1 Avicenna (980–1037) . . . 523
14.4.1.2 Baghdadi (1080–1165) . . . 524
14.4.2 Giordania di Nemore (ca 1225-ca1260) e gravità posizionale . . . 524
14.4.3 Medioevo: Università di Parigi . . . 524
14.4.3.1 Buridan (1295-1358) . . . 525
14.4.3.2 Oresme (1320-1382) . . . 526
14.5 Rinascimento e rivoluzione scientifica . . . 527
14.5.1 Leonardo da Vinci (1452-1519) . . . 527
14.5.2 Benedetti (1530–1590) . . . 528
14.5.3 Pardie (1636–1673) . . . 529
14.5.4 Simon Stevin (1548–1620) . . . 529
14.5.5 Galileo (1564-1642) . . . 533
14.5.6 Keplero (1571–1630) . . . 537
14.5.7 Cartesio (1596–1650) . . . 539
14.5.8 Torricelli (1608–1647) . . . 545
14.5.9 Wallis (1616–1703) . . . 547
14.5.10 Lebniz (1646–1716) . . . 548
14.5.11 Newton (1642–1726) . . . 549

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

14.5.12Bernoulli, Daniel (1700-1782) . . . 551
14.5.13Lettera di Johann Bernoulli del 1715 . . . 552
14.5.14Varignon (1654–1722) . . . 555
14.5.15D'Alembert (1717–1783) . . . 556
14.5.16Kant (1724-1804) . . . 561
14.5.17Lagrange (1736–1813) . . . 562
14.5.18Fourier (1768–1830) . . . 565
14.5.19Carnot Lazare (1753–1823) . . . 566
14.6 Epiloga . . . 568
14.7 Conclusioni . . . 568

Interlude III: Dove la Borsa di Studio incontra la Passione **572**

15 Architettura & Struttura **573**
15.1 Introduzione . . . 574
15.1.1 Organizzazione del capitolo . . . 575
15.2 La tradizione vitruviana . . . 576
15.2.1 Marcus Vitruvius Pollio: il primo influenzatore architettonico . . . 576
15.2.1.1 Vitruvio sull'educazione . . . 576
15.2.1.2 Vitruvius l'Ingegnere . . . 577
15.2.1.3 Vitruvius l'architetto: la triade duratura . . . 581
15.2.1.4 Vitruvio sugli atleti contro gli studiosi . . . 583
15.2.2 Vitruvio riscoperto durante il Rinascimento . . . 584
15.2.2.1 Leon Battista Alberti (1404–1472) . . . 585
15.2.2.2 Andrea Palladio (1508–1580) . . . 586
15.2.2.3 Il riordino della Triade . . . 588
15.2.2.4 Alberti e Palladio come Ingegneri . . . 588
15.2.3 Antropometria e questione della scala . . . 591
15.2.3.1 Vitruvio: Il testo Fondamentale . . . 592
15.2.3.2 Trasmissione medievale . . . 592
15.2.3.3 Il risveglio rinascimentale . . . 593
15.2.3.4 Il Novecento: Modulor & Charles-Édouard Jeanneret Le Corbusier (1887-1965) . . . 593
15.2.3.5 Dalla Proporzione all'Ergonomia . . . 597
15.2.3.6 L'Assunzione Nascosta: Indipendenza della Scala . . . 597
15.2.3.7 Geometria Operativa: Come i costruttori di Master hanno effettivamente attraversato i loro edifici . . . 598
15.3 Interludio: Architetti e Ingegneri — Arte e Scienza? . . . 604
15.4 I pionieri . . . 606
15.4.1 La Butterss volante: Logica strutturale resa visibile . . . 607
15.4.2 Gustave Eiffel (1832-1923) . . . 610
15.4.3 Louis Henri Sullivan (1856-1924) . . . 613
15.4.4 Robert Maillart (1872-1940) . . . 614

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

15.4.5 Auguste Perret (1874-1954) . . . 616
15.4.6 Eduardo Torroja Miret (1899–1961) . . . 617
15.4.7 Pier Luigi Nervi (1891-1979) . . . 620
15.4.8 Riccardo Morandi (1902-1989) . . . 627
15.4.9 Christian Menn (1927-2018) . . . 629
15.4.10 Fazlur Rahman Khan (1929-1982) . . . 629
15.4.11 I Progettisti confrontati: Designer-Builders e i loro materiali . . . 633
15.4.11.1 Eiffel e metallo . . . 634
15.4.11.2 Nervi e Ferrocement . . . 634
15.4.11.3 Roebling e cavi . . . 634
15.4.11.4 Filetti comuni . . . 634
15.5 Morfiogenesi strutturale: figure chiave . . . 635
15.5.1 Catenary . . . 635
15.5.1.1 Poleni (1683–1761) . . . 636
15.5.1.2 Antoni Gaudí (1852-1926) . . . 636
15.5.1.3 Eero Saarinen (1910–1961) . . . 637
15.5.2 Conchiglie e Membrane . . . 638
15.5.2.1 Frei Paul Otto (1925-2015) . . . 639
15.5.2.2 Heinz Isler (1926-2009) . . . 639
15.5.2.3 Sergio Musmeci (1926-1981) . . . 640
15.5.3 Strutture reciproche . . . 641
15.5.3.1 Sviluppo storico . . . 642
15.5.3.2 Rivivalanza moderna . . . 643
15.5.4 Ottimizzazione matematica: Maxwell, Michell, Baker e Beghini . . . 645
15.5.4.1 Maxwell (1831-1879) . . . 645
15.5.4.2 Michell (1870-1959) . . . 646
15.5.4.3 Baker e Beghini . . . 648
15.5.5 Coda: Quando architetti e ingegneri sono stati colpiti . . . 650
15.5.5.1 Caso Uno: Bourdais contro Eiffel (Parigi, 1889) . . . 650
15.5.5.2 Caso due: Paxton e il Palazzo di Cristallo (Londra, 1851) . . . 651
15.5.5.3 Caso tre: Roebling e il ponte di Brooklyn (New York, 1869–1883) 652
15.5.5.4 La storia . . . 652
15.6 La generazione del computer . . . 653
15.6.1 Gli architetti "Exceptional" . . . 653
15.6.1.1 Félix Candela (1910-1997) . . . 653
15.6.1.2 Frank Gehry (1929–2025) . . . 654
15.6.1.3 Santiago Calatrava (1951–) . . . 655
15.6.2 Ingegneri strutturali: Il cinque percenter . . . 656
15.6.2.1 Edifici ad alto rumore . . . 658
15.6.2.1.1 Leslie Robertson (1928–2021) . . . 659
15.6.2.1.2 William Baker (1953–) . . . 662
15.6.2.2 Ponti: Michel Virlogeux (1946–) . . . 664

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

15.7 Vitruvio rivisitato . . . 666
15.7.1 Ricostruzione di arte strutturale . . . 666
15.7.2 Cos'è l'arte? . . . 667
15.7.3 Architettura strutturale: Manifesto di Llunji . . . 669
15.8 Conclusioni . . . 670

16 Terrae Motus: Miti, Credenze e Rappresentanze dei Terremoti 674
16.1 Introduzione . . . 675
16.2 Mitologia . . . 676
16.2.1 Giappone . . . 677
16.2.2 Pacifico Nord-Ovest . . . 679
16.2.3 Americas . . . 681
16.2.4 Altre tradizioni . . . 681
16.2.5 Sintesi: Mito come memoria sismica . . . 682
16.3 Religione . . . 683
16.3.1 La Bibbia . . . 683
16.3.2 Grecia . . . 687
16.3.3 India . . . 693
16.3.4 Islam . . . 696
16.3.5 Mesoamerica . . . 698
16.3.6 Shinto . . . 701
16.3.7 Sintesi: Religione e significato della catastrofe sismica . . . 703
16.4 Filosofia . . . 709
16.4.1 Aristotele . . . 709
16.4.2 Il tempo di . . . 710
16.4.3 Lucrezio e Plinio . . . 710
16.4.4 Il terremoto di Lisbona come evento filosofico . . . 711
16.4.4.1 Voltaire e Rousseau come Interlocutori filosofici . . . 712
16.4.4.2 Kant . . . 712
16.4.5 Ricostruzione . . . 713
16.5 Letteratura . . . 715
16.5.1 Terremoti in Letteratura . . . 715
16.5.2 Il terremoto di Lisbona del 1755 e il dibattito di illuminazione . . . 715
16.5.3 Il terremoto di Messina del 1908 . . . 717
16.5.4 Sintesi: Letteratura e memoria culturale dei Terremoti . . . 719
16.6 Architettura . . . 719
16.6.1 Pirro Ligorio . . . 719
16.6.2 Gibellina . . . 720
16.7 Artìcolo . . . 724
16.7.1 Tracce di Rock Art e Fault . . . 724
16.7.2 Pittura . . . 725
16.7.3 Collezione Kozak . . . 726
16.7.4 Collezione Amelio . . . 727

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

16.8 Musica . . . 729
16.9 Fotografia . . . 730
16.10 Conclusioni . . . 731
16.11 Epilogue: Da Namazu a Roswell . . . 732

Riferimenti del Libro I: Storia **736**

Indice: Libri II–IV (Analisi) **793**

Elenco delle figure: Libri II–IV (Analisi) **830**

Elenco delle tabelle: Libri II–IV (Analisi) **848**

Elenco degli esempi: Libri II–IV (Analisi) **853**

Elenco dei punti chiave: Libri II–IV (Analisi) **860**

II Introduzione: fondamenti e metodi analitici 862

17 Introduzione **863**
17.1 Il grande quadro . . . 863
17.1.1 Architettura . . . 864
17.1.2 Ingegneria strutturale . . . 865
17.1.2.1 Struttura strutturale . . . 865
17.1.2.2 Analisi . . . 867
17.1.2.3 Valutazione della sicurezza . . . 868
17.1.3 Disciplina integrata nell'analisi strutturale . . . 868
17.2 Elementi: forze interne primarie . . . 869
17.3 Elementi di trasferimento del carico . . . 869
17.4 Tipologie di struttura . . . 870
17.5 Trasformazione degli strumenti di ingegneria . . . 875
17.6 Corsi di ingegneria strutturale . . . 876

18 Carico **878**
18.1 Introduzione . . . 879
18.2 Classificazione dei carichi . . . 879
18.2.1 Verticale . . . 879
18.2.2 Sedia . . . 880
18.2.2.1 Vento vento . . . 880
18.2.2.2 Sismica . . . 884
18.2.3 Idrostatica e terra . . . 886
18.2.3.1 Ex 18.1: Caricamento idrostatico . . . 886
18.2.4 Carico d'impatto . . . 887
18.2.5 Secondario . . . 888
18.2.6 Termotermico . . . 889

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

18.2.6.1 Ex 18.2: Espansione termica/tensione . . . 890
18.3 Considerazioni . . . 891
18.3.1 Carico proiettato . . . 891
18.3.2 Posizionamento del carico . . . 891
18.3.3 Combinazioni di carico . . . 892
18.3.4 Percorso di carico . . . 893
18.3.5 Aree di tributo . . . 898
18.3.5.1 Ex 18.3: Aree di tributo . . . 899
18.3.6 Ricorso strutturale . . . 899

19 Reazioni **902**
19.1 Introduzione . . . 903
19.1.1 Tipi di supporti . . . 903
19.1.2 Equilibrio . . . 904
19.1.3 Equazioni delle condizioni . . . 906
19.1.4 Determinazione statica . . . 906
19.1.5 Instabilità geometrica . . . 907
19.1.6 Gratuiti diagrammi del corpo . . . 908
19.2 Esempi . . . 909
19.2.1 Ex 19.1: Carico idrostatico . . . 909
19.2.2 Ex 19.2: Trasferimento di carico . . . 910
19.2.3 Ex 19.3: Semplicemente supportato . . . 910
19.2.4 Ex 19.4: Carico parabolico . . . 911
19.2.5 Ex 19.5: Tre raggi di larghezza . . . 912
19.2.6 Ex 19.6: Telaio a tre cerniere . . . 913
19.2.7 Ex 19.7: Supporti incline . . . 915
19.2.8 Ex 19.8: Struttura di rettifica . . . 916
19.2.9 Ex 19.9: equilibrio aereo . . . 917
19.2.10 Ex 19.10: Barriera Jumbo . . . 918
19.2.11 Ex 19.11: Rankine: Equilibrio di un corpo galleggiante (prove idrostatiche) . . . 921
19.2.12 Ex 19.12: Palazzetto dello sport; nervi . . . 923

20 Trusse **927**
20.1 Introduzione . . . 927
20.1.1 Assunzioni . . . 928
20.1.2 Convegno di firma . . . 929
20.1.3 Determinazione e stabilità . . . 929
20.2 Metodi di analisi . . . 931
20.2.1 Metodo di articolazioni . . . 931
20.2.1.1 Ex 20.1: Analisi della capriata: metodo dei nodi . . . 932
20.2.1.2 Ex 20.2: Capriata tridimensionale . . . 935
20.3 Metodo delle sezioni . . . 938

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

20.3.1 Metodo delle sezioni . . . 938
20.3.2 Ex 20.3: Metodo delle sezioni . . . 940
20.4 Giunta/mamma . . . 940
20.4.1 Ex 20.4: Capriata semplice: metodo dei nodi/matrice . . . 942
20.4.2 Ex 20.5: Capriata complessa: metodo dei nodi/matrice . . . 944

21 Forze interne negli elementi inflessi **948**
21.1 Introduzione . . . 949
21.1.1 Avviamento di ingegneria: dalle sollecitazioni alle forze interne . . . 949
21.1.2 Forze interne per travi rettilinee/curve da 2d/3d . . . 950
21.1.3 Perché è importante . . . 952
21.1.4 Convenzioni di cartello di progettazione . . . 953
21.2 Carico, taglio, relazioni di momento . . . 954
21.2.1 Forma differenziale . . . 954
21.2.2 Forma integrale . . . 955
21.3 Esempi . . . 956
21.3.1 Ex 21.1: Fascio con carico inclinato . . . 957
21.3.2 Ex 21.2: Telaio incline . . . 958
21.3.3 Ex 21.3: Telaio con carico idrostatico . . . 961
21.3.4 Ex 21.4: Carico lineare e variabile . . . 963
21.3.5 Ex 21.5: Telaio; esempio tetto inclinato . . . 964
21.3.6 Ex 21.6: Telaio reciproco . . . 965
21.3.7 Ex 21.7: Telaio 3D . . . 969

22 Differenze; Curva elastica **973**
22.1 Introduzione . . . 973
22.2 Equazione differenziale . . . 974
22.2.1 Ex 22.1: Doppia integrazione . . . 975
22.2.2 Ex 22.2: Sfilettatura massima . . . 976
22.2.3 Ex 22.3: Forma sci ottimale . . . 977
22.2.4 Ex 22.4: Trave galleggiante . . . 978
22.3 Curvatura . . . 981
22.3.1 Ex 22.5: Ruota per bicicletta . . . 983
22.3.2 Ex 22.6: Rigidezza di una molla elicoidale . . . 988
22.3.3 Relazione curvatura-deformazione . . . 990
22.3.3.1 Ex 22.7: Interruttore bimetallico . . . 991
22.3.4 Metodo di area curvatura (zona di movimento) . . . 992
22.3.4.1 Convegno di firma . . . 993
22.3.4.2 Teorema della prima curvatura . . . 993
22.3.4.3 Teorema della seconda curvatura . . . 994
22.3.4.3.1 Ex 22.8: Area di curvatura, trave a sbalzo . . . 995
22.3.4.3.2 Ex 22.9: Curvatura del momento, raggio semplicemente sostenuto . . . 995

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

22.3.4.4 Sfilettatura massima . . . 996
22.3.4.4.1 Ex 22.10: Sfilettatura massima . . . 997
22.3.4.5 Rapporto di curvatura della temperatura . . . 998
22.3.4.5.1 Ex 22.11: Telaio sottoposto a carico della temperatura 998
22.3.4.6 Ex 22.12: Lunghezza plastica . . . 1001
22.3.4.7 Travi elastiche/peso coniugato . . . 1002
22.3.4.7.1 Ex 22.13: Trave di carico; carico del punto . . . 1003
22.3.4.7.2 Ex 22.14: Trave coniugate; variabile I . . . 1004

23 Guarnizione e Torsione **1007**
23.1 Deformazione della tosapa (trasverso) . . . 1007
23.1.1 Guarnizione, elemento infinitesimale . . . 1008
23.1.1.1 Ex 23.1: Trave a sbalzo scaricata . . . 1008
23.1.2 Distribuzione delle cesoie; $\tau(y)$ . . . 1009
23.1.3 Coefficiente di taglio . . . 1010
23.1.4 Fattore di taglio . . . 1010
23.1.5 Deformazione a taglio v_s, Timoshenko . . . 1012
23.2 Deformazioni torsionali . . . 1012
23.2.1 S^t Torsione venosa o uniforme . . . 1013
23.2.2 Vlasov o torsione non uniforme . . . 1014
23.2.2.1 Ex 23.2: Torsione non uniforme di una sezione I . . . 1020

24 Lavoro virtuale complementare **1024**
24.1 Introduzione . . . 1025
24.2 Derivazione semplificata del principio di lavoro virtuale complementare . . . 1025
24.2.1 Ritiro . . . 1025
24.2.2 f_{ij}, f_{ji} Teorema Reciproco di Maxwell-Betti . . . 1028
24.2.3 Lavoro virtuale esterno $\delta\overline{W}^*$ . . . 1029
24.2.4 Lavoro virtuale interno $\delta\overline{U}^*$ . . . 1029
24.3 Esempi . . . 1031
24.3.1 Ex 24.1: Signora . . . 1031
24.3.2 Ex 24.2: Cornice; deflettori . . . 1032
24.3.3 Ex 24.3: Cornice, rotazione . . . 1033
24.3.4 Ex 24.4: Staffa flessibile . . . 1034
24.3.5 Ex 24.5: Trave a sbalzo sostenuta da cavo . . . 1036
24.3.6 Ex 24.6: Deformazione torsionale e flessorale . . . 1037
24.3.7 Ex 24.7: Deformazioni flexurali e cesoie in un fascio . . . 1039
24.3.8 Ex 24.8: Effetti termici in un raggio . . . 1040
24.3.9 Ex 24.9: Condotta . . . 1041
24.3.10 Ex 24.10: Capriata semplice . . . 1042
24.3.11 Ex 24.11: Capriata complessa . . . 1043
24.3.12 Ex 24.12: Capriata con controfreccia iniziale . . . 1044
24.3.13 Ex 24.13: Capriata con tensioni secondarie . . . 1045

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

24.3.14Ex 24.14: Anello circolare 1047
24.3.15Ex 24.15: Primavera 1049

25 Metodo di flessibilità **1053**
25.1 Introduzione 1054
25.2 Il metodo di forza/flessibilità 1059
25.2.1 Esempi 1061
25.2.1.1 Ex 25.1: Asciugamano con asta di cravatta 1061
25.2.1.2 Ex 25.2: Analisi struttura in acciaio 1062
25.2.1.3 Ex 25.3: Capriata con una forza ridondante 1066
25.2.1.4 Ex 25.4: Capriata con due forze ridondanti 1068
25.2.1.5 Ex 25.5: Capriata con carico termico 1071
25.2.1.6 Ex 25.6: Trave a molla 1072
25.2.1.7 Ex 25.7: Posto della regina 1074
25.2.1.8 Ex 25.8: Matrice di flessibilità: trave curva 1077
25.3 Equazioni di tre momenti 1080
25.3.1 Ex 25.9: Trave continua 1083
25.3.2 Ex 25.10: Trave continua 1084

26 Forze in termini di spostamenti **1087**
26.1 Introduzione 1087
26.1.1 Convegno di firma 1088
26.1.2 Metodi di analisi 1088
26.2 Deformazioni assiali 1089
26.3 Flessibili 1090
26.3.1 Equazione differenziale 1091
26.3.2 Forze di estremità nodale per ceppi iniziali 1094
26.3.3 Forze equivalenti nodali per elementi flessografici 1095
26.3.3.1 Cariche distribuite uniformemente 1095
26.3.3.2 Carico concentrato 1096

27 Metodo di rigidezza manuale **1098**
27.1 Introduzione 1098
27.2 Metodo delle deformazioni angolari: soluzione diretta 1099
27.2.1 Esempi 1101
27.2.1.1 Ex 27.1: Trave a sbalzo 1101
27.2.1.2 Ex 27.2: Trave continua 1102
27.2.1.3 Ex 27.3: Trave a due posti 1103
27.2.1.4 Ex 27.4: Trave a due larghi, deflettore iniziale 1104
27.2.1.5 Ex 27.5: Telaio 1106
27.2.1.6 Ex 27.6: Scatola di chiusura 1108
27.3 Distribuzione dei momenti 1109
27.3.1 Introduzione 1110
27.3.1.1 Ex 27.7: Trave continua 1113

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

27.4 Slope deflection; distribuzione del momento; Gauss-Seidel 1115
27.4.1 Ex 27.8: Distribuzione/scarico di slittamento/ Gauss-Seidel 1115

28 Linee di influenza **1117**
28.1 Introduzione 1117
28.2 Procedura 1118
28.2.1 Ex 28.1: Linee di influenza per un raggio semplicemente supportato 1118
28.2.2 Ex 28.2: Fascio con sostegni e sporgenze 1121
28.3 Müller-Breslau Principio 1121
28.3.1 Ritiro 1121
28.3.1.1 Ex 28.3: Müller-Breslau; Linea di influenza della cinghia . . 1122
28.3.1.2 Ex 28.4: Müller-Breslau; Linea di influenza del momento . . 1123

29 Analisi elastica di secondo ordine **1124**
29.1 Introduzione 1125
29.2 Grandi spostamenti, stabile 1125
29.2.1 Ex 29.1: Instabilità geometrica 1125
29.2.2 Ex 29.2: Impatto di carico assiale sulla deformazione flessorale . . . 1127
29.2.3 Ex 29.3: Grande freccia di una trave a sbalzo 1129
29.3 Piccoli spostamenti, instabile 1133
29.3.1 Barre rigide discrete 1133
29.3.1.1 Sistema a barre singolo 1133
29.3.1.1.1 Ex 29.4: Fibbia di due colonne rigide a cerniera . 1135
29.3.2 Sistemi continui 1137
29.3.2.1 Carico di indurimento Euler 1137
29.3.2.1.1 Ex 29.5: Fibbia di colonna a cerniera 1139
29.3.2.1.2 Ex 29.6: Fibbia di colonna fissa 1140
29.3.2.1.3 Ex 29.7: Fibbia di colonna fissa 1142
29.3.2.1.4 Ex 29.8: Colonna con supporti elastici 1143
29.3.2.1.5 Ex 29.9: Contrattamento 1145
29.3.2.1.6 Ex 29.10: Torre dell'acqua 1146
29.3.2.2 Analogia con vibrazione libera 1149
29.3.2.3 Fattori di lunghezza effettivi K 1150
29.3.2.4 Colonne inelastici 1153

30 Strutture del cavo **1155**
30.1 Introduzione 1155
30.2 Carico concentrato 1156
30.2.1 Ex 30.1: Cavo funicolare 1157
30.2.2 Ex 30.2: Cavo funicolare incline 1159
30.2.3 Ex 30.3: Gondola bicavo 1160
30.3 Cariche distribuite; 1160
30.3.1 Equazione dell'equilibrio 1161
30.3.2 qdx; carico laterale; parabola 1162

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

30.3.2.1 Geometria 1162
30.3.2.2 Forze interne 1167
30.3.2.3 elastico elastico 1167
30.3.2.4 Equivalente rigidità assiale 1169
30.3.2.5 Caso speciale: corda orizzontale 1172
30.3.2.5.1 Ex 30.4: Geometria del cavo incline 1172
30.3.2.5.2 Ex 30.5: Forze di cavi incline 1173
30.3.2.5.3 Ex 30.6: Torre strallata 1175
30.3.2.5.4 Ex 30.7: Ponte sospeso 1176
30.3.2.5.5 Ex 30.8: Cavo inesteso; temperatura 1178
30.3.2.5.6 Ex 30.9: Cavo estensibile: freccia 1178
30.3.2.5.7 Ex 30.10: Cavo esteso; termico 1179
30.3.2.5.8 Ex 30.11: Cavo estensibile: precompressione . . . 1179
30.3.3 $q$ds; catenaria 1180
30.3.3.1 Geometria 1180
30.3.3.2 Forze 1182
30.3.3.3 Corda incline catastale 1182
30.3.3.3.1 Ex 30.12: Freccia in un cavo inclinato 1184
30.3.3.3.2 Ex 30.13: Supporto cavi per autobus 1184
30.3.4 Confronto tra le soluzioni a base di parabola e catenaria 1187
30.3.4.1 Ex 30.14: Catenaria e parabola 1188

31 Analisi di Masonry Arches (Voussoir) 1190
31.1 Introduzione 1190
31.2 Alcune note storiche 1191
31.2.1 De la Hire; 1640-1718 1191
31.2.2 Belidor; 1698-1761 1192
31.2.3 Coppia: 1670-1744 1196
31.2.4 Danyzy; 1698-1777 1197
31.2.5 Coulomb; 1736-1806 1198
31.2.6 Moseley; 1801-1872 1199
31.2.7 Soluzioni elastiche 1200
31.2.7.1 Castigliano; 1847-1884 1200
31.2.7.2 Winkler; 1835-1888 1200
31.2.8 Pippard; 1891-1969 1202
31.2.8.1 Ex 31.1: Carico di guasto del voussoir; metodo di pippard . 1204
31.3 Generalizzazione del metodo di pippard; smars 1208
31.4 Algoritmo 1213
31.5 Osservazioni finali 1215
31.5.1 Jacques Heyman; 1925 1215
31.5.2 Linea di trazione 1216
31.5.3 Linea di trazione e pippard 1217

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

32 Arci e ardesia curvata **1220**
32.1 Arco circolare . . . 1222
32.1.1 Tre archi circolari a cerniera . . . 1222
32.1.1.1 Il teorema di Eddy . . . 1223
32.1.1.2 Esempi . . . 1223
32.1.1.2.1 Ex 32.1: Arco a tre cerniere; carico del punto; analitico . . . 1223
32.1.1.2.2 Ex 32.2: Tre arco a cerniera; carico del punto . . . 1225
32.1.1.2.3 Ex 32.3: Tre arco a cerniera; carico uniforme . . . 1226
32.1.2 Due archi circolari a cerniera . . . 1229
32.1.3 Arco circolare senza cerniera . . . 1229
32.1.3.1 Ex 32.4: Arco circolare senza cerniera . . . 1230
32.1.4 Soluzione generalizzata . . . 1237
32.1.4.1 Ritiro . . . 1237
32.1.4.1.1 Centro di gravità . . . 1237
32.1.4.1.2 Ritiro . . . 1239
32.1.4.1.3 Verifica . . . 1243
32.1.5 Soluzioni basate sulla Mathematica . . . 1244
32.2 Forma ottimale di un arco . . . 1244
32.2.1 Ex 32.5: Arco perfetto . . . 1245
32.3 Arco di Parabolico . . . 1245
32.3.1 Esempi . . . 1246
32.3.1.1 Ex 32.6: Arco parabolico a tre cerniere . . . 1246
32.3.1.2 Ex 32.7: Due arco a sezione trasversale variabile incernierata . . . 1246
32.3.2 Arco fisso con carico simmetrico . . . 1250
32.3.2.1 Ex 32.8: Arco parabolico senza cerniera . . . 1252
32.3.3 Effetti di regolamento e temperatura della Fondazione . . . 1255
32.3.3.1 Ex 32.9: Carico termico su arco parabolico . . . 1258
32.4 Travi curvate . . . 1258
32.4.1 Trave ad arco . . . 1258
32.4.1.1 Ex 32.10: Trave ad arco . . . 1259
32.4.2 Elicoidale . . . 1261
32.4.2.1 Geometria . . . 1261
32.4.2.2 Equilibrio . . . 1263
32.4.2.2.1 Ex 32.11: Arco elicoidale; carico a punti . . . 1264

33 Progettazione di un arco indeterminato staticamente **1267**
33.1 Ex 33.1: Progettazione di un arco staticamente indeterminato . . . 1267
33.2 Ex 33.2: Cambiamento di temperatura in un arco . . . 1274

34 Piatti **1278**
34.1 Teoria di piatti spessi: reissner-mindlin . . . 1279
34.1.1 Relazioni con i paesi in via di sviluppo . . . 1279
34.1.2 Relazioni costitutive . . . 1281

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

34.1.3 Equilibrio 1282
34.2 Teoria delle piastre sottili: Kirchhoff 1283
34.2.0.1 Ex 34.1: Idealizzazione di piastra sottile e spessa 1284
34.2.1 Relazioni fondamentali 1284
34.2.2 Equazione differenziale 1285
34.2.3 Tensioni 1286
34.2.3.1 Ex 34.2: Calcolo delle tensioni dai momenti risultanti della piastra 1287
34.2.3.2 Ex 34.3: Piastra quadrata semplicemente appoggiata sotto pressione uniforme 1288
34.2.3.3 Ex 34.4: Sensibilità della freccia della piastra allo spessore . 1289
34.2.4 Piastre circolari 1289
34.2.4.1 Ex 34.5: Piastra circolare incastrata sotto pressione uniforme 1293
34.2.5 Formulazione variazionale 1294
34.3 Riepilogo 1295

35 Conchiglie **1297**
35.1 Teoria generale 1298
35.1.1 Definizioni 1298
35.1.2 Assunzioni 1300
35.1.3 Relazioni di spostamento della forza 1302
35.1.3.1 Equilibrio 1304
35.1.3.2 Sistema completo delle equazioni di equilibrio 1310
35.1.3.3 Compatibilità 1310
35.1.3.4 Riepilogo 1314
35.1.3.5 Tensioni-deformazioni-risultanti 1315
35.1.3.5.1 Tensioni-deformazioni 1315
35.1.3.5.2 Tensioni-risultanti 1316
35.1.3.6 Espressioni finali (forza in termini di spostamenti) 1317
35.1.4 Semplificazioni 1317
35.1.4.1 Gusci ribassati 1319
35.1.4.1.1 Ipotesi 1319
35.1.4.1.2 Applicazione delle ipotesi 1319
35.1.4.1.3 Equazione della trave profonda 1321
35.1.4.1.4 Equazione della piastra 1322
35.1.4.1.5 Equazione dei gusci ribassati 1323
35.1.4.2 Teoria membranale 1323
35.1.4.2.1 Ipotesi 1323
35.1.4.2.2 Teoria 1324
35.1.4.2.3 Classificazione 1324
35.1.4.2.4 Specializzazione 1325
35.2 Analisi di un singolo barile (copertura cilindrica circolare) 1327

COPIA DI REVISIONE

35.2.1 Introduzione . . . 1327
35.2.2 Teoria membranale . . . 1329
35.2.2.1 Risultanti delle tensioni . . . 1329
35.2.2.1.1 Errori . . . 1333
35.2.2.1.2 Correzione . . . 1334
35.2.2.2 Spostamenti . . . 1335
35.2.3 Teoria dei gusci ribassati . . . 1338
35.2.3.1 Equazioni di equilibrio . . . 1338
35.2.3.2 Formulazione . . . 1339
35.2.3.2.1 Soluzione particolare per carico uniforme . . . 1342
35.2.3.2.2 Confronto: membrana *vs.* guscio ribassato . . . 1343
35.2.3.2.3 Ex 35.1: Confronto tra teoria membranale e guscio ribassato . . . 1346
35.2.3.3 Soluzione generale . . . 1346
35.2.3.3.1 Spostamento w . . . 1347
35.2.3.3.2 M_ϕ . . . 1349
35.2.3.3.3 Altri termini: procedura . . . 1350
35.3 Gusci staticamente indeterminati . . . 1353
35.3.1 Trave di bordo . . . 1353
35.3.1.1 Travi di bordo verticali . . . 1355
35.3.1.2 Travi di bordo orizzontali . . . 1357
35.3.2 Trave di bordo precompressa . . . 1357
35.3.2.1 Ex 35.2: Progettazione di un guscio cilindrico . . . 1359
35.3.3 Codice MATLAB®ed esempio numerico . . . 1370

36 Dinamica **1372**
36.1 Fondazioni filosofiche . . . 1373
36.2 Quando è un'analisi dinamica . . . 1374
36.3 Principi fondamentali . . . 1375
36.3.1 Principio di d'Alembert e Equilibrio Dinamico . . . 1375
36.3.2 L'Oscillatore monodegretario di libertà . . . 1375
36.3.3 Frequenza naturale e periodo . . . 1376
36.3.3.1 Ex 36.1: Calcolo di ω_n, T_n e f_n per un sistema SDOF . . . 1377
36.3.4 Damping e il rapporto di smorzamento . . . 1377
36.4 Vibrazione gratuita . . . 1379
36.4.1 Vibrazione libera non smorzata . . . 1379
36.4.2 Vibrazione libera smorzata . . . 1380
36.4.3 Decreto logaritmico . . . 1380
36.4.3.1 Ex 36.2: Stima dello smorzamento mediante decremento logaritmico . . . 1381
36.5 Vibrazione forzata: eccitazione armonica . . . 1382
36.5.1 Risposta armonica non smorzata . . . 1382
36.5.2 Risposta armonica smorzata . . . 1383

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

36.5.2.1 Ex 36.3: Risposta armonica: amplificazione e fase 1384
36.6 Risposta al carico arbitrale 1385
36.6.1 Risposta Impulsa e impulso dell'unità 1385
36.6.1.1 Ex 36.4: Risposta dell'unità di impulso di un sistema SDOF umido 1385
36.6.2 Il Duhamel Integral 1386
36.6.2.1 Ex 36.5: Caricamento passo improvvisa: l'amplificazione dinamica fattore 2 1387
36.6.2.2 Ex 36.6: Carico impulsivo rettangolare e spettro d'urto . . . 1388
36.6.3 Analisi e risposta alla frequenza di Fourier 1390
36.6.3.1 Ex 36.7: Risposta di frequenza a una macchina periodica forza con due armoniche 1390
36.7 Supporto eccitazione e risposta del terremoto 1392
36.7.1 Equazione di movimento per l'eccitazione della base 1392
36.7.2 Spettacolo di risposta 1393
36.7.2.1 Ex 36.8: Progettazione sismica di un telaio a singolo piano utilizzando uno spettro di risposta 1394
36.8 Sistemi multi-disciplinari 1395
36.8.1 Equazioni di movimento 1395
36.8.2 Vibrazione libera senza smorzamento: Modalità naturali 1396
36.8.3 Analisi dei metodi 1396
36.8.4 Partecipazione modulare alla risposta del terremoto 1397
36.8.4.1 Ex 36.9: Analisi modulare di un edificio a cesoia 3DOF sotto carico sismico 1398
36.9 Sistemi continui 1400
36.9.1 Vibrazione assiale di bar 1400
36.9.2 Vibrazione trasversale delle fasci 1401
36.9.2.1 Ex 36.10: Frequenza naturale di un ponte pedonale in acciaio e controllo della risonanza pedonale 1401
36.10 Dinamica non lineare 1403
36.10.1 Fonti di non linearità 1403
36.10.2 Isteresi e dissipazione energetica 1403
36.10.2.1 Ex 36.11: Smorzamento viscoso equivalente da un ciclo isteretico bilineare 1404
36.10.3 Dutility e Progettazione delle Capacità 1406
36.10.3.1 Ex 36.12: Domanda di duttilità e riduzione della forza per una telaio in cemento armato 1406
36.11 Considerazioni pratiche 1407
36.11.1 Smorzamento nelle strutture reali 1407
36.11.2 Interazione della struttura 1408
36.11.3 Ammortizzatori di massa sintonizzati 1408

COPIA DI REVISIONE

36.11.4Ex 36.13: Progettazione di un ammortizzatore di massa sintonizzato per un edificio alto . . . 1408
36.11.5Isolamento di base . . . 1410
36.11.6Ex 36.14: Progettazione di un edificio ospedaliero isolato alla base . . . 1410
36.12 Osservazioni di chiusura . . . 1412
36.12.1La cautela di un medico sui metodi dello spettro di risposta . . . 1412
36.12.2Nota di chiusura: limiti della teoria lineare . . . 1412

37 Elementi di progettazione strutturale 1413
37.1 Introduzione . . . 1414
37.1.1 Analisi e progettazione; un processo iterativo . . . 1414
37.1.2 Sicurezza . . . 1415
37.2 Progettazione alle tensioni ammissibili (ASD) . . . 1416
37.2.1 Ex 37.1: ASD: elemento inflesso . . . 1417
37.3 Progettazione del fattore di carico e resistenza (LRFD) . . . 1417
37.4 Esempi di codici di progettazione basati su gleba . . . 1420
37.4.1 Applicazione: resistenza plastica delle sezioni del fascio R/C . . . 1421
37.4.1.1 Ex 37.2: Resistenza ultima: verifica . . . 1426
37.4.1.2 Ex 37.3: Resistenza ultima: progetto I . . . 1426
37.4.1.3 Ex 37.4: Resistenza ultima: progetto II . . . 1427
37.4.1.4 Ex 37.5: Analisi esatta . . . 1428
37.4.2 Applicazione: resistenza plastica delle colonne R/C . . . 1430
37.4.2.1 Ex 37.6: Colonna R/C, *c* conosciuto . . . 1434
37.4.2.2 Ex 37.7: Colonna R/C, *e* conosciuto . . . 1436
37.4.3 Calcestruzzo precompresso . . . 1439
37.4.3.1 Ex 37.8: Caso di studio: ponte in legno . . . 1439
37.5 Ingegneria basata sulle prestazioni (PBE) . . . 1443

38 Soluzioni di Fermi (Analisi approssimative) 1445
38.1 Forze interne . . . 1446
38.1.1 Forme definite & Punti di inflessione . . . 1446
38.1.2 Momenti di vapore in termini di rigidità di sostegno . . . 1449
38.1.3 Metodi di analisi . . . 1451
38.1.3.1 Carico verticale . . . 1451
38.1.3.2 Carico orizzontale . . . 1454
38.1.3.2.1 Metodo del portale . . . 1454
38.1.3.2.1.1 Ex 38.1: Metodo del portale; edificio a basso aumento . . . 1457
38.1.3.2.1.2 Ex 38.2: Soluzione Matlab . . . 1467
38.1.3.2.2 Metodo a mensola . . . 1468
38.1.3.2.2.1 Ex 38.3: Metodo a mensola: edificio multi-piano . . . 1469
38.2 Ricorso strutturale . . . 1470

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

38.2.1 Sottosistema di albero 1470
38.2.1.1 Ex 38.4: Sottosistema di albero 1471
38.2.2 Muro di taglio 1472
38.2.2.1 Ex 38.5: Cesoia in cemento 1472
38.2.3 Muro di taglio intagliato 1474
38.2.3.1 Ex 38.6: Muro di taglio intagliato 1475
38.2.4 Deflettori laterali 1476
38.2.4.1 Corto parete 1477
38.2.4.2 Tallaggio parete 1477
38.2.4.3 Mura e lintel 1478
38.2.4.4 Cornici 1479
38.2.4.4.1 Ex 38.7: Sfilettatura approssimativa trasversale . 1480

39 Progetti preliminari **1485**
39.1 Ex 39.1: Aeroporto di Dulles 1485
39.2 Ex 39.2: Torre Eiffel 1492
39.3 Ex 39.3: Magazzini Generali 1500
39.4 Ex 39.4: Ponte George Washington 1504
39.5 Ex 39.5: Progettazione di un arco a due punte 1511
39.6 Ex 39.6: Cambiamento di temperatura in un arco 1519
39.7 Ex 39.7: Arco di Parabolico con variazione del secant *I* 1522

III Intermedio: metodi numerici 1525

40 Introduzione al metodo diretto della rigidezza **1526**
40.1 Perché l'analisi strutturale matrice? 1526
40.2 Idealizzazione strutturale 1528
40.3 Convegno di firma 1530
40.4 Sistemi di coordinamento 1530
40.5 Flessibilità *vs.* Stiffa 1531
40.6 Gradi di libertà 1532
40.7 Statistiche *vs.* Indeterminanza cinematica 1534
40.8 Analisi strutturale/meccanica; problema del valore limite 1535

41 Matrici di rigidezza dell'elemento $\mathbf{k}^{(e)}$ **1537**
41.1 Definizione del termine di stiffamento 1537
41.2 Elemento di truss 1539
41.3 Signora: Euler-Bernoulli 1539
41.4 Elemento telaio 2D (elemento trave-colonna) 1540
41.5 Elemento di griglia 1540
41.6 Elemento di trave 3D 1541
41.7 Trave di Timoshenko 1543

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

41.7.1 Deformazione aggiuntiva . . . 1543
41.7.2 Modifica della matrice di rigidità dell'elemento . . . 1545
41.8 Torsione di Vlasov . . . 1546

42 Metodo della rigidezza: strutture ortogonali 1549
42.1 Introduzione . . . 1550
42.2 Teoria . . . 1550
42.2.1 Flessibilità rivisitata . . . 1550
42.2.2 Metodo di rigidità diretto . . . 1551
42.2.3 Dall'elemento alla struttura . . . 1552
42.3 Esempi . . . 1553
42.3.1 Ex 42.1: Trave ortogonale . . . 1553
42.3.2 Ex 42.2: Cornice ortogonale . . . 1555
42.3.3 Ex 42.3: Griglia . . . 1562
42.3.4 Ex 42.4: Cornice ibrida . . . 1566
42.3.5 Ex 42.5: Griglia ibrida . . . 1570

43 Matrici di trasformazione 1575
43.1 Introduzione . . . 1575
43.2 Alcune teorie . . . 1577
43.2.1 $[\mathbf{k}^e]$ $[\mathbf{K}^e]$ relazione . . . 1577
43.2.2 Direzione cose . . . 1577
43.3 Matrici di trasformazione per elementi quadro . . . 1580
43.3.1 2 casi . . . 1580
43.3.1.1 Telaio 2D . . . 1580
43.3.1.2 Griglia . . . 1581
43.3.1.3 Vlasov raggio . . . 1582
43.3.1.4 2D trus . . . 1583
43.3.2 Telaio 3D . . . 1583
43.3.3 Rotture euleriane . . . 1584
43.3.4 Torsione dell'asse degli elementi . . . 1586
43.3.5 Trucchi 3D . . . 1588

44 Metodo diretto della rigidezza 1590
44.1 Obiettivi . . . 1590
44.2 Teoria . . . 1591
44.3 Divulgazione . . . 1593
44.3.1 Non vincolato contro livelli di libertà limitati . . . 1593
44.3.2 Dischilazione strutturale . . . 1594
44.4 Realizzazione computer . . . 1595
44.4.1 Condizioni di alloggio, `[id]` Matrice . . . 1595
44.4.2 **LM** vettore . . . 1596
44.4.3 Montaggio della matrice di rigidità globale . . . 1597
44.4.4 Procedura passo dopo passo . . . 1598

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

44.5 Esempi . . . 1599
44.5.1 Ex 44.1: Telaio . . . 1600
44.5.1.1 Pregiudiziale . . . 1600
44.5.2 Ex 44.3: Travatura reticolare . . . 1610

45 Proprietà matematiche della matrice di rigidezza e problemi computazionali 1615
45.1 Matrici poco condizionate . . . 1616
45.1.1 Valori di esercizio . . . 1616
45.1.1.1 Interpretazione fisica degli autovalori . . . 1619
45.1.2 Numero di condizioni . . . 1621
45.1.3 Matrici di rigidità condizionate da plutonio . . . 1622
45.1.3.1 Ex 45.1: Ill-condizionata . . . 1624
45.2 Considerazioni numeriche . . . 1625
45.2.1 Inversione contro la decomposizione . . . 1625
45.2.2 Numerazione nodale . . . 1626

46 Argomenti speciali 1629
46.1 Condensazione/sostruzione . . . 1630
46.2 Equazioni di statici e cinematici . . . 1631
46.2.1 Matrice statica $\mathcal{B}$ . . . 1631
46.2.1.1 Ritiro . . . 1631
46.2.1.2 Determinato staticamente . . . 1631
46.2.1.2.1 Ex 46.1: Matrice statica a trombo determinato statico . . . 1632
46.2.1.2.2 Ex 46.2: Matrice statica del fascio . . . 1633
46.2.1.3 Staticamente indeterminato . . . 1634
46.2.1.3.1 Ex 46.3: Matrice statica di una travatura reticolare staticamente indeterminata . . . 1634
46.2.1.4 Identificazione delle forze ridondanti . . . 1636
46.2.1.4.1 Ex 46.4: Selezione delle forze ridondanti . . . 1636
46.2.1.5 Instabilità fisica . . . 1638
46.2.2 Matrice di cinematica $\mathcal{A}$ . . . 1639
46.2.2.1 Ex 46.5: Matrice di cinema: esempio truss . . . 1640
46.2.3 Relazione tra matrici statica e cinematica . . . 1640
46.2.3.1 Determinato staticamente . . . 1640
46.2.3.2 Staticamente indeterminato . . . 1641
46.3 relazioni cinematiche attraverso inverso della matrice statica . . . 1642
46.4 Relazioni di flessibilità . . . 1643
46.4.1 Dalla rigidità alla flessibilità . . . 1643
46.4.1.1 Ex 46.6: Matrice di flessibilità . . . 1644
46.4.2 Dalla flessibilità alla rigidità . . . 1644
46.4.2.1 Ex 46.7: Flessibilità alla rigidità . . . 1646
46.4.2.2 Ex 46.8: Matrice di stiffness di un elemento curvato . . . 1647
46.4.3 Dualità tra flessibilità e rigidità . . . 1649

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

46.5 Congruente approccio di trasformazione **K** . . . 1649
46.5.1 Ex 46.9: Trasformazione congruente . . . 1651
46.5.2 Ex 46.10: Congruente trasformazione di un telaio . . . 1652
46.6 Elementi speciali . . . 1655
46.6.1 Rigido offset; . . . 1655
46.6.2 Travi semirigidi . . . 1657
46.6.3 Sezione trasversale variabile . . . 1663
46.7 Fonti di derivazione laterale in telai del momento . . . 1665

47 Calcolo delle variazioni in meccanica: il quadro di Euler–Lagrange 1679
47.1 Introduzione . . . 1680
47.2 Euler . . . 1680
47.2.1 Pregiudiziale . . . 1680
47.2.2 Forma differenziale di $\delta\Pi$ . . . 1682
47.2.3 Equazione Euler . . . 1683
47.2.4 $\delta\Pi$ . . . 1684
47.2.5 Osservazioni . . . 1685
47.2.6 Condizioni di bovino . . . 1685
47.2.6.1 Ex 47.1: Euler: assiale . . . 1687
47.2.6.2 Ex 47.2: Euler: flessore . . . 1688
47.3 Principio di energia potenziale totale . . . 1689
47.4 Hamilton . . . 1693
47.4.1 Dinamica; Euler/Lagrange . . . 1693
47.4.1.1 Sistema discreto . . . 1693
47.4.1.2 Sistema di contenimento . . . 1695
47.4.2 Ex 47.3: Hamilton . . . 1697
47.5 Principio generale di variazione Hu-Washizu . . . 1700
47.6 diagrammi "Pseudo-Tonti' . . . 1704
47.6.1 Il principio di D'Alembert . . . 1704
47.6.2 Equazioni di Hamilton . . . 1704
47.6.3 Equazioni di Lagrange . . . 1705

48 Principi variazionali ed energetici nell'analisi strutturale 1709
48.1 Introduzione . . . 1710
48.1.1 Termodinamica . . . 1710
48.1.2 Relazioni di base . . . 1711
48.1.3 Definizioni . . . 1712
48.1.4 Condizioni generali . . . 1712
48.1.5 Espressioni virtuali . . . 1714
48.1.6 Osservazioni . . . 1714
48.1.6.1 Lavoro interno contro energia da sforzo . . . 1714
48.1.6.2 indipendenza del percorso di lavoro esterno . . . 1715
48.1.7 Applicazioni a elementi 1D . . . 1716

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

48.1.7.1 Energia complementare, elastico lineare U^* 1716
48.1.7.2 Energia, elastico lineare U 1717
48.1.7.3 Energia virtuale di sforzo complementare δU^* 1717
48.1.7.4 Energia virtuale δU 1719
48.1.8 Sintesi della vw e del cvw 1720
48.2 Approcci 1722
48.3 Lavoro virtuale 1723
48.3.1 Principio del lavoro virtuale complementare (PCVW) 1723
48.3.1.1 Ritiro 1723
48.3.1.2 Ex 48.1: PCVW, trave a sbalzo rastremata 1726
48.3.2 Ex 48.2: Arco semicerchio a tre cerniere 1727
48.3.3 Principio del lavoro virtuale (PVW) 1728
48.3.3.1 Ritiro 1728
48.3.3.2 Ex 48.3: PVW, trave a sbalzo rastremata 1730
48.4 Principi di potenziale energia 1732
48.4.1 Principio di energia potenziale totale (PTPE) 1732
48.4.1.1 Ritiro 1732
48.4.1.2 Ex 48.4: PTPE, primavera e massa 1734
48.4.1.3 Ex 48.5: PTPE; trave a morsetto con varialble I 1735
48.4.2 Principio di energia potenziale complementare totale (PTCPE) . . . 1736
48.5 Teoremi di Castigliano 1736
48.5.1 Primo teorema 1736
48.5.1.1 Ex 48.6: Tronchi elastici non lineari 1737
48.5.2 Secondo teorema 1739
48.5.2.1 Ex 48.7: Castigliano 2; trave a sbalzo 1740
48.5.2.2 Ex 48.8: Castigliano 2; deflettore di un fascio uniformemente caricato utilizzando il secondo teorema di castigliano 1740
48.5.2.3 Ex 48.9: Castigliano 2, truss non lineare 1741
48.5.2.4 Ex 48.10: Castigliano 2, inflessione della molla 1742
48.6 Metodo Rayleigh-Ritz 1742
48.6.1 Ritiro 1742
48.6.1.1 Ex 48.11: Rayleigh Ritz carica uniformemente semplicemente il fascio supportato 1743
48.6.1.2 Ex 48.12: Metodi variabili 1745
48.7 Sintesi 1752

49 Funzioni di interpolazione **1756**
49.1 Introduzione 1756
49.1.1 Caratteristiche delle funzioni di forma 1756
49.1.2 Il triangolo di Pascal 1757
49.1.3 Sistemi di coordinamento 1759
49.1.3.1 Carte 1759
49.1.3.2 Naturale 1759

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

49.1.3.3 Triangolare . . . 1760
49.1.4 Proseguimento . . . 1764
49.2 Funzioni di forma . . . 1764
49.2.1 Formulazione diretta . . . 1764
49.2.1.1 Elemento di truss; lineare . . . 1764
49.2.1.2 Generalizzazione . . . 1765
49.2.1.3 Elemento di triangolo costante . . . 1766
49.2.1.4 Elemento bilineare rettangolare . . . 1767
49.2.1.5 Elemento trilineare a mattone . . . 1769
49.2.2 Funzioni di interpolazione lagrangiana . . . 1770
49.2.2.1 Quadrilaterali . . . 1770
49.2.2.2 Triangoli . . . 1771
49.2.2.3 Elemento di truss; quadratico . . . 1772
49.2.2.4 Signora . . . 1773
49.2.3 Funzioni di interpolazione ermiziana . . . 1776
49.2.3.1 Funzioni di forma del fascio rivisitate . . . 1777
49.2.3.2 Elementi quadrilaterali . . . 1778
49.2.3.2.1 Quadrolatero di Linar (q4) . . . 1778
49.2.3.2.2 Quadratici quadrilateri . . . 1779
49.2.3.2.2.1 Elemento di serenità (q8) . . . 1780
49.2.3.2.2.2 Elemento lagrangiano (q9) . . . 1780
49.2.3.3 Elemento variabile (gerarchico) . . . 1784
49.2.3.4 Elemento triangolare (t6) . . . 1786

50 Formulazione degli elementi finiti lineari 1788
50.1 Introduzione . . . 1788
50.2 Elemento finito . . . 1789
50.2.1 Introduzione . . . 1789
50.2.2 Relazioni di spostamento . . . 1789
50.2.2.1 Membri assiali . . . 1790
50.2.2.2 Membri della Flexural . . . 1790
50.2.3 Slocamento virtuale e ceppi . . . 1790
50.2.4 Elemento rigidità matrice formulazione . . . 1791
50.2.5 Recupero delle tensioni . . . 1792
50.3 Applicazione . . . 1793
50.3.1 Elemento di truss . . . 1793
50.3.2 Elemento flessibile . . . 1793
50.4 Requisiti generali di elementi . . . 1794
50.5 Errore di discretizzazione e tasso di convergenza . . . 1796
50.6 Carattere limitato inferiore delle soluzioni basate su energia minima potenziale . . . 1797
50.7 Equilibrio e compatibilità nella soluzione . . . 1798

51 Elementi isoparametrici 1800

COPIA DI REVISIONE

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

51.1 Introduzione . . . 1801
51.2 Formulazione degli elementi . . . 1803
51.2.1 Elemento bar . . . 1803
51.2.2 Quadrilatero (q4); formulazione dettagliata . . . 1804
51.2.3 Elementi triangolari . . . 1808
51.2.3.1 Triangolo T3 . . . 1808
51.2.3.2 Triangolo T6 . . . 1810
51.2.4 Ex 51.1: Operatori giacobini . . . 1811
51.3 Integrazione numerica . . . 1812
51.3.1 Newton-Cotes . . . 1813
51.3.2 Quadratura Gauss-legendre . . . 1815
51.3.2.1 Polinomio Leggero . . . 1817
51.3.2.2 Quadratura Gauss-Legendre per $n = 2$ . . . 1817
51.3.3 Regioni rettangolari e prismi . . . 1818
51.3.4 Regioni triangolari . . . 1818
51.4 Recupero delle tensioni; tensioni nodali . . . 1818
51.5 Carico equivalente nodale . . . 1821
51.5.1 Carico gravitazionale . . . 1822
51.5.2 Carico di trazione . . . 1823
51.5.3 Deformazioni/tensioni iniziali; carico termico . . . 1824
51.5.4 Ordine di integrazione . . . 1825
51.5.4.1 Integrazione completa . . . 1825
51.5.4.2 Integrazione ridotta . . . 1826
51.5.4.3 Integrazione ridotta selettiva . . . 1827
51.6 Parassita/incompatibile elementi . . . 1828
51.6.1 Q4, il problema . . . 1828
51.6.2 Q6, la soluzione . . . 1829
51.6.3 Qm6, ulteriori miglioramenti . . . 1829
51.7 Rotazionale d.o.f. . . . 1830

52 Metodi dei residui pesati 1832
52.1 Introduzione . . . 1833
52.2 Formulazione generale . . . 1833
52.2.1 Operatori differenziali . . . 1833
52.2.1.1 Ex 52.1: Controllare la simmetria e la definizione positiva di un membro assiale 1D . . . 1834
52.2.2 Formulazione residua . . . 1834
52.3 Metodi residui ponderati . . . 1836
52.3.1 Metodo di collocazione punto . . . 1837
52.3.2 Metodo di collocazione sottodominio . . . 1837
52.3.3 Metodo di minimo-quares . . . 1837
52.3.4 Metodo di Galerkin . . . 1837
52.3.4.1 Ex 52.2: Vibrazione di stringa . . . 1838

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

52.4 Applicazioni del metodo Galerkin a problemi di elasticità 3D 1840
52.4.1 Derivazione della forma debole 1840
52.4.2 Discretizzazione 1842
52.4.2.1 Ex 52.3: Matrice di stiffness di un elemento del fascio . . . 1843
52.4.2.2 Ex 52.4: Trasferimento termico 1846

53 Dinamica II **1849**
53.1 Introduzione 1850
53.2 Idealizzazione per l'analisi dinamica 1851
53.2.1 Assilico *vs* Stiffamento flessibile 1851
53.2.2 Modelli 1852
53.2.2.1 Ex 53.1: Simulazione Monte Carlo di una risposta elastica lineare al carico laterale 1855
53.3 Formulazione dei problemi 1856
53.3.1 Formulazione Variazione 1856
53.3.2 Rappresentanza di massa 1858
53.3.3 Smorzamento 1859
53.3.3.1 Ex 53.2: Calibrazione dei coefficienti di smorzamento Rayleigh per un edificio 1861
53.3.3.2 Ex 53.3: Baseline analitica: vibrazione libera dalle condizioni iniziali generali 1862
53.3.4 Tecnica numerica: metodi Euler 1863
53.3.4.1 Ex 53.4: Metodo di Euler 1864
53.4 Dischio di tempo 1866
53.4.1 Implicita 1866
53.4.1.1 Metodo di Newmark 1866
53.4.1.1.1 Ritiro 1866
53.4.1.1.2 Nuovo β metodo implicito 1867
53.4.1.2 Metodo Hilber-hughes-taylor 1869
53.4.2 Integrazione temporale esplicita 1871
53.4.2.1 Sistemi lineari 1871
53.4.2.2 Sistemi non lineari 1874
53.5 Metodi numerici per l'analisi dinamica 1874
53.5.1 Metodo delle differenze centrali 1875
53.5.2 Ex 53.5: Passo temporale di stabilità per le differenze centrali 1875
53.5.3 Metodo Newmark-Beta 1876
53.5.4 Sovrapposizione modale e integrazione diretta 1876
53.6 Sistemi continui 1877
53.6.1 Vibrazione assiale delle barre 1877
53.6.1.1 Ex 53.6: Velocità d'onda e frequenze naturali assiali di una lega-rod in acciaio 1878
53.6.2 Vibrazione trasversale delle travi 1879
53.7 Dinamica non lineare 1880

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

53.7.1 Fonti di non linearità . . . 1880
53.7.2 Duttilità e progettazione secondo la capacità . . . 1880
53.8 Considerazioni pratiche . . . 1881
53.8.1 Smorzamento nelle strutture reali . . . 1881
53.8.2 Interazione terreno-struttura . . . 1881
53.8.3 Smorzatori a massa accordata . . . 1881
53.8.4 Isolamento alla base . . . 1882
53.9 Sintesi . . . 1882

IV Avanzato: non linearità e altri argomenti 1884

54 Introduzione **1885**
54.1 Introduzione . . . 1886
54.1.1 Fonti di non linearità . . . 1886
54.1.2 Perché un'analisi non lineare . . . 1888
54.2 Tipi di analisi strutturali non lineari . . . 1888
54.3 Carico/spostamento di tipo eccezionale . . . 1891
54.4 Sicurezza . . . 1891
54.4.1 Terminologia . . . 1891
54.4.2 Sicurezza & carichi . . . 1892
54.5 Codici di progettazione . . . 1893
54.5.1 Introduzione . . . 1893
54.5.2 Evoluzione: antichità . . . 1895
54.5.2.1 Mesopotamia; hamurabi . . . 1895
54.5.2.2 Romana; vitruvio . . . 1896
54.5.3 Tempi moderni . . . 1896
54.5.3.1 Progettazione dello stress, ASD . . . 1898
54.5.3.2 Resistenza al carico e progettazione dei fattori, LRFD . . . 1898
54.5.3.3 Ingegneria del terremoto . . . 1899
54.5.4 Sintesi . . . 1900

55 Plasticità I; Fibre & Continuum (per l'analisi degli elementi finiti) **1902**
55.1 Introduzione . . . 1903
55.2 Condizioni di resa in plastica . . . 1903
55.2.1 Modelli indipendenti a pressione idrostatica . . . 1904
55.2.2 Modelli a carico della pressione idrostatica . . . 1906
55.3 Osservazioni del laboratorio . . . 1908
55.3.1 Metalli . . . 1908
55.3.2 Concretamente . . . 1909
55.4 Insufficienza microscopica . . . 1909
55.4.1 Obbligazioni chimiche . . . 1909
55.4.2 Insufficienza duttile e fragile . . . 1910

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

55.4.3 Dislocazione . . . 1910
55.5 Fondamenti di plasticità . . . 1911
55.5.1 Introduzione . . . 1911
55.5.2 Modulo elastico tangente . . . 1912
55.5.2.1 Derivazione generalizzata . . . 1913
55.5.2.1.1 Funzione di snervamento; modello isotropica indurimento . . . 1913
55.5.2.1.2 Regola di flusso . . . 1913
55.5.2.1.2.1 Condizioni Kuhn-Tucker . . . 1914
55.5.2.1.3 Condizione della consistenza . . . 1915
55.5.2.1.4 Modulo tangente . . . 1915
55.5.2.2 Modulo tangente; ingegneria . . . 1916
55.5.2.3 Ex 55.1: Modulo tangente . . . 1917

56 Plasticità II; Sezioni: 1921
56.1 Introduzione . . . 1922
56.2 Quadro teorico: ipotesi e risultati chiave . . . 1922
56.3 Momento-curvatura; $M - \Phi$ . . . 1924
56.3.1 Dal momento della curvatura relazione . . . 1925
56.3.1.1 Ex 56.1: Analisi sezionale non lineare; analisi analitica . . . 1926
56.3.2 Dalla relazione tensione–deformazione . . . 1928
56.3.2.1 Ex 56.2: Layered; acciaio . . . 1929
56.3.2.2 Ex 56.3: Strati; cemento/ACI . . . 1934
56.4 Curvatura del momento, generalizzazione . . . 1936
56.4.1 Approccio analitico . . . 1936
56.4.1.1 Ex 56.4: Curvatura del momento di una sezione I R/C . . . 1938
56.4.1.2 Schema di interazione $M - N$ . . . 1943
56.4.2 Approccio numerico . . . 1943

57 Plasticità III; Struttura: Linee di Rendimento 1948
57.1 Introduzione . . . 1949
57.2 Elementi lineari (camere, cornici) . . . 1951
57.2.1 Approccio cinematico: limite superiore . . . 1951
57.2.1.1 Ex 57.1: Trave fissa; carico centrale . . . 1954
57.2.1.2 Ex 57.2: Trave fissa; carico compensato . . . 1954
57.2.1.3 Ex 57.3: Trave continua . . . 1954
57.2.1.4 Ex 57.4: Cornice ortogonale . . . 1955
57.2.1.5 Ex 57.5: Telaio incline . . . 1955
57.2.2 Statici; limite inferiore . . . 1957
57.2.2.1 Ex 57.6: Profilato cantiliver I . . . 1960
57.2.2.2 Ex 57.7: Cantiliver Propped II . . . 1960
57.2.2.3 Ex 57.8: Trave fissa . . . 1961
57.2.2.4 Ex 57.9: Telaio incline . . . 1962

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

57.3 Elementi planari (slab) . . . 1966
57.3.1 Statici: limite inferiore . . . 1967
57.3.1.1 Ex 57.10: Lastra quadrata . . . 1968
57.3.2 Kinematics: il limite superiore . . . 1968
57.3.2.1 Ex 57.11: Lastra rettangolare . . . 1970
57.4 Analisi del pushover . . . 1971
57.5 Analogie tra analisi a più basso limite e . . . 1972
57.5.1 Analisi del pushover . . . 1972
57.5.2 Plasticità concentrata . . . 1976

58 Meccanica di danno **1979**
58.1 PROPOSTA SENZA DISPONIBILE ChatGPT . . . 1979
58.1.1 Motivazione e fondazioni fisiche (~1.5 pagine) . . . 1979
58.2 Quadro termodinamico (~2 pagine) . . . 1979
58.3 Danni isotropici Scalari: il modello Mazars (~4 pagine) . . . 1980
58.4 Tensione - asimmetria di compressione e l'effetto unilaterale (~2 pagine) . . . 1980
58.5 Danni - accoppiamento di plastica (~2 pagine) . . . 1980
58.6 Regolamentazione e mesh oggettività (~3 pagine) . . . 1980
58.7 Applicazione a elementi di trave e colonne (~3 pagine) . . . 1981
58.8 Identificazione del parametro e guida pratica (~1.5 pagine) . . . 1981
58.9 Note bibliche e lettura ulteriore (~0,5 pagine) . . . 1981

59 Analisi non lineare; Materiale **1982**
59.1 Rilevamento della radice numerica . . . 1983
59.1.1 Metodi di Newton . . . 1983
59.1.1.1 Introduzione . . . 1983
59.1.1.2 Serie Taylor e linearizzazione . . . 1984
59.1.1.2.1 Ex 59.1: Metodo di Newton, scalare . . . 1986
59.1.1.3 Convergenza e stima degli errori . . . 1988
59.1.1.4 Osservazioni finali . . . 1989
59.1.1.4.1 Ex 59.2: Metodo di Newton; vettore . . . 1989
59.1.2 Metodo di secant . . . 1990
59.1.3 Esplicito . . . 1991
59.2 Relazioni con la meccanica strutturale; implicita . . . 1992
59.3 Metodi di integrazione . . . 1993
59.3.1 Controllo del carico . . . 1995
59.3.1.1 Metodo di rigidità Newton-raphson/tangent . . . 1995
59.3.1.2 Nuovo e nuovo . . . 1998
59.3.1.3 Metodo di Newton secante . . . 1999
59.3.1.4 Criteri di convergenza . . . 2000
59.3.1.5 Tavola sinottica . . . 2001
59.3.2 Controllo di spostamento . . . 2003

60 Analisi non lineare; Geometrica **2007**

COPIA DI REVISIONE

60.1 Matrice di rigidità geometrica . . . 2008
60.1.1 Ritiro . . . 2008
60.1.1.1 Forma di bagnatura . . . 2008
60.1.1.2 Deformazione . . . 2008
60.1.1.3 Energia da deformazione interna . . . 2009
60.1.1.4 $\mathbf{K}_g$ . . . 2010
60.1.2 Instabilità elastica; analisi biforcazione . . . 2011
60.1.2.1 Ex 60.1: Arresto della colonna . . . 2012
60.1.2.2 Ex 60.2: Guaina per telaio; soluzione Matlab . . . 2014
60.1.2.3 Ex 60.3: Fissaggio telaio; soluzione Mathematica . . . 2016
60.1.2.4 Ex 60.4: Impatto di carico assiale sulla deformazione flessorale 2017
60.2 Analisi esplicita . . . 2020
60.2.1 Ex 60.5: Grande deflettore del fascio di cantilever . . . 2022
60.3 $P-\Delta$ rivisitato . . . 2026
60.3.1 Ex 60.6: Carico di chiusura senza $\mathbf{K}_{geom}$ . . . 2026

61 Non lineare; Formulazione degli elementi 2030
61.1 Introduzione . . . 2031
61.2 Elemento di truss . . . 2031
61.2.1 Sistema di coordinamento per elemento truss 2D . . . 2033
61.2.2 Determinazione dello stato . . . 2034
61.3 formulazioni di elementi in schiuma-colonna . . . 2034
61.3.1 Elemento di trave 2D a base di stiffness . . . 2035
61.3.1.1 Sistema di coordinamento in elementi a trave 2D basati sulla rigidità . . . 2037
61.3.1.2 Determinazione dello stato . . . 2038
61.3.1.3 Errore di "Hidden' . . . 2042
61.3.1.4 Analisi non lineare utilizzando il metodo basato sulla rigidità 2042
61.4 Sezione di livello/fibra . . . 2046
61.4.1 Metodo di flessibilità elemento 2D trave-colonna . . . 2050
61.4.1.1 Sistema coordinato in elemento a trave 2D basato sulla flessibilità 2053
61.4.1.2 Determinazione dello stato . . . 2055
61.4.1.2.1 Senza iterazione a livello di elemento . . . 2055
61.4.1.2.2 Con il loop di iterazione Newton-Raphson nel livello degli elementi . . . 2058
61.4.1.3 Analisi non lineare utilizzando il metodo basato sulla flessibilità 2063
61.4.1.3.1 Senza iterazione a livello di elemento . . . 2064
61.4.1.3.2 Con il loop di iterazione newton-raphson nel livello degli elementi . . . 2067
61.4.2 Stiffa *vs.* elementi basati sulla flessibilità . . . 2071
61.5 Formulazione di elementi 2D a lunghezza zero . . . 2075
61.5.1 Sistema di coordinamento in elemento 2D a lunghezza zero . . . 2075
61.5.2 Determinazione dello stato di elementi . . . 2076

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

61.6 Elemento di sezione zero-lunghezza . . . 2079
61.6.1 Matrice di afflizione . . . 2079
61.6.2 Sistema coordinato . . . 2080
61.6.3 Determinazione dello stato di elementi . . . 2081
61.7 Integrazione numerica . . . 2083
61.8 Forza di base . . . 2083

62 Modelli costitutivi per la plasticità distribuita e lussata 2085
62.1 Introduzione . . . 2086
62.1.1 Termoplasticità lineare . . . 2086
62.1.2 Modelli euristici . . . 2087
62.2 Plasticità distribuita . . . 2089
62.2.1 Modelli in acciaio . . . 2089
62.2.1.1 Introduzione . . . 2089
62.2.1.2 Modello bilineare con indurimento isotropico . . . 2089
62.2.1.2.1 Relazione tensione–deformazione . . . 2089
62.2.1.2.2 Determinazione del modello bilineare . . . 2091
62.2.1.3 Modello Menegotto-pinto . . . 2091
62.2.2 Modelli concreti . . . 2099
62.2.2.1 Effetto della confinamento . . . 2099
62.2.2.2 Modello modificato di Kent e Park . . . 2100
62.2.2.2.1 Relazione tensione–deformazione . . . 2100
62.2.2.2.2 Determinazione per il modello di kent e park modificato . . . 2108
62.2.3 Modello di danno anisotropico con danni effettivi e recupero della rigidità . . . 2111
62.2.3.1 Modello costitutivo . . . 2111
62.2.3.2 formulazione multifibra non assiale . . . 2113
62.2.3.3 Determinazione del modello di danno anisotropico . . . 2114
62.2.3.3.1 Caricamento della tensione: . . . 2114
62.2.3.3.2 Caricamento a compressione: . . . 2115
62.2.3.4 Modello di danno anisotropico con ceppi permanenti . . . 2121
62.2.3.4.1 Schema numerico uniassiale . . . 2121
62.2.4 Aderenza–scorrimento . . . 2124
62.2.5 Elemento di sezione zero . . . 2126
62.3 Plasticità lussuosa . . . 2129
62.3.1 Lunghezza plastica . . . 2129
62.3.1.1 Possibili posizioni di cerniere in plastica . . . 2130
62.3.1.2 Deformazione da curvatura ($\Delta(\phi)$) . . . 2130
62.3.1.3 Rinforzato momento efficace del cemento di inerzia e curvatura 2132
62.3.1.4 Deformazione in termini di lunghezza della cerniera plastica 2133
62.3.1.4.1 Calcets rinforzato . . . 2133
62.3.1.4.2 Acciaio inossidabile . . . 2137

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

62.3.1.5 Ex 62.1: Cerniera di plastica in una colonna d'acciaio 2139
62.3.2 Modello di guasto della cinghia (materiale stato limite) 2139
62.3.2.1 Introduzione 2139
62.3.2.2 Modello di stato limite 2140
62.3.3 I modelli isterici di Ibarra che incorporano dissipazione dell'energia 2144
62.3.3.1 Modelli di Hysteresi 2149
62.3.3.1.1 Modello orientato al picco 2150
62.3.3.1.2 Modello di Pining 2151
62.3.3.2 Modalità di degrado della resistenza 2156
62.3.3.2.1 Modalità di degradazione della forza di base . . . 2159
62.3.3.2.2 Modalità di degrado della forza post-capping . . 2160
62.3.3.2.3 Scarico della modalità di degrado della rigidità . 2161
62.3.3.2.4 Modalità di degrado della rigidità accelerata . . . 2163
62.3.3.3 Sintesi 2164
62.3.4 Il modello di Ghannoum 2165
62.3.4.1 Curva della spina dorsale 2165
62.3.4.2 Comportamento ciclabile 2165

63 Scienza e Arte della modellazione degli elementi finiti 2169
63.1 Introduzione 2170
63.1.1 Verifica della mesh/analysis dell'elemento finito 2173
63.1.2 Concetti di verifica e validazione del modello 2173
63.2 Mesh 2175
63.2.1 Elementi Macro 2176
63.2.1.1 Ex 63.1: Modelli a colonna 2180
63.2.1.2 Ex 63.2: Modellazione di fascio 2181
63.2.2 Sezione trasversale 2181
63.2.3 "Pick and stick" 2182
63.2.4 Conclusioni 2182
63.3 Determinazioni dei parametri di deteriorazione 2183
63.3.1 Calibrazione 2184
63.3.1.1 Identificazione dei parametri 2184
63.3.2 Database dei parametri di modellazione 2184
63.3.2.1 Pari/Bibbia 2184
63.3.2.1.1 Proprietà della colonna 2186
63.3.2.1.2 Riassunto delle capacità flessografiche 2188
63.3.2.1.3 Esempio 2188
63.3.2.2 Stanford/Lignos 2189
63.3.2.3 UTSA/Ghannoum 2190
63.3.2.4 Elemento finito di continuum/Dolati 2190
63.3.2.5 ACI-437-A 2191

Intermezzo: Dall'analisi in avanti all'identificazione del parametro 2191

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

64 Dati e Dobbt: Analisi di incertezze e sensibilità 2195
64.1 Introduzione . . . 2196
64.2 Qualità dei dati e fonti di dominio . . . 2196
64.3 incertezza Quantificazione e analisi . . . 2197
64.3.1 Caratterizzazione dell'incertezza di Input . . . 2198
64.3.1.1 Tipi di incertezze . . . 2198
64.3.1.2 Rappresentanza matematica . . . 2198
64.3.2 Dipendenza e campionamento correlato . . . 2199
64.3.2.1 Covarianza e Correlazione . . . 2199
64.3.2.1.0.1 Ex 64.1: Matrice di correlazione . . . 2199
64.3.2.2 Covarianza spaziale . . . 2200
64.3.2.3 Covarianza temporanea . . . 2200
64.3.2.4 Generando campioni correlati . . . 2201
64.3.3 Propagazione dell'incertezza . . . 2201
64.3.3.1 Simulazione Monte Carlo (MCS) . . . 2202
64.3.3.2 Ipercubo latino Sampling (LHS) . . . 2202
64.3.3.2.0.1 Ex 64.2: Latin Hypercube: esempio lavorato con due variabili . . . 2205
64.3.3.3 Alternative approssimative e surrogate a Sampling diretto . . . 2206
64.3.3.3.1 Metodo di stima del punto (PEM) . . . 2206
64.3.3.3.1.1 Ex 64.3: Esempio di metodo di stima del punto . . . 2208
64.3.3.3.2 Uno alla volta (Serie Taylor stima di differenza finita TSFD) . . . 2208
64.3.3.3.2.1 Ex 64.4: Metodo di differenza finito della serie Taylor Esempio . . . 2209
64.3.3.3.3 Espansione di caos polinomiale (PCE) . . . 2210
64.3.3.3.3.1 Ex 64.5: Espansione di caos polinomiale . . . 2211
64.3.4 Interpretazione dell'incertezza di uscita . . . 2212
64.4 Analisi della sensibilità . . . 2212
64.4.1 Metodo di Morris . . . 2213
64.4.1.1 Ex 64.6: Metodo di Morris . . . 2217
64.4.2 Indici di sensibilità basati sulla variazione del sobol . . . 2218
64.4.2.1 Indici di primo ordine . . . 2218
64.4.2.2 Indici di interazione e effetto totale . . . 2219
64.4.2.3 Interpretazione . . . 2219
64.4.2.4 Computazione e costo . . . 2219
64.4.2.5 Relazione con la proiezione di Morris . . . 2220
64.4.3 Confronto dei metodi di propaganda e sensibilità . . . 2220
64.4.4 Determinazione delle variabili casuali importanti . . . 2220
64.4.4.1 Ex 64.7: Metodo Morris; identificazione di variabili importanti . . . 2221
64.4.5 Diagrammi di Tornado . . . 2225
64.5 Dall'analisi della sensibilità all'identificazione del parametro . . . 2225

COPIA DI REVISIONE

65 Decisioni: Metodi di identificazione del parametro **2228**
65.1 Identificazione del parametro come problema inverso . . . 2229
65.2 Applicazioni e Quadro delle decisioni . . . 2230
65.2.1 Dall'analisi della sensibilità all'identificazione del parametro . . . 2231
65.2.2 Quadro di decisione: quale metodo quando? . . . 2231
65.3 Qualità dei dati e robustezza . . . 2231
65.3.1 Fonti di contaminazione dei dati . . . 2231
65.3.2 Stima coerente del consenso: RANSAC . . . 2232
65.3.2.1 Algoritmo . . . 2232
65.4 Il Levenberg...Marquardt Algorithm . . . 2236
65.4.1 Modelli e selezione dei modelli . . . 2236
65.4.2 Pesato non lineare Piazze di latta . . . 2236
65.4.3 Levenberg–Marquardt Aggiornamento Passo e Intuizione Algoritmo 2237
65.4.4 Ex 65.1: Fissare un modello iperbolico non lineare . . . 2237
65.4.5 Scala, bobine e regolarizzazione . . . 2240
65.4.6 Identità . . . 2240
65.4.6.1 Ravvicinamento dell'incertezza locale . . . 2241
65.4.7 Modello di discrepanza . . . 2242
65.5 Identificazione del Parametro Bayesian . . . 2242
65.5.1 Identificazione del parametro Bayesian: Setup . . . 2243
65.5.2 Valutazione MAP e Stime Point . . . 2243
65.5.3 Sampling posterior e MCMC per parametri . . . 2244
65.5.4 Ex 65.2: Risalto Bayesiano con una Baside Quadratica e Metropolis–Hastings Sampling . . . 2244
65.5.5 Esempio di lavoro: Inferenza baieana per i parametri di degradazione 2245
65.5.6 Quando usare l'identificazione baiesca . . . 2246
65.6 Il Levenberg - Marquardt Algorithm in pratica . . . 2246
65.6.1 Pratica di minimo-quares . . . 2248
65.6.1.1 MATLAB Parameter Identification Program: Descrizione . . . 2249
65.7 Flussi ibridi di lavoro e migliori pratiche . . . 2257
65.7.1 Calibrazione e convalida . . . 2257
65.7.2 Applicazioni strutturali . . . 2257
65.7.3 Quadro di decisione del flusso di lavoro . . . 2257
65.8 Ponte a Performance Basato su Terremoto Ingegneria . . . 2258

66 Intermezzo **2262**
66.1 Limitazioni di progettazione del fattore di carico e resistenza (LRFD) . . . 2262
66.2 Perché passare a Performance-Based Earthquake Engineering (PBEE)? . . . 2263
66.3 I quattro componenti di PBEE . . . 2264
66.4 Struttura del Libro . . . 2265

67 Analisi dei rischi **2266**
67.1 Introduzione . . . 2267

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

67.2 Rapporto di ricorrenza . . . 2268
67.3 Modello di adattamento . . . 2270
67.3.1 Fondamenti . . . 2270
67.3.2 Boore, Joyner e Fumel (1997) . . . 2271
67.3.3 Valutazione parametrica . . . 2272
67.4 Analisi dei rischi sismici . . . 2274
67.5 Analisi dei rischi sismici . . . 2275
67.6 Tempo di acquisizione . . . 2277
67.7 Curve di rischio sismiche . . . 2277
67.8 Cartine di rischio sismica . . . 2279
67.9 Deaggregazione del rischio sismico . . . 2280
67.10 Spettri di risposta target . . . 2281
67.11 Simulazione di movimento a terra stocastica . . . 2285
67.11.1 Rezaeian e Der Kiureghian (r-d) modal . . . 2286
67.11.2 Yamamoto e Baker (y-b) modello . . . 2287
67.12 Funzioni di eccitazione del tempo di Endurance . . . 2289
67.12.1 Prima generazione di ETEF . . . 2290
67.12.2 Seconda generazione di ETEF . . . 2291
67.12.3 Terza generazione di ETEF . . . 2292
67.12.4 Quarta generazione di ETEF . . . 2292
67.12.5 Quinta generazione di ETEF . . . 2294
67.13 Ex 67.1: Analisi dei rischi sismici . . . 2295

68 Analisi Sismica dei rischi II **2300**
68.1 Introduzione . . . 2301
68.2 Tasso annuale di Eccedenza . . . 2302
68.3 Curva di pericolo . . . 2303
68.4 Analisi del rischio sismico di ingegneria (ESRA) . . . 2304
68.4.1 Ex 68.1: Calcolo del periodo di ritorno . . . 2305
68.5 Analisi dei rischi sismici probabilistici (PSHA) come SHA + ESRA . . . 2305

69 Analisi strutturale **2309**
69.1 Introduzione . . . 2310
69.2 Definizioni di base . . . 2311
69.3 Capacità e domanda . . . 2312
69.3.1 Relazioni con la capacità di domanda . . . 2312
69.3.2 Metodi di stima della domanda . . . 2313
69.3.3 Principi di progettazione della capacità . . . 2314
69.4 Metodi di analisi sismica . . . 2315
69.4.1 Analisi push-over (POA) . . . 2315
69.4.1.1 Ex 69.1: Esempio di curva della domanda . . . 2319
69.4.1.2 Ex 69.2: Analisi push-over; Esempio pratico . . . 2322
69.4.2 Analisi dinamica incredibile (IDA) . . . 2352

COPIA DI REVISIONE

69.4.3 Analisi a strisce multiple (MSA) . . . 2354
69.4.4 Analisi del cloud (CLA) . . . 2357
69.4.5 Analisi del tempo di resistenza (ETA) . . . 2358
69.4.6 Sintesi . . . 2360
69.5 Cosa c'è di più . . . 2362

70 Analisi dei danni **2364**
70.1 Introduzione . . . 2365
70.2 Stati di limite . . . 2366
70.2.1 Gerarchia degli Stati Limiti . . . 2367
70.2.2 Quadro di valutazione . . . 2367
70.2.3 Attuazione nel quadro PBEE . . . 2368
70.2.4 Calibrazione e convalida . . . 2368
70.2.5 Considerazioni multi-oggettive . . . 2368
70.2.6 Connessione agli indici di danno . . . 2369
70.3 Indici di danno . . . 2369
70.3.1 Indici di danno e criteri di prestazione . . . 2369
70.3.2 Trasmissione alla valutazione dei danni probabilistici . . . 2371
70.3.3 Rappresentanza probabilistica del danno . . . 2371
70.3.4 Parametri di domanda metrica e ingegneria (EDP) . . . 2372
70.3.5 chap: regione della fiducia in Valutazione dei danni . . . 2373
70.3.6 metriche di danno quantitativo . . . 2373
70.4 Prestazioni . . . 2375
70.4.1 Struttura di ingegneria basata sulle prestazioni . . . 2375
70.4.2 Livelli di prestazione e criteri di accettazione . . . 2377
70.4.3 Integrazione di Stati Limiti, Indici Damagine e Livelli Prestazioni . . . 2378
70.5 Trasmissione a Curve di Fragilità e Valutazione del rischio . . . 2380

71 Analisi della perdita **2382**

72 Valutazione del rischio probabilistico (⊇ PBEE)[8] **2385**
72.1 Nuovi parametri: Ingegneria del terremoto basata sulle prestazioni (PBEE) 2386
72.1.1 Limitazioni di carico e resistenza del fattore di progettazione (LRFD) 2386
72.1.2 Parte I: Obiettivi di performance espliciti . . . 2387
72.1.2.1 Metodo . . . 2387
72.1.2.2 Limitazioni di PBEE-1 . . . 2387
72.1.2.3 Progettazione vs. Analisi . . . 2389
72.1.3 Parte II: Quantificazione diretta delle conseguenze funzionali ed economiche: . . . 2389
72.1.3.1 Introduzione . . . 2389
72.1.3.2 Quadro generale . . . 2390
72.1.3.3 Differenze tra PBEE 1 e PBE E 2 . . . 2392
72.1.4 Procedura per l'attuazione del PBEE . . . 2394
72.2 Da risposta a danno: Curve di fragilità . . . 2395

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

72.2.1 Fondamenti e definizioni . . . 2396
72.2.2 Sviluppo di curve di fragilità . . . 2396
72.2.3 Rappresentanze matematiche . . . 2397
72.2.4 Funzione continua *vs.* Matrice discreta . . . 2398
72.3 Ruolo nel quadro PBEE . . . 2400
72.4 Ex 72.1: Esempio completo PBEE . . . 2401
72.5 Migliatoni storici e documenti fondativi . . . 2406

APPENDICI

Parte 1: Materiali di riferimento fondamentali

A Unità **2409**
A.1 Unità SI . . . 2409
A.2 Prefissi metrici e moltiplicatori . . . 2410
A.3 Unità & fattori di conversione . . . 2410
A.4 Riassunto della forza, della lunghezza, del lavoro e dello stress in varie unità metriche . . . 2411
A.5 Conversione di quantità fisiche da unità metriche a imperiali . . . 2411

B Carichi e progettazione basata su dati empirici **2412**
B.1 Carico morto . . . 2413
B.2 Carico del vento . . . 2413
B.2.1 Ex B.1: Carico del vento . . . 2415
B.3 Terremoti . . . 2416
B.3.1 Ex B.2: Caricamento del terremoto su una cornice . . . 2425
B.3.2 Ex B.3: Carico di terremoto su un edificio alto . . . 2426
B.4 Caricamenti del ponte . . . 2427
B.5 Combinazioni di carico . . . 2428
B.6 Riduzione del carico vivo . . . 2429
B.6.1 Ex B.4: Riduzione del carico vivo I . . . 2430
B.6.2 Ex B.5: Riduzione del carico vivo II . . . 2430
B.7 Posizionamento del carico . . . 2431

C Equazioni differenziali lineari omogenee **2432**
C.1 Riassunto delle equazioni differenziali di governo . . . 2432
C.2 Soluzioni . . . 2433
C.3 Stabilità i: $\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0$ . . . 2434
C.4 Stabilità ii; $\frac{d^4y}{dx^4} + k^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ . . . 2435
C.5 Fondo elastico in fascio; $\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^4y = 0$ . . . 2436

D Archi elastici; Analisi avanzate **2438**
D.1 Introduzione . . . 2439

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

D.2 Arco circolare a tre punte . . . 2439
D.2.1 Procedura di analisi . . . 2440
D.2.2 Carico di punto . . . 2441
D.2.3 Peso auto . . . 2447
D.2.4 Carico distribuito uniformemente . . . 2451
D.2.4.1 Sfittamento . . . 2453
D.2.5 Arco circolare a tre punte: validazione . . . 2454
D.2.6 Conclusioni . . . 2455
D.3 Due - arco circolare a cerniera . . . 2456
D.3.1 Procedura di analisi . . . 2456
D.3.2 Carico di punto . . . 2457
D.3.3 Peso auto . . . 2467
D.3.4 Carico distribuito uniformemente . . . 2475
D.3.5 Arco circolare a due punte: validazione . . . 2479
D.3.6 Conclusioni . . . 2482
D.4 Arco circolare senza cerniera . . . 2482
D.4.1 Procedura di analisi . . . 2482
D.4.2 Carico di punto . . . 2483
D.4.3 Peso auto . . . 2496
D.4.4 Carico distribuito uniformemente . . . 2504
D.4.5 Arco circolare senza cerniera: validazione . . . 2509
D.4.6 Conclusioni . . . 2511
D.5 Conclusioni . . . 2511

Parte 2: Tabelle di analisi e progettazione strutturale

E Tabelle di analisi delle conchiglie cilindriche 2514

F Progettazione di Barrel Shell Tetti 2527

G Set di dati del ponte di Alamillo 2556

H Identicon: hashing visivo 2561
H.1 Introduzione agli identicon . . . 2562
H.2 Algoritmi di generazione degli identicon . . . 2562
H.3 Implementazioni degli identicon di GitHub e Stack Exchange . . . 2564
H.4 La nostra applicazione MATLAB . . . 2565
H.5 Segmenti principali del codice . . . 2567
H.6 Utilizzo del programma . . . 2568
H.7 Vantaggi e applicazioni . . . 2569
H.8 Conclusioni . . . 2570

Parte 3: Implementazioni del codice

I MATLAB®, Mathematica Codici 2571

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

I.1 Parte I: Metodi di analisi fondamentali e computazionali 2573
I.1.1 Statici matrice di una truppa B 2573
I.1.2 Forma dell'arco di St louis 2575
I.1.3 Arbitro tre arco circolare a cerniera; mathematica 2577
I.1.4 Collasso di archi murari 2588
I.1.5 Principali 2588
I.1.6 Grande deflettore di un fascio 2599
I.2 Parte II: Progettazione e analisi strutturali 2604
I.2.1 Progettazione di conchiglie cilindriche 2604
I.2.2 Analisi approssimativa del telaio; metodo cantilever 2616
I.2.3 Torsione non uniforme 2628
I.2.4 Cornice ortogonale 2630
I.2.5 Cornice ortogonale ibrida 2634
I.2.6 Telaio; filo duro 2637
I.2.7 Metodo di rigidità diretta; telaio 2641
I.2.8 Codice principale 2641
I.2.9 Matrice di stiffness dei membri non prismatici 2653
I.2.10 Linee isostatiche 2659
I.2.11 Design evolutivo 2665
I.2.12 Principali 2665
I.2.13 Schema di interazione colonna 2671
I.2.14 Metodi variabili; mathematica 2674
I.2.15 Simulazione Monte Carlo della risposta elastica lineare di un edificio al carico laterale 2685
I.2.16 Elementi isoparametrici 2687
I.3 Parte III: Modellazione dei materiali e comportamento costitutivo 2698
I.3.1 Plastica fondamentale 2698
I.3.2 Modelli costitutivi 2702
I.3.3 Modello bilineare 2703
I.3.4 Indurimento 2707
I.3.5 Isteresi 2710
I.3.6 Modificato giuffre monegotto pinto 2729
I.3.7 Parco di kent modificato 2734
I.3.8 Ibarra 2739
I.3.8.1 Isteresi 2739
I.3.8.2 Pizzico di isteresi 2758
I.3.9 Portata di stato limite 2780
I.4 Parte IV: Metodi e Identificazione dei parametri Data-Driven 2801
I.4.1 Programma di identificazione del parametro 2801
I.4.2 Programma principale e Orchestrazione di base 2802
I.4.3 Integrazione di dati I/O e Spreadsheet 2811
I.4.4 Ottimizzazione del flusso di lavoro e funzioni ausiliarie 2823

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

I.5 Parte V: Fondazioni numeriche e statistiche . . . 2836
I.5.1 Levenberg-Marquardt . . . 2836
I.5.2 Tecniche numeriche . . . 2837
I.5.3 Filtri FFT e butterworth . . . 2837
I.5.4 Decomposizione del valore singolare . . . 2840
I.5.5 Precondizioni . . . 2842
I.5.6 Consenso di campionamento casuale (RANSAC) . . . 2844
I.5.7 Ipercubo latino . . . 2848
I.5.8 Regressione baieana con una base quadratica . . . 2853
I.5.9 Markov catena Monte Carlo Simulazione . . . 2860
I.6 Parte VI: Ottimizzazione e montaggio del parametro . . . 2862
I.6.1 Levenberg-Marquardt . . . 2862
I.6.2 Attuazione doganale . . . 2862
I.6.3 Utilizzo della funzione integrata . . . 2865
I.7 Parte VII: Affidabilità sismica e incertezza . . . 2867
I.7.1 Analisi dei rischi sismici . . . 2867
I.7.2 Ingegneria basata sulle prestazioni . . . 2870
I.8 Parte VIII: Utilità . . . 2875
I.8.1 Identico . . . 2875

J Esempi di MathCad **2881**

Parte 4: Metodi numerici e statistici

K Filtro a record sismico (Fast Fourrier Transforms) **3047**
K.1 Come Preparare il Tuo Nome . . . 3049

L Recensione di Algebra lineare **3053**
L.1 Su matrici . . . 3054
L.1.1 Definizioni . . . 3054
L.1.2 Operazioni di matrice elementare . . . 3055
L.1.3 Determinanti . . . 3056
L.1.4 Inversione . . . 3057
L.2 Soluzioni di equazioni lineari . . . 3058
L.2.1 Strategie . . . 3058
L.2.2 Decomposizione . . . 3059
L.2.2.1 Eliminazione di Gauss . . . 3059
L.2.2.2 Gauss-Jordan eliminazione . . . 3059
L.2.2.3 **LU** Decomposizione . . . 3060
L.2.2.4 La decomposizione di Cholesky . . . 3062
L.2.2.5 Decomposizione del valore singolare . . . 3063
L.2.2.6 Decomposizione QR . . . 3065
L.2.3 Metodi indiretti . . . 3065
L.2.3.1 Seidel di Gauss . . . 3065

COPIA DI REVISIONE

L.3 Caratteristiche della matrice e miglioramenti computazionali 3066
L.3.1 Singolarità e rango 3066
L.3.2 Valori e autovettori 3067
L.3.3 Numero di condizioni 3068
L.3.4 Pre condizionamento 3068
L.3.4.1 Precondizionamento a sinistra 3069
L.3.4.2 Precondizione giusta 3070
L.4 Esempi 3071
L.4.1 Ex L.1: Eliminazione di Gauss 3072
L.4.2 Ex L.2: Espulsione di Gauss-jordan 3072
L.4.3 Ex L.3: **lu** Decomposizione 3073
L.4.4 Ex L.4: La decomposizione di Cholesky 3074
L.4.5 Ex L.5: Gauss-seidel 3075
L.4.6 Ex L.6: Gauss-Seidel 3076
L.4.7 Ex L.7: Decomposizione del valore singolare 3077
L.4.8 Ex L.8: Precondizioni 3078

M Probabilità e Statistica **3081**
M.1 Introduzione alla probabilità e alle statistiche 3081
M.2 Concetti fondamentali di probabilità 3082
M.2.1 Determinazione *vs.* probabilità 3082
M.2.2 Definizione 3083
M.2.3 Probabilità condizionale 3083
M.2.4 Tipi di variabili casuali 3084
M.3 Strumenti statistici per l'analisi delle probabilità 3085
M.3.1 Funzione di distribuzione cumulativa 3086
M.3.2 Intervallo di fiducia 3086
M.4 Misure statistiche 3087
M.4.1 Momenti e misure di tendenza centrale 3087
M.4.2 Rapporti tra variabili 3090
M.5 Distribuzioni 3091
M.5.1 Distribuzioni Univariate 3091
M.5.1.1 Confronto 3093
M.5.2 Distribuzioni di bivariato 3095

N Indice di affidabilità **3098**

Parte 5: Teoria avanzata e ottimizzazione

O Meccanica di corpi deformabili, un Primer **3104**
O.1 Introduzione 3105
O.1.1 Notazione 3105
O.1.2 Tenori 3107
O.1.2.1 Operazioni 3108

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

O.1.2.2 Rotazione degli assi . . . 3109
O.1.2.3 Trasformazione dei tensori . . . 3110
O.1.2.4 Valori principali dei tensori simmetrici del secondo ordine . 3111
O.1.3 Interpretazione fisica degli invarianti dello stress . . . 3112
O.2 Campi vettoriali; meccanica di corpi deformabili . . . 3114
O.2.1 Forze . . . 3114
O.2.2 Tensore di stress del Cauchy . . . 3114
O.2.2.1 Tensori di stress idrostatico e deviatori . . . 3116
O.2.2.2 Rappresentanza geometrica degli stati di stress . . . 3117
O.2.3 Kinematics . . . 3117
O.2.3.1 Posizione e spostamento . . . 3117
O.2.3.2 Strains . . . 3118
O.3 Le leggi fondamentali della meccanica continuum . . . 3120
O.3.1 Le leggi sulla conservazione . . . 3121
O.3.2 Flussi . . . 3121
O.3.3 Conservazione della massa; equazione di continuità . . . 3122
O.3.4 Conservazione del moto; equazione del movimento . . . 3123
O.3.5 Conservazione dell'energia; primo principio della termodinamica . 3125
O.4 Equazioni costitutive . . . 3127
O.4.1 3D generale . . . 3128
O.4.2 caso isotropica trasversale . . . 3129
O.4.3 Casi 2D speciali . . . 3129
O.5 Osservazioni fenomenologiche . . . 3130
O.5.1 Test di carico, spostamento e controllo delle tensioni . . . 3131
O.5.2 Pre/post-peak risposta materiale di acciaio e cemento . . . 3132
O.6 Localizzazione della deformazione . . . 3133
O.6.1 Prove sperimentali . . . 3133
O.6.1.1 σ- diagramma di cod, modello di Hillerborg . . . 3133
O.7 Condizioni di bovino . . . 3137
O.8 Schema Tonti . . . 3137
O.9 Concetto di forza interna . . . 3139

P Omaggio a Westergaard **3140**
P.1 Crack punta campo di stress . . . 3141
P.1.1 Funzione di stringa aerodinamica . . . 3141
P.1.2 Soluzione . . . 3143
P.2 Interazione della struttura fluida . . . 3148

Q Regione Fiducia e Metodi Levenberg-Marquardt **3162**
Q.1 Regione della fiducia . . . 3163
Q.2 Algoritmo . . . 3167
Q.3 Formulazione in MATLAB® . . . 3167
Q.4 Visualizzazione in tempo reale . . . 3170

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

R Calcolo vettoriale: elementi introduttivi **3172**
R.1 Definizioni di base . . . 3173
R.1.1 Sfida estranea a una scalare . . . 3173
R.1.1.1 Ex R.1: Tangente a una curva . . . 3174
R.1.2 Divergenza . . . 3175
R.1.2.1 Vettore . . . 3175
R.1.2.1.1 Ex R.2: Divergenza di un vettore . . . 3177
R.1.2.2 Destinazione del secondo ordine . . . 3177
R.1.3 Gradiente . . . 3177
R.1.3.1 Campo Scalare . . . 3177
R.1.3.1.1 Ex R.3: Gradiente di un campo scalare I . . . 3178
R.1.3.1.2 Ex R.4: Gradiente di un campo scalare ii . . . 3178
R.1.3.2 Campo vettoriale . . . 3180
R.1.3.2.1 Ex R.5: Gradiente di un campo vettoriale . . . 3180
R.2 Teoremi integrativi . . . 3181
R.2.1 Integral di un vettore . . . 3181
R.2.2 Linea integrale . . . 3181
R.2.3 Integrazione per parti . . . 3182
R.2.4 Gauss; teorema divergenza . . . 3182
R.2.4.1 Ex R.6: interpretazione fisica del teorema divergente . . . 3183
R.2.5 Teorema di Stoke . . . 3184
R.2.6 Verde; teorema di gradiente . . . 3184

Riferimenti dei Libri II–IV e delle appendici **3185**

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Elenco delle figure (I–IV)

1.1 Carta stradale per l'ingegneria strutturale 8

2.1 Matematica babilonese 13
2.2 Google Doodle on π giorno (3/14/26); Omaggio a Archimedis 16
2.3 Euclide« la definizione della *rapporto estremo e medio* 17
2.4 Token di argilla mesopotamiana: precursori della scrittura (c. 3500 BCE) . . 18
2.5 Evoluzione del cuneiforme da pittografia (c. 3200 BCE) a segni sillabi astratti (c. 2000 BCE) 19
2.6 Geroglifico egiziano 19
2.7 La pietra di Rosetta (196 BCE), che porta lo stesso decreto in geroglifico, demotico e greco (dall'alto al basso), era la chiave per decifrare antico script egiziano 20
2.8 L'alfabeto fenicio (c. 1050 BCE), che mostra i 22 segni consonanti, i loro nomi, e la loro discesa in lettere greche e latine 21
2.9 Genealogia degli alfabeti: dal Fenicio (c. 1050 BCE) alle famiglie di script greci, latini, arabi, ebrei e brahmici 22

3.1 Argilla in Mesopotamia 26
3.2 Piramidi Maya e Azteca 26
3.3 templi e piramidi egiziane 28
3.4 Geometria egiziana e proporzioni piramidali 29
3.5 Erodoto sull'attraversamento del Bosforo da parte dei Persiani, (Herodotus, 1921 PDF) 35
3.6 Persia 36
3.7 Arabo-Islamico 38
3.8 Grecia 38
3.9 Emblematica costruzioni romane 43
3.10 Regole di proporzionalità vitruvia 44
3.11 India, Cina, Giappone 47

4.1 Cattedrali emblematici 51
4.2 Elementi strutturali della cattedrale 53
4.3 Confronto tra profili romani e gotici (Ching, 2011) 54

COPIA DI REVISIONE

4.4 Esempi di contrafforti volanti nelle cattedrali gotiche (Kim, 2016) 55
4.5 Sezione di croce cattedrale gotica (Ching, 2011) 55
4.6 Arco tipico (Ochsendorf, 2002) 56
4.7 Trasferimenti forzati attraverso le contraffazioni volanti 56
4.8 Comportamento del vaso (Hassan Fangary, 2010) 57
4.9 Geometria del buttress volante (Nikolinakou, Tallon e Ochsendorf, 2005) . . 57
4.10 Linee minime e massime di spinta (Kim, 2016) 58
4.11 Linee attive e passive di spinta (basate su (Heyman, 1966)) 58
4.12 Valutazione cinematica della struttura dell'arco e del meccanismo di guasto (Hassan Fangary, 2010) 59
4.13 Analisi fotoelastic delle volte gotiche 60
4.14 Orologio astronomico di Beauvais 62
4.15 Analisi comparativa della sezione trasversale (altezza della navata e sistema di matrattazione) di: (a) Cattedrale di Notre-Dame, Parigi; (b) Cattedrale di Amiens; e (c) Cattedrale di Beauvais (il disegno dell'autore basato su studi sezionali da Viollet-le-Duc, 1854 63
4.16 Analisi del collasso post-84 64
4.17 Ricostruzione Beauvais dopo il crollo del 1284 65
4.18 Disegni geometrici di Villard de Honnecourt *carnet*, illustrare le regole e i sistemi di proporzionalizzazione (De Honnecourt, 2006) 69
4.19 Duomo di Milano 70
4.20 Proporzione di progetti per progetti successivi 71
4.21 Osservazione di Poleni delle crepe nella cupola di San Pietro (Poleni, 1748) 74
4.22 Analogia della catena sospesa di Poleni (Poleni, 1748) 75
4.23 Rinforzo della cupola (Poleni, 1748) 76
4.24 La sagrada di Gaudi familia 77
4.25 *Spina pesce* e lossodrome mattone layout 78
4.26 Santa Maria del Fiore costruzione cupola 80
4.27 Il paranco ox-driven di Brunelleschi (King, 2010) 81

5.1 Bayt al-Hikma 86
5.2 Tre flauti perpetui, a sinistra dei secchi inclinabili, equilibrio centrale e sui carri a destra. 87
5.3 Opere seminali della rivoluzione scientifica, di Galileo, Newton, Bacon e Hooke 95
5.4 Scienza istituzionale 95
5.5 La linea temporale dell'ascesa della ragione scientifica 99

6.1 Leonardo da Vinci 117
6.2 La scrittura dello specchio di Leonardo spiega 117
6.3 Palladio (Palladio, 1570) 128
6.4 *Traité des ponts* (Gautier, 1765) 131
6.5 Pont du gard 131

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

6.6 I ponti di Perronet . . . 136
6.7 Rankine, 1862 «svalutazione delle dimensioni delle pietre chiave . . . 137
6.8 Dialogo di Galileo Galilei (Galilei, 1632) . . . 145
6.9 Galileo Galilei . . . 146
6.10 La scalatura di Galileo delle ossa (Galilei, 1638) . . . 147
6.11 Gancio e orologio . . . 154
6.12 Anagrammi 1675 di Hooke *A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments* (Hooke, 1676) . . . 155
6.13 Illustrazione di flexure elastica di Hooke *De Potentia Restitutiva* (Hooke, 1678) . . . 158
6.14 Molla a spirale elicoidale con pesi sospesi. Questa illustrazione iconica è comunemente attribuita a Hooke, anche se la sua provenienza rimane poco chiara; la figura riprodotta qui è presa da Andrade, 1950 . . . 159
6.15 Isaac Newton . . . 162
6.16 L'albero genealogico di Bernoulli (Membri evidenziati sono discussi in questo libro) e il loro cerchio intellettuale . . . 169
6.17 Illustrazione di Navier di ponti sospensioni . . . 188
6.18 Navier e Telford (ponti) . . . 190
6.19 Manuali di Rankine che corrompono meccanica applicata e ingegneria civile 198
6.20 James Clerk Maxwell . . . 201
6.21 Historical Timeline: Scientists, Artists, Musicians, Authors, and Politicians (1000–2020) . . . 228

7.1 Studi di forza assiale di Leonardo e Galileo . . . 237
7.2 Le vie di Galileo verso il fascio seminale a baldacchino . . . 239
7.3 Esperimenti Musschenbroek (Musschenbroek, 1739) . . . 240
7.4 Due lineamenti paralleli a stress flessore . . . 241
7.5 Gli schizzi di Leonardo, Folio 9v . . . 243
7.6 Gli schizzi di Leonardo, Folio 20v, (Zammattio, 1980) . . . 244
7.7 Il fascio seminale a baldacchino di Galileo . . . 245
7.8 La spiegazione di Galileo per la forza del fascio . . . 246
7.9 Sfiorazione di un "masonry beam"' rigido . . . 247
7.10 Modello con trave concettuale ispirato alla meccanica geometrica di Leibniz (Leibniz, 1684) . . . 249
7.11 Modelli di Mariotte (Heyman, 1998b) . . . 251
7.12 L'illustrazione di Galileo e dei modelli di Mariotte . . . 251
7.13 Modello del genitore . . . 252
7.14 Gli esperimenti di Coulomb (Coulomb, 1773c) . . . 253
7.15 La terza regola media di Young . . . 257
7.16 Estratto dalle annotazioni di Saint-Venant in (Clebsch, 1862b) . . . 259
7.17 Euler, Bernoulli e Hooke si uniscono (Euler, 1862) . . . 263

8.1 Cerchi di osculazione di un parabola . . . 270

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

8.2 La curvatura di Oresme . . . 271
8.3 La derivazione di Newton della curvatura . . . 274
8.4 Leibniz *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* (Leibniz, 1686b) . . . 275
8.5 La derivazione della curvatura di Johann Bernoulli . . . 276
8.6 La derivazione di curvatura di Jakob Bernoulli . . . 280
8.7 Il pendolo isorono di Huygens (Huygens, 1673) . . . 285

9.1 Elastica protagonisti . . . 293
9.2 Leibniz sulla portata del calcolo (Leibniz, 1858, p. 2–3). . . . 295
9.3 Gli schizzi di Leonardo per il catenario (Truesdell, 1960) . . . 298
9.4 Catenario; Christiaan Huygens (Huygens, 1888b) . . . 301
9.5 Jakob Bernoulli *Funicolare* sfida (Bernoulli, Jakob, 1690b, p. 219) . . . 304
9.6 Leibniz risponde a Huygens, oct, 1690 (Leibniz, 1923) . . . 307
9.7 Giugno 1691 *eruditis* soluzioni alla sfida catenaria di Jakob Bernoulli . . . 310
9.8 La sfida di Bernoulli, (Bernoulli, Jakob, 1690a) . . . 317
9.9 L'elastica di Jakob Bernoulli . . . 317
9.10 Gli architetti della teoria dell'elastica: gli apparecchi matematici di Basilea (Wikipedia) . . . 318
9.11 La curvatura di Jakob Bernoulli Laminae Elasticae... (Bernoulli, Jakob, 1694) 319
9.12 L'obiezione di Huygens del 1694 alla soluzione di Bernoulli. . . . 325
9.13 La sfida del brachistochrone di Johann Bernoulli (Bernoulli, Johann, 1696) 331
9.14 La soluzione 1697 di Johann Bernoulli della sfida del brachistochrone (Bernoulli, Johann, 1697a) . . . 332
9.15 La lettera di Daniel Bernoulli a Euler, (Bernoulli, Daniel, 1845) . . . 336
9.16 Il trattato di Euler del 1744 sul calcolo delle variazioni (Euler, 1744b) . . . 340
9.17 Metodo diretto di Euler "free body diagram" . . . 344
9.18 L'elastica "species' di Euler in termini di parametro di carico c^2/a^2 . . . 350
9.19 Operatori variabili e differenziali . . . 358
9.20 La sfida anonima del 1724 *Atto Eruditorum* (Anonymous, 1724), firmato misteriosamente come "LBC' . . . 362
9.21 Daniel Bernoulli e Leonhard Euler, l'innovativo 1728 pubblicazioni (Euler, 1728). . . . 364
9.22 Analisi del fascio di Bernoulli che mostra effetti di carico auto-peso e applicato 364
9.23 Euler, 1732 *Solutio problematis de invenienda curva* . . . 366
9.24 Studi di compressione precoce si concentrano su fenomeni di instabilità assiale. . . . 375
9.25 Carta seminale di Euler su buckling (Euler, 1759) . . . 376
9.26 Euler, 1759 dichiarazione del carico di buckling critico . . . 379
9.27 Euler "grand-unifying' paper, (Euler, 1771) . . . 381
9.28 Il diagramma di Euler per l'equilibrio generale di una linea (Euler, 1771). 382

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

10.1 L'argomentazione del tetraedro di Cauchy. Un tetraedro infinitesimale è tagliato dal corpo, con tre facce perpendicolari agli assi di coordinate e un volto inclinato con unità normale **n**. Equilibrio del tetraedro, come la sua dimensione si restringe a zero, cede il rapporto $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \sigma \cdot \mathbf{n}$. 404
10.2 Forze di superficie 405
10.3 Cauchy: tetraedro allo stress 405

11.1 La formulazione del metodo di deflettorazione del pendio del 1915 di Maney (Maney, 1915) 446
11.2 Metodo di approssimazioni successive di Seidel 1873 per la risoluzione di sistemi lineari (Seidel, 1873). Mentre matematicamente suonava, mancava l'interpretazione fisica che gli ingegneri cercavano. 447
11.3 Hardy Cross carta trasformativa 448
11.4 adattamento del 1934 di Goldberg di deflettore di pendenza per l'analisi del carico eolico (Goldberg, 1934) 449
11.5 Metodo di rilassamento di Southwell (Southwell, 1935) 450
11.6 Dalla fisica newtoniana (top) attraverso equazioni di campo (middle) ai principi variazionali lagrangiani (bottom). 456

12.1 Il lavoro sperimentale di Pearson sulle dighe (Pearson et al., 1907) 464
12.2 Analisi di differenze finite di Richardson per un problema di stress della diga (Richardson, 1911) 465
12.3 Aeromobili commerciali degli anni '50 468
12.4 Il problema dell'ala delta e i tentativi di soluzione precoce 469
12.5 Dettagli di Levy, 1953 471
12.6 Analisi strutturale della matrice (Turner et al., 1956) 472
12.7 Confronto tra la forza e gli approcci di spostamento (Argyris e Kelsey, 1960; Przemieniecki, 1968) 474
12.8 Il coraggio presenta *prova funcrr* (Courant, 1943) 476
12.9 Fondamenti matematici del metodo degli elementi finiti 478
12.10 La carta di Clough del 1960 nomina il metodo dell'elemento finito (Clough, 1960) 480
12.11 Analisi degli elementi finiti di Norfork Dam (Clough, 1962; Clough e Wilson, 1962) 481
12.12 Prima analisi degli elementi finiti non lineari (Wilson, 1960) 482
12.13 Analisi degli elementi finiti di prima dinamica (Wilson e Clough, 1962) . 483
12.14 I fondatori moderni del metodo degli elementi finiti 485
12.15 Generalizzazione del metodo degli elementi finiti a molteplici discipline fisiche: nonostante diverse equazioni di governo, tutti producono la stessa struttura algebrica 486

13.1 Abaco cinese tradizionale (suanpan) 494
13.2 Regole di scorrimento dell'istituto 495

COPIA DI REVISIONE

13.3 Leibniz's Stepped Reckoner . . . 495
13.4 Calcolatore elettronico Casio (ca. 1970) . . . 496
13.5 Il primo calcolatore dell'autore . . . 497
13.6 Motore analitico di Babbage . . . 498
13.7 Analizzatore differenziale di Bush . . . 499
13.8 Computer ENIAC . . . 499
13.9 Carte di punzonatura e flusso di lavoro di elaborazione batch . . . 502
13.10 Eample di MathCad . . . 506

14.1 Deità associate alla forza nell'antichità . . . 512
14.2 I principali primi influencer del concetto di forza . . . 515
14.3 Empedocle (circa) . . . 516
14.4 La prova di Archimedes della legge della leva . . . 520
14.5 Buridan, Oresme . . . 525
14.6 Leonardo, benedetti, galileo, kepler, descartes, leibniz, newton . . . 527
14.7 Nozioni di equilibrio Pardies, 1710 . . . 529
14.8 Simon Stevin (1548-1620) . . . 530
14.9 La pubblicazione principale di Stevin (Stevin, 1586) . . . 530
14.10 La raffigurazione di Stevin di un corpo sostenuto da uno o due corde; (Stevin, 1586) e (Miller, 2017) . . . 531
14.11 Stevin's *clootcrans* dimostrazione. . . . 532
14.12 Studio piano inclinato di Galileo (Galilei, 1594) . . . 536
14.13 Calcoli Keplero (Kepler, 1855) . . . 538
14.14 René Descartes (1596–1650) . . . 540
14.15 L'assioma di Torricelli . . . 546
14.16 Bernoulli su parallelogramma di forze (Bernoulli, Daniel, 1726) . . . 552
14.17 Le velocità geometriche di Johann Bernoulli, (Bernoulli, Johann, 1725) . . . 554
14.18 Nozioni di equilibrio Varignon, 1725 . . . 555
14.19 D'Alembert sulla controversia vis viva: una disputa che ritiene inutile, ma brevemente affrontata (d'Alembert, 1743) . . . 557
14.20 D'Alembert in movimento come unica fondazione della meccanica (d'Alembert, 1743) . . . 558
14.21 D'Alembert sul parallelogramma delle forze (d'Alembert, 1743) . . . 559
14.22 Le osservazioni finali di D'Alembert sul parallelogramma delle forze (d'Alembert, 1773) . . . 560
14.23 La prova di Lagrange del principio di velocità virtuale utilizzando blocchi puleggia (dopo (Salençon, 2018)) . . . 564
14.24 Carnot's illustrando sistemi di corpi, movimenti geometrici e meccanica d'impatto (Carnot, 1803) . . . 567

15.1 Vitruvibile . . . 578
15.2 Evoluzione delle regole empiriche per il disegno del ponte ad arco (dopo (Huerta, 2018)). . . . 581

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

15.3 Galileo sfida Vitruvius (Galilei, 1632) . . . 582
15.4 Design del ponte rinascimentale: le regole geometriche di Alberti e gli esempi documentati di Palladio (Huerta, 2018) . . . 589
15.5 Palladio *Quattro libri di architettura* (Palladio, 1570) . . . 591
15.6 Charles-Édouard Jeanneret Le Corbusier . . . 595
15.7 Sistemi antropometrici di proporzione: dalla geometria medievale all'umanesimo rinascimentale al modernismo del XX secolo . . . 598
15.8 Piano di Panagia Koumbelidiki (Kastoria, 10° sec.) con *ad un quadratum* tracciamento (Oikonomou, 2022) . . . 599
15.9 Sezione di Notre-Dame de Paris con *ad un triangulum* tracciamento (Oikonomou, 2022) . . . 600
15.10 Analisi del piano non (Oikonomou, 2022) . . . 600
15.11 Bagno ottomano a Florina (18° c.) Redrawn dopo Oikonomou, 2022 . . . 604
15.12 Le Corbusier's *ingénieur-architecte* fotogramma (Pierrefeu e Corbusier, 1942). 606
15.13 Illustrazioni da de l'Orme (De l'Orme, 1561) . . . 609
15.14 Illustrazioni da Willis, 1910 . . . 610
15.15 Trasferimento di carico in archi . . . 611
15.16 Gustave Eiffel: la torre e il ponte . . . 612
15.17 Robert Maillart . . . 615
15.18 Notre Dame Raincy (1923) . . . 617
15.19 Torroja, Zarzuela Hippodrome . . . 619
15.20 *L'Ingegnere* Pier Luigi Nervi . . . 621
15.21 Esempi di linee isostatiche . . . 624
15.22 Nervi e architettura biomimetica . . . 624
15.23 Nervi: ingegnere strutturale e materiale . . . 627
15.24 Le strutture iconiche di Nervi . . . 627
15.25 Riccardo Morandi . . . 628
15.26 Ponte Sunniberg di Menn . . . 630
15.27 Gli edifici iconici di Khan . . . 633
15.28 L'indagine di Poleni su St. La cupola di Peter si sta spaccando (Poleni, 1748) 637
15.29 La Sagrada Familia di Gaudí . . . 638
15.30 Arco di gateway di Saarinen . . . 639
15.31 Frei Otto . . . 639
15.32 Esempi moderni di formazione-finanziamento attraverso modelli fisici . . . 640
15.33 Ponte di Musmeci sul fiume Basento . . . 641
15.34 Strutture reciproche: concetti illustrativi . . . 642
15.35 Esempi primitivi di strutture reciproche . . . 643
15.36 Analisi delle strutture reciproche Wallis, 1695 . . . 644
15.37 Salone dell'Esposizione di Seiwa (Giappone) (Popovic, 1996) . . . 644
15.38 Parametrizzazione di un modulo di telaio reciproco (Popovic, 1996) . . . 645
15.39 Design ottimale (Michell, 1904) . . . 647
15.40 Michell trus . . . 648

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

15.41 Ottimizzazione della topologia strutturale (Beghini et al., 2014) 648
15.42 Le conchiglie iperboliche-paraboloide di Félix Candela 654
15.43 La scultura di Frank Gehry Bilbao Guggenheim e Richard Serra 655
15.44 Calatrava: eleganza strutturale nel ponte Alamillo contro la stazione TGV di Lyon Saint-Exupéry visivamente ingombrante. 656
15.45 Yamasaki e Robertson: dal prototipo di Seattle all'influenza globale 660
15.46 Baker e il Burj Khalifa: sofisticazione computazionale al servizio dell'ambizione architettonica (Baker, Skidmore et al., 2013) 663
15.47 Virlogeux e il Viadotto di Millau: poesia strutturale su scala senza precedenti (Virlogeux et al., 2005) 665
15.48 Sistemi strutturali alternativi per ponti a più posti, tutti respinti da Virlogeux per motivi estetici (Virlogeux et al., 2005) 665
15.49 Architettura come arte pura: forma liberata dall'espressione strutturale . . 668
15.50 Funzione e bellezza: la penna e il ponte 668
15.51 Autentica arte strutturale: struttura come pura espressione 669
15.52 Da celebrazione alla critica: prospettive in evoluzione sulla creatività strutturale 673

16.1 Struttura tematica del capitolo 676
16.2 Esempi di *Namazu-e* stampe raffiguranti il pesce gatto gigante responsabile dei terremoti (Miyata e Takada, 1995) 678
16.3 Oggetti cerimoniali della costa nord-occidentale del Pacifico che rappresentano la sismica spiriti. 681
16.4 *Israele al Monte Sinai* (1703) di Jan Luyken. L'incisione illustra la teophania sismica come un totale sconvolgimento ambientale, dove il frastagliato, instabile la resa delle vette suggerisce lo "stupido violento" della terra in risposta la presenza divina. 684
16.5 Stoning dell'apostolo Filippo a Hierapolis, Phrygia (Jan Luyken, 1685). . . . 686
16.6 La battaglia di Gerico (c. 1560) di Virgil Solis (Kozac Collection)). 687
16.7 Il mito di Enceladus 689
16.8 Tholos di Delphi, un tempio circolare costruito tra il 380 e il 360 a.C. all'interno del Santuario di Athena Pronaia a Delphi, Grecia. 691
16.9 icona russa del XVIII secolo raffigurante il Miracolo dell'Arcangelo Michele a Chonae. 693
16.10 I serpenti cosmici come forze stabilizzanti e protettive in indù e buddisti iconografia. 696
16.11 Rendering calligrafico di Surah 99:1–8 (*Al-Zalzalah*) 697
16.12 Il *Piedra del Sol* (Aztec Sun Stone), con *Ollin* glyph al suo centro. 700
16.13 Il Santuario di Kashima (Prefettura di Ibaraki), sede di *Takemikazuchi-no-kami* e il sito principale di Shinto sismica rituale di protezione nel Giappone premoderno. 702

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

16.14 A talismanic *Namazu-e* stampa raffigurante *Takemikazuchi-no-kami* sottomettere il pesce gatto. . . . 703
16.15 Lisbonane, prima e dopo . . . 714
16.16 Gibellina distrutta e tombata in cemento . . . 721
16.17 Gibellina Nuova . . . 722
16.18 Cueva de la Serpiente mural, Sierra de San Francisco, Baja California. . . . 724
16.19 Pictografi a Chumash Painted Cave, Santa Ynez Mountains, California. . . . 725
16.20 Due risposte pittoriche alla catastrofe sismica . . . 726
16.21 Contributi selezionati (Warhol, Mapplethorpe e Kiefer) alla Collezione Amelio 728

17.1 Analisi strutturale; il quadro generale . . . 864
17.2 Tipi di forze in elementi strutturali (1d) . . . 870
17.3 Aspetti fondamentali dei sistemi di cavi . . . 870
17.4 Aspetti di base degli archi . . . 871
17.5 Tipi di capriate . . . 872
17.6 Variazioni nelle configurazioni di post e travi . . . 872
17.7 Tipi di fascio diversi . . . 873
17.8 Forme di base di cornici . . . 874
17.9 Esempi di strutture supportate dall'aria . . . 874
17.10 Forme di base delle conchiglie . . . 875
17.11 Sequenza dei corsi di ingegneria strutturale . . . 877

18.1 Mappa della neve degli stati uniti . . . 880
18.2 Airfoil, equazione di Bernoulli. . . . 881
18.3 Mappa del vento degli stati uniti . . . 882
18.4 Effetto del carico eolico sulle strutture . . . 883
18.5 Mappa sismica degli stati uniti . . . 884
18.6 Carico terrestre e idrostatico su strutture . . . 887
18.7 Carico proiettato . . . 891
18.8 Posizionamento del carico per massimizzare i momenti . . . 892
18.9 Trasferimento di carico negli edifici R/C . . . 895
18.10 Azioni in una o due modalità nelle lastre . . . 895
18.11 Meccanismi di trasferimento del carico nelle cattedrali gotiche e archi poco profondi . . . 897
18.12 Concetto di aree tributarie per il carico dei membri strutturali . . . 898
18.13 Vita di carico di una struttura, (Lin e Stotesbury, 1981) . . . 900

19.1 Esempi di confini delle reazioni . . . 904
19.2 Equilibrio di momenti, da leonardo (Da Vinci, 1490)a Calder . . . 906
19.3 Inclinea le reazioni di supporto del rullo . . . 907
19.4 Grado di indeterminanza statica . . . 907
19.5 Le reazioni sono concomitanti . . . 908
19.6 Gratuiti diagrammi corporei di un fascio sottoposto a carichi diversi . . . 909

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

20.1 Trucchi staticamente indeterminati . . . 930
20.2 Relazione tra forze e lunghezze . . . 931
20.3 Presentare le forze con frecce . . . 932
20.4 Metodo congiunto/matrix, diagrammi corpo libero articolari . . . 941
20.5 Complessivamente determinata trus . . . 942

21.1 Stress interni . . . 949
21.2 Forze interne in travi rettilinee e curve . . . 951
21.3 Forze interne . . . 953
21.4 Portata e momento firma convenzioni per il design . . . 953
21.5 Convenzioni di cartello di progettazione . . . 953
21.6 Schema corpo libero di un segmento del fascio infinitesimale . . . 954
21.7 Variazioni di carico, taglio e momenti . . . 956

22.1 Curvatura e ceppi . . . 981
22.2 Convegno di segnale per il metodo dell'area della curvatura per curve opposte del fascio . . . 993
22.3 Metodi di area curvatura . . . 993
22.4 Sflessione massima utilizzando il metodo della zona di momento . . . 997
22.5 Travi a ponte . . . 1003

23.1 Deformazione pura della tosapa . . . 1008
23.2 Elemento infinitesimale sottoposto a stress della tosapa . . . 1008
23.3 Stress e coefficiente di taglio . . . 1010
23.4 Rapporti di rotazione della tortura . . . 1013
23.5 Perché si verifica la guerra . . . 1015
23.6 Torsione non uniforme (adattato da (McGuire e Winter, 1968)) . . . 1016
23.7 Ho un fascio sottoposto a torsione . . . 1018

24.1 Forze virtuali e reali in una struttura arbitraria . . . 1026
24.2 Teorema reciproco Maxwell-betti . . . 1029

25.1 Struttura del cavo staticamente indeterminata 3 . . . 1055
25.2 Trave di cantilever . . . 1057
25.3 Problema illustrativo per il metodo di flessibilità . . . 1058
25.4 Illustrazione del metodo di flessibilità con due sconosciuti . . . 1060
25.5 Esempi di strutture ispirate a regine-post . . . 1076
25.6 Equazione di tre momenti, derivazione . . . 1081
25.7 Equazione di tre momenti, termini di carico . . . 1083

26.1 Convegno di segnale per il metodo di rigidità . . . 1088
26.2 Formulazione di problemi flessibili per i termini di rigidità . . . 1090

27.1 Esempio illustrativo per il metodo di deflettore del pendio . . . 1099

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

27.2 Concetti chiave della distribuzione del momento 1110

28.1 Müller-Breslau Principio 1122

29.1 Stabilità di una barra rigida 1134
29.2 Stabilità di una barra rigida con imperfezione iniziale 1135
29.3 Colonna di fascio semplicemente supportata; segmento differenziale; effetto della forza assiale p 1137
29.4 Sistema dinamico a due dof 1149
29.5 Efficace lunghezza per travi e cornici 1151
29.6 Colonne lunghezze efficaci in un multi-bay cornici a più piani 1151
29.7 Grafico di allineamento per connessioni semi-flessibili (American Institute of Steel Construction, 2016) 1152
29.8 Inelastica buckling 1154
29.9 Curva della colonna di Euler e ssrc 1154

30.1 Verifica della teoria dei cavi 1158
30.2 Geometria del cavo # 1 1161
30.3 Geometria del cavo # 2 1163
30.4 Geometria di un cavo inclinato sottoposto a carico trasversale orizzontale uniforme 1169
30.5 Durezza del cavo 1170
30.6 Coordinate di riferimento alternative catanarie 1181
30.7 Catenario con corda inclinata, (Cella, 1999) 1183
30.8 Confronto tra soluzioni a catenaria e parabolica 1188

31.1 Che cosa è un voussoir 1191
31.2 Arch analizza per de la rental 1192
31.3 Radici quadratiche e cubice di grandi numeri de Belidor, B. F., 1757 1193
31.4 La tavola di Belidor per dimensionare il supporto verticale (*pied-droit*) di archi secondo de La Hire; de Belidor, B. F., 1757 1193
31.5 Analisi di archi (de Belidor, B. F., 1729) 1195
31.6 I criteri di fallimento di Belidor (Brandonisio e De Luca, 2020) 1195
31.7 Analisi di archi (Couplet, 1729) 1197
31.8 Modelli di liste Danyzy, 1732 1197
31.9 Analisi di voussoirs senza frizione da Coulomb, 1773 1199
31.10 Il principio di Moseley meno resistenza (Moseley, 1869) 1200
31.11 Ponte di Charles Mosca voussoir (turin) analizzato da (Castigliano, 1879) 1201
31.12 Analisi elastica di Winkler degli archi (Winkler, 1880) 1201
31.13 Apparecchi sperimentali utilizzati da Pippard, Tranter e Chitty, 1936 per indagare la stabilità di archi voussoir. 1202
31.14 Insufficienza graduale di un voussoir Pippard, Tranter e Chitty, 1936 . . . 1203
31.15 Voussoirs analizza da Pippard e Baker, 1943 1204

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

31.16 Flusso di forze attraverso i blocchi in un arco 1209
31.17 Determinazione dell'insieme delle forze all'origine 1211
31.18 MATLAB®sequenza generata di cerniere in un voussoir 1212
31.19 Meccanismi di colata; spinte d'abutmento (Nobile e Bartolomeo, 2014 PDF) . 1216
31.20 Poligono funicolare invertito e corrispondente linea di spinta ed eccentricità 1217
31.21 Modalità di guasto di un arco semi-cerca a tre cerniera 1218
31.22 Sequenza delle posizioni di cerniera 1218

32.1 Momento resiste alle forze in un arco o sistema di sospensione rispetto a una trave, (Lin e Stotesbury, 1981) 1221
32.2 Statici di un arco a tre punte 1222
32.3 Due arco a cerniera, analogia con fascio fisso (Lin e Stotesbury, 1981) . . . 1229
32.4 Centro di gravità di un voussoir 1238
32.5 Equilibrio di un voussoir infinitesimale 1239
32.6 Arco parabolico ottimale per un carico uniforme 1244
32.7 Arco parabolico senza cerniera; diagramma corpo libero 1250
32.8 Effetto di insediamento iniziale e cambiamento della temperatura 1255
32.9 Scala a spirale al museo louvre (paris), e la cattedrale di sagrada familia (barcelona) 1262
32.10 Geometria della struttura curva nello spazio 1262
32.11 Schema corpo libero di una struttura curva nello spazio 1263

34.1 Slocazioni e sollecitazioni in un piatto 1279
34.2 Internal forces 1282
34.3 Stress distribution 1287
34.4 Equilibrium of a circular plate infinitesimal element 1291

35.1 Elemento di conchiglia differenziale, geometria, sollecitazioni e loro risultati 1299
35.2 Kinematics di elemento differenziale 1299
35.3 Equilibrio di elemento conchiglia differenziale 1301
35.4 elemento di conchiglia differenziale, V_x stress risultati 1305
35.5 Elemento di conchiglia differenziale, curvature principali 1306
35.6 Differential shell element, initial and deformed state 1310
35.7 Elemento di conchiglia differenziale, stato iniziale e deformato; ceppo di taglio causato da aumento della lunghezza dei lati positivi 1312
35.8 Differential shell element, initial and deformed state; rotation 1313
35.9 Middle surface of differential element 1315
35.10 Classification of shells 1324
35.11 Esempi di conchiglie dove l'assunzione della membrana è (per lo più) valida 1325
35.12 Gratuiti diagrammi del corpo di elemento iperboloide e cupola infinitesimale 1327
35.13 Schema corpo libero di un elemento shell circolare infinitesimale 1329
35.14 La distribuzione risultante di stringa in una shell circolare completa semplicemente supportata 1332

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

35.15 Edge effects 1334
35.16 Corrective applied line load in circular shell 1335
35.17 Sine series plot 1335
35.18 Statically indeterminate shell and beam analogies 1353
35.19 Circular shells resting on an elastic support 1354

36.1 oscillatore monogrado di libero dominio 1376
36.2 Curve di amplificazione dinamica concettuale per un oscillatore SDOF smorzato sotto forza armonica 1384
36.3 spettro di risposta accelerata S_a come funzione di periodo naturale T_n per vari rapporti di smorzamento. 1393
36.4 Le prime tre forme di modalità di un raggio semplicemente supportato . . 1397
36.5 Ciclo elastoplastico bilineare isteresi sotto carico simmetrico ciclico. . . . 1404

37.1 Interazioni iterative dell'ingegnere architettonico 1414
37.2 Domanda e capacità in un fascio 1415
37.3 Sicurezza 1415
37.4 Funzioni di distribuzione probabili C e D 1418
37.5 Probabilità del fallimento in termini di β 1420
37.6 Analisi di stato limite di una sezione in cemento armato cracked 1421
37.7 Blocco di stress Whitney 1423
37.8 Colonna corpo libero e diagrammi di interazione 1430
37.9 Colonna corpo libero, stato equilibrato 1432

38.1 Rotture d'angolo compatibili 1447
38.2 Sfiorazione di un semplice fascio 1447
38.3 Sfiorazione del telaio portale con colonne rigide sotto carico verticale . . . 1448
38.4 Sfiorazione del telaio portale sotto carico verticale 1448
38.5 Esempio di telaio portale soggetto a carico laterale 1448
38.6 Forma e diagramma di momento scelti; telaio portale con carico laterale . 1449
38.7 Deflettori di vapore in termini di rigidità di sostegno 1450
38.8 Telaio sotto carico verticale; posizione approssimativa dei punti di inflessione 1452
38.9 analisi approssimativa dei frame sottoposti a carichi verticali; momenti traversi 1453
38.10 Analisi approssimativa dei telai sottoposti a carichi verticali; forze assiali della colonna 1453
38.11 analisi approssimativa dei frame sottoposti a carichi verticali 1454
38.12 Analisi approssimativa dei telai sottoposti a carichi laterali; cesoia della colonna 1455
38.13 analisi approssimativa dei frame sottoposti a carichi laterali; momento trave 1456
38.14 Deformazione della cesoia in un edificio breve,(Lin e Stotesbury, 1981) . . 1477
38.15 Deformazione flessorale in un edificio alto, (Lin e Stotesbury, 1981) 1477
38.16 Diffusore in una struttura di costruzione composta da due pareti e rivestimenti snelle, (Lin e Stotesbury, 1981) 1478

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

38.17 Deformazione di un piegato (Lin e Stotesbury, 1981) . . . 1479
38.18 Sfilettatura della cinghia e flessorale di un sottosistema rigido del telaio, (Lin e Stotesbury, 1981) . . . 1480
38.19 Sflessione laterale da carico verticale non simmetrico, (Lin e Stotesbury, 1981) 1480

40.1 Ceppo dipendente dal tempo; strisciamento e restringimento . . . 1529
40.2 Carico termico per la costruzione . . . 1529
40.3 Firma Convenzione, Design e Analisi (Fig. 26.1) . . . 1530
40.4 Elementi forze interne e dof locali . . . 1531
40.5 Sviluppi indipendenti . . . 1532
40.6 Sistema di coordinate locali e globali/dof . . . 1533
40.7 Gradi di indeterminatezza statica e cinematica . . . 1534
40.8 Problema di valore boundario . . . 1536

41.1 Definizione del termine di rigidità K_{ij} . . . 1538
41.2 Coefficienti di stiffamento per vari tipi di elementi . . . 1538
41.3 Gradi di libertà dell'elemento trave 3D . . . 1541
41.4 Termini di rigidità individuale in un elemento 3D . . . 1543
41.5 Deformazione parassita della cesoia causata da deformazioni imposte . . . 1544
41.6 Forze di fine e spostamenti di un elemento torsione con la resistenza di curvatura . . . 1547

42.1 Esempio di confronto tra flessibilità e rigidità . . . 1551
42.2 Esempio di fascio per determinare il grado di indeterminanza cinematica 1552

43.1 Locale (in inglese)$\mathbf{k}^e$) e globale ($\mathbf{K}^e$) Matrici di rigidità degli elementi . . . 1576
43.2 Matrice di trasformazione per una trave 2D . . . 1576
43.3 Trasformazione vettoriale 3D arbitraria . . . 1578
43.4 rotazione degli elementi del telaio 2D rispetto a Z (or z) . . . 1580
43.5 rotazione degli elementi di griglia . . . 1581
43.6 Matrice di trasformazione per il raggio vlasov . . . 1582
43.7 2D tromba rotazione . . . 1583
43.8 Riduzione della rotazione 3D . . . 1585
43.9 Caso speciale di trasformazione 3D per i membri verticali . . . 1586
43.10 Rotazione 3D complessa . . . 1587

44.1 Dof non teso e vincolato . . . 1594
44.2 Esempio di discortizzazione strutturale . . . 1595
44.3 Esempio per **[ID]** determinazione della matrice . . . 1596
44.4 Esempi di **LM** assegnazioni . . . 1597
44.5 Montaggio del processo di matrice della rigidità globale . . . 1598

45.1 Mapping di spostamenti in forze . . . 1616

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese, potrebbero verificarsi errori.

45.2 Mappatura di un cerchio di spostamento dell'unità in una ellisse forza, (Gavin, 2012). . . . 1617
45.3 Problema di test del valore dell'energia . . . 1620
45.4 Assemblaggio degli Stati membri che risultano inadeguati **K** . . . 1622
45.5 Ill conditioned matrices in terms of K_1 K_2 . . . 1623
45.6 Importanza della numerazione nodale . . . 1626
45.7 Requisiti di stoccaggio per la matrice strutturale della rigidità . . . 1627

46.1 Kinematics di un elemento truss . . . 1639
46.2 Elemento stabile e staticamente determinato . . . 1643
46.3 Fascio con offset rigido . . . 1655
46.4 Fbd di fascio con offset rigido . . . 1656
46.5 Travi flessibili, rigide e semirigide . . . 1658
46.6 Deformazioni di un fascio semirigido . . . 1659
46.7 $\overline{K}_{22}$ Coefficiente per connessioni semi-flessibili . . . 1662
46.8 Estratti dal manuale di costanti del telaio (Portland Cement Association, 1947) 1663
46.9 Fascio con sezione variabile . . . 1664
46.10 Sezione con profondità variabile lineare; studio parametrico . . . 1665
46.11 Sezione con profondità variabile parabolica; studio parametrico . . . 1666

47.1 Operatori variabili e differenziali . . . 1681
47.2 Esempi di condizioni limite essenziali e naturali . . . 1686
47.3 Tonti diagrap per il metodo energetico potenziale totale . . . 1692
47.4 Diagramma Tonti per Hu-Washizu, (Červenka, 1994) . . . 1705
47.5 Diagrammi Tonti per Lagrange, Hamilton e D'Alembert . . . 1706

48.1 Definizione di trazione . . . 1711
48.2 Densità energetiche di ceppo e complementari . . . 1712
48.3 Energia potenziale . . . 1713
48.4 Effetti delle storie di carico su U e W_i . . . 1715
48.5 Diagrammi illustrativi dei principi delle opere virtuali e complementari . . . 1723
48.6 Minimizzazione in meccanica quantistica e classica . . . 1734
48.7 Riepilogo dei metodi variativi . . . 1753
48.8 Dualità dei principi variativi . . . 1754

49.1 Sistema di coordinate naturali lungo una linea retta . . . 1760
49.2 Sistema di coordinate naturali per un triangolo . . . 1761
49.3 Integrazione su un triangolo . . . 1763
49.4 Elemento finito assiale . . . 1764
49.5 Elemento di triangolo costante . . . 1766
49.6 Elemento bilineare rettangolare . . . 1768
49.7 Funzioni di forma per 4 elementi quadrilaterali annunziati . . . 1769
49.8 Solido elemento rettangolare trilineare . . . 1769

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

49.9 Funzioni di forma per 3 elementi lineari triangolari . . . 1772
49.10 Elemento a barre quadratico trinodato . . . 1772
49.11 Elemento finitore flessibile . . . 1773
49.12 Funzioni di forma per flessore di elemento a fascio uniforme. . . . 1775
49.13 Quattro elementi isoparametrici . . . 1779
49.14 Serendipity e quadrilateri lagrangiani quadratici . . . 1780
49.15 Triangoli Pascal per elementi quadrilaterali e triangolari . . . 1780
49.16 Serendipity isoparametrico elemento finito quadratico: elemento globale e genitore . . . 1781
49.17 Funzioni di forma per 8 elementi quadrilaterali annunziati . . . 1782
49.18 Funzioni di forma per 9 elementi quadrilaterali annunziati . . . 1784
49.19 Numerazione nodale per elementi isoparametrici . . . 1785
49.20 Funzioni di forma per 6 elementi quadratici triangolari annui . . . 1787

50.1 Completità e compatibilità . . . 1795
50.2 h, p e r convergenza . . . 1797
50.3 continuità di interelement dello stress . . . 1798
50.4 continuità di interelement . . . 1799

51.1 Mapping bidimensionale di alcuni elementi . . . 1801
51.2 Elementi effettivi e genitoriali . . . 1801
51.3 Iso, super e sotto elementi parametrici . . . 1803
51.4 Elemento differenziale nel sistema di coordinate curvilinea . . . 1807
51.5 Prodotto trasversale di due vettori . . . 1807
51.6 Elemento con possibili jacobian singolari . . . 1808
51.7 Integrazione numerica Newton-Cotes . . . 1813
51.8 Integrazione Gauss-legendre su una superficie . . . 1818
51.9 Integrazione numerica su un triangolo . . . 1819
51.10 Estrazione da 4 punti quadrati (Felippa, 1999) . . . 1820
51.11 Carico della gravità . . . 1822
51.12 Carico di trazione in elementi isoparametrici . . . 1823
51.13 Carico di trazione in elementi isoparametrici contigui . . . 1824
51.14 Modalità di spostamento indipendenti per un elemento bilineare . . . 1827
51.15 Modalità di oreglas in elemento quadratico sottointegrato . . . 1827
51.16 Elemento bilineare rettangolare sottoposto a flessione; elemento bilineare e geometria corretta . . . 1828
51.17 Stime associate a modalità incompatibili per l'elemento q6 . . . 1829
51.18 Cilindrata laterale indotta dalla perforazione d.o.f. . . . 1831

53.1 Assilico *vs* rigidità flessografiche . . . 1852
53.2 Riduzione di spostamenti non frenati quando la rigidità assiale viene ignorata 1853
53.3 Modellazione di edificio per carico sismico . . . 1853
53.4 Schema corpo libero di un nodo . . . 1854

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

53.5 Massa e rigidità di smorzamento proporzionale 1860
53.6 Euler avanti vs metodi arretrati Euler 1865

54.1 Non linearità geometrica, grande esempio di deflettorazione (**B**), 29.2.3 . . .1887
54.2 Materiale non linearità, fibre (**D**) 1887
54.3 Materiale non linearità, sezione (**D**) 1887
54.4 Lineare *vs.* analisi non lineari 1888
54.5 Tipi di analisi strutturale 1890
54.6 Curva di difesa del carico e varia gamma di risposta 1893
54.7 Codici di progettazione in antichità 1895
54.8 *) ur Eisenbetonbau* 1897
54.9 Esempi di codici di design moderni 1898
54.10 Livelli di performance 1900
54.11 Confronto di vari quadri di progettazione 1901

55.1 Superficie di usura; definizione 1904
55.2 Modelli indipendenti a pressione idrostatica 1904
55.3 Superfici di resa dipendente dalla pressione 1906
55.4 Modelli a carico della pressione idrostatica 1907
55.5 Stress-strain di metalli; effetto baushinger 1908
55.6 Micro-cracks concreti 1909
55.7 Obbligazioni chimiche 1910
55.8 Obbligazioni duttili e fragili 1910
55.9 Dislocazione 1911
55.10 Elasto-plastic stress sforzo risposta 1912
55.11 Modelli di indurimento 1914

56.1 Sezione di croce arbitraria considerata per la determinazione della $M - \Phi$ .1936
56.2 Procedura di calcolo $M - \Phi$ analiticamente 1937
56.3 Curvatura del momento e diagrammi di forza assiale (interazione) 1943
56.4 Discretizzazione di una sezione trasversale in strati 1944
56.5 Approccio fondamentale per determinare $M - \Phi$ numericamente 1945

57.1 Linee di respirazione in lastre 1967
57.2 Determinazione delle linee di resa in lastre rettangolari 1969
57.3 Soluzione di limite inferiore Statics - *Si'.* Analisi del pushover 1973

59.1 Metodo di Newton 1985
59.2 Schema di integrazione esplicita 1992
59.3 Metodo di Newton spiegato (per il controllo del carico) 1995
59.4 Metodo Newton-raphson per il controllo del carico 1997
59.5 Metodo modificato di newton-raphson, tangente iniziale 1998
59.6 Segreto di incentivo, metodo quasi-newton 1999
59.7 Metodo di Newton; carico contro controllo di spostamento 2004

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

59.8 Metodo di Newton; controllo dello spostamento (confronto con figura 59.3) 2004
59.9 Metodo Newton-raphson; controllo di spostamento 2005

60.1 Livelli di analisi strutturale 2021
60.2 Approccio incrementale esplicito alla non linearità geometrica 2021
60.3 Determinazione del carico di indurimento senza matrice geometrica rigidità 2027

61.1 Sistema di coordinamento per truffe 2D 2033
61.2 Forze interne e spostamenti corrispondenti per il metodo basato sulla rigidità 2D 2038
61.3 Determinazione dello stato per il metodo basato sulla rigidità 2040
61.4 Grafico di flusso dell'analisi non lineare utilizzando il metodo basato sulla rigidità 2043
61.5 Sezione di fibre-distribuzione delle sezioni di controllo e suddivisione della sezione in fibre 2047
61.6 Distribuzione di stress trasversale non lineare 2048
61.7 Elemento telaio 2D senza modalità rigide del corpo 2050
61.8 Firma convenzione sulla forza di sezione 2051
61.9 Forze interne e spostamento corrispondente per il metodo basato sulla flessibilità 2D 2054
61.10 Il rapporto tra modalità corpo rigido e nessun modo di corpo rigido . . . 2054
61.11 Determinazione dello stato per metodo basato sulla flessibilità senza iterazione degli elementi 2056
61.12 Determinazione dello stato (Taucer, Spacone e Filippou, 1991a) 2059
61.13 Determinazione dello stato degli elementi e delle sezioni 2060
61.14 Grafico di flusso dell'analisi non lineare utilizzando metodo basato sulla flessibilità w/o iterazione degli elementi 2072
61.15 Grafico di flusso dell'analisi non lineare utilizzando metodo basato sulla flessibilità w/ iterazione degli elementi 2073
61.16 Confronto della rigidità *vs.* formulazione basata sulla flessibilità 2074
61.17 Elemento 2D a lunghezza zero 2076
61.18 Grafico di flusso dell'elemento 2D a lunghezza zero per la determinazione dello stato degli elementi 2077
61.19 Elemento di sezione a lunghezza zero, equilibrio 2079
61.20 Sistema di coordinamento per elemento sezione zero 2081
61.21 Grafico di flusso per elemento a sezione zero 2082

62.1 Modelli di plasticità lumpate e distribuite 2087
62.2 Modelli isterici 2088
62.3 Paragone di modulo tangente; plasticità vs. Menegotto-Pinto 2090
62.4 Determinazione del modello bilineare 2091
62.5 Paragone di modelli di carico ciclico inverso: plasticità *vs.* Menegotto-Pinto 2092
62.6 Menegotto pinto (Menegotto e Pinto, 1973) Modelli in acciaio 2093

COPIA DI REVISIONE

62.7 Determinazione (1) per modello giuffre-menegotto-pinto modificato da filippou et al. . . . 2095
62.8 Determinazione (2) per il modello giuffre-menegotto-pinto modificato da filippou et al. . . . 2096
62.9 Determinazione (3) per il modello giuffre-menegotto-pinto modificato da filippou et al. . . . 2097
62.10 Determinazione (4) per il modello giuffre-menegotto-pinto modificato da filippou et al. . . . 2098
62.11 Effetto di confinamento sulla forza concreta (Richart, Brandtzæg e Brown, 1928) . . . 2099
62.12 Confintato *vs.* forza di calcestruzzo compressivo non confusa (Mander, Priestley e Park, 1988) . . . 2100
62.13 Ruolo di agitazioni nel fornire confinamento concreto . . . 2100
62.14 Modello di materiale in calcestruzzo a compressione . . . 2102
62.15 Modello di materiale calcestruzzo sotto carico ciclico in compressione . . . 2104
62.16 Modello di materiale calcestruzzo sotto carico ciclico in tensione . . . 2106
62.17 Determinazione (1) per il modello di kent e park modificato . . . 2109
62.18 Determinazione (2) per il modello di kent e park modificato . . . 2110
62.19 Cracks indotti da compressione, tensione, tensione e compressione . . . 2112
62.20 Curva tensione–deformazione del modello di danno anisotropico senza deformazione permanente . . . 2118
62.21 Determinazione (1) per il modello di danno anisotropico . . . 2118
62.22 Determinazione (2) per il modello di danno anisotropico . . . 2119
62.23 Determinazione (3) per il modello di danno anisotropico . . . 2120
62.24 Curva tensione–deformazione del modello di danno anisotropico con deformazione permanente . . . 2124
62.25 Modello di slittamento . . . 2124
62.26 Modello di legame semplificato . . . 2126
62.27 Curva di scorrimento del legame . . . 2127
62.28 Ubicazione dell'asse neutro . . . 2128
62.29 Identificazione delle zone di plastica . . . 2130
62.30 Sfiorazione della deformazione flessorale di un elemento . . . 2131
62.31 Efficace momento di inerzia in R/C . . . 2132
62.32 Ubicazione delle lunghezze di plastica (Park e Paulay, 1991) . . . 2134
62.33 Sostituzione della punta di un raggio cantilevered R/C con assunzione di plasticità lumped . . . 2136
62.34 Sostituzione della punta di un fascio in acciaio con trave a sbalzo con assunzione di plasticità lumped . . . 2138
62.35 Modello plasticità lumpata con guasto della cinghia . . . 2141
62.36 Limitare il guasto della cinghia . . . 2141
62.37 Risorso di primavera . . . 2142
62.38 Limita risposta della colonna di stato . . . 2143

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

62.39 Limitare le risposte individuali dello stato . . . 2144
62.40 Ciclo di isteresi rappresentativa . . . 2145
62.41 Strain addolcimento della resistenza . . . 2146
62.42 Degrado della forza ciclica inversa . . . 2146
62.43 Modello Hysteresis spina dorsale . . . 2148
62.44 Curva a spina dorsale per flessore (Ghannoum, 2020) . . . 2149
62.45 Modelli picchi e orientati al picco . . . 2150
62.46 Ciclo di base del modello orientato al picco . . . 2151
62.47 Caricare inversione e l'aggiornamento dello stato di destinazione . . . 2151
62.48 Aumentare la cronologia dei carichi ciclici seguendo il modello orientato al picco . . . 2152
62.49 Modello di Pining ciclo base . . . 2153
62.50 Determinazione dei punti di rottura . . . 2153
62.51 Determinazione del primo punto di rottura . . . 2155
62.52 Aggiornamento punto di rottura . . . 2155
62.53 Ricaricare oltre il punto di rottura . . . 2156
62.54 Aumentare la cronologia del carico ciclico seguendo il modello di pizzicaggio 2157
62.55 Risultati del laboratorio strutturale UCSD (Ibarra, 2004) . . . 2158
62.56 Modalità di degradazione della forza di base . . . 2159
62.57 Modalità di degrado della forza post-capping . . . 2161
62.58 Scarico della modalità di degrado della rigidità . . . 2162
62.59 Scarico interruzione . . . 2163
62.60 Modalità di degrado della rigidità accelerata . . . 2164
62.61 Curva della spina dorsale (Ghorbani et al., 2022) . . . 2166
62.62 Modello di isteresi a base di spline cubico (Suselo, 2021) . . . 2167

63.1 Processo di elementi finiti (ispirato da Bathe, 1996) . . . 2171
63.2 Complessità del modello uniformemente distribuita . . . 2172
63.3 Pitfalls dell'analisi lineare rispetto all'analisi non lineare . . . 2172
63.4 Elementi finiti per l'analisi non lineare dei frame . . . 2176
63.5 Collegamento a colonna . . . 2177
63.6 Elementi di aspirazione o colonna . . . 2178
63.7 Collegamenti a colonna . . . 2179
63.8 Tracciare la modellazione della sezione in strati . . . 2182
63.9 Modello in cantilever idealizzato di rc trave-colonna (Haselton et al., 2016) 2185
63.10 Tipi di confinamenti (Berry, Parrish e Eberhard, 2004) . . . 2185
63.11 Interfaccia utente grafica per il database delle prestazioni strutturali pari (Berry, Parrish e Eberhard, 2004) . . . 2186

64.1 Sequenza temporale sintetica, covarianza empirica e autocovarianza stimata 2201
64.2 Confronto tra MCS e LHS . . . 2204
64.3 Esempio di una traiettoria per $k = 2$. . . . 2214
64.4 Overlapping o punti strettamente raggruppati da diverse traiettorie Morris. 2215

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

64.5 Variazione casuale e la sua funzione di distribuzione cumulativa (CDF). . 2215
64.6 Risposta periodica di una variabile casuale x_i. Le dimensioni dei passaggi fissi non possono rilevare variazioni periodiche. 2216
64.7 Confronto traiettoria (a) e radiale-punto (b) per i metodi di $k = 3$ RV in iperspazio quantile. 2217
64.8 Inizializzazione e post-inizializzazione nella procedura di screening a punti radiali modificati 2222
64.9 Esempio di valutazione della sensibilità (Gakuhari, 2021) 2226
64.10 L'analisi della sensibilità identifica i parametri del candidato; l'identificazione dei parametri determina i valori sostenuti dalle osservazioni 2226

65.1 Principio dell'approccio di identificazione del sistema: raffinatezza iterativa dei parametri per minimizzare la discrepanza dei dati modello. 2230
65.2 Esempio illustrativo di regressione lineare con RANSAC 2233
65.3 RANSAC applicato al degrado concreto: studio caso (Gakuhari, 2021) . . 2234
65.4 Grafico del flusso della procedura di identificazione dei parametri 2247
65.5 Interfaccia grafica per un'unica funzione residua e cinque variabili. 65.7 per un esempio più completo. 2248
65.6 File di dati di input per l'ottimizzazione Levenberg–Marquardt non lineare dei minimi-quari 2251
65.7 Dashboard per il Levenberg–Marquardt non lineare ottimizzazione di minimo-quari: 12 obiettivi predetti e 8 variabili. 2254
65.8 Integrazione della caratterizzazione del sito, sviluppo di modelli, incertezza, identificazione dei parametri, analisi strutturale e valutazione delle fragilità 2259

66.1 Quattro componenti di PBEE 2265

67.1 La legge (abbondante) di ricorsio 2268
67.2 Classificazione delle fonti sismiche 2270
67.3 Classificazione delle distanze da sito a fonte 2273
67.4 Indagine parametrica sui gmpes 2273
67.5 Analisi dei rischi sismici 2274
67.6 Analisi dei rischi sismici 2276
67.7 Il modello di probabilità di Poisson 2278
67.8 Campione di curve a rischio sismico medi e frattili 2278
67.9 Campioni di noi mappe per i pericoli 2280
67.10 Campioni di appezzamenti sismici deaggregazione per l'università di coloreado boulder 2281
67.11 Confronto tra diversi spettro di risposta 2282
67.12 Confronto tra selezione e scalabilità del movimento terra per IBPA, SBPA e TBPA 2284
67.13 Esempio di prove 2291
67.14 Cav di eta40lc01 contro bersaglio 2293

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

67.15 Energia isterica di eta20kd01 contro bersaglio 2294

68.1 Curva di pericolo. La trama sinistra illustra il concetto dei periodi di ritorno, mentre la trama destra mostra una curva di rischio per un sito specifico. . 2303
68.2 Superficie di analisi del rischio sismico 2306
68.3 Analisi dei rischi sismici probabilistici (PSHA). 2307

69.1 Natura probabilisitc della capacità e della domanda 2313
69.2 Curva di capacità 2316
69.3 Carico laterale per analisi push-over 2318
69.4 Ubicazione e immagine del ponte 2323
69.5 Colonne e dimensioni del pier 2325
69.6 Colonne e sezioni di albero 2326
69.7 Rapporto di sforzo-strain per carico monotonico del calcestruzzo confinato e non confutato (Mander, Priestley e Park, 1988) 2327
69.8 Pier defletto forma e diagramma di curvatura; adattato da AASHTO, Seismic, 2011, fig. c4.9-2 2328
69.9 Curvature di momento e momenti in plastica 2329
69.10 Analisi dello spettro di risposta (C_S) 2333
69.11 Analisi dello spettro di risposta di spostamento 2333
69.12 Elementi di resistenza al terremoto (eres) ammissibili (AASHTO, Seismic, 2011) 2335
69.13 Modello di supporto per lo stress in acciaio rinforzato 2337
69.14 Curvatura del momento (adattato da (AASHTO, Seismic, 2011, fig. 8.5.1)) 2339
69.15 Distribuzione del momento nell'altezza del molo 2340
69.16 Pier defletto forma e diagramma di curvatura; adattato da AASHTO, Seismic, 2011, fig. c4.9-2 2340
69.17 Modello Risa 2343
69.18 Schema di interazione per le tre colonne richieste 2345
69.19 Momenti di plastica 2345
69.20 Definizione dell'albero di Caltran(CALTRANS, 2013) 2347
69.21 Modello elastico modificato dopo formazione di prima cerniera in plastica 2349
69.22 Modello elastico modificato dopo formazione di seconda cerniera in plastica 2350
69.23 Meccanismo di colata con formazione di 4 cerniere in plastica 2351
69.24 Curve di fragilità concettuale basate sul metodo IDA 2355
69.25 Curve di fragilità concettuale basate sul metodo MSA 2357
69.26 Generazione di funzioni a capacità basate su ETA 2360
69.27 Evidenzia quattro strategie diverse (Hariri-Ardebili, Saouma e Porter, 2016) 2363
69.28 Complessità relative dell'analisi sismica 2363

70.1 Rapporti tra un DI e due DV (Saouma e Hariri-Ardebili, 2021) 2374
70.2 PBEE: il grande film 2375

COPIA DI REVISIONE

70.3 Obiettivi di progettazione delle prestazioni sismiche minimi consigliati per gli edifici (Porter, 2003) . . . 2378

72.1 Descrizione concettuale della prima generazione di PBEE; (Whittaker03, Hamburger e Mahoney, 2003) . . . 2388
72.2 Differenze di livelli di performance, (FEMA, 2012) . . . 2388
72.3 Quattro componenti di PBEE . . . 2391
72.4 Confronto delle curve sismiche, di vulnerabilità e di pericolo . . . 2397
72.5 Rapporto tra curva di fragilità e matrice probabilità danno . . . 2399
72.6 Diversi aspetti delle superfici sismiche di fragilità . . . 2400

B.1 Effetto del carico eolico sulle strutture (Schueller, 1996) . . . 2414
B.2 Approssimativo design pressione del vento p per la forza eolica ordinaria resiste alle strutture edili . . . 2415
B.3 Vibrazioni di un edificio . . . 2417
B.4 Zone sismiche degli stati uniti, (ICBO, 1994) . . . 2418
B.5 Carico camion . . . 2427
B.6 Posizionamento del carico per massimizzare i momenti . . . 2431

D.1 Geometria di arco circolare . . . 2440
D.2 Arco circolare a tre punte sotto carico . . . 2441
D.3 Relazione β con rispetto a θ . . . 2443
D.4 Fbd di arco circolare a tre punte sotto carico del punto . . . 2444
D.5 Trama di forze interne per arco circolare a tre punte sotto carico del punto 2447
D.6 Arco circolare a tre punte sotto il peso di sé . . . 2448
D.7 Fbd di arco circolare a tre punte sotto il peso . . . 2449
D.8 Trama per arco circolare a tre punte sotto peso auto . . . 2451
D.9 Trama per arco circolare a tre punte sotto distribuzione uniforme del carico 2453
D.10 Arco circolare a tre punte sotto carico di autopeso vs. serie di carica del punto 2454
D.11 Arco circolare a tre punte sotto distribuzione uniforme del carico vs. serie di carico a punta . . . 2454
D.12 Sap 2000 - diagramma di momento dell'arco circolare a tre punte sotto il peso auto- . . . 2454
D.13 Sap 2000 - diagramma di forza assiale dell'arco circolare a tre punte sotto il peso auto- . . . 2455
D.14 Sap 2000 - diagramma di forza della cinghia dell'arco circolare a tre punte sotto il peso auto- . . . 2455
D.15 Arco circolare a tre punte sotto il peso di sé vs. udl . . . 2455
D.16 Arco circolare a tre punte sotto carico di punto a 1/2 e 1/4 di larghezza . 2456
D.17 Arco circolare a due punte sotto carico . . . 2457
D.18 Arco circolare a due punte dopo aver rimosso la spinta ridondante all'abbattimento . . . 2459
D.19 Arco circolare a due punte con forza virtuale applicata . . . 2461

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

D.20 Fbd dell'arco circolare biforato originale sotto carico a punto 2463
D.21 Fbd a calcolare la deflezione in arco circolare biforato 2466
D.22 Trama per arco circolare a due punte sotto carico del punto 2467
D.23 Arco circolare a due punte sotto il peso di sé 2468
D.24 Fbd di arco circolare a due punte dopo aver rimosso la spinta ridondante all'abbattimento 2469
D.25 Fbd dell'arco circolare biforato originale sotto il peso di auto 2473
D.26 Trama per arco circolare a due punte sotto peso auto 2475
D.27 Trama per arco circolare a due punte sotto udl 2479
D.28 Arco circolare a due punte sotto carico auto-peso vs. serie di carica punti 2480
D.29 Arco circolare a due punte in uniforme distribuzione del carico vs. serie di carico del punto 2480
D.30 Sap 2000 - diagramma di momento dell'arco circolare a due punte sotto il peso 2480
D.31 Sap 2000 - diagramma di forza assiale dell'arco circolare a due punte sotto il peso auto- 2481
D.32 Sap 2000 - diagramma di forza della cinghia dell'arco circolare a due punte sotto il peso 2481
D.33 Arco circolare a due punte sotto il peso di sé vs.udl 2481
D.34 Arco circolare a due punte sotto carico di punto 1/2 e 1/4 2482
D.35 Arco circolare senza cerniera sotto carico del punto 2483
D.36 Arco circolare senza cerniera con momento virtuale a 'b' 2486
D.37 Arco circolare senza cerniera con momento virtuale a 'a' 2486
D.38 Fbd dell'arco circolare senza cerniera originale sotto carico del punto . . 2492
D.39 Trama per arco circolare senza cerniera sotto carico del punto 2496
D.40 Arco circolare senza cerniera sotto il peso di sé 2497
D.41 Forze interne in arco circolare senza cerniera 2501
D.42 Trama per arco circolare senza cerniera sotto il peso di sé 2504
D.43 Trama per l'arco circolare senza cerniera sotto udl 2509
D.44 Arco circolare senza cerniera sotto carico di carica a punto auto-peso vs. . 2509
D.45 Arco circolare senza cerniera sotto distribuzione uniforme del carico vs. serie di carico a punto 2510
D.46 Sap 2000 - diagramma di momento dell'arco circolare senza cerniera sotto il peso 2510
D.47 Sap 2000 - diagramma di forza assiale dell'arco circolare senza cerniera sotto il peso 2510
D.48 Sap 2000 - diagramma di forza della cinghia dell'arco circolare senza cerniera sotto il peso 2510
D.49 Arco circolare senza cerniera sotto il peso di sé vs.udl 2511
D.50 Arco circolare senza cerniera sotto carico punto a 1/2 e 1/4 di portata . . 2511

K.1 Esempi di segnali filtrati butterworth 3048

COPIA DI REVISIONE

K.2 Confronto dei filtri butterworth per vari n . . . 3049

M.1 Interconnessione dei concetti incorporati nell'analisi probabilistica (Saouma e Hariri-Ardebili, 2021) . . . 3082
M.2 Il concetto di spazio campione e vicende reciprocamente smussate (Saouma e Hariri-Ardebili, 2021) . . . 3083
M.3 Confronto degli istogrammi a causa di 100 campioni per tre volte . . . 3084
M.4 Confronto degli istogrammi a causa di 1.000-100.000 campioni . . . 3085
M.5 Esempi di tre funzioni distributive continue . . . 3085
M.6 Relazione tra PDF e CDF . . . 3086
M.7 Relazione tra PDF e CDF . . . 3087
M.8 Illustrazione dell'intervallo di fiducia . . . 3087
M.9 Illustrazione di Mean e Median . . . 3088
M.10 Illustrazione della Deviazione Standard . . . 3089
M.11 Illustrazione di Skewness e kurtosis . . . 3089
M.12 Illustrazione dei coefficienti di correlazione . . . 3090
M.13 confronto di varie funzioni di distribuzione (e cumulative) probabilità . . . 3096
M.14 Distribuzione normale di Bivariate . . . 3097
M.15 Impatto di correlazione ρ sulla distribuzione normale bivariata . . . 3097

N.1 Definizioni dell'indice di affidabilità . . . 3099
N.2 Probabilità del fallimento in termini di indice affidabilità β . . . 3101

O.1 Trasformazione vettoriale . . . 3110
O.2 Principali direzioni di tenore dell'ordine due . . . 3112
O.3 aereo di Octahedral . . . 3113
O.4 Forze di superficie . . . 3114
O.5 Cauchy: tetraedro allo stress . . . 3115
O.6 Rappresentanza geometrica dello stress . . . 3117
O.7 Vettori di posizione e spostamento . . . 3119
O.8 Flusso attraverso la zona dS . . . 3122
O.9 Equilibrio di stress, coordinate cartesian . . . 3125
O.10 Piatto dalla lezione di hooke su molle . . . 3127
O.11 Controlli di prova . . . 3131
O.12 Curve di metallo e cemento . . . 3132
O.13 Catturare la localizzazione sperimentale in esemplari di calcestruzzo non carichi con precisione . . . 3133
O.14 Il modello fessurioso di Hillerborg . . . 3134
O.15 Modelli di ammorbidimento ceppo in calcestruzzo . . . 3135
O.16 Componenti del diagramma di Tonti (Felippa, 2000) . . . 3138
O.17 Schema Tonti per meccanica di corpi deformabili . . . 3138
O.18 Forze interne in termini di stress . . . 3139

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

P.1 Crack in un piatto infinito . . . 3144
P.2 Modalità indipendenti di spostamenti in cravatta . . . 3148
P.3 Pressione sulla diga a causa dell'azione dinamica dell'acqua (Westergaard, 1933) . . . 3154
P.4 Distribuzione approssimativa delle pressioni (Westergaard, 1933) . . . 3157
P.5 Corpo di acqua che può essere considerato per muoversi con diga. (Westergaard, 1933) . . . 3160
P.6 Massa lussata per area unitaria rispetto all'altezza . . . 3161

Q.1 Algoritmo della regione di fiducia . . . 3165
Q.2 Grafico del flusso della procedura di identificazione dei parametri . . . 3170
Q.3 Interfaccia utente grafica per l'identificazione dei parametri di reazione aggregati alcali (Saouma e Hariri-Ardebili, 2021) . . . 3171

R.1 Differenziazione del vettore di posizione $\mathbf{p}$ . . . 3173
R.2 Curvatura di una curva . . . 3174
R.3 Campo vettoriale che attraversa una regione solida . . . 3175
R.4 Flusso attraverso la zona dA . . . 3175
R.5 Elemento infinito per la valutazione della divergenza . . . 3176
R.6 Gradiente di un vettore . . . 3181

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Elenco delle tabelle (I–IV)

3.1 Dati chiave per i due principali papiri matematici dell'Egitto 28
3.2 Contrasting Architettura Monumentale Across Civilizations 31
3.3 Pratica di misurazione e messa a fuoco geometrico in tre culture antiche . . 32
3.4 Scadenza temporale comparativa delle innovazioni strutturali chiave Across Civilizations 33
3.5 Schemi di classificazione selezionati in Filosofia e Scienza greca classica . . . 41

4.1 Strutture gotiche notevoli 52
4.2 Dimensioni comparate delle principali cattedrali gotiche (Elizalde, 2025) . 52
4.3 Riepilogo cronologico delle opere chiave 82

5.1 Rivoluzione scientifica turno concettuale 94
5.2 Riepilogo cronologico delle opere chiave 97

6.1 Codices di Leonardo da Vinci, (Vinci, 1938) 120
6.2 Quattro giorni di dialogo e di discorsi di Galileo 147
6.3 Contributi chiave di Jakob e Johann Bernoulli come Rifiuto nel loro *Opera Omnia* 173
6.4 Opere principali di Leonhard Euler 180
6.5 Confronto dei metodi crittografici utilizzati dai primi scienziati moderni . . 208
6.6 Anagrammi, cifrai e altro ancora 209
6.7 Lettere disponibili nell'anagramma di Hooke 210
6.8 Parole latine comuni che possiamo formare 210
6.9 Termini scientifici possibili da lettere disponibili 210
6.10 Verifica dell'uso della lettera 211
6.11 Decifrando il logogrifico di elastica di Bernoulli, (Alassi, 2020) 212
6.12 Rompere il cifrario di Newton 213
6.13 Frequenza letterale completa 213
6.14 I maggiori conflitti intellettuali nello sviluppo della Meccanica 215
6.16 Riassunto dei principali contributori e loro influenza nella Meccanica 219
6.17 Pubblicazioni nel settore dello sviluppo della Meccanica strutturale 221
6.19 I maggiori conflitti intellettuali nello sviluppo della Meccanica 225

COPIA DI REVISIONE

6.15 Istituti di ingegneria e tecnica di maggiore importanza in Europa e oltre (1740-1850) . . . 226
6.18 Istituti di ingegneria e tecnica (1740–1850) . . . 227
6.20 Storicamente completa della Meccanica Strutturale e dell'Analisi Geometrica (1351–1879) . . . 230

7.1 sviluppi importanti nella distribuzione di forza e stress interno . . . 264

8.1 Confronto delle formule di curvatura originali e moderne di Bernoulli . . . 280
8.2 Milestones in the Development of Curvature . . . 283
8.3 Curvatura & Elastica: grandi eventi e libri . . . 287
8.4 Dai concetti geometrici alle applicazioni meccaniche . . . 289

9.1 Differenza & simboli di integrazione . . . 297
9.2 Terminologia per curve nella famiglia "Funicularia' (dopo Alassi, 2020). . . 302
9.3 Sviluppo cronologico della soluzione catenaria (basata su (Alassi, 2020)) . 303
9.4 La linea temporale della sfida Elastica . . . 318
9.5 Problemi isoperimetrici vs. Calcolo delle variazioni . . . 339
9.6 nove specie di elastica di Euler con parametri di definizione . . . 348
9.7 Distribuzione dei 28 dati tra le 9 specie . . . 348
9.8 28 figure di Euler mappate alla sua 9 specie di elastica . . . 349
9.9 Specie di elastica di Euler: proprietà geometriche e equazioni curve . . . 351
9.10 Sviluppo cronologico del lavoro di Jakob Bernoulli sul calcolo differenziale e sul problema elastico, dalle prime pubblicazioni al completamento postumo.361
9.11 Analisi comparativa dei contributi di Bernoulli (1728) ed Eulero (1732) alla teoria delle travi . . . 374
9.12 Una linea temporale cronologica unificata delle tre grandi sfide: Catenary, Elastica e Anonimo Challenge . . . 385
9.13 Pubblicazioni citate nella linea temporale cronologica unificata . . . 387

10.1 Contrasting teorie molecolari e continuum di elasticità, con due formulazioni continuum. . . . 396
10.4 Confronto delle Teorie Meccaniche: Prospettive storiche e tecniche . . . 427

11.1 Contributori all'analisi strutturale: A Riassunto cronologico . . . 458

12.1 Classificazione dei vari problemi fisici . . . 487
12.2 Principali collaboratori dei metodi computazionali nell'analisi strutturale . . 488

13.1 Timeline delle principali pietre miliari nel calcolo scientifico e ingegneristico 501

14.1 Sviluppo cronologico della forza e dei principi virtuali. . . . 570

15.1 Contenuto dei trattati di Vitruvio, Alberti e Palladio . . . 584
15.2 Produzioni di ponte a Palladio (1570), dopo Huerta, 2018 . . . 590

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

15.3 Unità storiche di misura della lunghezza e del pendio utilizzate nell'architettura e costruzione . . . 601
15.4 Il *braccio* in preunificazione Stati italiani . . . 603
15.5 Cercatori di moduli . . . 636
15.6 Vittime architettoniche da Vitruvio a Billington . . . 667
15.7 Evoluzione degli approcci di progettazione strutturale . . . 672

16.1 Tradizioni religiose e il terremoto: un riassunto comparativo. . . . 705
16.2 Ricorrere motivi interculturali nell'interpretazione religiosa di terremoti. ✓ = motivo attestato; × = motivo assente o marginale. . . . 707

18.1 Coefficienti di espansione termica . . . 890

20.1 Determinazione statica e stabilità delle capriate . . . 929
20.2 Equazioni applicabili di equilibrio per capriate . . . 930

22.1 Analogia tra due gruppi di relazioni . . . 1002
22.2 Condizioni di confine del fascio coniugato . . . 1002

25.1 Condizioni di carico dei carichi punti e uniforma . . . 1083

26.1 Stiffness vs metodi di flessibilità . . . 1088
26.2 Analisi della flessibilità e dello stress . . . 1089
26.3 Forze equivalenti nodali per carichi semplici . . . 1093

29.1 Condizioni di confine essenziali e naturali per colonne . . . 1139

34.1 Comparison of governing equations in elasticity and plate bending (Pilkey e Wunderlich, 1994) . . . 1296

35.1 Riassunto di equazioni e sconosciute in sottili gusci . . . 1303
35.2 Contributo individuale alle equazioni di equilibrio in sottili gusci . . . 1304
35.3 Riassunto delle equazioni principali di governo in sottili gusci . . . 1318
35.4 Assunzioni e equazioni di governo per le strutture a membrana . . . 1326
35.5 Comparison of membrane stress resultant distributions under different loading 1331
35.6 Confronto tra le soluzioni a membrana e conchiglia poco profonda per carico uniforme . . . 1345
35.7 Coefficienti di conchiglia (ϕ misurato dalla corona) . . . 1351

37.1 Valori di destinazione dell'indice di affidabilità . . . 1419

38.1 Confronto del sottosistema dell'albero, parete della cinghia e muro di taglio trussed . . . 1475

40.1 Gradi di indeterminatezza statica e cinematica . . . 1535
40.2 Condizioni di confine essenziali e naturali . . . 1535

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

43.1 Trasformazioni 3D di elementi lineari 1584

44.1 Divulgazione delle strutture 1594

45.1 Impatto di matrici ill-condizionate 1624

46.1 Definizione della forza degli elementi interni per la matrice statica 1631
46.2 Condizioni per la determinanza statica e l'instabilità cinematica 1639

47.1 Funzionalità in elasticità lineare 1701
47.2 Confronto tra l'energia potenziale totale e le formule Hu-Washizu 1704

48.1 Riassunto delle equazioni per vw, cvw, pe, cpe 1721
48.2 Alternate i percorsi per i principi del lavoro virtuale e il principio di un'opera virtuale complementare 1722

49.1 Interpretazione delle funzioni di forma in termini di serie polinomiale (1d & 2d) 1758
49.2 Termini polinomiali in varie formulazioni di elementi (1d & 2d) 1758
49.3 Caratteristiche delle funzioni di forma degli elementi del fascio 1776
49.4 Funzioni di forma e derivati naturali per l'elemento q8 1781
49.5 Coordinate nodali (naturali) di elemento q9 1782
49.6 Funzioni di forma per elementi nodi variabili 1785
49.7 Funzioni di forma e derivati per l'elemento t6 1786

51.1 Pesi per le formule quadrature Newton-Cotes 1814
51.2 Punti di integrazione e pesi per formule gauss-quadrature nell'intervallo$[-1, 1]$ 1817
51.3 Coordinate e pesi per l'integrazione numerica su un triangolo 1819
51.4 Coordinate naturali dei nodi quadrilateri bilineari 1820
51.5 Integrazioni numeriche complete e ridotte per elementi quadrilaterali . . . 1826
51.6 Bilinsear e slittamenti/strains 1828

53.1 Stato di stabilità per diversi metodi 1868
53.2 Rapporti di smorzamento rappresentativi per diverse classi di strutture . . 1881

54.1 Tabulazione dei livelli di analisi strutturale 1889
54.2 Intercorrelazione dei diversi livelli di analisi 1891

57.1 Confronto degli approcci cinematici e statici per l'analisi del carico limite . 1951
57.2 Confronto tra analisi dei limiti inferiori e analisi pushover 1975
57.3 Plasticità lussata e analisi a rilegatura inferiore 1978

59.1 Parallelismo tra metodo quasi-newton in matematica e analisi implicita nella meccanica strutturale 1994
59.2 Variazioni del metodo di degrado del nuovoton 1998

COPIA DI REVISIONE

59.3 Confronto degli algoritmi di controllo del carico nell'analisi non lineare . . 2002

61.1 Determinazioni dello stato multilivello 2039
61.2 Confronto della flessibilità con elementi basati sulla rigidità 2071

62.1 Confintato *vs.* proprietà elastiche e di resistenza in calcestruzzo non confusi 2103
62.2 Modulo tangente 2148

63.1 Collegamenti a colonna 2177
63.2 Confronto-elemento 2178
63.3 Modelli "pick and stick" opzioni 2182
63.4 Quantifica della deteriorazione 2183
63.5 Proprietà materiali 2186
63.6 Classificazione delle sezioni 2187
63.7 Codici di modalità guasto 2187
63.9 Dettagli di finitura 2187
63.10 Dettagli di finitura 2187
63.8 Geometria della colonna 2188
63.11 Riassunto delle prove di colonne rinforzate rettangolari (Berry, Parrish e Eberhard, 2004) 2193
63.12 Risultati dello studio di taratura per 30 test sperimentali (Haselton et al., 2008) 2194

64.1 Terminologia adottata in questo libro per l'incertezza quantificazione e analisi dell'incertezza 2197
64.2 Descrittori qualitativi illustrativi per la grandezza di un coefficiente di correlazione Pearson 2200
64.3 Confronto tra MCS e LHS 2203
64.4 Confronto tra metodi di incertezza-propagazione e sensibilità 2220
64.5 ruoli distinti ma complementari di analisi della sensibilità e identificazione dei parametri 2227

65.1 Entrate di configurazione rappresentative `Log.xlsx` 2251
65.2 Funzioni principali nel programma di identificazione dei parametri 2255
65.3 Funzioni di helper private utilizzate dal lettore di fogli di calcolo e dallo strato di aggregazione 2255
65.4 Principali campi della struttura di configurazione `S` 2255
65.5 Variabili a tempo di esecuzione selezionate in `Paridentificazione.m` 2256

67.1 Coefficienti di periodo dipendente Boore, Joyner e Fumal, 1997 modello . 2272
67.2 Stime V_S sulla base della classe del sito 2272

69.1 Confronto dell'analisi pushover e analisi sismica 2320
69.2 Nj strutture di approccio spettro di risposta 2324
69.3 Analisi sequenziali per l'analisi pushover 2331

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

69.4 Proprietà di resistenza delle barre in acciaio rinforzato (AASHTO, Seismic, 2011, table 8.4.2.1) . . . 2337
69.5 Capacità di movimento per le tre diverse sezioni in una gamma di forze assiali . . . 2344
69.6 Risultati di analisi; zero cerniera . . . 2348
69.7 Regolazione della cinghia che porta alla formazione di prima cerniera . . . 2349
69.8 Risultati di analisi; una cerniera . . . 2349
69.9 Regolazione della cinghia che porta alla seconda cerniera . . . 2350
69.10 Risultati di analisi; due cerniere . . . 2350
69.11 Regolazione della cinghia che porta alla terza e quarta cerniere . . . 2351
69.12 Summazione di forze, momenti e spostamenti in fallimento . . . 2352
69.13 Confronto dei metodi di analisi strutturale sismica . . . 2362

70.1 Rati a secco interstoriali (IDR) per vari livelli di prestazioni secondo ASCE 41-17 . . . 2379
70.2 Indice di danno Soglianze e Stati strutturali corrispondenti . . . 2379
70.3 Ratio di domanda a capacità (DCR) Sostegni secondo FEMA 356 . . . 2380

72.1 La gamma di danni dei componenti strutturali e non strutturali per vari livelli di rendimento dell'edificio target (tab. C1-2) (FEMA-356, 2000) . . . 2389
72.2 Confronto tra PBEE 1 e PBEe 2 . . . 2393
72.3 Confronto delle Rappresentanze di Fragilità Bassa e Discreta . . . 2400
72.4 Documenti chiave nello sviluppo storico di Performance-Based Earthquake Engineering (PBEE). . . . 2407

B.1 Peso unitario dei materiali . . . 2413
B.2 Carico medio lordo morto negli edifici . . . 2413
B.3 Pesi dei materiali da costruzione . . . 2420
B.4 Minimo carico live distribuito uniformemente, (ICBO, 1994) . . . 2421
B.5 Variazione della velocità del vento sopra terra . . . 2421
B.6 C_e coefficienti per carico del vento, (ICBO, 1994) . . . 2421
B.7 Coefficienti di pressione del vento C_q, (ICBO, 1994) . . . 2422
B.8 Fattori di importazione per carico eolico e terremoto, (ICBO, 1994) . . . 2422
B.9 Pressione del vento di progettazione approssimata p per la forza vento ordinaria resiste alle strutture edilizie . . . 2423
B.10 Z fattori per diverse zone sismiche, UBC1994 . . . 2423
B.11 S coefficienti di sito per il carico del terremoto, (ICBO, 1994) . . . 2423
B.12 Elenco parziale di R_W per vari sistemi di struttura, (ICBO, 1994) . . . 2424

G.1 Le coordinate nodali di Alamillo (Pollalis, 1999) . . . 2557
G.2 Proprietà membri di Alamillo (Pollalis, 1999) . . . 2558
G.3 Le condizioni di confine di Alamillo (Pollalis, 1999) . . . 2559
G.4 Combinazioni di carico di Alamillo (Pollalis, 1999) . . . 2560

L.1 Metodi di soluzione per equazioni lineari . . . 3059

COPIA DI REVISIONE

L.2 precondizionamento; confronto tra sinistra e destra 3069
L.3 Confronto di precondizionamento matrice e decomposizione del valore singolare (SVD) 3071

N.1 Valori selezionati per strutture in acciaio e cemento 3100
N.2 Affidabilità delle strutture in acciaio e cemento 3101

O.1 Notifiche 3105
O.2 Rappresentanze di strane 3118
O.3 Esempi di condizioni limite nell'analisi strutturale 3137

P.1 Risultati numerici corrispondenti al periodo, $T = \frac{4}{3}$ secondi 3155

R.1 Simultanee tra operatori di moltiplicazione e differenziazione 3173

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Informazioni sull'autore

Victor E. Saouma, con oltre quarant'anni di esperienza nella ricerca, compreso un ampio lavoro sulla reazione alcali–silice (ASR) e sulla durabilità del calcestruzzo, ha fornito contributi significativi all'analisi strutturale e alla meccanica. La sua attività scientifica comprende due libri, Numerical Modeling of AAR e Aging, Shaking, and Cracking of Infrastructures: From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures, oltre a numerosi rapporti tecnici e articoli sottoposti a revisione paritaria.

Ha presieduto un comitato internazionale della RILEM (Unione internazionale dei laboratori e degli esperti in materiali, sistemi costruttivi e strutture), dedicato alla diagnosi e prognosi delle strutture interessate da ASR, e ha curato un rapporto RILEM con contributi di ricercatori di primo piano di tutto il mondo.

È stato presidente ed è Fellow della International Association of Fracture Mechanics for Concrete and Concrete Structures. Ha fornito consulenza alla Tokyo Electric Power Company (TEPCO) sull'analisi dinamica non lineare di grandi dighe ad arco e sui problemi strutturali delle opere massicce in calcestruzzo armato; ha inoltre contribuito al rapporto EPRI *Structural Modeling of Nuclear Containment Structures*.

I suoi interessi di ricerca comprendono la meccanica della frattura teorica, numerica e sperimentale, la diffusione dei cloruri nel calcestruzzo e le prove centrifughe sulle dighe. Ha inoltre curato un volume sulla simulazione ibrida in tempo reale, un'importante tecnica sperimentale per le prove strutturali. Le sue ricerche sono state finanziate dalla Nuclear Regulatory Commission, dall'Oak Ridge National Laboratory, dal Bureau of Reclamation, dalla Tokyo Electric Power Company e dall'Ufficio federale svizzero dell'energia. Le sue collaborazioni internazionali comprendono Francia, Spagna, Svizzera, Italia e Giappone.

Dal 2019 opera *pro bono* come consulente tecnico della C-10 Research and Education Foundation per questioni di sicurezza nucleare, anche in qualità di esperto dinanzi alla Nuclear Regulatory Commission degli Stati Uniti sul degrado del calcestruzzo negli impianti nucleari. Questa attività gli ha offerto una prospettiva particolare sull'intersezione fra analisi tecnica, decisioni normative e sicurezza pubblica.

Ingegnere civile di formazione, Saouma ha insegnato analisi strutturale lineare e non lineare, nonché progettazione delle strutture in calcestruzzo armato, dai corsi di base a quelli avanzati, portando una prospettiva ampia alle sfide dell'ingegneria.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Altri libri di Victor Saouma

1. Saouma, V.E. e Hariri-Ardebili, M. (2020) Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Strutures, Springer-Nature.
2. Saouma, V.E. (Ed.) (2020) Diagnosis & Prognosis of AAR Affected Structures, Springer-Nature.
3. Saouma, V.E. (2013) Numerical Modeling of AAR, 320 pagine, Taylor& Francis;
4. Saouma, V. E. e Sivaselvan, M. (Eds) (2008) Hybrid Simulation: Theory, Implementation and Applications

5. Saouma, V.E. Structural Analyis Lecture Notes (1764 pages)
6. Saouma, V. E. Fracture Mechanics (Unpublished, 1186 pages)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Parte I

Fondamenti storici della meccanica e dell'analisi strutturale

COPIA DI REVISIONE

Resta una notevole assenza di qualsiasi trattamento sostanziale della storia dell'analisi strutturale nella maggior parte dei libri che ho consultato, la maggior parte fornisce, al meglio, solo la più rapida panoramica.

Per chi cerca una comprensione completa del tema, una manciata di riferimenti classici offre una copertura autorevole e dettagliata, citati in tutto questo volume e consigliati per ulteriori studi.

Nonostante non sia uno storico, ma piuttosto un professore di analisi strutturale, ho scelto di avventurarmi, in modo un po' audace e audace, nelle fondamenta storiche del soggetto in questo libro.

Mi rendo pienamente conto che solo una piccola frazione di lettori si impegna con essa nella sua interezza. Tuttavia, spero che molti troveranno valore nell'esplorazione selettiva dei punti di interesse, e che gli studenti, in particolare, possano utilizzare questo materiale come trampolino di lancio per un'indagine più approfondita.

Chiedo la vostra comprensione se si verificano errori o omissioni involontarie.

Disclaimer on Authorship and Use of AI Tools

Il manoscritto originale di questo libro è stato scritto prima dell'avvento di ChatGPT e simili modelli di lingua di grandi dimensioni. L'intero contenuto intellettuale, tra cui la struttura, gli argomenti, l'analisi storica e lo sviluppo tecnico, è il mio lavoro.

Successivamente, ho usato ChatGPT come strumento editoriale per perfezionare la scrittura, migliorare la chiarezza e, in alcuni casi, suggerire ulteriori riferimenti.

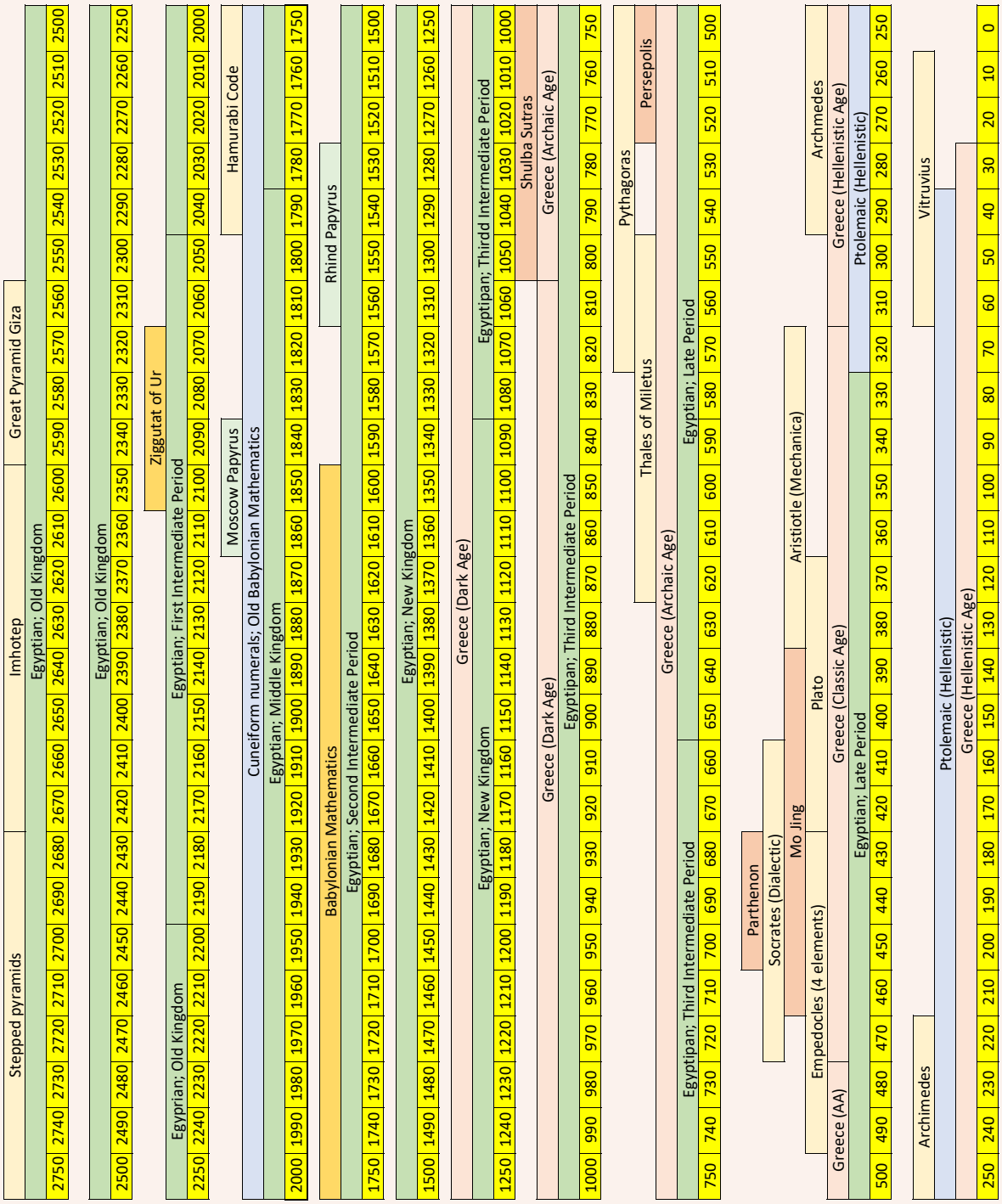
Se una sezione è stata sostanzialmente redatta con l'assistenza di ChatGPT e successivamente esaminata e approvata da me, sarà chiaramente contrassegnata come tale.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Linea di tempo; BCE

Nota: Le date sono approssimative; la linea temporale non è esaustiva, ma una panoramica visiva di costruzione, architettura, scienza e ingegneria attraverso i secoli.

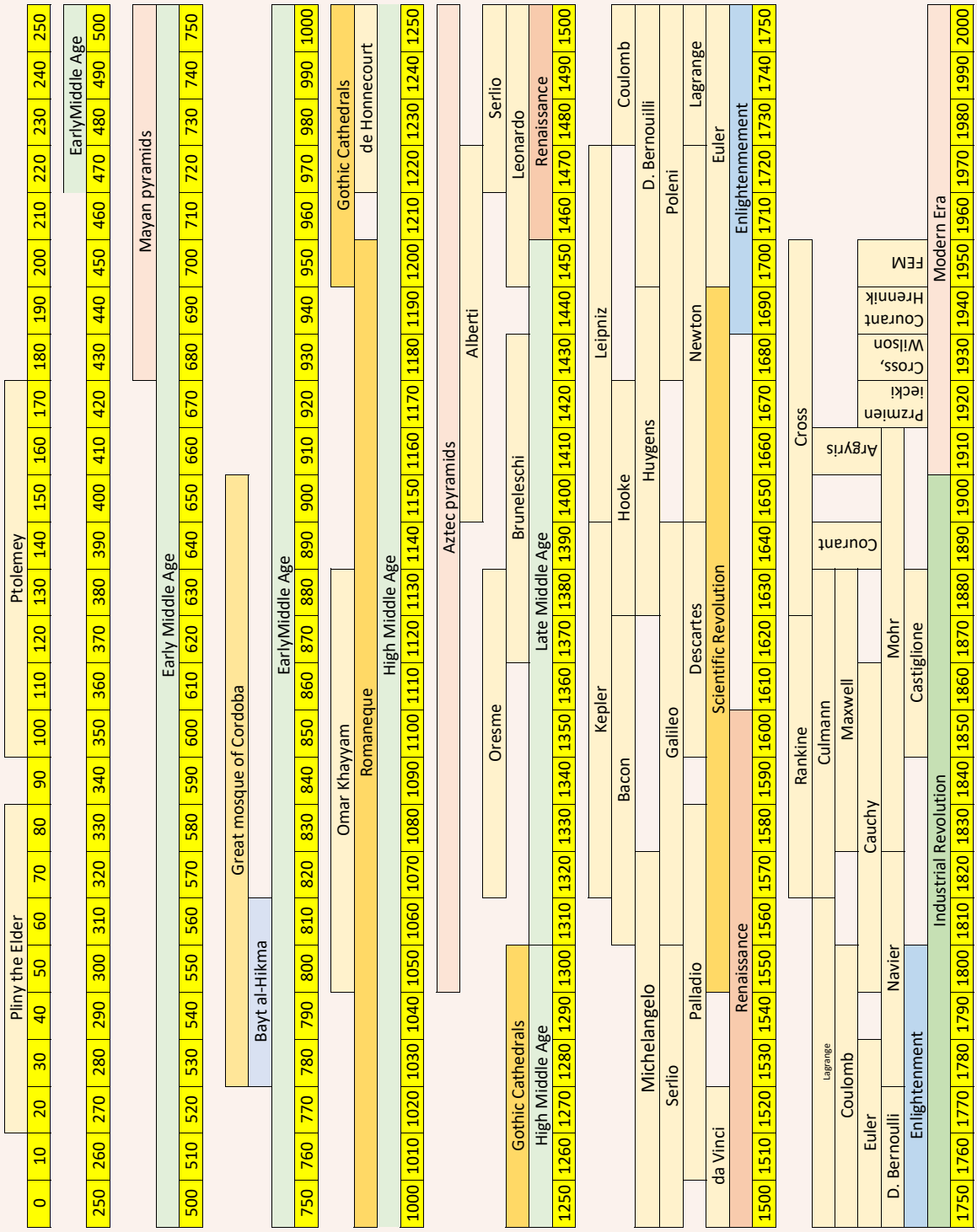


COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

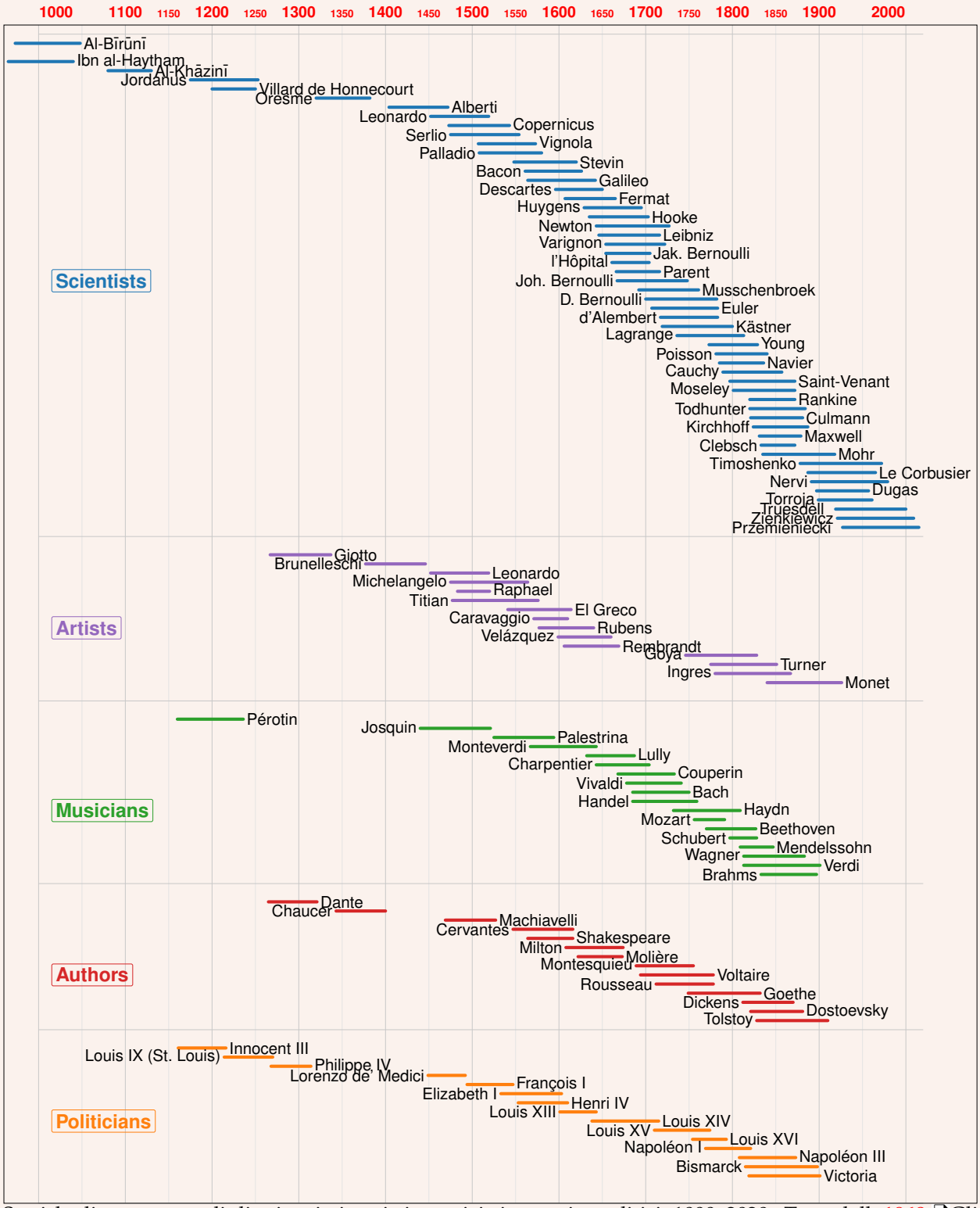
Linea di tempo; CE

Nota: Tutte le date sono approssimative e la linea temporale non è affatto esaustiva, ma è intesa esclusivamente come rappresentazione visiva dello sviluppo in evoluzione della costruzione, dell'architettura, della scienza e dell'ingegneria nel corso dei secoli.



COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Storiche linee temporali di scienziati, artisti, musicisti, autori e politici, 1000–2020. Truesdell, 1968 Gli scienziati elencati nella prima fila sono tutti discussi in questo capitolo; i dati rimanenti sono inclusi per un contesto culturale e storico più ampio.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 1

Introduzione

Abstract

Questo capitolo introduttivo riflette sulle fondazioni storiche spesso sovrapposte dell'analisi strutturale e fa un caso per la loro continua rilevanza. Si presumibilmente avvisa il lettore che questo primo volume, focalizzandosi sulla storia dell'analisi strutturale, si discosta da una rigorosa narrazione cronologica e invece adotta una struttura eclettica e tematica, intrecciata con osservazioni personali sviluppate più pienamente nei capitoli che seguono.

Per fornire contesto, il capitolo delinea anche il "grande quadro" sia tematicamente che storicamente, tracciando l'evoluzione dall'empirismo dell'antichità all'emergere di moderne meccaniche computazionali.

Una selezione curata di riferimenti è inclusa per i lettori interessati ad una più approfondita esplorazione, il risultato è sia un viaggio personale che un invito a vedere l'analisi strutturale non solo come campo tecnico, ma come uno dei modelli di sviluppo intellettuale.

1.1 L'importanza della storia dell'ingegneria strutturale 6
1.2 Approccio e Intento 7
1.3 Grande immagine 8
1.3.1 Tematicamente 8
1.3.2 Storicamente 9
1.4 Riferimenti in modo chiaro 10

1.1 L'importanza della storia dell'ingegneria strutturale

Se chiedessimo a un ingegnere le origini delle equazioni che usano di routine, la risposta sarebbe probabilmente deludente:

> Se chiedessimo a un ingegnere le origini delle equazioni che usa costantemente, la risposta sarebbe deludente; non importa nient'altro. Perché essere curiosi della loro derivazione? Gli ingegneri non sono interessati allo sfondo al loro soggetto.
>
> (Benvenuto, 1991b, pg. 543)

COPIA DI REVISIONE

Ma forse alcuni dovrebbero essere interessati, al meglio delle mie conoscenze, nessuno dei libri di testo «moderni» sull'analisi strutturale tenta di affrontare la questione sollevata da Benvenuto[1]Questo è particolarmente inquietante, poiché poche professioni possono tracciare la loro storia intellettuale fino a quando l'ingegneria strutturale. Familiarizzare con essa può, in modo modesto, renderci un po' più "civili".

Questo punto è rafforzato dalla seguente osservazione

> È della massima importanza che quegli studenti che desiderano una profonda comprensione matematica si abituino presto per andare direttamente agli sviluppi originali, - almeno in quei casi in cui gli sviluppi originali sono diretti, e si trovano in una lingua che non impone difficoltà troppo grandi.
>
> (Miller, 1916)

Lo stesso sentimento vale per gli studenti di ingegneria, ed è per tali studenti che il presente capitolo è destinato.

In origine, la mia intenzione era di fornire una breve panoramica dell'evoluzione dell'analisi strutturale, ma una volta iniziato il processo, mi sono ritrovato sempre più assorbito, soprattutto perché ero, come molti altri, confinato a casa durante il blocco COVID-19.

1.2 Approccio e Intento

Ciò che segue è in definitiva più una riflessione personale di una storia sistematica, né è né completa né particolarmente rigorosa né scientificamente, ma è una collezione, a volte più simile a un collage, di argomenti strettamente connessi, alcuni esplorati in profondità superiore ad altri, tracciando un percorso dalla Mesopotamia al metodo degli elementi finiti.

La presentazione è volutamente eclettica, non lineare, e a volte apparentemente casuale. Alcuni argomenti possono apparire incongrui o fuori luogo; altri possono invitare il disaccordo per quanto riguarda la loro inclusione o enfasi. Ciò che li unifica è che ciascuno, ad un certo punto, ha piequed la mia curiosità e mi ha spinto a prendere appunti.

Limitata di volta in volta, ho occasionalmente citato direttamente da fonti primarie e secondarie, con piena attribuzione, e redraged diversi dati per aiutare nella chiarificazione di idee selezionate.

Infine, mi sono permesso di fare qualche parte personale nelle note, riflettendo su come alcuni temi si siano evoluti, o non sono riusciti a evolversi, nel tempo, gettando sviluppi storici alla luce delle prospettive contemporanee.

[1]Con la possibile eccezione del mio libro di analisi strutturale laureato, che ha dedicato alcune pagine al contesto storico (Kinney, 1957, pp. 1–19).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

1.3 Grande immagine

1.3.1 Tematicamente

Fig. 1.1 L'interconnessione tra varie discipline (queste non sono inevitabilmente definite) è in qualche misura arbitraria: si noti che ho incluso l'architettura come per molti secoli gli architetti erano infatti strutture dimensionali, e in molti aspetti la loro è una professione strettamente interconnessa con l'analisi strutturale.

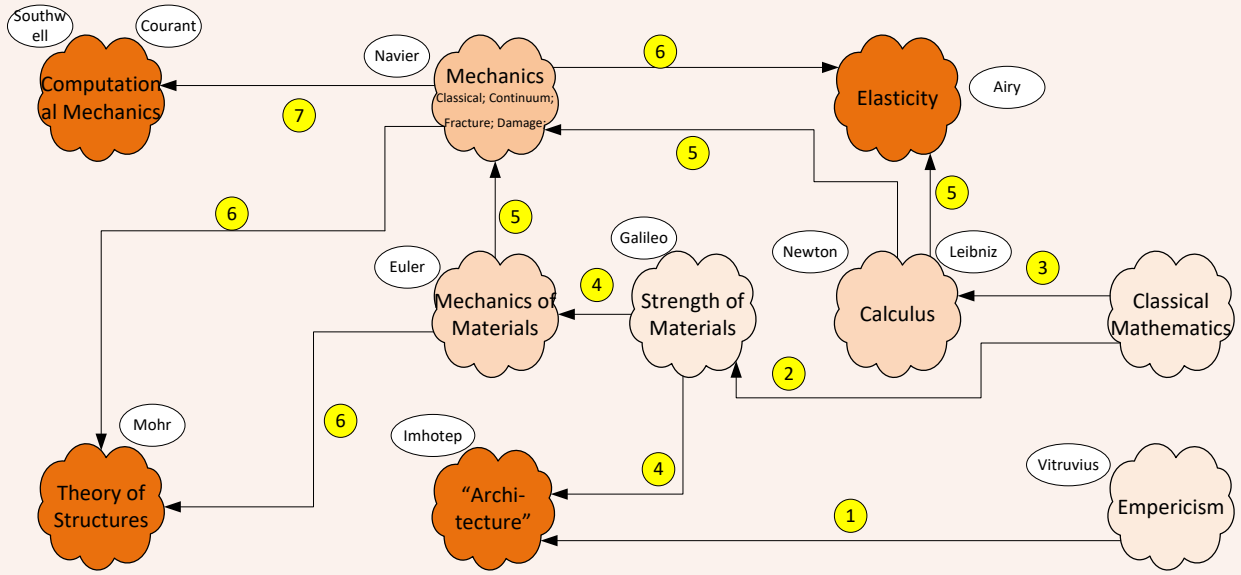


Figura 1.1: Carta stradale per l'ingegneria strutturale

1. Per secoli, le strutture sono state concepite utilizzando regole empiriche di pollice, incentrata sulle cattedrali gotiche, molto prima che esistessero metodi di progettazione formali, che furono codificati per la prima volta da Vitruvio. nell'antica Roma.
2. Alla fine, la matematica precalcolata emerse, ponendo le basi per la forza dei materiali. Semi-empirical, basato sull'osservazione di esperimenti attentamente progettati.
3. Lo sviluppo formale del calcolo seguì presto, indipendentemente da Newton e Leibniz alla fine del XVII secolo, e fornì un potente linguaggio matematico per descrivere il movimento e il cambiamento.
4. La forza semi-empirical dei materiali maturata nella meccanica più rigorosa dei materiali; inoltre, l'architettura è stata per la prima volta disentangled dalle regole del pollice.
5. La meccanica dei materiali si è ulteriormente evoluta in meccanica generale, sostenuta da equazioni di calcolo e differenziali, consentendo lo studio di corpi sotto carichi e movimenti arbitrari.
6. La teoria delle strutture si è evoluta da progressi nella meccanica e nella meccanica dei materiali; contemporaneamente, l'elasticità si è evoluta dalla meccanica e dal calcolo.
7. Infine, la meccanica computazionale sviluppata da questi vari rami, combinando metodi numerici con la meccanica per risolvere problemi che sono analiticamente intrattabili.

COPIA DI REVISIONE

1.3.2 Storicamente

Il rabbordamento da (Renn, Damerow e McLaughlin, 2002), la storia a lungo termine della Meccanica può essere divisa (ancora arbitrariamente) in non meno di otto periodi[2]:

Dawn: Riflessioni al periodo prolungato durante il quale le società umane accumulavano conoscenze meccaniche pratiche attraverso l'esperienza e la trasmissione orale, senza registrarle in forma scritta o sviluppando quadri teorici formali. Mentre le origini di discipline come la matematica e l'astronomia possono essere tracciate alle antiche civiltà urbane di Babilonia e dell'Egitto, questo non è sorprendentemente il caso per la meccanica.

Twilight: Encompagna il periodo greco-romano, che ha testimoniato la formulazione della legge della leva e l'emergere dei primi trattati scritti dedicati alla meccanica e alla filosofia naturale.Questa era è particolarmente associata a figure come Aristotele, Euclide e Archimede, le cui opere hanno profondamente influenzato gli sviluppi intellettuali successivi.

Non così Dark Ages: Evidenzia i contributi significativi degli studiosi arabi che conservavano, tradussero e ampliarono i trattati meccanici greci in un tempo in cui tale conoscenza si era ampiamente recedita nell'Occidente latino. Lungi dall'essere un vuoto, questo periodo vide la raffinatezza delle idee meccaniche, l'istituzione di osservatori e istituzioni, e lo sviluppo di dispositivi come orologi acquatici e automi, il cui lavoro pose un ponte essenziale tra l'antichità classica e il Rinascimento europeo.

Sunrise, Renaissance: Il rilancio dell'inchiesta scientifica e strutturale in Europa occidentale, che sarà illustrato attraverso due studi di casi classici nel design strutturale, nonché una breve rassegna di quattro libri seminali che hanno profondamente plasmato il pensiero architettonico e ingegneristico.

Metodo scientifico: Dopo secoli di aderenza alla dottrina aristotelica in Occidente, la fondazione per la scienza empirica è stata fondata da Francesco Bacon, la cui avocacy per l'osservazione e la sperimentazione ha segnato un cambiamento decisivo. La sua influenza sulla meccanica sperimentale non può essere sovrastata, e la sua eredità è incarnata in primi professionisti come Galileo Galilei, che ha applicato la sperimentazione sistematica ai problemi fisici.

Padri fondatori: I contributi di Isaac Newton e Robert Hooke erano così fondanti per lo sviluppo della meccanica moderna che meritano una categoria dedicata, i cui lavori stabilirono le leggi matematiche e le fondazioni empiriche che definiscono la meccanica classica.

Emergenza: Meccanica analitica: Caratterizzato dalla rigorosa integrazione della matematica e della meccanica, in particolare attraverso il lavoro di studiosi francesi e svizzeri, che ha visto la formulazione di principi, come quelli di d'Alembert, Lagrange e Euler, che hanno fornito un quadro analitico unificato per i sistemi meccanici.

Emergenza dell'analisi strutturale: In questa fase sono stati stabiliti tutti i concetti fondamentali necessari per l'analisi strutturale moderna, che restavano il compito di sviluppare sistematicamente metodologie, con alcuni dati importanti, che avrebbero formalizzato l'analisi strutturale nella disciplina come oggi è conosciuta.

Sebbene questo rappresenti una razionale delineazione dello sviluppo storico della meccanica e dell'ingegneria strutturale, non si allinea perfettamente con la struttura del capitolo di questo volume, che è guidato da una combinazione di progressione storica e strutturazione tematica.

[2] Si noti che ho omesso contributi indo-cinesi, e solo obliquamente indirizzato a quelli arabi.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

1.4 Riferimenti in modo chiaro

Mentre solo pochi potrebbero coraggiosi le profondità scoraggianti e intimidatori di quei libri, molti preferirebbero un approccio più diretto che paralleli discussioni teoriche.

- Todhunter e (completo da) Pearson (1893) *Storia della Teoria dell'Estrattività e della Forza dei Materiali* (Todhunter e Pearson, 1893)Probabilmente la copertura più esaustiva e autorevole a partire da Galileo, entrambi matematici, per i primi interessati all'elasticità.
- Timoshenko's (1953) *Storia della forza dei materiali* (Timoshenko, 1953). Per coloro che sono principalmente interessati (in definitiva) all'analisi strutturale.
- La storia di Truesdell (1968) *Saggi nella storia della Meccanica*, (Truesdell, 1968). Questa non è una presentazione storica e panoramica come i libri precedenti, ma piuttosto otto saggi che toccano argomenti specifici che hanno suscitato l'interesse di Truesdell (che ha visto Elasticità come matematica applicata).
- La verità *La Meccanica Razionale di Corpi flessibili o elastici* un'introduzione di 432 pagine a Vol X e XI della collezione completa del corpo di lavoro di Euler, (Truesdell, 1960).
- Dugas, 1988, *Storia della Meccanica*. conto completo e scientifico che traccia l'evoluzione del pensiero meccanico dall'antichità ai primi del XX secolo, con particolare attenzione sia agli sviluppi concettuali che matematici.
- (1991) *An Introduzione alla storia della Meccanica strutturale* (Benvenuto, 1991a) e (Benvenuto, 1991b). Un libro molto conciso due volumi. Ampia copertura di archi gotici, cupole.
- Heyman (1998) *Analisi strutturale; approccio storico* (Heyman, 1998a).
- Huerta Ed. (2005) *Saggi nella storia della teoria delle strutture: In onore di Jacques Heyman*.
- Kurrer (2008) *Il Storia della Teoria delle Strutture (Kurrer, 2008)Un libro eccellente e molto leggibile con l'accento sull'analisi strutturale, invece della Meccanica.*

La preparazione di questo volume ha coinvolto una vasta consultazione di documenti storici, molti dei quali sono sufficientemente vecchi da essere liberamente accessibili in formato digitale attraverso la HathiTrust Digital Library, o ottenibile tramite i servizi di prestito inter-bibliotecario forniti dalla mia istituzione.

Oltre a queste opere essenziali, non ho incontrato altri trattamenti storici di meccanica strutturale sufficientemente completi o intuitivi per meritare l'inclusione in questa lista.Questa assenza è di per sé degna di nota: la storia dell'ingegneria strutturale — una disciplina che ha plasmato l'ambiente costruito della civiltà umana dagli ziggurati della Mesopotamia alle torri supertali delle megacitazioni di oggi — rimane notevolmente sottomessa dagli storici.

Il lettore tecnico-formato gravita verso Timoshenko; il matematico inclinato verso Truesdell; il curioso architettonico verso Benvenuto e Heyman. Eppure nessuno di questi lavori, ammirevoli come sono, si rivolge allo studente o all'ingegnere che cerca non una borsa di studio esaustiva ma una narrazione accessibile—una storia di come gli strumenti che usiamo quotidianamente sono venuti ad essere, raccontati in modo che illumina piuttosto che intimidare.

Il volume attuale è un tentativo timido di affrontare questa lacuna, per portare il la storia dell'ingegneria strutturale in modo palpabile ad una nuova generazione di ingegneri che altrimenti conoscono poco delle lotte intellettuali, i falsi inizi, i flash di comprensione, e l'accumulo paziente di conoscenza che ha reso possibile la loro professione. Non è un lavoro di borsa di studio storico originale; io sono un ingegnere, non uno storico, e ho fatto affidamento pesantemente sulle fonti citate sopra.

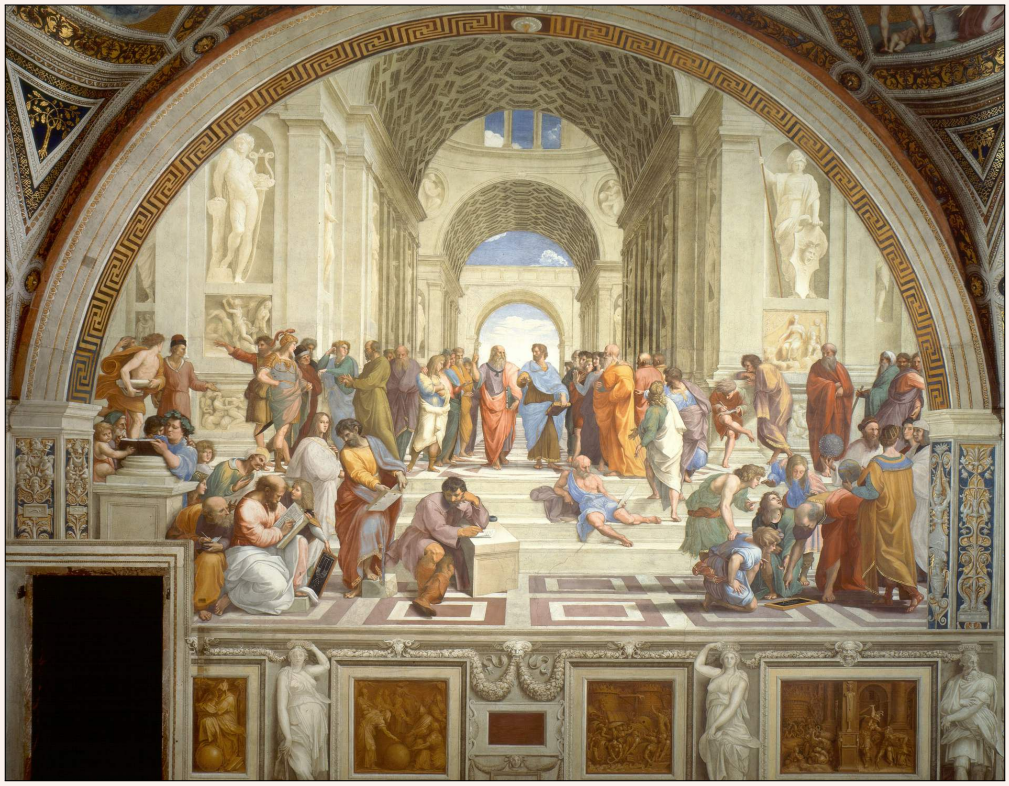
Se queste pagine risvegliano in qualche giovane ingegnere un apprezzamento per i giganti sulle cui spalle ci troviamo tutti – se ispirano anche un lettore a cercare Galileo *Discorsi* o meravigliarsi dell'audacia della

COPIA DI REVISIONE

matematica di Euler o riconoscere in un elemento finito mesh l'eco distante delle statiche grafiche di Culmann — l'autore considererà il suo lavoro ben speso.

La preparazione di questo volume ha coinvolto una vasta consultazione di documenti storici, molti dei quali sono sufficientemente vecchi da essere liberamente accessibili in formato digitale attraverso la HathiTrust Digital Library, o ottenibile tramite i servizi di prestito inter-bibliotecario forniti dalla mia istituzione.

Infine, in tutto il libro I (History), ho volutamente fatto affidamento su fonti primarie per tutti i riferimenti—molti dei quali il lettore può scaricare cliccando sul logo rosso che segue la citazione – e ho evitato fonti secondarie, tranne dove erano veramente necessarie per una piena comprensione. Si noti che, laddove possibile, tutti i documenti sono stati elaborati da OCR e le loro dimensioni dei file compressi.



Raffaello, La Scuola di Atene (1509-1511)[a]

La raccolta di filosofi e matematici antichi, le cui idee formano le fondamenta su cui è stata costruita tutta la successiva conoscenza strutturale, per l'identificazione delle figure principali, vedi §3.2.3.

[a] Ogni capitolo in questo libro si conclude con un'opera d'arte, scelta per la sua, a volte addirittura tenue, risonanza tematica con il materiale precedente, invitata a considerare queste selezioni con spirito generoso; i collegamenti trafilati possono talvolta richiedere una certa elasticità immaginativa.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 2

Prima delle Strutture: Numeri e Lettere

Abstract

Questo capitolo ripercorre due fondazioni parallele su cui sono state costruite scienza, ingegneria e architettura: lo sviluppo dei sistemi di numero e l'invenzione della scrittura. La prima parte esamina come le civiltà antiche — Sumerian, Babilonia, egiziano, greco, islamico ed europeo — hanno strutturato gli strumenti numerici che hanno reso possibile la matematica, dal duodecimale e sestagionale sistemi di Mesopotamia attraverso il decimale posizionale sistema dell'India e del binario aritmetica dell'era digitale. La narrazione traccia l'evoluzione di concetti come la misurazione dell'angolo, il timekeeping, irrazionali numeri, e il rapporto d'oro. La seconda parte si trasforma nella storia parallela della scrittura: dai primi token di argilla e bastoni di tally, attraverso il cuneiforme di Sumer e i geroglifici dell'Egitto, al contributo decisivo dei Fenici—l'invenzione dell'alfabeto—e la sua trasmissione attraverso la Grecia e Roma al mondo moderno; insieme, numeri e lettere rappresentano gli strumenti gemelli senza i quali non sarebbe stato possibile né ragionare scientifico né il record accumulato della conoscenza umana.

2.1 Numeri . . . 12
2.1.1 Sistemi sessuali e duodecimali . . . 12
2.1.2 Angolo . . . 14
2.1.3 Tempo . . . 14
2.1.4 Sistema Decimale e Numeri indù-arabi . . . 15
2.1.5 La storia della π . . . 15
2.1.6 Numeri irrazionali e il rapporto d'oro . . . 16
2.2 Lettere: La storia dei sistemi di scrittura . . . 17
2.2.1 I primi dischi: Tokens, Tallies e Clay . . . 17
2.2.2 Cuneiform: il primo sistema di scrittura del mondo . . . 18
2.2.3 Geroglifi egiziani e la tradizione pittorica . . . 18
2.2.4 I Fenici e l'Invenzione dell'Alfabeto . . . 20

2.1 Numeri

2.1.1 Sistemi sessuali e duodecimali

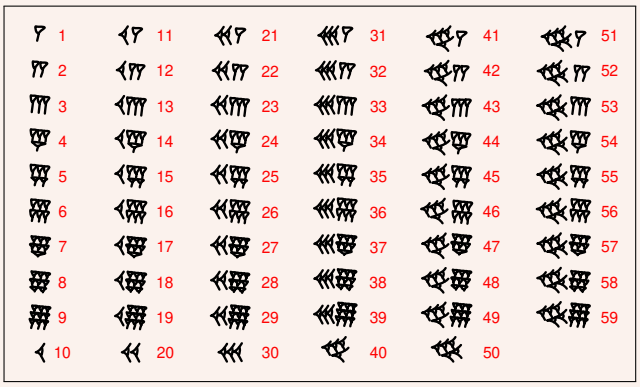
Non molto tempo dopo l'età del bronzo, Sumer—una delle prime civiltà registrate, insieme all'Antico Egitto—emergeva in Mesopotamia, la regione delimitata dai fiumi Eufrate e Tigri; l'insediamento permanente

COPIA DI REVISIONE

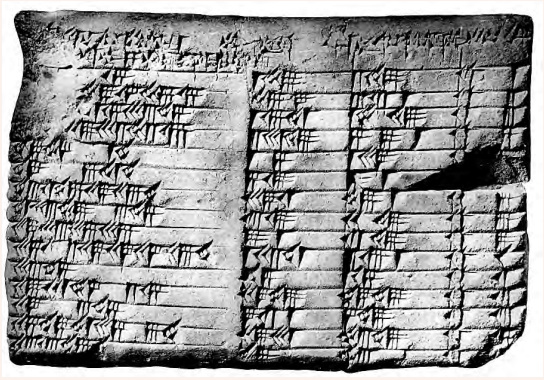
si è verificato tra circa 5500 e 4000 BC (Mieroop, 2024). Sumer fu infine succeduto dall'Impero babilonese (circa 1895-539 BC), che ha ereditato e ampliato molti aspetti della cultura sumerica, tra i contributi più duraturi dei Sumeri è stato lo sviluppo del più antico sistema di scrittura conosciuto: cuneiform, composto da caratteri a forma di cuneo impressionati su tavolette di argilla.

Nella borsa di studio moderna, tali compresse sono spesso identificati con il nome della collezione in cui sono tenuti. fa parte della collezione Plimpton della Columbia University, mentre Yale Babylonian Collection 7289 si tiene nella Collezione Yale Babilonia (Robson, 2001). A causa delle notevoli qualità di conservazione di argilla cotta, considerevolmente più è conosciuto oggi circa la matematica sumerica e babilonese che circa la matematica dell'antico Egitto, che è stato in gran parte registrato su papiro più perimetrale.

I Sumeri e i Babilonesi impiegarono un duodecimale (base 12) e sestagionale (base 60) sistema numerico, come illustrato nella figura. 2.1a. Il loro calendario Tuttavia, inizialmente mancavano un simbolo per zero, anche se in seguito svilupparono un simbolo segnaposto, non un vero zero nel senso matematico moderno. Il concetto di zero come numero con le proprie regole aritmetiche non sarebbe formalmente stabilito fino a quando il matematico indiano Brahmagupta in 628 CE, da dove passava al mondo islamico e infine all'Europa medievale (Kaplan, 2000).



(a) Numeri cuneiformi babilonesi



(b) Plimpton 322, Columbia University

Figura 2.1: Matematica babilonese

Interessante, i Sumeri non contano di usare le dieci dita come oggi comune, ma invece usavano le dodici ossa di dito (falanges) da una parte, tre in ciascuna di quattro dita, mentre impiegavano il pollice come puntatore per toccare ogni osso in sequenza, permettendo loro di contare fino a 12 da una parte. (Maor, 2001).

La scelta di 60 non era arbitraria, ma è ciò che è ora definito un *numero superiore altamente composito*, significa che ha più divisori di qualsiasi più piccolo integer positivo: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60. Importante, è divisibile dai primi tre numeri primi (2, 3 e 5), che semplifica notevolmente la rappresentazione delle frazioni. sistema senza notazione frazionaria consente solo una divisione pulita di 2 e 5. In un contesto commerciale, tale divisibilità può facilitare l'aritmetica pratica nel commercio e nella contabilità (Neugebauer, 1969; Menninger, 2013).

Storicamente, il duodecimale il sistema rimase in uso tra i babilonesi e successivamente i greci, in parte grazie alla sua comoda divisibilità di 2, 3 e 4. La sua persistenza fu anche rafforzata da osservazioni astronomiche, soprattutto il fatto che ci sono circa dodici cicli lunari all'anno (Maor, 2001).

Tra i più famosi cuneiformi artefatti, Plimpton 322 (Fig. 2.1b), datata intorno al 1800 BCE, suggerisce che gli studiosi babilonesi erano consapevoli delle proprietà dei triangoli giusti molto prima del tempo di Pitagora. (a, b, c) soddisfare il rapporto $a^2 + b^2 = c^2$— ora conosciuto come Pythagorean triples. Mentre alcuni studiosi

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

una volta respinto questo come un insieme di esercizi astratti, le interpretazioni moderne sostengono che il tablet riflette una comprensione sofisticata delle relazioni numeriche (Robson, 2001).

Un altro artefatto degno di nota, Yale Babylonian Collection (YBC) 7289, contiene un sessagesimal notevolmente accurato ravvicinamento delle legislazioni $\sqrt{2}$—corretto a circa sei punti decimali (1.414214) (Robson, 2002).

I babilonesi sono più conosciuti per il loro contributo alla matematica e all'astronomia, mentre i loro risultati ingegneristici, sebbene notevoli in aree come l'irrigazione, erano relativamente modesti rispetto a quelle delle civiltà successive come i Greci o i Romani.

2.1.2 Angolo

I babilonesi erano anche osservatori acuti del cielo notturno e, per tracciare posizioni celesti, svilupparono una forma precoce di un telaio di riferimento. BCE, hanno introdotto lo zodiaco come sistema di coordinate per scopi astronomici. Questo sistema era un'estensione naturale della loro base sessiagesimale e probabilmente influenzata dalle loro osservazioni geometriche, come il fatto che il perimetro di un esagono regolare equivale sei volte al raggio del suo circolo circoscritto. Lo sviluppo del cerchio a 360 gradi probabilmente è sorto da influenze multiple, compreso il loro sistema di calendario (360 giorni), considerazioni geometriche e osservazioni astronomiche, anche se l'origine esatta rimane oggetto di dibattito studioso (Toomer, 1998).

Mentre gli Egiziani erano in grado di determinare le piste, utilizzando strumenti come il groma, il concetto astratto di un angolo Sembra che siano stati sconosciuti in termini matematici, i greci sono più chiaramente associati alla formalizzazione della misurazione dell'angolo. di Mileto (c. 624–c. 545 BCE) è accreditato con la prova che la somma degli angoli in un triangolo Equivale a 180 gradi. In particolare, si è rotto anche con spiegazioni mitologiche proponendo che la Terra galleggia sull'acqua e che i terremoti risultato da moto ondulato – anche se il suo ragionamento era filosofico piuttosto che basato sulla comprensione moderna di placche tettoniche (Boyer e Merzbach, 2011).

Un importante anticipo relativo alla misura angolare è venuto da Aristarchus di Samos (c. 310–c. 230 BCE), che stimava che il diametro angolare del Sole fosse di circa due gradi, è anche riconosciuto come il primo a proporre un modello eliocentrico del sistema solare (Evans, 1998).

Ipparca (c. 190–120 BCE), spesso considerato come il padre della trigonometria, è accreditato con dividere il cerchio in 360 gradi. (c. 100–c. 170 CE), lavorando in Egitto romano, ha esteso questo sistema dividendo ogni grado in 60 parti uguali, e ulteriormente suddiviso ogni parte in 60 parti più piccole. Quando le sue opere greche sono state successivamente tradotte in latino medievale, queste suddivisioni sono state chiamate *a partire da:* (prima parte piccola) e *a partire da:* (seconda piccola parte)—le origini etimologiche dei termini moderni *minuti* e *secondi* (Neugebauer, 2012).

2.1.3 Tempo

Come i Babilonesi impiegato un duodecimale e sestagionale sistema numerico, gli antichi egizi anche fatto uso di un duodecimale come già detto, 12 è un numero altamente composito superiore, offrendo vantaggi pratici nella divisione frazionaria. per dividere la giornata in unità più piccole, gli egiziani lo dividono naturalmente in due set di dodici ore, uno per la luce del giorno e uno per la notte. Queste prime ore, tuttavia, non hanno una lunghezza fissa; variano con le stagioni a seconda della durata relativa di giorno e notte (Clagett, 1995).

L'ordine è stato introdotto da Hipparchus (vedi sopra), che propose di dividere il giorno in 24 ore uguali, un sistema che divenne noto come ore equinottiche, basato sulla divisione pari della luce del giorno e delle tenebre durante gli equinozi (Evans, 1998).

COPIA DI REVISIONE

La suddivisione dell'ora in unità più piccole utilizzando il sistema sessiagesimal non si è verificata fino all'inizio dell'età d'oro islamica. CE, il polimath Al-Biruni applicato metodi babilonesi per suddividere l'ora in 60 minuti e poi in 60 secondi (Kennedy, 1971). Questo approccio è stato successivamente adottato da Giovanni del Sacrobosco circa 1235 CE in Parigi medievale, dopo due secoli dopo Al-Biruni (Grant, 1977).

Così, il concetto moderno del tempo riflette una sintesi di due antiche tradizioni numeriche: il duodecimale egiziano struttura e il sessantama babilonese sistema.

2.1.4 Sistema Decimale e Numeri indù-arabi

Contare sulle dita è probabilmente l'origine più intuitiva dei sistemi numerici, e il decimale sistema – basato su dieci cifre – era effettivamente usato da diverse civiltà antiche, compresi i greci, Egiziani e Romani. Questi ultimi, in particolare, erano noti per il loro orientamento pratico verso l'amministrazione e l'ingegneria.

Il passo decisivo, tuttavia, non era solo contare nella base dieci, ma lo sviluppo di un *posizione* notazione in cui il valore di una cifra dipende dal suo posto all'interno di un numero, e in cui zero funziona non solo come segnaposto ma come numero a suo diritto, che è stato raggiunto in India., scrittura in 628 CE, è stato il primo a formulare regole aritmetiche per i numeri zero e negativi (Kaplan, 2000). Il sistema decimale posizionale risultante è stato trasmesso al mondo islamico attraverso il lavoro di Al-Khwarizmi, il cui trattato *Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa-l-muqābala* (c. 825 CE) non solo popolarizzato i numeri indù-arabici ma anche ha dato origine alla parola *algebra*. Il sistema fu introdotto nell'Europa medievale da Leonardo di Pisa – meglio conosciuto come Fibonacci— attraverso il suo *Liber Abaci* (1202 CE), in cui ha dimostrato la superiorità pratica della numerazione indù-arabica sui numeri romani per l'aritmetica commerciale (Devlin, 2011).

C'è poco da aggiungere circa il decimale sistema fino alla Rivoluzione francese, quando lo zelo rivoluzionario si estendeva anche alla misurazione del tempo. Nel tentativo di imporre un ordine razionale su tutti gli aspetti della vita, i rivoluzionari francesi introdussero un sistema decimale di timekeeping: un giorno di 10 ore, ogni ora che comprende 100 minuti, e ogni minuto comprende 100 secondi. II del Calendario Repubblicano) e mandato dal 1794, il sistema, sebbene matematicamente elegante, provvedeva impraticabile e fu rapidamente abbandonato (Richards, 1998).

La riforma si è estesa ulteriormente con l'introduzione del calendario repubblicano francese, che ha diviso l'anno in dodici mesi di tre settimane di dieci giorni (*Décades*). Per completare l'anno 365- o 366-giorno, cinque o sei giorni festivi aggiuntivi—*jours complémentaires*—siamo stati aggiunti alla fine dell'anno (Gleick, 2016).

Anche se non è stata sopportata la tempestività decimale, un'altra innovazione del periodo, il sistema metrico, si è evoluta in definitiva nel *Système international d'unités* (SI), ora mantenuto dall'Ufficio internazionale dei pesi e delle misure e ampiamente adottato nella scienza e nell'ingegneria.

Per quanto riguarda il binario sistema (base 2), le sue radici matematiche possono essere rintracciate a Leibniz nel XVII secolo, che era in parte ispirato dall'antico cinese *I Ching*—un testo il cui sistema esagonale di linee rotte e non rotte Leibniz riconosciuto come un'incarnazione della logica binaria (Davis, 2018)Oggi il sistema binario è alla base dell'era digitale. Gli ingegneri strutturali, spesso subconsciosamente, si affidano a esso ogni giorno, sia che si componino documenti, esecuzione di analisi, sia che eseguono simulazioni sui computer.

2.1.5 La storia della π

Tra le costanti matematiche che pervadono l'ingegneria, π- il rapporto di un la circonferenza del cerchio al suo diametro — è forse la più universalmente incontrata. La sua espansione decimale,

$$\pi = 3.14159265358979\ldots,$$

COPIA DI REVISIONE

è sia irrazionale (non può essere espresso come un rapporto di due interi) e trascendentale (non soddisfa l'equazione polinomiale con coefficienti razionali), proprietà che non sono state formalmente stabilite fino al XIX secolo.

La necessità pratica di approssimare π è antico. I babilonesi usato il valore $3\frac{1}{8} = 3.125$, mentre il Rhind Papiro (c. 1650 BC)) implica un egiziano ravvicinamento delle legislazioni $\left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3.1605$. Il primo rigoroso trattamento matematico è dovuto Archimedes (c. 287–212 BC)), che si è limitato π con l'iscrizione e la circumscrivibilità regolare poligoni su un cerchio (Fig. 2.2). Utilizzo *96*- poligoni alla testa, lui stabilito:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7},$$

un risultato di notevole precisione per il suo tempo. Questo metodo poligonale è rimasto il approccio computazionale dominante per quasi due millenni.

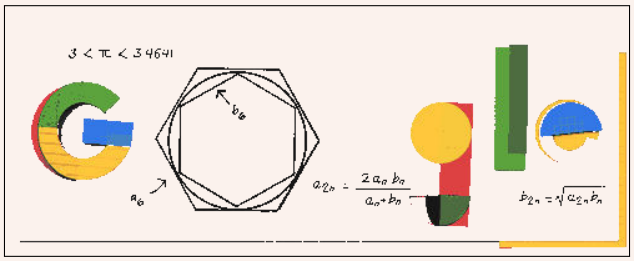


Figura 2.2: Google Doodle on π giorno (3/14/26); Omaggio a Archimedis

I progressi significativi provengono dalla tradizione matematica indiana. Aryabhata (476–550 AD) dato $\pi \approx 3.1416$e poi Madhava (c. 1340–1425) della scuola del Kerala derivato che cosa è ora conosciuto come il Leibniz - Serie di gorie:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

anticipando di due secoli i risultati successivamente attribuiti ai matematici europei. Nel XVII secolo, lo sviluppo del calcolo aprì completamente nuove vie: Newton. calcolato π a sedici decimali posti usando un'espansione binomiale della serie, osservando che non era orgoglioso di aver speso tanto tempo sul calcolo.

Il simbolo π è stato introdotto da Matematica gallese William Jones nel 1706 e popolare da Euler dal 1737 in poi... la stessa Euler la cui identità $e^{i\pi} + 1 = 0$ appare in §2.1.6. prova che π è irrazionale è stato dato da Lambert nel 1768, e la sua trascendenza fu stabilito da Lindemann nel 1882, finalmente ambientato l'antica questione della *quadratura del cerchio*— impossibilità di costruire, da sola, da sola, da sola, un quadrato di area pari a un determinato cerchio.

2.1.6 Numeri irrazionali e il rapporto d'oro

I numeri irrazionali sono sempre presenti nella vita degli ingegneri, soprattutto attraverso costanti come π e eQuesti due numeri trascendentali sono famosi in quello che è stato spesso descritto come l'equazione più bella della matematica: Eulerl'identità,

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Pur elegante, questa identità trova poche applicazioni dirette nell'analisi strutturale, con l'eccezione notevole di EulerLa formula per i carichi di indurimento, più rilevante nel contesto del design architettonico (anche se non della meccanica) è la cosiddetta *Ratio d'oro*.

COPIA DI REVISIONE

Euclide (c. 330 BCE), in Libro VI *Gli elementi*, definisce la divisione di una linea in rapporto estremo e medio come segue: una linea si dice tagliata in rapporto estremo e medio quando l'intero è al segmento più grande come maggiore è al più piccolo.[1] Questo è illustrato in Fig. 2.3, e algebricamente espresso come:

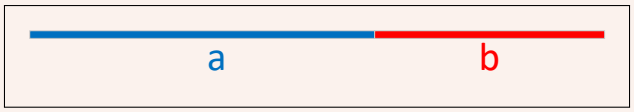


Figura 2.3: Euclide« la definizione della *rapporto estremo e medio*

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{a+b}{a} & = & \frac{a}{b}, \\ x & = & \frac{a}{b} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi \overset{\text{def}}{=} x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} 1.6180339887\ldots \\ 0.6180339887\ldots \end{cases}$$

Ecco, ϕ denota il rapporto d'oro chiamato da Phidias (§3.2.3), anche se non l'ha usato in forma matematica, questa è la definizione classica del Ratio d'Oro, anche se esistono molte altre formulazioni geometriche. ϕ appare anche come il rapporto di limitazione dei termini consecutivi nel Fibonacci sequenza: $\phi = \lim_{n\to\infty} F_{n+1}/F_n$—un ponte inaspettato tra una sequenza di interi ricorsi e una costante irrazionale radicata nella geometria.

Si è speculata che gli antichi egiziani incorporarono il rapporto d'oro nel disegno delle piramidi; tuttavia, tali affermazioni sono ampiamente contestate, in quanto non vi è alcuna prova credibile che possedessero gli strumenti matematici necessari per definire o calcolare i numeri irrazionali. (Livio, 2008).

2.2 Lettere: La storia dei sistemi di scrittura

I numeri non esistono in isolamento, richiedono un mezzo di espressione. La storia di come gli esseri umani hanno registrato, comunicato e trasmesso la conoscenza è inseparabile dalla storia della matematica e dell'ingegneria. Scrittura e numerazione coevolved, e vale la pena tracciare le origini della lingua scritta accanto ai sistemi numerici sopra descritti.

2.2.1 I primi dischi: Tokens, Tallies e Clay

Molto prima dell'emergere della scrittura formale, le comunità umane hanno sviluppato sistemi rudimentali per la registrazione di quantità. *bastoni di tally*— le ossa o il legno di cui si fa riferimento per la registrazione dei conti. dal sud Africa (c. 43,000 BCE) può rappresentare il più antico artefatto matematico conosciuto, mentre l'osso di Ishango, scoperto nella Repubblica Democratica del Congo e datato a circa 20,000 BCE, porta una serie di tacche disegnate in modelli che alcuni studiosi interpretano come prova del ragionamento aritmetico precoce (Marshack, 1972).

Anche prima di scrivere per se, le società mesopotamiche usavano piccola argilla *Tokens*—rappresentare materie prime come il grano, il petrolio o il bestiame —per monitorare le transazioni. BCE, questi token erano racchiusi in buste di argilla cava, con impressioni premete all'esterno per indicare il contenuto, come illustrato nella figura. 2.4. È stato un breve passo concettuale da tali impressioni alla marcatura diretta di simboli su superfici piane di argilla, e con quel passo, la scrittura è nata (Schmandt-Besserat, 1992).

[1] Per oltre due millenni, Euclid's *Elementi* A partire dalle definizioni e dai postulati di base, Euclid ha sviluppato un rigoroso sistema deduttivo in cui ogni proposizione ha seguito logicamente da quelli che lo precedevano.

COPIA DI REVISIONE



Figura 2.4: Token di argilla mesopotamiana: precursori della scrittura (c. 3500 BCE)

2.2.2 Cuneiform: il primo sistema di scrittura del mondo

Il più antico sistema di scrittura conosciuto al mondo—cuneiforme—emergente in Sumer intorno 3200 BCE. Il suo nome deriva dal latino *il mio nome* (specchi), che riflette la caratteristica forma dei segni prodotti premendo uno stilo a canna in morbida argilla. Inizialmente pittografico in carattere, cuneiforme rapidamente si è evoluta in un sistema sillabico più astratto in grado di rappresentare non solo materie prime e conti ma letteratura, legge e scienza, come illustrato dalla progressione mostrata nella figura. 2.5.

Il *Epico di Gilgamesh*, tra le più antiche opere di letteratura sopravvissute, fu preservata su tavolette cuneiformi; così anche furono i record astronomici, i set di problemi matematici, e il codice di legge di Hammurabi (c. 1754 BCE). Clay si è rivelato un mezzo straordinariamente durevole: cotto, sia intenzionalmente che dai fuochi che hanno distrutto le città antiche, i tablet sono sopravvissuti per millenni. Ecco perché la matematica babilonese e sumera sono meglio documentate oggi della matematica dell'Egitto, dove il medium primario era il papiro molto più peribile (Kramer, 1963).

Nel corso del tempo, il cuneiforme è stato adattato da numerose culture in tutto il Vicino Oriente, tra cui gli Accadi, assiri, Hittiti e persiani. BCE, tuttavia, è stato gradualmente spostato da sistemi di scrittura più flessibili, soprattutto l'alfabeto. L'ultimo tablet cuneiforme conosciuto risale a circa 75 CE; la sceneggiatura era ormai estinta da secoli come tradizione vivente.

2.2.3 Geroglifi egiziani e la tradizione pittorica

Indipendentemente dalla Mesopotamia, anche se probabilmente con stimoli indiretti, l'Egitto antico sviluppato il proprio sistema di scrittura intorno 3100 BCE. geroglifici egiziani (dal greco) *hieros*, sacro, e *glyphein*, a carve) erano un sofisticato sistema misto, che combina segni logografici (dove un simbolo rappresenta una parola o un concetto), segni fonetici (dove i simboli rappresentano suoni), e determinanti (segni non pronunciati che indicano la categoria semantica), come illustrato nella figura. 2.6Il risultato è stato capace di straordinaria gamma espressiva e di bellezza visiva, come testimoniano le iscrizioni che adornano templi, tombe e monumenti in tutto l'Egitto.

Isopratici[2] sono stati utilizzati per iscrizioni monumentali su pietra, mentre due derivati curvi—Hieratic

[2]Esiste un parallelo istruttivo tra i geroglifici egiziani e i cinesi caratteri: entrambi sono sistemi misti che combinano segni logografici (dove un simbolo rappresenta una parola o morfema), componenti fonetici (dove gli elementi indicano il suono), e classificatori semantici analoghi a egiziani determinanti. In cinese, la maggior parte dei caratteri sono *fono-semantico composti*, costituito da un semantico radicale che suggerisce significato e un componente fonetico che suggerisce pronuncia—a logica strutturale sorprendentemente

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

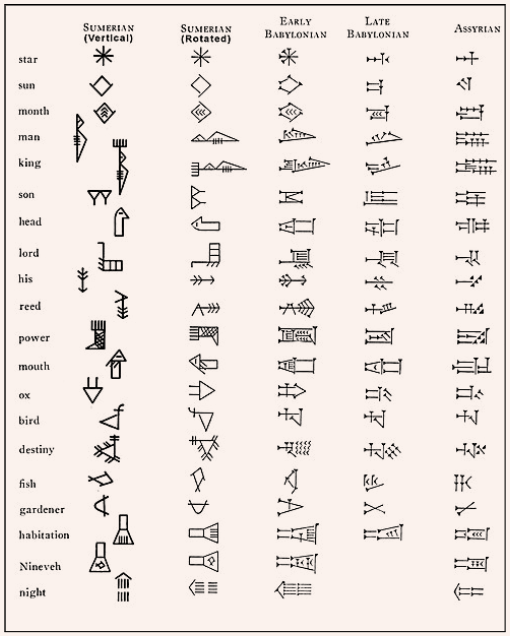


Figura 2.5: Evoluzione del cuneiforme da pittografia (c. 3200 BCE) a segni sillabi astratti (c. 2000 BCE)



Figura 2.6: Geroglifico egiziano

e poi Demotic[3]— erano impiegati per la scrittura quotidiana su papiro; la conoscenza matematica è stata trasmessa in questi script curvi; il Papiro matematico di Rhind (c. 1650 BCE) e il Papiro matematico di Mosca

simile alla combinazione egiziana di logogramma, fonogramma, e determinante. I due sistemi si svilupparono completamente in modo indipendente, ma convergevano la stessa soluzione organizzativa al problema di rappresentare un complesso parlato La convergenza strutturale è talvolta citata come prova che la sistemi tronografici misti rappresentano una fase intermedia naturale evoluzione della scrittura (Daniels e Bright, 1996).

[3]Demotico (dal greco *dĒmotikós*, "del popolo") era un copione cursivo che emerse in Egitto intorno al VII secolo BCE come semplificazione del precedente script Hieratic, esso stesso un derivato cursivo di geroglifici. Dove Hieratic era stato utilizzato principalmente da sacerdoti e scribi per testi religiosi e amministrativi, Demotic divenne il sistema di scrittura quotidiana di egiziani literati per una gamma molto più ampia di

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

(c. 1850 BCE) sono tra le fonti principali per la nostra comprensione dell'aritmetica e della geometria egiziana (Clagett, 1999).

Il decifrамento dei geroglifici, lungo un mistero per il mondo occidentale, fu raggiunto da Jean-François Champollion nel 1822, utilizzando la Pietra di Rosetta trilingue (Fig. 2.7), inscritto in geroglifico, demotico e greco, come la sua chiave (Parkinson, 1999)La ricchezza pittorica della tradizione geroglifica si contraddistingue in netto contrasto con l'efficienza astratta che doveva seguire, l'alfabeto.

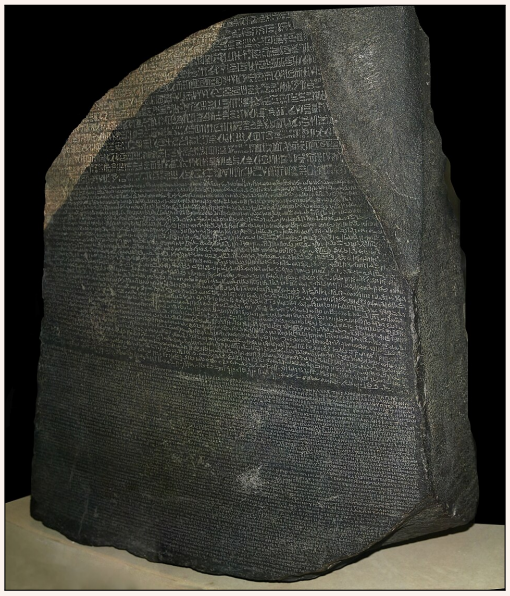


Figura 2.7: La pietra di Rosetta (196 BCE), che porta lo stesso decreto in geroglifico, demotico e greco (dall'alto al basso), era la chiave per decifrare antico script egiziano

2.2.4 I Fenici e l'Invenzione dell'Alfabeto

Di tutte le innovazioni nella storia della comunicazione scritta, nessuno ha dimostrato più consequenziale dell'invenzione dell'alfabeto— il sistema con cui un piccolo insieme di segni, ciascuno che rappresenta un singolo suono consonante, può essere combinato per scrivere qualsiasi parola in qualsiasi lingua;[4], una civiltà marina semitica che fiorì lungo la costa orientale del Mediterraneo nel territorio dell'attuale Libano, dell'Israele settentrionale e della Siria costiera, da circa 1500 a 300 BCE (Sader, 2019).

L'alfabeto fenicio, che cristallizza intorno al 1050 BCE, consisteva in 22 lettere consonanti (che lo rende un *Abija*— una registrazione del sistema di scrittura consonanti solo, lasciando le vocali da dedurre dal lettore), come mostrato in Fig. 2.8Ogni lettera portava un nome che era anche una parola semitica che iniziava con il suono corrispondente: *aleph* (ox), *la sua* (casa), *GIOCO* (camel), e così via. Questo principio acrofonico—utilizzando il suono iniziale di una parola come il nome e il valore del segno — era sia mnemonico che elegante; i segni stessi erano derivati dal precedente script Proto-Sinaitic, che a sua volta sembra essere stato ispirato dai geroglifici egiziani, anche se adattato per rappresentare i suoni di un linguaggio semitico (Naveh, 1987).

Il genio del sistema fenicio risiede nella sua economia radicale: dove il cuneiforme richiedeva centinaia di segni e geroglifici egiziani impiegava migliaia, l'alfabeto fenicio riduceva la rappresentazione scritta del

scopi — contratti legali, lettere, testi letterari e registri commerciali. BCE) e, in seguito, da copto, la fase finale

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

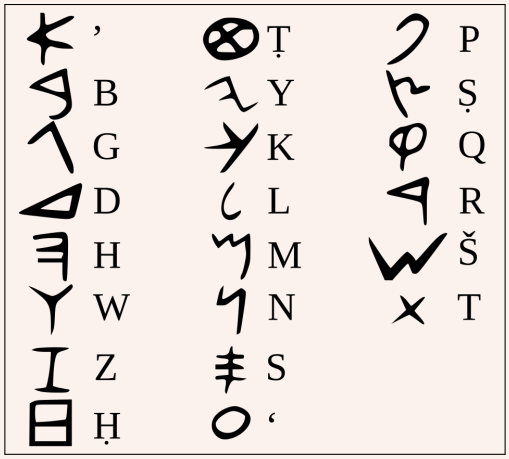


Figura 2.8: L'alfabeto fenicio (c. 1050 BCE), che mostra i 22 segni consonanti, i loro nomi, e la loro discesa in lettere greche e latine

linguaggio a soli 22 simboli. Questa semplicità rendeva accessibile l'alfabeto ben oltre le classi scribali strette che avevano imparato i sistemi precedenti.

La trasmissione dell'alfabeto fenicio trasformò il mondo antico. I Greci adottato intorno al IX o VIII secolo BCE, che fa l'innovazione critica di riproporre diversi segni consonanti fenici per rappresentare le vocali— creando il primo vero alfabeto in cui sono stati sistematicamente scritti sia le consonanti che le vocali; questo alfabeto greco era a sua volta adattato dagli Etruschi, e da loro dai Romani, dando origine all'alfabeto latino che oggi sottoscrive la maggior parte della scrittura nel mondo occidentale. Nel frattempo, lo stesso prototipo fenicio ha dato origine, attraverso rami evolutivi separati, all'ebraico, arabo, e alla fine gli script brahmici del Sud e del Sud-Est asiatico, come riassunto nel diagramma genealogico di Fig. 2.9 (Daniels e Bright, 1996).

Le conseguenze culturali di questa diffusione non possono essere sorprese. La relativa facilità di scrittura alfabetica ha permesso la proliferazione di letteratura, filosofia, codici legali e testi scientifici in tutto il mondo Mediterraneo. Le opere di Omero, Platone, Euclid e Archimede - tutto scritto nell'alfabeto greco, stesso un diretto discendente del Fenicio - formano la roccia intellettuale della scienza e dell'ingegneria occidentale.

È opportuno, nel contesto di un trattato sull'analisi strutturale, rilevare che la parola *ingegnere* in ultima analisi, ripercorre attraverso il latino e il vecchio francese al latino *ingegno*—l'ingegno nativo — un concetto che la proliferazione della scrittura sia espressa che amplificata; numeri e lettere, registri e calcoli, non sono flussi separati: sono affluenti dello stesso fiume.

della lingua egiziana scritta in un alfabeto greco modificato. BCE) è tra i documenti più celebri inscritto in Demotic, accanto alle sue versioni geroglifiche e greche.

[4] I miei antenati!

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

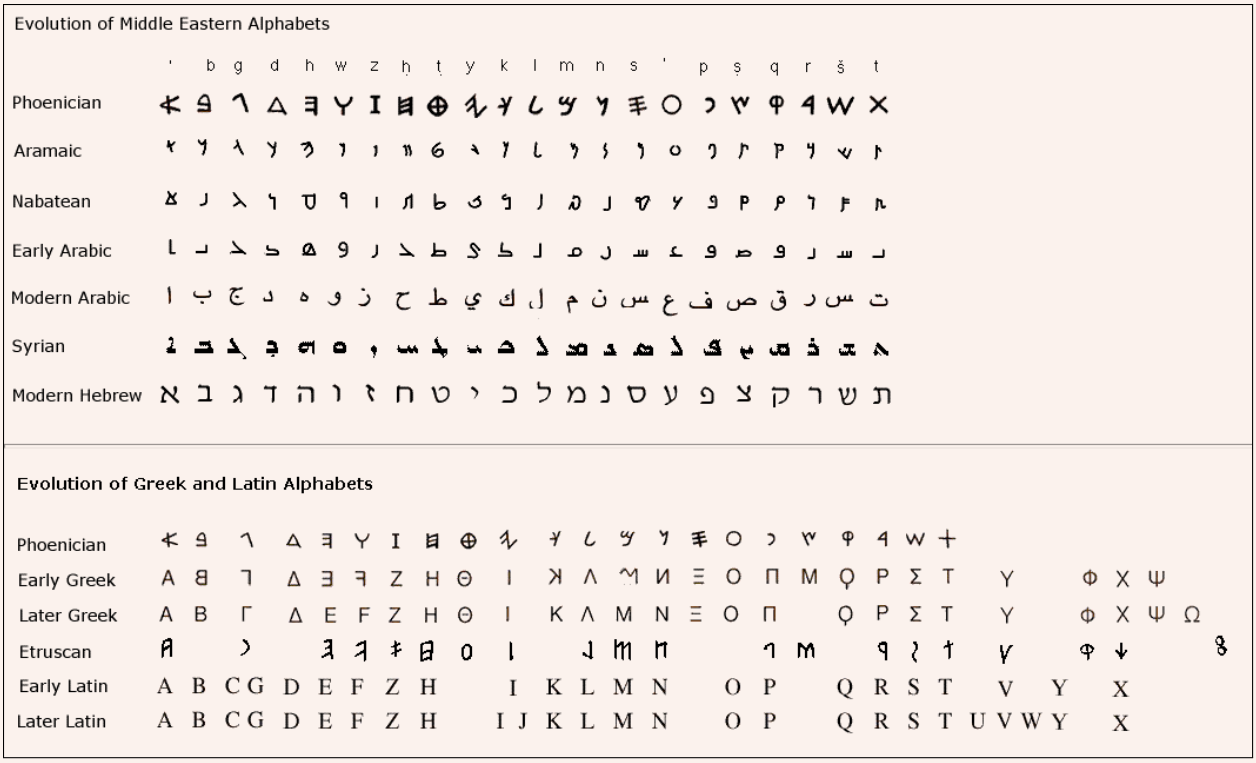


Figura 2.9: Genealogia degli alfabeti: dal Fenicio (c. 1050 BCE) alle famiglie di script greci, latini, arabi, ebrei e brahmici

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Melencolia I di Albrecht Dürer (1514)

La piazza magica, i solidi geometrici e gli strumenti di misura che circondano la figura di spillatura incarnano il risveglio matematico dell'umanità.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 3

Civilizzazioni antiche

Abstract

I campi di analisi strutturale e meccanica devono molto ai progressi intellettuali e pratici fatti dalle antiche civiltà: tra questi, Mesopotamia, Mesoamerica, Persia, Cina, India, Giappone, Roma, Egitto, e il mondo arabo-islamico occupano un posto significativo, avendo posto le basi per vari principi e tecniche che hanno influenzato sia la meccanica teorica che quella applicata.

I campi di analisi strutturale e meccanica devono molto ai progressi intellettuali e pratici fatti dalle antiche civiltà: tra questi, Mesopotamia, Mesoamerica, Persia, Cina, India e Giappone occupano un posto significativo, avendo posto le basi per vari principi e tecniche che hanno influenzato sia la meccanica teorica che quella applicata, e che riflettono una miscela di indagine scientifica, di ingegnosità ingegneristica e di sperimentazione pratica che risuona attraverso le epoche.

3.1 Civilizzazioni e origini monumentali 25
3.1.1 Mesopotamia: Ziggurats e Strutture in Argilla; c. 3100-500 BCE 25
3.1.2 Mesoamerica: Piramidi Maya e Azteca; c. 400 BCE-1521 CE 25
3.1.3 Egitto; c.~2700-1000 a.C. . . . 27
3.1.4 Mesopotamomico comparato, mesoamericano ed egiziano 30
3.2 Antichità classica: Geometria, Teoria e Impero 34
3.2.1 Persia: Piattaforme imperiali, Ponti, e Qanats 34
3.2.2 Contributi arabi-islamici: innovazioni nell'ingegneria strutturale 36
3.2.3 Contributi greci agli Statici e Meccanica strutturale 37
3.2.4 Roma: Concrete, Arches e Infrastrutture 41
3.3 Tradizioni matematiche e strutturali dell'India, della Cina e del Giappone 45
3.3.1 Cina: Sessologia, Ponti e Innovazione Meccanica 45
3.3.2 India: Matematica, Materiali e Architettura Monumentale 46
3.3.3 Giappone: Resilienza Sismica e Strutture Adattative . . 46
3.3.4 Sintesi e influenza globale . . 47

COPIA DI REVISIONE

3.1 Civilizzazioni e origini monumentali

3.1.1 Mesopotamia: Ziggurats e Strutture in Argilla; c. 3100-500 BCE

La mesopotamia, spesso considerata come il "cradle della civiltà", ha posto basi fondanti nei domini della meccanica strutturale e delle infrastrutture civili. Ziggurats—le monumentali piattaforme passo-passo erette nei principali centri urbani mesopotamici—servi come dimostrazioni iniziali di costruzione mass-masonry sotto i regimi di carico dominati dalla gravità.~BCE), Fig. 3.1a, per esempio, è stato costruito utilizzando un nucleo di mattoni di fango a forma di sole avvolto da mattoni cotti per una maggiore durata e resistenza agli agenti atmosferici (Oppenheim, 1977)La geometria a terrazze ha fornito una dispersione efficace dello stress attraverso strati multipli, riducendo l'accumulo di stress verticale della compressione alla base e migliorando la stabilità globale. L'uso di bitume come agente di incollaggio ha introdotto duttilità e una maggiore coesione all'interno della matrice muraria, migliorando la sua resistenza al fallimento della canapa e al degrado ambientale.

Mentre le piramidi egizie e gli zigobi Mesopotami condividono una somiglianza geometrica superficiale, non vi è alcuna prova conclusiva di influenza diretta. Tuttavia, la forma iconica dello ziggurat quasi certamente ha ispirato la narrazione biblica della Torre di Babele, in particolare attraverso il tortuoso Etemenanki di Babilonia (George, 1993).

Parallelamente, gli ingegneri mesopotami hanno sviluppato principi fondamentali dell'ingegneria idraulica per sostenere l'agricoltura e la resilienza urbana, implementando reti di irrigazione a canale aperto controllate e leve terrestri con profili trasversali progettati per mitigare il rischio di inondazione e i flussi diretti di acqua stagionale. Questi sistemi incorporavano concetti di gradiente idraulico e continuità di flusso, anche se non ancora formalizzati matematicamente. Clay, un geomateriale abbondante, non era solo un elemento strutturale ma anche servito nella fabbricazione di stampi e componenti prototipi, portando un uso precoce della templatura nella produzione architettonica. Collettivamente, queste innovazioni riflettono una comprensione pragmatica del comportamento strutturale, delle prestazioni materiali e delle dinamiche idrologiche all'interno di un ambiente contrattato dalle risorse.

Clay. Sebbene sia i mattoni fangosi per gli ziguriti mesopotamici e l'argilla per le compresse cuneiformi siano stati prelevati dagli stessi sorsi alluvionali della pianura di inondazione Euphrates-Tigris, la materia prima è stata elaborata in modo diverso per soddisfare i requisiti di ingegneria distinti.

Per contro, gli scribi levigarono l'argilla (Fig. 3.1b), rimuovere particelle di paglia e grossolane per ottenere una pasta di plastica fine che potrebbe accettare impressioni di stilo croccanti; la maggior parte delle compresse erano semplicemente asciugate dall'aria, ottenendo il fuoco basso accidentale solo durante le conflagrazioni successive. (Oates, 1990; Moorey, 1999).

3.1.2 Mesoamerica: Piramidi Maya e Azteca; c. 400 BCE-1521 CE

Sebbene le piramidi del tempio mesoamericano siano state date agli ziggurati del Vecchio Mondo e alle piramidi egiziane di oltre un millennio, esse vengono trattate qui accanto a quei monumenti precedenti perché rappresentano un'emergenza indipendente e convergente di grande scala, architettura step-ped, offrendo una base parallela per la tradizione globale della monumentalità.

Le civiltà di Mesoamerica, tra cui Maya, Aztechi e i loro predecessori, hanno dato notevoli contributi all'ingegneria strutturale e all'architettura monumentale, le loro iconiche piramidi, caratterizzate da ripide scalinate, piattaforme passo-passo, e l'allineamento con fenomeni celesti, servite come centri religiosi, politici e cosmologici, che non sono state semplicemente costruite per impressionare; sono state il prodotto di un'attenta pianificazione, selezione materiale e adattamento ambientale.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Ziggurath (b) Tabella

Figura 3.1: Argilla in Mesopotamia

Piramidi Maya, come quelle a Tikal, Palenque (250-900 CE), Fig. 3.2ae Chichen Itza, presenta un elevato grado di sofisticazione ingegneristica: i costruttori impiegavano forme passo passo-passo che miglioravano la distribuzione del carico e riducevano la spinta laterale, consentendo una maggiore altezza senza compromettere la stabilità. L'uso di calcare localmente quarried, abbinato a malta calcare, permetteva una coesione duratura in condizioni di alta umidità. (Coe, 2005; Sharer e Traxler, 2006)Queste piramidi spesso supportavano templi alle loro cime, indicando il loro significato cerimoniale e servendo come marcatori verticali dello spazio sacro. La loro geometria spesso codificava la conoscenza calendrica e astronomica, con allineamenti che puntano ai solstizi, agli equinozi e ai cicli di Venere.

Piramidi azteche, come le Templo Mayor a Tenochtitlán (1325-1487 CE), Fig. 3.2bCostruito con basalto vulcanico, tezontle (una roccia lavica rossa porosa), e malta di calce, presentavano ampie terrazze e piattaforme passo passo per distribuire il peso di sé e prevenire l'erosione del pendio. Molti usavano una tecnica di costruzione simile allo stile Teotihuacan precedente noto come *Taud-tablero*, che coinvolge una parete inclinata (talud) sormontata da un pannello rettangolare (tablero), migliorando l'integrità strutturale offrendo al contempo un ricco potenziale simbolico e decorativo (Smith, 1996)Queste strutture spesso incorporavano fasi di costruzione successive, nuove piramidi costruite in cima a quelle vecchie, per significare continuità dinamica e rinnovamento cosmico.



(a) Mayan: tikal-palenque (b) Aztec: Tenochilan

Figura 3.2: Piramidi Maya e Azteca

COPIA DI REVISIONE

Le considerazioni ambientali erano centrali per il design urbano mesoamericano, sia i Maya che gli Aztechi svilupparono sistemi avanzati di drenaggio e gestione delle acque piovane. In città come Tenochtitlán, costruito a fondo laghi, gli ingegneri crearono isole artificiali (chinampas), sollevarono viali e leve con canali in pietra incorporati.*chultuns*), e i canali di gestione dei discarica hanno contribuito a mantenere la resilienza urbana nonostante le precipitazioni altamente stagionali (Sharer e Traxler, 2006).

Le piramidi di Mesoamerica esemplificano così l'integrazione di meccanica strutturale, ingegneria dei materiali, idrologia e astronomia, molto prima che la teoria scientifica formale fosse articolata, che attesta una tradizione empirica di costruzione che era sia contestualmente reattiva che concettuale ambiziosa.

3.1.3 Egitto; c.~2700-1000 a.C.

La nascita di Architettura Monumentale di Pietra La tradizione architettonica dell'Egitto inizia con Imhotep, visir al faraone Djoser durante la Terza Dinastia (c. 2660 a.C.), e ampiamente considerato come il primo architetto, ingegnere e medico di fama nella storia registrata (Lehner, 1997). Concepisce e supervisiona la costruzione della Piramide di Passo a Saqqara, trasformare il convenzionale *ma non è così*[1] in un monumento in pietra tiered che ha segnato il primo uso conosciuto di pietra di quarried su larga scala, che ha introdotto principi fondamentali dell'organizzazione del lavoro, della logistica delle costruzioni e della pianificazione geometrica, che stabilisce una fondazione tecnologica e simbolica per il successivo disegno piramidale.

L'arte architettonica iniziata da Imhotep culminato tre generazioni dopo sotto il faraone Sneferu (r. c. 2613-2589 a.C.), che commissionò una serie di piramidi sperimentali che avanzarono il passaggio da forme passo-passo a geometrie a lato liscio. A Meidum, Sneferu probabilmente completò una piramide passo il cui involucro esterno successivamente collasò o eroso, anche se la struttura principale rimane intatta, spingendo significativi adattamenti strutturali.

Queste raffinazioni in geometria e metodi di costruzione hanno permesso al figlio e successore, Khufu, di realizzare la Grande Piramide a Giza con precisione, scala e ambizione strutturale senza pari. La sua superficie liscia originale è stata raggiunta utilizzando pietre involucri in pietra calcarea finemente vestite Tura, la maggior parte dei quali sono stati persi all'erosione o al riutilizzo. La base piramidale devia di meno di 20 mm su una campata di 230 metri, e i suoi lati sono allineati a vero nord entro una frazione di grado, notevoli risultati nel controllo geometrico dato gli strumenti del tempo. (Lehner, 1997).

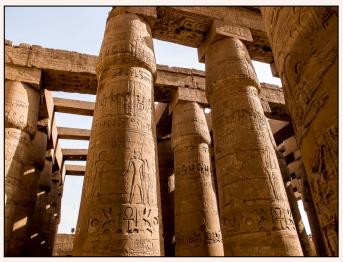
Le teorie moderne suggeriscono che i blocchi siano stati spostati utilizzando slitte su sabbia bagnata (riduzione dell'attrito fino a 50%), insieme a sistemi di rampe, sia rettilinei, zigzag o spirale, anche se il metodo esatto rimane dibattuto. I suoi lati inclinati e la base allineata ottimizzano la distribuzione del peso, riducendo efficacemente la tagliola e consentendo stabilità strutturale a lungo termine sotto massa immensa.

Templi, materiali e infrastrutture templi egiziani, come i Complesso di Tempio di Karnak, Fig.~3.3a, mostra la padronanza nella costruzione post-e-lintel utilizzando elementi di pietra massiccia. sale, supportate da colonne densamente distanziate scolpite da arenaria e granito, dimostrano un controllo sofisticato sulle forze di compressione e limitazioni di copertura (Arnold, 2003)Questi spazi non solo servivano a scopi cerimoniali ma presentavano anche una foresta simbolica di pietra, rafforzando l'autorità religiosa e politica.

L'esperienza dei materiali era centrale nell'ingegneria egiziana. Limestone, arenaria e granito sono stati tremati, sagomati e trasportati su grandi distanze utilizzando slitte, bare e rampe. L'erezione di successo di obelisco-monoliti spesso superando 300 tonnellate-attesti alla comprensione egiziana del vantaggio meccanico e del controllo del carico, in particolare nelle operazioni di sollevamento e posizionamento.

[1] A *ma non è così* è una tomba rettangolare, a tetto piatto con lati interni, utilizzata nelle pratiche di sepoltura egiziane iniziali. Tipicamente costruito di mudbrick o pietra, mastabas servito come precursori della forma piramidale e conteneva camere di sepoltura sotterranee con l'offerta cappelle sopra terra.

COPIA DI REVISIONE



(a) Tempio di Karnak a Luxor (~2000-300 a.C.)



(b) Piramide passo a Saqqara (~2667-2648 a.C.)



(c) Great Pyramid of Giza (Khufu / Cheops, ~2580-2560 BCE)

Figura 3.3: templi e piramidi egiziane

L'ingegneria idraulica ha svolto un ruolo vitale anche nel sostenere la società egiziana. L'alluvione annuale del Nilo è stata gestita attraverso reti di canali, bacini di ritenzione e levees, sostenendo una stabile economia agraria. Questi progetti riflettono la conoscenza pratica delle dinamiche fluide e la pianificazione precoce delle infrastrutture su larga scala (Butzer, 1976).

Geometria e il Seked Due fonti principali per la nostra conoscenza della matematica pratica egiziana sono le *Papiro matematico di Rhind* e la *Papiro matematico di Mosca*. Copied durante il Regno di Mezzo e il Secondo Periodo intermedio, questi manoscritti registrano problemi insiemi di aritmetica, geometria, conversione di unità e mentoring architettonico.~3.1 riassume la datazione, il contesto dinastico e i repository attuali di ogni documento, seguendo gli studi dettagliati di Robins e Shute, 1987 e Gillings, 2019Insieme, rivelano i metodi empirici che hanno sostenuto la costruzione di piramide, l'indagine di terra e il calcolo volumetrico durante il Regno di Mezzo Egitto.

Tabella 3.1: Dati chiave per i due principali papiri matematici dell'Egitto

Papiro	**Data della copia esistente**	**Data probabile del contenuto originale**	**Dinastia / Periodo**	**Repositore corrente**
Papiro matematico (Rhind Mathematical Papyrus)RMP)	c. 1650 a.C. (scrive Ahmès)	Materiale di origine del Regno di Mezzo, c. 1850–1800 a.C.[2]	Fine 13th– Anteriore 15th Dyn. (Secondo Intermedio)	British Museum, EA 10057–10058
Papiro matematico di Mosca (MMP)	c. 1850 a.C.	Abbastanza contemporanea con copia	Dodicesima dinastia, Regno di Mezzo	Museo di Stato di Pushkin, inv. 4676

La copia di Rhind probabilmente conserva i problemi prima compilati due secoli prima durante il Regno di Mezzo.

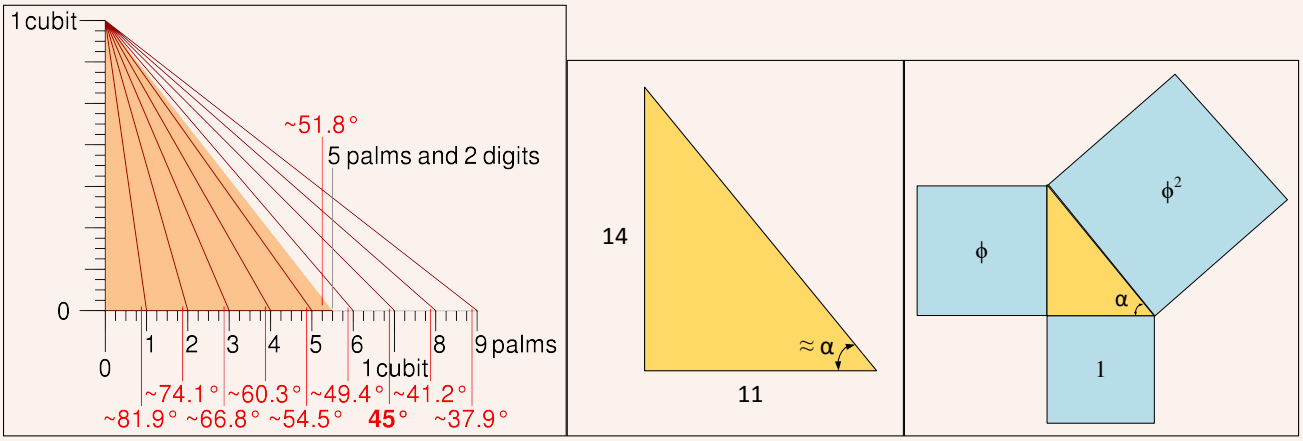
Gli egiziani hanno sviluppato un sistema di misura basato sulla - *Per i cubi*, un'antica unità di lunghezza definita come la distanza dal gomito alla punta del dito medio. Il suo valore variava tra culture, tipicamente da 44 a 52 cm (circa 17 a 20 pollici). Il cosiddetto "pietrito royal" dell'antico Egitto misurava circa 52,4 cm ed era ampiamente utilizzato in architettura, costruzione e rilevamento. era suddiviso in 7 palme, ciascuna

COPIA DI REVISIONE

palma in 4 dita, che produceva 28 unità per cubito (Fig.,3.4a). In confronto, il cubito ebraico standard era di circa 45 cm, mentre il cubito mesopotamico (sumerico) è stimato essere stato leggermente più lungo, circa 49 a 50 cm.



(a) cubito reale egiziano (link)



(b) Definizione del segreto (link)

(c) 14:11 triangolo usato in piramidi

(d) Approssimazione del triangolo Kepler

Figura 3.4: Geometria egiziana e proporzioni piramidali

Il *seghe* Il metodo egiziano di esprimere il pendio del volto di una piramide, misurando il percorso orizzontale per aumento verticale di un cubito, e da un cubito pari a sette palme, il sedo è stato espresso in palme (e dita) di corsa per cubito di aumento. ϕ Il seco è definito matematicamente come:

$$s = 7 \cot \phi$$

Si noti che il seco può essere interpretato come un ravvicinamento razionale alla funzione cotangent-run per unità di sollevamento-che parallela moderno pensiero trigonometrico. Mentre non vi è alcuna prova che gli egiziani concepiti di angoli o funzioni trigonometriche in senso greco, il loro seked incarna un rapporto geometrico simile al cotangent.nd secolo a.C. dell'astronomo greco e matematico *Ipparca*, spesso accreditato come il padre della trigonometria.

Per la Grande Piramide di Giza, il seco è stato registrato come 5.5 (5 palme e 2 dita), dando:

$$\phi = \cot^{-1}\left(\frac{5.5}{7}\right) \approx 51.84^\circ$$

Questo corrisponde ad un rapporto di aumento-a-corrente del 14:11, come illustrato nella figura.~3.4c, e allinea con la geometria ricostruita della piramide (Bartlett, 2014).

Alcuni hanno speculato che le proporzioni della piramide erano destinate a riflettere il *Ratio d'oro* attraverso la geometria di un triangolo Keplero (Fig.~3.4d). In tal caso, il rapporto sarebbe:

$$\frac{14}{11} = 1.2727\ldots \quad \text{vs.} \quad \sqrt{\phi} = 1.2720\ldots \tag{3.1}$$

COPIA DI REVISIONE

La differenza relativa è inferiore a 0,06%Ma come Markowsky, 1992 ammonimenti, la presenza di una costante matematica nelle dimensioni fisiche non implica necessariamente il design intenzionale, soprattutto data l'assenza di un chiaro quadro concettuale egiziano per i numeri irrazionali.

3.1.4 Mesopotamomico comparato, mesoamericano ed egiziano

Templi Nonostante le loro similitudini visive, le strutture monumentali di Mesopotamia, Egitto e Mesoamerica—ziggurati, piramidi e templi-piramidi rispettivamente—salivano da distinte strutture culturali, strutturali e funzionali, Fig. 3.2.

Uziggurats mesopotami, come il Grande Ziggurat di Ur, sono stati costruiti come piattaforme massicce e tiered fatte principalmente di mattoni di fango a forma di sole e a fornace, con bitume utilizzato come agente impermeabilizzante. Queste strutture erano completamente solide e servite come basi elevate per templi che simboleggiavano un'ascesa fisica al regno degli dei.

Piramidi egiziane, epitomizzata dalla Grande Piramide di Giza, erano tombe monumentali progettate per ospitare il corpo del faraone e facilitare il loro viaggio nell'aldilà. Costruite principalmente da calcare e granito, hanno esposto squisiti layout geometrici e interni camerati. L'attenzione era dentro: funzioni funerarie di ingegneria, protezione del sarcofago, e allineamento cosmologico con cicli solari e stellari.

Mesoamericano tempio-piramidi, come quelli di Chichen Itza e Tenochtitlán, combinarono funzioni cerimoniali, astronomiche e politiche, che spesso furono costruite in fasi, con nuovi strati aggiunti su nuclei più vecchi. Costruiti con pietra, malta di calce e riempimento di macerie, sostennero templi di sommità utilizzati per rituali, spettacoli pubblici e osservazione celeste. A differenza delle piramidi egiziane, queste non erano tombe; a differenza degli zigot, erano accessibili e interattive, le loro forme a terrazze, ampie scale e l'allineamento con i cicli solari e Veneri li incorporavano profondamente nella vita sociopolitica della città.

In breve, mentre tutte e tre le tradizioni hanno prodotto forme steppe o piramidali, lo hanno fatto per diversi motivi: - Il *ziggurat* elevato il divino. - Il *Piramide egiziana* ha insanguinato i morti. - Il *tempio mesoamericano-piramide* ha messo in scena il vivo.

Queste strutture riflettono la visione del mondo di ogni civiltà, la capacità tecnologica e l'ambiente materiale.

Sistemi di misura e conoscenza geometrica Prima di analizzare la logica strutturale dei monumenti classici successivi, è utile contrastare come tre grandi civiltà primitive — egiziano, mesopotamico e mesoamericano — lo spazio misurato e la geometria codificata. Tabella 3.3 — le unità di base che hanno adottato, ii) il modo in cui tali unità sono state suddivise, (iii) le idee geometriche che hanno guidato la costruzione, e (iv) i registri matematici o le costanti che ci sono scese; nonostante le evidenti differenze di notazione e di scopo, ogni tradizione ha tradotto l'osservazione empirica in robuste regole architettoniche.

COPIA DI REVISIONE

Tabella 3.2: Contrasting Architettura Monumentale Across Civilizations

Caratteristica	Ziggurat (Mesopotamia)	Piramide (Egitto)	Tempio-Pyramid (Mesoamerica)
Materiale primario	Mattone di fango, bitume	Limestone, granito	Pietra, malta di calce, nucleo di macerie
Funzione	Base di Tempio per dii	Tomba reale	Piattaforma rituale, politica e astronomica
Interno	Massa solida; nessuna camera	Passi interni, camere di sepoltura	Può includere camere interne, nuclei ricostruiti
Accesso	Restricted to sacerdoti	Nessuno (dopo la sepoltura)	Riti pubblici, accesso al tempio di cima
Cosmologia	Link tra cielo e terra	Allineamento con stelle e sole; viaggio dopo la vita	Cicli del calendario, solstizi, tracciamento di Venere
Logica strutturale	Massa a gradini per carichi di gravità	Piano inclinato, equilibratura per vuoti	Terrazze a gradini, ampie piattaforme per il controllo dell'erosione
Simbolicità	Axis mundi; residenza divina	Potere Eterno del faraone	Fase per sacra regalità e ordine cosmico

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 3.3: Pratica di misurazione e messa a fuoco geometrico in tre culture antiche

Civiltà	**Unità primaria**	**Subdivisione / Sistema numerico**	**Focus geometrico**
Egiziano egiziano	Cubo (Aiuto a punta di dita)	1 cubito 7 palme 28 dita	Seked (corsa per cubito) aumento); angoli piramidali
Mesopotamian	Cubo come misura (variato regionalemente)	~30 dita per cubito; base 60 frazioni sessuali	Aree/volume approssimazioni; liste triangoli destro (Plimpton 322)
Mesoamericano	Tlacxitl (spazzatura a mano); Mayan *Tun* (360 anno di giorno)	Mani, dita; base 20 (vigesimale) numeri	Simmetria piramidale a gradini; allineamenti celesti
Civiltà	**Matematica record**	**Costanti o Rati**	
Egiziano egiziano	Rhind e Mosca Papyri matematici	Segreto (cotangent); approssimazioni $\sqrt{2}$ e π	
Mesopotamian	Compresse cuneiformi (Plimpton 322, YBC 7289)	tripli pitagorei; $\sqrt{2}$; frazioni sessiali	
Mesoamericano	Proporzioni basate su calendario; astronomia osservazionale	Cicli solari/verno; rapporti di simmetria modulari	

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 3.4: Scadenza temporale comparativa delle innovazioni strutturali chiave Across Civilizations

Innovazione	Civiltà	Data approssimativa	Esempio/Note
Innovazioni materiali			
Mattone incendiato	Mesopotamia	c. 3500 a.C.	Struttura del periodo Uruk
Masoneria di pietra su larga scala	Egitto	c. 2660 BCE	Piramide di passo di Djoser
Calcetto idraulico	Roma	c. 300 BCE	Opus caementicium con pozzolana
ghisa	Cina	c. IV secolo a.C.	Strumenti agricoli, in seguito strutturali
99% ferro battuto puro	India	c. 400 CE	Ferro da stiro Pilastro di Delhi
Sistemi strutturali			
Arco di Corbelled	Mesopotamia	c. 4000 ACE	drenaggio sotterraneo, tombe
Vero voussoir arco	Etrusco/romano	c. 700-500 a.C.	Perfettato da Romani
Costruzione di una cupola	Roma	c. 126 CE	Pantheon (in cemento armato)
Sistemi di fissaggio (dougong)	Cina	c. 500 ACE	Legname resistente al terremoto
Giunti flessibili (kanawa-tsugi)	Giappone	c. 600 CE	tempio di Horyu-ji
Risultati di ingegneria			
Sistemi di irrigazione	Mesopotamia	c. 3000 BCE	Reti di canali
Costruzione piramide	Egitto	c. 2560 BCE	Grande Piramide di Giza
Irrigazione del Dujiangyan	Cina	256 BCE	Ancora oggi funziona ancora
Strade romane	Roma	c. 312 BCE	Via Appia
Grande parete (terra ramata)	Cina	c. 220 ACE	Unificazione della dinastia Qin

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

3.2 Antichità classica: Geometria, Teoria e Impero

3.2.1 Persia: Piattaforme imperiali, Ponti, e Qanats

La Persia occupa una posizione unica nella storia dell'ingegneria strutturale, che serve sia come ereditario che come innovatore. Mentre eredita le tradizioni costruttive mesopotamiche, gli ingegneri persiani hanno notevolmente avanzato oltre di loro, creando innovazioni che influenzerebbero sia le pratiche ingegneristiche greche che quelle romane.

La persia è inclusa all'interno *Antiquariato classico* sezione perché l'Impero Achaemenid (c. 550–330 BCE) fiorito contemporaneamente con la Grecia classica e direttamente preceduto Roma Imperiale. Tecnologicamente e artisticamente, gli ingegneri persiani ereditarono tradizioni di fango-brick mesopotamicie ancora significativamente avanzate oltre di loro, creando complessi monumentali di palazzi in pietra-colonnati come Persepolis, ponti sofisticati e sistemi di gestione dell'acqua estensiva, tali innovazioni persiani hanno influenzato e rivaleggiato con le pratiche strutturali greche e romane. Inoltre, le interazioni culturali iniziate dalle guerre greco-persiane e si sono estese attraverso il successivo scambio ellenistico legato tradizioni ingegneristiche persiane e mediterranee in una narrazione classica condivisa, distinguendo la Persia chiaramente dalle traicoli architettonici separati dell'Oriente.

Architettura imperiale di Achaemenid L'ingegneria persiana raggiunse il suo zenit durante il periodo di Achaemenid, esemplare dal complesso monumentale palazzo a Persepolis. Costruito in cima a una massiccia piattaforma in pietra che misura circa 450 da 300 metri e che sorge a 15 metri sopra la pianura circostante, Persepolis ha caratterizzato colonne in pietra elaborate intagliate che hanno distribuito efficacemente carichi pesanti tetto su solide fondamenta. La sola Apadana Hall ha impiegato settantadue colonne in calcare monolitico, alte circa 20 metri con distinti capitali tori a doppia testa.

La muratura di precisione e i dettagli artistici intricati riflettono una fusione intenzionale di stabilità strutturale e espressione simbolica, rafforzando la grandezza del potere imperiale. I tasselli di ferro e i crampi al piombo versati hanno bloccato insieme i tamburi della colonna, mentre i travi di cedro e cipresso sono stati di 25-30 metri per formare uno dei tetti chiari più ampi dell'antichità, un risultato che in seguito le sale ipostyle greche hanno cercato di emulare.

Gli ingegneri persiani hanno anche imparato a lungo a corrompere: Darius[3] ponte di pontone attraverso il Bosforo e Xerxes'[4] ponte sull'Hellespont ha dimostrato una sofisticata comprensione della galleggiabilità, dell'ancoraggio e del carico ritmico, consentendo a interi eserciti, cavalli e treni d'assedio di attraversare l'acqua aperta.

Ponti sassanidi e strutture idrauliche (224–651 CE) Dopo gli Achaemenidi, l'ingegneria strutturale persiana si è evoluta ulteriormente durante la dinastia sassanide, come dimostra la sofisticata pratica di costruzione del ponte.~CE durante il regno di Shapur~Io, dopo la sua vittoria sull'imperatore romano Valerian.

[3] Il ponte pontonico di Dario attraverso il Bosforo (c. 513 a.C.) fu costruito da Mandrocles, un ingegnere dell'isola di Samos, per consentire all'esercito di Darius I di attraversare in Europa per la sua campagna contro i Sciti. Erodoto descrive il ponte in dettaglio e riporta che Darius eresse pilastri commemorativi con iscrizioni in assiro e greco elencando tutte le nazioni nel suo esercito. 3.5. Mentre storicamente significativo e ben documentato, il ponte sembra essere stato conosciuto semplicemente con il suo nome descrittivo piuttosto che avere un nome specifico corretto (Herodotus, 1921).

[4] I ponti di Xerxes, che erano in realtà due ponti paralleli costruiti durante la Seconda Invasione Persiana della Grecia. Costruiti da Abydos a Sestos, i ponti si estendevano intorno a sette stadi (circa 1.300 metri), il ponte nord-orientale utilizzava 360 navi (penteconters e triremi) mentre il ponte sud-occidentale utilizzava 314 navi, tutte in pausa e coperte. (Herodotus, 1921).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

87. Having viewed the Pontus, Darius sailed back to the bridge, of which Mandrocles of Samos was the chief builder; and when he had viewed the Bosporus also, he set up by it two pillars of white stone, engraving on the one in Assyrian and on the other in Greek characters the names of all the nations that were in his army; in which were all the nations subject to him. The full tale of these, over and above the fleet, was seven hundred thousand men, reckoning therewith horsemen, and the number of ships that mustered was six hundred. These pillars were afterwards carried by the Byzantines into their city and there used to build the altar of Orthosian [1]

[1] A deity worshipped especially at Sparta; the meaning of the epithet is uncertain.

Artemis, save for one column covered with Assyrian writing that was left beside the temple of Dionysus at Byzantium. Now if my reckoning be true, the place where king Darius bridged the Bosporus was midway between Byzantium and the temple at the entrance of the sea.

88. After this, Darius, being well content with his bridge of boats, made to Mandrocles the Samian a gift of ten of every kind;[1] wherefrom Mandrocles took the firstfruits and therewith had a picture made showing the whole bridge of the Bosporus, and Darius sitting aloft on his throne and his army crossing; this he set up in the temple of Here, with this inscription:

"This Picture Mandrocles to Here gives,
Whereby for ever his Achievement lives;
A Bridge of Boats o'er *Bosp'rus'* fishful Flood
He built; Darius saw, and judg'd it good;
Thus for himself won Mandrocles a Crown,
And for his isle of *Samos* high Renown."

34. Beginning then from Abydos they whose business it was made bridges across to that headland, the Phoenicians one of flaxen cables, and the Egyptians the second, which was of papyrus. From Abydos to the opposite shore it is a distance of seven furlongs.[2] But no sooner had the strait been bridged than a great storm swept down and brake and scattered all that work.

35. When Xerxes heard of that, he was very angry, and gave command that the Hellespont be scourged with three hundred lashes, and a pair of

[2] The modern width at the narrowest part is nearly half as much again; perhaps this can be explained by the washing away of the coasts, due to a current which strikes them near Sestos and rebounds on Abydos.

fetters be thrown into the sea; nay, I have heard ere now that he sent branders with the rest to brand the Hellespont. This is certain, that he charged them while they scourged to utter words outlandish and presumptuous: "Thou bitter water," they should say, "our master thus punishes thee, because thou didst him wrong albeit he had done thee none. Yea, Xerxes the king will pass over thee, whether thou wilt or no; it is but just that no man offers thee sacrifice, for thou art a turbid and a briny river." Thus he commanded that the sea should be punished, and that they who had been overseers of the bridging of the Hellespont should be beheaded.

Figura 3.5: Erodoto sull'attraversamento del Bosforo da parte dei Persiani, (Herodotus, 1921)

Il ponte Dezful, che si estende sul fiume Dez, fu costruito utilizzando il lavoro di circa 70.000 prigionieri di guerra romani. (*Band-e Kaisar*), che attraversava il fiume Karun, funzionava simultaneamente come ponte e diga. Entrambe le strutture presentavano archi in mattoni e pietra accuratamente progettati che trasferiva in modo efficiente carichi gravitazionali nelle loro basi, integrando componenti idraulici come le canne e i canali dell'acqua per soddisfare i due scopi di trasporto e gestione dell'acqua regionale (Huff, 2005).

Questi ponti hanno dimostrato una comprensione avanzata delle forze idrauliche, con le loro avarie di deviazione massonica passo e le dighe di pietra primitiva che incorporano principi di protezione del flagello e controllo del flusso che in seguito influenzerebbero l'ingegneria idraulica islamica ed europea.

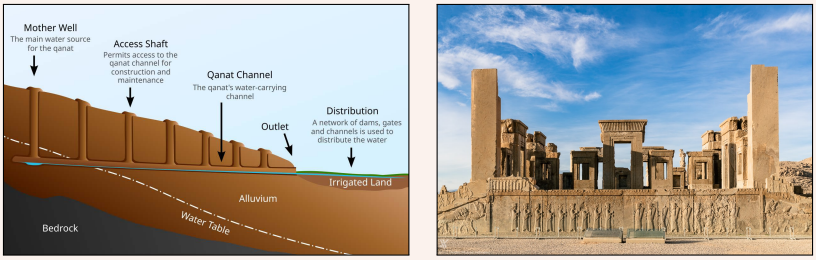
Qanats: Idraulici sotterranei e innovazione strutturale (1° millennio a.C. in poi) La padronanza persiana dell'ingegneria idraulica è esemplificata dalla Qanat sistema—una sofisticata rete di irrigazione sotterranea che ha trasportato le acque sotterranee su ampie distanze per sostenere l'agricoltura in ambienti aridi, Fig. 3.6a. Il design di Qanats calcoli precisi richiesti di pendenza, pendenza idraulica e dinamica delle acque sotterranee, dimostrando una comprensione empirica avanzata del flusso fluido.

Altrettanto significativo sono le innovazioni strutturali necessarie per Qanat costruzione:

- **Asta di accesso verticale**: Regolarmente distanziato e rinforzato con rivestimenti in pietra o panificio per evitare il collasso
- **Gallerie arcaiche**: Tunnel a traforo, costruito in mattoni o pietra, per stabilizzare gli scavi in terreni instabili
- **Materiali avanzati**: Selezione attenta di mattoni al forno, malta di calce e muratura di pietra per migliorare la resistenza contro le sollecitazioni geologiche e sismiche

COPIA DI REVISIONE

Questi impero su tutto Qanat reti, ingegnosamente dislocate, gallerie sotterranee lunghe chilometri ventilate da alberi verticali, richiedono un'accurata indagine geotecnica, un controllo delle acque sotterranee e una pianificazione di manutenzione a lungo termine. (Wulff, 1968).



(a) Qanat (b) Persepolis

Figura 3.6: Persia

3.2.2 Contributi arabi-islamici: innovazioni nell'ingegneria strutturale

Dal VII secolo in poi, gli ingegneri arabi-islamici svilupparono sistematicamente innovazioni strutturali che avrebbero profondamente influenzato la pratica architettonica globale, contribuendo a forme arcaiche raffinate, a costruzione di cupola avanzata, a fondazioni matematiche sofisticate e a principi urbanistici.

Raffineazioni architettoniche in archi e vaults Gli ingegneri arabi-islamici svilupparono un ampio repertorio di forme arcaiche, tra cui il ferro di cavallo, l'arco appuntito, in particolare, rappresentava un significativo progresso strutturale sull'arco semicircolare romano riducendo la spinta laterale e permettendo di raggiungere pareti più leggere e alte, che in seguito risulterebbero cruciali per l'architettura gotica (Chapter 4).

L'ampio uso di archi in moschee, madrasa e palazzi non solo ha fornito vantaggi strutturali, ma ha anche permesso spazi interni aperti e illuminati che sono diventati segni distintivi dell'architettura islamica.— cellule a nido d'ape geometriche tridimensionali — emerse come caratteristiche decorative e strutturali distributive nelle cupole e iwans.

Innovazione strutturale nella costruzione di cupola Gli ingegneri islamici perfezionarono la costruzione della cupola attraverso tecniche strutturali innovative. L'uso di pendentive e squinches ha permesso di sostenere cupole circolari su basi quadrate o rettangolari, risolvendo una fondamentale sfida geometrica e strutturale. La cupola della roccia (691 CE) e poi le grandi cupole di Istanbul hanno dimostrato una sofisticata comprensione degli anelli di compressione, della distribuzione laterale della spinta e dell'integrazione di sistemi strutturali multipli.

La persia è trattata all'interno *Antiquariato classico* perché l'Impero Achaemenid (c. 550–330 BCE) sovrapposta cronologicamente alla Grecia classica e subito precedeva la Roma Imperiale. I costruttori persiani, anche se eredi di tradizioni di mattoni di fango mesopotamici, rapidamente perfezionato pietra tagliata su larga scala e la costruzione di legname., per esempio, la Sala Apadana si è alzata su una terrazza in pietra e ha impiegato settantadue colonne monolitiche calcaree, ciascuna di circa 20 m alto con doppie capitali di toro a testa. Dowels ferro e crampi di piombo versati bloccati i tamburi della colonna insieme, mentre i travi di cedro e cipresso sono stati spessi 25–30 m per formare uno dei tetti più ampi dell'antichità –un risultato che in seguito sale ipostyle greche cercarono di emulare (Curatola e Scarcia, 2003).

Gli ingegneri persiani hanno anche imparato a lungo a ponte: Ponte di Pontoon di Darius attraverso il Bosforo e il ponte più conosciuto di Xerxes sopra l'Hellespont ha dimostrato una sofisticata comprensione

COPIA DI REVISIONE

della galleggiabilità, dell'ancoraggio e del carico ritmico, consentendo a interi eserciti, cavalli e treni d'assedio di attraversare l'acqua aperta.

Altrettanto avanzato erano l'impero largo *reti di qanāt* —diffuso, gallerie sotterranee lunghe chilometri ventilate da alberi verticali –che richiedevano un'accurata indagine geotecnica, il controllo delle acque sotterranee e la pianificazione di manutenzione a lungo termine; molti rimangono in uso oggi (Behnia, 2021). Opere idrauliche come le pianure di deviazione massonica passo-passato a Pasargadae e le dighe di pietra primi sul fiume Karun illustrano ulteriormente il comando persiano di carichi idrodinamici e protezione dai flagelli.

Queste innovazioni di colonna e di fascio, ponte e acquedotto subsuperficie non solo rivali ma influenzarono direttamente il greco contemporaneo e, in seguito, la pratica strutturale romana. Il contatto culturale intenso delle guerre persiane greche, seguito da secoli Lo scambio ellenistico, ha portato i risultati persiani nel più ampio canone di ingegneria classica, distinguendoli dalle distinte traiettorie architettoniche che si sviluppano più a est in India, Cina e Giappone.

Strategie materiali e modularità: La grande moschea di Córdoba Il *Grande moschea di Cordova* (pregiudiziale 784)~CE), Fig 3.7a, Esemplifica l'ingegnosità strutturale attraverso il suo rivoluzionario sistema a doppia curva, che ha consentito di realizzare archi a pila, supportati da colonne sottili, di risolvere il problema dell'altezza della colonna insufficiente, creando un vocabolario architettonico distintivo. L'uso di voussoir in pietra e mattoni non solo ha migliorato la resilienza strutturale e la rigidità laterale, ma ha anche introdotto un ritmo estetico e costruttivo modulare.

Questa strategia ha aumentato la flessibilità spaziale mantenendo l'integrità strutturale nelle sale di preghiera espansive, consentendo una facile espansione—la moschea è stata ampliata più volte, preservando la sua logica strutturale (Fletcher, 2004).

La matematica come Fondazione per la pratica strutturale I contributi islamici all'ingegneria strutturale sono stati sostenuti da sviluppi innovativi nella matematica. Al-Khwarizmi (XVI secolo) metodi algebrici formalizzati, consentendo la manipolazione simbolica delle relazioni strutturali e dei calcoli architettonici precisi. Omar Khayyam (11 ° secolo), Fig. 3.7b attraverso i suoi approcci geometrici alle equazioni cubice, ha influenzato la pianificazione spaziale e i calcoli della geometria del voltaggio.

Questi progressi matematici hanno sostenuto una stima più accurata dello stress, il controllo della curvatura delle volte e la precisione del layout, collegando il ragionamento matematico astratto alle applicazioni di ingegneria pratica. Lo sviluppo della trigonometria da parte dei matematici islamici ha fornito strumenti essenziali per il calcolo dei profili di arco, delle geometrie della cupola e delle forze strutturali (Hogendijk, 1994).

Pianificazione strutturale urbana-scala Oltre i singoli monumenti, gli ingegneri islamici hanno contribuito all'organizzazione strutturale su scala urbana. *Baghdad* e *Isfahan* I percorsi di carico in portici, griglie modulari a colonna e sistemi di distribuzione dell'acqua in queste città riflettono non solo la sofisticazione architettonica, ma anche la comprensione empirica del carico distribuito, la stabilità laterale e l'efficienza dei materiali (Hill, 2019).

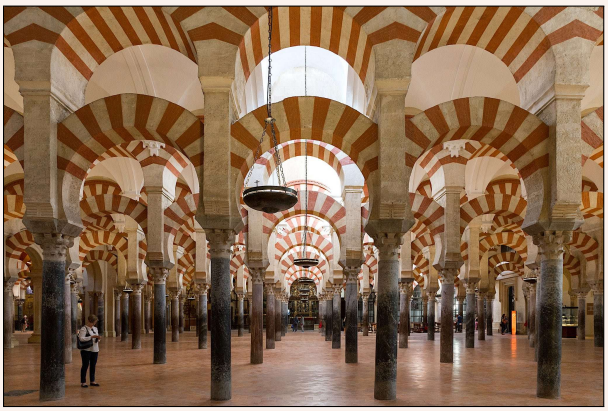
L'integrazione di sistemi strutturali con infrastrutture urbane, compresi i mercati coperti, i complessi residenziali e i bagni pubblici, ha messo gli ingegneri islamici come pionieri nel design ambientale completo.

3.2.3 Contributi greci agli Statici e Meccanica strutturale

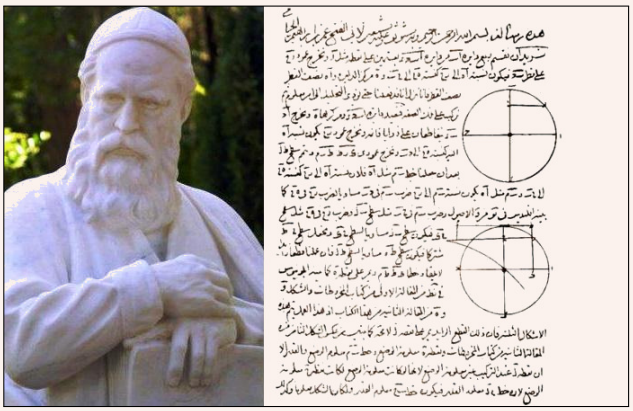
La razionalizzazione greca di macchine semplici Gli antichi greci contribuirono alla meccanica strutturale, soprattutto attraverso l'analisi razionale delle macchine semplici, mentre i dispositivi come leve, pulegge e piani inclinati erano stati utilizzati da secoli da civiltà precedenti, erano i greci che prima fornivano strutture teoriche per comprendere il loro comportamento.

Tra questi dispositivi, la *leva* è la macchina semplice più elementare. Sebbene fosse già impiegata dai

COPIA DI REVISIONE

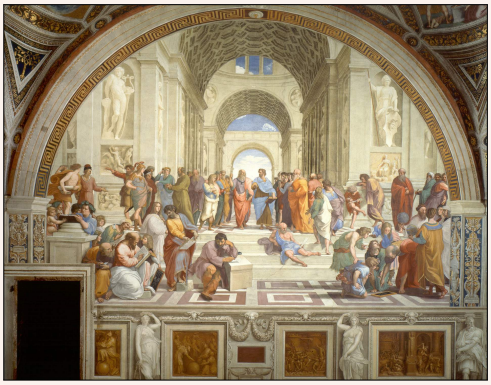


(a) Cordova



(b) Omar Khiam

Figura 3.7: Arabo-Islamico



(a) Scuola di Atene (Raphael)



(b) Partenariato

Figura 3.8: Grecia

Mesopotami e dagli Egizi nelle costruzioni, furono i Greci i primi a sviluppare una teoria sistematica dei suoi principi meccanici.

La Scuola Peripatetica e Archytas di Tarentum La prima discussione teorica della leva appare nel trattato peripatetico *Problemi meccanici*, attribuito al Liceo di Aristotele.

Anche se una volta credeva di essere autenticamente aristotelico, il trattato *Problemi meccanici* è ora considerata come una raccolta di prime riflessioni meccaniche, probabilmente influenzate da pensatori come *A*rchytas di Tarentum (c. 428–350 BCE). Archytas era un filosofo pitagoreo, matematico, e statista della città greca di *Tarentum* (Dal moderno Taranto nel sud Italia) è spesso accreditato come uno dei fondatori di *meccanica matematica*, essere tra i primi ad applicare ragionamenti quantitativi e geometrici a problemi fisici.~3 del trattato, l'argomento attribuito a lui introduce il concetto di bilanciamento braccia e appelli a una forma di ragionamento proto-energia—suggesting che le piccole forze possono muovere grandi pesi quando applicate a distanze maggiori da un fulcro, anticipando così il concetto moderno di vantaggio meccanico.

COPIA DI REVISIONE

> Perché le piccole forze possono muovere grandi pesi per mezzo di una leva, come si dice all'inizio del trattato, visto che si aggiunge naturalmente il peso della leva?
>
> ... Ma poiché sotto l'impulso dello stesso peso il raggio maggiore dal centro muove più rapidamente, e ci sono tre elementi nella leva, il fulcro, cioè il cavo o il centro, e i due pesi, sia quello che causa il movimento, e quello che è spostato; ora il rapporto del peso spostato al peso spostandolo è il rapporto inverso delle distanze dal centro. Ora maggiore sarà la distanza dal fulcro.
>
> Peripatetic School, circa 4th century BCE, No. 3

Questo ragionamento cinetico, basato sul prodotto di forza e distanza, anticipa i moderni concetti di conservazione del momento e dell'energia di lavoro, offrendo in modo discutibile una logica più intuitiva per la legge sulle leve rispetto a Archimedes'in seguito formulazione geometrica.

Archimede e le Fondazioni di Statics Archimede (c. 287–212 BCE), nel suo trattato *Sull'Equilibrio dei Piani*, (Archimedes, -250) formalizzata la legge della leva e posato le basi per le statiche classiche. La sua sesta proposta presenta ciò che può essere considerato la prima equazione in meccanica:

> Le magnitudini sono in equilibrio a distanze reciprocamente proporzionali ai loro pesi.
>
> Archimedes, -250 , Proposition 6 Book I

Archimede si avvicinò alla meccanica come scienza razionale autocontenuta, costruita su postulati e prove matematiche, in contrasto con il metodo più fisicamente radicato di Aristotele. 14), ha tuttavia stabilito la base matematica dell'analisi strutturale.

Architettura greca e pratica strutturale Gli sviluppi architettonici greci si estendevano a notevoli imprese di costruzione, in particolare l'uso diffuso di *costruzione trabeated*— un sistema basato sul principio post-e-lintel, in cui i travi orizzontali (lintel) sono sostenuti da colonne verticali, questo metodo, caratteristico dei templi greci, ha definito il loro approccio strutturale ed estetico in assenza di vera costruzione dell'arco.

L'Acropoli di Atene, in particolare il Partenone, Fig. 3.8b, si pone come l'incarnazione più iconica di questo approccio, combinando proporzioni raffinate con scala monumentale, la sua costruzione sotto la direzione artistica di Phidias[5] , che ha superato sia gli elementi scultorei che l'armonia progettuale, esemplifica la sintesi greca di ingegneria, architettura e arte. Le raffinazioni sottili dell'edificio, tra cui l'impulsi (gonfiamento della colonna) e la lieve inclinazione verso l'interno, dimostrano una sofisticata comprensione della percezione visiva e dell'ottimizzazione strutturale.

I Greci svilupparono anche dispositivi meccanici come gru e puleggia composte, riflettendo la comprensione pratica della distribuzione della forza, della meccanica di sollevamento e della movimentazione di materiali pesanti durante la costruzione del tempio, (vedi §)set: mechanica).

L'assenza dell'Arco in Ingegneria Greca Nonostante i progressi compiuti in statici e meccanica razionale, i Greci non svilupparono l'uso strutturale degli archi, che in seguito diventerebbero un segno distintivo dell'ingegneria romana. L'architettura greca si basava quasi esclusivamente sulla costruzione post-e-lintel, limitando la portata e la scala degli spazi coperti. L'arco, con la sua capacità di trasferire efficacemente carichi e ampie aperture, era in gran parte assente dal repertorio strutturale greco.

[5] Il rapporto d'oro (§2.1.6) è spesso denotato dalla lettera greca ϕ (phi), tradizionalmente in onore di Phidias. Phidias è associato al design e alla decorazione del Partenone, dove gli studiosi successivi hanno identificato proporzioni *approssimazione* Sebbene non ci sia alcuna prova diretta che Phidias abbia usato consapevolmente questa costante, il nome simbolico riflette la sua eredità come un maestro di proporzione armoniosa nell'arte e nell'architettura classica.

COPIA DI REVISIONE

La Scuola di Atene (Raphael) Anche se dipinto nei primi 16th secolo in Vaticano, Raffaello *Scuola di Atene*Fico.~3.8a, offre una visione rinascimentale dell'eredità intellettuale dell'antica Grecia. Commissionata come parte degli appartamenti papali, l'affresco rende omaggio alla filosofia e alla scienza classica assemblando i pensatori greci iconici in un contesto architettonico idealizzato che ricorda i templi greci. La composizione simboleggia la confluenza del pensiero astratto e dell'inchiesta empirica - fondazioni su cui fu costruita la disciplina di analisi strutturale.

Al centro sono Platone e Aristotele, dividendo simbolicamente la scena tra idealismo (sinistra) ed empirismo (destra). Intorno a loro, Raffaello organizza figure che rappresentano logica, geometria, astronomia e metafisica—discipline che hanno plasmato non solo l'architettura antica ma il quadro concettuale della meccanica e della teoria strutturale.

Figure centrali:

Platone: Centro-sinistra, punta verso l'alto, tenendo *Timae*. Modellato su Leonardo da Vinci.

Aristotele: Centro-destra, a mano che scorre orizzontalmente, tenendo *Etica*.

Lato sinistro (Idealismo, Filosofia, Pensiero astratto):

Socrate: Impegnato nel dibattito con gli altri, identificabile dalle sue caratteristiche distinte e dal gesto retorico.

Pitagora: Scrivere in un libro, circondato da studenti; associato con misticismo armonico e matematico.

Eraclito: Seduto da solo in primo piano, perso nel pensiero; aggiunto in seguito e modellato su Michelangelo.

Parmenides: Possibile la figura accanto a Pitagora, che rappresenta il ragionamento metafisico.

Plotino o Epicurio: Possibile presente come filosofi di scuole introspettive.

Ipatia (discussa): Una figura femminile rara, a volte interpretata come il filosofo neoplatonista.

Lato destro (Empiricismo, Scienza, Matematica):

Euclid (o Archimedes): Dimostrando un teorema geometrico con una bussola; modellato sull'architetto Bramante.

Tolomeo: Tenendo un globo terrestre, che rappresenta geografia e astronomia.

Zoroaster: Tenendo una sfera celeste, che rappresenta cosmologia o astrologia.

Raphael (auto-ritratto): Al bordo di destra, guardando direttamente allo spettatore.

Diogenes: Rinunciando in primo piano centrale sui passi, che rappresentano il cinismo e il disprezzo per il materialismo.

L'attribuzione di alcune figure rimane speculativa, soprattutto per quelle non etichettate da Raffaello, e molte identificazioni si basano su indizi stilistici, gesti e contesto storico.

Nota che dal tempo di Platone attraverso il Medioevo, il *quadrivizio* era un raggruppamento di quattro soggetti o arti — aritmetiche, geometria, musica e astronomia — che formavano una seconda fase curricolare dopo i lavori preparatori nel *triviale*, composto da grammatica, logica e retorica. *triviale* e la *quadrivizio* comprendeva le sette arti liberali, e formava la base di un'educazione delle arti liberali nella società occidentale fino a poco a poco spostato come struttura curricolare da parte di *studia humanitatis* e i suoi ultimi offshoot, a partire da Petrarca nel XIV secolo. Le sette arti classiche sono state considerate *capacità di pensiero* e si distinguevano dalle arti pratiche, come la medicina e l'architettura (Wagner, 1983).

Tassonomi nel pensiero greco classico I filosofi greci organizzavano abitualmente fenomeni in schemi ordinari, cercando struttura in natura, etica, psicologia e logica.Queste tassonomie funzionavano come impalcature euriste (non classificazioni biologiche moderne), inquadrando l'indagine attraverso composizioni elementali, analisi, logica categorica e tipologie di anime, umori e affetti. La tabella seguente raccoglie esempi rappresentativi utilizzati in scuole e periodi, Tabella 3.5.

COPIA DI REVISIONE

Tabella 3.5: Schemi di classificazione selezionati in Filosofia e Scienza greca classica

Pensatore / Scuola	Schemi di classificazione
Empedocle	Quattro elementi (radici): terra, acqua, aria, fuoco.
Platone	Anima tripartita: ragione (logistikon), spirito (thumoeidés), appetito (epithumetikon). *Timae*: solidi e elementi regolari—tetraedro (fuoco), ottaedro (aria), icosaedro (acqua), cubo (terra), dodecahedron (cosmos/whole).
Aristotele	**Metafisica:** Dieci categorie—sostanza, quantità, qualità, relazione, luogo, tempo, posizione, stato, azione, passione. **Filosofia naturale:** Quattro cause... materiale, formale, efficiente, finale. **Elementi:** Combinazioni di qualità primarie—fuoco (caldo+a), aria (caldo+umino), acqua (cold+wet), terra (fred+aio); etere come quinto elemento per sfere celesti. **Biologia:** Anime per funzione—nutritivo (pianti), sensibile (animali), razionale (umani). Distinzioni animali—blooded/bloodless, viviparous/oviparous, terrestri/aquatiche. **Rhetoric:** Tre generi—deliberativo, giudiziario, epideittico.
Pitagore	Tabella di dieci opposti: limite/limitato, dispari/even, uno/many, destra/sinistra, maschio/femmina, riposo/mozione, diritto/curvo, luce/dark, buono/cattivo, quadrato/oblungo (ricostituito da Aristotele's *Metafisica*).
Ippocratica / Galenic	Quattro umori: sangue, flemma, bile gialla, bile nera. Quattro temperamenti: sanguine, flemmatiche, coliche, malinconiche.
Stoics	Quattro categorie: substrato (hupokeimenon), qualificato (poion), smaltito (pōs echon), relativamente smaltito (pros ti pōs echon). Quattro passioni (percorsoē): appetito, paura, piacere, disagio; con i corrispondenti buoni affetti razionali (eupatheia).
Teofrasto	Classificazione delle piante sistemiche *Historia Plantarum*: per morfologia (alberi, arbusti, sottosottili, erbe), habitat, modelli di crescita e modalità riproduttive.

3.2.4 Roma: Concrete, Arches e Infrastrutture

L'Impero Romano ha dato un contributo innovativo alla meccanica strutturale e all'ingegneria che rimangono fondanti alla pratica moderna, la cui ingegnosità ingegneristica ha abbracciato lo sviluppo e l'applicazione di archi, la tecnologia del cemento rivoluzionario e sistemi idraulici completi, insieme ad un patrimonio di metodi di costruzione sistematizzati.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Padronanza degli archi e delle volte Magistra romana dell'arco la costruzione rivoluzionata, consentendo strutture più grandi e più stabili di quanto fosse stato possibile in precedenza, il loro uso sistematico di archi in ponti, acquedotti e edifici monumentali, come ad esempio il Colosseo— dimostra la comprensione pratica del trasferimento di carico e dell'ottimizzazione della resistenza alla compressione (Vitruvius, 1960).

L'interno, che si estende sul concetto di arco di base, i Romani svilupparono volte a botte e inguine, che permettevano spazi interni espansivi e ininterrotti senza supporti ben distanziati. La volta inguinale, formata dall'intersezione di due volte a botte, con una efficiente regia di carichi a punti discreti, permettendo ai Romani di creare vasti spazi interni come quelli delle Terme di Caracalla.

Innovazione nel Concrete Romano Forse l'innovazione romana più trasformativa è stato il loro sviluppo di cemento (italicindexhopus caementicium. Realizzato mescolando cenere vulcanica (pozzolana), calce e rubli aggregati, questo materiale possedeva notevoli proprietà: si posa sottomarina, resiste al degrado ambientale, e potrebbe essere modellato in forme complesse.

L'adattabilità del cemento romano ha permesso una sperimentazione architettonica audace, esemplificata dal Pantheon, la cui massiccia cupola in cemento non rinforzato riflette la sofisticata comprensione del comportamento materiale e della distribuzione dello stress (MacDonald, 1982). La cupola emisferica del Pantheon, con diametro e altezza di 43 metri, rimane la più grande cupola in cemento non rinforzato al mondo. La sua costruzione impiegava aggregati graduati, travertino pesante alla base che passava alla pumice leggera vicino alla corona, dimostrando la comprensione intuitiva dei principi di ottimizzazione dello stress.

Ingegneria idraulica e infrastrutture L'eccellenza romana nell'ingegneria idraulica è esemplificata dai loro sistemi di acquedotto, come il Pont du Gard. Queste strutture trasportavano acqua a lunghe distanze utilizzando gradienti calcolati con precisione per mantenere il flusso continuo (Hodge, 1992). La costruzione a arco multi-tiered di acquedotti ha ridotto i requisiti materiali, migliorando la stabilità strutturale e l'impatto visivo.

Ponti romani, come il Ponte dell'Alcántara in Spagna, dimostra la loro capacità di armonizzare la funzionalità con l'efficienza strutturale e l'appeal estetico, che spesso presenta archi segmentali che riducono il peso morto mantenendo la capacità strutturale.

Costruzione urbana e costruzione sistemica La pianificazione urbana ha beneficiato in modo significativo dell'innovazione di ingegneria romana. *insulare* L'uso sistematico delle tecniche di costruzione concrete e modulari ha permesso di ampliare rapidamente l'urbanizzazione su scala senza precedenti.

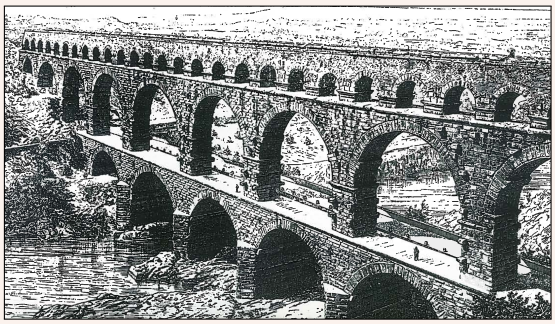
- Sistemi modulari in mattoni e cemento
- Ordini e proporzioni standardizzati della colonna
- Approcci sistemici al design delle fondamenta
- Pianificazione integrata delle infrastrutture (rifornimenti, approvvigionamento idrico, strade)

Legacy e Limitazioni I risultati dell'ingegneria romana erano pragmatici e sistematici, e la loro costruzione di archi raffinata, inevitabilmente in seguito alla costruzione di archi. Etruschi, ma generalmente impiegati in forme semi-circolari, che introdussero una sostanziale spinta laterale alla base, che avrebbe poi motivato l'innovazione gotica dell'arco appuntito.

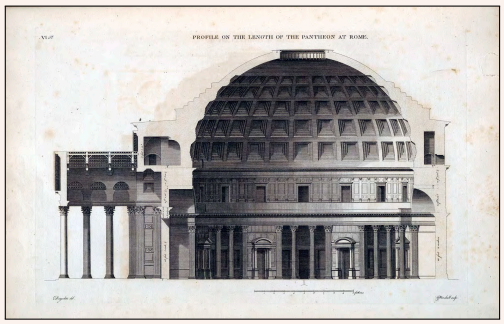
Le strutture romane più emblematiche — il Pont du Gard e il Pantheon — rappresentano il pinnacolo dei loro risultati strutturali.'la perfezione proporzionale (altezza e diametro pari a 43 m) e la sua *geometria sferica*, lateralmente sostenuto da pareti di cemento spesse, dimostra la padronanza romana di pensiero strutturale tridimensionale che non sarebbe abbinato fino al Rinascimento.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Pont du Gard



(b) Pantheon

Figura 3.9: Emblematica costruzioni romane

3.2.4.1 Vitruvio: Il primo teorico strutturale

Mentre gli ingegneri greci e romani posarono le fondamenta fisiche della meccanica strutturale, era Vitruvio che per primo ha tentato di codificare la conoscenza architettonica e ingegneristica in un quadro teorico coerente, (§6.3.1 per maggiori dettagli sul suo libro). *De Architectura* (Ten Books on Architecture), è il primo documento sopravvissuto che affronta sistematicamente la forma e la funzione strutturale, proporzione, materiali, idraulica, acustica e urbanistica.

Attingendo alle fonti greche precedenti (ora perdute) e arricchite dalla pratica romana, Vitruvio ha articolato una filosofia progettuale che combinava l'esperienza empirica con la riflessione teorica.

Dalla Tradizione alla Teoria Prima di Vitruvio, i costruttori di tutto Babilonia, Egitto, Grecia e Roma si affidavano alle regole del pollice e all'esperienza accumulata, la saggezza pratica tramandata attraverso le tradizioni artigianali.

La Triade Vitruviana Vitruvio ha affermato che la buona architettura dovrebbe incarnare *esecuzioni* (forza) *uti* (funzionalità) e *La mia* Questa triade ha influenzato il pensiero architettonico attraverso il Rinascimento e oltre, stabilendo il principio che le prestazioni strutturali, l'efficienza funzionale e il raggiungimento estetico sono aspetti inscindibili del design di successo.

Sistemi e regole proporzionali Tra le caratteristiche più importanti del lavoro di Vitruvio ci sono le sue regole proporzionali e gli approcci sistematici al design, efficaci perché empiricamente convalidati e scalabili, un approccio che preveda la moderna forza della teoria dei materiali, ma che è funzionalemente sufficiente per le strutture in pietra e legno.

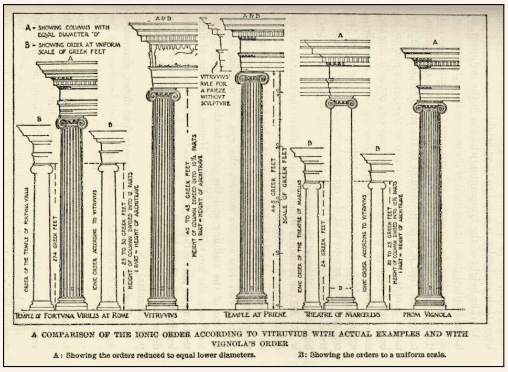
Uno di loro afferma:

> Se la larghezza deve essere più di quaranta piedi, lasciare che le colonne siano poste all'interno e opposte alle colonne tra le ante. [...] Così il numero aggiuntivo di flauti si farà proporzionalmente per la perdita nel corpo dell'albero, impedendo che venga visto, e così in modo diverso le colonne saranno fatte per guardare allo stesso modo spesso.
>
> Vitruvius, 1960, p. 4.4.2

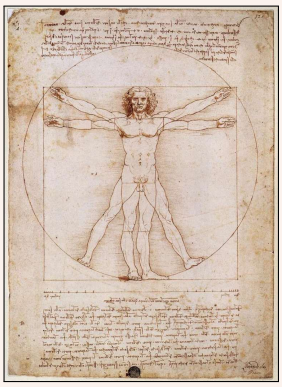
Tali regole erano efficaci perché erano empiricamente convalidate e scalabili–un approccio che preveda la moderna forza dei materiali, ma era funzionalemente sufficiente per le strutture in pietra e legno (Heyman, 2003).

Il senso di proporzionalità di Vitruvio ha ispirato gli sviluppi successivi, tra cui:

COPIA DI REVISIONE



(a) Dieci libri di architettura



(b) Uomo vitruviano (Leonardo)

Figura 3.10: Regole di proporzionalità vitruvia

- Leon Battista Alberti , un dispositivo per trasferire meccanicamente le misurazioni in scala
- La celebre illustrazione di Leonardo da Vinci *Uomo Vitruvico*
- La sistematizzazione di ordini classici di Andrea Palladio
- Il sistema antropometrico di Le Corbusier *Modulo*

Questo tema è ulteriormente sviluppato in §15.2.3.

Influenza sull'architettura rinascimentale Gli architetti rinascimentali hanno trovato a Vitruvio un legame con l'autorità classica e il metodo sistematico, tra i tanti architetti rinascimentali ispirati a Vitruvio, (Palladio, 1570) (1508–1580) si distingue come particolarmente dedicato ai principi vitruviani, adattando l'enfasi alla simmetria, proporzione, e la funzionalità ai propri disegni, codificandoli *I Quattro Libri dell'Architettura* (1570). La sua architettura e gli scritti teorici riecheggiarono gli ideali vitruviani, in particolare la nozione che un edificio dovrebbe riflettere le proporzioni armoniose del corpo umano e della natura, (Wassell, 2008). Come Palladio articolato:

> La bellezza deriva da una forma aggraziata e dal rapporto del tutto con le parti, e delle parti tra loro e con il tutto, perché gli edifici devono apparire come corpi completi e ben definiti, di cui un membro si abbina a un altro e tutti i membri sono necessari per ciò che è richiesto.
>
> Palladio, 1570, Book I, Chapter I

Limitazioni e Legacy Vitruvio è stato anche un prodotto del suo tempo, e non tutte le sue osservazioni soddisfano gli standard moderni, ma il suo contributo fondamentale – la sistematizzazione dei principi di progettazione basati sull'osservazione empirica e sulla riflessione teorica – ha stabilito una metodologia che rimane rilevante per la pratica di ingegneria strutturale contemporanea.

Rivisto dal Rinascimento, *De Architectura* non solo influenzava l'architettura classica, ma anche poneva basi concettuali che risuonavano attraverso secoli di pensiero strutturale, stabilendo Vitruvio come sia un registratore di pratica antica che un'influenza duratura sulla teoria strutturale.

Non tutte le sue osservazioni sono accettabili dagli standard moderni:

COPIA DI REVISIONE

> Inoltre, è per la rarità dell'atmosfera che le nazioni del sud, con la loro intelligenza acuta a causa del calore, sono molto libere e veloci nella messa a punto di schemi, mentre le nazioni del nord [...] hanno solo un'intelligenza lenta.
>
> Vitruvius, 1960, Chapter I, Book VI

Centralità di Vitruvio Vitruvio è di tale fondamentale importanza per questo libro che la sua vita, scritti e influenza sono esaminati in tre capitoli distinti: il presente capitolo, §6.3.1e §15.2.1.

3.3 Tradizioni matematiche e strutturali dell'India, della Cina e del Giappone

Sebbene la storia canonica della meccanica strutturale spesso enfatizza i contributi greco-romani e successivi europei, le civiltà antiche in tutta l'Asia svilupparono tradizioni profonde e indipendenti nell'architettura, nei materiali e nei ragionamenti meccanici. In India, Cina e Giappone, la sintesi dell'osservazione empirica, dell'innovazione matematica e dell'espressione architettonica ha portato a risultati duraturi nell'ingegneria che erano sia paralleli a e convergenti con gli sviluppi in Occidente.

3.3.1 Cina: Sessologia, Ponti e Innovazione Meccanica

Zhang Heng e la prima sismatologia Una delle figure più notevoli della storia dell'ingegneria cinese è Zhang Heng, un astronomo, matematico e ingegnere meccanico della dinastia Han orientale (78–139 CE). Zhang Heng ha inventato il primo noto *S*ismografoFico. 3.11a, un dispositivo in grado di rilevare terremoti lontani e indicare la loro direzione (Needham, 1959)Questo strumento di bronzo, che vede i draghi che tengono le palle che cadrebbero nelle bocche dei rospi sottostanti, ha dimostrato una straordinaria comprensione della meccanica dinamica e delle vibrazioni, predendo sviluppi simili in altre parti del mondo da più di un millennio.

La tradizione meccanica del Mohist Il Canone Mohista, attribuito a Mozi (470–391 a.C.) e i suoi seguaci rappresentano una pietra angolare dei contributi cinesi alla teoria meccanica, che affronta sistematicamente i principi della meccanica, incluso l'uso delle leve, equilibrio e tensione (Graham, 1978), sviluppare concetti che paralleli indagini meccaniche greche ma da un quadro filosofico indipendente che enfatizza utilità pratica e beneficio sociale.

Costruzione di ponti rivoluzionario La costruzione di ponti cinesi esemplifica i loro contributi alla meccanica strutturale., costruito nel 605 CE durante la dinastia Sui, rappresenta un capolavoro di ingegneria che è sopravvissuto per oltre 1.400 anni (Brownbridge, 1986)Questo ponte ad arco segmentale, con le sue innovative spande aperte, ha ridotto sia i requisiti di peso che di materiale, fornendo al tempo stesso la capacità di sovraflusso di inondazione, dimostrando una sofisticata comprensione delle forze idrauliche e dell'ottimizzazione strutturale. Gli ingegneri cinesi hanno anche pionierizzato la tecnologia del ponte sospeso, creando ponti sospensioni in bambù e a catena di ferro che hanno attraversato distanze impossibili con la costruzione di archi in pietra, anticipando i principi poi sviluppati nei moderni sistemi di posa cavi e sospensioni.

L'uso della Cina di macchinari a motore ad acqua, come pompe a catena e ruote ad acqua, illustra ulteriormente la loro comprensione dei principi meccanici.

COPIA DI REVISIONE

3.3.2 India: Matematica, Materiali e Architettura Monumentale

Scienza architettonica: Vāstu Śāstra Il trattato antico *Vaastu Shastra* fornisce linee guida dettagliate per la costruzione, coprendo aspetti come l'orientamento, le proprietà dei materiali e la distribuzione dei carichi (Shukla, 1993)Questo approccio sistematico alla costruzione di considerazioni strutturali, ambientali e spirituali integrate, creando un quadro completo per il design architettonico che ha influenzato la costruzione in tutto il subcontinente indiano.

Fondazioni matematiche Il matematico e astronomo Aryabhata (476–550 CE) ha contribuito alla meccanica strutturale attraverso i suoi sviluppi nel calcolo trigonometrico e geometrico. π e approccio sistematico alla misurazione angolare fornito strumenti essenziali per la disposizione architettonica e l'analisi strutturale (Bag, 2003).

Il pilastro di ferro di Delhi Uno degli esempi più iconici dell'antica ingegneria indiana è Ferro da stiro Pilastro di Delhi, eretto intorno 375–415 CE (Balasubramaniam, 2000)Fico. 3.11b. In piedi oltre 7 metri di altezza e di peso di circa 6 tonnellate, questa colonna in ferro battuto ha resistito alla corrosione per oltre 1.600 anni a causa della sua composizione metallurgica unica e rivestimento di ossido protettivo. Il pilastro dimostra la comprensione avanzata della scienza dei materiali e della metallurgia che non è stata abbinata altrove fino all'era moderna.

Risultati idraulici e architettonici Passi, come ad esempio *Rani ki Vav* in Gujarat, e complessi templi in Khajuraho e Hampi evidenziare l'ingegnosità architettonica dell'India (Michell, 1989; Hardy, 2007)Queste strutture dimostrano maestria di intaglio in pietra, distribuzione del carico in geometrie complesse, e integrazione di sistemi strutturali con elaborati programmi decorativi.

Ingegneria idraulica e sistemi agricoli I progressi dell'India nell'ingegneria idraulica sono evidenti nella progettazione di canali, serbatoi e sistemi di gestione sofisticati dell'acqua che supportavano grandi popolazioni urbane e vaste regioni agricole.

3.3.3 Giappone: Resilienza Sismica e Strutture Adattative

Architettura di legno e innovazione sismica L'architettura tradizionale in legno giapponese, esemplificata da pagode e templi, riflette l'adattabilità strutturale unica sviluppata in risposta alla frequente attività sismica. , o pilastro centrale, combinato con giunti in legno interbloccanti e connessioni flessibili, consente alle strutture di dissipare l'energia sismica attraverso il movimento controllato piuttosto che la resistenza rigida, Fig. 3.11c, (Sugimoto, 2008).

Questo approccio al design sismico – sottolineando flessibilità, dissipazione dell'energia e duttilità materiale – anticipa i moderni principi di ingegneria del terremoto da secoli. Le pagode a cinque piani sono sopravvissute a terremoti importanti per oltre un millennio, dimostrando l'efficacia di queste tecniche tradizionali.

Architettura del Castello e Fortificazione Castelli giapponesi, come il Castello di Himeji, costruito nel XVI e XVII secolo, dimostrano tecniche avanzate nell'ingegneria fortificazione e nel carico distribuzione (Turnbull, 2003)Queste strutture impiegano sistemi di fondazione in pietra complessi, un sofisticato incastonamento in legno e un sistema difensivo multilivello che integrano l'efficienza strutturale con funzionalità militari.

Tecniche di innovazione e costruzione dei materiali Il ricorso al Giappone a materiali naturali come il legno e la pietra hanno informato le innovazioni strutturali distintive, in particolare nell'uso di sistemi di stratificazione e di staffa (*Tokyō*), e articolazioni flessibili che accolgono sia forze sismiche che movimento materiale a causa di cambiamenti di umidità. Lo sviluppo di sofisticate tecniche di falegnameria in legno, comprese articolazioni complesse che non richiedono chiodi o chiodi metallici, dimostra una comprensione avanzata delle proprietà materiali, del trasferimento di carico e della continuità strutturale.

COPIA DI REVISIONE

3.3.4 Sintesi e influenza globale

Queste tradizioni asiatiche nell'ingegneria strutturale hanno sviluppato soluzioni sofisticate ai problemi fondamentali della costruzione, della scienza dei materiali e dell'adattamento ambientale, sottolineando l'armonia tra le forze naturali e la costruzione umana, l'integrazione di considerazioni estetiche e strutturali, e lo sviluppo di pratiche costruttive sostenibili, offre prospettive importanti che completano e arricchiscono la più familiare narrazione occidentale dello sviluppo dell'ingegneria strutturale.

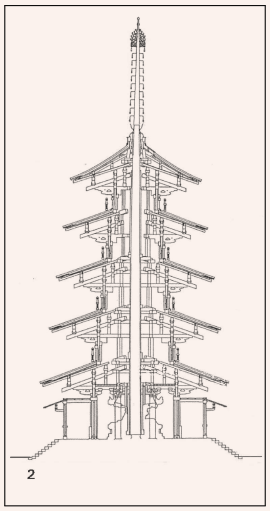
Le innovazioni matematiche, le tecnologie materiali e i sistemi strutturali sviluppati in India, Cina e Giappone hanno contribuito a fornire una conoscenza essenziale allo sviluppo globale della scienza dell'ingegneria, dimostrando che le basi della meccanica strutturale rappresentano veramente un successo umano mondiale piuttosto che il prodotto di ogni singola tradizione culturale.



(a) China, first seismograph



(b) India: Ferro da stiro

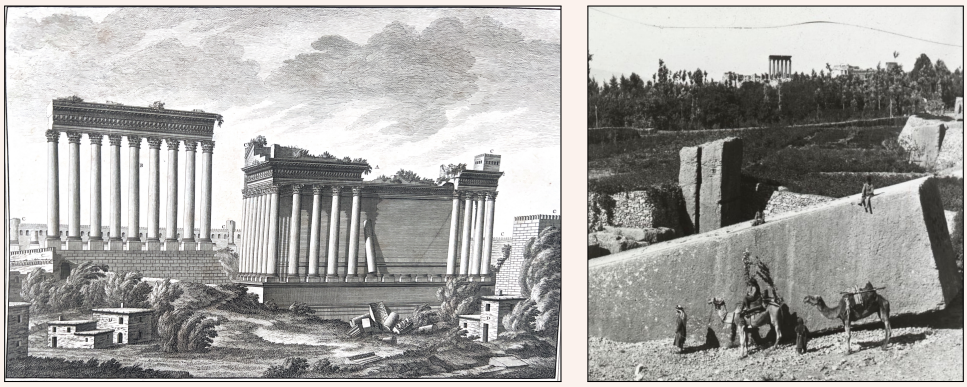


(c) Giappone

Figura 3.11: India, Cina, Giappone

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Tempio di Bacco, Baalbeck e pietra della donna incinta, Libano

Le pietre colossali di Baalbeck, tra le più grandi mai attrezzate, attestano l'ambizione di ingegneria antica che sfida ancora una facile spiegazione.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 4

Cattedrali gotici

Abstract

Le cattedrali gotiche stanno assicurando monumenti di aspirazione spirituale e di ingegno strutturale, e questo capitolo esplora la logica ingegneristica dietro le loro forme audace, con particolare attenzione a come la geometria, il controllo del percorso di carico e il comportamento materiale convergono per garantire la stabilità. Dopo aver tracciato l'evoluzione dell'architettura gotica dalle origini romaniche e descrivendo le caratteristiche strutturali chiave, tra cui le contraffazioni volanti, le volte a coste e le linee di spinta, il capitolo presenta approfondite analisi di quattro edifici emblematici. Ogni studio di casi rivela come sono stati testati i limiti della conoscenza contemporanea, e talvolta superati, offrendo lezioni durature nella resilienza del design, nel ragionamento empirico e nelle conseguenze della sovra-reach.

4.1 Introduzione 49
4.2 Dalla Messa romanica allo Scheletro Gotico 50
4.3 cattedrali gotiche: storia e logica strutturale 50
4.3.1 Le pietre miliari storiche . . 51
4.3.2 Terminologia essenziale e elementi strutturali 52
4.3.3 La rivoluzione strutturale gotica 54
4.3.4 Caratteristiche strutturali . . 56
4.4 Una storia di quattro cattedrali . . . 61
4.4.1 Cattedrale di Beauvais: uno studio di casi iconici in limiti strutturali 61
4.4.2 Il Duomo di Milano: Geometria, Politica e Dibattito Strutturale 68
4.4.3 Basilica di San Pietro: dalla crisi all'analisi scientifica . . 73
4.4.4 Santa Maria del Fiore: Trionfo dell'Intuizione di Ingegneria Brunelleschi 77
4.5 Tavola sinottica 82

4.1 Introduzione

Dal XII al XVI secolo, le cattedrali europee hanno raggiunto altezze architettoniche senza precedenti, non solo in scala fisica, ma in audace strutturale e simbolica ambizione, che hanno rappresentato ben più di case di culto; hanno incarnato l'apice dell'ingegneria medievale, dove il fervore religioso ha portato l'innovazione tecnica ai suoi limiti empirici.

COPIA DI REVISIONE

Costruite senza materiali di calcolo o moderni, spesso nel corso dei secoli con piani in evoluzione, le cattedrali gotiche sfidano la nostra comprensione dell'ingegneria come disciplina sistematica. Tuttavia i loro creatori hanno raggiunto una notevole sofisticazione strutturale attraverso chiarezza geometrica, test empirici e una comprensione intuitiva dei percorsi di forza che l'analisi moderna ha appena iniziato a apprezzare pienamente.

Questo capitolo si concentra sui principi strutturali che resero possibili tali cattedrali, con particolare attenzione a come la stabilità si raggiungesse attraverso la chiarezza geometrica piuttosto che la forza materiale. Attraverso archi appuntiti, volte a coste e morsi volanti, i costruttori gotici crearono interni alti e luminosi che ancora oggi durano.

Dopo aver esaminato i concetti chiave della meccanica strutturale gotica e le innovazioni storiche che hanno permesso la loro costruzione, il capitolo si rivolge a quattro studi di casi cardine: queste cattedrali—Beauvais, Milano, San Pietro a Roma, e Santa Maria del Fiore di Firenze— rappresentano non solo le pietre miliari architettoniche ma anche episodi in cui la conoscenza strutturale è stata contestata, raffinata o trovata desiderante.

4.2 Dalla Messa romanica allo Scheletro Gotico

La trasformazione dall'architettura romanica al gotico rappresentava una delle rivoluzioni strutturali più profonde della storia, dove le chiese romaniche si basavano su mura di massa punteggiate da piccole finestre, i costruttori gotici svilupparono uno scheletro strutturale che liberava la parete dalla sua funzione portante, che permetteva di realizzare vaste superfici vetrate e altezze disorientate che definiscono le cattedrali gotiche.

La svolta chiave era riconoscere che i carichi potevano essere incanalati attraverso un quadro di costole, archi e matresse, lasciando le pareti libere di diventare schermi di luce. costruzioni e solo piccole finestre aperte nelle pareti perimetrali delle chiese romaniche. Al contrario, la costruzione di uno scheletro strutturale, non legato alle masse murarie, è stata la prima innovazione. Grandi aperture potrebbero essere così costruite nelle pareti e avrebbero infine dato origine alle vetrate e alle finestre di rosa così tipiche delle chiese gotiche (Como, 2013).

Con questa trasformazione strutturale in mente, possiamo ora esaminare le innovazioni specifiche che hanno permesso ai costruttori gotici di raggiungere altezze e apertura senza precedenti.

4.3 cattedrali gotiche: storia e logica strutturale

L'architettura gotica è celebre per le sue altezze vertiginose, gli interni luminosi e l'ingegnosità strutturale. Sviluppatasi nei secoli XII e XIII, segnò una trasformazione dell'ambiente costruito, fondendo ingegneria e aspirazione spirituale. I costruttori gotici impiegarono archi, volte a costoloni e archi rampanti per realizzare edifici rimasti in piedi per secoli. Come osserva Ochsendorf, 2002, «questi edifici devono la propria sicurezza alla *geometria* della struttura e *non alla resistenza* del materiale». Si diceva un tempo che una struttura capace di resistere cinque minuti sarebbe durata cinque secoli (Heyman, 1966), ma tale ottimismo trascura il degrado dei materiali nel lungo periodo.

Questo principio—che la stabilità gotica nasce dalla forma piuttosto che dalla massa—-è stata articolata con particolare chiarezza da Eugène Viollet-le-Duc nel suo *Discorso sull'architettura* (Viollet-le-Duc, 1875)Viollet-le-Duc ha sviluppato un quadro teorico per capire come i costruttori gotici afferrassero intuitivamente il

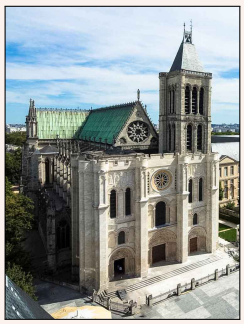
COPIA DI REVISIONE

rapporto tra struttura e forma, stabilendo principi che l'analisi strutturale moderna avrebbe poi confermato. (Per il suo ruolo complementare come enciclopedista e restauratore, vedi §15.4.1.)

Mentre questo capitolo sottolinea le cattedrali gotiche, si rifà anche a notevoli strutture di transizione come la Basilica di San Pietro, il Duomo di Milano, la Cattedrale di Beauvais e Santa Maria del Fiore di Firenze.

4.3.1 Le pietre miliari storiche

L'architettura gotica, che si estende da radici romaniche, raggiunse la sua altezza nel XII e XIII secolo, la prima struttura da costruire in questo stile è la Cattedrale di San Denis, Fig. 4.1a, completata nel 1144 a Saint Denis, in Francia. La Cattedrale di Chartres, mostrata in Fig. 4.1b, combina elementi gotici e romanici ed è stato costruito durante la vetta del design gotico. La cattedrale di Santa Maria del Fiore, Fig. 4.1c, è nota per la sua massiccia cupola e facciata neogotica, completata nel 1887. 4.1d, in gran parte ricostruito nel XIII secolo, è un altro esempio importante. Cattedrale di Amiens, Fig. 4.1e, è il più alto, raggiungendo un'altezza di 139 piedi. Strutture selezionate sono riassunte in Tabella 4.1.



(a) Saint-Des



(b) I cartelli



(c) Santa Maria del Fiore



(d) Abbazia di Westminster



(e) Amiens

Figura 4.1: Cattedrali emblematici

Tavole 4.1 e 4.2 elencare alcune delle cattedrali gotiche più importanti e fornire dimensioni chiave per esempi selezionati—informazioni che saranno poi richiamate nella discussione di Beauvais.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 4.1: Strutture gotiche notevoli

Cattedrale	Location	Secolo	Caratteristica notevole
Cattedrale di San Denis	Francia	12th	Prima struttura gotica
Cattedrale di Chartres	Francia	12th	Ricostruito dopo un incendio del 1194
Notre-Dame de Paris	Francia	13th	Uso precoce delle contraffazioni volanti
Santa Maria del Fiore	Italia	13th	Cupola notevole, facciata neogotica
Cattedrale di Clermont-Ferrand	Francia	12th	Costruito con pietra lavica nera
Abbazia di Westminster	Inghilterra	13th	Sito delle incoronazioni britanniche
Cattedrale di Amiens	Francia	13th	Cattedrale gotica più bella

Tabella 4.2: Dimensioni comparate delle principali cattedrali gotiche (Elizalde, 2025)

Cattedrale	**Vaccino Altezza (m)**	**Nave Larghezza (m)**	**Totale Larghezza con Aisles (m)**	**Costruzione Date**
Notre-Dame de Paris (FR)	33.0	13.0	24.8	1163–1250
Cattedrale di Chartres (FR)	36.0	16.4	30.0	1194–1250
Cattedrale di Reims (FR)	38.0	14.65	30.0	1211–1275
Cattedrale di Amiens (FR)	42.3	11.6	32.0	1220–1288
Cattedrale di Beauvais (FR)	47.5	15.3	45.6	1225... Incompleto
Cattedrale di Colonia (DE)	43.0	14.0	45.0	1248–1880
Cattedrale di Palma (ES)	44.0	19.0	55.0	1229–1601
Milano Duomo (IT)	45.0	16.5	57.0	1386–1965

4.3.2 Terminologia essenziale e elementi strutturali

La comprensione della meccanica strutturale gotica richiede familiarità con diversi concetti chiave. *linea di spinta*— il percorso lungo il quale le forze di compressione viaggiano attraverso un arco o una volta; quando questa linea rimane interamente all'interno dei confini della muratura, la struttura è stabile (§31.5.2)

Prima di procedere, dobbiamo conoscerci con alcuni termini, Fig. 4.2d, i tipi di volte sono mostrati in Fig. 4.2e.

Elementi geometrici

Linea di spinta rappresenta il percorso delle forze all'interno di un arco, e se una linea di spinta è contenuta nei limiti fisici della struttura, è stabile.

Intradosaggio curva interna dell'arco o del buttress.

Extra curva esterna dell'arco o del buttress.

Voussoir pietra individuale in arco o in buttafuori (capitolo 31).

Concetto di Forza e Equilibrio

COPIA DI REVISIONE

Linea attiva di spinta associata alla più grande forza orizzontale consentita dalla geometria dell'arco.

Linea passiva di spinta rappresenta la linea di spinta per la struttura sotto il proprio peso.

Elementi strutturali

Maschera volante arco inclinato che resiste ai carichi laterali da un arco, Fig. 18.11c.

Pinnacolo elemento architettonico in cima alle pareti che aggiunge lo stress di compressione.

A volte a coste quadrepartite una volta costola che è divisa in quattro sezioni da due costole diagonali, Fig. 4.2a.

Sessuale volte costola Una volta a coste divisa in sei baie da due costole diagonali e tre costole trasversali, Fig. 4.2b

Caratteristiche architettoniche

Chevet - L'estremità orientale di una chiesa.

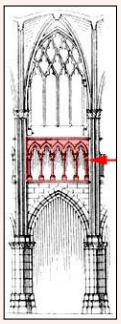
Triforio Un passaggio stretto nello spessore della parete, Fig. 4.2c.



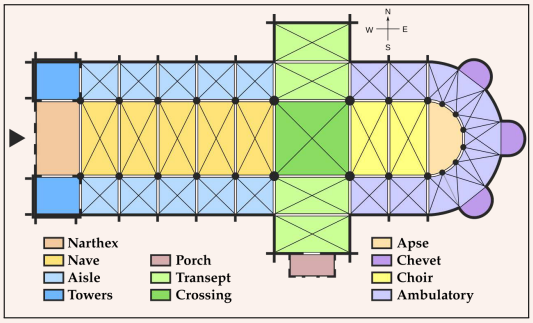
(a) Quadrib



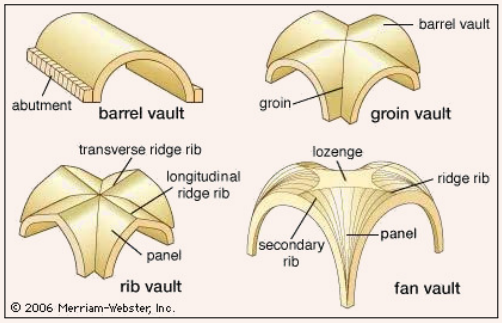
(b) Sessolini



(c) Triforio



(d) Scematica



(e) Tipi di valame

Figura 4.2: Elementi strutturali della cattedrale

COPIA DI REVISIONE

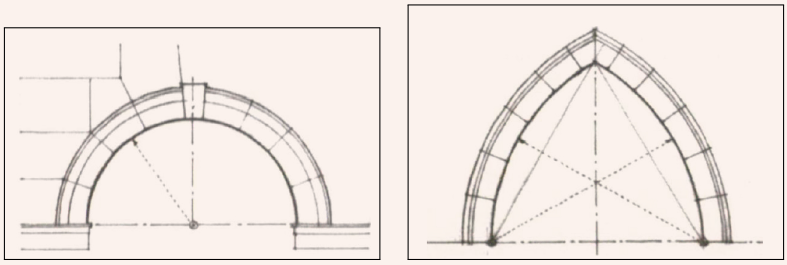
4.3.3 La rivoluzione strutturale gotica

Bony, 1983 Idee tre caratteristiche chiave dell'architettura gotica: (1) volte a coste, (2) archi a punta in tutta la struttura, e (3) un'enfasi deliberata sulla verticalità, che producono l'apertura e la leggerezza che contraddistinguono lo stile gotico, e discute anche l'influenza romanica, in particolare nell'uso di volte a costine. 4.3.

Il vantaggio dell'arco puntato

L'arco appuntito rappresenta più di una partenza estetica da forme romaniche, ha alterato fondamentalmente il comportamento strutturale, concentrando le forze più verticalmente, gli archi appuntiti riducono la spinta laterale di circa 20-30% rispetto agli archi semicircolari, consentendo una costruzione più elevata con sistemi di smaltimento più leggeri.

La differenza fondamentale tra gli approcci romani e gotici diventa chiara quando si confrontano i profili degli archi (Figura 4.3). L'arco semicircolare romano in Figura 4.3a genera la massima spinta laterale alla sua base, che richiede un massiccio matrattamento per tutta la sua altezza. 4.3b concentra le forze più verticalmente, riducendo i requisiti di matrattamento e consentendo la caratteristica leggerezza gotica.



(a) Arco romano (b) Arco gotico

Figura 4.3: Confronto tra profili romani e gotici (Ching, 2011)

Mole di volo: Trasferimento di carico esterno

Un segno distintivo dell'architettura gotica è l'uso di *matresse volanti*Forse l'innovazione gotica più iconica, le matresse volanti esternalizzate il sistema strutturale. Trasferindo alte volte spinte fuori dalla busta dell'edificio, conservano l'apertura interna garantendo stabilità. Questi supporti esterni resiste alla spinta laterale di alte volte e archi, consentendo così la costruzione di pareti più alte e più sottili. (Ochsendorf, 2002; Kim, 2016).

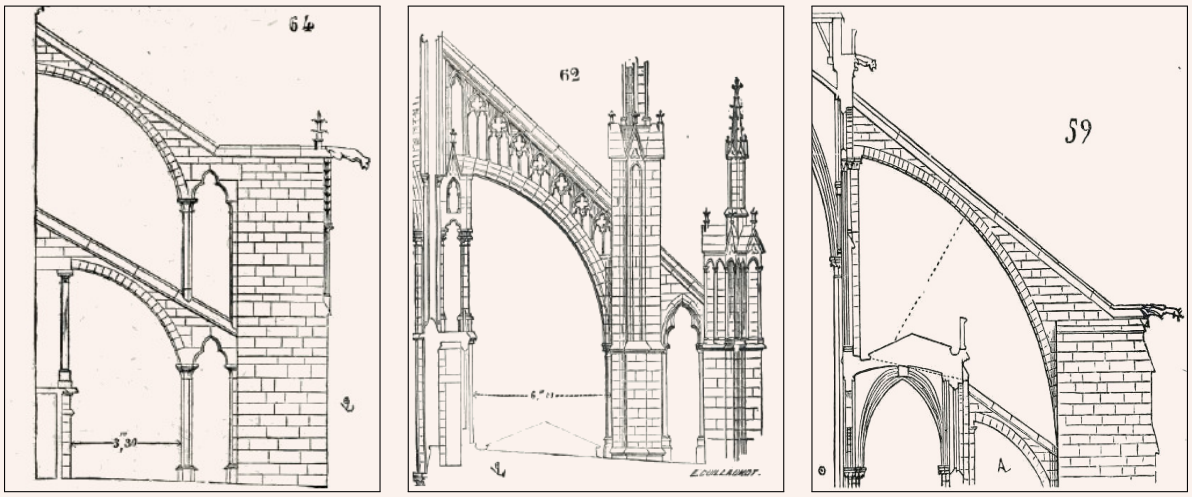
Figura 4.5 La matrice, sormontata da un pinnacolo decorativo, ancora il matrimonio volante, che trasferisce la spinta laterale dagli archi interni verso l'esterno, permettendo alla struttura interna di contare prevalentemente sulle forze di compressione, preservando l'apertura e la luminosità.

Vaults a costina: Forze di canalizzazione

Le volte a coste gotiche fungono da quadri tridimensionali, indirizzando carichi lungo percorsi prestabiliti a colonne e contrafforti, che hanno sostituito il carico continuo delle volte a botte romaniche con carichi concentrati, consentendo aperture più grandi e riducendo la massa muraria.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Clermont-Ferrand (b) Amiens (c) Notre-Dame de Paris

Figura 4.4: Esempi di contrafforti volanti nelle cattedrali gotiche (Kim, 2016)

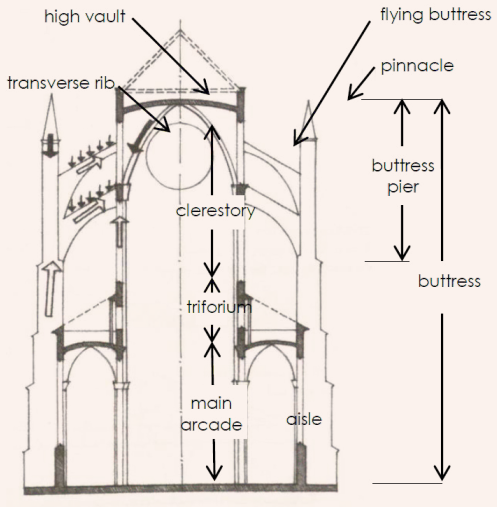


Figura 4.5: Sezione di croce cattedrale gotica (Ching, 2011)

Strutture gotiche, note per le loro alte altezze e l'architettura ariosa. I principali elementi architettonici delle strutture gotiche sono archi a punta, volte a crociera a coste, morsi volanti, e pier sottili, alcuni dei quali erano già stati utilizzati in romanica e, ancora prima, in architettura romana. *Il*e de France, che ridefinisce il concetto di cattedrale.

L'arco appuntito non è solo una partenza estetica dalla forma romanica ma anche una strutturalmente vantaggiosa, ma riduce la spinta orizzontale e distribuisce il peso in modo più efficiente.

Per apprezzare pienamente la meccanica dietro questi sistemi, è utile esaminare i componenti fondamentali di un arco. Figura 4.6 mostra la geometria di un arco tipico, tra cui le singole pietre conosciute come *Voussoirs*,

COPIA DI REVISIONE

e le curve interne ed esterne—le *Intradosaggio* e *extra*. Le contraffazioni a ogni estremità servono come supporti passivi, resistendo alla spinta esterna generata dalla curvatura dell'arco.

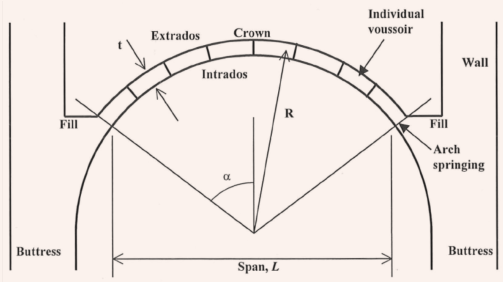
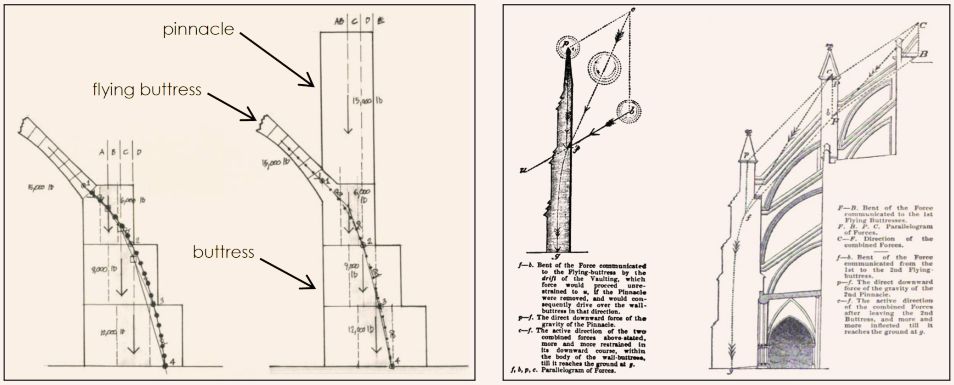


Figura 4.6: Arco tipico (Ochsendorf, 2002)

L'eleganza dell'architettura gotica si trova nella sua sintesi di necessità strutturale e espressione artistica, dove la geometria, non la forza materiale, governa la stabilità.

4.3.4 Caratteristiche strutturali

Un aspetto determinante dell'ingegneria gotica sta nell'attento controllo del percorso di carico attraverso i suoi elementi strutturali, un esempio sorprendente è il pinnacolo. Lungi dall'essere semplicemente decorativo, il pinnacolo aggiunge un carico verticale significativo al sistema di contraffazione, migliorando la sua capacità di resistere alla spinta laterale. 4.7.



(a) Il pinnacolo che colpisce la linea di spinta (Kim, 2016)

(b) Trasferimento forzato (Bartholomew, 1840)

Figura 4.7: Trasferimenti forzati attraverso le contraffazioni volanti

Un altro elemento chiave dell'architettura gotica è la volta a coste, che ha sostituito le più pesanti volte a botte di edifici romanici. 4.8, volte gotiche caricano direttamente lungo coste e giù a colonne e pilastri, riducendo la massa murale e consentendo finestre più grandi e interni più aperti.

La geometria del matrisso volante svolge un ruolo fondamentale nel comportamento strutturale. 4.9, sia i matresse reali che idealizzati sono definiti da parametri come l'angolo di inclinazione, la campata, e i profili di spessore degli intrados e degli extrados, che determinano come i canali di buttress forzano efficacemente dalle alte volte al suolo.

COPIA DI REVISIONE

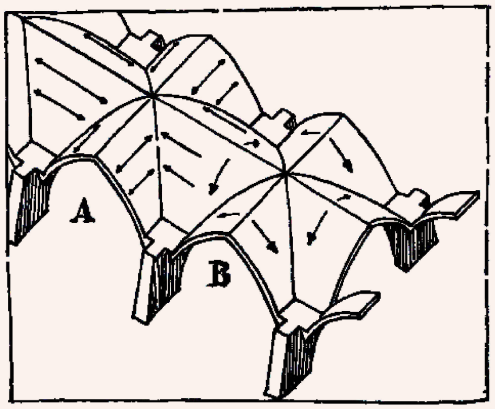


Figura 4.8: Comportamento del vaso (Hassan Fangary, 2010)

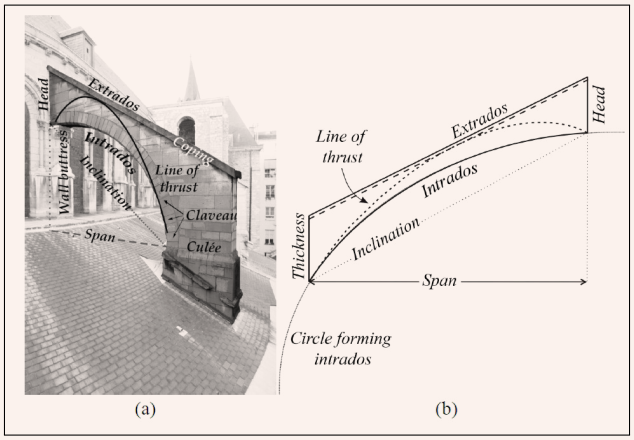


Figura 4.9: Geometria del buttress volante (Nikolinakou, Tallon e Ochsendorf, 2005)

Un concetto centrale nell'analisi delle strutture gotiche è il *linea di spinta*— il percorso che le forze di compressione seguono attraverso un arco o un masso; la stabilità è assicurata se questa linea rimane interamente entro i confini fisici della struttura (§31.5.2) Figura 4.10 illustra la busta definita dal *minimo* e *massimo* linee di spinta, che rappresentano, rispettivamente, i limiti prima del collasso a causa del movimento esteriore o della schiacciatura verso l'interno.

Questi limiti sono anche conosciuti come *passivo* e *attivo* La linea passiva corrisponde al peso della struttura, mentre la linea attiva riflette la spinta orizzontale massima che può essere resistita prima che si verifichi l'instabilità. 4.11 mostra queste due linee di spinta all'interno di un tipico sistema di buttafuori volanti.

4.3.4.1 Esecuzione strutturale notevole

Questi sofisticati meccanismi di trasporto del carico hanno contribuito alla notevole longevità delle strutture gotiche, molte delle quali sono sopravvissute a secoli con un minimo intervento, che sono state costruite senza moderni strumenti di ingegneria, nel corso di lunghi periodi e spesso sotto piani architettonici in evoluzione. (Heyman, 1997).

As Ochsendorf, 2002 osserva, la loro forza non proviene dai materiali ma dalla geometria. Heyman, 1966,

COPIA DI REVISIONE

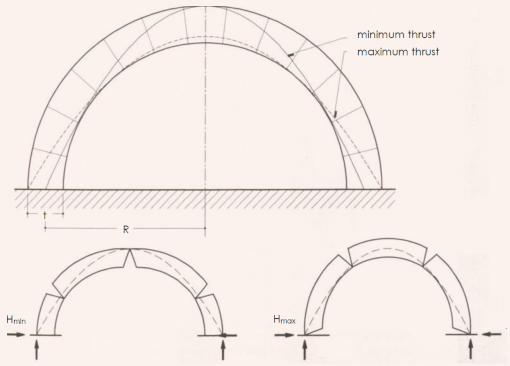


Figura 4.10: Linee minime e massime di spinta (Kim, 2016)

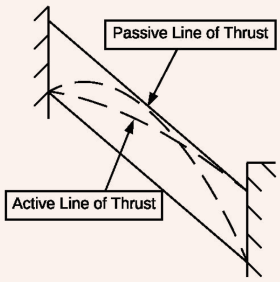


Figura 4.11: Linee attive e passive di spinta (basate su (Heyman, 1966))

una struttura gotica che sta probabilmente starà in piedi per secoli—un'affermazione basata sul ''teorema sicuro':

> Se si trova una linea di spinta che è in equilibrio con i carichi esterni e che si trova interamente all'interno della muratura, allora la struttura è sicura.

Questo principio sarà approfondito nel capitolo 31, che si concentra sulla teoria degli archi di voussoir e l'analisi grafica dell'equilibrio.

Va notato, tuttavia, che questo modello assume proprietà materiali inalterabili, non rappresenta il degrado a lungo termine dovuto alle intemperie, all'invecchiamento materiale o al differenziale, il che può influenzare la sicurezza nelle strutture storiche di oggi.

4.3.4.2 Evoluzione dell'analisi strutturale

Comprensione empirica precoce (1840-1860) L'inchiesta sistematica sul comportamento degli elementi strutturali gotici è iniziata a metà del XIX secolo. Willis, 1842 fu il primo a suggerire che le volte a coste erano componenti critici portanti, una visione che rimase ampiamente accettata fino a quando non contestata da osservazioni successive. Alexander, Mark e Abel, 1977 criticato questo punto di vista come "basato più su impressioni visive che comprensione strutturale completa.'

Nel 1860, Eugène Viollet-le-Duc ha introdotto l'idea di *La sua essenza*, suggerendo che la muratura potrebbe ospitare una serie di carichi e insediamenti (Alexander, Mark e Abel, 1977). Il suo modello di volta trattava la struttura come un sistema di archi individuali.

COPIA DI REVISIONE

Queste idee furono poi contestate da Victor Sabouret all'inizio del XX secolo, basandosi su un'osservazione di cracking, propose che le costole non si comportassero come elementi strutturalimente critici. (Huerta, 2009)Pol Abraham costruito su questo lavoro, sottolineando la spinta orizzontale e il profilo geometrico della volta come dominante sulla resistenza materiale o sulla qualità dei mortai (Alexander, Mark e Abel, 1977).

La rivoluzione di Heyman (1960) Jacques Heyman ha trasformato l'analisi della muratura introducendo la teoria dei limiti di plastica. Le sue tre ipotesi fondamentali hanno rivoluzionato il campo:

Jacques Heyman ha rivoluzionato lo studio delle strutture murarie a partire dagli anni '60, introducendo il concetto di analisi dei limiti di plastica (Heyman, 1966). Ha proposto che le strutture murarie siano sicure se un *linea di spinta* si può trovare che:

1. si trova interamente all'interno della struttura,
2. è in equilibrio con carichi esterni, e
3. non induce tensione.

Questa analisi si basa su tre ipotesi:

- La muratura ha una forza trascurabile di trazione.
- La forza compressa è illimitata (sotto il peso di sé).
- Nessun guasto scorrevole si verifica a causa di un elevato attrito.

Queste ipotesi consentono l'applicazione dei teoremi di limite inferiori e superiori, che garantiscono stabilità se si trova un campo di stress ammissibile, mentre quest'ultimo identifica il collasso quando non è possibile contenere tale equilibrio all'interno della struttura.

Approcci computazionali moderni L'analisi contemporanea impiega molteplici metodi, offrendo intuizioni distinte ma anche di fronte a limitazioni per la muratura non duttile eterogenea:

Metodi grafici e cinematici Analisi grafica della linea di spinta stima se le forze strutturali rimangono all'interno della busta geometrica di archi e volte, spesso utilizzando "slices" della volta per un'approssimazione 2D (Hassan Fangary, 2010)Anche se efficace, è di lunga durata e impraticabile per geometrie complesse.

L'analisi cinematica, invece, i modelli collassano i meccanismi come assemblaggi di blocchi rigidi, valutando il limite superiore dei carichi di guasto valutando il lavoro svolto dalle forze esterne. 4.12.

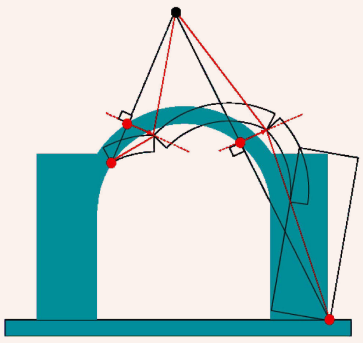


Figura 4.12: Valutazione cinematica della struttura dell'arco e del meccanismo di guasto (Hassan Fangary, 2010)

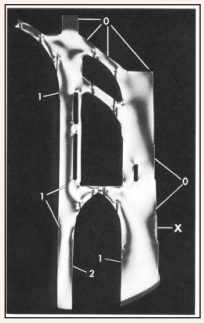
Finito attrito e moderni approcci computazionali D'Ayala e Tomasoni, 2008 ha proposto un'analisi dello stato limite di 3D che incorpora l'attrito finito. Produce campi di stress, schemi di crepa e valori di spinta orizzontale per varie condizioni di carico. (Hassan Fangary, 2010).

COPIA DI REVISIONE

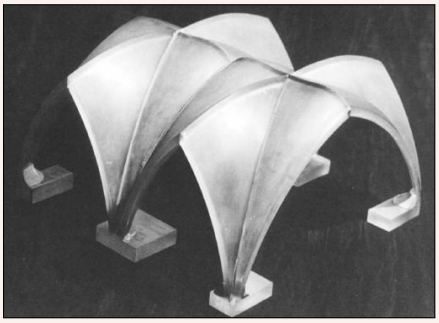
Modello di elementi finiti (FEM): Introdotto da Robert Mark, FEM è stato utilizzato per modellare volte gotiche e contrafforti nonostante i limiti insiti. Le ipotesi di continuità, isotropia e elasticità non tengono rigorosamente per la muratura. Barrallo, Sanchez-Beitia e Onati, 2005 e Viola, Panzacchi e Tornabene, 2004 I risultati FEM dipendono fortemente dalle ipotesi idealizzate.

Modellazione di elementi discreti (DEM): DeJong, 2009 applicato DEM alla muratura, trattando ogni pietra come un blocco rigido in grado di separazione o scorrevole, meglio catturando il comportamento discontinuo.

Analisi fotoelastic: Mark e Prentke, 1968 pionieristico l'uso di modelli epossidici scalati per visualizzare lo stress attraverso i modelli di frangia. Mark, Abel e O'Neill, 1973 prolungato questo a volte 3D (Figura 4.13).



(a) Modello di frizione (Mark e Prentke, 1968)



(b) Modello di vault (Mark, Abel e O'Neill, 1973)

Figura 4.13: Analisi fotoelastic delle volte gotiche

Analisi del collo e meccanica del corpo rigida Nella sua tesi di dottorato, Ochsendorf, 2002 Ha identificato meccanismi tipici di fallimento: formazione a cinque navate in archi, ribaltamento in contrafforti, e guasto a quattro natiche sotto carichi sismici. Ochsendorf ha anche evidenziato i limiti di metodi di elemento elastico e finito per la muratura storica, favorendo la meccanica rigida del corpo per una valutazione realistica.

Analisi delle contraffazioni volanti Le contraffazioni volanti sono state analizzate solo di recente in profondità. Nikolinakou, Tallon e Ochsendorf, 2005 proposto modelli geometrici idealizzati per catturare il loro comportamento, mostrando guasto può verificarsi attraverso schiacciamento, scorrevole o instabilità locale, soprattutto in brevi o ripidi matresse inclinate.

Nikolinakou e Tallon, 2006 esaminati ulteriormente gli effetti della curvatura, dell'inclinazione e dello spessore, tuttavia questi studi sono stati limitati dal piccolo numero di strutture gotiche disponibili per il confronto diretto.

Più recentemente, Kim, 2016 studi di elementi finiti sulle matresse volanti in tre grandi cattedrali: Notre-Dame de Paris, Amiens e Saint-Étienne.

Verso una Sintesi Ogni metodo di analisi, grafico, cinetico, fotoelastico, FEM, DEM, offre una panoramica distinta ma anche di limiti, soprattutto per la muratura non duttile, eterogenea.

Ogni metodo di analisi, grafico, cinetico, fotoelastico, FEM, DEM, offre una panoramica distinta ma anche di limiti, soprattutto per la muratura non duttile, eterogenea.

Il cracking non sempre segnala il fallimento, ma in combinazione con spostamenti, collasso di livello superiore, attività sismica, o deformazione della volta, può indicare l'instabilità (Hassan Fangary, 2010).

Ulteriori discussioni sulle linee di spinta e di meccanica del voussoir saranno presentate nel capitolo 31.

COPIA DI REVISIONE

Con questa fondazione in principi strutturali gotici e metodi di analisi stabiliti, ci rivolgiamo ora ad esaminare quattro studi di casi cattedrale in cui questi concetti teorici sono stati testati — a volte con successo, a volte catastroficamente — nella costruzione reale.

4.4 Una storia di quattro cattedrali

Questa sezione esamina quattro cattedrali le cui storie strutturali illuminano il complesso rapporto tra ambizione architettonica e realtà ingegneristica, e rivelano come le decisioni di progettazione, sia radicate nell'accettare l'innovazione, nell'aderenza alla tradizione, o nella risposta alla crisi, abbiano plasmato il destino di questi edifici monumentali.

4.4.1 Cattedrale di Beauvais: uno studio di casi iconici in limiti strutturali

La Cattedrale di Beauvais è forse il fallimento più istruttivo della storia dell'ingegneria strutturale, il suo ambizioso progetto e due drammatici collassi forniscono una rara e documentata visione dei limiti empirici della costruzione gotica. Per gli ingegneri moderni, offre un caso forense unico dove le decisioni strutturali possono essere analizzate sia attraverso la documentazione storica che con l'analisi dei limiti contemporanei.

La Cattedrale di Beauvais è uno dei casi più importanti della storia dell'ingegneria strutturale, il suo ambizioso progetto e il suo drammatico crollo forniscono una rara visione dei limiti della costruzione gotica.Per gli ingegneri, offre un prezioso esempio di come le decisioni strutturali – sia buone che cattive – possano modellare il destino di un edificio.

Ambizione ecclesiastica e costruzione della Cattedrale Competitiva

Sebbene Beauvais non avesse la prominenza politica ed economica di città come Parigi o Reims, possedeva una significativa autorità ecclesiastica come sede di un potente vescovo. Nel panorama competitivo del cristianesimo medievale, i vescovi spesso agivano con l'autonomia e le risorse dei principi secolari, commissionando l'architettura come affermazione spirituale e affermazione istituzionale.

Nonostante Beauvais non avesse la posizione politica ed economica di città come Parigi o Reims, essa deteneva una significativa autorità ecclesiastica come sede di un potente vescovo. Nel panorama competitivo della Chiesa medievale, i vescovi spesso agivano con l'autonomia e l'ambizione di principi secolari. Una tale figura era il vescovo Milo di Nanteuil, che ha iniziato la costruzione della cattedrale nel 1220.

Interludio: L'orologio astronomico di Beauvais

Mentre la Cattedrale di Beauvais è celebrata per la sua audace muratura del XIII secolo, una delle sue più straordinarie realizzazioni ingegneristiche appartiene al XIX secolo. L'orologio astronomico, costruito tra il 1865 e il 1868 da Auguste-Lucien Vérité, rappresenta un capolavoro di meccanica di precisione che rivaleggia con l'ambizione strutturale della cattedrale stessa.

Anche se la Cattedrale di Beauvais[1] La sua audace muratura trecentesca, una delle sue più straordinarie realizzazioni ingegneristiche, appartiene al XIX secolo. Costruita tra il 1865 e il 1868 dall'orologo francese Auguste-Lucien Vérité, l'orologio astronomico della cattedrale è un sistema meccanico di eccezionale

[1] L'aeroporto Beauvais-Tillé (BVA) serve ora principalmente come porta di sconto per i voli di bilancio a Parigi. Pochi passeggeri sono consapevoli che appena oltre l'asfalto si trova una delle cattedrali più ambiziose dell'Europa gotica – la falce ancora fare il breve viaggio per visitarla, come la tua è veramente una volta.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

complessità, Fig. 4.14. Risalire oltre dodici metri di altezza e contenere più di 90.000 componenti interlocking, si pone come un capolavoro di ingegneria di precisione. Fifty-two quadranti forniscono una produzione continua su fenomeni astronomici— posizioni planatriche, eclissi solari e lunari, cicli di marea— così come il timekeeping civile tradotto in più città. Una serie di sequenze di automaton, guidate da un motore centralizzato e allestimento ausiliario, eseguire una vetrina completamente sincronizzata che richiede un display.



Figura 4.14: Orologio astronomico di Beauvais

Interrogare il mito dell'eccezionalità strutturale

Una comune equivoco rappresenta Beauvais come strutturalmente eccezionale, tanto ambiziosa nelle sue proporzioni che il crollo era inevitabile, questa narrazione, mentre drammatica, oscura la più sfumata realtà strutturale rivelata da un'attenta analisi dimensionale.

Una domanda legittima sorge: è stata la Cattedrale di Beauvais così strutturalmente eccezionale che le sue proporzioni da sole potrebbero spiegare il suo crollo parziale? La risposta sembra no. Nonostante le frequenti affermazioni sulle dimensioni colossali della cattedrale, non sono, infatti, significativamente superiori a quelle di altre principali cattedrali gotiche costruite nella prima metà del XIII secolo, Tabella 4.2 e Fig. 4.15. As Branner, 1997 Le note, la linea centrale che spazia tra i pier principali del coro a Beauvais misura 15,0 metri, quasi esattamente come a Bourges, Chartres, Amiens e Colonia, e solo leggermente più di Reims. La larghezza totale del coro, circa 42 metri, è paragonabile a Bourges e in realtà più stretta degli altri, con conseguente relativamente modesta navata laterale.

Il 1284 Collapse: una storia di detective strutturale

Venerdì 29 novembre 1284, alle ore otto della sera, le volte superiori del coro della Cattedrale di Beauvais crollarono catastroficamente. L'evento fu improvviso e devastante: le enormi volte caddero, frantumando diverse vetrate e frammentando i pilastri esterni. Il coro – una volta immaginato come il pinnacolo dell'aspirazione gotica – era reso inutilizzabile e i servizi liturgici cessarono per quarant'anni. *châsses* dei Santi Solo, Germer e Evrost, erano probabilmente incolti.

L'assenza di trigger esterni, attività sismica, vento eccezionale o azione militare, ha reso questo collasso un caso particolarmente prezioso, il fallimento si è verificato durante le normali condizioni di carico, fornendo una rara comprensione dei limiti strutturali intrinseci della costruzione della muratura gotica.

L'assenza di cause esterne, come l'attività sismica o i carichi eolici eccezionali, ha lunghi storici enigmi, mentre alcuni primi commentatori hanno romanticizzato il fallimento come esempio di ambizione gotica che supera i suoi limiti, l'analisi strutturale di Heyman respinge decisamente tali affermazioni. Heyman, 1967.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

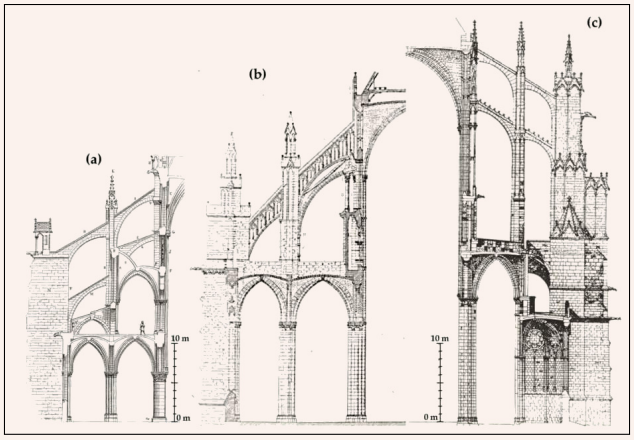


Figura 4.15: Analisi comparativa della sezione trasversale (altezza della navata e sistema di matrattazione) di: (a) Cattedrale di Notre-Dame, Parigi; (b) Cattedrale di Amiens; e (c) Cattedrale di Beauvais (il disegno dell'autore basato su studi sezionali da Viollet-le-Duc, 1854.

Analisi rivoluzionaria di Heyman

Lo studio di Beauvais del 1967 di Jacques Heyman rappresenta un momento di spartiacque nell'archeologia strutturale, applicando l'analisi dei limiti di plastica a un fallimento storico, ha dimostrato come la teoria dell'ingegneria moderna potrebbe illuminare la pratica costruttiva medievale e sfidare le ipotesi di lunga data sul comportamento strutturale gotico.

Heyman sostiene che il collasso non può essere attribuito alla geometria generale o all'altezza eccessiva della struttura. Piuttosto, probabilmente derivava da un difetto di costruzione locale ma critico, forse una sequenza o un dettaglio introdotto durante l'edificio, che sfuggiva al controllo contemporaneo. La sua analisi dimostra che né piccoli spostamenti geometrici né restringimento a lungo termine dei mortali sarebbe stato sufficiente a innescare il fallimento.[2] Nonostante le teorie multiple, il meccanismo esatto rimane incerto, riflettendo il complesso gioco di forma, materiale e l'esecuzione nella costruzione gotica.

Nel successivo, sono state intraprese misure di emergenza per stabilizzare la struttura danneggiata, compresa l'inserimento di pilastri supplementari nei portici del coro, come si è osservato sia Wolfe e Mark, 1976 e Murray, 1989. Questo evento rimane uno dei più consequenziali guasti strutturali dell'architettura gotica—il suo significato accresciuto dal livello di intuizione tecnica ora portato a sopportare attraverso moderni meccanismi strutturali.

Ingegneria forense: Analisi delle forze di Ungewitter

Il crollo del 1284 fu principalmente il risultato di un'eccessiva deformazione laterale dei pilastri principali sotto spinta dalle alte volte. L'analisi moderna rivela come gli elementi individuali apparentemente adeguati possano fallire quando la loro interazione crea instabilità critica.

Il crollo del coro nel 1284 fu principalmente il risultato di un'eccessiva deformazione laterale dei pilastri

[2]Infatti, anche nei moderni guasti strutturali, la causa principale non è spesso carenza di design globale, ma piuttosto la trascuratezza dei dettagli localizzati, come i collegamenti poveri, i difetti materiali nascosti, o le condizioni limite trascurate (Benouville, 1891)Un esempio noto è il crollo del 1967 del Silver Bridge nella Virginia Occidentale, causato dalla frattura indetetta di un singolo eyebar, (Administration, 1969).

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

sotto la spinta dell'alta volta. Come sottolinea Heyman, il fallimento non fu dovuto a schiacciamento o a guasto di trazione del materiale, ma perché i pilastri deflessero successivamente al punto in cui la linea di spinta usciva dal profilo murario.

Heyman riproduce l'analisi di Ungewitter, Fig. 4.16a, che esamina le forze principali che agiscono su una tipica sezione trasversale. Per il pier principale, Ungewitter identifica la spinta alta volta $H_1 = 3.24$ tonnellate e la sua reazione verticale V_1, così come la spinta del voltaggio del corridoio H_2 e reazione verticale V_2. Contando per i pesi eccentrici di pareti e altri elementi portati dal molo, Ungewitter pone la domanda: qual è la grandezza della spinta del buttress B richiesto in modo che la linea di spinta totale passa esattamente attraverso il punto medio della base del pier?

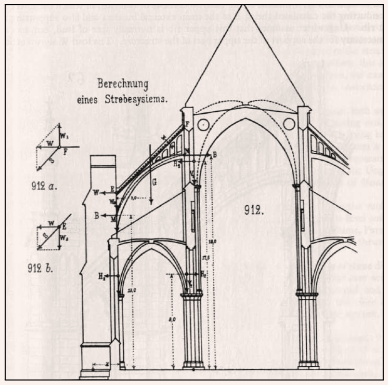
Prendendo momenti delle forze su questo punto medio, il valore di B si trova direttamente:

$$B = 3.02 \text{ tonnes (given } H_1 = 3.24 \text{ tonnes)} \tag{4.1}$$

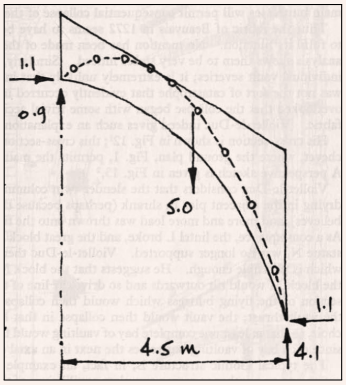
Questo valore definisce la spinta minima del matrimonio necessaria per l'equilibrio con la linea di spinta contenuta nella muratura (Fig. 4.16a).

Heyman nota inoltre che Léon Benouville, nella sua analisi del 1891, attribuiva correttamente il mancato disflessione laterale sotto le punte a volta, una conclusione pienamente coerente con l'analisi grafica e meccanica.

Il problema diventa ancora più chiaro quando si considera la linea di spinta stessa, come mostrato in Fig. 4.16b, la linea di spinta passa estremamente vicino al confine intrados del molo a metà altezza, confermando la natura precaria dell'equilibrio. La struttura era altamente sensibile a qualsiasi imperfezione minore — compreso l'insediamento, il restringimento di mortaio, o lievi imprecisioni in costruzione — che causerebbe la linea di spinta a muoversi fuori della muratura, portando all'instabilità.



(a) Force system acting on a typical cross-section of the choir, showing the main vault thrusts (H_1, H_2), vertical reactions (V_1, V_2), and the required buttress thrust (B) for equilibrium, (Heyman, 1967)



(b) Thrust line within the pier section, showing proximity to the intrados boundary at mid-height, confirming the instability mechanism, (Heyman, 1967)

Figura 4.16: Analisi del collasso post-84

COPIA DI REVISIONE

Post-1284 Ricostruzione: Lezioni di ingegneria applicate

La ricostruzione dopo il crollo del 1284 rappresenta uno dei più profondi reattori strutturali della storia, ma piuttosto che ricostruire semplicemente gli elementi falliti, il capitolo della cattedrale ha implementato cambiamenti sistematici che affrontavano le cause fondamentali dell'instabilità.

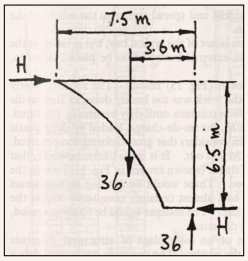
In risposta al crollo, la ricostruzione effettuata dopo il 1284 modificò significativamente la struttura, mentre il numero di piloni nel coro fu raddoppiato, Fig. 4.17b, aggiungendo supporti intermedi, e la spaziatura della baia è stata dimezzata. La muratura dei pilastri è stata ispessita, e l'altezza di molle delle volte è stata ridotta per abbassare la magnitudine della spinta.



(a) Comparison between the pre-collapse state (reconstruction, left) and the post-collapse state (right) of the Beauvais Cathedral choir after the 1284 collapse, highlighting the reinforcement achieved through the duplication of piers (Elizalde, 2025)



(b) General view of the exterior of Beauvais Cathedral's choir, showing the reconstructed and heightened flying buttress following the 1284 collapse (Elizalde, 2025)



(c) Force diagram of the lower flying buttress between *tas-de-charge* and intermediate pier, (Heyman, 1967)

Figura 4.17: Ricostruzione Beauvais dopo il crollo del 1284

Le contraffazioni volanti sono state ridisegnate anche con inclinazioni più ripide per resistere più efficacemente alla spinta orizzontale, Fig. 4.17c.

La ricostruzione risultante, in gran parte completata dal 1337, aumentò notevolmente la robustezza del coro, ma Heyman sottolinea che nonostante questo episodio, le lezioni sul delicato equilibrio della spinta nella costruzione gotica furono apparentemente dimenticate durante il tentativo del XVI secolo di aggiungere una torre centrale, che alla fine fallì anche.

COPIA DI REVISIONE

Va notato che la guerra dei cento anni[3] la costruzione si è essenzialmente fermata, soprattutto a causa della tensione economica, della mancanza di risorse e delle ripetute invasioni nella regione della Francia settentrionale, dove si trova Beauvais.

Il 1573 Collapse: L'ambizione verticale incontra la realtà fisica

Il crollo della torre centrale nel 1573 rappresenta una categoria diversa di guasti strutturali, non causati da difetti di costruzione, ma dall'incompatibilità fondamentale tra altezza estrema e supporto laterale inadeguato, che fornisce una visione cruciale dei limiti del disegno strutturale empirico.

Il 30 aprile 1573, giorno dell'Ascensione, la torre centrale della Cattedrale di Beauvais crollò catastroficamente. Le testimonianze raccontano che, pochi istanti dopo l'uscita del clero e dei fedeli al termine della funzione, la massiccia torre sulla crociera precipitò. Il cedimento fu improvviso e violento: i due piloni meridionali della crociera cedettero per primi, innescando una reazione a catena che distrusse la torre lanterna e le volte adiacenti. Sorprendentemente, furono segnalati soltanto feriti lievi Branner, 1962.

Il crollo segnava l'estremità finale delle aspirazioni della cattedrale per una verticalità senza pari, la torre della lanterna, completata nel 1569, si fermò per soli quattro anni prima del suo crollo, sottolineando la precarietà di estendere il sistema strutturale gotico oltre i suoi limiti empiricamente provati.

Analisi strutturale: il problema mancante della navata

Il guasto del 1573 illumina un principio fondamentale del design gotico: queste strutture raggiungono la stabilità attraverso la distribuzione sistematica del carico e la bracing reciproca.

Il fallimento della torre della lanterna è stato attribuito principalmente all'instabilità geometrica dei pilastri incrociati sotto l'estremo carico verticale imposto dalla torre. Branner, 1997 e Wolfe e Mark, 1976 sottolineano che i pilastri non sono mai stati originariamente progettati per un tale carico, l'assenza della navata, componente integrante della struttura pianificata, che significa che i pilo occidentali non hanno avuto un restringimento laterale critico.

Wolfe e Mark, 1976 Inoltre, si evidenzia che il progressivo cracking era stato osservato nei pilastri meridionali che portavano al collasso, indicando che il fallimento non era di origine improvvisa ma si sviluppò progressivamente come i pilastri deformati sotto carico sostenuto, raggiungendo infine un punto in cui le eccentricità e gli spostamenti superavano i limiti di stabilità geometrica.

Branner, 1962 Inoltre, si pone l'insufficiente integrazione strutturale tra la nuova torre e il preesistente tessuto gotico della cattedrale, mentre le interfacce murarie tra i vecchi e i nuovi componenti non hanno avuto la continuità necessaria per distribuire efficacemente i carichi.

Le questioni della Fondazione sono state proposte come un fattore di contributo. Elizalde, 2025 suggerisce che l'insediamento differenziale, in particolare sotto i pilastri meridionali, può aver aggravato le instabilità esistenti. Murray, 1989, considerare l'insediamento come un fattore secondario rispetto al problema dominante di instabilità geometrica.

In sintesi, il crollo della torre della lanterna era un classico caso di guasto strutturale guidato da instabilità geometrica cumulativa in pilastri sottili sottoposti a carichi di compressione elevati e mancante sufficiente bracing laterale.

[3] Oscurato tra il 1337 e il 1453, fu un conflitto tra i regni d'Inghilterra e della Francia e una guerra civile in Francia durante il tardo Medioevo.

COPIA DI REVISIONE

> Se le misure di frenatura raccomandate fossero state adottate nel 1571, è probabile che il crollo potesse essere evitato.
>
> Wolfe e Mark, 1976

Post-1573: Dall'ambizione al pragmatismo

Il crollo del 1573 segna una trasformazione filosofica nell'edificio della cattedrale, dalla ricerca di altezze senza precedenti all'accettazione del pragmatismo strutturale, che riflette una più ampia evoluzione della cultura ingegneristica verso la valutazione del rischio e i limiti empirici.

Dopo il crollo catastrofico del 1573, il capitolo della cattedrale abbandona definitivamente le sue aspirazioni alla supremazia verticale, il crollo aveva chiarito che i rischi strutturali di una rinnovata espansione verticale superavano di gran lunga ogni ricompensa simbolica o estetica.

La risposta immediata ha comportato la compensazione dei detriti e l'attuazione delle misure di stabilizzazione. Murray, 1989, gli artigiani sono stati chiamati in giorni dal crollo per valutare i danni e proporre riparazioni mirate. Le loro raccomandazioni includevano la ricostruzione del molo attraversante nord-orientale gravemente danneggiato, riparazioni al pier coro adiacente (D5/6), e il molo corridoio a C6.

As Wolfe e Mark, 1976 Le prime fasi della muratura instabile sono state accuratamente smontate per evitare ulteriori fallimenti. La nuova costruzione è stata limitata alla stabilizzazione: le corde di ferro sono state installate su volte vulnerabili e le cuciture di muratura sono state effettuate in punti chiave di molla.

Nel 1605 il capitolo della cattedrale abbandona ufficialmente l'idea di costruire la navata o di ricostruire la torre, che segnava un punto di svolta filosofico, dalla ricerca dell'aspirazione gotica all'accettazione di limitazioni strutturali pragmatiche.

La Cattedrale di Beauvais è oggi una straordinaria conquista e un monumento cautelare, il suo coro e il transetto troncato non rappresentano un fallimento dell'ingegneria medievale, ma il rischio intrinseco di spingere metodi di costruzione empirici oltre i confini provati.

Lezioni di ingegneria da Beauvais

La storia strutturale della Cattedrale di Beauvais offre una visione duratura della pratica dell'ingegneria contemporanea, tre insegnamenti fondamentali che emergono dai suoi due collassi:

Dettagli locali Può Trigger Global Fallimento: Il collasso del 1284 dimostra come i difetti di costruzione apparentemente minori o le variazioni materiali possano provocare un disastroso fallimento nei sistemi che operano vicino ai loro limiti di stabilità.

Integrazione del sistema è critico: Il crollo della torre del 1573 illustra i pericoli di aggiungere elementi ad un sistema strutturale senza considerare il percorso completo del carico e i requisiti di supporto. Le cattedrali gotiche raggiungono la stabilità attraverso l'integrazione sistematica, rimuovendo o alterando i componenti chiave possono compromettere l'intera struttura.

Limiti empirici Esiste: Entrambi i guasti si verificarono quando i costruttori superarono la comprovata busta della pratica costruttiva gotica, mentre l'innovazione spingeva il progresso, spingendo oltre i limiti empiricamente convalidati richiede un'attenta analisi e test—risorse non disponibili ai costruttori medievali ma essenziali per l'ingegneria moderna.

Il crollo della torre centrale della Cattedrale di Beauvais nel 1573 è un'importante testimonianza dei limiti strutturali dell'ambizione verticale nell'architettura muraria.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Il fallimento non è derivato da una scarsa maestria o mancanza di conoscenza, ma da un errore critico di calcolo di quanto i pilastri sottili, privi di sufficiente bracing laterale, rispondono a carichi di compressione sostenuti. Wolfe e Mark, 1976 e Branner, 1997 sottolinea, il problema non era un sovraccarico immediato ma una progressiva instabilità geometrica, l'assenza della navata, componente integrante del design originale, lascia i pilastri occidentali pericolosamente non supportati contro la deriva laterale.

Nel corso dei quattro anni la torre si trovava, piccole imperfezioni iniziali si mescolavano a spostamenti misurabili. I moli deformarono incrementalmente sotto le spinte eccentriche imposte dall'immenso peso della torre.

Per gli ingegneri e gli storici strutturali, Beauvais rimane uno straordinario studio di casi nel confine tra fattibilità geometrica e stabilità strutturale, sottolineando che la snellezza da sola non è un criterio di fallimento, ma la snellezza combinata con insufficienti percorsi di carico eccentrici e scarsa continuità materiale può portare a crollo progressivo anche sotto carichi nominali statici.

Per i moderni conservatori, Beauvais offre una lezione potente: che l'audace strutturale del design gotico opera entro i limiti, e che questi limiti possono essere pericolosamente superati quando la forma supera i limiti empirici del suo tempo.

La cattedrale oggi, con il suo coro seminativo e il transetto troncato, non è semplicemente un monumento all'ambizione, ma come un ricordo durevole del delicato equilibrio tra aspirazione e le immutabili leggi della meccanica.

4.4.2 Il Duomo di Milano: Geometria, Politica e Dibattito Strutturale

La costruzione della cattedrale di Milano rappresenta uno degli episodi più affascinanti della storia nel processo decisionale architettonico, dove la geometria teorica, l'esperienza pratica e l'autorità politica confluivano in dibattiti tecnici riscaldati.

Tradizioni gotiche incontra l'innovazione italiana

Dopo il periodo romanico, l'architettura gotica fioriva in Europa dalla fine del XII al XVI secolo (con l'emergere del Rinascimento), nota anche come architettura appuntita, era caratterizzata da una maggiore altezza e molto più luce, resa possibile dai miglioramenti tecnici nelle volte e nelle contraffazioni.

Prima del XV secolo, la conoscenza architettonica fu trasmessa principalmente attraverso apprendistato pratico e segreti commerciali strettamente custoditi. Il progetto della cattedrale di Milano ne cambiò, generando alcuni dei primi dibattiti tecnici documentati nella storia architettonica.

Le cattedrali gotiche non furono costruite in modo casuale. Le tecniche di costruzione esistevano, e la geometria e pietramasonry in particolare ha svolto un ruolo critico (Shelby, 1972). La competenza è stata trasmessa per via orale da una generazione di muratori alla successiva, il più spesso da padre a figlio. Fortunatamente, due grandi eccezioni sopravvivono: lo sketchbook tredicesimo secolo di Villard de Honnecourt e diversi opuscoli scritti dai massoni tedeschi nel XV e primi cinque secoli, da questi documenti possiamo ottenere un quadro abbastanza sostanziale della geometria utilizzata dai muratori medievali.

Villard de Honnecourt: Geometria come scienza divina

Nel XIII secolo, il muratore francese Villard de Honnecourt viaggiò in tutta Europa e redigò il suo famoso sketchbook, che fornisce preziose informazioni sulle leggi di costruzione e sulle regole proporzionali utilizzate dai muratori gotici. (De Honnecourt, 2006) (De Honnecourt, 1858). Durante le sue note, Villard fa ampio riferimento alla geometria (*Non ti meraviglia che ho detto che tutta la scienza vive solo dalla scienza della geometria*) e anche speculato che Euclid aveva imparato la geometria da Abramo mentre in Egitto. Il suo lavoro offre non

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

solo la documentazione visiva dei dettagli costruttivi, ma anche uno sguardo alla messa a terra intellettuale e teorica delle pratiche di costruzione gotica.

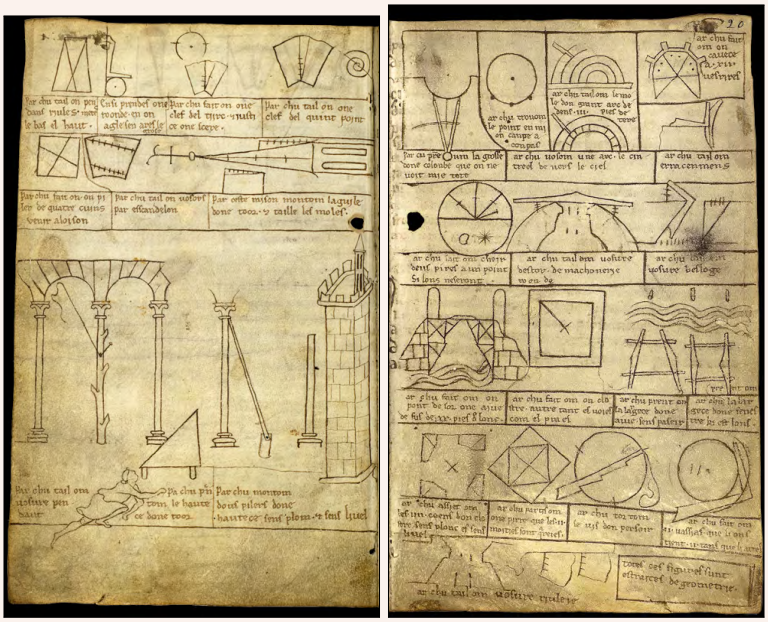


Figura 4.18: Disegni geometrici di Villard de Honnecourt *carnet*, illustrare le regole e i sistemi di proporzionalizzazione (De Honnecourt, 2006)

Nel tardo gotico, diversi piccoli libri furono scritti da maestri muratori tedeschi, i primi furono quelli di Matthias Roriczer. *Geometria deutsch*, pubblicato nel 1486. Si tratta di un trattato specificamente dedicato alla geometria. Il opuscolo di dodici pagine è costituito da figure letterate e brevi spiegazioni di nove problemi: come costruire un angolo retto, un pentagono, un eptagono, e un ottagono; come trovare la lunghezza e il centro di un cerchio; come costruire un quadrato e un triangolo con aree uguali; come impostare stampi e fini per una pianta di lamina e come delineare un piano.

Cattedrale di Milano: La Fabbrica e l'Innovazione Istituzionale

La costruzione della cattedrale di Milano, iniziata nel 1386 sotto la *Veneranda Fabbrica del Duomo di Milano*A differenza del maestro informale, sistema di apprendisti tipici della costruzione medievale, la Fabbrica ha creato un quadro istituzionale per la consultazione tecnica che ha riunito competenze provenienti da tutta Europa.

Un aspetto sorprendente del Duomo, sottolineato ripetutamente nei conti contemporanei, è che la sua cura e riparazione non sono episodiche ma continue. In quasi ogni momento della sua storia, una parte della cattedrale è stata in impalcatura, con i tagliapietre che sostituiscono il marmo in tempo, riparano le tracce, o rinnovano gli elementi scultorei.Per i cittadini di Milano, questo stato di conservazione continua non è un segno di fallimento e di decadimento, ma la condizione normale dell'edificio stesso (Povoledo, 2023).

Prima del XV secolo, vi furono pochissimi scritti sull'architettura, ma questo cambiò con la costruzione della Cattedrale di Milano, iniziata nel 1386 sotto gli auspici della città. *Veneranda Fabbrica del Duomo di Milano*, un'organizzazione ancora in atto oggi. Questo progetto è stato uno degli episodi più importanti della storia dell'architettura italiana ed europea-prima, per l'unicità dell'edificio stesso, la più grande chiesa gotica mai costruita in Italia; seconda, a causa dei contributi di autoritari architetti provenienti da tutta Europa, che

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

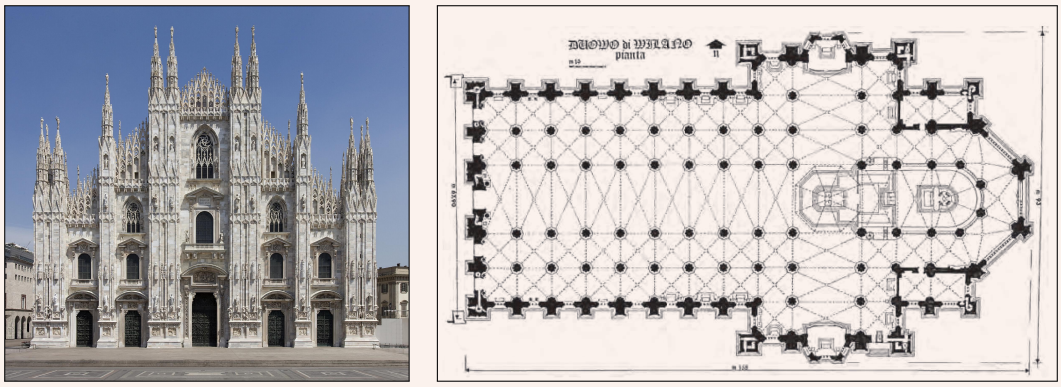
sono stati periodicamente invitati a offrire proposte; e terza, a causa dei dibattiti e discussioni che ha iniziato oltre un secolo rispetto alle scelte strutturali, le pratiche di costruzione regionale. Ackerman, 1949.

Un tratto distintivo del Duomo è il suo uso *Candoglia* marmo, attraccato dal Lago Maggiore e trasportato attraverso il sistema dei Navigli a Milano, dando alla cattedrale la sua caratteristica tonalità pallida (Fig. 4.19a). Il marmo è stato fornito dal Duca di Milano, Gian Galeazzo Visconti, che ha concesso alla Fabbrica l'accesso gratuito alle cave, simboleggiando sia il patronato ducale che l'unione dell'autorità civica e religiosa.

Il grande dibattito di elevazione: Geometria Versus Pragmatism

I dibattiti che circondano l'elevazione di Milano rappresentano uno dei primi conflitti documentati tra geometria teorica e esperienza costruttiva pratica, la polemica rivela come le diverse tradizioni regionali si siano avvicinate alla questione fondamentale della proporzione architettonica.

I primi dibattiti si concentrarono sull'elevazione dell'edificio, il piano terra stabilito nel 1386 usò un 16 per 16 *braccia*[4] griglia quadrata per le navate laterali e 16 per 32 *braccia* rettangoli per la navata (Fig. 4.19b).



(a) Il marmo di Candoglia (b) Piano terra

Figura 4.19: Duomo di Milano

Il problema fondamentale era che l'altezza della struttura rimase indeterminata anche dopo che le fondamenta erano state completate, una situazione impensabile nella moderna pratica costruttiva ma caratteristica dell'evoluzione dell'edilizia medievale.

Il problema era che l'altezza della struttura rimase indeterminata anche dopo la conclusione delle fondamenta. Poiché questo era Milano—non una città italiana meridionale—la struttura risultante era, infatti, costruita senza uno schema verticale coerente. Nel 1391, l'Arcivescovo ha chiamato una conferenza per decidere su "la lunghezza dei pilastri, l'altezza della chiesa, delle finestre. '" *braccia* griglia—dovrebbe salire secondo una configurazione rettangolare o triangolare (cioè, basata su quadrati o triangoli equilateri: *ad un quadratum* or *ad un triangulum*).

Questo primo schema fu poi contestato dai contributi di architetti influenzati dallo stile francese Rayonnant e dalle pratiche tedesche dell'Alto gotico, particolarmente visibili nella Cattedrale di Colonia, che servivano come punto di riferimento per alcune proposte.

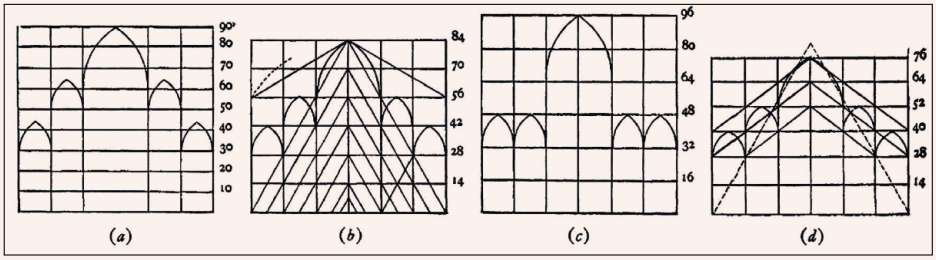
[4] *Braccia* (singolare): *braccio*) era un'unità premetrica di lunghezza utilizzata in Italia, variando per regione. *braccio* era di circa 58,4 cm (circa 23 pollici) ed era comunemente usato nelle misurazioni architettoniche e ingegneristiche durante i periodi rinascimentali e all'inizio moderni.

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

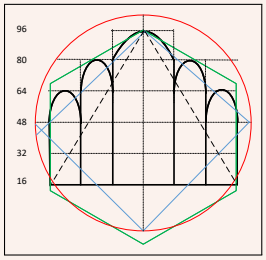
Geometria sacra e perfezione architettonica

As Sebregondi e Schofield, 2016 notata, la piazza e il triangolo equilatero sono stati spesso invocato in scritti architettonici da Vitruvio a Villard de Honnecourt . Considerati sacri fin dal tempo di Platone, appartenevano ad un "geometrico é"'che ha dato origine ad una tradizione che unisce l'ordine divino e il design architettonico, dato il desiderio di costruire una cattedrale, una Casa di Dio identificata con la più alta bellezza buona e assoluta, l'edificio doveva incarnare la perfezione matematica, creando una tensione tra la geometria ideale e la realtà costruttiva. *Gesamtkunstwerk*[5] in cui ogni elemento rifletteva l'armonia divina, al contrario del disordine del mondo.

Figura 4.20a illustra quattro progetti proposti.



(a) Progetti di successo (Ackerman, 1949)



(b) Ricostruzione dello schema di Stornaloco (Sebregondi e Schofield, 2016)

Figura 4.20: Proporzione di progetti per progetti successivi

L'evoluzione delle proposte di compensazione

Quattro approcci distinti sono emersi dai dibattiti, ciascuno che riflette diverse priorità filosofiche e pratiche:

di Vicenzo, 1390: Registrato il primo set di note—una fonte primaria—con il piano e le basi poste prima dell'influenza straniera, e la guida iniziale per la sezione e l'elevazione.

Stornaloco, 1391: Ha proposto un ingegnoso compromesso tra perfezione geometrica e costruzione pratica, affrontando il problema fondamentale che l'altezza del triangolo equilatero ($\sqrt{3}$) era irrazionale, rendendo la misura precisa con strumenti medievali impossibile.

Stornaloco, 1391: Proposta una deviazione piccola ma significativa dal piano triangolare equilatero geometricamente puro, che Panofsky, 1945 clarified. Stornaloco ha affrontato l'irrazionalità dell'altezza del triangolo equilatero ($\sqrt{3}$), che precludeva l'utilizzo di un semplice metro, per una base di 96 *braccia*, il triangolo avrebbe dato un'altezza $96\sqrt{3}/2 \approx 83.13$ *braccia*. Stornaloco proposto un arrotondato 84 *braccia*, convenientemente divisibile in sei segmenti di 14 *braccia*Questo compromesso ha permesso la costruzione utilizzando sei divisioni orizzontali uguali.

Figura 4.20b è una ricostruzione intelligente: ANCpBq è un esagono regolare inscritto in un cerchio; AA è l'altezza della navata e l'inclinazione futura del buttress; ABC è un triangolo equilatero (altezza della navata); AOpr è un quadrato inscritto con altezza di imposizione diagonale; AD/6 e BC/6 definiscono "figure quadranulares"; e 16/14 è BC/AD.

[5] L'opera d'arte nella sua totalità.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Parler, 1392: Heinrich Parler di Colonia propose di abbandonare la geometria triangolare interamente a favore di un design a sezione quadrata con un'altezza interna del 96 *braccia*, attingendo dalla tradizione gotica tedesca esemplificata dalla Cattedrale di Colonia.

Parler, 1392: Proposto un design a sezione quadrata con un'altezza interna del 96 *braccia*, forse ispirato alla Cattedrale di Colonia.

Compromesso milanese: I massoni locali hanno sviluppato una soluzione ibrida utilizzando sistemi geometrici duali: un triangolo equilatero a 28 *braccia*, sormontato da un triangolo di Pythagorean 3-4-5 per raggiungere 76 *braccia* totale. Questo approccio pragmatico soddisfa gli ideali geometrici e i vincoli costruttivi.

Compromesso: I muratori milanesi hanno sviluppato un nuovo schema di elevazione inferiore utilizzando due sistemi triangolari: il triangolo equilatero a 28 *braccia*, e un triangolo di Pythagorean 3-4-5 per raggiungere 76 *braccia* totale. Ackerman, 1949 notata, la coesistenza di più *ad un triangulum* Le proposte complicano l'interpretazione delle fonti.

Intervento di Jean Mignot: Arte del Versus

Jean Mignot, un maestro francese di Parigi, ha svolto un ruolo cardine ma tenace nella costruzione del Duomo di Milano, (Ackerman, 1949). Invitato come un *consulente esperto* Nel 1390, ha esaminato le proposte strutturali sviluppate dai muratori italiani e ha espresso forti riserve sulla loro adeguatezza, identificando ben 54 difetti strutturali, avvertendo che la cattedrale era *in pericolo di rovina* (in pericolo di rovina), che vanno da inadeguati matrattamenti a basi di pier sproporzionate (à La Vitruvius). Mignot sostenne un ritorno al precedente, più geometricamente rigoroso 84-*braccia* elevazione proposta da Stornaloco.

Le sue critiche hanno scatenato uno scambio riscaldato che si è cristallizzato intorno a due approcci fondamentalmente diversi per costruire la conoscenza.I muratori milanesi, attingendo alla tradizione locale e all'esperienza pratica, hanno affermato *Analizzazioni e risultati* (la scienza è una cosa, l'arte un'altra), sostenendo che la loro conoscenza empirica superava la teoria astratta[6].

Il famoso retorto di Mignot...*ars sine scientia nihil est* (l'arte senza scienza non è nulla)—è stato un grido di raduno per l'integrazione dei principi teorici con la costruzione pratica.Questo dibattito ha preso in considerazione l'istruzione moderna di ingegneria, che cerca di combinare la comprensione scientifica con l'applicazione pratica.

Si deve notare che l'affermazione di Mignot anticipava argomenti simili da parte dei pensatori rinascimentali successivi. Leonardo da Vinci, scrivendo circa un secolo più tardi, dichiarò *Traduzione:* Leonardo ha sottolineato ulteriormente questo punto: 'Chi ama la pratica senza la scienza è come un marinaio che si imbarca una nave senza oltra o una bussola, che non può mai essere certo che sta per andare. "Queste affermazioni hanno riflettuto un movimento più ampio del Rinascimento verso l'integrazione dell'osservazione empirica con il rigore matematico - un movimento filosofico che alla fine trasformerebbe la pratica ingegneristica e i principi fondamentali di Milano§5.3)

Nonostante le tensioni che introdusse, l'intervento di Mignot portò alla luce incertezze strutturali e geometriche irrisolte nell'evoluzione del Duomo, sottolineando il fragile equilibrio tra pratica empirica e ragionamento teorico, una dialettica che continuerà a plasmare il pensiero architettonico e il discorso ingegneristico ben nel Rinascimento e oltre.

[6]Questa tensione tra la conoscenza teorica e l'esperienza pratica rappresenta uno dei dibattiti più duraturi in ingegneria e architettura. Si tratta di conflitti simili che sono apparsi durante tutta la storia: Vitruvio nel I secolo a.C. ha sostenuto principi sistematici mentre riconosce il primato di artigiani esperti; ingegneri del XIX secolo hanno discusso se l'analisi matematica o i test empirici dovrebbero guidare il design del ponte di ferro; e la pratica contemporanea continua a soddisfare così il rapporto tra modellismo computazionale e risultati pratici.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Risoluzione e Legacy

Il dibattito di Milano ha prodotto in definitiva una sintesi di lavoro che ha bilanciato le richieste concorrenti, il cui progetto finale ha incorporato elementi provenienti da più proposte, creando una struttura che soddisfa gli ideali geometrici e i vincoli pratici.

Il completamento del Duomo nel corso di diversi secoli, con varie modifiche e adattamenti, dimostra la resilienza di sistemi strutturali ben concepiti.A differenza di Beauvais, che non ha avuto un disastro catastrofico quando è stato spinto oltre i limiti empirici, Milano è riuscita a mantenere la flessibilità e a incorporare lezioni di continua esperienza costruttiva.

4.4.3 Basilica di San Pietro: dalla crisi all'analisi scientifica

La crisi strutturale nella Basilica di San Pietro nel XVIII secolo segna un punto di svolta nell'ingegneria architettonica: per la prima volta, un grosso problema strutturale è stato affrontato non attraverso modifiche empiriche ma attraverso analisi scientifiche sistematiche.

Il design ambizioso di Michelangelo

La cupola della Basilica di San Pietro, progettata in gran parte da Michelangelo e completata nel 1590, rappresentava il culmine dell'ambizione strutturale rinascimentale, ispirandosi alla cupola di Brunelleschi a Firenze (Fig. 4.4.4) ma superandola in altezza e in larghezza, ha creato sfide ingegneristiche che metterebbero alla prova i limiti della costruzione di muratura.

Segni di avvertimento e risposta istituzionale

All'inizio del XVII secolo, si presentarono delle crepe allarmanti nella struttura della cupola, a differenza dei costruttori medievali che avrebbero potuto affrontare tali problemi attraverso un rafforzamento incrementale, Roma del XVIII secolo si avvicinò alla crisi con un rigore scientifico senza precedenti.

La cupola della Basilica di San Pietro a Roma aveva mostrato segni di danno e di crepatura già nel 1630. Nel 1742 il deterioramento si fece così riguardo a quello che Papa Benedetto XIV ordinò uno studio formale. (Benvenuto, 1991b, pg. 352)La loro analisi ha ridotto la complessa costruzione della cupola, tra cui la base, le contraffazioni, il tamburo, il doppio guscio e la lanterna, in uno schema statico semplificato, utilizzabile all'analisi meccanica (in termini moderni, un approccio agli elementi finiti), osservando il sagging nel tamburo e nelle matresse, con ogni inguine che mostra sottosidenza al suo interno superiore e l'apertura alla fine inferiore (López, 2006, pg. 1958). ,

Appuntamento di Poleni: competenza e indipendenza

Insoddisfatto della conclusione dei gesuiti, Papa Benedetto XIV nominò Giovanni Poleni per verificare in modo indipendente i loro risultati. L'appuntamento di Poleni rifletteva non solo la sua crescente reputazione di matematico e meccanico, ma anche il riconoscimento del Vaticano che il problema richiedeva sia il rigore scientifico che l'intuizione pratica.

Le qualifiche di Poleni si estendevano oltre la matematica teorica, progettando dispositivi di calcolo meccanico e sviluppando strumenti sofisticati per gli studi idraulici, la sua capacità di quantificare fenomeni meccanici e tradurre principi astratti in soluzioni pratiche era ineguagliabile tra i suoi contemporanei.

COPIA DI REVISIONE

Innovazione metodologica: L'analisi segmentale

Poleni osservò che le crepe della cupola l'avevano già diviso in segmenti simili a lune mezzosferiche (fette di arancio), Fig. 4.21.

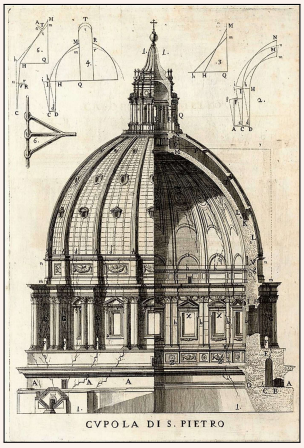


Figura 4.21: Osservazione di Poleni delle crepe nella cupola di San Pietro (Poleni, 1748)

Per scopi analitici, ha ipoteticamente diviso la cupola in 50 lunes (Heyman e Poleni, 1988). Valutava quindi la stabilità di un arco bidimensionale formato da due lunes adiacenti che si appoggiavano l'uno contro l'altro alla corona. Da un disegno della sezione trasversale della cupola, Poleni ha calcolato il peso di ogni lune, dividendolo in 16 segmenti e tenendo conto del peso della lanterna, Fig. 4.22a.

Gli esperimenti di modello a catena rivoluzionaria

La più brillante innovazione di Poleni è stata l'uso di *modelli fisici* I suoi esperimenti a catena sospesa hanno fornito una conferma intuitiva dei risultati teorici, dimostrando il rapporto fondamentale tra tensione e compressione nei sistemi strutturali.

Costruì quindi due modelli fisici a catena: uno con sfere uniformi, rappresentativo di una catenaria perfetta, e l'altro formato da sedici «piccole sfere di piombo i cui pesi corrispondevano ai valori numerici della colonna IV della Fig. 4.22a». Confrontò poi le curve reali con le due linee di spinta e concluse che le differenze erano considerevoli rispetto alla catenaria, ma molto piccole rispetto alla catena con sfere di piombo, la cui curva rimaneva all'interno della volta (Benvenuto, 1991b, pg. 382). Poleni concluse quindi, correttamente, che la cupola idealmente suddivisa in spicchi era stabile e che, *a fortiori*, lo era anche la cupola reale, fessurata o integra.

L'uso di catene appesa per simulare le linee di spinta comprimibili ha fatto eco alle idee avanzate da Robert Hooke un secolo prima (*flexile del continuum del pendio di Ut, sic stabit contiguum rigidum inversum* o "come appende la linea flessibile, quindi ma invertito sorrà l'arco rigido"'). L'approccio di Poleni servito come conferma fisica di questo principio e prefigurato i metodi grafici di ingegneri del XIX secolo come Culmann e Rankine.

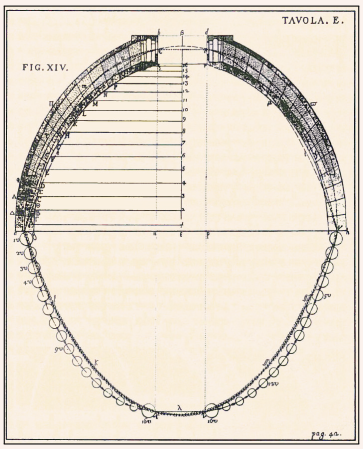
Valutazione completa dei danni

A quel punto Poleni cominciò a considerare la "natura" e gli "accident" dei materiali della cupola: pietra, mattoni e malta. Studiò l'influenza del freddo, del calore, dell'umidità e dell'essiccazione. Egli considerò

COPIA DI REVISIONE

COLONNA I.	COLONNA II.	COLONNA III.	COLONNA IV.
NVMERI DE' CVNEI.	LVNGHEZZE DE' RAGGI.	PESI DE' CVNEI.	PROPORZIONE DE' PESI IN NVMERI MINORI.
A. 1.	200.	88976.	89.
B. 2.	198.	88088.	88.
C. 3.	195.	86752.	87.
D. 4.	191.	84972.	85.
E. 5.	184.	81858.	82.
F. 6.	177.	78743.	79.
G. 7.	168.	74740.	75.
H. 8.	159.	70735.	71.
K. 9.	148.	65842.	66.
L. 10.	135.	60059.	60.
M. 11.	122.	54275.	54.
N. 12.	108.	48047.	48.
P. 13.	92.	40929.	41.
Q. 14.	76.	33811.	34.
R. 15.	60.	26693.	27.
S. 16.	41.	18240.	18.
	2254.	1002758.	1000
S. 16.	43.	18240. Cent. 81629.	81
		99869.	100.

(a) Tabella riassuntiva dei dati e dei risultati sperimentali



(b) Modelli a catena di appendere

Figura 4.22: Analogia della catena sospesa di Poleni (Poleni, 1748)

anche l'influenza dell'attrito, delle imperfezioni costruttive dovute all'opera di "artigiani", ai danni esterni come fulmini e terremoti.

Diagnosi e Filosofia del Trattamento

Le raccomandazioni finali di Poleni hanno incarnato una filosofia di conservazione che sarebbe diventata standard nella conservazione architettonica: intervento minimo, rispetto per l'intento progettuale originale e monitoraggio sistematico del comportamento strutturale[7].

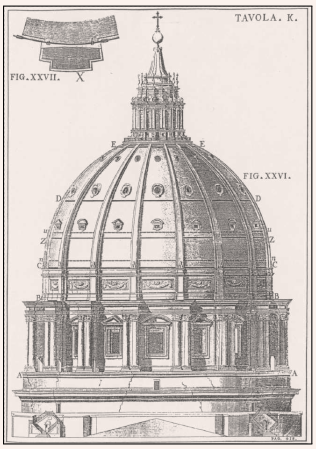
In sintesi, Poleni attribuiva il danno visto nella cupola a materiali edili difettosi e metodi di costruzione, piuttosto che a instabilità strutturale, raccomandando di ripristinare la cupola il più vicino possibile al suo stato originale, che includeva il riempimento delle crepe, soprattutto negli archi principali, con cunei in bronzo, specialmente pietre tagliate e intonaco fine.

La raccomandazione finale era di rafforzare la cupola con sei nuovi anelli di ferro, anche se la cupola non era in pericolo immediato di collasso, Poleni sentiva prudente rinforzarla contro ulteriori danni. 4.23a). Due nuovi anelli sono stati aggiunti anche intorno alla cupola stessa, e gli anelli vecchi dovevano essere ispezionati e monitorati.

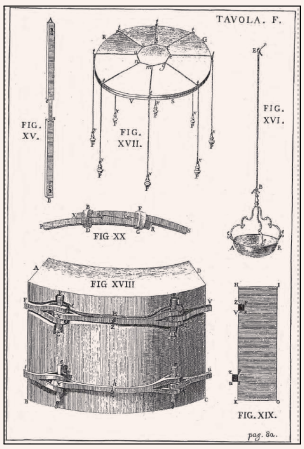
La proposta di Poleni di rafforzare la cupola con anelli di ferro riecheggiava le catene incorporate utilizzate

[7]Questi principi di conservazione furono poi ampiamente violati da Eugène Viollet-le-Duc (1814-1879), il cui completamento stilistico prescelto del XIX secolo "restorations" sull'autenticità storica. In particolare, Viollet-le-Duc ha aggiunto una guglia centrale a Notre-Dame de Paris che non era mai esistita nel design originale medievale, giustificando questa aggiunta completando quello che credeva che i costruttori originali avevano previsto. La sua filosofia di "restorazione" ha coinvolto la creazione di una versione idealizzata dell'architettura gotica piuttosto che preservare il tessuto storico reale, che ha prodotto risultati visivi, contraddicendo fondamentalmente i principi di Poleni di intervento minimo e di rispetto per l'intento progettuale originale. Il contrasto tra il conservatorismo scientifico di Poleni e l'intervento romantico di Viollet-le-Duc illustra l'evoluzione della filosofia di conservazione, con la pratica moderna generalmente favorendo l'approccio più restrittivo di Poleni.

COPIA DI REVISIONE



(a) Ubicazione dei 6 nuovi anelli



(b) Esperimenti sulle catene di ferro per circondare la cupola

Figura 4.23: Rinforzo della cupola (Poleni, 1748 PDF)

da Brunelleschi nella cupola di Santa Maria del Fiore a Firenze. Tuttavia, a differenza di Brunelleschi, che nascondeva le catene all'interno della muratura, gli anelli di Poleni erano visibili e monitorati esternamente, una decisione che rifletteva una filosofia in evoluzione della trasparenza strutturale e della manutenzione attiva.

Validazione sperimentale e controllo qualità

Fedele alla sua mente inquisitiva, Poleni aveva già testato barre di ferro prelevate da vari laboratori (Fig. 4.23b) per far fronte alle sollecitazioni del cerchio imposte dalla cupola, il rigore sperimentale riflette il suo più ampio impegno a porre in essere raccomandazioni in prove quantitative.

Sospettare l'impatto sulla pratica dell'ingegneria

Il quadro analitico di Poleni, che rappresenta le condizioni di equilibrio e le statistiche grafiche, ha anticipato le tecniche moderne nell'analisi dei limiti, e la sua dipendenza dagli analoghi fisici come le catene ponderate ha posto le basi per i progressi futuri nella teoria delle strutture murarie, in particolare da Gaudi §15.5.1.2 nel disegno della Sagrada Famiglia.

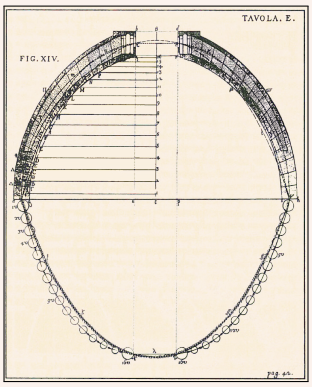
L'insistenza di Poleni sulla conservazione della costruzione originale, aggiungendo rinforzi discreti e reversibili, stabilirono principi che rimangono centrali alla conservazione architettonica, il suo approccio equilibrato al rispetto storico dell'integrità con il riconoscimento della necessità strutturale, una filosofia che continua a guidare la conservazione del patrimonio oggi.

Oggi lo studio di Poleni funge da caso di fondazione nell'educazione strutturale dell'ingegneria, dimostrando l'integrazione dell'analisi teorica, della validazione sperimentale e dell'applicazione pratica.

COPIA DI REVISIONE



(a) Modello catenoide di Gaudi per la Sagrada Familia (Dragicevic e Jansen, 2012)



(b) Modello a catena di fissaggio Polini

Figura 4.24: La sagrada di Gaudi familia

4.4.4 Santa Maria del Fiore: Trionfo dell'Intuizione di Ingegneria Brunelleschi

La cupola di Brunelleschi per Santa Maria del Fiore rappresenta forse il più grande successo individuale nell'ingegneria strutturale prima dell'era moderna. Costruita senza centrare e basandosi interamente sul controllo geometrico e sull'innovazione materiale, ha dimostrato come il genio empirico possa trascendere le apparenti limitazioni della tecnologia disponibile.

La sfida impossibile

Quando le autorità della cattedrale di Firenze annunciarono la loro intenzione di domare l'attraversamento ottagonale nel 1418, la maggior parte degli esperti considerava impossibile l'operazione, superando ogni cupola esistente, e la geometria ottagonale creava sfide tecniche senza precedenti.

Dimensioni Simbolica e Teologica

Dante's *Divina Commedia*, completata appena decenni prima della concezione della cupola, può aver influenzato la sua filosofia progettuale. La visione del poeta del Paradiso come sfere concentriche (*di giro in giro* per descrivere il Paradiso, che è immaginato come una serie di nove cerchi concentrici[8] (King, 2010 PDF).

Innovazione invisibile: il legame di spina di pesce

Una delle innovazioni più ingegnose del Brunelleschi rimase nascosta fino a recenti indagini archeologiche, la scoperta del suo schema di laterizio rivoluzionò la nostra comprensione di come la cupola raggiunse la stabilità strutturale durante la costruzione.

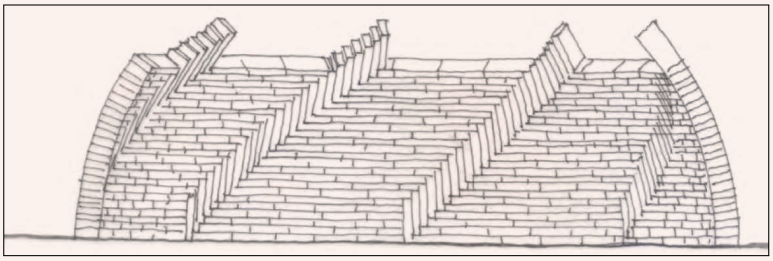
Poiché l'interno della cupola interna è stata intonacata e dipinta sopra, e la superficie esterna della cupola esterna è coperta da piastrelle, è stato difficile visualizzare il layout dei mattoni.

[8] In realtà Dante si riferisce a cerchi concentrici per la sua raffigurazione dell'inferno, e sfere concentriche per il Cielo.

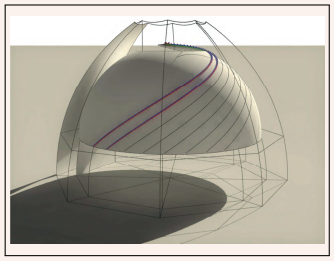
COPIA DI REVISIONE

Fu confermato che Brunelleschi usò un mattone noto come spina di pesce (*spina di pesce*), Fig. 4.25aSi deve notare che questo modello non era completamente nuovo, i Romani lo avevano usato prima, e si è speculato che i Romani usassero questo modello, chiamato *opuscolo specatum*, per resistere ai terremoti, ma solo per scopi decorativi, questo accordo avrebbe bloccato la debolezza del piano di mortaio, impedire che grandi sezioni di pareti si separano o si celano e si rullano al suolo, e eliminare i piani di taglio continui, impedendo così che le crepe si diffondano.

Nel sistema di Brunelleschi, ogni tre piedi o giù di lì, i mattoni verticali interrompono i corsi orizzontali, suddivisi in sezioni più corte, lunghe circa cinque mattoni. Mentre in costruzione, le sezioni corte erano collegate dai mattoni a destra a diversi strati completati sotto. Ogni fila di cinque mattoni, cioè, è stata bloccata in posizione dai mattoni verticali su entrambi i lati. *spina di pesce* sono stati spostati gli elementi, Fig. 4.25a, con conseguente efficacia Loxodrome[9] curva[10] (Pizzigoni, 2015)Fico. 4.25b.



(a) *Spina Pesce* layout mattoni (Corazzi, 2012)



(b) Curva di loxodrome (elissia sferica) (Pizzigoni, 2015)

Figura 4.25: *Spina pesce* e lossodrome mattone layout

Controllo geometrico senza supporti temporanei

La prossima grande sfida era quella di sollevare la cupola: come potrebbe essere controllata la curvatura delle otto pareti individuali durante la costruzione? Una deviazione di soli diversi centimetri in una di queste costole – ciascuna delle quali era di oltre 40 metri di lunghezza – cioè che la connessione non sarebbe stata raggiunta. Certo, le squadre di muratori avevano alcuni dispositivi di misura di base; tuttavia, la maggior parte di loro non era cambiata significativamente per mille anni e non erano fino alla sfida posta da questo.

Come la maggior parte delle cattedrali gotiche, quelle rinascimentali avevano una cupola proporzionata secondo la *Acuto* la cupola è composta da due archi circolari, ciascuno con un raggio pari a quattro-cinquesimi della campata, Fig. 4.26b. Non solo questo strutturalmente molto più efficiente della cupola semicircolare, poiché la spinta laterale è molto ridotta, ma ha anche espiato la forma della cupola. *Vesica Piscis*[11], o vescica di pesce—il pesce è un simbolo di Gesù di Nazaret.

[9] Un lossodromo (chiamato anche una linea di remob) è una curva su una sfera che interseca tutti i meridiani ad un angolo costante. In navigazione, rappresenta un percorso di costante cuscinetto bussola; su una proiezione di Mercator appare come una linea retta. Nella cupola di Brunschielleschi, questo modello a spirale ha impedito la formazione di piani di debolezza verticale continui che potrebbero compromettere l'integrità strutturale, mentre distribuendo carichi più efficacemente rispetto ai rettilinei.

[10] Una linea su una superficie che taglia tutti i meridiani ad angolo costante (ma non ad angolo retto); corrisponde alla distanza più breve tra due punti su una superficie sferica.

[11] Una composizione geometrica formata dall'intersezione di due cerchi con lo stesso raggio, intersecando in modo tale che il centro di ogni cerchio si trova sulla circonferenza dell'altro.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

Questo rimane a questo giorno una questione di molta speculazione, e molte teorie sono state proposte. Dopo aver esaminato molti di loro, ho trovato la metodologia sostenuta da Jones, Sereni e Ricci, 2010 il più plausibile.

Il metodo del cavo: precisione geometrica attraverso l'innovazione pratica

La soluzione di Brunelleschi al problema del controllo della curvatura rappresenta uno dei più eleganti esempi di geometria pratica della storia, il cui metodo di cordone ha trasformato i principi matematici astratti in una tecnica costruttiva praticabile.

Dopo la costruzione della piattaforma, Fig. 4.26c, sono identificate le posizioni delle costole maggiori e minori, Fig. 4.26d. Poi, per ogni lato dell'ottavago, Fig. 4.26e, due serie di corde (*Corsa di corda blanda*) sono stati posti:

Cavo fisso Punti di riferimento stabiliti estendendo i cordoni di lunghezza predeterminata *Acuto* centri. Questi cavi hanno bisegato angoli e allineati con catene diagonali sottostanti, garantendo la consistenza geometrica attraverso la struttura ottagonale.

Cavo fisso

1. Individuare il corrispondente *Acuto* di ogni estremo (A ed E).
2. Estendere un cavo di lunghezza (fisso) uguale al raggio dell'arco in modo che interseca l'asse verticale.
3. Il cavo deve bisecare l'angolo d'angolo (perché solo il bisector è allineato con il piano radiale verticale che passa attraverso la diagonale dell'angolo corrispondente sotto) e deve essere verticalmente sopra e allineato con la catena diagonale sottostante.
4. Goccia una linea di tubature (da E^1 e A^1) alla diagonale dell'angolo per garantire la bisezione.
5. La fine del cavo corrisponde alle intrados della cupola interna (A^1 e E^1).
6. Estendere ulteriormente per contrassegnare gli extrados della cupola esterna (A^4 e E^4).

Cavo mobile Disegnare una curva sulla piattaforma il cui punto è anche di 36 metri da un punto corrispondente sul segmento della cupola da costruire di fronte (cioè, tra due angoli adiacenti). La linea che unisce un punto sulla curva al segmento della cupola deve intersecare l'asse verticale centrale corrispondente.[1] è 36 m.13. Questa nuova curva è concava; assomiglia all'arco di un cerchio, ma è in realtà l'arco di un conchoid[12].

Questo arco può essere utilizzato per determinare la posizione dei mattoni e la curvatura del segmento della cupola che viene costruito di fronte.

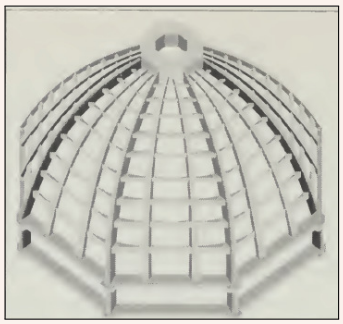
Mysteries e la ricerca in corso

Nonostante un'ampia indagine scientifica, diversi aspetti del metodo di Brunelleschi rimangono enigmatici. *Gualandrino* sistema e le tecniche precise per marcare l'asse centrale della cupola continuano a rompicapo ricercatori.

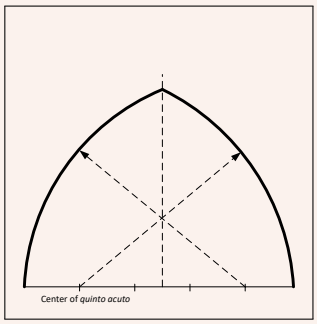
Questa ricostruzione si basa sullo studio di Jones, Sereni e Ricci, 2010, che ha costruito un modello di scala 1/5 della cupola per sostenere e affinare le loro teorie, tuttavia, diverse questioni importanti rimangono

[12] In particolare, si compone di tutti i punti che sono una distanza fissa da una determinata curva, misurati secondo linee che passano attraverso un punto fisso. Inventato dall'antica matematica greca Nicomedes (c. 280-210 BCE), il conchoid è stato originariamente utilizzato per risolvere i problemi geometrici classici come l'angolo trisezione.

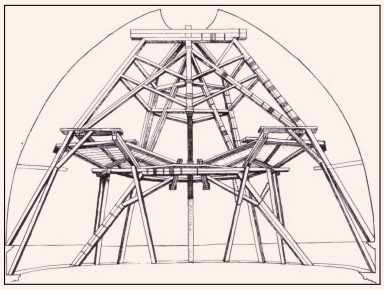
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE



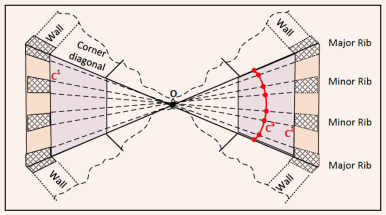
(a) Nove anelli orizzontali (King, 2010)



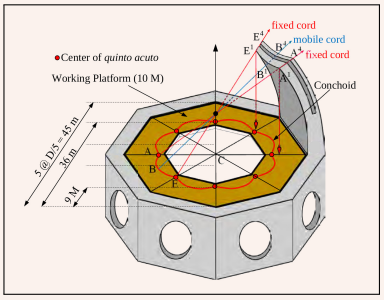
(b) *Quinto acuto*



(c) Infiammazione (Nelli e Ceccherelli, 1753)



(d) Vista sul piano (adattato da (Jones, Sereni e Ricci, 2010))



(e) Corda fissa e mobile (adattata da (Jones, Sereni e Ricci, 2010) di Y. Gakuhari)

Figura 4.26: Santa Maria del Fiore costruzione cupola

irrisolte. *Gualandrino* Era un dispositivo di sicurezza per i muratori? O era uno strumento geometrico per controllare il legame a parete indicando tre direzioni di allineamento? Un altro problema non risolto è come Brunelleschi ha segnato esattamente l'asse della cupola.

Innovazione meccanica: La vita rivoluzionaria

Dopo aver preso la decisione di lavorare senza alcuna struttura di centraggio, Brunelleschi ha dovuto affrontare un altro problema significativo: come portare materiali fino al cantiere e posizionarli con la precisione necessaria, che ha reso necessario il design di dispositivi specializzati con un livello di complessità meccanica senza precedenti.

Brunelleschi concepì un paranco ox-driven che consisteva in una cornice in legno, alla quale erano attaccati un certo numero di alberi orizzontali e verticali che si ruotavano l'un l'altro per mezzo di ruote intagliate di varie dimensioni. 4.27, è stato messo in moto da uno o due oxen a uno dei due oxen a uno dei due oxen a un tronco verticale, che è stato fornito con due ruote cogged, una in alto e l'altra in basso, o con una ruota molto più grande su un asse orizzontale. (King, 2010).

Fortezza strutturale: Rinforzo incorporato

A differenza della cupola di San Pietro, che richiedeva rinforzi retroattivi con anelli di ferro esterni, Brunelleschi ha incorporato catene orizzontali all'interno della sua muratura fin dall'inizio. Questo approccio

COPIA DI REVISIONE

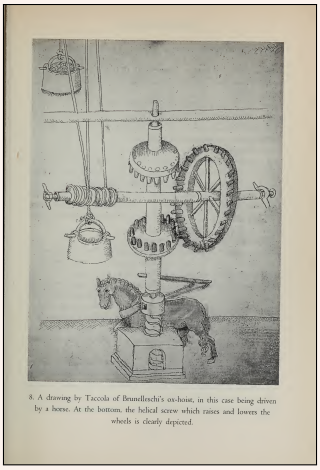


Figura 4.27: Il paranco ox-driven di Brunelleschi (King, 2010)

preventivo alla tensione del cerchio dimostra notevole intuizione strutturale e può spiegare perché la cupola di Firenze non ha mai richiesto un importante intervento strutturale.

Legacy of Rational Innovation

Infine, Brunelleschi è universalmente riconosciuto come l'inventore della prospettiva lineare rinascimentale ed è visto da molti come il primo grande esponente di *architettura razionale*La sua cupola, concepita e eseguita senza centrare, rappresenta non solo una meraviglia dell'ingegneria ma una sintesi di geometria, simbolismo e innovazione. A differenza della cupola di San Pietro, che richiedeva rinforzi retroattivi con anelli di ferro, Brunelleschi ha incorporato catene orizzontali all'interno della muratura della cupola per resistere alla tensione del cerchio fin dall'inizio, una strategia preventiva che avrebbe risparmiato Firenze la sorte di scoppio successivo.

Sintesi: Quattro lezioni in ambiente strutturale

I fati contrastanti di questi quattro grandi progetti architettonici illuminano i principi fondamentali dell'ingegneria strutturale che rimangono oggi rilevanti:

Beauvais: dimostra le conseguenze catastrofiche del superamento dei limiti empirici senza una adeguata comprensione dei meccanismi di fallimento, che si verificarono entrambi quando i costruttori spinsero oltre le comprovate buste strutturali.

Milano Il dibattito tra teoria e pratica ha stabilito i precedenti per il design basato su prove che continuano ad influenzare la pratica professionale.

San Pietro: L'approccio analitico di Poleni ha stabilito standard per l'indagine sistematica, la validazione sperimentale e la filosofia di conservazione che rimangono centrali all'ingegneria del patrimonio.

Firenze: Esemplifica come il pensiero innovativo possa trascendere evidenti limitazioni tecniche, la sintesi di Brunelleschi del controllo geometrico, dell'innovazione materiale e dell'ingegnosità meccanica ha raggiunto ciò che gli approcci convenzionali ritenuti impossibili.

COPIA DI REVISIONE

Insieme, questi studi di casi rivelano che l'ingegneria strutturale di successo richiede non solo competenze tecniche ma anche saggezza istituzionale, rigore metodologico e visione innovativa. Il dialogo tra la conoscenza empirica e la comprensione teorica – prima articolata nei dibattiti di Milano – continua a plasmare come ci avviciniamo a complesse sfide ingegneristiche di oggi.

4.5 Tavola sinottica

Tabella 4.3 è un riassunto cronologico di opere, strutture e analisi chiave riportate in questo capitolo.

Tabella 4.3: Riepilogo cronologico delle opere chiave

Anno	Autore/Costruttore	Libretto / Struttura	Sintesi dei contenuti
1144	Abate Suger	Cattedrale di San Denis (Como, 2013)	Prima struttura gotica; volte a coste, archi appuntiti, vetrate; segna il passaggio dalla massa romanica allo scheletro gotico.
1194–1250	Masons Maestro di Chartres	Cattedrale di Chartres (Como, 2013)	Ricostruito dopo il fuoco; miscela di romanico/gotico; matresse volanti primi; programma di vetrate maggiore.
1220–1288	Masons Maestri di Amiens	Cattedrale di Amiens (Elizalde, 2025)	Gotico completo più alto (vault 42,3 m); raffinato matrattamento; esemplare dell'Alto gotico.
1225... Incompleto	Variazione	Cattedrale di Beauvais (Elizalde, 2025)	48 m coro; collassa nel 1284 e 1573; caso forense sui limiti della snellezza gotica; successivamente analizza i difetti locali e la bracing.
1284	—	Beauvais 1284 Colpo (Heyman, 1967)	Insufficienza della volta del coro sotto carichi normali; l'analisi dei limiti mostra l'equilibrio iniziale; la ricostruzione dei moli raddoppiati, i volantini incurvati.
1386–1965	Variazione	Cattedrale di Milano (Duomo) (Ackerman, 1949)	Più grande gotico italiano; governo della fabbrica; dibattiti di elevazione (*ad un quadratum/ad un triangulum*); la critica di Jean Mignot.
1391	Stornalo	Scheme di elevazione (84 braccia) (Sebregondi e Schofield, 2016)	Altezza equilatero-triangolo razionalizzato per la misurabilità; soluzione ibrida Milanese influenzata.
1392	Heinrich Parler	Proposta in stile Colonia (96 braccia) (Ackerman, 1949)	Elevazione di sezione quadrata per precedente gotico tedesco.
c. 1225–1250	Villard de Honnecourt	Sketchbook (Sketchbook)*Carnet*) (De Honnecourt, 2006)	Regole di proporzione/geometria per i muratori; geometria sacra che informa la pratica.
1486	Matthias Roriczer	*Geometria deutsch* (Shelby, 1972)	Problemi pratici della geometria gotica; la definizione di poligoni, caviglie, finiali.
1590	Michelangelo (design)	La Cupola di San Pietro (López, 2006)	Dome a doppia conchiglia; successivamente la crepa precipita 18 °-c. indagini strutturali.

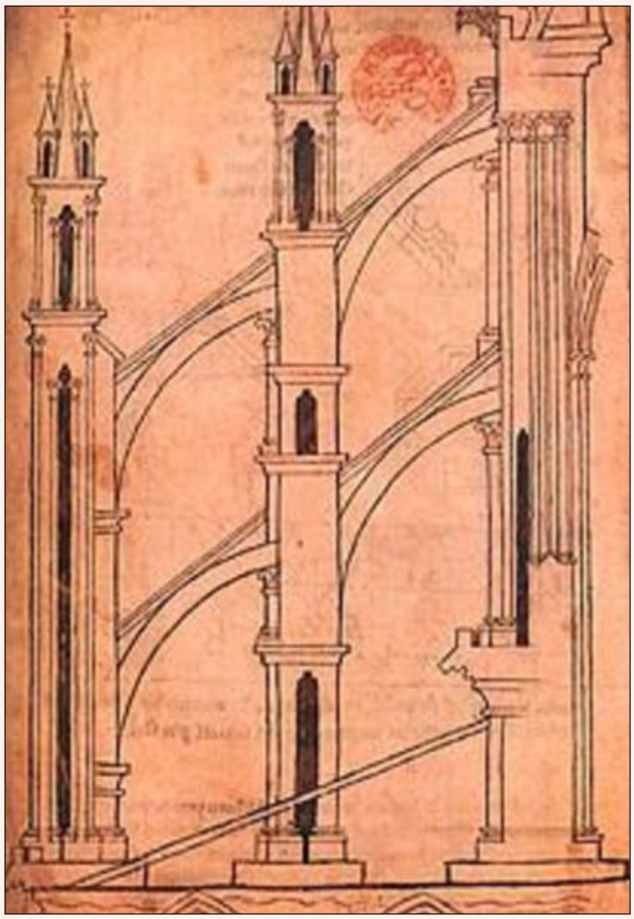
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Anno	Autore/Costruttore	Libretto / Struttura	Sintesi dei contenuti
1742–1748	Giovanni Poleni	Relazione sulla Cupola di San Pietro (Poleni, 1748)	Analisi del peso segmentale; esperimenti a catena sospesa; anelli di ferro consigliati.
1418–1436	Filippo Brunelleschi	Cupola di Santa Maria del Fiore (King, 2010)	Costruito senza centrare; legame spinale, geometria del cavo, ox hoist, catene incorporate.
c. 1750	Boscovich, Le Seur, Jacquier	St. Peter's Assessments (Benvenuto, 1991b)	Lettura meccanica precoce delle deformazioni; precursore della sintesi di Poleni.
1842	Robert Willis	*Sulla costruzione dei Vaults del Medioevo* (Willis, 1842)	Vista a costi inferiori; successivamente temperato da osservazione/analisi.
1854	Viollet-le-Duc	*Dictionnaire raisonne* (Viollet-le-Duc, 1854)	Vault-as-arches; nozione di muratura "elasticità"; influente lente 19 °-c.
1891	Léon Benouville	Analisi di Beauvais (Benouville, 1891)	Indica la deflettorazione laterale dei pilastri sotto spinta come driver di guasto.
1966	Jacques Heyman	*Il castello di pietra* (Heyman, 1966)	Analisi dei limiti di plastica per la muratura; tre ipotesi; criterio di sicurezza della linea di spinta.
1967	Jacques Heyman	Studio Beauvais (Heyman, 1967)	Conferma la stabilità iniziale; probabile problema di difetto locale / sequenza.
1973	Robert Mark	Studi di Vault Fotoelastic (Mark, Abel e O'Neill, 1973)	Modelli epossidici visualizzano percorsi di spinta 3D e concentrazioni di stress.
2002	John Ochsendorf	Dottore: *Colpo delle strutture murarie* (Ochsendorf, 2002)	La geometria cambia come causa di fallimento; cinematica rigida-blocco; meccanismi gotici.
2005	Nikolinakou et al.	Gomma volante Geometria (Nikolinakou, Tallon e Ochsendorf, 2005)	Geometria idealizzata; modalità di frantumazione/sliding/instabilità; effetti dei parametri.
2016	Kim et al.	FE di morsi volanti (Kim, 2016)	Notre-Dame, Amiens, Saint-Etienne; correlazioni di geometrie-stress, vulnerabilità.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Villard de Honnecourt, Sketch di matresse volanti (c.1230)

Le prime statiche grafiche—forze esterne e guidate a terra.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 5

L'ascesa del pensiero scientifico

Abstract

Questo capitolo ripercorre l'emergere di ragionamenti scientifici dalle sue prime manifestazioni nell'età d'oro islamica alla sua cristallizzazione durante la Rivoluzione scientifica e il suo consolidamento istituzionale nell'illuminismo. Bayt al-Hikma (Casa della Sapienza) a Baghdad, dove gli studiosi conservarono e ampliarono il patrimonio scientifico dell'antichità. La narrazione si sposta poi verso l'Europa moderna, evidenziando come l'autorità di Aristotele e la dottrina teologica sia stata sostituita da osservazioni empiriche, modelli matematiche e sperimentazione sistematica. Accademia dei Lincei *e la* Accademia del Cimento *pioniera dell'inchiesta scientifica collaborativa, che si è consolidata con la creazione di corpi scientifici duranti come la* Royal Society of London *e la* Académie des Sciences *Il capitolo rivela come questo periodo abbia stabilito un modello universale per il progresso scientifico, dall'osservazione precisa attraverso il riconoscimento empirico del modello alla comprensione teorica fondamentale, esemplificato nella progressione dei dati astronomici di Brahe attraverso le leggi di Kepler alla sintesi di Newton. L'illuminismo ha amplificato questo cambiamento, estendendo la mentalità scientifica all'educazione tecnica e alle applicazioni pratiche di ingegneria.*

5.1 Introduzione 85
5.2 Islamico: Bayt al-Hikma 86
5.3 La rivoluzione scientifica 88
5.3.1 Fondazioni del Nuovo Metodo 88
5.3.2 Scoperte rivoluzionarie e nuovi metodi 89
5.3.3 Istituzioni scientifiche 92
5.3.4 Sintesi e istituzionalizzazione 93
5.4 Illuminismo: un ponte culturale . . 95
5.4.1 La diffusione del pensiero scientifico 96
5.4.2 L'ascesa dell'istruzione tecnica: le scuole di ingegneria militare 96
5.4.3 Dalla filosofia naturale alla scienza applicata 96
5.5 Conclusioni 97

5.1 Introduzione

L'emergere di ragionamento scientifico segna uno degli episodi più trasformativi nella storia intellettuale umana. Questo capitolo esamina come, tra il nono e il Settecento, l'umanità progressivamente spostata da una visione del mondo fondata sull'autorità, la tradizione e la speculazione verso una basata sull'osservazione, la sperimentazione e la formalizzazione matematica.

COPIA DI REVISIONE

La storia inizia nell'età d'oro islamica, dove centri come la *Bayt al-Hikma* La rivoluzione scientifica ha distrutto la presa di dottrine aristoteliche e teologiche, sostituendole con metodi empirici e ragionamenti quantitativi. Le figure chiave come Galileo, Descartes, Bacon e Newton non hanno semplicemente proposto nuove teorie, hanno modificato fondamentalmente come la conoscenza stessa è stata costruita.

La stessa trasformazione è stata la creazione di istituzioni scientifiche. *Accademia dei Lincei* e la *Accademia del Cimento* l'indagine collaborativa pionieristica basata sull'osservazione e sull'esperimento, la cui eredità è stata cementata dalla creazione della *Royal Society of London* e la *Académie des Sciences*, che ha istituzionalizzato l'inchiesta scientifica e ha fornito un quadro durevole per il suo progresso.

L'illuminismo ha amplificato questa trasformazione, diffondendo la mentalità scientifica oltre la filosofia naturale nella società, nell'istruzione e nella tecnologia, e questo cambiamento ha stabilito il quadro intellettuale che avrebbe dato origine all'ingegneria moderna, alla meccanica e all'analisi formale delle strutture, che ripercorre quella ascesa della ragione.

5.2 Islamico: Bayt al-Hikma

Il *Bayt al-Hikma* (Casa della Sapienza) è stato un hub intellettuale e culturale fondato a Baghdad durante il periodo *Califfato abbaside*, principalmente sotto il regno di Califfo *Harun al-Rashid* (786–809 CE) e fiorente sotto il suo successore, *Al-Ma'mun* (813–833 CE). Emerse nel IX secolo, ben prima del *Accademia dei Lincei* a Roma, spesso considerata come la prima accademia moderna delle scienze.

Serve come biblioteca, istituto di traduzione e centro di ricerca, diventando un simbolo dell'età d'oro islamica e un punto focale per la conservazione, l'arricchimento e la diffusione della conoscenza.



(a) Manoscritto con raffigurazione di Yahya ibn Vaseti (*Bibliotheque Nationale de France*)

(b) The Book of Ingenious Devices, Encyclopædia Britannica

Figura 5.1: Bayt al-Hikma

L'emergere di Baghdad come epicenter intellettuale non è stato un incidente. Strategicamente situato all'incrocio di importanti rotte commerciali che collegano Asia, Africa e Europa, la città è diventata non solo un hub commerciale, ma anche un melting pot di idee. I governanti abbaside, in particolare Al-Ma'mun,

COPIA DI REVISIONE

promossero attivamente la conoscenza come un pilastro chiave della governance, intrecciando l'indagine scientifica con lo statocraft.

Originariamente fondato come deposito per libri e manoscritti, il *Bayt al-Hikma* Evoluto rapidamente in un centro vibrante che ha attirato studiosi di diversi sfondi — musulmani, cristiani, ebrei e Zoroastriani simili. Lavorando in collaborazione, questi studiosi hanno tradotto testi scientifici, filosofici e medici da greco, siriaco, persiano, sanscrito e altre lingue in arabo, rendendo la conoscenza delle antiche civiltà accessibili al mondo islamico.

Il movimento di traduzione guidato dal *Bayt al-Hikma* fu fondamentale nel preservare e trasmettere le opere di pensatori greci chiave come Aristotele, Platone e Ippocrate, insieme ai contributi matematici e astronomici di Euclide e Tolomeo. Tuttavia l'istituzione era molto più di un ufficio di traduzione, è stato un crogiolo per il progresso scientifico originale. *Al-Khwarizmi* gettò le basi dell'algebra, mentre si fecero notevoli progressi in medicina, astronomia e ottica.

I fratelli Banu Musa, figli di un astronomo a Baghdad, progettarono alcune delle prime macchine programmabili, tra cui sofisticati dispositivi di controllo automatico e innovazioni meccaniche descritte nelle loro *Libro di dispositivi ingegnosi*, (Banū Mūsā ibn Shākir, 0850). Trattamenti scientifici prodotti presso *Bayt al-Hikma* in seguito sarebbe tradotto in latino e filtrato in Europa, vedendo sviluppi che culminarono nel Rinascimento, Fig. 5.2.

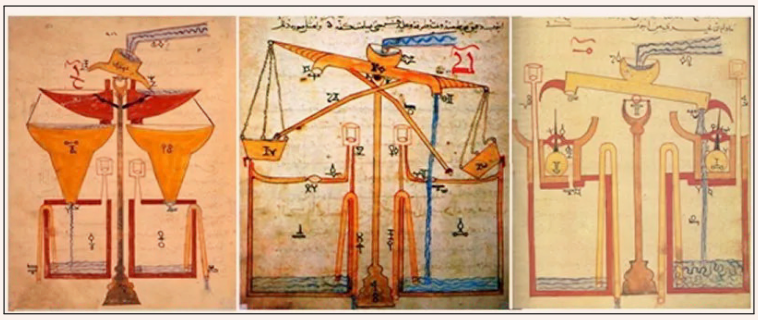


Figura 5.2: Tre flauti perpetui, a sinistra dei secchi inclinabili, equilibrio centrale e sui carri a destra.

Oltre la borsa di studio in senso classico, il *Bayt al-Hikma* Ha ospitato dibattiti e incoraggiato il dialogo interdisciplinare tra gli studiosi che spaziano dalla filosofia e dalla teologia alla matematica e alle scienze naturali, e questa apertura intellettuale riflette l'ethos più ampio dell'età d'oro islamica, dove l'inseguimento della conoscenza è stato visto come un'impresa universale che trascende i confini culturali, etnici e religiosi.

Sotto il patrocinio di *Al-Ma'mun*Al-Ma'mun non solo commissionò traduzioni di importanti opere greche, spesso sotto la sponsorizzazione reale, ma anche avviarono progetti scientifici empirici, tra cui una misura notevolmente accurata della circonferenza terrestre, raggiunta da squadre di astronomi inviati per misurare archi meridiani nelle pianure di Sinjar e vicino Kufa.

In un momento in cui gran parte dell'Europa si stava aggrappando alla stagnazione intellettuale del primo periodo medievale, i cosiddetti "Dark Ages" (centri come i "Dark Ages") *Bayt al-Hikma* La distribuzione asimmetrica della produzione di conoscenza persiste per secoli fino alla riscoperta di molti di questi testi nell'Europa medievale, che regnava l'inchiesta scientifica.

Il declino del *Bayt al-Hikma* coincise con l'abbandono del Califfato abbaside, aggravato dall'instabilità politica e dalla difficoltà economica.ĈE ha consegnato un colpo catastrofico, con gran parte dei contenuti della biblioteca distrutta o dispersi.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Nonostante la sua distruzione, l'eredità del *Bayt al-Hikma* Ha svolto un ruolo fondamentale nel preservare la conoscenza antica e trasmetterla alle civiltà successive, soprattutto in Europa, dove ha contribuito a porre le basi per il Rinascimento. *Bayt al-Hikma* rimane un simbolo duraturo della curiosità intellettuale e della sintesi culturale, che rappresenta uno dei periodi più dinamici della storia umana.

Il risultato scientifico in Medio Oriente successivamente è diminuito e non è mai tornato pienamente alle altezze raggiunto durante l'età d'oro islamica.Di tutti i premi Nobel nelle scienze premiate dal 1901, solo due sono andati a destinatari della regione (The Economist, 2025).

5.3 La rivoluzione scientifica

5.3.1 Fondazioni del Nuovo Metodo

5.3.1.1 La fine della filosofia naturale

Fino alla Rivoluzione Scientifica, la presa di Aristotele (e in misura minore la Bibbia) era così stretta che soffocava il progresso della fisica; quando Galileo nacque, non c'era una cosa come quella di *scienza* nel senso moderno, solo *Filosofia naturale*[1] Al momento della morte di Galileo, la fondazione della scienza moderna era stata saldamente stabilita.

Vale la pena notare che i semi di questa trasformazione erano già presenti nel tardo Medioevo. Il pensatore francese Nicole Oresme (c. 1320–1382) Ha sviluppato metodi grafici per rappresentare varie quantità, inventando in modo essenziale il concetto di tracciare variabili nel tempo, e ha formulato il teorema della velocità media, che in seguito è diventato associato a Galileo. Oresme ha anche intrattenuto la possibilità che la Terra possa ruotare sul suo asse e ha sostenuto che tale movimento era indistinguibile dalla rotazione dei cieli, anche se ha respinto il punto interrogativo in ultima analisi, egli ha respinto

5.3.1.2 Il ruolo della matematica e l'illuminismo

L'illuminismo ha prima allentato questa presa aristotelica e ha permesso ai filosofi naturali di impegnarsi con il mondo attraverso l'osservazione e la sperimentazione. Poco dopo, i matematici hanno fornito gli strumenti formali necessari per ridurre i fenomeni fisici complessi alle loro essenzialità nude, consentendo ai fisici di reindirizzare il loro focus verso nuovi problemi (Truesdell, 1968 PDF).

5.3.1.3 Francesco Bacon e la nascita dell'Empiricismo

L'idea che la sperimentazione sia un mezzo di scoperta affidabile è diventata saldamente consolidata, tanto che deve molto agli scritti dell'avvocato inglese Francis Bacon (1561–1626), (Bacon, 2000) Bacon ha respinto le metodologie fondate in una logica, speculazione teologica o matematica incontrollata:

> La Filosofia Naturale non è ancora da trovare sincera, ma è infettata e corrotta: nella scuola di Aristotele da Logica; nella scuola di Platone, da Teologia Naturale; nella seconda scuola di Platone, quella di Proclus e altre, da Matematica, che dovrebbe limitare la Filosofia naturale, e non generarla o originarla.

[1] Newton's *Filosofia Naturalis Principia Mathematica* traduci a *Principi matematici della filosofia naturale*, riflettendo l'uso allora attuale della "filosofia naturale" come lo studio sistematico della natura.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Bacon, 2000 Novum Organum

.

Bacon era scettico di ragionare da preconcetti preconcetti con insufficienti prove:

> ...nella preparazione del soggetto-materia di Filosofia, gli uomini o disegnano molto da alcuni casi, o un po' da un gran numero; in modo che, in entrambi i casi, la filosofia si fonda su una base troppo stretta di esperienza e storia naturale, e dogmatizza su prove troppo insufficienti
>
> Bacon, 2000 Novum Organum

Rifiutando l'autorità della teologia, Bacon ha avviato un cruciale scienza e religione (separazione). La sua convinzione che la scienza dovrebbe servire l'umanità è catturata nella frase la conoscenza è il potere. Questa ethos ha risuonato le classi industriali emergenti dell'Inghilterra.

5.3.1.4 Razionalismo: Approccio deduttivo di Cartesio

Mentre Boyle e Hooke hanno avanzato l'empirismo Baconian, Descartes ha sostenuto la deduzione razionale. Descartes ha sostenuto che la conoscenza sensoriale è inaffidabile e che la verità deriva dal ragionamento logico. Nonostante le loro differenze metodologiche, sia Descartes che Bacon hanno concordato che la scienza dovrebbe essere universale, verificabile e separata dalla teologia.

5.3.1.5 La trasformazione delle università

La rivoluzione scientifica coincise con una trasformazione graduale ma fondamentale delle università europee dai centri di apprendimento scolastico alle istituzioni che abbracciano l'indagine empirica. Le università medievali erano state dominate dal metodo scolastico – indagine teologica e filosofica sistematica basata sulla riconciliazione della filosofia aristotelica con la dottrina cristiana attraverso argomentazioni logiche.

Il nuovo metodo scientifico ha messo in discussione questo approccio privilegiando l'osservazione e la sperimentazione sull'autorità testuale. Le università hanno gradualmente iniziato a stabilire sedie in matematica, astronomia e filosofia naturale che ha sottolineato la ricerca empirica. L'Università di Padova, dove Galileo ha insegnato, è diventato particolarmente rinomata per l'enfasi della sua scuola medica sull'osservazione anatomica diretta e la sua apertura a nuove idee astronomiche.

Questa trasformazione non era né uniforme né immediata, molte università rimasero bastioni dell'apprendimento tradizionale nel XVIII secolo, ma l'accettazione graduale della metodologia sperimentale all'interno dei curricula universitaria forniva la legittimità istituzionale per la nuova scienza e aiutò a formare generazioni successive di studiosi empiricamente di mentalità. Scolastica medievale a presto empirico moderno rappresenta una base istituzionale cruciale per il continuo sviluppo della conoscenza scientifica.

5.3.2 Scoperte rivoluzionarie e nuovi metodi

5.3.2.1 Astronomia osservazionale: Tycho Brahe

Tycho Brahe (1546-1601) ha rivoluzionato l'astronomia non attraverso l'innovazione teorica ma attraverso una precisione osservazionale senza precedenti. Lavorando dal suo osservatorio Uraniborg sull'isola di Hven, Brahe ha compilato i dati astronomici pre-telescopici più accurati della storia, le sue meticolose osservazioni sulle posizioni planetarie, in particolare su Marte nel corso dei decenni, hanno raggiunto un'accuratezza di circa 2 minuti di arco, osservabili a occhio nudo.

COPIA DI REVISIONE

Modello cosmologico ibrido di Brahe, il sistema ticonico, Anche se in definitiva non corretto, questo modello rappresentava un passo intermedio cruciale tra geocentrismo tolemaico e eliocentrismo copernico. Più importante, l'enfasi di Brahe sulla misurazione di precisione e la raccolta di dati sistematici ha stabilito nuovi standard per l'astronomia empirica. Indice[p1]geocentrismo

Le sue osservazioni della supernova del 1572 (oggi nota come supernova di Tycho) sfidarono la dottrina aristotelica dell'immutabilità celeste, dimostrando che i cieli potevano cambiare davvero. Questa sfida empirica per ricevere la saggezza esemplificava la dipendenza del metodo scientifico emergente dall'osservazione sull'autorità.

5.3.2.2 Astronomia matematica: Johannes Kepler

Johannes Kepler (1571–1630) trasformò i dati osservazionali di Brahe nelle leggi matematiche che rivoluzionarono la nostra comprensione del moto planetario. Inevitando i dati di Brahe dopo aver servito come suo assistente, Kepler trascorse anni cercando di conciliare le osservazioni con orbite circolari — il presunto movimento celeste «perfetto» fin dall'antichità.

La sua scoperta avvenne con la consapevolezza che le orbite planetarie sono ellittiche, non circolari. Le tre leggi del moto planetario di Keplero, formulate tra il 1609 e il 1619, provvidero alla prima accurata descrizione matematica del comportamento planetario:

1. **Diritto di Ellipses**: I pianeti si muovono in orbite ellittiche con il Sole ad un solo obiettivo
2. **Diritto delle Pari Aree**: Una linea che collega un pianeta al Sole spazza le aree uguali in tempi uguali
3. **Diritto armonico**: Il quadrato del periodo orbitale di un pianeta è proporzionale al cubo del suo asse semi-major

Queste leggi rappresentavano un profondo cambiamento concettuale: le relazioni matematiche, derivate da dati empirici, potevano descrivere fenomeni naturali con precisione senza precedenti. Il lavoro di Kepler dimostrava che la bellezza matematica non era in preconcettibile perfezione geometrica ma nella semplicità elegante delle leggi naturali.

5.3.2.3 Dall'osservazione alla teoria: un modello per il progresso scientifico

Questa progressione è notevolmente analoga alla moderna meccanica sperimentale. In primo luogo, raccogliamo dati osservazionali precisi (Brahe); poi identifichiamo relazioni empiriche e schemi matematici all'interno di quei dati (Kepler); e infine sviluppiamo un quadro teorico fondamentale che spiega e predice le relazioni empiriche (Newton).

Questo modello – osservazione, correlazione empirica, comprensione teorica – si ripete in tutta la storia della meccanica e dell'ingegneria.Le osservazioni accurate di Hooke sulla deformazione della molla portarono alla sua legge empirica relativa alla forza e allo spostamento, che in seguito trovò la messa a terra teorica nella meccanica continuum e nella teoria dell'elasticità. Nell'ingegneria strutturale, secoli di regole empiriche di progettazione derivate da esperienze di costruzione e osservazioni di fallimento sono stati infine sostituiti da analisi strutturali razionali basate su principi fondamentali di equilibrio, compatibilità e comportamento materiale. Allo stesso modo, gli esperimenti sistematici di Coulomb con attrito e pressioni terrestri hanno portato rapporti empirici che in seguito hanno ricevuto la fondazione teorica attraverso i principi della meccanica del suolo e della teoria della plasticità.

Anche nella meccanica dei fluidi, la progressione ha: gli esperimenti di Torricelli con flusso fluido, le osservazioni empiriche di Bernoulli delle relazioni di pressione e velocità, e numerose altre correlazioni sperimentali sono state infine unificate sotto il quadro teorico delle equazioni Navier-Stokes. La meccanica computazionale moderna segue questa stessa progressione—la validazione sperimentale guida modelli

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

empirici, che sono progressivamente sostituiti da approcci più fondamentali come la nostra comprensione teorica.

Il metodo degli elementi finiti rappresenta in sé il culmine di questo processo: sofisticati quadri teorici implementati computazionalmente, ma che richiedono ancora validazione sperimentale, verifica e calibrazione empirica.

5.3.2.4 Rivoluzione anatomica: Andreas Vesalius

Andreas Vesalius (1514–1564) piorò lo studio empirico dell'anatomia umana, sfidando quindici secoli di conoscenza medica basata su autorità. Il suo capolavoro *De Humani Corporis Fabrica* (Sulla stoffa del corpo umano, 1543) (Vesalius, 1998–2009) era basato sulla dissezione umana sistematica piuttosto che sulla dipendenza da testi antichi, in particolare quelli di Galen.

Vesalius ha scoperto numerosi errori in Galenic[2] anatomia—la mascella è costituita da un osso piuttosto che da due, il fegato ha due lobi anziché cinque, e il setto del cuore non è perforato; queste correzioni potrebbero sembrare minori, ma rappresentavano una rivoluzione metodologica fondamentale: l'osservazione diretta che tromba l'autorità testuale.

Il suo approccio ha stabilito il principio che la comprensione dei fenomeni naturali richiede un'indagine diretta piuttosto che una deferenza alle autorità classiche. *De Humani Corporis Fabrica*, combinando la padronanza artistica con la precisione scientifica, ponendo nuovi standard per la comunicazione scientifica e aiutando a diffondere la metodologia empirica in tutta la medicina europea.

5.3.2.5 Sistema circolatorio: William Harvey

William Harvey (1578–1657) esemplificò il nuovo metodo scientifico attraverso la sua scoperta della circolazione sanguigna, pubblicato in *Exercitatio Anatomica de Motu Cordis et Sanguinis in Animalibus* (1628) (Harvey, 1628). Il lavoro di Harvey rappresentava l'applicazione di successo del ragionamento quantitativo ai fenomeni biologici.

Grazie ad un'attenta osservazione e misura, Harvey ha calcolato che il cuore pompa circa 540 libbre di sangue all'ora, molto più di quanto il corpo possa produrre o consumare secondo la teoria Galenica prevalente. *il sangue deve circolare piuttosto che essere continuamente prodotto e consumato*.

La metodologia di Harvey, combinando l'osservazione anatomica, l'analisi quantitativa e la verifica sperimentale, è stata un modello per la ricerca biologica empirica, e il suo lavoro ha dimostrato che i nuovi metodi scientifici sviluppati nell'astronomia e nella fisica potrebbero dare una visione altrettanto rivoluzionaria delle scienze della vita.

5.3.2.6 Galileo: La lingua matematica della natura

Per uno schizzo biografico di Galileo, vedi §6.6.2.

Galileo ha introdotto un'altra innovazione metodologica, piuttosto che cercare cause finali, Galileo si è concentrato sulla descrizione matematica dei fenomeni osservabili. *Le Meccaniche* (Galilei, 1594), un libro di testo per gli ingegneri, ha dimostrato come le macchine obbediscono alle leggi quantitative, prefigurando la sua affermazione successiva che:

[2] La teoria Galenica si riferisce agli insegnamenti medici di Claudius Galen (c. 129–216 CE), che dominavano la medicina europea per oltre 1.400 anni. Secondo la dottrina Galenica, il sangue veniva continuamente prodotto dal fegato dal cibo e consumato dai tessuti del corpo, muovendosi in un movimento di back-and-forth tidale piuttosto che circolare.

COPIA DI REVISIONE

> Filosofia [Natura] è scritto in questo enorme libro che è continuamente aperto davanti ai nostri occhi (Intende l'universo), ma non può essere compreso se non si comprende prima il linguaggio e riconosce i personaggi con cui è scritto.
>
> Galilei, 1623 Il Saggiatore

Le osservazioni telescopiche di Galileo hanno frantumato la credenza aristotelica in un cosmo immutabile. La sua avidità dell'eliocentrismo ha portato al suo infame processo e arresto di casa nel 1633, ma la sua eredità ha stabilito il metodo ipotetico-deduttivo: formulare un'ipotesi, dedurre le sue conseguenze, e verificarle con esperimento.

5.3.3 Istituzioni scientifiche

5.3.3.1 Italia: I Lincei

Meno spesso associato alla Rivoluzione Scientifica è il primo contributo di un gruppo di italiani, mentre non articolavano le basi filosofiche della Rivoluzione Scientifica come facevano i descarti e i bacon, erano i primi ad abbracciarla e metterla in pratica.

Nel 1603, un gruppo di studiosi fondarono il *Accademia dei Lincei* (Accademia dei Lynxes), considerata la prima accademia scientifica moderna, il suo nome portò una doppia allusione, a Lyncaeus, l'Argonaut acuto e alla lincis, famosa per la sua visione acuta.(Freedberg, 2003)

I Lincei respinsero deliberatamente la saggezza canonica quando si scontrarono con l'osservazione e con l'evidenza, il loro impegno a scrutinio visivo ed empirico li mise all'avanguardia di quello che sarebbe diventato il moderno metodo scientifico, nello stesso momento in cui Francesco Bacon, indipendentemente dall'Inghilterra, stava formulando la sua filosofia empirica.(Freedberg, 2003) La loro sfida per l'autorità ricevuta li portò inevitabilmente in conflitto con le forze conservatrici della Chiesa cattolica.

Questo conflitto è epitomizzato nella carriera di Galileo Galilei, il membro più famoso dei Lincei. Quando Galileo ha rivolto il suo telescopio ai cieli, la cosmologia aristotelica, abbracciata dalla Chiesa come verità dottrinale, ha cominciato a crollare. La Terra ha perso la sua posizione privilegiata al centro del cosmo, dando spazio al modello eliocentrico. Durante gli anni più produttivi di Galileo, il sostegno dell'Accademia Lincea fu cruciale, e tra l'altro giovò della protezione di papa Urbano VIII e del nipote Francesco Barberini, che si era fatto un Linceano, ma l'eventuale ritiro del sostegno della famiglia Barberini si rivelò catastrofico: fu Papa Urbano VIII che in definitiva convocò Galileo prima dell'Inquisizione.

Il *Accademia dei Lincei* È stato un primo, anche se spesso sottovalutato, che ha contribuito alla rivoluzione scientifica, che sopravvive a questo giorno come accademia nazionale italiana, un vivace centro di dialogo tra scienziati italiani e internazionali.

5.3.3.2 Italia: La *Cimento*

Il *Accademia del Cimento* (Accademia di Sperimentazione) fu una società scientifica fondata a Firenze nel 1657 con il patrocinio del Granduca Ferdinando II de' Medici e del Principe Leopoldo de' Medici, tra le prime istituzioni europee dedicate esplicitamente alla scienza sperimentale e simboleggia un decisivo passaggio dalla filosofia naturale speculativa all'indagine empirica sistematica. *Provando e riprovando* ("Testing and Retesting"), incapsula il suo rigoroso impegno nella sperimentazione e nel rifiuto di affidamento sull'autorità o ragionamento puramente teorico.

L'accademia comprendeva diversi studiosi di rilievo come Vincenzo Viviani, studente di Galileo; Francesco Redi, pioniere di biologia sperimentale; Evangelista Torricelli, inventore del barometro; Giovanni Alfonso

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Borelli, ricercatore di biomeccanica precoce; e Carlo Rinaldini. Questi membri hanno condotto approfondite indagini sulla pressione dell'aria, sulle proprietà di vuoto, di espansione termica e meccanica dei fluidi.

I loro esperimenti hanno incluso studi su come la pressione dell'aria influisce sul punto di ebollizione dei liquidi, le indagini sulla comprimabilità dell'aria e le osservazioni sul trasferimento del calore, cercando di quantificare i fenomeni naturali in modi che si sono spostati in modo decisivo oltre il ragionamento speculativo.

Mentre il *Accademia dei Lincei* scienza osservazionale combinata con ampie ambizioni filosofiche, *Cimento* rappresentava un restringimento della concentrazione verso i metodi empirici, basati su strumenti che definivano la scienza moderna.

Anche se *Accademia del Cimento* Dopo solo un decennio, circa il 1667, il suo impatto sulla comunità scientifica fu notevole, e la sua ethos del rigore empirico contribuì a consolidare il metodo scientifico come approccio normativo all'indagine. *Saggi di naturali esperienze ingrassare nell'Accademia del Cimento* (Essays on Natural Experiments), (Accademia del Cimento, 1667) che divenne un testo fondamentale nella storia della scienza sperimentale.

Fortemente influenzati dalle metodologie di Galileo, i membri dell'Accademia si consideravano custodi della sua eredità, sottolineando che l'osservazione e la sperimentazione, non la metafisica, dovrebbero essere la pietra angolare della conoscenza scientifica.

Nonostante la sua breve vita, il *Accademia del Cimento* ha posto basi critiche per la creazione di società scientifiche successive, tra cui *Royal Society of London* e la *Académie des Sciences* in Francia. Queste istituzioni formalizzate e ampliate i principi sperimentali pionieri del Cimento, contribuendo ad incorporare il metodo scientifico nel cuore della scienza moderna.

5.3.4 Sintesi e istituzionalizzazione

5.3.4.1 Newton: La sintesi dei metodi

Per uno schizzo biografico di Newton, vedi §6.6.7.

Isaac Newton (1642–1727), nato l'anno in cui Galileo morì, sintetizzava questa metodologia. *Filosofia Naturalis Principia Mathematica*
Indice[p1]Filosofia Naturalis Principia Mathematica@*Filosofia Naturalis Principia Mathematica* (Newton, 1687) deduzione matematica incarnata applicata alla legge fisica, mentre la sua *Ottimizzazione* (Newton, 1704) La duplice impostazione di Newton rimane la pietra angolare della moderna pratica scientifica. 5.1 riassume il cambiamento concettuale portato dalla rivoluzione scientifica.

5.3.4.2 La Royal Society e la *Académie des Sciences*

Verso la metà degli anni '40, le idee di Bacon si erano diffuse ampiamente, culminando nella fondazione della Royal Society di Londra per migliorare la conoscenza naturale nel 1660, con il suo motto *Nullius in verba* Lord Brouncker divenne il suo primo presidente, con Robert Boyle (1627–1691) che fungeva da membro influente e presidente in carica. Boyle, ispirato da Galileo e Descartes, fu uno sperimentatore dedicato e pioniere nello studio dei gas, dimostrando che una piuma e un grumo di piombo cadono allo stesso ritmo di un vuoto, convalidando gli esperimenti di Galileo.

Boyle nominato Robert Hooke[3] (1635–1703) come Curatore degli Esperimenti. Hooke, un brillante polimath e creatore di strumenti, incarna lo spirito empirico. *Micrografia*, (Hooke, 1665) si apre con:

[3] Fare riferimento a §6.6.6 per una bio di Hooke.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

> La verità è che la scienza della natura è già stata troppo lunga fatta solo un'opera del cervello e della fantasia, ed è ora giunto il momento di ritornare alla piantezza e alla solidità delle osservazioni sulle cose materiali ed ovvie.
>
> Hooke, 1665 Micrographia: or Some Physiological Descriptions of Minute Bodies Made by Magnifying Glasses with Observations and Inquiries Thereupon

Nel 1676, Hooke pubblicò la legge lineare dell'elasticità—*Legge di Hooke*— dimostrando che per piccole deformazioni, la tensione è proporzionale allo stress; questo concetto fondamentale nell'elasticità rimane critico e le relazioni costitutive come questa sono ancora determinate sperimentalmente oggi.

La fondazione della *Académie des Sciences* a Parigi nel 1666 segnarono l'istituzionalizzazione permanente della scienza insieme alla Royal Society, che formalizzava l'ethos della rivoluzione scientifica: la dipendenza dall'osservazione empirica, dalla sperimentazione e dall'analisi matematica.

Con i motto come la Royal Society *Nullius in verba* («Prendere la parola di nessuno per esso"'), queste istituzioni incarnano il rifiuto della conoscenza basata sull'autorità, fornendo un quadro duraturo per l'indagine collaborativa, la revisione dei pari e la diffusione pubblica dei risultati scientifici.

Importante, queste accademie non erano solo forum di filosofia naturale; presto si espanse in domini pratici—astronomia, navigazione, ingegneria, scienza dei materiali e meccanica applicata; contribuirono a trasformare il lavoro solitario degli studiosi nell'impresa collettiva della scienza moderna.

5.3.4.3 Sperimentazione e teoria nella scienza moderna

Gli sperimentalisti come Musschenbroek, e teorici come Euler, esemplificano modalità parallele di indagine—esperimenti fisici nel mondo materiale e "esperimenti" matematici nel mondo astratto dei modelli, (Goss, 2009 PDF). I modelli matematici possono suggerire quali esperimenti fisici valgono la pena di condurre, mentre i risultati fisici possono affinare o sfidare le ipotesi matematiche. Quando questo gioco è maturato, esemplificato dall'accettazione dell'elastica di Bauschinger, è diventato una caratteristica distintiva della scienza moderna.

Tabella 5.1: Rivoluzione scientifica turno concettuale

Vecchio paradigm	**Nuovo Paradigm**
Conoscenza dall'autorità (Aristotele, Scrittura)	Conoscenza da osservazione, esperimento e ragionamento
Descrizioni qualitative	Leggi quantitative e matematiche
Cause finali (*perché*)	Cause efficienti (*come*)
cosmologia geocentrica	cosmologia eliocentrica
universo statico e immutabile	universo dinamico governato dalle leggi universali
Deduttivo dai principi	Ipotetico-deduttivo con test empirici

Questa trasformazione ha posto la base intellettuale per l'emergere di società scientifiche formali, che ha istituzionalizzato il metodo scientifico come il modo centrale di indagine per comprendere il mondo naturale.

COPIA DI REVISIONE



(a) Bacon (1561-1626) (b) Galileo (1564-1642) (c) Gancio (1635-1703) (d) Newton (1643-1727)

Figura 5.3: Opere seminali della rivoluzione scientifica, di Galileo, Newton, Bacon e Hooke



(a) Academia dei Lincei (1603) (b) Academia del Cimento (1657) (c) Società Reale (1660) (d) Accademia delle Scienze (1666)

Figura 5.4: Scienza istituzionale

5.4 Illuminismo: un ponte culturale

Nel XVIII secolo, la mentalità scientifica forgiata nel secolo precedente si estendeva ben oltre la matematica e la fisica in filosofia, governance, educazione e la più ampia vita intellettuale dell'Europa. Questo movimento – l'illuminismo – era caratterizzato dalla convinzione che la ragione umana, l'osservazione empirica e il pensiero critico potesse essere applicato universalmente, non solo ai fenomeni naturali ma anche alla società umana.[4].

[4]L'evoluzione scientifica di questa epoca si è verificata in uno scenario di significativi sconvolgimenti politici e religiosi, tra cui la Guerra dei Trent'anni, la rivolta olandese e i più ampi conflitti della Riforma. La migrazione intellettuale, in particolare verso centri tolleranti come la Repubblica olandese e la Svizzera, ha contribuito a diffondere idee. L'espansione dell'industria della stampa, in particolare nei Paesi Bassi, ha permesso la diffusione di opere scientifiche spesso censurate altrove, tra cui Galileo ha fatto parte. *Due nuove scienze*, pubblicato da Elzevir a Leiden.

COPIA DI REVISIONE

5.4.1 La diffusione del pensiero scientifico

L'illuminismo ha consolidato il rifiuto di appelli all'autorità, sia teologica, aristocratica, sia scolastica, a favore di ragionamenti e prove sistematiche. *Encyclopédie* non era solo un esercizio intellettuale, ma una missione culturale per democratizzare la conoscenza, (Diderot e d'Alembert, 1751).

La divulgazione di Voltaire delle idee di Newton portò a un pubblico più ampio e istruito ragionando scientificamente, mentre Diderot e d'Alembert *Encyclopédie* Questa massiccia impresa ha dimostrato che tutti i domini dell'esperienza umana, dai fenomeni naturali alle istituzioni sociali, sarebbero stati compresi attraverso l'indagine sistematica e l'analisi logica.

L'enfasi del metodo scientifico sull'osservazione, la formazione di ipotesi e il test empirico divenne un modello di riforma sociale e politica. I pensatori dell'illuminismo applicarono questi principi per esaminare il governo, la legge, l'economia e l'istruzione, sostenendo che il progresso sociale poteva essere raggiunto attraverso gli stessi metodi razionali che avevano rivoluzionato la filosofia naturale.

5.4.2 L'ascesa dell'istruzione tecnica: le scuole di ingegneria militare

L'illuminismo ha assistito all'istituzionalizzazione sistematica dell'educazione tecnica, in particolare attraverso la creazione di scuole di ingegneria militare che avrebbero profondamente influenzato lo sviluppo dell'ingegneria civile e della scienza applicata.

Il *École Royale du Génie de Mézières*, fondata nel 1748, divenne la prima scuola di ingegneria del mondo nel senso moderno. Sotto la direzione di Claude-Antoine Couplet e in seguito Jean-Rodolphe Perronet, la scuola ha stabilito un rigoroso curriculum che combina matematica teorica con applicazioni di ingegneria pratica.Gli studenti hanno studiato calcolo, meccanica, idraulica e progettazione di fortificazione, integrando i principi scientifici con la pratica ingegneristica in modo senza precedenti.

Questo modello è stato ulteriormente sviluppato al *École Royale des Ponts et Chaussées*, stabilita nel 1747 sotto la direzione di Jean-Rodolphe Perronet. La scuola ha formato ingegneri civili nella costruzione di ponti e strade, applicando metodi scientifici allo sviluppo delle infrastrutture, i suoi laureati sono diventati la spina dorsale delle infrastrutture di trasporto della Francia e hanno portato metodi di ingegneria scientifica in tutta Europa e nelle sue colonie.

Il curriculum di queste scuole rappresentava una sintesi rivoluzionaria: rigore matematico derivato dalla rivoluzione scientifica combinato con esigenze di ingegneria pratica.Gli studenti hanno imparato il calcolo differenziale, la meccanica e la scienza dei materiali insieme a sondaggi, tecniche di costruzione e gestione del progetto.

Queste scuole di ingegneria francese hanno influenzato la successiva creazione di istituzioni simili in tutta Europa e nelle Americhe, tra cui l'Accademia Militare degli Stati Uniti a West Point (1802) e vari istituti tecnici tedeschi. L'enfasi sul rigore matematico combinato con applicazione pratica è diventato il marchio di educazione professionale di ingegneria, distinguendolo da apprendisti artigianali tradizionali.

5.4.3 Dalla filosofia naturale alla scienza applicata

La trasformazione dell'illuminismo ha esteso la mentalità scientifica in domini pratici che consentano direttamente la rivoluzione industriale. Le istituzioni formali dedicate alla scienza applicata proliferavano: scuole di ingegneria militare e civile, accademie tecniche e società scientifiche fiorite in tutta Europa.

Questo periodo ha assistito all'emergere di ciò che ora riconosciamo come scienza dell'ingegneria, l'applicazione sistematica dell'analisi matematica ai problemi pratici, dal design del ponte ai sistemi idraulici, ha rappresentato una partenza fondamentale dagli approcci tradizionali basati sull'artigianato, che sono stati

COPIA DI REVISIONE

applicati principi teorici derivati dalla rivoluzione scientifica per risolvere le sfide del mondo reale nella costruzione, nella produzione e nell'infrastruttura.

La Meccanica durante questo periodo non era più una marginale ricerca di geometri, ma divenne una disciplina centrale, intimamente legata sia all'indagine teorica che all'applicazione industriale. Lo sviluppo di strumenti matematici per l'analisi del comportamento strutturale, delle proprietà materiali e delle prestazioni della macchina pose le basi essenziali per la professione di ingegneria come lo conosciamo oggi.

La mentalità dell'illuminismo – la fiducia nell'analisi razionale, l'impegno al progresso, e la convinzione che la natura possa essere decodificata attraverso la matematica e l'esperimento – hanno stabilito il quadro intellettuale che consentisse i rapidi sviluppi del XIX secolo: la rivoluzione industriale, l'ingegneria moderna e le teorie formali dell'elasticità, la forza dei materiali e l'analisi strutturale.

5.5 Conclusioni

In sintesi, l'ascesa della ragione scientifica rappresenta una trasformazione intellettuale decisiva che si estende per quasi un millennio, a partire dalla conservazione e dal progresso della conoscenza antica nei centri islamici come la Bayt al-Hikma, continuando attraverso le scoperte metodologiche della rivoluzione scientifica, e culminando nel consolidamento istituzionale dell'illuminismo, questa trasformazione libera l'inchiesta dai vincoli dell'autorità teologica e della filosofia speculativa.

Il nuovo approccio – osservazione sistemica, formalizzazione matematica e validazione empirica – ha stabilito un modello universale per il progresso scientifico: dalla raccolta di dati precisa attraverso il riconoscimento empirico del modello alla comprensione teorica fondamentale. Questa metodologia, esemplificata nella progressione delle osservazioni di Brahe attraverso le leggi di Kepler alla sintesi di Newton, è diventata la base per tutti i successivi sviluppi scientifici e ingegneristici.

Altrettanto importante è stata la rivoluzione istituzionale che ha reso l'indagine scientifica un'impresa collaborativa e cumulativa, la creazione di accademie scientifiche e scuole di ingegneria ha trasformato l'inseguimento solitario della filosofia naturale nella disciplina sistematica della scienza moderna, mentre i programmi di educazione tecnica dell'illuminista hanno stabilito il modello per l'istruzione di ingegneria professionale che persiste oggi.

Questo quadro intellettuale, che combina una metodologia rigorosa con il supporto istituzionale, pone la fase per lo sviluppo dell'ingegneria moderna, l'analisi formale delle strutture e la scienza quantitativa della meccanica che ha seguito.

Infine, tabella 5.2 elenca tutti i libri citati in questo capitolo.

Tabella 5.2: Riepilogo cronologico delle opere chiave

Anno	Autore	Titolo del libro	Sintesi dei contenuti
c. 850	Fratelli Banu Musa	*Libro di dispositivi ingegnosi* (Banū Mūsā ibn Shākir, 0850)	Macchine programmabili e dispositivi automatici di controllo della casa di saggezza di Baghdad; meccanica di fusione con ingegneria pratica.
1543	Andreas Vesalius	*De Humani Corporis Fabrica* (Vesalius, 1998–2009)	La rivoluzione anatomica basata sulla dissezione diretta dell'uomo; corretti errori Galenici a lungo termine; le illustrazioni scientifiche lavisive stabiliscono nuovi standard.

COPIA DI REVISIONE

Anno	Autore	Titolo del libro	Sintesi dei contenuti
c. 1593	Galileo Galilei	*Le Meccaniche* (Galilei, 1594)	Il trattato di ingegneria che mostra le macchine obbedisce alle leggi quantitative; articolazione precoce della meccanica in forma matematica.
1620	Francesco Bacon	*Organo di Novum* (Bacon, 2000)	Appello di fondo per metodo empirico; osservazione sistematica e sperimentazione sull'autorità o sulla logica pura.
1623	Galileo Galilei	*Il Saggiatore* (Galilei, 1623)	Dichiara il "libro" della natura è scritto in matematica; sostiene la misura come il percorso per comprendere la realtà fisica.
1628	William Harvey	*Exercitatio Anatomica de Motu Cordis et Sanguinis in Animalibus* (Harvey, 1628)	La scoperta della circolazione sanguigna; le misurazioni quantitative contraddicono la teoria Galenica; integra l'anatomia, l'osservazione e il ragionamento.
1665	Robert Hooke	*Micrografia* (Hooke, 1665)	Il marchio di riferimento nella microscopia; incisioni dettagliate; sottolinea l'osservazione empirica sulla speculazione; include intuizioni di comportamento materiale.
1667	Accademia del Cimento	*Saggi di naturali esperienze ingrassare nell'Accademia del Cimento* (Accademia del Cimento, 1667)	Sommazza rigorose indagini sperimentali; pressione dell'aria, sottovuoti, fenomeni termici; codifica ethos "testing and rivisiting".
1687	Isaac Newton	*Filosofiaæ Naturalis Principia Mathematica* (Newton, 1687)	Sintesi matematica della meccanica e della gravitazione universale; unisce le leggi di Keplero con una teoria fisica del movimento.
1704	Isaac Newton	*Ottimizzazione* (Newton, 1704)	Esemplifica metodo sperimentale in ottica; studia le proprietà della luce, i colori e la diffrazione.
1751–1772	Diderot & d'Alembert	*Encyclopédie* (Diderot e d'Alembert, 1751)	Organizzazione completa della conoscenza umana con principi razionali; veicolo per il pensiero scientifico e sociale dell'illuminismo.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

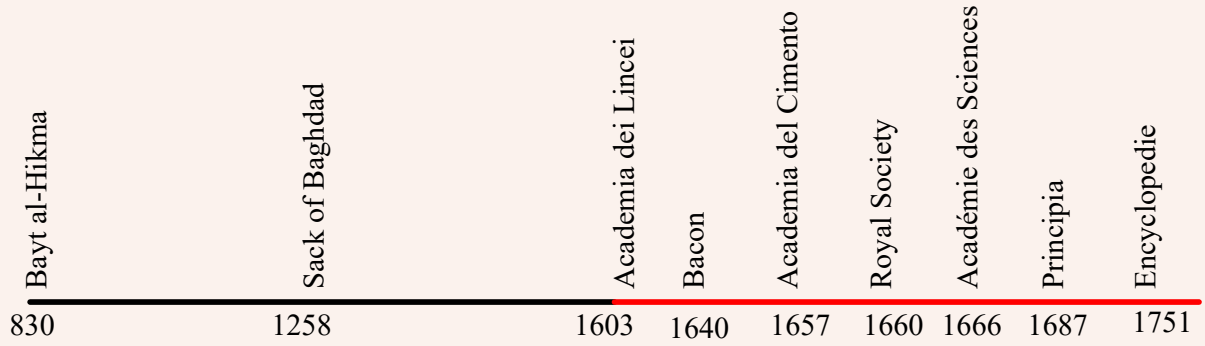


Figura 5.5: La linea temporale dell'ascesa della ragione scientifica



Caravaggio, L'incredulità di San Tommaso (1601-1602)

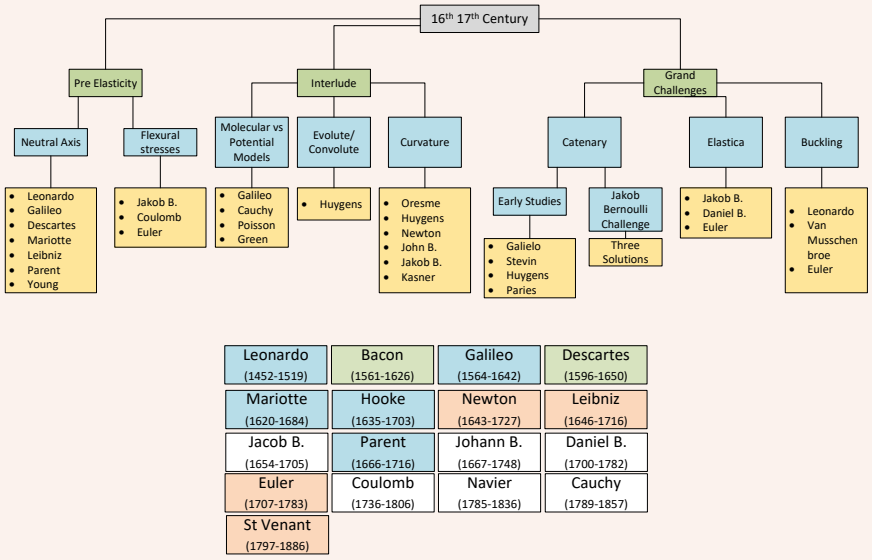
Thomas sonda la ferita con insistenza empirica, il gesto fondante della scienza sperimentale: rifiutarsi di credere senza prove dirette.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Interludio I: Dalla filosofia naturale alla Meccanica analitica

Fondamenti concettuali dell'analisi strutturale.



I capitoli precedenti hanno stabilito le basi intellettuali del settore esaminando i *Rivoluzione scientifica* (Capitolo) 5.3) e presentando le figure e le opere seminali che hanno plasmato la meccanica moderna (capitolo 6). Questa prospettiva tematica e sintetica è stata adottata come tematica: essa si prefigge la continuità concettuale e la struttura intellettuale, piuttosto che una ricostruzione puramente cronologica degli sviluppi tecnici, che si riferisce ai capitoli che seguono.

In questo momento, è utile mettere in pausa e consolidare diversi fili concettuali che sono emersi durante questo periodo formativo—geometria, equilibrio, curvatura e stabilità—spesso sviluppato in relativa isolamento, ma progressivamente convergendo verso un punto di vista analitico unificato. Dopo aver introdotto i principali attori, le loro opere principali e il clima intellettuale in cui operavano, ci rivolgiamo agli sviluppi tecnici stessi. Nei prossimi sei capitoli si traccia l'evoluzione storica dalla meccanica iniziale alla formalizzazione dell'analisi strutturale, seguendo la graduale chiarificazione dei concetti fondamentali–forze interne, deformazione e stabilità– e la loro eventuale sintesi nei moderni metodi analitici impiegati nella pratica dell'ingegneria.

COPIA DI REVISIONE

Capitolo 6

Il Pantheon

Abstract

Questo capitolo serve sia come chi è chi *e* quello che hanno scritto *delle figure chiave che hanno posato le basi per la meccanica moderna —un pantheon di pionieri la cui vita e le opere hanno trasformato l'ingegneria strutturale dall'artigianato empirico alla scienza matematica.th secolo, profila i pensatori pionieristici—da Mozi's prime intuizioni sulle leve nell'antica Cina, attraverso le statiche di Archimede's fondative, alle leggi di scalamento di Galileo, le dinamiche di Newton, le strutture variazionali del Bernoullis, Euler e Lagrange, e culmina con la rigorosa meccanica continuum di Cauchy, Green e Saint-Ven da.th secolo—i cui quaderni sulla meccanica, l'anatomia, il volo e il movimento fluido mostrano una profondità di osservazione empirica e una comprensione a livello di sistemi che ha premesso il pensiero analitico di scienziati successivi.*

Questo capitolo ripercorre non solo i singoli successi ma l'evoluzione di un'intera disciplina—-mostrando come la meccanica strutturale emerse dall'intersezione della matematica, della filosofia naturale e dell'ingegneria pratica. La narrazione rivela come relazioni personali, rivalità istituzionali, e scambi culturali hanno plasmato lo sviluppo della scienza meccanica tanto quanto il genio individuale ha fatto.

Invece di approfondire il pieno sviluppo tecnico delle loro idee, che saranno affrontate nei capitoli successivi, questa indagine contestualizza i loro contributi, rivalità e lineamenti intellettuali. L'obiettivo è quello di tracciare il passaggio dall'intuizione fisica e dalla geometria ad una comprensione formale equazione-basata del comportamento meccanico.

6.1 Introduzione 102
6.2 Filosofia, Geometria e Statici primi . 104
6.2.1 Mozi (c. 470–391 a.C.) 104
6.2.2 Aristotele (384–322 a.C.) . . . 105
6.2.3 Euclid (c. 300 a.C.) 106
6.2.4 Archimedes (c. 287–212 a.C.) 107
6.2.5 Apollonio di Perga (c. 262–190 a.C.) 108
6.3 Ingegneria, macchine e trasmissione della conoscenza 109
6.3.1 Marco Vitruvio Pollio, c. 80–70 a.C. – dopo il 15 a.C.) . 109
6.3.2 Eroe di Alessandria (fl. c. 62 CE) 110
6.3.3 Ibn al-Haytham (c. 965–1040 CE) 111
6.3.4 Abu Rayhan al-Biruni (973–1048) 112
6.3.5 Al-Khazini (fl. 1115–1130 CE) 113
6.3.6 Villard de Honnecourt (fl. c. 1225–1250) 114
6.4 Architettura, Proporzione e Forma Umanista 115
6.4.1 Leon Battista Alberti (1404-1472) 115
6.4.2 Leonardo da Vinci (1452–1519) 116
6.4.3 Andrea Palladio (1508–1580) 127
6.4.4 Sebastiano Serlio (1475–1554) 128

COPIA DI REVISIONE

6.4.5 Giacomo Barozzi da Vignola (1507–1573) . . . 128
6.4.6 Hubert Gautier (1660–1737) . 129
6.5 Dall'Ordine Matematico alla Meccanica . . . 137
6.5.1 Francesco Bacon (1561–1626) 138
6.5.2 Nicolaus Copernicus (1473–1543) . . . 139
6.6 Dal Proto-Statics alla Rivoluzione Scientifica . . . 140
6.6.1 Simon Stevin (1548–1620) . . 140
6.6.2 Galileo Galilei (1564–1642) . 141
6.6.3 René Descartes (1596–1650) . 148
6.6.4 Christiaan Huygens (1623–1695) . . . 149
6.6.5 Blaise Pascal (1623–1662) . . 151
6.6.6 Robert Hooke (1635–1703) . 152
6.6.7 Isaac Newton (1642–1727) . . 159
6.6.8 Gottfried Leibniz (1646–1716) 165
6.6.9 Famiglia Bernoulli (1654–1782) 168
6.6.10 Leonhard Euler (1707–1783) 175
6.7 Dalla meccanica analitica alla teoria strutturale e del continuo . . . 181
6.7.1 Charles-Augustin de Coulomb (1736–1806) . . . 181
6.7.2 Simmon Simsésu Denis Poisson (1781–1840) . . . 183
6.7.3 Claude Louis Marie Henri Navier (1785–1836) . . . 184
6.7.4 Jean le Rond d'Alembert (1717–1783) . . . 190
6.7.5 Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) . . . 191
6.7.6 Cauchy (Augustin-Louis 1789–1857) . . . 192
6.7.7 George Green (1793–1841) . 193
6.7.8 - No.Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797–1886) . . 194
6.8 L'ascesa dell'ingegneria strutturale come disciplina . . . 196
6.8.1 Karl Culmann (1821-1881) . 196
6.8.2 William John Macquorn Rankine (1820-1872) . . . 197
6.8.3 Christian Otto Mohr (1835-1918) . . . 198
6.8.4 Henry Moseley (1801–1872) 200
6.8.5 James Clerk Maxwell (1831–1879) . . . 200
6.9 Le principali storie della Meccanica 202
6.9.1 Isaac Todhunter (1820–1884) 202
6.9.2 Stephen Prokofievich Timoshenko (1878–1972) . . . 203
6.9.3 René Dugas (1897-1957) . . . 204
6.9.4 Clifford Ambrose Truesdell III (1919-2000) . . . 204
6.10 Donne notevoli . . . 206
6.11 Analisi e contesto . . . 207
6.11.1 Concorrenza, Segreteria e Progressi Scientifici . . . 207
6.11.2 La transizione alla scienza dell'ingegneria moderna . . 216
6.11.3 La rivoluzione francese nell'educazione ingegneristica . 216
6.12 Conclusione: Dalla filosofia naturale alla scienza dell'ingegneria . . . 217
6.12.1 Tavole di sintesi . . . 218

6.1 Introduzione

Truesdell, 1968 La questione esistenziale dell'identificazione degli esperimenti fondamentali su cui si basa la *"classico"* meccanica è stata fondata, segnalazione *Non sono mai stato in grado di trovarne uno.* Infatti, la meccanica moderna si è evoluta gradualmente nel corso del XVII-XVII secolo, in modo da sfidare la semplice cronologia o l'origine singolare.Questa graduale evoluzione non è avvenuta in isolamento ma attraverso una complessa rete di scambio intellettuale, sviluppo istituzionale e trasformazione culturale che fondamentalmente alterava come gli esseri umani comprendessero il mondo fisico.

Questo capitolo cerca di profilare le vite e le relazioni intellettuali dei più importanti

COPIA DI REVISIONE

contributori—quelli *"Regioni"* che hanno plasmato la meccanica analitica e la matematica—mentre anche l'esame dei contesti istituzionali e culturali che hanno permesso le loro scoperte e le pubblicazioni di riferimento attraverso le quali le loro idee sono state diffuse.Esperiamo non solo quello che hanno scoperto, ma come le loro circostanze personali, rivalità, e collaborazioni hanno portato alla trasformazione della meccanica dalla filosofia naturale alla scienza matematica.

Due domande guidano questo capitolo: *Chi sono le persone che hanno cambiato il modo in cui pensiamo alle strutture?* e *Quali sono i libri che hanno codificato quei cambiamenti?* Ma facciamo anche domande più profonde: come ha fatto la rete emergente delle accademie e università europee a creare condizioni per un rapido progresso scientifico? Come hanno fatto le rivalità e le collaborazioni personali ad accelerare la scoperta? Quale ruolo ha svolto le sfide pratiche dell'ingegneria nel guidare le scoperte teoriche? E come ha fatto la pubblicazione di testi chiave— da Galileo's *Discorsi* a Navier's *Leçon*Non è un catalogo esaustivo ma uno sforzo selettivo ed interpretativo per identificare quelli che vale la pena ricordare nella genealogia intellettuale dell'analisi strutturale.

scientifico!progresso Spesso si racconta attraverso idee e teorie, ma dietro ogni equazione si trova una persona—-guida di curiosità, ambizione, persistenza, e talvolta da conflitti o avversità.Questi individui non erano trasmettitori passivi di conoscenza, ma agenti attivi nelle rivoluzioni che hanno aiutato a accendere.

Alcuni si sono impegnati nel loro tempo, altri si sono impegnati per il riconoscimento, altri hanno lavorato nel comfort delle accademie, altri in isolamento o sotto sospetto. Alcuni, come Euler, si sono mossi liberamente tra diversi tribunali europei e accademie, mentre altri, come Galileo, hanno affrontato la persecuzione istituzionale. Alcuni hanno costruito sul lavoro dei loro mentori sistematicamente, mentre altri, come Newton, hanno protetto gelosamente le loro scoperte e hanno impegnato in dispute di priorità amara.

Rivisitando la loro vita e le loro pubblicazioni, non solo chiariamo i loro contributi ma anche acquisiamo un più profondo apprezzamento delle forze culturali e intellettuali che hanno plasmato l'evoluzione della scienza strutturale. L'emergere della meccanica come disciplina matematica ha richiesto non solo il genio individuale ma anche lo sviluppo di nuove istituzioni (come la Royal Society e la Royal Society) *Académie des Sciences*), nuove forme di comunicazione scientifica (attraverso le reti di corrispondenza e le pubblicazioni di giornale), e nuove relazioni tra la conoscenza teorica e l'applicazione pratica. *chi è chi* e *quello che hanno scritto*—una guida alle figure fondatrici della meccanica e ai testi attraverso i quali le loro idee hanno raggiunto la permanenza. *Gli sviluppi tecnici specifici e gli avanzamenti teorici attribuiti a ciascuno saranno esaminati in dettaglio nei capitoli successivi.*

Mentre questo capitolo adotta una prospettiva biografica e storica, non è inteso come un trattato tecnico. Le formulazioni analitiche, le derivazioni e le strutture matematiche introdotte da queste figure saranno esaminate nei capitoli successivi, dove le loro idee saranno rivisitate in modo più succinta ma matematicamente rigoroso. L'attuale discussione

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

serve quindi come preludio umanistico e intellettuale- un quadro contestuale che illumina le personalità, le circostanze formali e le pubblicazioni che hanno plasmato la disciplina-

I dati riportati di seguito hanno lavorato in un contesto istituzionale in rapida evoluzione, che viene esaminato in dettaglio nelle sezioni conclusive di questo capitolo.

6.2 Filosofia, Geometria e Statici primi

Questa sezione riunisce le figure per le quali la meccanica nacque nell'ambito della *filosofia naturale* e della *geometria*, anziché come scienza autonoma. Le questioni di forza, equilibrio e stabilità venivano affrontate mediante necessità logica, proporzioni e costruzioni geometriche; la statica era intesa come conseguenza di una forma ordinata, non di una causalità fisica. Il tema comune è il trattamento delle idee meccaniche come estensioni del ragionamento filosofico e dell'astrazione geometrica.

6.2.1 Mozi (c. 470–391 a.C.)

Mozi (noto anche come Mo Di) nacque intorno al 470 a.C. in quello che è ora Tengzhou, provincia di Shandong, Cina—coincidentalmente la stessa regione di Confucius, che era morto pochi anni prima della nascita di Mozi. Era probabilmente addestrato come falegname o artigiano, e questo background pratico profondamente plasmato la sua visione filosofica, basando il suo pensiero in osservazione empirica e preoccupazioni utilitarian piuttosto che speculazione astratta.

Mozi fondò la scuola di pensiero mohista, che divenne una delle scuole più importanti organizzate durante il periodo degli Stati Warring (c. 475–221 a.C.), rivaleggiando confucianismo in influenza, i suoi seguaci, soprattutto tecnici e artigiani, erano organizzati in un ordine disciplinato che studiava scritti filosofici e tecnici, i Mohisti divennero noti come ingegneri militari, progettando fortificazioni e meccanismi di difesa dell'assedio, che probabilmente informavano i loro interessi teorici nella meccanica.

Mo Jing Il *Mo Jing* (Mozi, 2013), una raccolta di testi attribuiti ai seguaci di Mozi, presenta intuizioni sorprendentemente avanzate in statiche, compreso il comportamento delle leve, centri di gravità, e vantaggio meccanicoIl testo articola i principi di equilibrio con notevole precisione: distingue tra la posizione del fulcro e la distribuzione dei pesi, e riconosce che un fascio equilibrato richiede il prodotto di peso e distanza da essere uguale su entrambi i lati — una dichiarazione implicita della legge della leva secoli prima che Archimede formalizzasse.

I successivi scritti mohisti (c. 300-200 a.C.) contengono indagini in ottica, geometria, meccanica e anche tracce di astronomia. La loro epistemologia appare fondata in una convinzione che esiste la verità oggettiva e può essere resa intelligibile attraverso l'esame,

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

lo studio e il ragionamento sistematico—principi che non diventeranno centrali alla scienza occidentale fino alla rivoluzione scientifica.

Anche se la tradizione mohista non ha influenzato direttamente lo sviluppo della meccanica occidentale — la scuola è diminuita dopo l'unificazione Qin della Cina nel 221 a.C. e la successiva combustione dei libri — è come prova notevole che i principi strutturali fondamentali sono stati scoperti indipendentemente dalle culture, e rimane uno dei primi trattamenti sistematici di ragionamento meccanico al di fuori del mondo mediterraneo.

6.2.2 Aristotele (384–322 a.C.)

Aristotele nacque a Stagira, una città coloniale greca sulla penisola di Chalcidice, e suo padre Nicomachus servì come medico personale al re Amyntas III di Macedon, una connessione che in seguito si rivelerà conseguente. Orfano in gioventù, Aristotele fu mandato ad Atene a diciassette anni e entrò nell'Accademia di Platone, dove rimase per vent'anni fino alla morte di Platone nel 347 BCE. Passò per la leadership dell'Accademia—forse a causa della sua nascita straniera o divergenze filosofiche emergenti—ha lasciato Atene e ha trascorso diversi anni in Asia Minore e Lesbos, conducendo le indagini biologiche che in seguito informeranno i suoi scritti zoologici.

In 343 BCE, Philip II di Macedon convocò Aristotele per tutor suo figlio Alessandro, poi tredici anni. Il contenuto preciso di questa educazione rimane sconosciuto, anche se la leggenda successiva lo abbelliva considerevolmente. Quando Alessandro assunse il potere e lanciò le sue campagne, Aristotele ritornò ad Atene e fondò la sua scuola, il Lyceum, nel 335 BCE. Insegnò lì per dodici anni, riferito lecturing mentre camminava i sentieri colonnati—quindi il nome dei suoi seguaci, i Peripatetici. Alla morte di Alessandro nel 323 A.C., il sentimento anti-Macedoniano rese Atene pericolosa per chiunque avesse legami reali. Aristotele si ritirò a Calcis, dichiarando che non avrebbe permesso ad Atene di peccare due volte contro la filosofia. Morì lì l'anno successivo.

Il *Mechanica* e la Tradizione Peripatetica Spesso attribuito ad Aristotele ma probabilmente composto da un membro successivo della scuola peripatetica,[1] il *Mechanica* (Aristotle, 2000 PDF) è un trattato fondamentale sulle macchine semplici e i principi che regolano la loro operazione. Scritto intorno al III secolo BCE, esplora leve, pulegge, cunei, e l'equilibrio delle forze, presentando un resoconto qualitativo di come le macchine amplificano lo sforzo umano.

Il trattato è organizzato intorno a una questione centrale: perché le piccole forze muovono grandi pesi attraverso dispositivi meccanici? La risposta offerta— che il movimento circolare possiede una speciale potenza generativa che combina tendenze contrarie— è filosoficamente ingenua dagli standard moderni, ma rappresenta un tentativo autentico di unificare diversi fenomeni meccanici sotto un unico principio esplicativo.

[1] Il termine *peripatetic* deriva dal greco περιπατητικός, che significa "dati a camminare circa.'" Questo si riferisce all'abitudine di Aristotele di insegnare mentre passeggia con i suoi studenti attraverso il passeggino coperto (περίπατος) del Liceo di Atene.

COPIA DI REVISIONE

Principi di composizione, movimento e primi Il *Mechanica* affronta trentacinque problemi che vanno dal comportamento di saldi e remi alla meccanica dei noci e dei forcipi. Il suo trattamento della leva è particolarmente significativo: riconosce che l'efficacia di una leva dipende dal rapporto di distanze dal fulcro, anticipando la legge della leva che Archimedes si rivelerà in seguito rigorosamente. Il lavoro discute anche il parallelogramma delle velocità e la composizione dei movimenti, concetti che diventeranno fondamentali per la meccanica razionale.

Trasmissione e influenza a lungo termine La sua influenza sugli autori successivi è inconfondibile. Archimedes ha avanzato molte delle idee prima accennate in *Mechanica*, in particolare rifinanziare il concetto di centro di gravità In epoca romana ed ellenistica, autori come Eroe di Alessandria e Pappus hanno ulteriormente elaborato sistemi meccanici, incorporando sia dispositivi pratici che considerazioni teoriche. Il trattato è stato tradotto in arabo durante l'età dell'oro islamico e poi in latino, garantendo la sua trasmissione all'Europa medievale e rinascimentale.

Così, *Mechanica* La teoria più ampia di Aristotele del movimento – in particolare la sua distinzione tra movimento naturale e violento – domina la filosofia naturale occidentale fino all'inizio del XVII secolo.

6.2.3 Euclid (c. 300 a.C.)

Quasi nulla è conosciuto della vita di Euclid. Lavorava ad Alessandria durante il regno di Tolomeo I Soter (323–283 BCE), E questo fatto esaurisce le informazioni biografiche affidabili. Scrittori successivi ricamati liberamente: Proclus, scrivendo otto secoli dopo, riferisce che Euclid era più giovane degli studenti di Platone ma più vecchio di Archimede, e che ha fondato la scuola matematica ad Alessandria. Il famoso aneddoto in cui Ptolemy chiede un percorso più breve alla geometria e Euclid risponde che non c'è strada reale al soggetto può essere apocrifo...

Anche il luogo di nascita e l'educazione di Euclid rimangono incerti, e alcune fonti medievali arabe affermano che è nato a Tiro; altre lo confondono con il precedente filosofo Euclid di Megara, Se ha studiato all'Accademia di Platone di Atene, come sembra plausibile data la sua linea di matematismo, non può essere stabilito. La sua personalità e il suo carattere sono completamente perduti a noi. Ciò che sopravvive è il lavoro stesso.

Il *Elementi* e il metodo assiomatico Euclid's *Elementi* (Euclid e Heath, 1956) è forse il libro di testo più influente della storia, ponendo la fondazione non solo per la geometria ma anche per la struttura stessa del ragionamento deduttivo. Composto da tredici libri, organizza sistematicamente la geometria del piano (Books I-VI), teoria dei numeri (Books VII-IX), e geometria solida (Books XI-XIII) attraverso un quadro rigorosamente assiomatico, che inizia con definizioni, postulati e nozioni comuni, Euclid dimostra come un intero edificio di conoscenza può essere costruito attraverso progressione logica da principi auto-evidenti.

L'architettura logica del *Elementi*–definizioni seguite da postulati, nozioni comuni, proposizioni e prove—è stato il modello canonico per ragionare rigoroso attraverso

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

le scienze. Questa struttura non è semplicemente pedagogica; incarna una posizione metodologica in cui la certezza deriva dalla deduzione ordinata piuttosto che dall'autorità o dall'accumulo empirico.

Influenza sulla Meccanica, Architettura e Ingegneria Ragione L'impatto dell'azione *Elementi* Per oltre due millenni, è servita come introduzione standard al pensiero logico, studiato da filosofi, scienziati e ingegneri, la sua influenza sulla meccanica strutturale è diretta e indiretta: direttamente, la geometria euclidea fornisce gli strumenti per analizzare le relazioni spaziali, le proporzioni e le proprietà delle forme essenziali alla forma strutturale; indirettamente, il metodo assiomatico ha formato gli ingegneri per formulare chiaramente i problemi, procedere sistematicamente e stabilire risultati con certezza.

Architetti rinascimentali come Alberti e Palladio Newton ha esplicitamente modellato l'esposizione della sua *Principia* su Euclidean precedente. *Elementi* Il secondo libro più stampato dopo la Bibbia fino al XX secolo, con oltre mille edizioni, è quindi un corpo di conoscenza geometrica, ma un modo di pensare–struttura attraverso assiomi, chiarezza attraverso progressione logica e certezza attraverso la prova—- che rimane fondamentale per la pratica dell'ingegneria.

6.2.4 Archimedes (c. 287–212 a.C.)

Archimedes nacque a Siracusa, la preeminente città greca di Sicilia, e da alcuni conti era legato al suo sovrano, il re Hieron II. Suo padre Phidias era un astronomo, altrimenti sconosciuto. A un certo punto Archimedes viaggiò ad Alessandria, dove ha studiato con i successori di Euclide e ha formato una duratura amicizia intellettuale; diversi suoi trattati sono indirizzati ai matematici alessandrini, tra cui Conon di Samos, Dositheus di Pelusium, e le Eratostene, il Archimedes tornò a Siracusa e vi trascorse la vita lavorativa, godendosi il patronato reale mentre persegue problemi di geometria, meccanica e idrostatica.

Fonti antiche dipingono Archimede come l'archetipo del pensatore assorbito, così consumato dalla contemplazione matematica che trascurava il cibo e doveva essere trascinato ai bagni, dove avrebbe continuato a disegnare diagrammi nell'olio sulla sua pelle. La famosa storia del suo trasloco dal metodo di scrittura del bagno che piange "Eureka!" alla scoperta del principio di secoli di buovanza—supposto mentre indagando se una corona fatta per misura piena per Hieron contenuta

Morte, memoria e eredità di sé La sua morte divenne leggendaria, quando le forze romane sotto Marcello ha preso Siracusa in 212 A.C. dopo un prolungato assedio—richieso, secondo Plutarco, dalle macchine di guerra Archimede aveva progettato—un soldato è venuto su un vecchio che disegna figure geometriche nella sabbia. Archimedes riferito "Non disturbare i miei cerchi,' e è stato ucciso sul posto. Marcellus, che aveva sperato di incontrare il famoso matematico, è stato addolorato e organizzato una sepoltura onorevole. visitando Siracusa un secolo e mezzo più tardi, trovò la tomba sopravasata e trascurata, identificabile solo dalla sfera intagliata e cilindro che Archimedes aveva richiesto —un monumento al teorema che considerava il suo più bello, riguardante i volumi di queste forme.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Fondazioni della Meccanica Razionale Archimede di Siracusa (Archimedes e Heath, 1897) sta come il fondatore della meccanica razionale, stabilendo statici e idrostatici come scienze matematiche. Suoi lavori esistenti—compreso *Sull'Equilibrio dei Piani*, *Su corpi galleggianti*, *Sulla Sfera e Cilindro*e la *Metodo di teoremi meccanici*—combinare rigore matematico con intuizione fisica in un modo non uguale fino alla rivoluzione scientifica.

In *Sull'Equilibrio dei Piani*, Archimedes dimostra la legge della leva dai primi principi e sviluppa il concetto di centro di gravità, dimostrando come individuarlo per varie figure pianistiche, tra cui triangoli, parallelogrammi e segmenti parabolici, che costituiscono la base per l'analisi moderna della forza e il momento Il suo metodo-stating assioms, derivando conseguenze matematiche, e applicando i risultati alle configurazioni fisiche – ha stabilito il paradigma per la meccanica teorica.

Idrostatici, stabilità e metodo meccanico *Su corpi galleggianti* inizia la scienza della buoyancy, La dimostrazione che un corpo immerso in un fluido sperimenta una forza verso l'alto pari al peso del fluido sfollato, indispensabile per comprendere i sistemi strutturali che interagiscono con i fluidi, dagli scafi delle navi alle fondamenta sommerse. Archimedes ha anche indagato la stabilità dei corpi galleggianti, determinando le condizioni in cui ritornano all'equilibrio quando spostati—un contributo precoce e notevolmente sofisticato all'analisi della stabilità.

Il *Metodo*, perduta fino alla sua riscoperta nel 1906 nel famoso palinsesto, rivela come Archimedes ha usato ragionamento meccanico per scoprire i risultati matematici prima di dimostrarli rigorosamente. Questa separazione esplicita tra scoperta e dimostrazione illumina il ruolo creativo dell'intuizione fisica all'interno di un quadro deduttivo.

6.2.5 Apollonio di Perga (c. 262–190 a.C.)

Apollonio nacque a Perga, una città greca a Pamphylia sulla costa meridionale dell'Asia Minore. Viaggiò ad Alessandria come giovane, dove studiò con i successori di Euclid e assorbì le tradizioni matematiche del Museion. Le fonti antiche indicano che ha anche trascorso del tempo a Pergamum, La biblioteca rivaleggiava con Alessandria e i cui re Attalidi si contrattavano attivamente con gli studiosi; oltre a questi fatti, quasi nulla è conosciuto della sua vita–nessun aneddoto sopravvive, non emerge personalità, e anche le sue date sono deferite indirettamente dai matematici che cita e quelli che lo citano in seguito.

Quale visione biografica possediamo viene quasi interamente dalle lettere prefatorie agli otto libri della sua opera, *Conici*. Queste dedizione rivelano un matematico incorporato nelle reti di corrispondenza scientifica dell'apprendimento ellenistico: Apollonio affronta Eudemus di Pergamo, invia bozze per commento, si scusa per ritardi in composizione, e si riferisce a una versione precedente hatily prodotto ad Alessandria per un visitatore chiamato Naucrates. Descrive una sostanziale revisione tra le versioni e sottolinea un attento ordinamento logico, suggerendo un lavoratore metodico profondamente interessato all'esposizione. a cui furono dedicati i libri successivi dopo la morte di Eudemus.

COPIA DI REVISIONE

Il *Conici* e la geometria delle forme curvate Apollonio era conosciuto in antichità come "il Grande Geometro", un titolo che lo distingueva anche in un'epoca di matematici eccezionali. *Conici* (Perga, 1896) rappresenta il trattamento più sofisticato delle sezioni coniche nell'antichità classica, sormontando tutte le opere precedenti e rimanendo definitivamente per quasi due millenni. In otto libri (di cui sette sopravvivono), Apollonio indaga sistematicamente l'ellisse, Parabola, e iperbola–curves generati dall'intersezione di un piano con un cono. Ha introdotto gran parte della terminologia ancora utilizzata oggi, derivando i nomi di queste curve dalle relazioni geometriche di "deficienza"' "equalità,"' e "excess" relative ad una costruzione di riferimento.

Il
normali e asintoti all'interno di un unico quadro deduttivo, estendendo e sistematizzando i precedenti risultati di Menaechmus, introducendo al tempo stesso delle proposizioni completamente nuove.

Trasmissione a Meccanica, Architettura e Forma strutturale Benché concepito come un lavoro di pura geometria, le intuizioni della *Conici* la formazione di un'impresa di formazione, che ha dimostrato di essere fondamentale per la comprensione matematica successiva della forma strutturale. studiata in dettaglio da Apollonio, governa la geometria di una linea flessibile sotto carico orizzontale uniforme e successivamente diventa centrale all'analisi di archi che trasportano il peso di sé. L'ellisse sotto la geometria di molte costruzioni a cupola, mentre le relative forme coniche appaiono nelle volte e altri sistemi di muratura curvi.

Le linee di spinta e forzare i sentieri nelle strutture murarie seguono curve le cui proprietà geometriche Apollonio avevano caratterizzato secoli prima che venisse compreso il loro significato meccanico; architetti rinascimentali e teorici primi moderni, e in seguito ingegneri strutturali, si sono disegnati implicitamente ed esplicitamente sulla geometria apollina analizzando forme curve e la loro distribuzione del carico.

6.3 Ingegneria, macchine e trasmissione della conoscenza

Questa sezione riunisce i contributori uniti dal loro impegno con *macchine* e con l'articolazione pratica e la diffusione della conoscenza meccanica, il loro lavoro ha sottolineato la descrizione, la classificazione e l'illustrazione, nonché la trasmissione di tecniche attraverso trattati e diagrammi. *codificato*, insegnabile e riproducibile.

6.3.1 Marco Vitruvio Pollio, c. 80–70 a.C. – dopo il 15 a.C.)

Poco si sa con certezza della vita di Vitruvio, e ciò che possediamo viene quasi interamente da osservazioni autobiografiche sparse per tutto il suo trattato. Egli servì come ingegnere militare sotto Giulio Cesare, responsabile della costruzione e manutenzione di macchine

COPIA DI REVISIONE

artiglierie tra cui balistae e scorpiones. Questa esperienza con attrezzature di assedio gli diede la conoscenza di prima mano della meccanica della tensione, del torsione e del moto proiettoriale. Dopo l'assassinio di Cesare, Vitruvio continuò a lavorare in servizio imperiale sotto Augusto, anche se il suo ruolo sembra essere diminuito, e menziona la supervisione della costruzione di una basilica a Fanum Fortunae (il Fano moderno), l'unico edificio che egli afferma come suo disegno. Quando compose il suo trattato, Vitruvio era anziano e viveva su una pensione assicurata attraverso l'intervento della sorella di Augusto Ottavia. Scrive con l'ansia di un uomo che cerca di stabilire il suo lascito attraverso la borsa di studio piuttosto che i monumenti, e la dedica ad Augusto porta un tono inconfondibile di supplica. Il significato di Vitruvio non risiede nei suoi edifici, nessuno dei quali sopravvive, ma in De architectura, l'unico trattato architettonico completo dall'antichità.

De Architectura Vitruvio *De Architectura* (Libri di architettura) (Vitruvius e Morgan, 1914), scritto intorno al 25 a.C., è l'unico trattato architettonico completo per sopravvivere dall'antichità classica. Copre praticamente ogni aspetto della pratica dell'edilizia romana: urbanistica, materiali da costruzione, costruzione di templi, architettura civile e domestica, approvvigionamento idrico, meridiani e macchinari.

La più famosa, Vitruvio ha articolato le tre qualità fondamentali della buona architettura: *esecuzioni* (resistenza strutturale), *uti* (funzionalità) e *La mia* Le sue descrizioni dei metodi di costruzione, delle proprietà materiali e dei sistemi proporzionali hanno fornito agli architetti rinascimentali la loro prima finestra nella pratica classica. Alberti, Palladio, e i loro successori si sono impegnati a vitruvio, e la sua influenza persisteva attraverso lo sviluppo dell'educazione Beaux-Arts nel XX secolo.

Centralità di Vitruvio Vitruvio è di tale fondamentale importanza per questo libro che la sua vita, scritti e influenza sono esaminati in tre capitoli distinti: il presente capitolo, §3.2.4.1e §15.2.1.

6.3.2 Eroe di Alessandria (fl. c. 62 CE)

Le date della vita di Eroe erano a lungo una questione di confusione, con stime che variano attraverso tre secoli. osservava che Eroe *Dioptra* descrive un metodo per determinare la distanza tra Roma e Alessandria osservando contemporaneamente un'eclissi lunare—e l'esempio dato corrisponde all'eclissi di marzo 13, 62 CE. Questo pone Eroe in modo sicuro nel primo secolo, un contemporaneo di Nerone, Seneca, e Plinio il Vecchio. Oltre a questo ancora cronologico, quasi nulla della sua vita può essere recuperato, il suo nome suggerisce origine greca, ma Alessandria in questo periodo era completamente cosmopolita, e potrebbe essere stato di origine egiziana o mista.

Eroe era associato al Museion, I suoi scritti suggeriscono un educatore pratico, che si occupa meno di eleganza teorica che di trasmettere conoscenze utili agli studenti e ai praticanti. Compone in un greco tecnico accessibile agli artigiani e agli ingegneri, e le sue opere includono istruzioni dettagliate per la costruzione di dispositivi – un netto contrasto con l'austero stile matematico di Archimede o Apollonius.

COPIA DI REVISIONE

Gamma di opere e pedagogia meccanica Fonti antiche accreditano Eroe con numerosi trattati, molti dei quali sopravvivono nella traduzione greca o araba. La sua gamma era notevole. *Pneumatica* cataloghi dispositivi operati da aria, acqua e vapore, tra cui l'eolipile (una turbina di reazione primitiva) e porte automatiche del tempio. *Automatizzazione* descrive macchine teatrali automotive. *Dioptra* tratta gli strumenti di rilevamento, mentre *Catoptrica* La reputazione di Eroe nell'antichità e poi si appoggiava in gran parte su questi meccanismi ingegnosi, che gli procuravano una caratterizzazione un po' dismissiva come un creatore di giocattoli e meraviglie teatrali piuttosto che un matematico serio.

Meccanica, macchine semplici e pratica di ingegneria Eroe di Alessandria (Alexandria, 1851) ha avanzato l'applicazione pratica dei principi meccanici attraverso il suo trattamento sistematico di macchine semplici, impianti idraulici, e dispositivi pneumatici. Attivo in Alessandria d'Egitto durante il primo secolo CE, Hero occupa una posizione cardine tra la meccanica matematica Archimedean e l'ingegneria applicata.

Il suo *Mechanica*, conservata principalmente in arabo, raffinata statica Archimedean attraverso analisi dettagliate delle cinque semplici macchine: la leva, puleggia, wedge, vite, e ruota e asse. Eroe ha dimostrato come questi elementi potrebbero essere combinati in macchine composte e procedure previste per il calcolo del vantaggio meccanico. Ha affrontato problemi pratici come lo spostamento di carichi pesanti con forza limitata, la progettazione di presse e la costruzione di dispositivi di sollevamento–problemi di rilevanza diretta per la costruzione e la pratica strutturale.

Pneumatici, Automata e Trasmissione Il *Pneumatica* esplorato il comportamento meccanico dell'aria e dell'acqua sotto pressione, descrivendo oltre un centinaio di dispositivi tra cui sifoni, fontane, eolipile, e automi alimentati da acqua cadente o aria riscaldata. Mentre molti di questi dispositivi servivano a scopi rituali o di intrattenimento, i principi sottostanti—-trasmissione di pressione, l'elasticità dell'aria, e la conversione dell'energia termica in concetti di movimento meccanico–anticipated centrale a ingegneria successiva.

Hero ha anche scritto su sondaggio (*Dioptra*), artiglieria (*Belopoeee*), e la mensurazione (*Metrica*), dimostrando l'ampiezza delle antiche conoscenze tecniche, le sue opere sono state trasmesse attraverso studiosi bizantini e islamici agli ingegneri rinascimentali come Giovanni Battista della Porta e Simon Stevin, stabilire i precedenti per la progettazione razionale dei sistemi meccanici.

6.3.3 Ibn al-Haytham (c. 965–1040 CE)

Abu Ali al-Hasan ibn al-Hasan ibn al-Haytham è nato a Basra, poi un centro di commercio e di apprendimento importante nei domini Buyid dell'Iraq meridionale. Riceve una formazione approfondita in teologia, matematica e filosofia naturale, e per un tempo ha ricoperto una posizione amministrativa nella sua città natale. In un passaggio auto-biografico, descrive la crescente disenchanted con le rivendicazioni concorrenti di sette religiose, ognuna convinta del suo possesso esclusivo di verità, e volendo invece agli scritti di Aristotele come un percorso verso una certa conoscenza, questo svolta intellettuale ha

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

plasmato il suo impegno duraturo verso l'indagine sistematica fondata sulla dimostrazione e la sperimentazione empirica.

Egitto, il progetto Nilo e la conclusione produttiva L'ambizione di Ibn al-Haytham lo portò in Egitto durante il regno del califfo di Fatimid al-Hakim. Egli affermava che poteva regolare l'alluvione annuale del Nilo, ma dopo aver esaminato il fiume e esaminare i resti di antiche opere idrauliche vicino a Aswan, Il progetto si rese conto che il progetto era al di là dei suoi mezzi, temendo la notoria imprevedibilità del califfo, finì in arresto di geometria e rimase in arresto fino alla morte di al-Hakim nel 1021. Durante questo periodo di seclusione forzata, e negli anni successivi alla sua pubblicazione, Ibn al-Haytham produsse un corpo straordinario di lavoro.

Ottica, Meccanica e Programma Sperimentale Ibn al-Haytham, conosciuto nell'Occidente latino come Alhazen, (Haytham, 1989) è meglio conosciuto per il suo *Kitab al-Manazir* (Libro di ottica), che ha trasformato la comprensione della visione e della luce attraverso la sperimentazione sistematica combinata con l'analisi geometrica.Rifiutando le teorie di emissione precedenti della visione, ha dimostrato che la vista si verifica quando la luce riflessa dagli oggetti entra nell'occhio, e ha sostenuto questa rivendicazione attraverso esperimenti controllati che coinvolgono aperture, lenti e superfici riflettenti.

Anche se la sua reputazione si basa principalmente sulle ottiche, Ibn al-Haytham ha anche affrontato problemi meccanici di rilevanza diretta all'analisi strutturale. e il comportamento dei corpi rigidi sotto carico, analizzando come le forze si propagano attraverso sistemi collegati. comprese le collisioni e il trasferimento di movimento, e ha indagato il movimento di corpi su piani inclinati e proiettili—-ipocriti che in seguito sarebbe centrale per la meccanica presto moderna.

Metodo, trasmissione e significato strutturale Il contributo più duraturo di Ibn al-Haytham può essere metodologico, insistendo sul fatto che le teorie fisiche siano fondate nell'osservazione sistematica, sperimentazione controllata, descrizione matematica, e che il ragionamento speculativo non supportato dall'esperienza sia respinto. Questo approccio disciplinato ha fornito un modello per il metodo scientifico che in seguito è diventato fondamentale sia per l'analisi fisica che per l'ingegneria.

Trascorse i suoi ultimi decenni a Cairo, vivere vicino alla moschea di Al-Azhar e si appoggia copiando manoscritti matematici, morto intorno al 1040, le sue opere furono tradotte in latino nel XII e XIII secolo e esercitarono una profonda influenza sulla scienza europea, plasmando la tradizione ottica attraverso figure come Roger Bacon, Witelo, e, alla fine, Kepler.

6.3.4 Abu Rayhan al-Biruni (973–1048)

Abu Rayhan al-Biruni (973–1048) (Al-Bīrūnī, 1910) Nato a Khwarezm (oggi Uzbekistan), ha trascorso gran parte della sua carriera presso la corte di Mahmud di Ghazna, accompagnando il sultano sulle campagne in India che ha portato alla sua enciclopedia *Kitab fi*

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tahqiq ma li-l-Hind (Il libro di ciò che costituisce l'India), un lavoro pionieristico di studio culturale e scientifico comparativo.

Kitab fi Tahqiq ma li-l-Hind I contributi di Al-Biruni al centro meccanico sul suo approccio sistematico alla misurazione della densità e pesi specifici. Ha progettato e costruito strumenti di precisione per determinare le gravità specifiche di metalli e pietre preziose, ottenendo risultati che si confrontano favorevolmente con i valori moderni. ha esteso i principi Archimedean con attenta attenzione alle fonti sperimentali di errore, stabilendo precedenti metodologici per analisi strutturali successive, riconoscendo che le stesse relazioni matematiche che regolano l'equilibrio dei saldi applicati al comportamento dei materiali in varie condizioni.

La più ampia metodologia scientifica di Al-Biruni —la sua insistenza sull'osservazione sistematica, sulla misura quantitativa e sulla riconciliazione della teoria con i dati empirici – influenza lo sviluppo di approcci al comportamento materiale Le sue misurazioni geodetiche, tra cui un ingegnoso metodo per determinare il raggio terrestre utilizzando le osservazioni di montagna, hanno dimostrato la forza di combinare la teoria matematica con un'attenta misurazione, un paradigma che gli ingegneri strutturali si applicherebbero in seguito all'analisi di edifici e ponti.

6.3.5 Al-Khazini (fl. 1115–1130 CE)

Abd al-Rahman al-Khazini era uno schiavo di origine greca bizantina, portato a Merv nell'Impero Seljuk (oggi Turkmenistan), dove era di proprietà di un funzionario del tesoro di nome al-Khazin, Il suo maestro riconobbe i suoi doni intellettuali e gli fornì una formazione eccezionale in matematica e filosofia naturale. Dopo la manumission, al-Khazini scelse di rimanere a Merv e si dedicò alla borsa di studio, vivendo una vita ascetica e declinando un dono sostanziale di mille dinari dalla moglie del sultano, perché i suoi modesti bisogni erano già soddisfatti da alcuni pani.

Merv all'inizio del XII secolo era una delle grandi città del mondo islamico, un centro di apprendimento che aveva prodotto al-Birun un secolo prima e mantenuto le tradizioni attive in astronomia e le scienze esatte. Al-Khazini ha lavorato all'interno di questo ambiente, servendo come astronomo alla corte di Seljuk e producendo tavoli astronomici (-*Si'*.) dedicato al sultano Sanjar, rifinanziare il lavoro precedente di Omar Khayyam.

Il *Kitab Mizan al-Hikma* e la Scienza dei pesi Il principale risultato scientifico di Al-Khazini è il *Kitab Mizan al-Hikma* (Libro del Bilancia della Saggezza), completato intorno al 1121–1122. Questo straordinario trattato rappresenta uno dei più sofisticati trattamenti medievali della meccanica, esplorando l'equilibrio, bilancia, e idrostatici Lavorando sotto il patrocinio di Seljuk, al-Khazini sintetizzava le conoscenze meccaniche greche—in particolare le opere di Archimede, Euclid, e Menelao—con indagini originali e una raffinata pratica sperimentale.

Il trattato dedica un'attenzione particolare al cantiere e all'equilibrio, tra cui un'analisi dettagliata dei centri di gravità e le precise condizioni necessarie per l'equilibrio. Al-Khazini

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

ha sviluppato procedure sistematiche per determinare le gravità specifiche di sostanze, la compilazione di tavole per quasi cinquanta materiali, tra cui metalli, pietre preziose e liquidi, e l'accuratezza di queste misurazioni non sarebbe superata per quasi cinque secoli.

Idrostatici, precisione sperimentale e metodo Al-Khazini ha esteso i principi Archimedean di galleggiamento, Esaminando come il peso apparente di un corpo varia con la densità del mezzo circostante, riconosce che il peso di un corpo dipende dal fatto che si misura in aria, acqua o un altro fluido—una visione direttamente rilevante all'analisi di sistemi sommersi o parzialmente sommersi. Le sue descrizioni di bilancia idrostatica rivelano strumenti capaci di rilevare le differenze minime di densità, anticipando i saldi di precisione della scienza sperimentale precoce.

Anche se non si tratta di elementi strutturali in senso moderno, *Mizan al-Hikma* Esemplifica un approccio premoderno al ragionamento meccanico fondato su principi fisici, sperimentazioni e misurazioni quantitative, al-Khazini è un legame cruciale tra idrostatici Archimediani e le tradizioni sperimentali successive della meccanica moderna.

Dopo l'inizio del XII secolo, al-Khazini scompare dal record storico, né la data né le circostanze della sua morte sono conosciute.

6.3.6 Villard de Honnecourt (fl. c. 1225–1250)

Nulla è conosciuto della vita di Villard oltre a ciò che si può dedurre dal portafoglio di disegni che porta il suo nome, ora conservato nella Bibliothèque nationale de France. Un'iscrizione nel manoscritto lo identifica come da Honnecourt, un villaggio a Picardy vicino a Cambrai nel nord della Francia. I disegni stessi suggeriscono una carriera itinerante, che include schizzi delle cattedrali di Laon, Reims, Chartres, e Meaux, così come la chiesa cistercense a Vaucelles, Un folio rappresenta un progetto di pavimentazione ungherese, che indica un viaggio lungo i siti di costruzione della Francia del XIII secolo. suggerendo che i viaggi di Villard si estendessero ben oltre la sua regione natale.

Se Villard fosse un maestro muratore, un architetto, un impiegato di case, o semplicemente un osservatore istruito rimane una questione di disputa scientifica. La sofisticazione tecnica irregolare dei disegni ha portato alcuni storici a mettere in discussione la sua posizione professionale, mentre altri sottolineano la vastità dei suoi interessi e la coerenza del suo pensiero geometrico.

Contenuto, Attribuzione e il problema dell'autorizzazione Il portafoglio contiene piani e altitudini architettonici, dettagli di costruzione gotica, compresi i contrafforti volanti e la traccia, dispositivi meccanici come una sega azionata ad acqua e una macchina perenne-mozione, schemi geometrici per il taglio della pietra, e disegni di figure umane e animali ridotti a quadri geometrici astratti. Le mani successive hanno aggiunto materiale al manoscritto, complicando l'attribuzione dei singoli fogli e rendendo difficile distinguere il proprio lavoro di Villard dalle accrezioni successive.

Ciò che resta al di là del dubbio è che il manoscritto offre una rara finestra nella conoscenza

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

pratica che circola tra costruttori gotici—-conoscenza in gran parte trasmessa oralmente all'interno di logge e laboratori e raramente impegnata a scrivere.

Geometria, progettazione empirica e pratica strutturale gotica Villard de Honnecourt *Portfolio* (De Honnecourt, 1858) fornisce una visione rara e inestimabile del disegno empirico medievale metodi. Comprigione di trentatrè foglie di pergamena (MS Fr 19093) e circa 250 disegni, il manoscritto documenta la geometria pratica e l'immaginazione costruttiva che sorvolava l'architettura gotica.

Di particolare importanza sono le procedure geometriche di Villard per la proporzionalizzazione e la disposizione. *ad un quadratum* e *ad un triangulum*, utilizzando quadrati rotanti, poligoni inscritti e costruzioni proporzionali per relazionare piano, elevazione e sezione. Questi metodi regolavano il taglio di pietra, il layout di volte, pinnacoli, tracciatura, e il coordinamento di sistemi spaziali complessi senza ricorrere al calcolo numerico.

Intuizione strutturale prima della Meccanica formale Il portafoglio illustra come la geometria, la proporzione e l'esperienza accumulata hanno guidato la comprensione del comportamento strutturale I costruttori gotici hanno raggiunto straordinarie realizzazioni strutturali—le volte in pietra che spaziano da vasti spazi, sistemi di smistamento che hanno reindirizzato la spinta al suolo, torri di altezza senza precedenti–senza teorie formali di forza o di equilibrio. Il loro successo dipendeva da regole empiriche, controllo geometrico e la memoria collettiva di ciò che aveva lavorato prima.

Il portafoglio di Villard è un testamento di questa fusione di conoscenza artigianale e intuizione strutturale, che cattura un momento di transizione nella storia dell'analisi strutturale, dove la geometria non funzionava come matematica astratta, ma come strumento operativo incorporato nella pratica costruttiva.

6.4 Architettura, Proporzione e Forma Umanista

Questo raggruppamento riflette una tradizione in cui *struttura*, *proporzione*La comprensione meccanica è stata incorporata implicitamente in regole di armonia, di precettivo classico e di ideali umanisti, piuttosto che espresse attraverso il calcolo. La stabilità e la trasmissione del carico sono state colte attraverso la forma e la proporzione molto prima che esistesse l'analisi strutturale formale.

6.4.1 Leon Battista Alberti (1404-1472)

Alberti[2] Nato a Genova, il figlio illegittimo di Lorenzo Alberti, ricco mercante fiorentino che poi vive in esilio a causa delle disgrazie politiche della sua famiglia, ricevette un'educazione

[2]Ulteriori informazioni sui contributi di Alberti §15.2.2.1.

COPIA DI REVISIONE

umanista di eccezionale ampiezza, studiando i classici a Padova e canone a Bologna, dove perseguì anche la matematica e le scienze naturali.

Alberti prese ordini santi e si assicurò una posizione come abbreviatore papale a Roma, un peccatore che forniva reddito lasciando tempo per la borsa di studio. Non sposò mai, viveva modestamente nonostante le opportunità di predisposizione, e coltivava un ampio cerchio di corrispondenti tra i principali umanisti, artisti e principi della sua età.

Le sue commissioni architettoniche erano poche ma influenti: il Tempio Malatestiano a Rimini, la facciata di Santa Maria Novella e Palazzo Rucellai a Firenze, e le chiese di San Sebastiano e Sant'Andrea a Mantova. A differenza di Brunelleschi, Alberti non supervisionò la costruzione stessa, ma fornì disegni che altri eseguirono, stabilendo la concezione moderna dell'architetto come autore intellettuale piuttosto che maestro costruttore.

6.4.2 Leonardo da Vinci (1452–1519)

Leonardo da Vinci, Fig. 6.1, nacque il 15 aprile 1452 nella cittadina di Vinci, nella Repubblica di Firenze. Era figlio illegittimo di Ser Piero, notaio fiorentino, e di una contadina di nome Caterina. In quanto *figlio naturale*, Leonardo non poteva ereditare il nome né la professione del padre; l'appellativo *da Vinci* significa semplicemente «originario di Vinci» e indica il luogo di provenienza, non un cognome. Cresciuto soprattutto presso i parenti paterni, ricevette un'istruzione elementare nella lettura, nella scrittura e nell'aritmetica, ma poca formazione in latino, la lingua degli studiosi. Questa esclusione dall'educazione umanistica si rivelò paradossalmente vantaggiosa: libero dalle convenzioni scolastiche e dal commento aristotelico, Leonardo sviluppò un metodo di conoscenza fondato sull'osservazione diretta, sul disegno e sul confronto, anziché sull'autorità dei testi. Fu il massimo esempio dell'ideale rinascimentale del genio universale; i suoi taccuini documentano studi pionieristici di meccanica strutturale che anticiparono di secoli sviluppi successivi. Migliaia di pagine di disegni e annotazioni, redatte nella caratteristica scrittura speculare, testimoniano indagini in quasi ogni campo della filosofia naturale e dell'ingegneria.

Formazione e Fusione di Arti e Meccanica All'età di quattordici anni Leonardo è apprendistato ad Andrea del Verrocchio a Firenze, uno dei più grandi artisti e ingegneri del periodo, dove è stato formato nel disegno, nella pittura, nella scultura, nella metallurgia, nella stesura e nella progettazione meccanica.

Questa esperienza formativa ha plasmato il modo di indagine di Leonardo per tutta la vita: intensamente visivo, diagrammatico e sintetico.laboratorio di ricerca, instillando in Leonardo l'abitudine di trattare problemi artistici, meccanici e naturali come variazioni di un processo investigativo comune.

Vita privata e pratiche di scrittura Leonardo è ampiamente creduto di essere omosessuale. Nel 1476, lui e molti altri sono stati accusati in forma anonima di sodomia, poi di un reato criminale a Firenze. Sebbene assolto per mancanza di prove, non ha mai sposato e non ha espresso alcun documento di interesse romantico per le donne.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

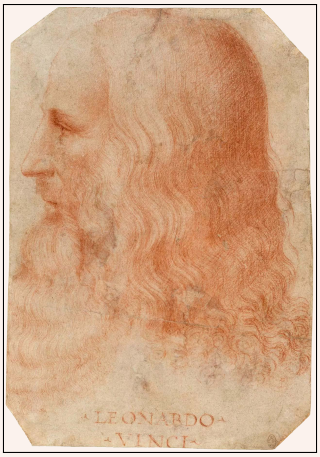
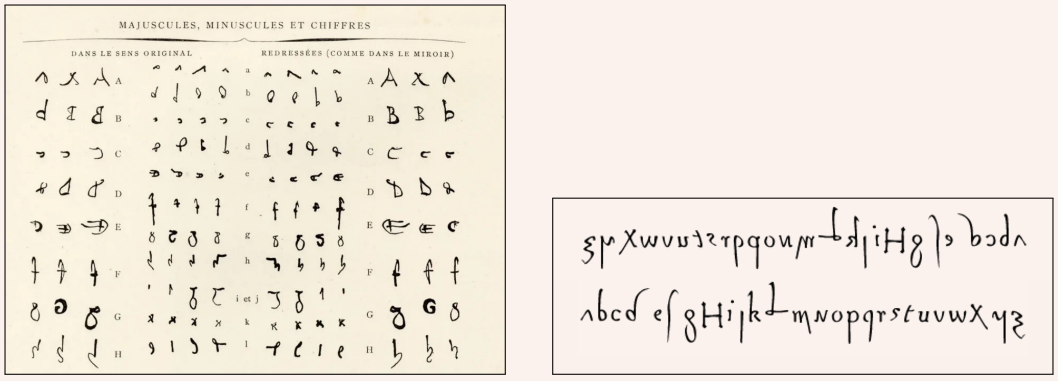


Figura 6.1: Leonardo da Vinci

Mancino e lavora principalmente con trapano e inchiostro, Leonardo sviluppò l'abitudine distintiva di *scrittura specchio*Se adottato per evitare di smudging, come forma di disciplina mnemonica, o come mezzo di privacy rimane incerto, la pratica, unitamente a ortografia idiosincratica e abbreviazioni, rendeva i suoi quaderni difficili da leggere e da contribuire alla loro successiva obscurità, Fig. 6.2Alcuni studiosi hanno suggerito che questa opacità riflette anche il desiderio di schermare idee non ortodosse in un'epoca in cui la novità intellettuale potrebbe provocare sospetti.



(a) Decifrazione (b) Alfabeto

Figura 6.2: La scrittura dello specchio di Leonardo spiega

Milano: Patronato, Osservazione e Diritto Naturale Gli anni più produttivi di Leonardo furono trascorsi a Milano sotto il patrocinio di Ludovico Sforza, a partire dal 1482, e vi produsse opere monumentali come il *Ultima cena*, mentre serve anche come designer di intrattenimento cortese, fortificazioni militari e sistemi idraulici. Suoi quaderni da questo periodo—poi assemblati in collezioni come *Codice Atlantico* e la *Codice Madrid*—documento una gamma sorprendente di indagine: anatomia, meccanica, ottica, idraulica, volo e forma urbana.

COPIA DI REVISIONE

Leonardo credeva che la natura obbedisse alle leggi scopribili, ma a differenza degli scienziati successivi non cercava queste leggi attraverso la deduzione matematica, invece, le perseguiva attraverso una meticolosa osservazione visiva, un'analogia e uno schizzo ripetuto. Il suo lavoro segna un momento di transizione tra la filosofia naturale medievale, fondata nell'autorità, e l'indagine empirica che caratterizzava la scienza del primo moderno.

"La mobilita è la causa di tutta la vita".

Questa convinzione anima i suoi quaderni, che sono pieni di ingranaggi rotanti, acqua fluente, travi flettenti, articolati giunti, e muscolatura dissezionata, tutti resi con una chiarezza che fonde intuizione artistica e ragionamento meccanico.

Ingegneria Visione e Intuizione Strutturale Leonardo concepisce una straordinaria gamma di progetti tecnici: macchine volanti a vite, paracadute, veicoli blindati, dispositivi di sollevamento e ponti rotanti. Pochi sono stati costruiti, ma la loro portata concettuale lo avvicina ad un ingegnere speculativo rispetto ad un artigiano convenzionale del quattrocento.

Di particolare rilevanza per l'analisi strutturale sono le sue indagini sulla forza dei materiali, del comportamento del fascio, dell'azione dell'arco e del rapporto tra forma e carico. Questi studi non hanno il formalismo matematico della meccanica successiva, ma dimostrano una consapevolezza emergente che il comportamento strutturale potrebbe essere analizzato sistematicamente piuttosto che dalla regola del pollice.

Forza dei materiali e del comportamento del fascio Gli studi strutturali di Leonardo sono notevoli per la loro combinazione di osservazione empirica, sperimentazione e speculazione teorica. Ha indagato la forza dei materiali, conducendo esperimenti sulla capacità di trazione dei fili di ferro e sulla forza di rottura dei travi di legno. Ha studiato il rapporto tra le dimensioni di un fascio e la sua capacità di carico, riconoscendo che la resistenza alla flessione dipende sia dall'ampiezza che dal quadrato della profondità, un'intuizione formalizzata *Due nuove scienze* più di un secolo dopo.

Arches, Vaults e guasti strutturali Le sue indagini sugli archi e le volte sono altrettanto prescienti. Leonardo ha analizzato come i carichi siano distribuiti attraverso strutture ad arco, ha riconosciuto che l'arco "mai si rompe se l'accordo dell'arco esterno non tocca l'arco interno"""" e ha studiato il rapporto tra forma e spinta dell'arco.

Biomeccanica e Analogia strutturale Leonardo studiò anche la meccanica del corpo umano, riconoscendo analogie tra strutture anatomiche e sistemi di ingegneria, la colonna vertebrale come colonna, il braccio come leva, i tendini come cavi, che arricchirono la sua comprensione dell'azione strutturale. Durante le sue indagini, Leonardo riconobbe l'unità tra osservazione, sperimentazione e astrazione matematica, ponendo basi concettuali critiche per la scienza delle strutture. Sebbene i suoi taccuini rimasero inediti fino al XIX secolo, documentano una mente che si impegna con problemi strutturali a un livello di sofisticazione ineguagliabile fino alla Rivoluzione Scientifica.

Arte, Complezione e Selettiva Legacy Nonostante i suoi straordinari doni, Leonardo completò relativamente pochi lavori, abbandonando spesso le commissioni, guidate dal

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

perfezionismo o dalla spinta di nuovi problemi intellettuali, ma le opere che fece completa—comprese *Monna Lisa Uomo Vitruvico*e la *Ultima cena*–became che dura le icone, notabili non solo per l'innovazione estetica ma per la loro integrazione di anatomia, proporzione e struttura spaziale.

Anni finali in Francia Nei suoi ultimi anni Leonardo entrò al servizio di Re Francesco I di Francia. Nel 1516 si trasferì al castello di Clos Luce vicino ad Amboise, ricevendo il titolo onorario di "Premier Painter and Engineer and Architect of the King"' Morì lì nel 1519, lasciando dietro migliaia di pagine di disegni e note. Molti furono dispersi o persi, ma molti sopravvissero ad essere riscoperti secoli dopo.

La sua morte segna la chiusura di un'epoca in cui un singolo individuo poteva plausibilmente perseguire la conoscenza universale, la rapida espansione della specializzazione scientifica che seguiva renderebbe presto tale ampiezza inattaccabile.

Codices, Folios, e il Manuscript Legacy A *Codice* (plurale: *codici*) è un volume di manoscritti legato, al contrario di una pergamena. I codici di Leonardo sono costituiti da schizzi, note e descrizioni che spaziano dalla meccanica, dalla geometria, dalla pittura, dall'anatomia e dall'ingegneria.

A *il mio libro* (plurale: *il mondo*) si riferisce ad una singola foglia all'interno di un manoscritto; i contenuti appaiono generalmente sia sul retto che sul verso, anche se solo un lato è numerato; molti dei manoscritti di Leonardo sono costituiti da fogli liberamente raccolti piuttosto che da volumi formalmente legati.

Tabella 6.1 elenca i principali codici sopravvissuti attribuiti a Leonardo da Vinci, con le loro posizioni e contenuti attuali.

Insieme questi codici costituiscono una parte centrale del patrimonio scientifico e ingegneristico di Leonardo da Vinci, alcuni manoscritti minori o frammentari, ma quelli elencati qui sono i più completi e studiati. (Vinci, 1938).

Un'indagine pittorica del pensiero strutturale e architettonico di Leonardo Una pubblicazione notevole che cattura l'ampiezza del genio di Leonardo è (Istituto Geografico De Agostini, 1956)Perché Leonardo ha contribuito a plasmare la nostra comprensione collettiva sia dell'arte che della scienza, e perché ha dedicato un'attenzione costante a due temi centrali a questo libro (architettura e strutture)—Io do questo volume trattamento speciale: prima attraverso il seguente riassunto, e poi riproducendo le pagine pertinenti per il lettore.

Questa decisione si discosta dalla mia consueta pratica, e in questo libro sono stato attento a includere solo figure che possono essere individualmente riferite nel testo, e sono stato altrettanto attento a garantire che la loro dimensione non sopraffa la pagina. Leonardo da Vinci, tuttavia, si distingue: anche se non ci ha lasciato un'unica equazione, la pura originalità della sua mente garantisce un trattamento speciale in materia di illustrazione. (Istituto Geografico De Agostini, 1956)Anche se ridotto per adattarsi alla pagina, il testo rimane facilmente leggibile semplicemente ingrandindo (o facendo clic sull'icona PDF accanto alla citazione per scaricare il documento completo).

COPIA DI REVISIONE

Tabella 6.1: Codices di Leonardo da Vinci, (Vinci, 1938)

Codice	Data	Location	Contenuto
Codice principale			
Codice Atlantico	c. 1478–1519	Biblioteca Ambrosiana, Milano	Meccanica, geometria, volo, macchine militari.
Codice Arundel	c. 1480–1518	Biblioteca Britannica, Londra	Note sulla meccanica, ottica e geometria.
Codice Madrid I & II	c. 1490–1505	Biblioteca Nacional, Madrid	Statici, meccanici, ingranaggi, fortificazioni.
Codice Forster I–III	c. 1490–1505	Victoria and Albert Museum, Londra	Idraulici, pesi, scienze naturali.
Codice Leicester (Hammer)	c. 1506–1510	Collezione privata	Idrodinamica, fossili, luce, astronomia.
Codice Trivulziano	c. 1487–1490	Biblioteca Trivulziana, Milano	Elenchi vocabolari e studi architettonici.
Codice Ashburnham I & II	fine 1400	Institut de France, Parigi	Frammenti di altri codici.
Codice sul volo degli uccelli	c. 1505	Biblioteca Reale di Torino	Studi di volo e aerodinamica degli uccelli.
Codice Urbina	compilato c. 1570	Biblioteca Vaticana	Trattasi sulla pittura (postumo).
Codices secondario e Fragmento			
Collezione Codex Windsor	c. 1490–1510	Collezione reale, Windsor	Disegni anatomici e scientifici.
Codice Vaticano	c. 1480s–1490s	Biblioteca Vaticana	Studi matematici e architettonici.
Codex Paris (A–E)	vari	Institut de France, Parigi	Meccanica, ottica, geometria.
Codex C (serie Paris)	c. 1500	Institut de France, Parigi	Statici ed equilibrio.
Codice R	c. 1503–1505	Institut de France, Parigi	Geometria, pesi, anatomia.
Codice sulbiate	fine 1400	Sconosciuto / dispersi	manoscritto architettonico minore.

Leonardo come Investigatore Strutturale La parte “Scienza delle Strutture” di (Istituto Geografico De Agostini, 1956) tratta Leonardo come un primo, insolitamente autocosciente ricercatore di quello che oggi chiamiamo forza dei materiali e dei comportamenti strutturali, avvicinato attraverso esperimenti, ragionamenti proporzionali e l’attento interrogatorio del fallimento. La sezione si apre collegando forme costruttive in evoluzione all’accumulazione graduale di concetti scientifici e pratici, invitando esplicitamente una lettura storica-tecnica della forma strutturale piuttosto che una puramente stilistica.

All’interno di tale cornice, le note manoscritte di Leonardo sono presentate come tentativi di esprimere forza in termini di dimensioni relative (altezza, spessore e proporzione), e come sforzi per collegare “misurements e ratios” alle esigenze che le macchine e le strutture devono resistere.

Il libro sottolinea anche il suo interesse per l’azione composita e la rigidità/forza guadagni

COPIA DI REVISIONE

da elementi di bundling, per esempio notando la sua affermazione che le canne rilegate possono portare molte volte ciò che le singole canne portano — una intuizione precoce circa l'effetto strutturale di assemblare i membri deboli in un sistema.

Infine, la sezione delle strutture mette in evidenza l'immaginazione sperimentale di Leonardo attraverso un concetto di apparato per la prova della trazione: propone una configurazione controllata per caricare un filo di ferro (usando aggiunte misurate di peso), ripetere il test a lunghezze diverse, e registrare dove / come si verifica il fallimento, mirando in modo esplicito a generalizzare da ripetute prove ad una "legge" di forza di supporto attraverso materiali e configurazioni.

Leonardo come architetto La parte di architettura (Istituto Geografico De Agostini, 1956 PDF) si ribella al trattamento di Leonardo principalmente come pittore con interessi architettonici "incidentali", sostenendo che tale borsa di studio è stato troppo spesso frammentario e unilaterale e quindi manca l'unità del suo lavoro.

Le targhe e i commenti evidenziano come si muove tra elementi architettonici concreti (piani di chiesa e interni, facciate, schemi a cupola, fronti di palazzi, torri) e questioni più generali su proporzione, organizzazione spaziale, e l'ordinamento etico/razionale dell'ambiente costruito.Un tema ricorrente è la dipendenza di Leonardo dall'analogia come strumento esplicativo legittimo: il testo nota che, quando si propone una soluzione specifica per l'analogia di un *Tiburio* (la torre di incrocio) della Cattedrale di Milano, si rivolge ai principi che si trovano a quelli che sono alla base della "sinosità fisica" di un essere umano, suggerendo che la rettitudine strutturale e la coerenza organica sono regolate da regole parallele.

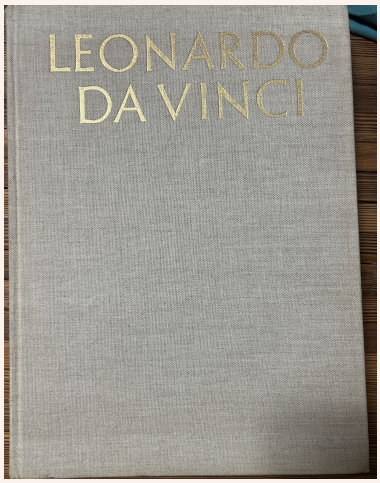
La sezione architettonica insiste anche sul fatto che il semplice conteggio di disegni o motivi di catalogazione non può rispondere alle vere domande interpretative; ciò che conta è come gli schizzi funzionino come parte di una pratica investigativa in evoluzione. Tratta esplicitamente (e in gran parte licenzia) il vecchio dibattito sul fatto che i disegni architettonici di Leonardo fossero "solo" concettuali: anche quando alcuni fogli possono essere letti come dimostrativi "compagnia architettonica" (conseguenti fatti di studio statistico)

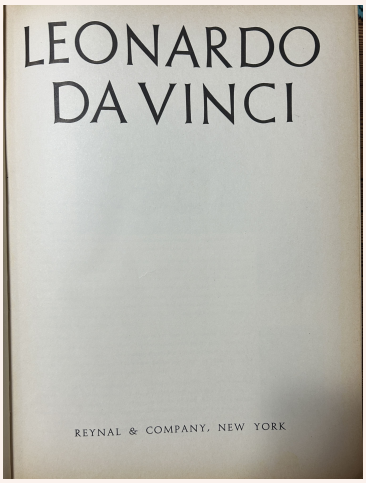
La narrazione è cauto anche riguardo alle storie di attribuzione e di "influenza" e soprattutto al Bramante: avverte che le conclusioni sull'influenza diretta delle somiglianze superficiali sono spesso disperate, e chiede la discriminazione cronologica e concettuale piuttosto che le ampie rivendicazioni di collaborazione spirituale o di un maestro "superiorità" che viene spiegato da un'altra influenza, che si abbina a un'immagine di Leonardo come un metivo documentale

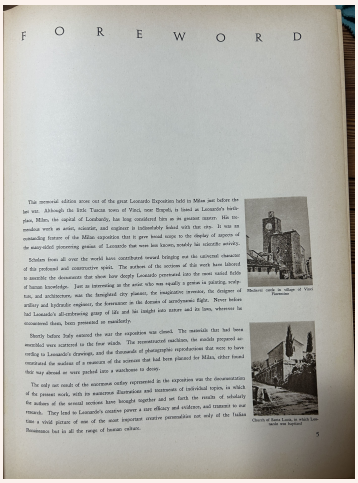
Anche la dimensione urbana appare, attraverso schemi come comunicazioni e edifici disposti con strade rialzate e quartieri urbani organizzati, mostrando che l'architettura si estende qui dai tipi di costruzione alle infrastrutture e alla forma urbana. Assunti insieme, le parti di architettura e strutture presenti a Leonardo non come designer che occasionalmente "sketched building", ma come pensatore per il quale la forma architettonica, la necessità

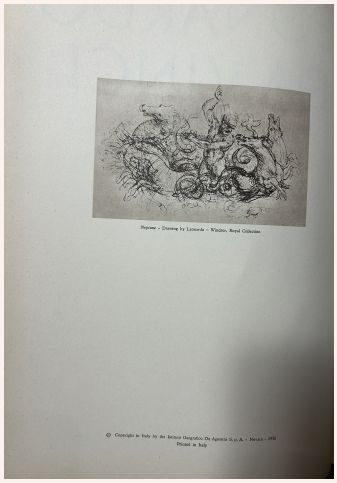
COPIA DI REVISIONE

strutturale, la misura, l'analogia e l'esperimento appartengono ad un metodo continuo, fatto leggibile qui attraverso estratti manoscritti e piastre che mantengono l'ingegneria domande (supporti, travi, cupole, archi, circolazione della città) in dialogo costante con quelli architettonici.



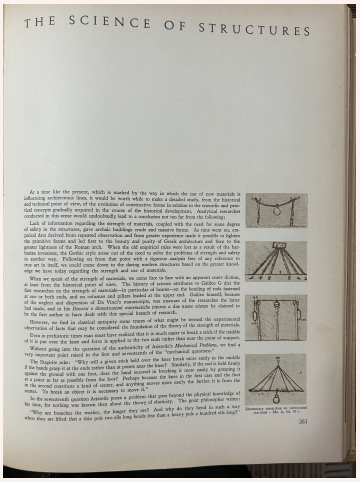


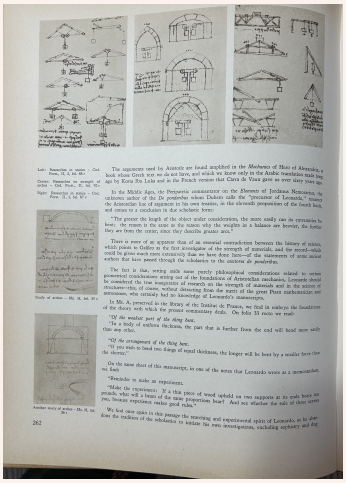


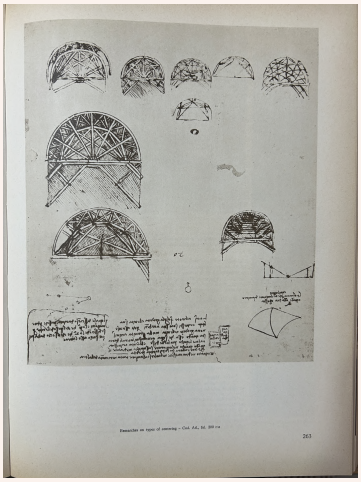


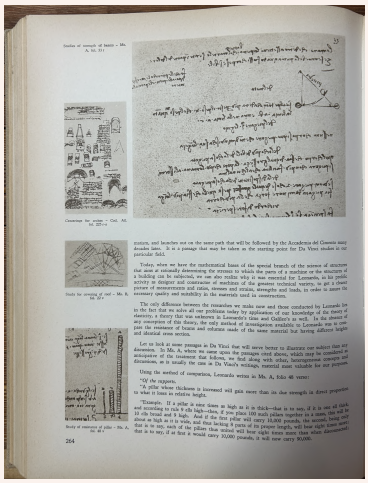
Scienza delle strutture

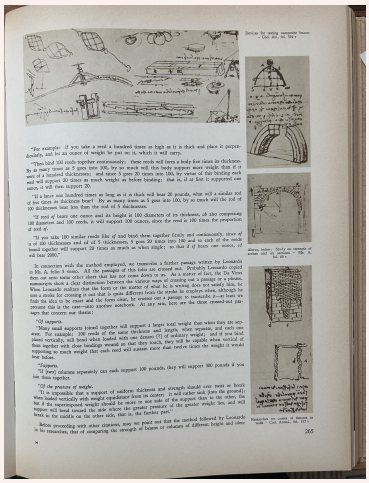
COPIA DI REVISIONE

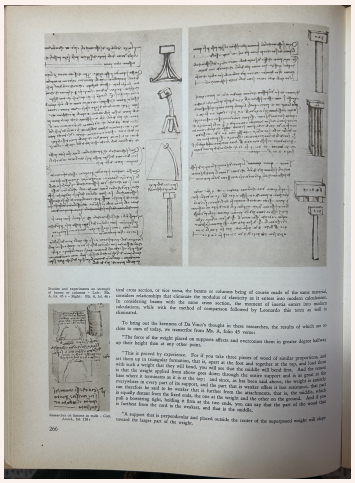

THE SCIENCE OF STRUCTURES

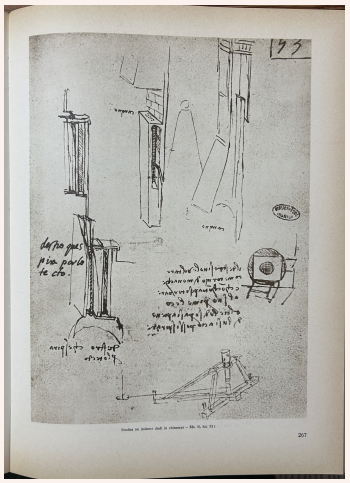


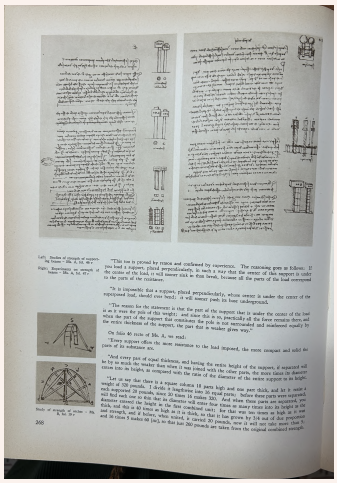


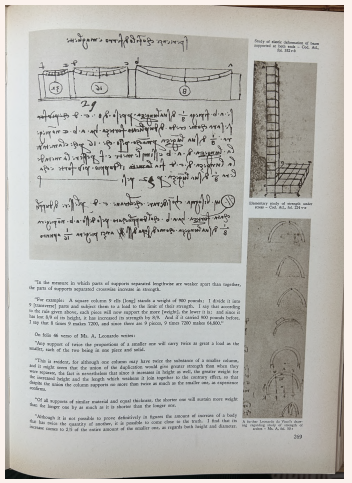






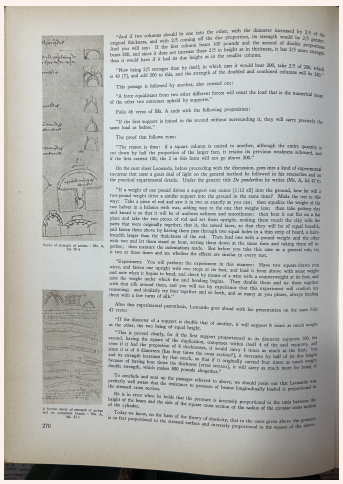


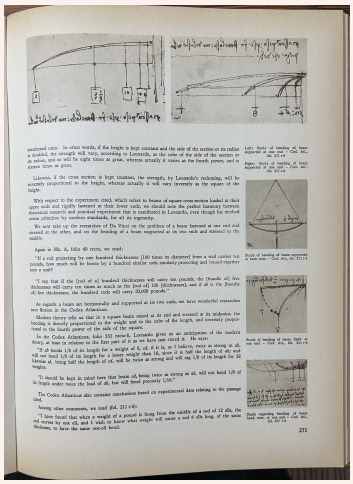


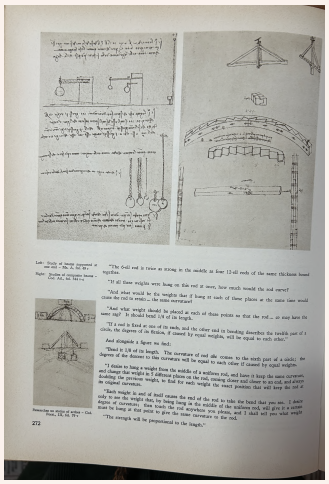


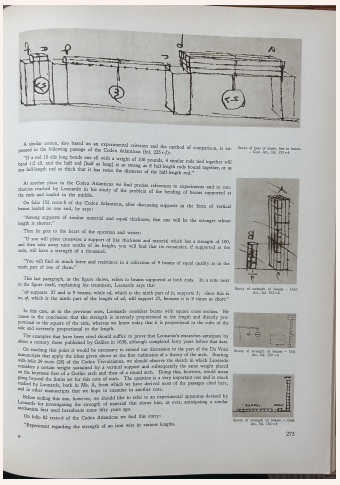
COPIA DI REVISIONE

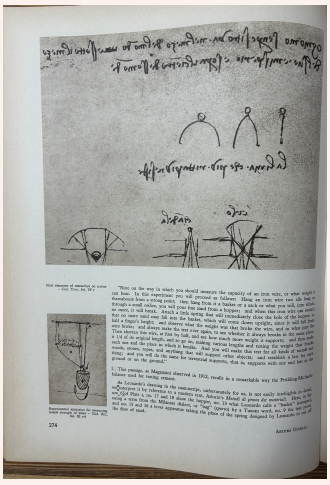
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

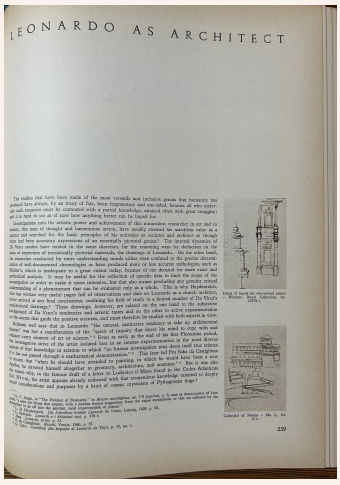




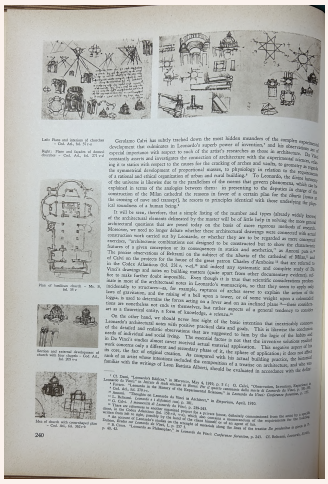


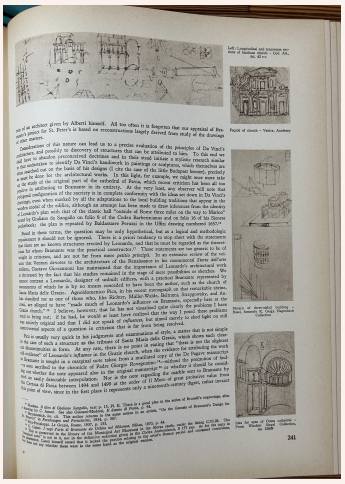


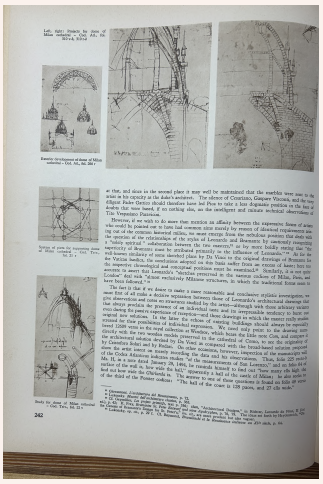




Architetto

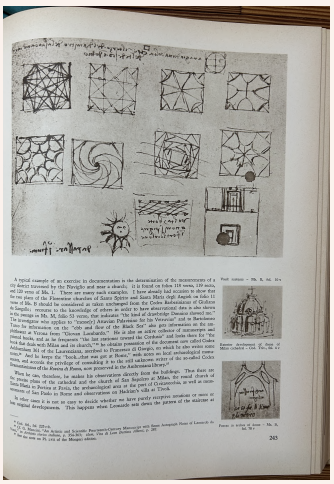
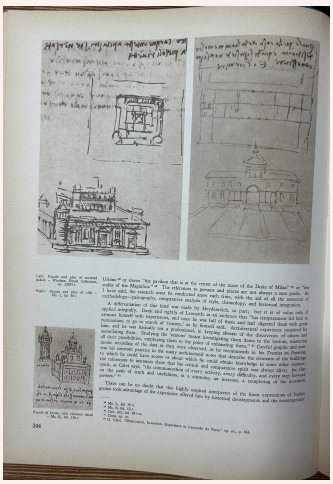


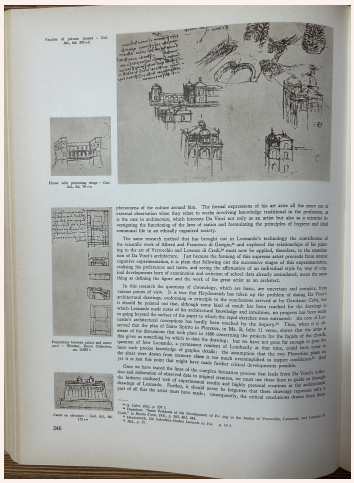
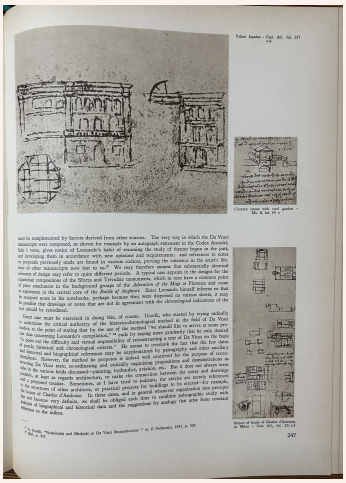
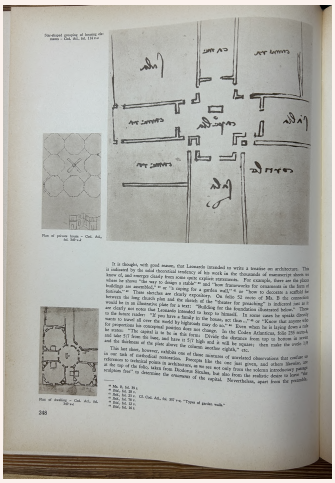
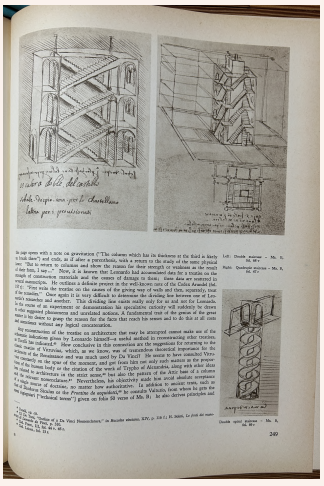
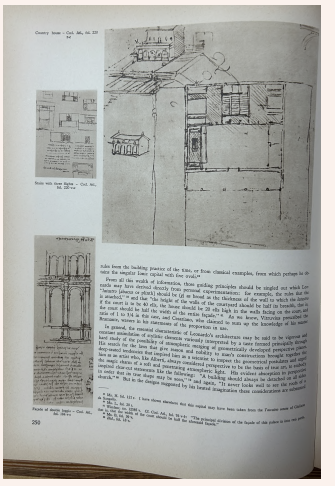
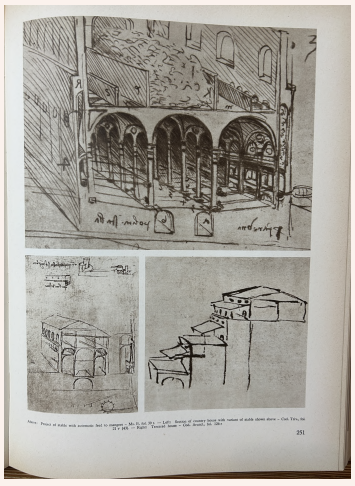




COPIA DI REVISIONE

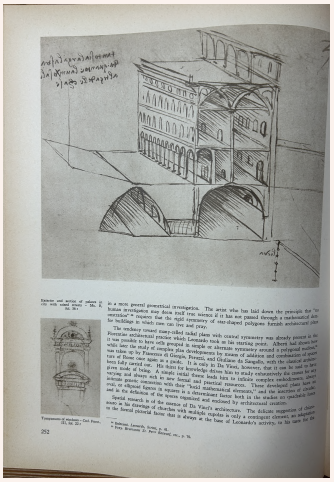
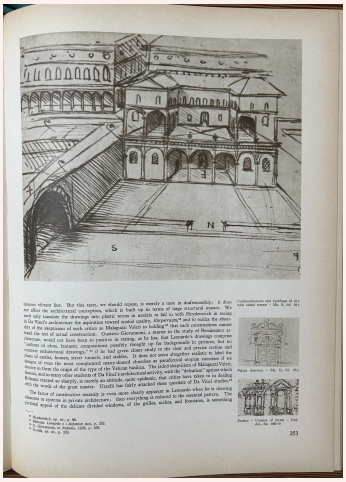
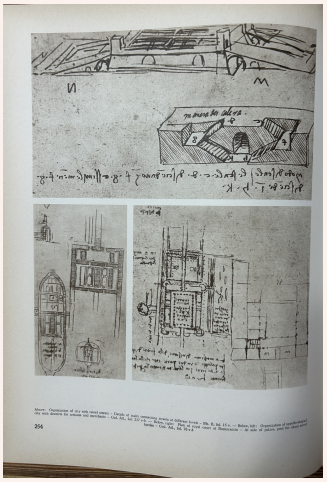
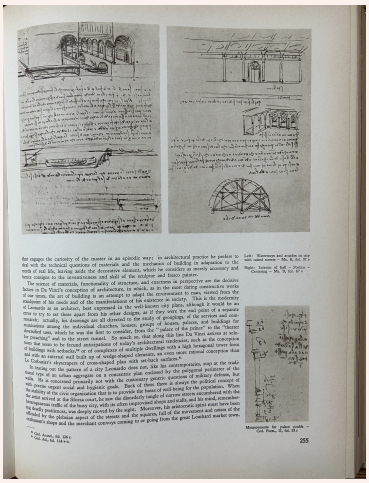
Libro I: Una breve storia della meccanica e dell'analisi strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

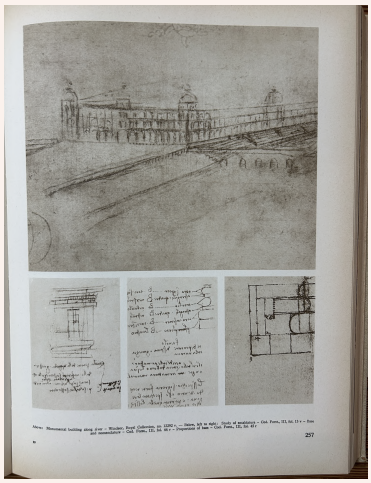



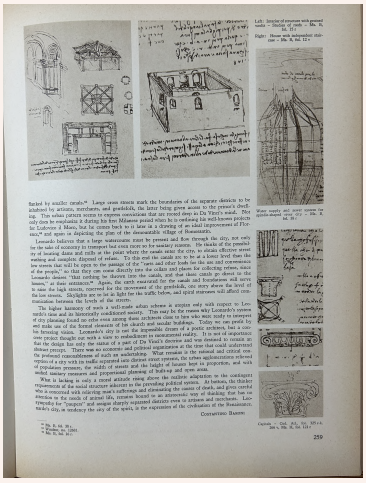
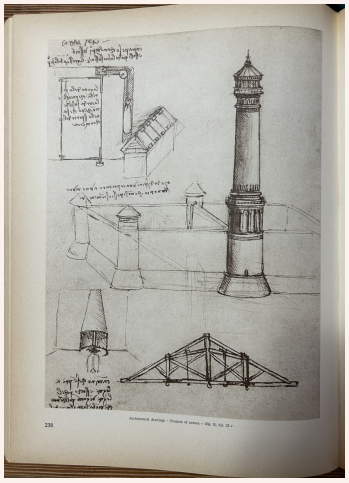







COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



COPIA DI REVISIONE

Libro I: Una breve storia della meccanica e dell'analisi strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

6.4.3 Andrea Palladio (1508–1580)

Nato a Padova nel 1508 come Andrea di Pietro della Gondola, Palladio[3] si trasferì a Vicenza nel 1520 e, a circa sedici anni, fu iscritto (1524) nella gilda locale di muratori e marminetti; per circa il decennio successivo lavorò come muratore e scultore, con documenti che lo descrivevano come un *Lapida* La sua educazione iniziale era quindi pratica piuttosto che scientificamente, radicata nei materiali, nelle tecniche costruttive e nelle realtà dei siti di costruzione, un'esperienza formativa che avrebbe plasmato definitivamente la sua visione architettonica, basando il suo lavoro teorico in logica costruttiva piuttosto che pura speculazione estetica.

Nel 1530, un punto di svolta decisivo, quando il poeta e studioso umanista Gian Giorgio Trissino notò il suo lavoro mentre lo impiegava per costruire progetti e lo portò sotto il suo patrocinio. Trissino riconobbe il suo talento, gli diede il nome di classicizzazione "Palladio'—dopo Pallas Athena—— e lo introdusse all'apprendimento umanista. Immerso nello studio dell'antica architettura romana e di Vitruvio (disponibile in stampa fin dalla fine del XV secolo), Trissino incoraggiò l'educazione classica di Palladio e lo accompagnò in viaggi di studio a Roma, dove studiò sistematicamente e misurava i monumenti antichi in prima persona. Questi incontri con l'architettura romana hanno fornito il quadro intellettuale che gli ha permesso di sintetizzare la forma classica con la pratica dell'edilizia contemporanea.

Dal 1540 circa, Palladio riceveva commissioni architettoniche e si elevava pubblicamente nel ruolo per cui divenne famoso. Basato principalmente a Vicenza, divenne l'architetto più influente del tardo Rinascimento, progettando ville, palazzi e chiese in tutto il Veneto.

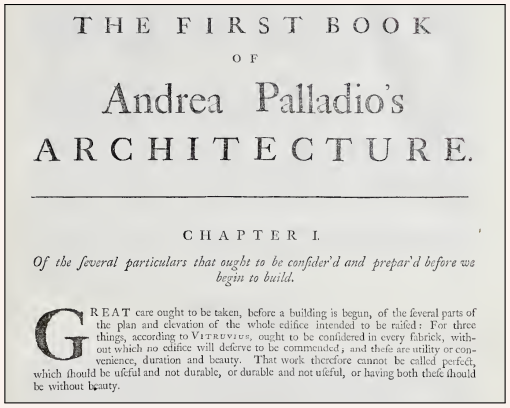
Andrea Palladio (1508–1580) (Palladio, 1570 PDF) si è continuato a diventare probabilmente l'architetto più influente del Rinascimento—-e forse di tutta l'architettura occidentale. *I Quattro Libri dell'Architettura* (I Quattro Libri di Architettura), pubblicati a Venezia nel 1570, sintetizzarono la teoria architettonica classica con rigorose istruzioni pratiche nel più influente trattato architettonico mai scritto. L'opera combinava principi teorici, misurava disegni di antichi edifici romani, e presentazioni dettagliate delle proprie opere di Palladio in un manuale di progettazione completo che ha plasmato l'architettura in tutto il mondo per secoli.[4]

[3] Ulteriori dettagli sul suo contributo possono essere trovati in §15.2.2.2.

[4] L'attento lettore avrà notato che il titolo dell'opera attuale rende omaggio al capolavoro palladio, che confessa di aver preso in prestito con più ammirazione che colpa, sperando che qualche piccola misura della chiarezza e della sistematizzazione del maestro veneziano, con la magia simpatica, infonda queste pagine. Palladio ha organizzato l'arte dell'architettura in quattro libri; cerchiamo lo stesso per la scienza delle strutture. *Quattro Libri*La longevità cinquecentesca rimane, misericordiosamente, per le generazioni future a giudicare.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



THE FIRST BOOK
OF
Andrea Palladio's
ARCHITECTURE.

CHAPTER I.

Of the feveral particulars that ought to be conſider'd and prepar'd before we begin to build.

GREAT care ought to be taken, before a building is begun, of the feveral parts of the plan and elevation of the whole edifice intended to be raiſed: For three things, according to VITRUVIUS, ought to be conſidered in every fabrick, without which no edifice will deſerve to be commended; and theſe are utility or convenience, duration and beauty. That work therefore cannot be called perfect, which ſhould be uſeful and not durable, or durable and not uſeful, or having both theſe ſhould be without beauty.

Figura 6.3: Palladio (Palladio, 1570 PDF)

6.4.4 Sebastiano Serlio (1475–1554)

Sebastiano Serlio nacque a Bologna nel 1475 e si alleò come pittore prima di rivolgersi all'architettura. Ha lavorato a Roma nel 1510 e 1520, dove ha assorbito le lezioni di antichi monumenti e l'opera di Bramante e Peruzzi. Dopo il Sack di Roma nel 1527, si trasferì a Venezia e poi in Francia, dove servì Francesco I e lavorò sul castello di Fontainebleau. Morì a Fontainebleau intorno al 1554.

Tutte le opere d'arte Serlio ha rivoluzionato la trasmissione della conoscenza architettonica privilegiando la chiarezza visiva sull'esposizione testuale. *Tutte le opere d'arte* (Completi lavori sull'architettura) (Serlio, 1996), pubblicato in radure tra il 1537 e il 1575, fu il primo trattato architettonico progettato principalmente intorno alle illustrazioni. Dove Alberti e Vitruvio avevano scritto densa prosa teorica, Serlio forniva centinaia di illustrazioni di taglio di legno accompagnate da spiegazioni pratiche accessibili a costruttori, patroni e architetti.

L'approccio di Serlio democratizzò l'architettura classica, rendendo disponibili i principi del design antico e rinascimentale ai professionisti in tutta Europa che non avevano accesso agli edifici italiani o all'educazione umanistica.—Tuscan, Doric, Ionic, Corinthian e Composite—presenta ogni ordine attraverso diagrammi sistematici che mostrano relazioni proporzionali, profili di stampaggio e dettagli di montaggio.

Il trattato fu tradotto in olandese, tedesco, francese, spagnolo e inglese, diventando il libro architettonico più diffuso del XVI secolo. L'uso di Serlio di diagrammi per comunicare le regole geometriche per il design prefigurava l'importanza dei metodi grafici. nell'analisi strutturale.

6.4.5 Giacomo Barozzi da Vignola (1507–1573)

Giacomo Barozzi da Vignola (1507–1573) (Vignola, 1969) codificato i cinque ordini classici in un preciso sistema modulare che divenne il riferimento standard per la pratica architettonica

COPIA DI REVISIONE

e ingegneristica per oltre tre secoli. *Regola dell'architettura* (Rule of the Five Orders of Architecture), pubblicato per la prima volta nel 1562, conseguì ciò che non aveva precedenti trattati: una presentazione completamente sistematica, matematicamente precisa e visivamente chiara delle proporzioni classiche che qualsiasi professionista competente poteva applicare.

L'innovazione di Vignola è metodologica, ha stabilito il modulo, definito come il raggio della colonna alla sua base, come unità fondamentale da cui derivano tutte le altre dimensioni. Ogni elemento di ogni ordine, altezza della colonna, proporzioni di entablature, profili di base e di capitale, intercoloniazione, è espresso come una frazione o più di questo modulo.

Regola dell'architettura 1562 Il *Regola* È notevole per la sua economia, che consiste quasi interamente in trentadue lastre incise con testo minimale, sufficiente per spiegare il sistema proporzionale, che la rendono straordinariamente pratica: architetti e costruttori potrebbero estrarre le informazioni necessarie a colpo d'occhio. Il libro ha attraversato centinaia di edizioni e traduzioni, rimanendo in stampa continuamente nel XX secolo, ed è stato il libro architettonico per eccellenza, utilizzato in accademie e laboratori in tutta Europa e nelle Americhe.

L'approccio sistematico di Vignola alla dimensionamento e alle proporzioni ha influenzato molto più dello stile architettonico, la sua riduzione di complessi giudizi estetici a precisi rapporti numerici ha esemplificativo lo spirito razionalista che caratterizza la rivoluzione scientifica. L'abitudine della mente che produce sistemi proporzionali – sistemi, quantitativi, basati su regole – è la stessa abitudine che produce analisi strutturali.

6.4.6 Hubert Gautier (1660–1737)

Hubert Gautier è nato a Nîmes e addestrato come ingegnere militare durante il regno di Luigi XIV, un'epoca di ambiziosa espansione delle infrastrutture destinata a consolidare il potere amministrativo ed economico dello Stato francese, la sua carriera comprendeva strade, canali e ponti, e si è alzato per diventare *Ispezione des Chemins, Ponts, Ports marittimi et Chausssés du Languedoc*—Ispezione di strade, ponti, porti marittimi e Causeway per la regione della Linguadoca, una delle più grandi province della Francia.

Nel 1716 Gautier pubblicò il suo *Traité des ponts* (Gautier, 1765) (quarta edizione), il primo trattato interamente dedicato alla costruzione di ponti, che si apre con una notevole denuncia, Fig. 6.4a:

> Les Auteurs qui ont traité de l'Architecture, n'ont point donné de regies pour conftruire des Ponts. Ils n'ont point traité à fond cette matière ni donné aucundio détail, ils n'en ont parlé qu'en paffant; ils ont fupofé qu'un Architetto qui n'ignore &c ont donné des modèles des Ponts de Maçonnerie, ou de Charpente; Vitruve & Vignolle n'en ont rien dit. J'ai tiré de ceux qui en ont traité tout ce qui a pu convenir à mon sujet, & escludendo, il mio gruppo ha presentato una relazione di lavoro, che è stata

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

presentata al Consiglio. & que je rapporte, afin que ceux qui ne savent pas puissent en profiter, pour qui Uniquement j'ai fait ce Traité.

Gli autori che hanno trattato l'architettura non hanno dato regole per la costruzione di ponti, non hanno trattato questo argomento in profondità, né hanno fornito alcuna discussione dettagliata; ne hanno parlato solo in passato; hanno assunto che un architetto, che non è nulla di relativo alla professione, deve sapere tutto ciò che riguarda i ponti.

Alcuni autori, come Scamozzi, Palladio, Serlio e altri, hanno fornito modelli di ponti in muratura o in legno; Vitruvius e Vignola non hanno detto nulla su di loro. Ho tratto da coloro che hanno scritto sul soggetto tutto che potrebbe essere adatto al mio scopo, e io riferisco tutto quello che hanno pubblicato o fatto su questa materia ogni volta che l'ho giudicato di qualche uso al pubblico.

Ma ovunque io abbia visto che potevo andare oltre, aggiungendo o omettendo, per chiarire meglio le cose, l'ho fatto, in modo che potessero essere più facili da capire. A tutto ciò ho aggiunto l'esperienza che ho potuto acquisire da queste opere nel corso dei molti anni durante i quali ho praticato, e che faccio presente qui perché coloro che non sanno possano trarre profitto da esso, per i quali da solo ho scritto questa Treatise.

Gautier, 1765 Traité des ponts

Anche Vitruvio e Scamozzi non hanno detto nulla di ponti, ma anche di Vignola, hanno fornito esempi ma non di orientamento sistematico. Gautier ha esplicitamente messo a rimedio questa carenza compilando tutto ciò che era stato pubblicato, potenziato dai suoi decenni di esperienza pratica.

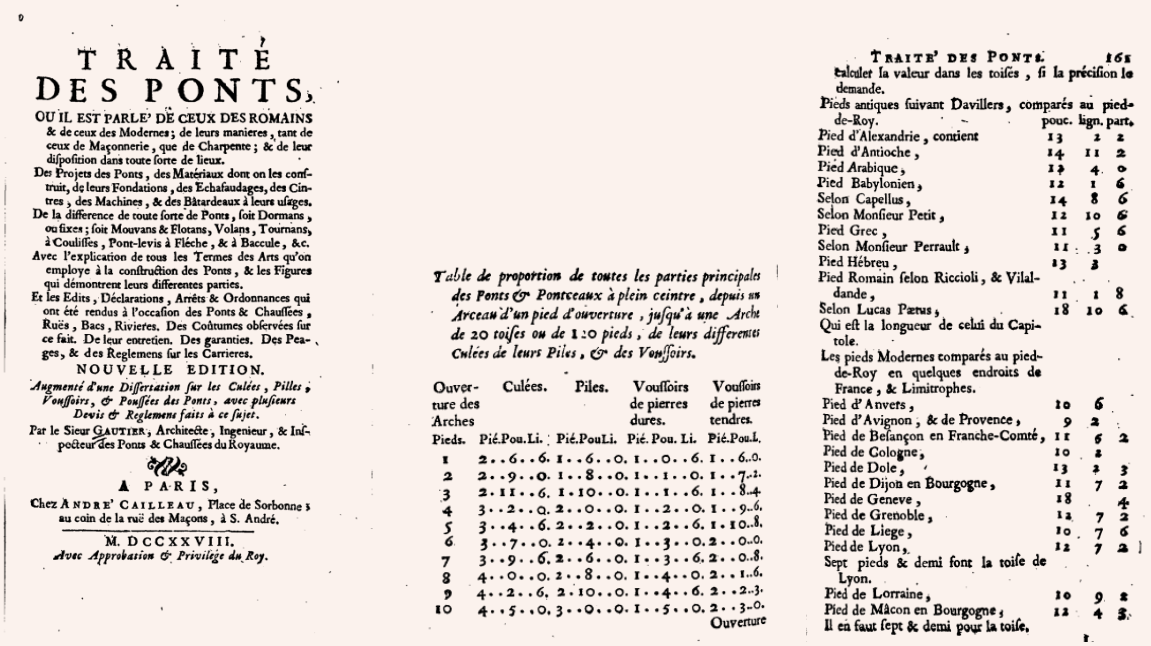
Il *Traité des ponts* Si apre con un'indagine storica sui ponti celebrati – Il ponte di Traiano sulla geometria del Danubio, i ponti di Roma, il Pont du Gard- – prima di procedere sistematicamente attraverso tipi di ponti, materiali, fondazioni, casse, centraggi e macchinari. Gautier discute ponti di legno e ponti di muratura, ponti fissi e ponti mobili (trasferimenti, ponti galleggianti).

Oltre alle materie di forma e costruzione, Gautier dedica una straordinaria attenzione a ciò che potrebbe essere definito l'infrastruttura pratica e amministrativa dell'ingegneria, che stabilisce una precisa nomenclatura tecnica e, a pagina 161, presenta una scheda dettagliata di unità di lunghezza (*pieds*), che vanno dalle misure babilonesi a quelle utilizzate in varie regioni europee e nelle città francesi, che illustrano vividamente le difficoltà pratiche che gli ingegneri hanno affrontato prima della standardizzazione, e spiega perché la successiva introduzione del metro, avviata durante la Rivoluzione francese e consolidata sotto Napoleone, ha costituito una delle riforme più consequenziali nella storia della pratica ingegneristica.

Gautier si rivolge inoltre alle norme e alle ordinanze che disciplinano le opere pubbliche (p. 196), sanzioni per l'esecuzione difettosa (p. 214), obblighi di manutenzione (p. 217), e la garanzia di dieci anni imposta ai costruttori (p. 225). Discute di pedaggi per passaggio ponte (p. 227), procedure di stima dei costi (pp. 231 e 273), certificazione del lavoro eseguita correttamente (p. 325), metodi contabili per lavori pubblici (p. 328), e l'approvazione

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



TRAITÉ
DES PONTS,
OU IL EST PARLE' DE CEUX DES ROMAINS & de ceux des Modernes; de leurs manieres, tant de ceux de Maçonnerie, que de Charpente; & de leur disposition dans toute sorte de lieux.
Des Projets des Ponts, des Matériaux dont on les construit, de leurs Fondations, des Echafaudages, des Cintres, des Machines, & des Bâtardeaux à leurs usages.
De la difference de toute sorte de Ponts, soit Dormans, ou fixes; soit Mouvans & Flotans, Volans, Tournans, à Coulisses, Pont-levis à Fléche, & à Baccule, &c.
Avec l'explication de tous les Termes des Arts qu'on employe à la construction des Ponts, & les Figures qui démontrent leurs differentes parties.
Et les Edits, Déclarations, Arrêts & Ordonnances qui ont été rendus à l'occasion des Ponts & Chaussées, Ruës, Bacs, Rivieres. Des Coûtumes observées sur ce fait. De leur entretien. Des garanties. Des Peages, & des Reglemens sur les Carrieres.
NOUVELLE EDITION.
Augmenté d'une Dissertation sur les Culées, Pilles, Voussoirs, & Poussées des Ponts, avec plusieurs Devis & Reglemens faits à ce sujet.
Par le Sieur GAUTIER, Architecte, Ingenieur, & Inspecteur des Ponts & Chaussées du Royaume.
A PARIS,
Chez ANDRE' CAILLEAU, Place de Sorbonne, au coin de la ruë des Maçons, à S. André.
M. DCCXXVIII.
Avec Approbation & Privilége du Roy.

Table de proportion de toutes les parties principales des Ponts & Ponceaux à plein ceintre, depuis un Arceau d'un pied d'ouverture, jusqu'à une Arche de 20 toises ou de 120 pieds, de leurs differentes Culées de leurs Piles, & des Voussoirs.

Ouverture des Arches	Culées.	Piles.	Voussoirs de pierres dures.	Voussoirs de pierres tendres.
Pieds.	Pié.Pou.Li.	Pié.PouLi.	Pié. Pou. Li.	Pié.Pou.L.
1	2..6..6.	1..6..0.	1..0..6.	1..6..0.
2	2..9..0.	1..8..0.	1..1..0.	1..7..1.
3	2.11..6.	1.10..0.	1..1..6.	1..8..4
4	3..2..0.	2..0..0.	1..2..0.	1..9..6.
5	3..4..6.	2..2..0.	1..2..6.	1.10..8.
6	3..7..0.	2..4..0.	1..3..0.	2..0..0.
7	3..9..6.	2..6..0.	1..3..6.	2..0..8.
8	4..0..0.	2..8..0.	1..4..0.	2..1..6.
9	4..2..6.	2.10..0.	1..4..6.	2..2..3.
10	4..5..0.	3..0..0.	1..5..0.	2..3..0.

Ouverture

TRAITE' DES PONTS. 161

Calculer la valeur dans les toises, si la précision le demande.

Pieds antiques suivant Davillers, comparés au pied-de-Roy.

	pouc.	lign.	part.
Pied d'Alexandrie, contient	13	2	2
Pied d'Antioche,	14	11	2
Pied Arabique,	13	4	0
Pied Babylonien,	12	1	6
Selon Capellus,	14	8	6
Selon Monsieur Petit,	12	10	6
Pied Grec,	11	5	6
Selon Monsieur Perrault,	11	3	0
Pied Hébreu,	13	8	
Pied Romain selon Riccioli, & Vilalandade,	11	1	8
Selon Lucas Pætus,	18	10	6

Qui est la longueur de celui du Capitole.

Les pieds Modernes comparés au pied-de-Roy en quelques endroits de France, & Limitrophes.

Pied d'Anvers,	10	6	
Pied d'Avignon, & de Provence,	9	2	
Pied de Besançon en Franche-Comté,	11	6	2
Pied de Cologne,	10	8	
Pied de Dole,	13	2	3
Pied de Dijon en Bourgogne,	11	7	2
Pied de Geneve,	18		4
Pied de Grenoble,	12	7	2
Pied de Liege,	10	7	6
Pied de Lyon,	12	7	2

Sept pieds & demi font la toise de Lyon.

Pied de Lorraine,	10	9	2
Pied de Mâcon en Bourgogne,	12	4	8.

Il en faut sept & demi pour la toise.

(a) Pagina iniziale (b) Varie definzioni di ft (c) Dimensioni ponte

Figura 6.4: *Traité des ponts* (Gautier, 1765)

formale dei documenti di ingegneria da parte delle autorità (p. 340). Particolarmente sorprendente è la sua risposta esplicita alle critiche dei recensori (p. 409), un esempio precoce di quello che sarebbe ora riconosciuto come peer review.

Per la questione critica dello spessore dell'arco, Gautier si rivolse al Pont du Gard come suo modello (Fig. 6.5). Lì gli archi hanno uno spessore di 4 piedi per un'estensione di 60 piedi, cedendo la proporzione classica di 1/15—la stessa regola data da Alberti due secoli prima, Fig. 15.4. Ma Gautier immediatamente riconosciuto un problema: questa regola è solo per grandi archi. Per un piccolo arco di 6 la regola prescriverebbe uno spessore inferiore a 6 pollici, 'che considera molto poco rispetto allo spessore corretto che, dice, è di 1,5 (Huerta, 2018). Qui Gautier ha fatto un'osservazione di fondamentale

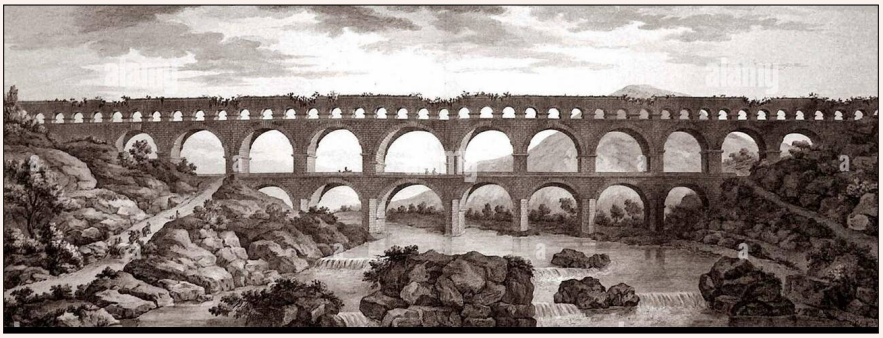


Figura 6.5: Pont du gard

COPIA DI REVISIONE

importanza —il primo riconoscimento esplicito che il design del ponte è intrinsecamente *non proporzionale*:

> Il est certe qu'un grand Pont qui porte une grande voiture, est bien moins chargé qu'un Ponceau qui porte la même voiture
>
> ---
>
> Un grande ponte che trasporta una carrozza pesante è molto meno carico di un piccolo ponte che trasporta la stessa carrozza.
>
> Gautier, 1765 Traité des ponts

La dichiarazione di Gautier richiede chiarimenti: significa che *rapporto* Un grande ponte, essendo più pesante, è dominato dal suo peso auto-peso; il passaggio rappresenta una frazione trascurabile del carico totale. Un piccolo ponte, essendo più leggero, sperimenta la stessa carrozza di una perturbazione proporzionalmente più grande. Ecco perché regole proporzionali (t/s = const.) fallire per piccole campate: la magnitudine assoluta del carico vivo non si scala con la struttura, anche se il carico morto lo fa, il primo riconoscimento esplicito che il progetto del ponte arco è *non proporzionale*.

Questa visione contraddice l'ipotesi fondamentale che ha ispirato tutte le regole proporzionali da Vitruvio: che la stabilità strutturale dipende dalla geometria da sola, indipendente dalle dimensioni assolute[5]

Nel 1717, Gautier pubblicò un *Dissertazione sur l'épaisseur des culées des Ponts*, in cui tentava un trattamento più sistematico, produceva un tavolo che conferisce spessore ad arco come funzione di span, distinguendosi tra pietre dure e morbide. piedi o più, ha mantenuto la regola di Alberti di 1/15. Per gli archi più piccoli, ha prescritto l'aggiunta di 1 piede a 1/24 della campata—una correzione non proporzionale che riconosce la maggiore vulnerabilità delle piccole strutture a carichi concentrati. *Traité des ponts* passò attraverso quattro edizioni (1716, 1728, 1755, 1765) ed è stato ampiamente citato in tutto il XVIII secolo; Bélidor incorporava le tabelle di Gautier nel suo influente *La scienzaÉnieurs* (De Belidor, 1729).

Gautier non ha avanzato una teoria matematica degli archi o della spinta. La sua ingegneria si è basata sulla proporzione, il precedente e la sentenza del costruttore esperto. Tuttavia isolando i ponti come un soggetto distinto di studio sistematico, incorporando l'ingegneria in un quadro giuridico e amministrativo completo, e riconoscendo esplicitamente il carattere non proporzionale del problema del design, Gautier ha stabilito il fondamento intellettuale e istituzionale su cui i suoi successori avrebbero costruito.

Gautier, in questo senso, sta in un contrasto istruttivo con Jean-Rodolphe Perronet. Il

[5]Come è noto, questa visione è stata poi messa in discussione dal famoso esempio di aumento osseo di Galileo (p. 580). Molto più tardi, il concetto di effetto dimensionale nelle strutture è stato formalizzato da Bažant, 1976 e successivamente ampliato Saouma, Natekar e Hansen, 2003 per colmare esplicitamente il divario tra la plasticità e la meccanica della frattura.

COPIA DI REVISIONE

contributo di Gautier sta nella codificazione enciclopedica della pratica—terminologia, regolazione, finanza, manutenzione e proporzione—documentando come i ponti sono stati concepiti, eseguiti e governati come opere pubbliche. Perronet, una generazione dopo, rappresenterebbe la maturazione di questa tradizione: il consolidamento dell'educazione di transizione ingegneristica, le sorpassi centralizzate. *Tradizione*.

unità

Quando Gautier scrisse il *Traité des ponts*, non esisteva un sistema unificato di misura in Francia, per non parlare in tutta Europa.*pied*, *Tubo di ricambio*e *Il nome*— i cui valori assoluti variano non solo da paese a paese ma spesso da città a città, Fig. 6.4bQuesta eterogeneità poneva gravi difficoltà pratiche per la progettazione, la stima e la costruzione, in particolare per grandi opere pubbliche eseguite nel corso di lunghi periodi o che coinvolgevano più giurisdizioni. Gautier era acutamente consapevole di questo problema, come evidenziato dalla sua dettagliata tabulazione delle diverse *pieds* La sua attenta attenzione alle unità riflette le realtà della pratica ingegneristica del primo Settecento, in cui le regole proporzionali e le misure composte servivano come l'unico mezzo affidabile per garantire la coerenza in assenza di misura standardizzata. Questa situazione fu infine risolta durante la Rivoluzione francese, quando il sistema metrico fu introdotto nel 1795, e fu poi consolidata e applicata in tutta la Francia ai primi del XIX secolo.

Tabella proporzionale di Gautier per ponti semicircolari (Tabella a p. 368)

Che cosa è la tavola (scopio e intento). Gautier introduce questa tabella esplicitamente come una *Tabella de proporzione de toutes les parti principales des Ponts & Ponceaux a plein ceintre*, cioè, una tabella proporzionale per le parti principali di ponti e piccoli culti con *assemblea* La gamma di campate a cui si riferisce inizia ad un arco di apertura di un piede e si estende fino ad un arco di 20 toise (120 piedi) e lo scopo è pratico: data un'apertura, la tabella fornisce a colpo d'occhio le principali dimensioni murarie necessarie per proporzionare il lavoro, Fig. 6.4c.

Come viene organizzato il tavolo (colonna). Il tavolo è organizzato aumentando *Ouverture des Arches* (apertura dell'arco), espressa in piedi. Per ogni apertura, fornisce:

- **Cule**: una dimensione raccomandata per gli abutment (dati in piedi - pollici - linee).
- **Pile**: una dimensione raccomandata per i pier (dati in piedi - pollici - linee).
- **Voussoirs de pierres costrizione**: uno spessore raccomandato del voussoir (ring) per *pietra dura*.
- **Voussoirs de pierres tendini**: uno spessore raccomandato del voussoir (ring) per *pietra morbida*.

Così, la tabella separa la proporzionalizzazione a geometria (apertura, pier, abutment) da

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

una correzione di qualità materiale (pietra dura e morbida) applicata alla dimensione del voussoir.

Significato delle voci (che ogni numero controlla). Nell'uso di Gautier, le voci non sono rapporti astratti; sono dimensioni direttamente utilizzabili da applicare in disegni, stime e decisioni sul sito:

- Il **apertura** è la chiara campata dell'arco.
- Il **Pier** la dimensione governa lo spessore dei supporti intermedi tra gli archi; controlla sia la stabilità (massa) che l'ostruzione idraulica (quanto il fiume è costrito).
- Il **abutto** la dimensione governa i supporti finali; è tipicamente più grande di un pier perché deve resistere alla spinta alla fine della sequenza e interagire con l'argine di avvicinamento e terra conservata.
- Il **Voussoir** dimensione (hard/soft) è lo spessore dell'anello ad arco (la banda muraria che forma l'arco), il proxy più diretto, nella tavola, per la richiesta di compressione locale e per la qualità della pietra e delle articolazioni.

La pietra dura contro le colonne di pietra morbide (perchè due valori di tissoir). Una caratteristica chiave è la divisione esplicita tra *esecuzioni* e *I tendini dei pirossi*. Gautier è riconoscendo che una singola proporzione geometrica non è sufficiente: per la stessa apertura, lo spessore dell'anello deve essere più grande quando la pietra è tenera (il picchio, più suscettibile di frantumare, danneggiare e le articolazioni imperfette). Il tavolo quindi funziona come una semplice correzione materiale attuabile: mantenere la stessa apertura, pier e logica di abutment, ma scegliere lo spessore voussoir secondo la qualità della pietra.

Come leggere una riga (flusso di lavoro). Il flusso di lavoro previsto è semplice:

1. Selezionare la riga corrispondente al *Ouverture des Arches* (in piedi).
2. Leggi l'interoper per ottenere le dimensioni consigliate per *Cule* e *Pile*.
3. Scegli il *Voussoirs* spessore dalla colonna materiale appropriata (pietra dura o morbida).
4. Utilizzare questi valori come le proporzioni di base per disegni e per un *esiti*; poi regolare (se necessario) per vincoli di sito (condizioni di fondazione, inondazioni, sdoganamento di navigazione, ecc.).

Che cosa il tavolo è (e non è) fare concettualmente. La tabella codifica una logica di progettazione pre-analytical: la stabilità viene trattata attraverso la massa, la proporzione e il precedente, piuttosto che attraverso un calcolo esplicito della linea di spinta. Tuttavia, è più di una raccolta di esempi isolati: è un sistema sistematico schema proporzionale che collega l'apertura alle principali parti di resistenza (abutments, piers, anello spessore), e introduce una correzione esplicita di qualità del materiale attraverso le colonne dual youssoir.

Unità dimensionali (feet–inches–lines). Tutte le voci sono riportate nel sistema tradizionale francese: *pied*.... A *pied* è diviso in 12 *Tubi*e *Tubo di ricambio* in 12 *I titoli*. Così un'entrata

COPIA DI REVISIONE

scritta nella tabella come, per esempio, "4..6..9" dovrebbe essere letta come 4 pieds, 6 pouces, 9 lignes. Questa convenzione permette l'uso diretto della tabella nella definizione di dimensioni di muratura senza aritmetica intermedia, riflettendo anche la realtà pratica del periodo: ingegneri e appaltatori lavorati in suddivisioni composte piuttosto che in unità decimali.

6.4.6.1 Jean-Rodolphe Perronet

Se Gautier fondò la disciplina dell'ingegneria dei ponti, Jean-Rodolphe Perronet lo portò a maturità, nato a Suresnes vicino a Parigi, Perronet iniziò la sua carriera lavorando per uno dei principali architetti della città e per tutta la vita mantenne un interesse per l'architettura a fianco dell'ingegneria. *École des Ponts et Chaussées*, posizione che mantenne fino alla sua morte quarantasette anni dopo, nel 1763 divenne capo ingegnere del *Corpo dei Ponts e dei Chaussées*, e nel 1765 fu eletto al *Académie des Sciences*Ha supervisionato le più importanti opere pubbliche francesi della seconda metà del secolo e ha progettato personalmente venti-uno ponti, di cui tredici sono stati costruiti.

I ponti di Perronet furono celebrati per la loro audacia e leggerezza (Fig. 6.6a). Il Pont de Neuilly (1774), il Pont de Saint-Maxence (1772-86), e il Pont de la Concorde (1787-91) raggiunsero rapporti di snellezza che stupirono i contemporanei e rimasero ineguagliati per decenni. Dove Alberti aveva prescritto 1/15 e ponti romani tipicamente variavano da 1/10 a 1/12, gli archi di Perronet si avvicinarono 1/24 o oltre.

Nel 1748, appena un anno dopo la sua nomina di Direttore dell'École, Perronet scrisse un memoriale inedito dal titolo "Mémoire sur l'épaisseur que doivent avoir les voussoirs à la clef, dans les différentes voûtes des Ponts'—Memoir on the spesso of the voussoirs conservato the keystone Bridge in the keystones Bridge (Huerta, 2018 PDF).

Il metodo di Perronet era quintessentialmente empirico, e compose una tavola di oltre duecento ponti arcaici, antichi e contemporanei, semicercolari e surbati, che registravano le loro campate e gli spessori dell'arco. Il suo scopo era quello di estrarre dai migliori esempi esistenti–quelli che combinano solidità con l'economia—una regola generale che potrebbe guidare il futuro design.

Da questo studio sistematico, Perronet ha derivato una semplice formula lineare per archi semicircolari. t (in piedi) dovrebbe essere:

$$t = \frac{s}{24} + 1 - \frac{s}{144}$$

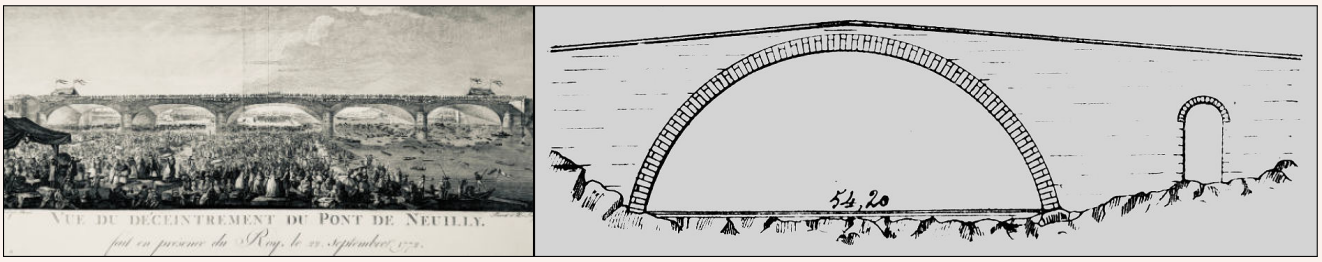
dove s Il primo termine prende un ventiquattresimo del arco; il secondo aggiunge un piede "a favore degli archi più piccoli, che devono sostenere il passaggio degli stessi carichi dei grandi"; il terzo sottrae una linea (1/12 di un pollice) per piede di span per accogliere le proporzioni dei ponti più audacemente esistenti. $t = 1 + s/28.8$o in unità metriche, $t = 0.325 + 0.035s$ metri.

Il significato della regola di Perronet non è nella sua sofisticazione matematica—è semplicemente una misura lineare per i dati empirici—ma nelle sue conseguenze.Per i

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

grandi ponti, la formula di Perronet ha prescritto spessori quasi la metà di quelli dati da Alberti-Gautier. Il grande ponte medievale di Vieille-Brioude, Fig. 6.6b, con un'estensione di 54.6 m e uno spessore effettivo di 2.1 m alla chiave, adattare la regola di Perronet quasi esattamente (predicted: 2.09 m), mentre la regola di Alberti di 1/15 avrebbe prescritto 3.64 m. La regola codificata e legittimata così le proporzioni snelle che i costruttori audace avevano raggiunto empiricamente, trasformando la pratica eccezionale in guida standard.



(a) Il ponte di Neully (b) Pont de la Vieille-Brioude

Figura 6.6: I ponti di Perronet

Perronet's 1788 *Descrizione des projets et de la construction des ponts* (Perronet, 1782) ha presentato il suo lavoro di vita in dettaglio esaustivo: il design e la costruzione dei Ponts de Neuilly, Mantes, Orléans, Nogent-sur-Seine, e Sainte-Maxence, insieme con i macchinari, i cofferdams, il centraggio, e le sequenze di costruzione impiegate. L'opera è un monumento di documentazione tecnica, conservando la conoscenza che altrimenti sarebbe scomparsa con il completamento di più lungo volte.

6.4.6.2 La transizione dalla proporzione all'esperienza

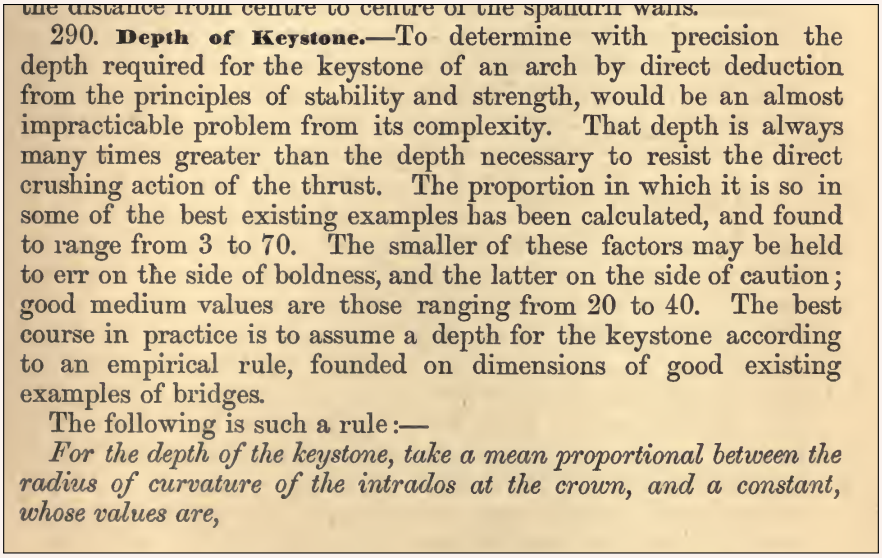
La teoria dell'arco, sviluppata da La Hire, Couplet e altri, era conosciuta per loro, ma lo giudicavano inadeguato alla complessità del progetto di ponte effettivo. 6.7:

> Per determinare con precisione la profondità necessaria per la chiave di un arco per deduzione diretta dai principi di stabilità e resistenza, sarebbe un problema quasi impraticabile dalla sua complessità
>
> Rankine, 1862 A Manual of Civil Engineering

Il corso migliore rimase "a assumere una profondità per la chiave di pietra secondo una regola empirica, fondata su dimensioni di buoni esempi esistenti di ponti."

Ciò che Gautier e Perronet hanno ottenuto è qualcosa di più sottile della teoria: l'istituzionalizzazione della conoscenza empirica sistematica. Attraverso l'École des Ponts et Chaussées, che Perronet ha diretto per quasi mezzo secolo, la pratica ingegneristica è stata trasmessa non attraverso l'apprendistato ma attraverso l'istruzione organizzata, la documentazione scritta e i metodi standardizzati.

COPIA DI REVISIONE



the distance from centre to centre of the spandril walls.

290. **Depth of Keystone.**—To determine with precision the depth required for the keystone of an arch by direct deduction from the principles of stability and strength, would be an almost impracticable problem from its complexity. That depth is always many times greater than the depth necessary to resist the direct crushing action of the thrust. The proportion in which it is so in some of the best existing examples has been calculated, and found to range from 3 to 70. The smaller of these factors may be held to err on the side of boldness, and the latter on the side of caution; good medium values are those ranging from 20 to 40. The best course in practice is to assume a depth for the keystone according to an empirical rule, founded on dimensions of good existing examples of bridges.

The following is such a rule:—

For the depth of the keystone, take a mean proportional between the radius of curvature of the intrados at the crown, and a constant, whose values are,

Figura 6.7: Rankine, 1862 «svalutazione delle dimensioni delle pietre chiave

Le regole proporzionali di Alberti e Palladio hanno ritenuto che la stabilità strutturale fosse una questione di geometria da sola: un arco che si trovava ad una scala sarebbe in qualsiasi misura. Gautier ha riconosciuto che tale ipotesi non è riuscita a superare i ponti sotto carichi di traffico, e Perronet ha sistemato la correzione non proporzionale. Questa comprensione- che le dimensioni assolute hanno dato alla stessa scala di sicurezza diversi margini.

Insieme, Gautier e Perronet segnano l'emergere dell'ingegneria civile come disciplina appresa fondata in geometria, esperienza e educazione sistematica, ma ancora precedendo gli strumenti analitici formali che si svilupperanno nel XIX secolo. Si trovano al nascondiglio tra la tradizione umanista della proporzione—- che questa sezione ha tracciato da Vitruvio attraverso Alberti e Palladio—— e la tradizione scientifica della meccanica che trasformerebbe l'ingegneria strutturale nel secolo a venire.

6.5 Dall'Ordine Matematico alla Meccanica

Questa sezione raccoglie figure che hanno introdotto crescenti *ordine matematico* Lo studio dei fenomeni fisici, la geometria e i metodi analitici primitivi sono stati progressivamente applicati a problemi di movimento e di equilibrio, rimodellare la meccanica in un campo matematicamente organizzato.

COPIA DI REVISIONE

6.5.1 Francesco Bacon (1561–1626)

Francis Bacon nacque nel 1561 in una famiglia inglese di primo piano, suo padre era Lord Keeper del Grande Sigillo sotto Elizabeth I. Studiò a Cambridge e Gray's Inn, perseguendo una carriera in diritto e politica che culminò nella sua nomina di Lord Cancelliere sotto Giacomo I. La sua carriera politica si concluse in disgrazia quando fu condannato ad accettare le bribù nel 1621, dopo di che si dedicò completamente alla scrittura filosofica e scientifica fino alla morte.

Organo Novum e Metodo Empirical Bacon's *Organo di Novum* (Nuovo strumento) (Bacon, 2000), pubblicato nel 1620, poneva le basi filosofiche per il metodo empirico e ragionamento induttivo che divenne fondamentale per la scienza e l'ingegneria moderna. Il titolo deliberatamente contrastato con Aristotele's *Organo*, segnalando l'intenzione di Bacon di sostituire la logica scolastica con una nuova metodologia per indagare la natura.

La dottrina degli Idols La critica di Bacon alla conoscenza ricevuta era la sua dottrina del "Idols"—sosta sistemiche che distorcono la comprensione umana. Gli Idols della Tribù derivano dalla natura umana stessa (la nostra tendenza a vedere i modelli dove nessuno esiste); gli Idols della Cave da temperamento individuale e di educazione; gli Idols del Marketplace dall'imprecisione del linguaggio; e la bionos di errore conoscitivo moderno si basano sui sistemi di giudizio filosofico.

La Casa di Salomon e la Royal Society Al posto della disputa scolastica, Bacon ha sostenuto per programmi organizzati di indagine empirica: osservazione sistematica dei fenomeni, sperimentazione controllata per isolare cause, registrazione attenta dei risultati e generalizzazione induttiva da prove accumulate. *Nuovo Atlantide* (1627) descrisse "Salomon's House"""" un'istituzione sponsorizzata dallo stato dedicata all'indagine sistematica della natura attraverso l'esperimento, la collaborazione e l'applicazione pratica della conoscenza. Questa visione ha ispirato direttamente i fondatori della Royal Society (1660), che si vide come realizzare il programma di Bacon.

Limitazioni e Legacy Va notato che Bacon stesso era scettico della matematica come strumento per indagare la natura – una limitazione significativa che lo distingue da Galileo e Cartesio. Il suo metodo induttivo, potente per la storia naturale e la chimica, si è rivelato meno adatto alla meccanica, dove la deduzione matematica dai principi si è rivelata più fruttuosa che pura enumerazione di istanze.

Per l'ingegneria strutturale, il contributo di Bacon è metodologico piuttosto che tecnico, la sua enfasi sulla sperimentazione strutturata è diventata parte integrante del metodo scientifico che gli ingegneri utilizzano per caratterizzare il comportamento materiale, convalidare i modelli analitici e sviluppare le procedure di progettazione.

COPIA DI REVISIONE

6.5.2 Nicolaus Copernicus (1473–1543)

Vita

Nicolaus Copernicus nacque nel 1473 a Toruń, in Prussia Reale (allora parte del Regno di Polonia). Orfano a dieci anni, fu allevato da suo zio, vescovo che gli forniva un'ottima educazione. Copernico studiò all'Università di Cracovia e più tardi in Italia – a Bologna (legge e astronomia), Padova (medicina) e Ferrara (legge di governo).

Copernico sviluppò la sua teoria eliocentrica nel corso di diversi decenni, circolando un breve manoscritto (*Commentario*) tra amici intorno al 1514 ma ritardando la pubblicazione completa fino alla fine della sua vita; secondo la leggenda, ricevette la prima copia stampata del suo lavoro sul letto di morte nel 1543.

De Revolutionibus e la sua importanza per la Meccanica Copernico *De Revolutionibus Orbium Coelestium* (Sue rivoluzioni dei Sferi Celestiali) (Copernicus, 1995), pubblicato nel 1543, propose che la Terra e i pianeti orbitano attorno al Sole – ipotesi che contraddicesse sia il senso comune che l'autorità accumulata della cosmologia antica e medievale. Il significato della meccanica strutturale non è nel modello eliocentrico stesso ma nel cambiamento epistemologico esigeva: modellazione matematica potrebbe rivelare verità che contraddicevano l'osservazione sensoriale diretta.

Con la possibilità di muoversi la Terra stessa, Copernico ha implicitamente sfidato la distinzione aristotelica tra riposo naturale e movimento naturale. Il movimento non era più un attributo assoluto legato al centro dell'universo, ma una proprietà relativa dipendente dalla cornice di riferimento dell'osservatore.

Copernico ha dimostrato che un modello matematico coerente e internamente coerente potrebbe fornire una descrizione più accurata della realtà di una fondata nell'esperienza quotidiana. In questo senso, la consistenza matematica è stata elevata da un aiuto descrittivo a un criterio di verità fisica. Questo salto intellettuale, affidando l'astrazione matematica sulle prove sensoriali, ha spinto la fondazione per trattare la meccanica come scienza universale, basata sulla legge, piuttosto che un mestiere empirico.

La rivoluzione copernicana ha anche introdotto, implicitamente, il problema dei frame di riferimento: i movimenti osservati dalla Terra non sono assoluti ma relativi a una piattaforma mobile. Questa realizzazione richiederebbe poi concetti come le strutture inerziali e le forze apparenti (fitizie), idee che rimangono essenziali nella dinamica e, infine, nelle analisi di ingegneria strutturale che coinvolgono accelerazione, vibrazione e eccitazione sismica.

Va notato, tuttavia, che Copernico conservava orbite e epici circolari, privilegiando l'armonia matematica sulla causazione fisica. Le conseguenze meccaniche complete dell'eliocentrismo sarebbero emerse solo con l'abbandono di Keplero del movimento circolare e la formulazione di Newton delle dinamiche universali.

L'universalità della legge naturale implicita nel sistema copernicano – interamente realizzata un secolo e mezzo più tardi da Newton – si basa sull'intera impresa di ingegneria

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

strutturale: gli stessi principi di equilibrio e di movimento si applicano se si analizza un arco romano, una volta gotica, o un grattacielo moderno.

6.6 Dal Proto-Statics alla Rivoluzione Scientifica

Le cifre raggruppate qui segnano la transizione dalle dottrine ereditate alla meccanica fondata in *esperimento* e *misura*. Concetti come la forza, l'inerzia e l'equilibrio sono stati riformati attraverso l'osservazione e la sintesi matematica. Questa sezione cattura il cambiamento decisivo attraverso il quale statici e dinamiche sono diventate scienze fisicamente fondate.

6.6.1 Simon Stevin (1548–1620)

Simon Stevin nacque a Bruges nel 1548, nei Paesi Bassi spagnoli (oggi Belgio), poco conosciuto con certezza sulla sua formazione formale, ma la sua carriera iniziale era decisamente pratica: lavorava come impiegato, contabile e ingegnere prima di entrare nella vita accademica. A differenza di molti suoi contemporanei, Stevin non emerse da una tradizione umanista universitaria, ma il suo sviluppo intellettuale fu plasmato da un impegno diretto con il commercio, le opere ingegneristiche e la risoluzione dei problemi applicati. Questo background ha profondamente influenzato la sua visione scientifica, basando la sua meccanica in ragionamento fisico concreto piuttosto che astrazione scolastica.

Alla fine del 1580, Stevin entrò al servizio del principe Maurizio di Nassau, diventando ingegnere, consigliere e insegnante militare, e lo mise all'incrocio tra matematica, progettazione fortificazione, idraulica e meccanica, e fornì sia la motivazione pratica che il sostegno istituzionale per il suo lavoro scientifico.

Simon Stevin (1548–1620) (Stevin, 1955–1966) statiche trasformate in modo fondamentale dalla descrizione qualitativa all'analisi matematica rigorosa, che stabilisce principi che rimangono centrali all'ingegneria strutturale oggi. *De Beghinselen der Weeghconst* (I principi dell'arte della pesatura), pubblicato in olandese nel 1586, fu il primo trattamento matematico completo dell'equilibrio di forza da Archimede, e in diversi aspetti ha superato l'antico maestro.

Piano inclinato Il contributo più celebre di Stevin è la sua dimostrazione della legge del piano inclinato attraverso il famoso *clootcrans* Egli immaginava una catena di sfere altrettanto spaziose che si tendeva su un prisma triangolare: poiché la catena non si muove spontaneamente, le forze su ogni lato devono essere proporzionali alle lunghezze dei lati, quindi alle sineste degli angoli. Questa prova elegante - che Stevin ha commemorato con il motto "Wonder en is gheen wonder" (che cosa appare meraviglioso non è risolutezza dinamica).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Composizione ed Equilibrio delle Forze Da questa fondazione, Stevin sviluppò il parallelogramma delle forze, dimostrando che due forze che agiscono in un punto possono essere combinate in un unico risultato completando il parallelogramma., ha permesso l'analisi sistematica dei sistemi di forza Stevin ha mostrato come risolvere le forze in componenti, combinare più forze in risultati e determinare le condizioni di equilibrio per gli organismi soggetti a più forze — le operazioni essenziali di analisi strutturale.

Lavoro virtuale e Equilibrio generale Stevin ha anche formulato principi equivalenti al lavoro virtualePur non essendo espresso nel linguaggio formale successivo della meccanica analitica, questa visione ha anticipato uno dei metodi più potenti nell'analisi strutturale. Il principio del lavoro virtuale sarebbe poi generalizzato da d'Alembert, Lagrange e altri, diventando indispensabile per l'analisi di sistemi statically indeterminate.

Idrostatici, Notazione e Ingegneria Ethos Oltre alle statiche, Stevin ha contribuito in modo significativo agli idrostatici, dimostrando che la pressione in un fluido dipende solo dalla profondità e non dalla forma del recipiente contenente, il paradosso idrostatico, ed è stato anche un pioniere nell'uso sistematico della notazione decimale e un energico sostenitore per la scrittura di opere scientifiche nel vernacolare piuttosto che nel latino.

Questa concezione pratica ed egualitaria della scienza, matematica al servizio dell'ingegneria, segna Stevin come una figura di transizione tra la filosofia naturale rinascimentale e la scienza dell'ingegneria moderna, il cui lavoro ha posto le basi concettuali per gli sviluppi successivi in statici, analisi strutturale e meccanica applicata.

6.6.2 Galileo Galilei (1564–1642)

Origini, Educazione e un nuovo stile di indagine Galileo Galilei Nato a Pisa nel 1564 a una famiglia di mezzi modesti, suo padre, Vincenzo, era un musicista e teorico con una mente scettica e inquisitiva–tradice suo figlio ereditato. 6.9a), Galileo sarebbe diventato una figura chiave nella trasformazione della filosofia naturale nella scienza moderna. La sua vita coincise con un periodo di profondo sconvolgimento intellettuale in Europa, come autorità tradizionali nella scienza, nella religione e nella politica affrontarono sfide senza precedenti da nuove forme di indagine empirica e ragionamento matematico.

È ampiamente accreditato come uno dei primi ad adottare quello che ora chiamiamo il *metodo scientifico*–formare ipotesi, condurre esperimenti e interpretare risultati empirici. Anche se la parola «scienza» non doveva ancora prendere il suo significato moderno, al momento della morte di Galileo nel 1642, si formava un nuovo metodo di indagine in tutta Europa, che rappresentava un cambiamento fondamentale dalla dipendenza medievale dall'autorità testuale e dalla deduzione logica ad una nuova enfasi sull'osservazione diretta, la descrizione matematica e la verifica sperimentale.

Galileo si trova all'incrocio tra scienza, filosofia, ingegneria e autorità istituzionale, la sua vita non solo segnava l'alba della meccanica sperimentale e della fisica moderna, ma incarnava anche le tensioni tra ragionamento scientifico emergente e credenze dottrinali consolidate.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

In quanto segue, esploriamo l'arco della sua carriera— dai suoi anni formativi e i suoi famosi (anche se possibilmente apocrifi) esperimenti presso Torre di Pisa, alle rivelazioni celesti che sfidavano la cosmologia aristotelica e provocavano l'ira della Chiesa cattolica. *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, tolemaico e copernicano* (Dialogue per i due sistemi mondiali, tolemaico e copernicano) e *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica & i movimenti locali* (Discorso e Dimostrazioni Matematiche Rilassandosi a due nuove Scienze per quanto riguarda la Meccanica e i Moti Locali) non sono solo testi scientifici; sono manifesti intellettuali di una nuova epistemologia, radicati nell'osservazione e nell'astrazione matematica.

La parte finale di questa sezione si concentra su un'idea di particolare importanza per gli ingegneri strutturali: lo scaling. Galileo è stato il primo a articolare il principio che la natura non si scala uniformemente, riconoscendo che le grandi strutture devono contendere con vincoli meccanici fondamentalmente diversi rispetto ai piccoli.

L'eredità di Galileo si estende così ben oltre le sue scoperte; si trova nei metodi che ha pionierizzato, nella resistenza che ha sopportato e nell'immaginazione strutturale che ha aiutato a sbloccare.

Il *Due nuove scienze* e Meccanica strutturale quantitativa Galileo Galilei (1564–1642) (Galilei, 1638 PDF) è giustamente considerato come il fondatore della meccanica strutturale come una scienza quantitativa. *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica & i movimenti locali* (Discorso e Dimostrazioni Matematiche Rilanciando a Due Nuove Scienze), pubblicato a Leiden nel 1638 mentre Galileo era in arresto di casa, stabilì lo studio della forza materiale e la meccanica delle strutture su una base matematica per la prima volta.

Le «due nuove scienze» del titolo sono la scienza del movimento (cinematiche e dinamiche) e la scienza della forza dei materiali e delle strutture. Quest'ultimo occupa i primi due «giorni» del dialogo e affronta i problemi di rilevanza diretta all'ingegneria: perché le strutture più grandi richiedono in proporzione più materiali di quelle più piccole? Come fa la resistenza di un fascio a rompere dipende dalle sue dimensioni? Cosa determina la forza di una corda, una corda?

Analisi di Galileo del fascio di cantilever Il suo modello di un fascio che sporge da una parete e carica al suo libero fine, riconoscendo che il fallimento si verifica per rotazione sul bordo inferiore della sezione incorporata. La sua conclusione – che il carico di rottura è proporzionale alla larghezza del fascio e al quadrato della sua profondità, e inversamente secolare alla sua sezione-lascia era qualitativamente corretta, anche se la sua assunzione di tensione uniforme è stata corretta.

Forse la più profonda comprensione di Galileo riguardava le leggi di scalamentoHa dimostrato che la somiglianza geometrica non implica una somiglianza meccanica: una struttura in scala uniforme in tutte le dimensioni diventa proporzionalmente più debole perché il volume (quindi il peso) aumenta come il cubo della dimensione lineare mentre l'area trasversale (quindi la forza) aumenta solo come il quadrato. Questa "legge empirica-

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

cubo" spiega perché gli animali di grandi dimensioni hanno ossa proporzionalmente più spesse di quelle piccole, perché gli insetti di scala gigante non possono semplicemente effetti contabili estrali.

Il metodo di Galileo——combinando l'analisi matematica con l'osservazione sperimentale, testando le previsioni teoriche contro le misurazioni fisiche–ha stabilito il paradigma per la meccanica strutturale. Il suo lavoro ha avviato la trasformazione di costruzione da un mestiere guidato dalla tradizione e dall'esperienza ad una scienza applicata fondata in principi universali.

Fisica: Torre di Pisa Inizialmente iscritta all'Università di Pisa nel 1581 per studiare medicina, Galileo abbandonò subito quel percorso a favore della matematica e della filosofia. Benché se ne andasse senza laurea, fu nominato professore di matematica a Pisa nel 1589 a soli 25 anni. Questo appuntamento rifletteva il crescente riconoscimento che la conoscenza matematica aveva valore pratico, anche se molti studiosi tradizionali consideravano la matematica come subordinata alla filosofia naturale.[6]

Secondo una storia ampiamente raccontata ma storicamente incerta, Galileo dimostrò che gli oggetti di masse diverse cadono allo stesso ritmo, lasciandoli cadere dalla Torre pendente di Pisa. *Racconto storico della vita di Galileo*, scritto bene dopo la morte di Galileo, che sia o meno l'esperimento avvenuto come descritto, cattura l'essenza della sfida di Galileo alla fisica aristotelica.

As Moody, 1951 ha mostrato, le opinioni di Galileo su esperimenti di caduta libera, resistenza e movimento nel vuoto sono stati plasmati non solo da Aristotele ma anche da critici medievali come Avempace e commentatori successivi.

Nel suo trattato del 1590 *De motu gravium naturaliter discendentium et proiectorum*, Galileo ha presentato idee rivoluzionarie sul movimento: (1) gli oggetti cadono allo stesso ritmo, indipendentemente dalla massa; (2) la velocità aumenta linearmente con il tempo; e (3) la distanza viaggiata è proporzionale al quadrato del tempo trascorso. Più importante, hanno dimostrato che le relazioni matematiche potrebbero descrivere fenomeni fisici con precisione senza precedenti, fornendo un modello per l'approccio quantitativo che definirebbe la fisica moderna.

La critica aperta di Galileo all'ortodossia aristotelica e all'affilato stile di debattimento gli conquistarono i nemici.

Astronomia: Dialogo Nello stesso anno Galileo si assicurò una posizione più prestigiosa all'Università di Padova, dove rimase fino al 1610. Il suo tempo era prolifico: insegnò a sale conferenze, vendette strumenti di suo disegno e offrì consultazioni private in matematica e ingegneria. *Della Scienza Meccanica*, affrontando i principi delle statiche, questo lavoro ha dimostrato come l'analisi matematica possa essere applicata a problemi meccanici pratici, colmare il divario tra la conoscenza teorica e l'applicazione di ingegneria.

[6] In tempi moderni, questo riconoscimento si estende ben oltre l'accademia: non è raro che i matematici vengano assunti dalle aziende di Wall Street, dove la loro competenza nell'analisi quantitativa, nella modellazione stocastica, e l'ottimizzazione viene applicata a complessi problemi finanziari.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Nel 1609, dopo aver appreso un'invenzione olandese per una visione lontana, Galileo costruì un telescopio telescopio Con essa, osservò la superficie di pockmarked della luna, le fasi di Venere, miriade stelle nella Via Lattea, e–la maggior parte sorprendentemente—quattro lune che orbitano attorno a Giove.

Tra le sue osservazioni più sconcertanti, Saturno, che appare stranamente modellato attraverso il suo telescopio primitivo, incapace di risolvere ciò che sappiamo ora essere gli anelli di Saturno, Galileo vide ciò che sembrava un pianeta triplo o un pianeta con maniglie. *Smaismrmilmepoetaleumibunenugttauiras*, che quando decodificato rivelato *Altissimum planetam tergeminum observavi* ('Ho osservato che il pianeta più alto è triplo"') Questo approccio crittografico ha permesso agli astronomi di rivendicare la precedenza per le scoperte, dando loro il tempo di confermare le loro osservazioni—una pratica che rifletteva sia la natura competitiva dell'astronomia telescopica precoce e la cautela necessaria quando sfidavano le credenze cosmologiche stabilite.

Queste scoperte, pubblicate nel 1610 nel *Sidereus Nuncius* ("Messaggero delle stelle"), scossero le fondamenta della cosmologia aristotelica. Per ottenere il favore di Cosimo II de' Medici, Galileo chiamò le lune "stelle medicee", assicurandosi il mecenatismo e una fama internazionale. Questa scelta mostra come il progresso scientifico dipendesse anche dalle reti di mecenatismo e di influenza politica.

Nel 1611, fu indotto nel *Accademia dei Lincei*, una delle prime società scientifiche, ma la controversia si è incombeta.

Le osservazioni di Galileo sostennero l'eliocentrismo copernico- l'idea che la Terra orbita attorno al sole, ma la Chiesa aveva recentemente dichiarato la teoria eretica. *De Revolutionibus Orbium Coelestium* era posto sul *Indice Librorum Prohibitorum*[7] e il Cardinale Bellarmine istruì Galileo ad abbandonare l'idea.

Galileo si aggiunse per un certo tempo, ma nel 1623, il cardinale Barberini—un ammiratore–sichiama Papa Urban VIII. Incoraggiato, Galileo pubblicato *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, tolemaico e copernicano* (Dialogue per i due sistemi mondiali, tolemaico e copernicano),(Galilei, 1632 PDF) Fig. 6.8.

Presentato come una discussione tra tre interlocutori—Simplicio (Aristotelian), Sagredo (il laico neutro), e Salviati (Copernican)—il Dialogo era tutt'altro che imparziale. Il nome di Simplicio da solo ('simpleton") tradì la posizione dell'autore.

Einstein scrisse più tardi:

[7] Il *Indice Librorum Prohibitorum* I tentativi simili per sopprimere la letteratura dissenting o ideologicamente pericolosa sono stati intrapresi da regimi totalitari, in particolare sotto i nazisti, che hanno organizzato bruciature di libri e mantenuto liste nere di autori "un-tedeschi", e l'Unione Sovietica, che censurava testi sovversivi e limitava le opere vietate a sezioni "special storage" (*Spettro di*Più recentemente, gli Stati Uniti hanno visto una risurrezione dei bandi di libri a livello locale, spesso indirizzando opere su razza, genere e sessualità– soprattutto nel clima politico plasmato dall'era Trump–ricercando nuove preoccupazioni sulla censura e la libertà intellettuale.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

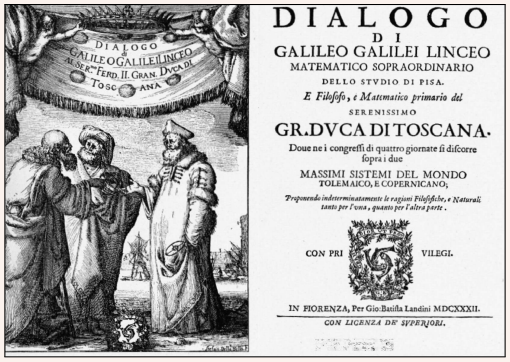


Figura 6.8: Dialogo di Galileo Galilei (Galilei, 1632)

> Un uomo è qui rivelato chi possiede la volontà appassionata, l'intelligenza e il coraggio di alzarsi come rappresentante del pensiero razionale...
>
> Einstein, 1954 Ideas and Opinions

Galileo aveva esagerato la sua mano, la Chiesa non era divertita.

Interludio: Inquisizione Poco dopo la pubblicazione del *Dialogo* inquisizione Nel giugno 1633 fu condannato per il "proibizione di eresia" e la sua condanna di reclusione fu immediatamente commutata all'arresto perpetuo della casa. Egli fu costretto a ritrattare pubblicamente le sue opinioni sull'eliocentrismo, anche se la leggenda ha che, alla fine della sua abbrasione, mormorò le parole infidevoli *e la sua vita* ('e ancora si muove")[8]Il processo di Galileo divenne un momento decisivo nel rapporto tra scienza e autorità istituzionale, che lo istituì come martire per la libertà intellettuale, dimostrando anche i costi personali di sfidare l'ortodossia stabilita.[9]

L'Inquisizione Romana, fondata nel 1542 da Papa Paolo III, era un sistema di tribunali progettato per sradicare l'eresia e preservare l'ortodossia cattolica, soprattutto in risposta alla Riforma protestante. A differenza dell'Inquisizione medievale precedente, fu centralizzata sotto la Congregazione del Santo Ufficio e esercitava una supervisione papale diretta. Mentre si mirava a prevenire l'errore dottrinale, soppresse anche il dissenso, le pubblicazioni censurate, e di polizia il confine tra scienza e religione.

[8]Fin dalla pubblicazione completa dei documenti di prova di Galileo negli anni 1870, tutta la responsabilità della sua condanna è stata tipicamente assegnata alla Chiesa cattolica, ma questo oscura il ruolo influente svolto dai filosofi accademici che persuasero i teologi a conflatare le teorie scientifiche di Galileo con l'eresia. II ha avviato un'indagine formale sul processo di Galileo, culminando nel rapporto del 1992 di una commissione papale che ha riconosciuto l'errore del Vaticano.

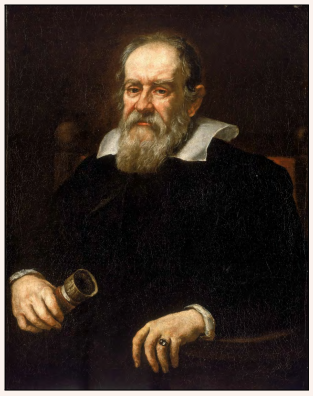
[9]Un parallelo è spesso tratto dal 1925 Scopes "Monkey Trial" in Tennessee, dove l'insegnamento dell'evoluzione nelle scuole pubbliche è stato contestato sotto il diritto statale, evidenziando tensioni simili tra idee scientifiche e prevalenti norme sociali o religiose. Purtroppo, nel 2025 sotto Trump, possiamo assistere a ulteriori risorse lungo linee simili, come la censura di libri nelle biblioteche pubbliche, la negazione della scienza stabilita, e la rifiuto del valore dimostrato dei vaccini.

COPIA DI REVISIONE

Metodologia: Discorsi Nel 1634, confinato alla sua villa ad Arcetri, Galileo iniziò a lavorare su quello che sarebbe diventato il suo ultimo e forse il libro più importante: *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica & i movimenti locali* (Discorso e Dimostrazioni Matematiche Rilassandosi a due nuove Scienze per quanto riguarda la Meccanica e i Moti Locali) Il trattato elaborato sulla meccanica che aveva sviluppato in precedenza nella sua carriera.Questo lavoro si rivelerà più influente per lo sviluppo della scienza ingegneristica rispetto alle sue scoperte astronomiche, come ha posto la base matematica per la comprensione del comportamento materiale e della risposta strutturale.

Il manoscritto (Galilei, 1638), mostrato in Fig. 6.9b, fu contrabbandato dall'Italia e stampato nel 1638 dal Elzevir a Leyden (Paesi Bassi), oltre la portata dell'Inquisizione.

Galileo morì quattro anni dopo nel 1642, a causa della sua condanna, fu sepolto in una posizione oscura fino al suo rientro nel 1737.



(a) Astronomer, Physicist, Engineer—Polymath par excellence


DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue scienze
Attenenti alla
MECANICA & I MOVIMENTI LOCALI,
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Sereniſſimo
Grand Duca di Toſcana.
Con vna Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.

IN LEIDA,
Appreſſo gli Elſeuirii. M. D. C. XXXVIII.

(b) *Discorso per due nuove scienze* (Galilei, 1638)

Figura 6.9: Galileo Galilei

Ironicamente, l'Inquisizione non ha fatto alcuna azione contro il nuovo libro, e quando cinquanta copie hanno raggiunto le librerie a Roma, sono svendute rapidamente.

A differenza di *Dialogo*, che affrontava questioni filosofiche e teologiche, *Discorso* rimaneva al sicuro nel regno della meccanica fisica, come indicato dal suo sottotitolo: *Meccanica e movimenti locali* (Tabella) 6.2). Il nuovo lavoro era più tecnico in tono e diretto in parte agli ingegneri, concentrandosi su problemi meccanici pratici piuttosto che su speculazioni cosmologiche, *Discorso* evitato le controversie teologiche che avevano fatto *Dialogo* così pericoloso.

Due soggetti si distinguono per gli ingegneri strutturali: la forza dei travi a travi a travi a travi (§7.2.2) e la nozione di scaling, quest'ultimo è di importanza centrale.

COPIA DI REVISIONE

La nozione di scaling è fondamentale per l'ingegneria strutturale moderna, forse introdotta per la prima volta da Galileo— anche se non nel senso algebrico o dimensionale che usiamo ora. Era il primo a riconoscere che gli organismi o gli oggetti più piccoli in natura non sono semplicemente ridimensionati-down versioni di quelli più grandi.

Nel *Discorso*, Proposizione IX (Giorno Due), Galileo— che parla attraverso Salviati—stato:

> ... Una volta disegnai la forma di un osso, allungato tre volte [Fig. 6.10], e poi addensato in tale proporzione che potrebbe funzionare nel suo grande animale relativamente come l'osso più piccolo serve l'animale più piccolo: ecco le immagini; Vedete come sproporzionato la forma diventa nell'osso allargato... sarebbe visto schiacciato dal suo peso e caduto.
>
> Galilei, 1638 Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno à due nuove scienze

Tabella 6.2: Quattro giorni di dialogo e di discorsi di Galileo

	Dialogo (Galilei, 1632)	Discorso (Galilei, 1638)
Titolo	Dialogos sui due sistemi mondiali	Discorso e dimostrazioni matematiche relative a due nuove scienze
Sottotitoli	Tolemaico e Copernicano	Meccanica e movimenti locali
Stampato in	Italiano	Latino-americano
Giorno		
1	Contro la fisica aristotelica	Resistenza ai corpi alla separazione
2	Diritto di inerzia	Causa di coesione
3	Analisi dei fenomeni astronomici	Movimento naturalmente accelerato
4	spiegazione copernicana del sistema solare	Mozione di proiettili



Figura 6.10: La scalatura di Galileo delle ossa (Galilei, 1638)

Galileo non aveva strumenti formali per Analisi dimensionale, che sarà poi introdotta da Vashy, 1892. Tuttavia, ha capito l'idea centrale: il peso che un osso sostiene cresce come volume (L^3), mentre la sua forza cresce solo come area trasversale (L^2). Così, la scalatura di

COPIA DI REVISIONE

un fattore 3 richiede ossa più di 3 volte più ampie – approssimativamente $3^{3/2} \approx 5$—per sostenere il peso aggiunto.[10]

La sua visione era rivoluzionaria perché dimostrava che le forme naturali non sono arbitrarie ma rappresentano soluzioni ottimali ai vincoli meccanici, un principio che in seguito ispira generazioni di ingegneri e architetti.

Questa visione – che la somiglianza geometrica porta alla dissimilarità strutturale – era rivoluzionaria, per ingegneri e architetti, ha aperto la porta alla modellazione fisica.

6.6.3 René Descartes (1596–1650)

René Descartes è una figura di transizione tra filosofia classica e scienza moderna, mentre meglio conosciuta per il suo dictum filosofico. *Cogito, ergo sum*[11] Il suo approccio sistematico alla conoscenza, sottolineando il dubbio metodologico e il ragionamento matematico, ha fornito la base filosofica per la rivoluzione scientifica che ha seguito.

La mia vita Nel suo lavoro del 1637 *La mia vita* (Descartes, 1637b), un'appendice alla sua più filosofica *Discours de la méthode*, Descartes ha introdotto la geometria analitica, collegando l'algebra e la geometria euclidea (§6.2.3) rappresentando le curve come equazioni algebriche in un sistema di coordinate, questa innovazione ha permesso lo sviluppo successivo del calcolo e divenne essenziale per formalizzare la meccanica in termini matematici. ha fornito il linguaggio matematico necessario per descrivere le relazioni di movimento e di forza quantitativamente, rendendo possibile la meccanica analitica che sarebbe stata sviluppata da Newton, Euler e Lagrange.

Descartes propose anche tre leggi di movimento, sottolineando il movimento inerziale in assenza di forze esterne, una chiara partenza dalle dinamiche aristoteliche, anche se le sue leggi furono infine sormontate dalle formulazioni più precise di Newton, Descartes pose le basi per la visione della natura come regolata da principi meccanici, una visione adottata e raffinata da pensatori come Huygens, Leibniz e Bernoullis.

Descartes ha anche introdotto una forma precoce di principio di conservazione, sostenendo che Dio conserva la stessa quantità totale di moto nell'universo. Sebbene la sua concezione scalare (velocità di tempi di massa, senza riguardo alla direzione) fosse fisicamente errata, gli feri avrebbero mostrato che le collisioni conservano slancio come quantità vettoriale—ha stabilito l'aspettativa che le interazioni meccaniche obbediscano

[10] Il ragionamento qualitativo di Galileo anticipa il moderno *effetto dimensione* concetto formalizzato da Bažant, 1984 e la derivazione riveduta da Saouma e Barton, 1994, che quantifica la riduzione sistematica della forza nominale delle strutture come aumenta la loro dimensione, con applicazioni che vanno dalla meccanica della frattura alle leggi di scalamento in materiali quasibrittle.

[11] *Cogito, ergo sum* (Latin per "I think, quindi I am"') è la dichiarazione fondamentale della filosofia di René Descartes, formulata in francese come *Je pense, donc je suis* nel suo 1637 lavoro *Discours de la méthode*, e più tardi in latino in *Principia Filosofia* (1644) Esprime l'idea che l'atto del pensiero sia innegabile prova dell'esistenza.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

alle leggi di conservazione, un principio guida che si rivelerebbe centrale allo sviluppo della meccanica analitica.

La sua teoria del vortice di moto planetario, che ha spiegato meccanica celeste attraverso la materia inciampante piuttosto che azione a distanza, dominata la fisica continentale fino a Newton *Principia* L'eventuale trionfo della gravità newtoniana sui vortici cartesiani ha plasmato i dibattiti metodologici del XVIII secolo: la meccanica dovrebbe cercare spiegazioni meccaniche (forze di contatto) o accettare descrizioni matematiche di forze inspiegabili? Questa tensione persisteva attraverso Euler e Lagrange e fu completamente risolta con la teoria del campo nel XIX secolo.

A differenza di Galileo, la cui fisica era radicata nell'osservazione sperimentale, Descartes sostenne il ragionamento deduttivo dei primi principi, la sua insistenza su un universo meccanistico e deterministico Influenzò profondamente il clima intellettuale del XVII secolo, che si rivelò essenziale per l'accettazione di descrizioni matematiche di fenomeni naturali, anche quando quelle descrizioni si confliggono con il buon senso o la dottrina religiosa, e come tale, Descartes deve essere accreditato non solo per l'innovazione matematica, ma anche per la formazione della base concettuale della meccanica classica.

6.6.4 Christiaan Huygens (1623–1695)

Il padre, Constantijn Huygens, è stato chiamato "la figura più brillante della storia letteraria olandese", e lo stesso Christiaan è venuto a essere conosciuto come "il principe dei filosofi in Olanda, e uno dei più grandi scienziati del XVII secolo". I. Attraverso i legami del padre, Christiaan ha ottenuto l'accesso anticipato ai principali circoli scientifici del suo tempo. Questo background privilegiato illustra come le reti scientifiche nel XVII secolo spesso dipendevano dai legami sociali e dallo status familiare, anche come il merito e la scoperta stavano diventando sempre più importanti per la reputazione scientifica.

In privato fino all'età di sedici anni, Christiaan studiò geometria, costruì modelli meccanici, e apprese raffinazioni sociali come suonare il lute. La sua educazione matematica fu fortemente influenzata da Descartes, che era occasionalmente visitatore della famiglia Huygens e si impegnò personale interesse per lo sviluppo intellettuale del ragazzo.

Huygens studiò legge e matematica, continuando gli studi dal 1647 al 1649, attraverso il legame del padre con la polimatologia francese Marin Mersenne, Mersenne lo sfida con diversi problemi, tra cui il compito di determinare la forma di una corda sospesa tra due supporti. Anche se Huygens non ha risolto questo *cateranario Problema catenario*, riuscì a risolvere una questione correlata: come distribuire pesi lungo la corda in modo che assumesse una forma parabolica, che mostrava non solo la sua inventiva, ma anche il suo primo impegno con problemi all'interfaccia della geometria e della fisica, dimostrando come spesso si manifestassero problemi matematici teorici da sfide meccaniche pratiche, un legame che caratterizzasse gran parte della scienza del XVII secolo.[12]

[12] Un moderno parallelismo di ingegneria strutturale si trova nel lavoro di Cross, 1932, il cui metodo di

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

Scopo e Traiettoria: Telescopi, Pendulum e Luce Christiaan Huygens è una delle menti scientifiche più originali del XVII secolo, il cui lavoro ha colmato i regni della matematica, dell'astronomia, della meccanica e dell'ottica. La sua carriera riflette un filo continuo di indagine che si è spostato dall'osservazione dei corpi celesti attraverso strumenti telescopici raffinati, all'invenzione e all'analisi di orologi pendolo per un'accurata tempestività, e alla fine alla teoria dell'onda della luce.[13]

Le innovazioni di Huygens, tra cui la scoperta della luna più grande di Saturno, la costruzione del primo orologio pratico del pendolo, e l'articolazione di ciò che è ora chiamato Principio di Huygens in ottica d'onda, lo rendono una figura fondamentale nella nascita della scienza moderna. Il suo lavoro riflette un'azione per l'eleganza geometrica e la chiarezza empirica, radicata nella tradizione cartesiana, ma evolvendosi verso le onde formali più dinamiche che sarebbero state più successivamente.

Da Telescopi a Pendulums: Timekeeping e *Horologium Oscillatorium* Il lavoro in astronomia richiedeva precisa manutenzione (v. §6.6.6), e questa sfida Nel 1656, brevettò il primo orologio a pendolo, migliorando notevolmente l'accuratezza della misurazione del tempo. Le sue indagini sui pendoli erano strettamente legate al suo lavoro matematico sul cicloide, una curva che studiò seguendo una sfida di Pascal. Credendo che un pendolo con un arco più ampio di altalena sarebbe più utile a bordo delle navi, Huygens inventò le navi a bordo. pendolo cicloidale. costruì diversi orologi a pendolo per determinare la longitudine in mare, che furono testati in prove marine nel 1662 e ancora nel 1686. *Horologium Oscillatorium sive de motu pendulorum*, in cui ha descritto la teoria del movimento del pendolo. Questo lavoro rappresentava una delle prime applicazioni di successo della matematica avanzata per risolvere un problema pratico pressante di significato globale.

Accademie e pratica scientifica internazionale Nel 1661 Huygens visitò Londra, dove raccolse informazioni sulla Royal Society, alla quale fu eletto nel 1663. *AcadéLe scienze* lo ha reso uno dei primi scienziati veramente internazionali, in grado di facilitare la comunicazione e la collaborazione attraverso i confini nazionali.

Nel 1666 accettò un invito da Jean-Baptiste Colbert per formare il nuovo creato *AcadéLe scienze* . Arrivando a Parigi, scoprì che l'istituzione non era ancora operativa, i primi incontri si svolgevano nella biblioteca di Colbert, poi si trasferirono alla *Bibliothèque du Roi*, dove Huygens ha assunto un ruolo di leadership e ha aiutato ad organizzare l'Accademia sulla base della sua conoscenza di come la Royal Society ha funzionato in Inghilterra.

Dinamica degli Extended Bodies: movimento circolare e il pendolo composto Christiaan Huygens (1629–1695) (Huygens, 1986) ha dato un contributo fondamentale alle dinamiche

distribuzione del momento (1930) ha fornito un'elegante soluzione analitica alla sfida pratica di analizzare i frame indeterminati, o Przemieniecki, 1968, che ha offerto un quadro analitico sistematico per strutture aerospaziali e civili complesse, o anche Saouma e Perotti, 2004 per la modellazione di reazioni alkali-aggregate, in tutti i casi, il design pratico ha spinto lo sviluppo di potenti nuovi strumenti analitici.

[13] Questa integrazione della teoria e della pratica sarebbe poi portata avanti da figure come Claude-Louis Navier (vedi §6.7.3, per conto del suo insuccesso planimetria ponte), che univa rigore matematico con applicazioni in ingegneria strutturale, così come altri meccanici del XIX secolo.

COPIA DI REVISIONE

che ha stabilito concetti essenziali per l'analisi strutturale sotto carichi di tempo-variante. *Horologium Oscillatorium* (The Pendulum Clock), pubblicato nel 1673, è un capolavoro della fisica matematica del XVII secolo, che combina l'invenzione pratica con una profonda analisi teorica.

Più significativamente per la meccanica, Huygens ha analizzato il moto dei corpi in percorsi circolari, derivando l'espressione per la forza centrifuga: $F = mv^2/r$. Questo risultato, essenziale per comprendere il movimento rotazionale, si applica direttamente ai problemi strutturali che coinvolgono macchine rotanti, movimento curvo e carico dinamico.

Gli huygens svilupparono anche il concetto del centro di oscillazione—il punto in cui la massa di un corpo esteso può essere concentrata senza cambiare il suo periodo di oscillazione–anticipazione idee equivalenti-sistema utilizzato nelle dinamiche strutturali. Il suo lavoro sul pendolo composto ha stabilito metodi per analizzare le dinamiche di corpi rigidi che si estendono direttamente all'analisi delle vibrazioni degli elementi strutturali.

Il *Horologium Oscillatorium* La prima corretta derivazione della formula per l'accelerazione centripeta e i risultati importanti sugli evoluti e sugli involuti delle curve. La combinazione di rigore matematico di Huygens con applicazione pratica esemplificava il rapporto emergente tra scienza e tecnologia che caratterizzava l'ingegneria strutturale.

Da Pendulum a Luce: Principio delle onde e degli huygens Nel 1678 Huygens introdusse ciò che sarebbe stato più tardi conosciuto come *Principio di Huygens*: ogni punto di un fronte d'onda luminoso agisce come fonte di ondate sferica secondarie, e il nuovo fronte d'onda è la busta di queste wavelets. Questa costruzione ha permesso a Huygens di ricavare le leggi di riflessione e di rifrazione e di spiegare sia la propagazione lineare che sferica della luce.

Durante tutta la sua vita, Huygens sperimentava estesi attacchi di malinconia, durante i quali produceva poco, seguiti da intensi periodi di creatività–forse indicativi di tendenze bipolari, in termini diagnostici moderni. Curiosamente, e a differenza di molti dei suoi contemporanei (Descartes, Leibniz, Newton), gli Huygens mostravano poco interesse nelle leggi metafisiche o filosofiche.

6.6.5 Blaise Pascal (1623–1662)

Blaise Pascal nacque a Clermont-Ferrand nel 1623 in una famiglia coltivata, e suo padre, Étienne Pascal, matematica amatoriale, si impegnò direttamente alla sua educazione dopo la morte precoce della madre di Pascal. Il talento matematico di Pascal si manifestò in un'epoca straordinariamente giovane: dai suoi primi adolescenti aveva riscoperto in modo indipendente i risultati nella geometria euclidea, e a sedici anni scrisse un saggio influente sulla vita

Sperimentazione, Pressione e natura dei fluidi Da adolescente, ha progettato e costruito un calcolatore meccanico, il Pascaline, uno dei primi dispositivi destinati a automatizzare le operazioni aritmetiche. Negli anni venti, ha condotto esperimenti dirompenti sulla pressione atmosferica, estendendo il lavoro di Torricelli e dimostrando che la pressio-

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

ne atmosferica diminuisce con l'altitudine misurando variazioni barometriche durante un'ascesa del degrado Puy.

Questi esperimenti hanno sfidato in modo decisivo la dottrina aristotelica che ha negato l'esistenza di un vuoto. Pascal ha dimostrato che è il peso dell'aria, piuttosto che qualsiasi orrore intrinseco di vuoto, che sostiene la colonna di mercurio in un barometro. Il suo lavoro ha esemplificato un nuovo atteggiamento scientifico: ragionamento matematico guidato da esperimenti attentamente progettati piuttosto che autorità o argomento qualitativo.

Idrostatica e Legge di Pascal Nel suo trattato del 1647, *Traité de l'équilibre des liqueurs*, Pascal formalizza i principi dell'idrostatica e introduce quello che è ora noto come legge di Pascal: la pressione applicata ad un fluido confinato viene trasmessa in modo non dissociabile in tutte le direzioni, e questo risultato ha fornito un principio unificante per le statiche fluide e si è transformata in in in in fondamento per i dispositivi idraulici, dalle presse e dagli ascensori alle applicazioni di ingegneria successive che coinvolgono la trasmissione fluida della forza.

La formulazione di Pascal trattava la pressione come campo scalare all'interno di un fluido, indipendente dalla forma dei container, un movimento concettuale che allineava la meccanica dei fluidi con descrizioni emergenti dei fenomeni fisici a base di campo.

Posizione nello sviluppo della Meccanica Mentre il lavoro di Pascal non è direttamente legato alla meccanica strutturale in senso stretto, la sua analisi della pressione e dei fluidi ha avuto implicazioni durature per la progettazione e l'analisi di strutture soggette a forze fluide, tra cui dighe, muri di contenimento, macchinari idraulici e successivamente problemi di interazione con le strutture fluide.

Forse più importante, l'integrazione della teoria matematica con la pratica sperimentale di Pascal ha fornito un modello per come la scienza dell'ingegneria potrebbe avanzare: attraverso l'interazione sistematica del ragionamento astratto e della verifica empirica.[14].

6.6.6 Robert Hooke (1635–1703)

Robert Hooke nacque nel 1635 sull'Isola di Wight, figlio di un modesto sacerdote anglicano. Fisicamente fragile come un bambino e non si aspettava di sopravvivere all'età adulta, inizialmente era addestrato a disegnare e a abilità meccaniche piuttosto che alla borsa di studio classica. Dopo la morte del padre, Hooke si trasferì a Londra, dove i suoi talenti lo portarono all'attenzione di importanti intellettuali.

Robert Hooke è infatti una delle figure più affascinanti e tragicamente sottovalutate della scienza del XVII secolo. Se non fosse stato sovrascurato e antagonizzato da Newton, probabilmente sarebbe ricordato come un gigante centrale delle scienze meccaniche. Hooke era straordinariamente versatile: un fisico, astronomo, inventore, microscopista, architetto e ingegnere. *Curatore degli Esperimenti* La sua funzione alla Royal Society lo mise al centro della comunicazione scientifica europea, dove non solo condusse la sua ricerca, ma anche

[14]In termini moderni questo è catturato da Thacker et al., 2004.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

facilitando il lavoro degli altri e contribuì a stabilire i protocolli di verifica sperimentale che divenne centrale della scienza moderna.

La sfida della longitudine Mentre la latitudine poteva essere determinata usando un sestante per misurare l'altitudine del sole o della luna in tempi conosciuti, determinare la longitudine in mare era molto più difficile, ha richiesto un orologio molto preciso per confrontare il tempo locale con un meridiano di riferimento. Nel XVII e XVIII secolo, non era ancora possibile un tale cronometraggio affidabile, l'incapacità di determinare la longitudine ha portato a numerosi naufraghi e ansie politiche. Questo problema illustra come le sfide pratiche hanno spesso guidato l'innovazione teorica, come l'urgente necessità di una navigazione precisa ha stimolato gli avanzamenti sia in orologia che in meccanica celeste.

Questa sfida di navigazione divenne una questione di importanza nazionale. Nel 1714 il Parlamento britannico passò *Legge di longitudine* per incentivare le innovazioni nella determinazione della longitudine, offrendo sostanziali ricompense monetarie per qualsiasi metodo pratico di misura della longitudine con precisione in mare, insieme a piccoli stipendi annuali agli studiosi che lavorano sulla mappatura mondiale[15].

Hooke e la meccanica del timekeeping Uno dei requisiti chiave per determinare la longitudine è stata la misurazione precisa del tempo, che ha posto l'orologia al centro dell'innovazione scientifica. Ispirato dall'idea di Galileo di applicare le proprietà isonomie del pendolo a tempestivi, Christiaan Huygens aveva implementato con successo un orologio pendolo utilizzando una scappamento corona-ruota (vedi §6.6.4). Hooke, a sua volta, ha proposto una soluzione radicalmente diversa: una ruota di equilibrio a molla abbinata a una nuova forma di meccanismo di scappamento.

Nel 1675, Hooke pubblicò il suo *A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments*, un trattato che si è concentrato sugli strumenti e sull'orologia telescopici, in particolare sull'invenzione della ruota di scappamento dell'ancoraggio e dell'equilibrio regolato a molla. Hall, 1951, come mostrato in Fig. 6.11b.

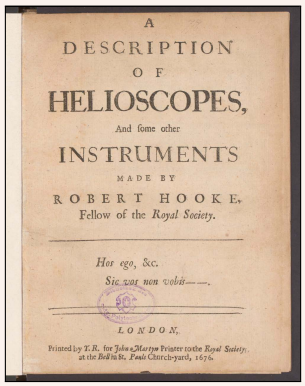
Il design di scappamento di Hooke era destinato ad offrire una soluzione più compatta e robusta del pendolo, rendendolo più adatto per l'uso del bordo. Anche se Huygens riuscì in ultima analisi ad implementare orologi pendolo degni di mare, le innovazioni di Hooke in orrolo rimasero influenti.

Meccanica e feuda newtoniana La sua intuizione scientifica si estendeva molto oltre il timekeeping. Era uno dei primi pensatori a formulare il movimento dei corpi celesti come un problema meccanico. Egli propose che il movimento planetario risulta dalla combinazione di un movimento lineare inerziale e di una forza attraente diretta verso il centro dell'orbita.

Quando Newton pubblicò il primo volume del suo *Filosofiæ Naturalis Principia Mathematica* Nel 1686, Hooke affermò che aveva precedentemente fornito a Newton l'idea essenziale

[15] Lo sforzo non era diverso dai premi tecnologici di alto profilo di oggi, come la DARPA Robotics Challenge, combinando le esigenze militari strategiche con l'indagine scientifica di base.

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE


A
DESCRIPTION
OF
HELIOSCOPES,
And some other
INSTRUMENTS
MADE BY
ROBERT HOOKE,
Fellow of the Royal Society.
Hor ego, &c.
Sic vos non vobis——.
LONDON,
Printed by T. R. for John Martyn Printer to the Royal Society, at the Bell in St. Pauls Church-yard, 1676.

(a) La pagina di copertina di Hooke 1675 *Una descrizione di elioscopi e altri strumenti* Hooke, 1676

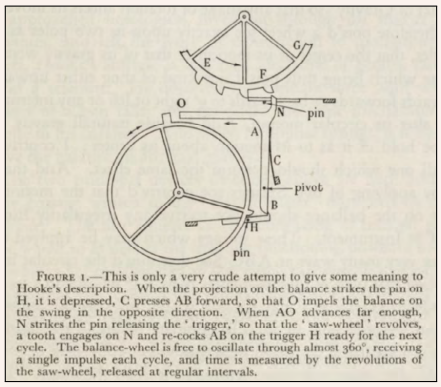


FIGURE 1.—This is only a very crude attempt to give some meaning to Hooke's description. When the projection on the balance strikes the pin on H, it is depressed, C presses AB forward, so that O impels the balance on the swing in the opposite direction. When AO advances far enough, N strikes the pin releasing the 'trigger,' so that the 'saw-wheel' revolves, a tooth engages on N and re-cocks AB on the trigger H ready for the next cycle. The balance-wheel is free to oscillate through almost 360°, receiving a single impulse each cycle, and time is measured by the revolutions of the saw-wheel, released at regular intervals.

(b) Spiegazione della fuga di Hooke in un orologio Hall, 1951

Figura 6.11: Gancio e orologio

della gravitazione universale. Newton, a sua volta, negò fortemente questa affermazione e fece notare che Hooke non aveva fornito alcuna derivazione rigorosa o prova geometrica. La disputa si escalò rapidamente. Newton, già risentito delle critiche precedenti di Hooke, utilizzò l'opportunità di minimizzare i contributi di Hooke e cancellare la sua influenza dal record. (Westfall, 1980).

Nonostante la polemica che circonda le sue dispute prioritarie con Newton, gli storici moderni riconoscono che Hooke ha colto l'intuizione fisica al cuore della teoria gravitazionale di Newton, ma non ha avuto gli strumenti matematici per formalizzarla. (Westfall, 1980; Inwood, 2002).

Due anagrammi che hanno cambiato il campo

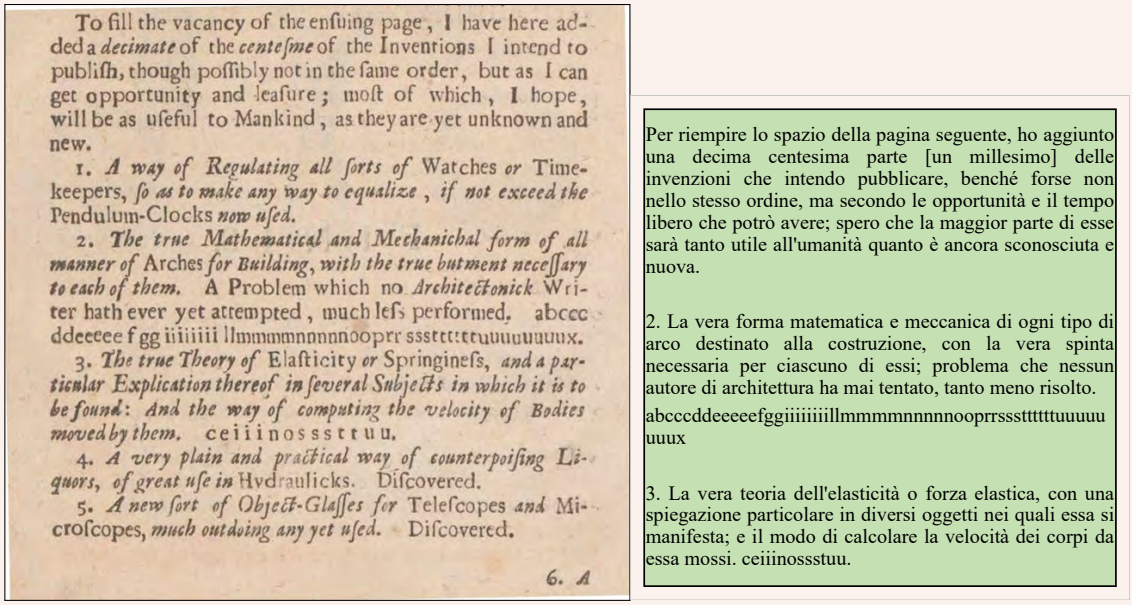
Su archi Per noi ingegneri strutturali è più rilevante quello che Hooke ha scritto nell'appendice della sua pubblicazione del 1675 (vedi Fig. 6.12).

Sorprendentemente, in questo libro dedicato agli orologi e alle tempeste, Hooke ha incorporato rivendicazioni per due (circa tre) principali principi scientifici[16]. Per riempire la vacanza della pagina successiva, Hooke ha aggiunto un elenco di dieci invenzioni che intende pubblicare, quattro delle quali ha caratteristicamente crittografato come anagrammi[17]—un dispositivo che ha favorito durante la sua carriera per garantire la

[16]Non diversamente da Fermat, che circa 1637 scrisse al margine di una copia di *Arithmetica* che aveva una prova (che non c'è $n \neq 2$ tale $a^n + b^n = c^n$), ma che era troppo grande per adattarsi al margine.

[17]Un anagramma è una parola o una frase formata da riordinare le lettere di un altro, tipicamente utilizzando tutte le lettere originali esattamente una volta. u e v sono stati usati in modo intercambiabile per indicare o la vocale u o la consonante v. Mentre Newton usava incifrazione latina frase[18] Hooke ha usato un anagramma latino, entrambi hanno tentato di "nascondere" le loro scoperte, forse per garantire la priorità durante il ritardo della divulgazione.

COPIA DI REVISIONE



To fill the vacancy of the enſuing page, I have here added a *decimate* of the *centeſme* of the Inventions I intend to publiſh, though poſſibly not in the ſame order, but as I can get opportunity and leaſure; moſt of which, I hope, will be as uſeful to Mankind, as they are yet unknown and new.

1. *A way of Regulating all ſorts of* Watches *or* Time-keepers, *ſo as to make any way to equalize, if not exceed the* Pendulum-Clocks *now uſed.*

2. *The true Mathematical and Mechanichal form of all manner of* Arches *for Building, with the true butment neceſſary to each of them.* A Problem which no *Architectonick* Writer hath ever yet attempted, much leſs performed. abccc ddeeeee f gg iiiiiiii llmmmmnnnnnoopr r sssttttttuuuuuuuux.

3. *The true Theory of* Elaſticity *or* Springineſs, *and a particular Explication thereof in ſeveral Subjects in which it is to be found: And the way of computing the velocity of Bodies moved by them.* ceiiinosssttuu.

4. *A very plain and practical way of counterpoiſing Liquors, of great uſe in* Hydraulicks. Diſcovered.

5. *A new ſort of Object-Glaſſes for* Teleſcopes *and* Microſcopes, *much outdoing any yet uſed.* Diſcovered.

6. *A*

Per riempire lo spazio della pagina seguente, ho aggiunto una decima centesima parte [un millesimo] delle invenzioni che intendo pubblicare, benché forse non nello stesso ordine, ma secondo le opportunità e il tempo libero che potrò avere; spero che la maggior parte di esse sarà tanto utile all'umanità quanto è ancora sconosciuta e nuova.

2. La vera forma matematica e meccanica di ogni tipo di arco destinato alla costruzione, con la vera spinta necessaria per ciascuno di essi; problema che nessun autore di architettura ha mai tentato, tanto meno risolto.
abccddeeeeefggiiiiiiiillmmmmnnnnnooprrsssttttttuuuuuuuux

3. La vera teoria dell'elasticità o forza elastica, con una spiegazione particolare in diversi oggetti nei quali essa si manifesta; e il modo di calcolare la velocità dei corpi da essa mossi. ceiiinossstuu.

(a) (b)

Figura 6.12: Anagrammi 1675 di Hooke *A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments* (Hooke, 1676)

priorità, ritardando la piena divulgazione; dei quattro, ha poi rivelato solo due; gli altri rimangono indecifrati a questo giorno. Il primo degli anagrammi decifrati era rilevante per gli ingegneri strutturali; il secondo, per i meccanici.

Il primo anagramma di Hooke legge:

> *abcccddeeeeefggiiiiiiiillmmmmnnnnnooprrsssttttttuuuuuuuux.*
>
> Hooke, 1676 A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments

Non è stato fino alla morte di Hooke che il suo esecutore, Richard Waller, ha rivelato la versione non crittografata in (Hooke, 1705):

> *flexile del continuum del pendio di Ut, sic stabit contiguum rigidum inversum*[a]
>
> [a] In latino, le lettere "u" e "v" sono intercambiabili.
>
> Come appende un cavo flessibile, quindi, invertito, stare i pezzi toccanti di un arco.
> Hooke, 1705 The Posthumous Works of Robert Hooke

In altre parole, la forma ideale di un arco è proprio quella di una corda liberamente sospesa, rivolta solo verso il basso. Hooke ha capito che i materiali da costruzione potrebbero resistere alla compressione ma non alla tensione, mentre una corda si comporta in modo

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

opposto. Questa visione del percorso di carico e della formazione rimane fondamentale per l'ingegneria strutturale. Il principio in seguito ispira generazioni di architetti e ingegneri, dal design di Christopher Wren di St. La Cattedrale di Paolo fino agli archi catenari di Antoni Gaudí nella Sagrada Família.

All'epoca, tuttavia, la comprensione di Hooke ebbe un impatto immediato: la sua formulazione criptica, la mancanza di elaborazione e la limitata diffusione significava che le implicazioni strutturali erano in gran parte trascurate dai suoi contemporanei, e non fino al XVIII secolo che il rapporto tra catene pendenti e archi stabili era studiato più rigorosamente, soprattutto per la sua ricerca di una relazione tra catene pendenti e archi stabili. *Poleni*, che ha analizzato la linea di spinta di San. La cupola di Peter, più tardi, figure come *Culmann* e *Heyman* porterebbe l'osservazione di Hooke in una messa a fuoco matematica e grafica più chiara, cementando il suo posto nella teoria delle strutture di muratura. Le strutture di ispirazione catanaria sono discusse in §15.5.1.

Per i dettagli analitici, consultare §30.3.3

Su sorgenti Il secondo anagramma riguarda ciò che Hooke è più ampiamente ricordato per la meccanica: il rapporto lineare tra forza e spostamento in corpi elastici.

A differenza del primo anagramma, che è stato risolto solo postumo—questo secondo è stato rivelato da Hooke stesso nel suo *Lectures de Potentia Restitutiva, or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies* (Hooke, 1678 PDF), come mostrato in Fig. 6.14. Quella pubblicazione ha riassunto i risultati degli esperimenti di Hooke con materiali elastici e ha segnato la prima volta il comportamento elastico dei solidi è stato discusso scientificamente.

Hooke aveva annunciato la scoperta nel 1675[19] in un'appendice al suo *A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments* (Hooke, 1676 PDF)Preoccupato per garantire la priorità, non ha dichiarato la legge esplicitamente ma l'ha crittografata come:

Il nostro sito

Hooke, 1676 PDF A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments

La soluzione arrivò tre anni dopo, nel 1678[20]. Hooke ha decifrato come:

Ut tensio sic vis

[19] Il *A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments* porta una data di impronta del 1676 ma in realtà è stata distribuita nell'ottobre 1675.

[20] A differenza dei ricercatori moderni che correvano per pubblicare, non era raro che nel XVII e XVIII secolo ritardassero la divulgazione. Un esempio più noto è Darwin, che sviluppò la sua teoria dell'evoluzione alla fine del 1830, ma aspettava fino al 1859 per pubblicare *L'origine delle specie*- un ritardo di circa venti anni.

COPIA DI REVISIONE

Come estensione, così la forza

Hooke, 1678 Lectures de Potentia Restitutiva, or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies

La Teoria delle Molle, sebbene tentata da sub eminenti matematici di questo periodo, non è stata finora pubblicata da nessuno, è ora circa diciotto anni da quando l'ho scoperto, ma progettando di applicarla ad un certo uso particolare, ho omesso la prova editoriale.

Circa tre anni da quando Sua Maestà è stata lieta di vedere l'esperimento che ha fatto questa Teoria provato a White-Hall, come anche il mio orologio di primavera.

Circa due anni dopo ho stampato questa Teoria in un Anagramma alla fine del mio Libro sulle descrizioni di elioscopi, viz. *Il nostro sito* Id est *Ut tensio sic vis*; cioè, la Potenza di qualsiasi Primavera è nella stessa proporzione con la Tensione: cioè, se uno allungamento di potenza o piegare uno spazio, due si piegano due, e tre si piegano tre, e così in avanti. Ora come la Teoria è molto breve, il modo di provarlo è molto facile....

Prendere una stringa di filo di 20, o 30, o 40 ft di lunghezza, e fissare la parte superiore di esso a un'unghia, e all'altra estremità fissare una Scala per ricevere i pesi: Poi con un paio di bussole prendere la distanza del fondo della scala dal terreno o il pavimento sotto, e impostare la distanza di detto; poi mettere in pesi nella scala detta e misurare le diverse stirature della corda detto, e confrontarli.

Hooke, 1678 Lectures de Potentia Restitutiva, or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies

Dichiarazione canonica di Hooke della legge di primavera, come indicato nella *De Potentia Restitutiva*, è mostrato in Fig. 6.13.

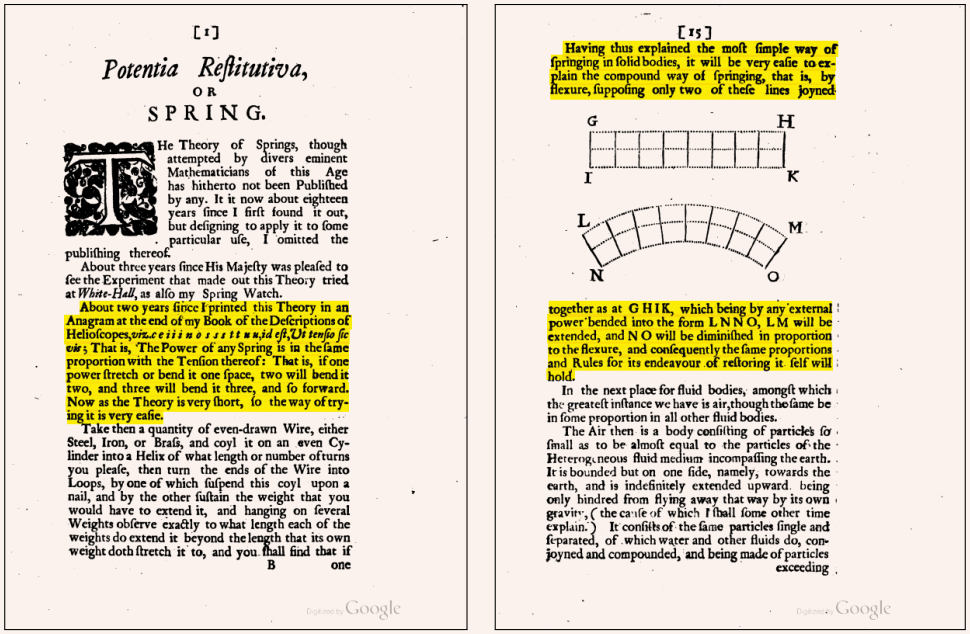
L'iconica illustrazione primavera Hooke si preoccupava soprattutto di stabilire la priorità per una legge universale della natura piuttosto che di fornire un'illustrazione sperimentale didattica o canonica. Dopo aver scoperto la legge quasi due decenni prima, l'ha pubblicato in forma crittografata come anagramma, e lo ha dimostrato pubblicamente prima della Royal Society, il suo scopo era quello di affermare la generalità, non pedagogia.

Non sorprende quindi che il diagramma di massa ora familiare associato comunemente alla legge di Hooke non compaia nella prima edizione di *De Potentia Restitutiva* (Hooke, 1678)Nonostante sforzi considerevoli, non sono stato in grado di tracciare l'origine della figura iconica mostrata in Fig. 6.14. L'attribuzione a Hooke sembra derivare da Andrade, 1950 , anche se là è fatto solo in modo obliquo.

La reputazione di Hooke ha sofferto a lungo di essere stata oscurata da Newton, diventando oggetto di critiche casuali e mal ponderate. Andrade, 1950 Robert Hooke ha cercato di rettificare questo, sostenendo che di tutti gli uomini di genio in quella primavera della scienza, Robert Hooke ha buone pretese di essere considerato il più grande. È all'interno di questo contesto riabilitativo che Andrade presenta la figura – forse incisa per le edizioni successive sotto la supervisione di Hooke, anche se questo rimane incerto.

Le illustrazioni effettive di Hooke Le cifre effettive di Hooke, come le laminae piegate mostrate in Fig. 6.13In questa costruzione, due linee rette GHIK sono unite alle loro

COPIA DI REVISIONE



[1]

Potentia Reſtitutiva,
OR
SPRING.

THe Theory of Springs, though attempted by divers eminent Mathematicians of this Age has hitherto not been Publiſhed by any. It it now about eighteen years ſince I firſt found it out, but deſigning to apply it to ſome particular uſe, I omitted the publiſhing thereof.

About three years ſince His Majeſty was pleaſed to ſee the Experiment that made out this Theory tried at *White-Hall*, as alſo my Spring Watch.

About two years ſince I printed this Theory in an Anagram at the end of my Book of the Deſcriptions of Helioſcopes, *viz. ceiiinosssttuu, id eſt, Ut tenſio ſic vis*; That is, The Power of any Spring is in the ſame proportion with the Tenſion thereof: That is, if one power ſtretch or bend it one ſpace, two will bend it two, and three will bend it three, and ſo forward. Now as the Theory is very ſhort, ſo the way of trying it is very eaſie.

Take then a quantity of even-drawn Wire, either Steel, Iron, or Braſs, and coyl it on an even Cylinder into a Helix of what length or number of turns you pleaſe, then turn the ends of the Wire into Loops, by one of which ſuſpend this coyl upon a nail, and by the other ſuſtain the weight that you would have to extend it, and hanging on ſeveral Weights obſerve exactly to what length each of the weights do extend it beyond the length that its own weight doth ſtretch it to, and you ſhall find that if

B one

[15]

Having thus explained the moſt ſimple way of ſpringing in ſolid bodies, it will be very eaſie to explain the compound way of ſpringing, that is, by flexure, ſuppoſing only two of theſe lines joyned

G H I K L M N O

together as at G H I K, which being by any external power bended into the form L N N O, L M will be extended, and N O will be diminiſhed in proportion to the flexure, and conſequently the ſame proportions and Rules for its endeavour of reſtoring it ſelf will hold.

In the next place for fluid bodies, amongſt which the greateſt inſtance we have is air, though the ſame be in ſome proportion in all other fluid bodies.

The Air then is a body conſiſting of particles ſo ſmall as to be almoſt equal to the particles of the Heterogeneous fluid medium incompaſſing the earth. It is bounded but on one ſide, namely, towards the earth, and is indefinitely extended upward being only hindred from flying away that way by its own gravity, (the cauſe of which I ſhall ſome other time explain.) It conſiſts of the ſame particles ſingle and ſeparated, of which water and other fluids do, conjoyned and compounded, and being made of particles

exceeding

Figura 6.13: Illustrazione di flexure elastica di Hooke *De Potentia Restitutiva* (Hooke, 1678)

estremità e piegate da un "power' esterno nella forma curva LNNO; le estensioni LM e NO sono proporzionali alla flessione. Questo esemplifica il metodo di ragionamento di Hooke sulla forza restitutiva attraverso le relazioni geometriche osservabili—lunghezze, curve e estensioni proporzionali—più che astrazioni.

~~$f = kx$~~ L'espressione algebrica familiare $F = kx$ è di per sé una formulazione successiva. La dichiarazione di Hooke del principio, *ut tensio, sic vis* («come estensione, così la forza»), ha espresso la legge dell'elasticità come proporzionalità radicata nella geometria piuttosto che nell'algebra simbolica. Per Hooke, l'elasticità si è manifestata attraverso rapporti di estensioni, lunghezze e forze attraverso una varietà di realizzazioni fisiche, senza ricorrere ad una costante astratta. che diede la prima generalizzazione sistematica del comportamento elastico nel suo 1807 *Lezioni sulla Filosofia Naturale* (Young, 1807).

Young non ha cominciato con un'equazione della forma $F = kx$; invece, ha definito una perfetta elasticità attraverso il ragionamento proporzionale—uguali forze che producono uguali estensioni e forze proporzionali che producono estensioni proporzionali— e solo allora ha introdotto una misura di elasticità normalizzando questa proporzionalità rispetto alle dimensioni del corpo. In questo modo, l'elasticità è diventata una proprietà materiale indipendente da una geometria specifica, che è ora conosciuta come il modulo di Young. già nel 1727.[21]

[21] Euler ha fatto un passo avanti verso una costante materiale di elasticità assiale introducendo una *modulo di estensione* (un fattore di proporzionalità che collega l'estensione longitudinale alla forza applicata, normalizzata dalle dimensioni del corpo), e lo usa per collegare l'estensione tipo Hooke alla flessione dei

COPIA DI REVISIONE

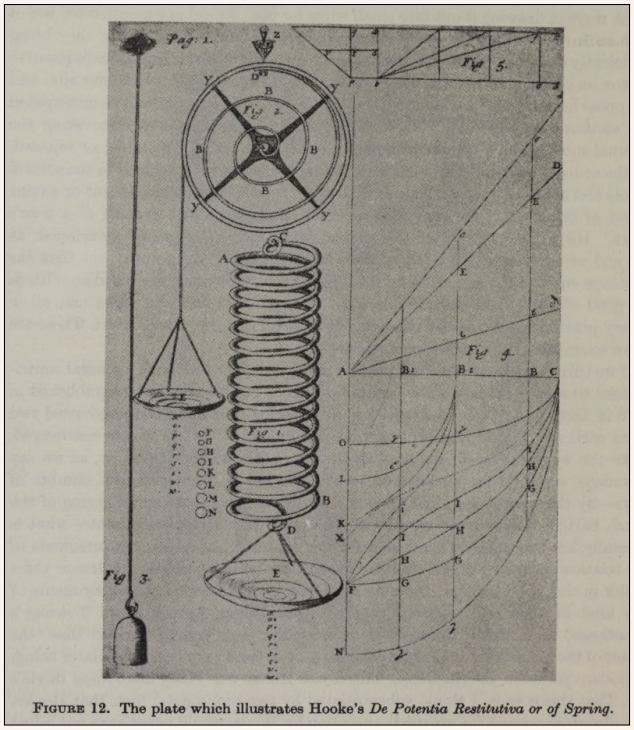


FIGURE 12. The plate which illustrates Hooke's *De Potentia Restitutiva or of Spring.*

Figura 6.14: Molla a spirale elicoidale con pesi sospesi. Questa illustrazione iconica è comunemente attribuita a Hooke, anche se la sua provenienza rimane poco chiara; la figura riprodotta qui è presa da Andrade, 1950.

318. Definizione. Una sostanza perfettamente elastica è inizialmente estesa e compressa in gradi uguali da forze uguali, e proporzionalmente da forze proporzionali.

319. Definizione Il modulo dell'elasticità di qualsiasi sostanza è una colonna della stessa sostanza, capace di produrre una pressione sulla sua base che è al peso causando un certo grado di compressione, come la lunghezza della sostanza è alla diminuzione della sua lunghezza.

Young, 1807 A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts

Vedi §7.3.2.6 per un trattamento contestualizzato dei contributi di Young alla flessore.

6.6.7 Isaac Newton (1642–1727)

Isaac Newton nacque prematuramente il giorno di Natale 1642 a Woolsthorpe, Lincolnshire, in una famiglia contadina di mezzi modesti. Suo padre era morto prima della sua nascita, e Newton trascorse gran parte della sua infanzia separata dalla madre dopo il suo matrimonio, un'esperienza che sembra aver favorito la sua vita all'interno e l'autoriduttività. Da ragazzo,

corpi elastici. 1727/28 e apparve solo postumo nel 1862; vedi Euler's *De oscillationibus anulaorum elastico* (Euler, 1862) e il racconto storico di Truesdell (Truesdell, 1960).

COPIA DI REVISIONE

ha mostrato poco interesse per l'agricoltura, ma ha mostrato un fascino precoce con i dispositivi meccanici, la costruzione di meridiane, orologi acquatici e piccole macchine. Educato prima alla scuola di grammatica locale e poi al Trinity College, Cambridge, Newton inizialmente incontrò la filosofia naturale aristotelica, ma ben presto si ritirò da essa a favore di un'inchiesta matematica e fisica indipendente. Questo isolamento precoce — sia sociale che intellettuale — ha formato uno stile di lavoro caratterizzato da una concentrazione intensa, segretezza e una preferenza per una certezza deduttiva sulla socialità sperimentale.

Da Galileo a Meccanica Universale Isaac Newton nacque nel 1642, anno della morte di Galileo, un passaggio simbolico della torcia nella storia della scienza, e si arruola nel Lincolnshire rurale, in Inghilterra, nel Trinity College di Cambridge, nel 1661 e poi diviene Lucasian Professore della Matematica.[22] Basandosi sulle intuizioni di Galileo sull'accelerazione e sulla visione meccanistica di Descartes, Newton avanzava decisamente oltre entrambi. Descartes aveva proposto che il moto celeste fosse governato da vortici inflessibili di liquido invisibile, e che le forze devono agire attraverso il contatto. Newton sostituì questo con un concetto rivoluzionario: attrazione gravitazionale a distanza.[23]

Il genio di Newton fu abbinato ad un'intensa disposizione personale, anche se spesso reclusiva e combattiva, si impegnò in feroci rivalità intellettuali, soprattutto con Robert Hooke sulla legge inversa e con Gottfried Leibniz sull'invenzione del calcolo. Queste dispute, mentre acrimonious, hanno stimolato lo sviluppo e la chiarificazione dei principi scientifici chiave. Paradossalmente, la natura segreta e competitiva di Newton, mentre personalmente distruttiva, può aver accelerato il progresso scientifico costringendo lui e i suoi contemporanei a sviluppare prove sempre più rigorose e spiegazioni più chiare per stabilire le loro affermazioni. La sintesi di Newton di matematica, fisica e astronomia avrebbe plasmato il corso della scienza per secoli, ed è ampiamente considerato come lo scienziato più influente di tutti i tempi.

Era anche una figura profondamente complessa: non solo un matematico e fisico, ma anche un alchimista e teologo, Newton trascorse decenni a studiare la cronologia biblica e la trasmutazione alchemica, anche se queste persecuzioni rimasero inedite nella sua vita. Società reale, alla fine servì come presidente, e anche ricoprì il potente ruolo governativo del Maestro della zecca reale. La sua ampiezza di attività–spanning scienza rigorosa, speculazione mistica, leadership istituzionale e servizio nazionale-riflette la ricchezza e le contraddizioni del paesaggio intellettuale seicentesco.

Le discussioni sono state focalizzate sui contributi di Newton alla matematica, alla fisica e alla meccanica, che sottolineano le basi tecniche che hanno cementato il suo ruolo nella definizione della moderna visione del mondo scientifico.

[22] Questa prestigiosa sedia sarebbe stata successivamente tenuta da Stephen Hawking.

[23] Nella fisica moderna, questa unità si estende ancora di più: meccanica quantistica—-originariamente sviluppata per descrivere fenomeni atomici e subatomici— ha anche applicazioni in fisica celeste, per esempio nella modellazione di interni stellari, nani bianchi, stelle neutroni, e processi come tunneling quantistico in contesti astrofisici.

COPIA DI REVISIONE

Il Matematica Nato il giorno di Natale nell'anno della morte di Galileo, Isaac Newton emerse come una figura tortuosa nella storia della scienza. Un matematico, fisico, astronomo e teologo, servì come professore di matematica all'Università di Cambridge ed è ampiamente considerato lo scienziato più influente di tutti i tempi.

Fino all'intervento di Newton, Aristotelian!meccanica Newton ha modificato fondamentalmente questa visione del mondo affermando che un oggetto rimane in movimento uniforme a meno che non sia agito da una forza esterna—quindi ponendo inerzia, non stasi, al centro del movimento. Questa rivalutazione, legata al suo chiaro trattamento matematico di attrito e resistenza, ridefinisce il concetto di forza.

In astronomia, Kepler aveva già formulato le sue tre leggi empiriche del moto planetario basate su osservazioni meticolose di Tycho Brahe Tuttavia, mancava un quadro teorico unificante: il catalizzatore della svolta di Newton arrivò nel 1684 quando l'astronomo Edmund Halley lo visitò con una domanda cruciale: quale curva avrebbe tracciato un pianeta se la forza gravitazionale seguisse una legge quadrata inversa con distanza? Newton rispose immediatamente "un'ellisse' sostenendo che l'aveva già calcolata. *De motu corporum in gyrum* Questo trattato, che ha dimostrato matematicamente che le orbite ellittiche nascono naturalmente dall'attrazione gravitazionale inversa, così ha colpito Halley che ha esortato Newton ad espanderla. *Filosofiæ Naturalis Principia Mathematica* (Newton, 1687)Fico. 6.15a. In tal modo, egli ha sistematicamente derivato le leggi del movimento e della gravitazione universale, corrodendo la meccanica terrestre e la dinamica celeste con un unico insieme coerente di principi.

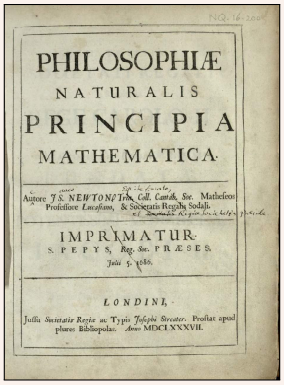
Le tre leggi del movimento introdotte nel *Principia* sono fondamentali sia per la meccanica classica che per l'ingegneria e saranno analizzati in modo più approfondito i dettagli tecnici successivi in questo libro. I contributi di Newton alle ottiche e soprattutto alla matematica erano altrettanto profondi. . Versione di Newton, basata su infinitesimali ed espressa attraverso la sua notazione di *Flusso*[24] apparve in manoscritti già nel 1666 ma non fu reso pubblico fino al 1693. Al contrario, Leibniz iniziò a usare differenziali nel 1675, introducendo la notazione moderna $\int$ e dy/dxMentre gli storici moderni riconoscono lo sviluppo indipendente del calcolo, l'indagine della Royal Society, presumibilmente e segretamente autorizzata da Newton stesso, imprecisato Leibniz di il plagioQuesta aspra disputa ebbe conseguenze durevoli per la matematica europea, in quanto i matematici britannici si isolarono in gran parte dagli sviluppi continentali per quasi un secolo, a loro danno.

Nella sua corrispondenza con Leibniz, Newton ha codificato le sue scoperte utilizzando anagrammi per stabilire la priorità pur mantenendo segretezza, come ad esempio

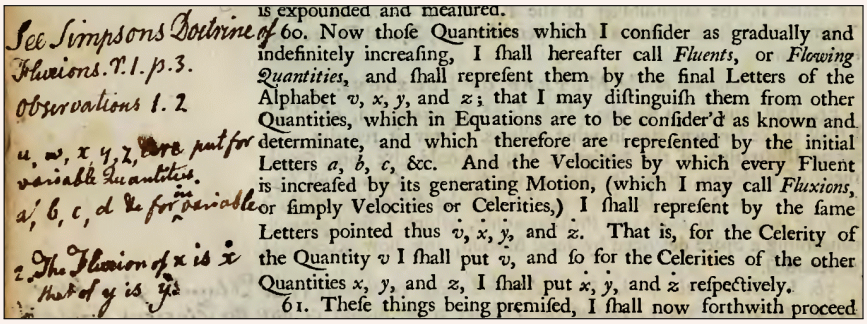
[24] Newton ha indicato quantità di tempo di tempo *fluenti*, e le loro velocità istantanee di cambiamento come *Flusso*, denotato da un punto sopra la variabile (ad es., $\dot{x}$). Questo equivale al derivato moderno $\frac{dx}{dt}$, ma espresso in un quadro geometrico a pianta temporale, Newton sviluppò questo metodo a metà-1660, anche se fu pubblicato postumo nel suo *Metodologia Fluxionum et Serierum Infinitarum* (1736).

COPIA DI REVISIONE

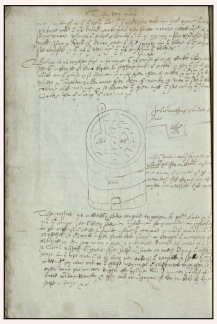
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA
IMPRIMATUR
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
LONDINI,

(a) *Principia*, Cover Page (Newton, 1687)


See Simpsons Doctrine of Fluxions. N. 1. p. 3.
Observations 1. 2.
u, w, x, y, z, are put for variable Quantities.
a, b, c, d &c for invariable
2. The Fluxion of x is ẋ that of y is ẏ
is expounded and measured.
60. Now those Quantities which I consider as gradually and indefinitely increasing, I shall hereafter call *Fluents*, or *Flowing Quantities*, and shall represent them by the final Letters of the Alphabet *v*, *x*, *y*, and *z*; that I may distinguish them from other Quantities, which in Equations are to be consider'd as known and determinate, and which therefore are represented by the initial Letters *a*, *b*, *c*, &c. And the Velocities by which every Fluent is increased by its generating Motion, (which I may call *Fluxions*, or simply Velocities or Celerities,) I shall represent by the same Letters pointed thus $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, and $\dot{z}$. That is, for the Celerity of the Quantity *v* I shall put $\dot{v}$, and so for the Celerities of the other Quantities *x*, *y*, and *z*, I shall put $\dot{x}$, $\dot{y}$, and $\dot{z}$ respectively.
61. These things being premised, I shall now forthwith proceed

(b) Fluxion



(c) Alchemy

Figura 6.15: Isaac Newton

6.2.3.3.4.4.4.4.4.4.4.2.
or *Dati equazionie quotcunque fluentes quantitates coinvolgitore, fluxiones invenire; et vice versa*

Data un'equazione che coinvolge qualsiasi numero di quantità fluenti, per trovare le oscillazioni; e viceversa

Newton, 1960 «*Letter to Henry Oldenburg, 24 October 1676*»

riassumere efficacemente il teorema fondamentale di calcolo in forma criptica.

Un'altra feroce disputa emerse con Robert Hooke, che affermò nel 1679 che Newton aveva appropriato il legge inversa-quare di attrazione Anche se Hooke aveva formulato una visione qualitativa, non l'ha mai sviluppata matematicamente. *Principia* La maggior parte degli storici respinge la carica di plagio, ma la rivalità lascia un segno indelebile sulle eredità di entrambi gli uomini.

Nonostante il suo status ormai leggendario, il *Principia* Non solo Newton né la Royal Society potevano finanziarla, ma i costi erano in ultima analisi coperti dall'astronomo Edmond Halley, che non solo finanziava la stampa ma ne gestiva anche la distribuzione.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

(Cohen, 2013). Questo episodio illustra come anche le opere scientifiche più monumentali dipendevano dalle relazioni personali e dall'iniziativa individuale per la loro diffusione.

Vale la pena correggere un errore comune sulla Terza Legge di Newton, spesso erroneamente rappresentato come "per ogni azione, c'è una reazione uguale e opposta"" che implica un paio di forze autobilancianti sullo stesso oggetto. A esercita una forza F_a sul corpo B, poi corpo B esercita una forza uguale e opposta F_b sul corpo A. Poiché le forze agiscono su corpi diversi, non implicano l'equilibrio (Cohen, 2002 PDF).

L'alchimista Infine, ma non meno importante, Newton era anche profondamente impegnato in alchimia...-riferito al momento come *chymistry*[25]Uno dei suoi obiettivi principali è stata la scoperta della *La pietra del filosofo* , una sostanza leggendaria credette di trasmutare metalli di base in oro. *Elisir of Life* , ha detto di concedere la longevità o l'immortalità.

Al lettore moderno, questi obiettivi possono apparire fantastici, ma nell'alchimia del XVII secolo non era considerata frangia o pseudoscienza. Piuttosto, era una seria e legittima ricerca intellettuale, sovrapporsi a ciò che in seguito sarebbe diventato chimica moderna, metallurgia e medicina. Molti filosofi naturali—compreso Boyle, Glauber, e anche Kepler—took parte in esso. Alchemy combinava sperimentazioni empiriche con una filosofia a base ermetica.

Il lavoro alchemico di Newton era sistematico e vasto, entro un decennio, ha compilato il *Indice Chemicus*, elenco alfabetico di sostanze, processi e termini allegorici, tratto dalla sua lettura di oltre 150 trattati alchemici (Newton, 1680)Ha eseguito numerosi esperimenti in privato, mirando a decodificare antiche ricette e scoprire la vera composizione della materia, che non sono mai state condivise pubblicamente durante la sua vita, in parte perché l'alchimia operava sul bordo della rispettabilità accademica, e in parte a causa delle sue associazioni con segretezza e potere.

Dopo la sua morte nel 1727, i manoscritti alchemici di Newton furono considerati "non idonei a essere stampati" e rimasero in gran parte nascosti dalla visione pubblica. Era solo nel XX secolo che gli studiosi cominciarono ad esaminare sistematicamente questi scritti. Oggi, l'immersione di Newton nell'alchimia non è vista come una deviazione dalla scienza, ma piuttosto come una riflessione su come permeabile i confini tra scienza, filosofia e misticismo moderno.

Il lettore moderno può ancora trovare difficile conciliare il genio scientifico di Newton con la sua devozione a un campo spesso frainteso o sciolto. Eppure è proprio in questa giustapposizione che intravediamo la natura transitoria del pensiero del XVII secolo-un mondo in cui matematica rigorosa, speculazione metafisica, e cronistoria sperimentale tutti coesistiti in una sola mente.

[25]Nel XVII secolo, il termine *chymistry* si riferisce ad un ampio campo che comprendeva sia l'alchimia speculativa che la chimica sperimentale emergente, non era ancora la scienza completamente empirica che conosciamo oggi, ma piuttosto una miscela di metallurgia pratica, filosofia mistica e pratica di laboratorio. *Chimica chimica* non ha completamente separato da *Alchimia* fino al XVIII secolo.

COPIA DI REVISIONE

L'elastico? Newton aveva solo un ruolo minore nello sviluppo storico della teoria dell'elasticità (Todhunter e Pearson, 1893). Eppure, nel suo lavoro successivo *Ottimizzazione* (Newton, 1717), ha posato una serie di speculative "Queries", tra cui Query XXXI—su "Imprese Elettive'—offre un suggerimento che poteri attraenti tra piccole particelle potrebbero sottolie fenomeni macroscopici.

> Perché è ben noto che i corpi si comportano l'un l'altro dalle attrazioni di gravità, magnetismo ed elettricità; e queste istanze hanno fatto il tenore e il corso della natura, e lo rendono non improbabile, ma che ci possono essere poteri più attraenti di questi.
>
> Newton, 1717 Opticks, or, a treatise of the reflections, refractions, inflections & colours of light[Assegno 31]

In questa ricerca Newton immagina tutta la materia come composta da particelle dure, sciolte e piene di calore, a malapena toccando in pochi punti, e poi offre un'intuizione precoce di coesione e di comportamento elastico:

> Ora le piccole particelle della materia possono cohere dalle attrazioni più forti, e comporre particelle più grandi di virtù più debole; e molti di questi possono cohere e comporre particelle più grandi, la cui virtù è ancora più debole; e così via per i subacquei successione, fino alla fine di progressione nelle particelle più grandi, da cui le operazioni in chimica, e i colori dei corpi naturali dipendono; e che, a sua volta, compone corpi di una forza di scorrimento sensibile.
>
> Newton, 1717 Opticks, or, a treatise of the reflections, refractions, inflections & colours of light[Assegno 31]

Questo passaggio prevede poi tentativi di collegare la risposta elastica macroscopica alle forze interne attraenti. Oltre a questa speculativa intuizione, l'unico altro contributo conosciuto di Newton all'elasticità sta in un breve passaggio in *Principia* La sua impronta sullo sviluppo formale della teoria dell'elasticità è rimasta limitata.

La rigorosa formulazione matematica dell'elasticità emergerebbe nei secoli seguenti. La legge empirica di Hooke relativa alla forza di spostamento nelle molle—primo pubblicata nel 1678— era un passo critico iniziale (vedi §6.12). In seguito, Augustin-Louis Cauchy introdusse lo stress e l'equilibrio formalizzato nei media continui; Claude-Louis Navier estendeva queste idee in una teoria lineare sistematica utilizzata in meccanica strutturale fino ad oggi.

Il *Principia* e il quadro Newtoniano per l'analisi strutturale Isaac Newton (1642–1727) (Newton, 1687) ha raggiunto la grande sintesi che meccanica terrestre e celeste unificata, stabilendo il quadro concettuale all'interno del quale opera tutta l'analisi strutturale successiva. *Filosofiæ Naturalis Principia Mathematica* (Principi matematici della filosofia naturale), pubblicata per la prima volta nel 1687, formulava le leggi del movimento e della gravitazione universale che governavano i fenomeni dalla caduta delle mele ai pianeti orbitanti—— e, cruciale per l'ingegneria, dalla deflettazione dei raggi alle strutture di collasso.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Le tre leggi del movimento di Newton La prima legge (inerzia) stabilisce che i corpi rimangono a riposo o in movimento uniforme, a meno che non siano agiti da forze—la base concettuale per l'equilibrio statico. La seconda legge quantifica il rapporto tra forza, massa e accelerazioneLa terza legge assicura che le forze di interazione si verifichino in coppie uguali e opposte su corpi diversi, un principio essenziale per l'analisi del corpo libero e la determinazione delle reazioni.

Per le strutture statiche, le leggi di Newton si riducono alle condizioni di equilibrio: la somma vettoriale di tutte le forze deve sparire ($\sum \mathbf{F} = 0$), e la somma di tutti i momenti su qualsiasi punto deve sparire ($\sum \mathbf{M} = 0$). Applicate sistematicamente, queste relazioni permettono l'analisi di capriate, travi, cornici, archi e altre forme strutturali. Ogni diagramma a corpo libero disegnato da un ingegnere strutturale è un'applicazione della meccanica newtoniana.

Il *Principia* Inoltre, ha introdotto l'apparato matematico – il calcolo delle oscillazioni, presentato in forma geometrica— che ha poi permesso l'analisi di sistemi continui. Equazioni differenziali che governano la deflezione del fascio, la stabilità della colonna e le dinamiche strutturali sono espressioni della meccanica newtoniana applicata a corpi deformabili. Oltre a risultati particolari, Newton ha stabilito l'ideale di una meccanica razionale: un sistema matematico auto-co-coercoerente capace di predire predire prevedere il comportamento fisico da principii governanti che governano le stesse.

6.6.8 Gottfried Leibniz (1646–1716)

Gottfried Wilhelm Leibniz nacque nel 1646 a Lipsia, figlio di professore di filosofia morale, e in età giovane, ottenne un accesso senza restrizioni alla biblioteca del padre, dove si istruì leggendo ampiamente nella letteratura classica, nella filosofia, nella logica, nella matematica e nella legge. L'educazione in gran parte autodidattica ha favorito una straordinaria ampiezza intellettuale e una credenza per tutta la vita nell'unità della conoscenza. Formata formalmente in diritto piuttosto che in matematica, Leibniz ha sviluppato le sue idee scientifiche indipendentemente dall'istruzione accademica, avvicinando la matematica come linguaggio simbolico capace di esprimere verità generali. Questa prima immersione nella logica e nella metafisica ha plasmato la sua enfasi successiva sui sistemi formali, la notazione e i metodi universali—tratti che hanno contraddistinto il suo approccio alla meccanica e al calcolo dallo stile più geometrico e fisicamente fondato di Newton.

Polimath del XVII secolo Gottfried Wilhelm Leibniz era una polimath tedesca, filosofo, e matematico la cui gamma intellettuale rivaleggiava con quella di qualsiasi figura del XVII secolo. Un brillante pensatore e scrittore prolifico, ha dato contributi fondamentali alla logica, alla metafisica, alla legge, alla storia e– nel contesto di questo capitolo—-matematica e alla meccanica.

Anni formativi e influenza parigina All'inizio della primavera del 1672, un inviato tedesco arrivò a Parigi: era Leibniz, allora a metà degli anni venti, che intraprese una missione diplomatica per il suo patrono, Barone von Boineburg. Ostensibilmente politico, il viaggio

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

fu intellettuale trasformativo. A Parigi, Leibniz incontrò una vivace comunità di scienziati e filosofi.Sotto la guida di Huygens, Leibniz si è trasferito dalla speculazione filosofica all'analisi matematica rigorosa, e questa guida illustra come le reti europee informali siano servite come meccanismi cruciali per trasmettere e promuovere la conoscenza matematica.

Invenzione del Calcolo Durante i suoi anni di Parigi (1672–1676), Leibniz sviluppò le fondamenta di quello che divenne il calcolo differenziale e integrale. $\int$ per l'integrazione e d per differenziali, simboli che rimangono oggi in uso universale. A differenza di Newton, che ha usato la notazione *Flusso* e pubblicato a malincuore, Leibniz fu veloce a pubblicare e comunicare i suoi risultati, una differenza nella pratica scientifica che contribuì a scatenare la vertenza di priorità amara (vedi §6.6.7La volontà di Leibniz di condividere scoperte apertamente contrastate con il segreto di Newton e, infine, ha beneficiato dello sviluppo più ampio dell'analisi matematica.

La prima disputa del Calcolo La visione di Leibniz di infinitesimali come quantità idealizzate si distingueva per le argomentazioni geometriche di Newton, mentre gli studiosi moderni concordano che entrambi gli uomini svilupparono il calcolo in modo indipendente, i sostenitori di Newton, soprattutto la Royal Society, in un rapporto scritto segretamente da Newton-accused Leibniz di plagiarismo.[26]

Metafisica e Meccanismo Oltre al calcolo, Leibniz ha avanzato una visione meccanica del mondo fondata su principi metafisici. *monadi*–unità, separate, a carattere spirituale—-è stato un tentativo di conciliare il meccanismo con un racconto filosofico dell'unità e dell'armonia prestabilita. Sebbene astratto, questo lavoro ha ispirato i pensatori successivi sia nella scienza che nella filosofia, tra cui Kant e, indirettamente, aspetti della teoria del campo.

Calcolatore meccanico e interessi di ingegneria Leibniz ha collaborato con gli ingegneri e ha cercato innovazioni pratiche. *Reckoner passo*, una calcolatrice meccanica in grado di eseguire moltiplicazioni e divisioni, costruendo sulla macchina di aggiunta di Blaise Pascal. Sebbene meccanicamente imperfetto, è stato un tentativo audace di automatizzare il calcolo e spesso è considerato come un precursore delle macchine di calcolo successive.[27]

Logica simbolica e lingua universale La sua visione di un linguaggio scientifico universale, *caratteristica di universalis*, combinato con un calcolo logico formale, *rapporto di calcolo*, prefigurarono gli sviluppi nella logica simbolica e nell'informatica secoli dopo, che si sforzarono di ridurre il ragionamento al calcolo e di essere influenti su pensatori successivi come Boole, Frege e Turing.

[26] In ingegneria geotecnica, una disputa altrettanto feroce si è alzata tra Karl Terzaghi e Paul Fillunger negli anni trenta sulle basi matematiche della meccanica del suolo e sulla validità del principio di stress efficace, (Goodman, 1999)La controversia si è profondamente caricata e politicamente, finendo tragicamente con la morte di Fillunger, e le sue ripercussioni hanno plasmato la traiettoria e l'accettazione della ricerca della meccanica del suolo per decenni.

[27] Un esempio moderno di questa filosofia si può vedere nel lavoro di Benoît Mandelbrot, il cui sviluppo di geometria frattale—originariamente un costrutto teorico—fonda applicazioni di ampio respiro in ingegneria, dalla modellazione di superfici ruvide e supporti porosi per migliorare la elaborazione del segnale e la progettazione di antenne.

COPIA DI REVISIONE

Vis Viva e Conservazione Discussioni In meccanica, Leibniz ha introdotto il concetto di *vis viva* ('vivere forza"), proporzionale a mv^2, come quantità conservata nei processi meccanici, che lo ha messo in disaccordo con la scuola newtoniana, che ha sottolineato slancio (mv) come quantità primaria conservata; il dibattito persiste nel XIX secolo e contribuisce alla moderna comprensione della conservazione dell'energia; questo riconoscimento precoce della conservazione dell'energia risulterebbe cruciale per la termodinamica successiva e per l'analisi ingegneristica delle macchine e delle strutture.

Equazioni differenziali e modellazione fisica Anche Leibniz ha messo a punto dei lavori per l'utilizzo di equazioni differenziali per modellare sistemi dinamici, la cui chiarezza e formalismo algebrico hanno permesso di esprimere sistematicamente il cambiamento e la legge fisica, strumenti che sono diventati centrali nella meccanica sviluppata da Euler, Lagrange e altri.

Visione istituzionale e diplomazia scientifica Leibniz ha svolto un ruolo significativo nella fondazione di accademie scientifiche, tra cui quello che sarebbe diventato l'Accademia di Berlino. Ha sostenuto per l'unificazione degli sforzi scientifici attraverso i confini nazionali, anticipando le reti moderne di collaborazione internazionale. La sua prospettiva istituzionale riflette una comprensione che il progresso scientifico richiedeva non solo il genio individuale ma anche strutture organizzate per una collaborazione duratura.[28]

Interventi e Influenza Trasversalmente riferiti in tutto questo volume sono le interazioni di Leibniz con Newton (§6.6.7), la sua mentorship sotto Huygens (§6.6.4), e le sue eco in figure successive come Cauchy ed Euler, che hanno aiutato a colmare il rigore matematico con l'intuizione fisica.

Calcolo, pensiero variezionale, e Legacy di ingegneria Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) (Leibniz, 1969) co-sviluppato indipendentemente da Newton, introducendo la nozione e il quadro concettuale che divenne standard nella matematica continentale e, infine, nell'analisi ingegneristica in tutto il mondo. che divenne strumenti essenziali nell'analisi strutturale.

La notazione del calcolo di Leibniz...dx, dy, $\int$, d/dx–prova molto più pratica per il calcolo delle oscillazioni di Newton ed è universalmente utilizzato oggi. Il suo sviluppo sistematico di regole per la differenziazione e l'integrazione, presentato in documenti dal 1680 in poi, rese il calcolo accessibile ai matematici e agli ingegneri in tutta Europa.

Oltre alla notazione, Leibniz ha contribuito a concetti fondamentali per la meccanica. *vis viva*—quello che chiamiamo energia cinetica—avviatiò l'approccio basato sull'energia alla meccanica che integra la formulazione newtoniana basata sulla forza. Riconoscere che

[28] Un parallelo moderno può essere visto in iniziative di ricerca su larga scala sponsorizzate dalla Fondazione Nazionale delle Scienze (NSF), come il George E. Brown, Jr. Rete per la simulazione di ingegneria del terremoto (NEES) e il suo successore, l'infrastruttura di ricerca di ingegneria naturale Hazards (NHERI), che uniscono squadre multi-istituzionale in università, laboratori nazionali e industria per affrontare complesse sfide ingegneristiche, la formazione di competenze, risorse e strutture sperimentali in modi che nessun singolo investigatore potrebbe raggiungere da solo.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

certe quantità (energia, lavoro) sono conservate nei processi meccanici ha fornito potenti strumenti per l'analisi di sistemi in cui l'analisi della forza diretta è difficile.

Leibniz si è impegnato anche con le fondamenta della meccanica, discutendo con Newton e i suoi seguaci sulla natura dello spazio, del tempo e della forza. Il suo principio di ragione sufficiente–che nulla si verifica senza un motivo–anticipato principi variazionali: tra tutti i possibili movimenti, la natura seleziona uno che estremizza una certa quantità. Sviluppato matematicamente da Euler, Lagrange e Hamilton, questa linea di pensiero ha portato al principio di azione variazionale meno moderna e

Per l'ingegneria strutturale, l'eredità di Leibniz comprende l'apparato del calcolo, i concetti energetici che soggiaceno il lavoro virtuale e i metodi di sforzo-energia, e il quadro variazionale che permette l'analisi degli elementi finiti. École Polytechnique e i suoi successori, hanno contribuito a stabilire l'approccio matematico all'ingegneria che prevale oggi.

6.6.9 Famiglia Bernoulli (1654–1782)

Jakob Bernoulli, un commerciante di spezie, è fuggito dai Paesi Bassi per evitare la persecuzione religiosa da parte degli spagnoli e si è trasferito a Basilea, Svizzera, nel 1620— un importante centro commerciale dell'Europa centrale al momento—dove gli fu concessa la cittadinanza nel 1622. In origine, Jakob e suo figlio Niklaus trovarono il successo come mercanti e prosperarono nel commercio. La traiettoria della famiglia da mercanti a matematici riflette i più ampi cambiamenti sociali del XVII secolo, quando la prosperità commerciale creò opportunità per la ricerca intellettuale e quando le abilità matematiche divennero sempre più preziose per la filosofia di navigazione, ingegneria naturale.

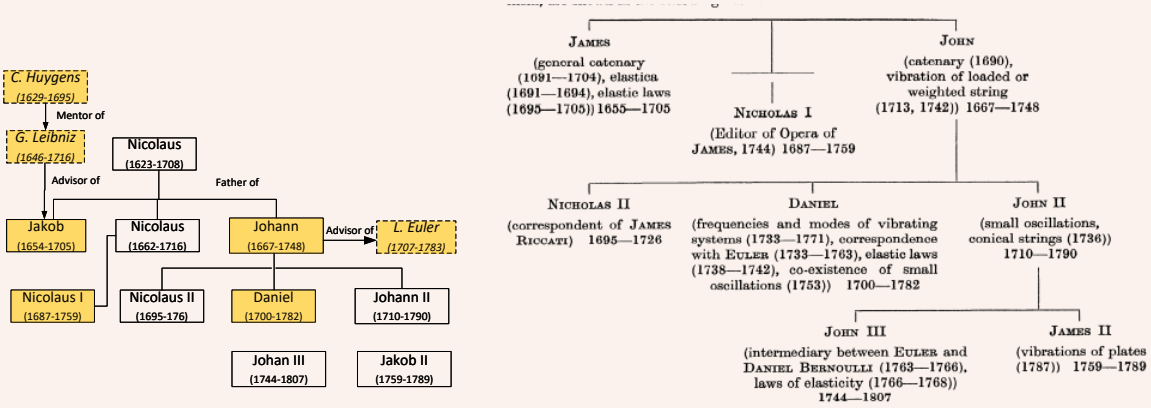
Furono i discendenti di Niklao (1623–1708) che divennero matematici eccezionali per più di un secolo; tra loro, tra i suoi figli, Jakob e Johann, e suo nipote Daniele.

È interessante notare che Leibniz tutored Johann, che a sua volta ha conservato Euler, formando un notevole lineage intellettuale che ha plasmato la matematica moderna. Questa catena di mentorship dimostra come la conoscenza matematica è stata trasmessa attraverso relazioni personali e istruzione diretta, creando continue tradizioni di pensiero matematico che hanno attraversato generazioni e confini nazionali. Se ci fossero dei regni in meccanica, i Bernoullis avrebbero regnato[29]Eppure la loro dinastia non era senza dramma—la rivalità intensa e ben documentata tra Jakob e Johann è emblematica della feroce competitività che a volte accompagna grande genio (Peiffer, 2006)Le loro dispute familiari erano così ben documentate che forniscono una finestra unica nelle dinamiche personali che hanno guidato la concorrenza scientifica nel primo periodo moderno.[30]

[29]Nell'età moderna, la "royalty" Marie e Pierre Curie hanno condiviso il Premio di Fisica nel 1903 per il loro lavoro sulla radioattività. Marie Curie ha vinto un secondo Premio Nobel per la Chimica nel 1911 per la scoperta del radio e del polonio, rendendola l'unica persona a vincere i premi atomici in due diverse scienze.

[30]In tempi moderni, le rivalità scientifiche hanno continuato a plasmare traiettorie di ricerca, come l'intensa

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE



(a)

(b) (Truesdell, 1960),Note: Jakob and Johann Bernoulli are also referred to as James and John in English sources

Figura 6.16: L'albero genealogico di Bernoulli (Membri evidenziati sono discussi in questo libro) e il loro cerchio intellettuale

Nota che Bernoulli-Euler Online (BEOL) La piattaforma serve come centro di ricerca dedicato, focalizzandosi sull'esplorazione della matematica e della scienza primi moderni, il cui obiettivo primario è quello di integrare senza soluzione di continuità le vaste opere e le corrispondenze dei membri di spicco della dinastia Bernoulli e dell'influente matematico Leonhard Euler.

6.6.9.1 Jakob Bernoulli (1654–1705)

Jakob Bernoulli fu il primo matematico della dinastia Bernoulli, figlio primogenito del commerciante Niklaus Bernoulli (1623–1708) e sua moglie, Margaretha Sch oInsistenza di suo padre, Jakob completò il suo *magister artium* in latino, greco e filosofia nel 1671, seguito da studi di teologia, nonostante il suo crescente fascino con la matematica, fu costretto a continuare in teologia e a guadagnare una *licenziamento* Laureatosi nel 1676, si unì al Sacro Ministero di Basilea, ma continuò a perseguire la scienza come un autodidatto, insegnandosi matematica e astronomia attraverso testi elementari, e questo approccio autodidattico era comune tra i primi matematici, poiché l'educazione matematica formale era ancora sottosviluppato nella maggior parte delle università europee.

Viaggi e crescita intellettuale Nell'agosto del 1676 Jakob iniziò a viaggiare per l'arricchimento intellettuale. Ginevra fu la sua prima tappa, dove trascorse 20 mesi a rimorchiare una ragazza cieca di talento, Elizabeth Waldkirch (1660–1728), per la quale inventò un

competizione tra James Watson e Rosalind Franklin nel gruppo di elucidazione della struttura del DNA, o la lunga disputa tra Stephen Hawking e Leonard Susskind sul paradosso delle informazioni sul buco nero.

COPIA DI REVISIONE

sistema di scrittura[31]. Frequentò dibattiti teologici e, nel 1677, iniziò a registrare riflessioni scientifiche nel suo taccuino *Meditazioni* e le entrate di viaggio in *Reisb uchlein*.

Da Ginevra, Bernoulli si trasferì in Francia—prima a Limousin come tutore al Marchese di Lostanges, poi a Bordeaux, e più tardi a città come Nantes, Saumur e Parigi. Durante questo periodo, divenne fluente in francese e profondamente influenzato dalla filosofia naturale di Descartes. Nel 1680, tornò brevemente a Basilea prima di intraprendere un tour di 18 mesi attraverso l'Olanda e l'Inghilterra.

Incontri scientifici a Londra Nell'agosto del 1682, Bernoulli arrivò a Londra, dove incontrò John Flamsteed (1646–1719) e Robert Hooke (1635–1703). Il 12 agosto 1682, frequentò un incontro della Royal Society che presentava un esperimento sulla forza dei materiali, e questa esposizione agli approcci sperimentali ai problemi meccanici influenzerebbe profondamente il suo lavoro teorico successivo sull'elasticità.

Ritorno a Basilea e Carriera Accademica Al ritorno in Svizzera nell'ottobre del 1683, Bernoulli si stabilì a Basilea e sposò Judith Stupanus nel 1684, con due figli, e il suo interesse si era spostato verso la fisica sperimentale, probabilmente influenzata dalle opere di Robert Boyle (1627–1691). Dal 1683 al 1686, diede lezioni sulla fisica sperimentale, compilata nella sua *Collegium Experimentale sive curiosum*, che era una raccolta di esperimenti e riflessioni fisici e meccanici, spesso presentati in uno stile discorrenziale o pedagogico.

Contributi matematici e Professore Dopo il 1685, Bernoulli pubblicò sempre più matematica, studiando la seconda edizione latina Descartes, 1637b La sua ricerca ha abbracciato la geometria algebrica e differenziale, la serie, la probabilità e il calcolo variazionale e integrale. Nel 1687, è stato nominato professore di matematica all'Università di Basilea, una posizione che ha mantenuto fino alla sua morte. La sua filosofia di conoscenza ha sottolineato la comprensione costruzione gradualmente da fondazioni stabilite. Questo approccio sistematico alla costruzione della conoscenza è diventato caratteristica della scuola matematica di Basilea e influenzato le generazioni di studenti.

Collaborazione e Rivalry con Johann Jakob insegnò matematica al fratello minore Johann (1667–1748), che divenne poi suo rivale, inizialmente collaborarono quando Jakob stava insegnando fisica e Johann stava studiando medicina. Insieme, padroneggiarono il calcolo differenziale di Leibniz in una questione di giorni e presto lo applicò a problemi complessi, tra cui l'analisi della curva.

Fondazioni della Meccanica Razionale La ricerca di Jakob Bernoulli ha portato a quattro problemi fondamentali, che Truesdell, 1968 identifica come pietre miliari nella storia della meccanica razionale:

1. Derivazione della legge di piegatura in una fascia elastica dalla legge di estensione di fibre longitudinali.

[31] Si può solo rispettare i genitori di Elisabetta per affidare una figura così dotata per educare la loro figlia cieca nel XVII secolo.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

2. Determinazione della posizione della fibra neutra in un fascio piegato e della natura delle forze che agiscono su una sezione trasversale.
3. Unificazione della teoria delle linee flessibili, regolata dall'equilibrio di forza, con quella delle fasce elastiche, regolate dall'equilibrio di momento.
4. Determinazione della risposta elastica dei materiali.

Questi risultati hanno posto la base per la teoria classica dell'elasticità, in particolare lo sviluppo del *elastico*, un modello matematico di grandi deformazioni in aste e travi snelle. Il lavoro pionieristico di Jakob sulla forma delle curve elastiche anticipato i contributi successivi di Euler, il cui trattamento analitico formalizza il soggetto.

Il *e*lastico e analisi strutturali Bernoulli ha posto il *e*lastico problema nel 1691 e offrì la sua soluzione in lavori successivi culminanti nella sua pubblicazione del 1694 *Curvatura Laminae Elastica*, (Bernoulli, Jakob, 1694)Ha dimostrato che la curva assunta da una sottile striscia elastica piegata sotto una forza finale potrebbe essere caratterizzata da un'equazione differenziale. Utilizzando il ragionamento geometrico e il concetto di curvatura, ha derivato le relazioni tra il momento di piegatura e la posizione lungo la striscia, e ha dimostrato che il raggio di curvatura variava con la distanza perpendicolare dal carico strutturale applicato.

Reception e Legacy Christiaan Huygens e Gottfried Leibniz hanno entrambi riconosciuto la difficoltà della *e*lastico Huygens dubitò anche che potesse essere risolto elegantemente, anche se in seguito riconobbe il successo di Bernoulli. Queste critiche illustrano quanto l'intuizione avanzata di Bernoulli fosse, nonostante alcuni limiti – come supporre che la fibra neutrale rimanesse indeformata, che la teoria dell'elasticità moderna ha da allora corretto.

Il *e*lastico Daniel Bernoulli propose l'approccio variazionale a Leonhard Euler, che alla fine generalizzò il problema usando il calcolo delle variazioni, ponendo così la fase della teoria moderna della stabilità elastica e dell'analisi strutturale, che corrodeva il lavoro di Bernoullis, Leibniz, Huygens e Euler.

Conclusione: Empiricismo e Meccanica Razionale Oltre al suo rigore matematico, i metodi di Jakob riflettevano una posizione filosofica che poneva l'osservazione empirica e il ragionamento incrementale al centro dell'indagine scientifica. Truesdell, 1968 , la creazione di meccanica razionale deve tanto a Jakob Bernoulli quanto a Newton. La sua eredità persiste non solo attraverso le sue opere, ma anche attraverso la sua influenza sul fratello Johann, il suo allievo Euler, e le generazioni di meccanicisti che costruirono sulle sue fondazioni concettuali. L'integrazione di Jakob di osservazione empirica con analisi matematica stabiliva una metodologia che sarebbe diventata centrale alla scienza ingegneristica[32].

[32] L'ingegneria strutturale moderna esemplifica questa integrazione attraverso sistemi di monitoraggio della salute strutturale, come quelli utilizzati su ponti principali come il Golden Gate Bridge, dove i dati dei sensori in tempo reale (straina, spostamento, vibrazione) sono continuamente integrati con modelli di

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

6.6.9.2 Johann Bernoulli (1667–1748)

Johann Bernoulli, fratello minore di Jakob e padre di Daniele, ha svolto un ruolo fondamentale nella diffusione e nello sviluppo del calcolo lebniziano. Dopo essere stato introdotto in matematica da Jakob, Johann è diventato un ardente promotore del calcolo differenziale e uno dei suoi primi utenti sistematici in fisica e meccanica. brachistochrone problema[33] e ha contribuito allo studio della geodesia, della catenaria e del movimento dei fluidi. La sua soluzione al problema del brachistochrone, che trova la curva della discesa più veloce, è stata una delle prime applicazioni principali di metodi variazionali e ha contribuito a stabilire il calcolo delle variazioni come una nuova disciplina matematica.

Johann tenne la cattedra di matematica a Groningen e poi succedette a suo fratello all'Università di Basilea. La sua influenza più duratura passò attraverso i suoi studenti, soprattutto Leonhard Euler, che mentoò da giovane età. *Opera Omnia*L'approccio pedagogico di Johann ha sottolineato l'applicazione pratica delle tecniche matematiche ai problemi fisici, un approccio che avrebbe influenzato profondamente Euler e le generazioni successive di fisici matematici, (Reddy, 2017).

6.6.9.3 Intermedio *O*pera Omnia

Sebbene nacque nella stessa dinastia matematica, Jakob e Johann Bernoulli perseguirono percorsi sovrapposti ma distinti nella modellazione del calcolo, della meccanica e della probabilità. *Opera Omnia*— fornire un registro definitivo della loro eredità intellettuale; la tabella seguente presenta una sintesi laterale dei loro contributi principali, ricavati dal loro *O*pera Omnia volumi, Tabella 6.3.

6.6.9.4 Daniel Bernoulli (1700–1782)

Daniel Bernoulli nacque a Groningen nei Paesi Bassi, secondo figlio di Johann Bernoulli e nipote di Jakob Bernoulli. Fu cresciuto in una famiglia ricca di matematica e di indagine scientifica, anche se il suo rapporto con il padre era spesso teso dalla rivalità. Johann inizialmente guidato l'educazione di Daniel in matematica, ma come i talenti di Daniel maturarono e ottennero il riconoscimento, l'orgoglio di Johann si trasformò in risentimento.

Nonostante queste sfide, Daniel perseguì un'ampia formazione, conseguendo dottorati sia in medicina che in matematica, ricoprendo posizioni accademiche in fisiologia e matematica e rimase intellettuale in tutti i campi, diversi come meccanica fluida, probabilità, elasticità ed economia, e alla fine si stabilì a Basilea, dove insegnò e pubblicò gran parte del suo lavoro influente.

elementi finiti e e equazioni di risposta dinamica per convalidare le previsioni teoriche e ottimizzare la pianificazione della manutenzione.

[33] Il problema del brachistochrone: dato due punti A e B, qual è la curva lungo la quale una particella scorrerà da A a B nel più breve tempo sotto la gravità da sola? La soluzione – un cicloide – è stata trovata da Newton, Jakob Bernoulli, Leibniz, L'Hôpital, e Johann Bernoulli stesso, segnando un momento fondamentale nello sviluppo del calcolo delle variazioni.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 6.3: Contributi chiave di Jakob e Johann Bernoulli come Rifiuto nel loro *Opera Omnia*

Autore	Contributo / Lavoro	Anno (pubblicato)	Campo di applicazione
Jakob Bernoulli	*Ars Conjectandi* – trattato di base nella teoria delle probabilità, introducendo la legge di grandi numeri	1713 (posth.)	Probabilità
	Studi preliminari sul problema isopeziometrico	1700s	Calcolo delle variazioni
	Sviluppo di espansioni esponenziali/logaritmiche	1680s–1690s	Analisi
	Corrispondenza con Leibniz sul calcolo differenziale	1690s	Calcolo / Fondazioni
Johann Bernoulli	*Meditazioni di Curva Isochrona Paracentrica* – risolve il problema del brachistochrone	1697	Calcolo delle variazioni
	Lavorare sulle dinamiche fluide e sulle equazioni differenziali (ad esempio, crescita esponenziale, spirali logaritmiche)	1690s–1710s	Meccanica / DE
	Sfide matematiche pubbliche e polemiche (ad esempio, vs Newton, Taylor)	1700s	Cultura matematica
	Corrispondenza con Newton, Leibniz, Euler, e i suoi figli	1690s–1740s	Matematica generale

La disposizione di Daniel era particolarmente modesta e collaborativa, e mantenne amicizia e scambi accademici con i principali scienziati del suo tempo, tra cui Euler, con cui condivideva una lunga e produttiva corrispondenza, il suo spirito collaborativo contrastava fortemente con la competitività del padre e contribuì a stabilire la cultura scientifica più aperta che caratterizzasse l'Illuminismo.

Riformazione Variazione del *e*lastico Problematiche Daniel Bernoulli, figlio di Johann e nipote di Jakob, ha esteso l'eredità della famiglia nella meccanica introducendo un approccio variazionale al *elastico* problema. Mentre Jakob Bernoulli aveva formulato e risolto il rettangolo *e*lastico caso nel 1690s utilizzando ragionamento geometrico e all'inizio differenziale!calcolo, Daniel propose una generalizzazione molto vasta.

Per i dettagli analitici, consultare Capitolo 9

In una lettera del 1742, Daniel suggerì a Leonhard Euler che la forma di un'asta elastica dovrebbe essere determinata minimizzando la sua energia potenziale elastica. Nello specifico, egli espresse l'energia totale come componente integrante della quadratura della

COPIA DI REVISIONE

curvatura lungo la lunghezza del fascio. *e*lastico come problema variativo, aprendo così la porta all'uso del calcolo delle variazioni di elasticità, che alla fine diventerà la base per i moderni metodi computazionali della meccanica strutturale, compresa l'analisi degli elementi finiti.

Euler, agito su questo suggerimento, ha risolto il generale *e*lastico Il suo trattamento diede alla luce quello che ora conosciamo come la teoria del fascio di Euler-Bernoulli e divenne fondamentale nello studio della stabilità elastica e della meccanica strutturale.

Il contributo di Daniel è quindi fondamentale: reinterpretando una sfida geometrica come principio di minimizzazione dell'energia, colpì la meccanica classica con moderni metodi analitici, unendo l'opera pionieristica di Jakob con l'emergente struttura variazionale che dominasse la meccanica settecentesca e ottocentesca.

Meccanica idrodinamica e fluida Oltre ai suoi contributi all'elasticità, Daniel Bernoulli è rinomato per il suo lavoro in meccanica fluida. *Idrodinamica, sive de Viribus et Motibus Fluidorum Commentarii*, (Bernoulli, Daniel, 1738) ha posto la base per lo studio del comportamento fluido e ha introdotto quello che è ora conosciuto come il principio di Bernoulli—l'idea che un aumento della velocità di un fluido si verifica simultaneamente con una diminuzione della pressione o di energia potenziale.

Questo principio, derivato dalla conservazione dell'energia, si applica ad una vasta gamma di sistemi meccanici, tra cui il flusso d'aria sulle ali, il flusso di tubi e la circolazione sanguigna. L'equazione di Bernoulli per il flusso inviscibile è ormai fondamentale nella meccanica dei fluidi e funge da relazione chiave sia nell'idrodinamica teorica che applicata.[34].

Oscillazioni meccaniche e stabilità Daniel Bernoulli ha anche contribuito alla teoria delle vibrazioni meccaniche, studiando oscillazioni trasversali di barre elastiche e la sovrapposizione di modalità armoniche, precursore dell'analisi di Fourier, la sua analisi dei sistemi vibranti è stata tra i primi a combinare ragionamenti meccanici con strumenti analitici, prevenendo sviluppi successivi nell'acustica, nelle dinamiche strutturali e nella teoria dell'onda.

Le sue indagini sulla stabilità delle strutture e l'interazione tra carico, deformazione e risposta dinamica hanno ulteriormente dimostrato la vastità della sua visione meccanica, che ha arricchito la comprensione di come i sistemi rispondono alle diverse forze –una preoccupazione fondamentale del termindexhmeccanica razionale. Il suo lavoro sui sistemi vibranti ha stabilito la base matematica per la comprensione della risonanza e dell'amplificazione dinamica, fenomeni cruciali per il design strutturale moderno[35].

[34]Ad esempio, l'equazione differenziale per il semplice movimento armonico, $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, governa diversi fenomeni fisici: l'oscillazione di una massa su una molla, il moto di un pendolo per piccoli angoli, la vibrazione di molecole in cristalli, il comportamento dei circuiti LC elettrici e la propagazione dell'onda acustica. Questa unità matematica permette di comprendere da un dominio (come le molle meccaniche) di illuminare fenomeni in campi completamente diversi (come l'ingegneria elettrica o la fisica molecolare), esemplificare come le relazioni matematiche fondamentali trascendano i confini tra i diversi rami.

[35]Esempi moderni includono il crollo del Ponte Tacoma Narrows del 1940, dove oscillazioni indotte

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

Legacy in Meccanica L'eredità di Daniel Bernoulli nella meccanica deriva dalla capacità di *riunire geometria, fisica e principi variazionali in un quadro coerente*. Collegò l'eredità di Jakob ai principi energetici della meccanica moderna, influenzò il lavoro fondamentale di Eulero e pose basi essenziali sia per l'analisi dei fluidi sia per quella strutturale. Il suo nome resta associato a modelli teorici fondamentali in molti ambiti della meccanica, dalle travi ai fluidi e alle vibrazioni, a conferma del suo ruolo centrale nell'evoluzione della disciplina. Soprattutto, il suo metodo mostrò come l'analisi matematica potesse unificare fenomeni fisici apparentemente diversi mediante principi comuni, una prospettiva destinata a diventare centrale nella fisica e nell'ingegneria dell'Ottocento[36].

6.6.10 Leonhard Euler (1707–1783)

Leonhard Euler nacque il 15 aprile 1707 a Basilea, poi un fiorente centro di apprendimento all'interno della Confederazione Svizzera. Il padre, Paul Euler, era un pastore protestante che aveva studiato matematica sotto Jakob Bernoulli, mentre sua madre, Marguerite Brucker, proveniva da una famiglia di studiosi. Sebbene inizialmente destinato a una carriera clericale, Euler mostrò un'eccezionale attitudine per la matematica fin dall'età precoce.

Da Basilea alle Corti d'Europa: primi anni e san. San Pietroburgo Leonhard Euler[37], probabilmente il più versatile, certamente il matematico più prolifico di tutti i tempi, figlio di un pastore, è nato vicino a Basilea. Nel 1720 entrò nell'Università di Basilea, che all'epoca era un centro significativo di ricerca matematica a causa delle influenti conferenze di Johann Bernoulli, che attrassero giovani matematici provenienti da tutta Europa. Il talento straordinario di Euler fu rapidamente riconosciuto, e Bernoulli, oltre alle sue lezioni formali, gli diede una formazione privata settimanale.[38].

Il *Academia Scientiarum Imperialis Petropolitana* (Accademia russa delle scienze) è stata fondata nel 1725 in San Pietroburgo per ordine di Pietro il Grande come parte della sua

dal vento alla frequenza naturale del ponte causarono un fallimento di risonanza catastrofica, e il design dei grattacieli contemporanei, dove gli ingegneri devono tenere conto delle vibrazioni indotte dal vento e impiegare manopole di massa sintonizzate (come lo smorzatore da 660 tonnellate a Taipei 101) per contrastare gli effetti di risonanza che potrebbero rendere gli edifici inabitabili o strutturalmente insicly.

[36] Molti fenomeni fisici seguono la forma matematica universale $\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla u) + s$, dove u è la variabile di stato, ρ rappresenta la capacità di accumulo, D una proprietà di trasporto e s un termine sorgente. L'equazione governa la trasmissione del calore, la diffusione di massa, l'elettrostatica, il moto delle acque sotterranee, la deformazione elastica, i campi elettromagnetici e la propagazione delle onde acustiche. Questa unità matematica consente di applicare gli stessi metodi numerici e le stesse tecniche risolutive a campi fisici diversi.

[37] All'inizio del 1783, 530 studi del suo stato pubblicato; nel 1826 il numero era aumentato a 771; nel 1844 un bisnonno scoprì ancora materiale nel manoscritto.

[38] Questo modello continua oggi, come esemplificato dai vincitori Nobel e Campi Medal che di solito diventano membri stranieri di più accademie nazionali (come la Royal Society, Accademia Nazionale delle Scienze, o *AcadéLe scienze*), e attraverso le moderne collaborazioni scientifiche internazionali, visitando le borse di studio e i programmi di reclutamento di talento globali che trascendeno i confini nazionali per riconoscere e nutrire l'eccellenza scientifica.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

più ampia campagna per occidentalizzare la Russia. I figli di Johann Bernoulli, Nicolaus e Daniel, erano tra i primi docenti reclutati[39], e dopo essersi trasferito in Russia, aiutarono Euler a garantire una posizione come membro associato. Nell'estate del 1727, Euler si trasferì a St. San Pietroburgo e, senza essere espulsi da compiti di insegnamento o di amministrazione[40]Nel 1730, quando Daniel Bernoulli tornò a Basilea nel 1733, dopo la morte del fratello nel 1726, Euler gli succedette come capo del dipartimento di matematica, e questa mobilità tra le accademie europee creò un mercato internazionale per il talento matematico che accelerava la diffusione di idee e metodi in tutto il continente.[41]

La traiettoria precoce di Euler esemplifica l'emergere della moderna accademia scientifica: un sistema che riconosceva il talento presto, lo coltivava attraverso i confini nazionali e creava spazi istituzionali per il lavoro intellettuale focalizzato.

Spostarsi a Berlino e la nascita del Calcolo Variante Durante il suo tempo all'Accademia Russa a St. Pietroburgo, Euler ha scritto il suo famoso libro sulla meccanica *Mechanica, sive motus scientia analitice exposita* (Meccanica, o Scienza del Movimento Analiticamente Demonstrata, 1736). In questo lavoro, piuttosto che affidarsi ai metodi geometrici utilizzati da Newton, introdusse metodi analitici, segnando un punto di svolta nella formalizzazione della meccanica.

Nel 1740 Federico II—più tardi noto come Federico il Grande—-ascenso al trono di Prussia. Un patrono della scienza e della filosofia, cercò di portare eminenti studiosi all'Accademia prussiana. Da allora, Euler fu riconosciuto come uno dei più importanti matematici in Europa, e Federico estese un invito per lui a unirsi all'Accademia di Berlino. *Commentariincia a scuola Petropolitanae* Questa mobilità mostra come gli studiosi del XVIII secolo operavano in uno spazio intellettuale europeo, muovendosi tra corti e accademie come opportunità.

A Berlino, Euler continuò la sua prolifica ricerca, pubblicando regolarmente i volumi annuali delle accademie prussiane e russe. *Metodo inveniendi lineas curves massimizzare minimizzare proprietario gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu Accepti* (Un metodo per trovare le linee curve che godano le proprietà di Maxima o Minima, o la soluzione del problema isoperimetrico nel più ampio)(Euler, 1744b). Questo è stato il primo libro sul calcolo delle variazioni e incluso, come appendice, il primo trattamento sistematico delle curve elastiche. La sezione di apertura del libro legge:

> Tutti i più grandi geometri hanno da tempo riconosciuto che il metodo presentato in questo libro non è solo del più grande uso nell'analisi stessa, ma anche che aiuta molto nella soluzione dei problemi

[39] Proprio come la facoltà di oggi sono reclutati da tutto il mondo da "università prestigiosa".
[40] Molto simile agli studiosi dell'Istituto per lo studio avanzato di Princeton.
[41] Questo modello storico di mobilità intellettuale in tutta Europa parallela al moderno programma Erasmus per gli studenti, che dal 1987 ha facilitato lo scambio accademico tra le istituzioni europee, creando reti che trascendeno i confini nazionali e accelerano la cross-pollination di idee, metodi e approcci di ricerca in tutto il continente.

COPIA DI REVISIONE

fisici. Poiché il tessuto dell'universo è più perfetto e il lavoro di un Creatore più saggio, nulla avviene affatto nell'universo in cui qualche regola del massimo o minimo non appare. o valore minimo, una materia che sembra appartenere piuttosto alla scienza naturale (filosofia) Da allora ci sono due modi di imparare gli effetti della natura, quello attraverso le cause efficaci, di solito chiamato il metodo diretto, l'altro attraverso le cause finali, il matematico si usa ciascuno con uguale successo.

Se le cause effettive sono troppo nascoste, mentre le cause finali ci sfuggono meno facilmente, la domanda è comunemente risolta dal metodo indiretto; al contrario, il metodo diretto viene portato a sopportare ogni volta che l'effetto può essere determinato dalle cause effettive. Quindi non solo l'uno rafforza notevolmente l'altro, ma anche noi ci compiacciamo più del loro accordo. Così la curvatura della corda o catena sospesa è stata scoperta da due a priori dal carico a causa della gravità, l'altro dal metodo di maxima e minima, dal momento che è stato riconosciuto che la corda deve assumere una tale curvatura per rendere il suo centro di gravità il più basso possibile. Analogamente, la curvatura dei raggi attraverso un mezzo trasparente è stata determinata sia a priori che dal principio che essi devono raggiungere un dato punto nel più breve tempo. Molti altri esempi sono stati portati avanti dalle molto famose Bernoullis e da altri...

Tuttavia... il massimo o il minimo è spesso difficile da riconoscere, anche se la soluzione ha [già] trovato *a priori*. Così, anche se la forma curva assunta da una fascia elastica è stata a lungo conosciuta, tuttavia l'indagine di quella curva con il metodo di maxima e minima, cioè per le cause finali, è già stata raggiunta da nessuno. Pertanto, dal più famoso e in questo tipo più alto di scienza naturale più perspicace Daniel Bernoulli mi ha fatto notare che l'intera forza immagazzinata nella curva elastico può essere espresso da una certa formula, che chiama la forza potenziale, e che questa espressione deve essere un minimo nella curva elastica ... , non posso lasciare passare questa opportunità più desiderata di illustrare l'utilità del mio metodo, mentre anche la pubblicazione di questa notevole proprietà della curva elastica scoperta dai Bernoulli molto famosi. Per questa proprietà coinvolge i derivati seconda, in modo che i metodi trattati sopra per risolvere problemi isoperimetrici[a] non basta per svilupparlo.

Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes

[a] I problemi isoperimetrici nel Calcolo della Variazione possono essere facilmente tradotti in ottimizzazione di una funzionalità sotto il vincolo di un integrale.

Questo passaggio incapsula l'approccio filosofico di Euler alla meccanica: i fenomeni naturali possono essere compresi sia attraverso l'analisi causale che i principi di ottimizzazione, e la matematica fornisce l'accesso a entrambi.

Più tardi Berlino Anni e Ritorno in Russia Mentre a Berlino, Euler scrisse diverse opere importanti, tra cui *Introductio in analisin infinitorum* (1748) È ampiamente considerato come un testo di base dell'analisi matematica moderna. In essa, Euler ha definito le funzioni, introdotto la notazione moderna per funzioni esponenziali e trigonometriche, e trattato serie infinita come oggetti analitici centrali. La sua influenza si è estesa nel XIX secolo, plasmando l'analisi, le funzioni complesse, e anche la teoria di Fourier, e ha fornito fondazioni teoriche per la matematica ingegneristica.

Dal 1759, Euler era diventato il *de facto* Nel 1760, Berlino fu occupata dall'invasione dell'esercito russo, e la casa di Euler fu saccheggiata. Il comandante russo si scusava e ordinava la compensazione; l'imperatrice Elizabeth inviò un dono supplementare che

COPIA DI REVISIONE

più che copriva le perdite di Euler. Questo episodio illustrava il conflitto scientifico internazionale che Euler trascese e ordinò.

Caterina II divenne imperatrice della Russia nel 1762. Una forte sostenitrice della scienza e dell'illuminazione, cercò di rivitalizzare l'Accademia Russa delle Scienze. Pietroburgo. Caterina fece un'offerta più attraente di Federico II, e nel 1766—dopo venticinque anni di produzione a Berlino—Euler tornò in Russia. Ricevette un caloroso benvenuto a corte, e Caterina lo presentò con una casa[42]. Finanziariamente sicuro, Euler di nuovo si dedicò pienamente alla ricerca.

Eulero si avvicinava a sessanta, e la sua vista si deteriorava gravemente, aveva perso la visione in un occhio nel 1735, e una cataratta formata nell'altro, portando alla cecità quasi totale. Tuttavia, la sua produzione aumentava.[43]. Ha lavorato con assistenti a cui ha dettato spiegazioni complete di problemi e metodi di soluzione[44]Tra il 1766 e il 1783, Euler produsse più di 400 documenti, oltre quarant'anni dopo la sua morte, l'Accademia Russa delle Scienze stava ancora pubblicando il suo lavoro nelle sue memorie annuali, dimostrando così le competenze mentali di Euler e l'efficacia del lavoro scientifico collaborativo.

Legacy e *Opera Omnia* Inconsapevolmente, il lavoro di Euler rimase più conosciuto e apprezzato in URSS che in gran parte dell'Europa occidentale ben nel XX secolo. Nel 1907, fu lanciato un grande progetto editoriale attraverso la collaborazione tra il Comitato svizzero dell'Eulero, l'Accademia delle Scienze dell'Unione Sovietica, e l'Accademia delle Scienze della Repubblica Democratica Tedesca (che si considerava il successore legale dell'Accademia prussiana).

Lo sforzo ha portato alla pubblicazione della *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, l'edizione definitiva erudita di opere complete di Euler, organizzata in tre serie:

1. Matematica (29 volumi);
2. Meccanica e astronomia (31 volumi);
3. Fisica e Varie (12 volumi).

Nonostante le interruzioni dovute a due guerre mondiali e a vincoli economici successivi, l'edizione stampata (72 volumi) è quasi completa. (Kleinert, 2015).

Euler è universalmente considerato uno dei più grandi e prolifici matematici della storia.[45] Con oltre 866 opere e scoperte pubblicate che spaziano dalla matematica, dalla fisica,

[42]Quello che potremmo fare oggi come un pacchetto "startup."

[43]Proprio come Beethoven compose la sua Nona Sinfonia mentre era sordo, Euler non era detestato dalla cecità o dall'età.

[44]Molto simile a Stephen Hawking, che si affidava agli assistenti per eseguire compiti complessi mantenendo il controllo creativo.

[45]Altri matematici spesso menzionati nelle discussioni del "greatest" includono Carl Friedrich Gauss, Archimedes, Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz, David Hilbert, Henri Poincaré, e Bernhard Riemann. La distinzione di Euler sta in parte nella sua produttività: le sue opere raccolte, le *Opera Omnia*, comprendono oltre 70 volumi.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dall'astronomia e dall'ingegneria, l'influenza di Euler è senza pari. Come ha dichiarato Pierre-Simon Laplace: "Read Euler, read Euler, è il maestro di tutti noi'.

Forse, più notevole, Euler è anche associato a una delle equazioni più famose in matematica, l'identità di Euler:

$$e^{i\pi} + 1 = 0. \tag{6.1}$$

Questa identità unisce cinque costanti: e, i, π, 1e 0, e combina l'aggiunta, la moltiplicazione e l'esponibilità in un'unica dichiarazione, che segue dalla formula di Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, che collega funzioni esponenziali, trigonometria e analisi complesse.

Un breve catalogo dei principali contributi matematici I suoi contributi fondamentali includono:

Teoria di Topologia e Grafi (1736) Nel 1735 Euler risolse il Sette ponti di Königsberg problema, introducendo *Situazione* (geometria della posizione) e ponendo le basi della teoria dei grafi e della topologia (Euler, 1741).

Notazione matematica e simbolismo (1748) Euler ha introdotto o standardizzato simboli come e, i, π, $f(x)$, Σ, e notazione trigonometrica moderna (sin, cos, tan) Il loro uso sistematico nel *Introductio in analisin infinitorum* contribuì in modo decisivo all'internazionalizzazione della matematica (Euler, 1748).

Fondamenti di Analisi Moderna (1748) Nel *Introductio in analisin infinitorum*, Euler ha posto la nozione di funzione al centro di analisi e serie infinita trattata, funzioni esponenziali e logaritmiche, e la trigonometria in modo unificato (Euler, 1748).

Calcolo delle variazioni (1744) Euler ha stabilito il calcolo delle variazioni in *Metodo inveniendi lineas curves*, trasformando i problemi di ottimizzazione isolati in una teoria analitica sistematica (Euler, 1744b). Questo sarà esaminato ulteriormente §9.3.2.2.

Teoria numerica analitica (1730–1750s) Euler ha applicato metodi analitici allo studio dei numeri primi, ha dimostrato la loro infinito utilizzando argomenti divergenti, e ha introdotto la formula del prodotto Euler (Euler, 1748).

Tabella 6.4 riassume le opere principali.

Euler e le Fondazioni Matematiche della Meccanica Strutturale Leonhard Euler (Euler, 1744b) Il più prolifico matematico della storia e la figura che, più di ogni altra, stabilirono le basi matematiche della meccanica strutturale, i cui contributi abbracciavano praticamente ogni settore della meccanica e della matematica applicata, e molti dei suoi risultati rimangono in uso da parte di ingegneri strutturali.

Euler's *Mechanica* (1736) è stato il primo trattato completo per applicare il calcolo In caso di presentazione di dinamiche attraverso costruzioni geometriche, Euler ha espresso principi come equazioni differenziali a misura di trattamento sistematico. Questa riformaulazione—meccanica come soluzione di analisi—attivata di problemi oltre la portata dei metodi geometrici e ha stabilito un quadro per analizzare il movimento, forza, e l'equilibrio.

La derivazione di Euler del carico di buckling critico per colonne (1744) rimane uno dei

COPIA DI REVISIONE

Tabella 6.4: Opere principali di Leonhard Euler

Titolo (Latin)	Anno	Luogo di composizione	Contenuto / Significato
Mechanica sive motus scientia analitice exposita	1736	St. San Pietroburgo	Riformato meccanica newtoniana utilizzando equazioni differenziali; lavoro di base nella meccanica analitica.
Metodo inveniendi lineas curves...	1744	St. San Pietroburgo	Il trattato di fondazione sul calcolo delle variazioni; introdusse quello che sarebbe diventato l'equazione Euler-Lagrange.
Introductio in analisin infinitorum	1748	St. San Pietroburgo	Funzioni definite analiticamente; serie infinita trattata rigorosamente; ha posto le basi per l'analisi moderna.
Istituzioni e organi	1755	Berlino	Esposizione sistemica del calcolo differenziale, compresi i derivati parziali e le equazioni differenziali.
Istituzioni e organi (3 vol)	1768–1770	Berlino	Il lavoro completo sul calcolo integrale comprende metodi di integrazione e soluzioni alle equazioni differenziali.
Lettres ùn'unica principessa d'Allemagne	1768–1772	Berlino	Lettere di scienze popolari che coprono la fisica, l'astronomia e la filosofia, scritte per la principessa Friederike Charlotte di Prussia.

risultati più importanti nella teoria della stabilità strutturale. Il concetto della forma della modalità di buckling ha origine anche nell'analisi di Euler.

Il lavoro di Euler sulla curva elastica stabilito l'equazione differenziale che regola la deflezione del fascio, collegamento carichi applicati alla deformazione:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = q(x)$$

Con le opportune condizioni di confine, questa formulazione produce deflettori, rotazioni e forze interne per travi in carico arbitrario.

Euler ha anche sviluppato il calcolo delle variazioni, consentendo metodi energetici nell'analisi strutturale–Castigliano, energia minima potenziale, Rayleigh–Ritz—e metodi che supportano l'ottimizzazione strutturale moderna. Il suo lavoro sulla dinamica corporea rigida, meccanica fluida e elasticità ha esteso gli strumenti matematici disponibili agli ingegneri.

Il volume di emissione di Euler è in netto contrasto: i suoi lavori raccolti si riempiono

COPIA DI REVISIONE

di oltre 70 volumi, continuando a produrre matematica anche dopo aver perso di vista, dettando documenti sulla meccanica, l'analisi e la teoria dei numeri fino alla sua morte.

6.7 Dalla meccanica analitica alla teoria strutturale e del continuo

Questa sezione unisce i contributori che si estendono *meccanica analitica* oltre le particelle e i corpi rigidi a *continua*, *elasticità*, e risposta strutturale. I principi astratti sono stati adattati per descrivere deformazione e comportamento materiale in corpi reali. Il tema unificante è l'integrazione del formalismo matematico con la struttura fisica.

6.7.1 Charles-Augustin de Coulomb (1736–1806)

Adattato da (Timoshenko, 1953) Charles-Augustin de Coulomb nacque nel 1736 ad Angoulême, in Francia, in una famiglia collegata al servizio amministrativo e tecnico dello stato. Ricevette una solida educazione matematica a Parigi prima di entrare nel corpo di ingegneria militare, dove formazione avanzata in geometria, meccanica e costruzione lo preparava per un servizio pratico.

Ingegnere nel campo: Martinica e le origini di un Memoir Charles-Augustin de Coulomb è stato un personaggio affascinante la cui carriera illustra il crescente legame tra ingegneria pratica e meccanica teorica nel XVIII secolo. Dopo aver ricevuto la sua formazione preliminare a Parigi, è entrato nel corpo militare di ingegneri e è stato collocato sull'isola di Martinica. Per nove anni, ha superato i lavori di costruzione che lo hanno confrontato con il comportamento meccanico dei materiali e le realtà delle prestazioni strutturali. *Domanda di adesioneègles de massimizza e minimis à che non si puòèmes de statique relatifs à l'architettura*, che egli sottomise all'Accademia francese delle scienze nel 1773, che esemplifica come la pratica dell'ingegneria coloniale potesse guidare l'innovazione teorica e la meccanica avanzata.

> Questo memoir, scritto qualche anno fa, era inizialmente destinato al mio uso individuale nel lavoro su cui ero impegnato nella mia professione. Se oso presentarlo a questa Accademia, è solo perché i più graziosi sforzi sono gentilmente accolti da esso quando hanno un obiettivo utile. Inoltre, le Scienze sono monumenti consacrati al bene pubblico. Ogni cittadino deve contribuire a loro secondo i suoi talenti punti vendita più bassi saranno portati a capo dell'edificio più alto nascosto.
>
> Coulomb, 1773a «*Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture*»

Ritorno in Francia: Frizione, Macchine e Metodo sperimentale Tornato in Francia, Coulomb riprese il suo lavoro di ingegnere e entrò più direttamente nella vita scientifica dell'Accademia, condividendo un premio assegnato per un giornale sul design ottimale

COPIA DI REVISIONE

delle bussole. *ThéOrie des macchine simples*, in cui ha presentato risultati di esperimenti approfonditi sull'attrito dei materiali – sia essiccato che lubrificante, tali misurazioni hanno fornito dati cruciali per la progettazione meccanica e hanno contribuito a costituire una base empirica per tribologia[46].

Dopo il 1781, Coulomb fu definitivamente dislocato a Parigi, dove fu eletto all'Accademia e ottenne l'accesso a migliori strutture di ricerca, diventando sempre più un'elettricità e un magnetismo,[47] sviluppo di un equilibrio di torsione altamente sensibile per la misurazione di forze elettriche e magnetiche minuti. Nel processo, ha indagato la resistenza dei fili alla torsione—un'area ulteriormente esplorata in §10.3.2.1.

Lavorare sulla Torsione e sull' Elasticità Gli esperimenti di Coulomb su Torsione Non solo ha approfondito la comprensione del magnetismo ma ha anche messo a punto delle basi per la meccanica torsionale, ha derivato i rapporti tra la coppia e la deformazione angolare, e le sue misure di resistenza alle cesoie nei fili hanno posto la fase per gli sviluppi successivi dell'elasticità.

Nessun altro scienziato del Settecento contribuì tanto quanto Coulomb alla meccanica dei corpi elastici, che si trova principalmente nella sua memoria del 1773, che contribuì a colmare la pratica costruttiva empirica con la meccanica teorica emergente.

Influenza e Legacy in Meccanica Anche se Coulomb non può essere alto come Newton, Euler, o Bernoullis in termini di spazi teorici di spazzamento, il suo meticoloso lavoro sperimentale ha posto basi cruciali per la meccanica applicata. I suoi studi in attrito, torsione ed elasticità hanno influenzato il lavoro ottocentesco di Navier, Cauchy, e Saint-Venant, che ha esteso e formalizzato la teoria delle misurazioni e delle tensioni.

Tratti personali e sfide storiche Nonostante il lavoro di anni in isolamento coloniale, lontano dai centri europei di apprendimento, non ha mai cessato le sue indagini scientifiche, ma si è spesso descritto come un "costruttore alla fondazione" della scienza, deferendo credito pubblico agli altri.

Sebbene sia spesso ricordato oggi per la sua legge di elettrostatica, all'interno dei contributi della meccanica Coulomb sono indispensabili: ha fornito rigorosi dati sperimentali e modelli fisici che hanno guidato la maturazione della scienza strutturale nei secoli a venire. La sua carriera esemplifica l'ingegnere-scienziato che ha combinato esperienza pratica con

[46] La tribologia è la scienza interdisciplinare che studia attrito, usura e lubrificazione delle superfici interagenti in movimento relativo, che comprende la progettazione di cuscinetti, ingranaggi e superfici scorrevoli, lo sviluppo di lubrificanti e trattamenti superficiali per ridurre al minimo le perdite di energia e il degrado dei materiali nei sistemi meccanici, nonché l'attrito della struttura del suolo in ingegneria geotecnica e l'attrito concreto nelle applicazioni di costruzione e infrastruttura.

[47] Interessante, come vedremo più tardi, la sua ricerca sulla torsione è stata abilitata da un dispositivo originariamente concepito per studi magnetici.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

la comprensione teorica per avanzare sia la pratica ingegneristica che la comprensione scientifica[48].

6.7.2 Simmon Simsésu Denis Poisson (1781–1840)

Simmon SimséDenis Poisson nacque nel 1781 a Pithiviers, in Francia, in una famiglia di modesti mezzi, e il suo eccezionale talento matematico fu riconosciuto presto, e fu ammesso al *Ṕolitecnica Ecole* Poco dopo la sua fondazione, durante la riorganizzazione post-rivoluzionaria dell'educazione scientifica francese, si è trovato sotto l'influenza di Laplace e Lagrange, il cui approccio analitico alla meccanica ha profondamente plasmato il suo sviluppo intellettuale.

Analista della Generazione Post-Rivoluzionario Simmon SimséDenis Poisson era un matematico e fisico francese il cui nome rimane incorporato in più rami della scienza, dalla probabilità all'elasticità. Uno studente di Laplace e un contemporaneo di Fourier, Poisson emerse come una figura centrale nel periodo transitorio tra il XVIII e il XIX secolo, portando avanti la tradizione meccanica analitica di Lagrange e Laplace, adattandola alle esigenze emergenti della fisica e dell'ingegneria continuum.

La sua carriera coincide con il consolidamento istituzionale dell'istruzione scientifica e tecnica in Francia, in particolare attraverso il *ÉCola Polytechnique*, dove il rigore matematico è stato sistematicamente applicato a problemi di meccanica, materiali e scienza fisica. Poisson apparteneva alla prima generazione per cui l'analisi avanzata non era solo uno strumento di meccanica celeste, ma un linguaggio per descrivere il comportamento interno della materia.

Elasticità e Seconda Elasticità In meccanica, Poisson è meglio conosciuto per l'introduzione della seconda costante elastica, ora chiamata *Rapporto di Poisson*—che quantifica la contrazione laterale di un materiale sottoposto ad estensione assiale; questo concetto ha segnato un passo decisivo oltre la proporzionalità Hookean riconoscendo che la deformazione è intrinsecamente tridimensionale: allungarsi in una direzione necessariamente induce contrazione nelle direzioni trasversali.

La formulazione di Poisson ha affinato la teoria dell'elasticità lineare avviata da Navier e ha fornito un modo sistematico di relazionare ceppi longitudinali e trasversali all'interno di un solido isotropico. L'identificazione del rapporto di Poisson come proprietà materiale intrinseca, Poisson ha contribuito a trasformare l'elasticità da una raccolta di leggi unidimensionali in una vera teoria continuum.é equazioni.

[48]Tra gli esempi di ingegneria strutturale e meccanica spiccano Gustave Eiffel, che ha combinato analisi teoriche avanzate di carichi eolici e di stress materiali con tecniche costruttive innovative per ponti e torri; John Augustus Roebling, che ha sviluppato sia la teoria matematica del design dei ponti sospensioni che i metodi pratici di ingegneria che hanno permesso al ponte di Brooklyn; e Stephen Timoshenko, che ha creato teorie fondamentali del fascio e della piastra, risolvendo problemi reali nelle vibrazioni strutturali e nella stabilità.

COPIA DI REVISIONE

Matematicaizzazione del comportamento del continuum Il lavoro di Poisson rappresenta una tappa cruciale nel *matematizzazione* Piuttosto che affidarsi a intuizioni geometriche o analogia sperimentale da solo, ha cercato di descrivere la risposta elastica attraverso equazioni differenziali parziali che governano lo stress, lo sforzo e lo spostamento dei campi in tutto un corpo.

Questo punto di vista analitico ha portato anche Poisson a risultati importanti oltre l'elasticità. *L'equazione di Poisson*—è nata nello studio dei potenziali gravitazionali ed elettrostatici, ma la sua struttura matematica riappare nell'elasticità, nella meccanica dei fluidi e nella conduzione del calore. L'equazione esemplifica come le fonti locali (forza, cariche, densità di massa) determinano il comportamento del campo globale, un concetto centrale all'analisi strutturale e fisica.

Relazioni con Navier e la questione dell'ingegneria La carriera di Poisson è stata caratterizzata da una tensione intellettuale con Claude-Louis Navier, in particolare sul ruolo della matematica astratta nell'ingegneria. Poisson ha favorito la completezza matematica e l'eleganza analitica, mentre Navier ha sottolineato la modellazione fisica e l'applicabilità pratica.

In retrospettiva, la rivalità si è dimostrata produttiva: l'insistenza di Poisson sulla consistenza analitica ha rafforzato le basi teoriche dell'elasticità, mentre la prospettiva ingegneristica di Navier ha garantito la rilevanza alle strutture reali.é e Saint-Venant.

Pane di influenza e eredità Oltre alla meccanica, Poisson ha contribuito duraturo alla teoria della probabilità (la distribuzione Poisson), alla dinamica analitica (ragazzi di Poisson), alla fisica matematica. Il suo lavoro sulla propagazione dell'onda, sulla pressione dei fluidi e sugli elettrostatici ha influenzato la fisica ottocentesca come le sue teorie elastiche hanno influenzato l'ingegneria.

All'interno della meccanica strutturale, l'eredità di Poisson non si trova in formule isolate ma nel suo ruolo di figura di ponte: ha contribuito a portare elasticità dall'intuizione meccanica precoce in una teoria continuum matematicamente coerente. I parametri che portano il suo nome rimangono indispensabili nei modelli costitutivi moderni, nelle formulazioni degli elementi finiti e nella caratterizzazione materiale.

Per i dettagli analitici, consultare §10.3.2.5

6.7.3 Claude Louis Marie Henri Navier (1785–1836)

Claude Louis Marie Henri Navier nacque a Digione nel 1785. All'età di quattordici anni, suo padre morì, e il giovane ragazzo fu allevato dallo zio materno. *E. Gauthey*, un rinomato ingegnere del ponte e un membro del *Corpo dei Ponts et ChaussÉ* Questa connessione familiare ha spinto Navier nel mondo dell'ingegneria in tenera età. L'educazione di Navier all'interno dello stabilimento di ingegneria francese ha plasmato la sua convinzione

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

che la teoria matematica dovrebbe informare la costruzione pratica, una prospettiva che definirebbe la sua intera carriera.

A diciassette anni, Navier entrò nel prestigioso *Politecnica Ecole*, entrando con una modesta classifica tra la classe in arrivo di 117 studenti, nonostante questo umile inizio, si distinse rapidamente, salendo fino alla top ten entro la fine del suo primo anno. *Corpo dei Ponts et ChaussÉ* , dove trascorrerebbe il resto della sua carriera equilibrando le responsabilità amministrative, accademiche e scientifiche. *École Polytechnique* al Corpo dei Ponts – rappresentava il nuovo modello di educazione scientifica dell'ingegneria che la Francia aveva pionierizzato e che avrebbe poi diffuso in tutta Europa.

Mentre si *École Polytechnique*, Navier è venuto sotto l'influenza di Joseph Fourier, il cui approccio analitico al calore e alle onde ha profondamente influenzato il pensiero di Navier (Cannone e Friedlander, 2003)A differenza di molti ingegneri del suo tempo, che si affidavano a regole empiriche, Navier sostenne una metodologia matematicamente rigorosa, e pubblicò e pubblicò il trattato di suo zio. *Trattaé des ponts* (Gauthey, 1813), combinando intuizioni storiche con rigore teorico.

L'influenza di Navier si estendeva oltre la ricerca. analitico! meccanica In materia di istruzione ingegneristica, che segna un punto di svolta nella transizione della disciplina dall'artigianato empirico al rigore scientifico, questi testi hanno fornito la base per l'applicazione di metodi matematici ai problemi di ingegneria, in particolare nell'elasticità e nella meccanica dei fluidi.

La ricerca teorica di Navier, in particolare la sua derivazione delle equazioni per il moto fluido viscoso nei primi anni 1820, si è fatta discretamente, come i suoi superiori hanno privilegiato il design pratico del ponte, che riflette un più ampio divario istituzionale tra ingegneria teorica e pratica, una dicotomia che Navier ha superato, e la sua capacità di sintetizzare la pratica con la teoria lo ha conquistato. *AcadéLe scienze* e tecnici di pratica (Cannone e Friedlander, 2003).

Aveva anche rivalità professionali, in particolare con Siméon Denis Poisson, che ha introdotto la seconda costante elastica (il rapporto di Poisson) e ha offerto opinioni concorrenti sulla teoria dell'elasticità. Anche se a volte confusa, i loro dibattiti hanno stimolato la raffinatezza dei modelli elastici e ha messo la fase per gli sviluppi successivi di Saint-Venant.

Flessibili Nel suo 1826 *Leçons données à l'École royale des ponts et chaussées sur l'applicazione de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines* (Lezioni date alla Royal School of Bridges and Roads sull'applicazione della meccanica alla costruzione di strutture e macchine), (Navier, 1826) Navier ha determinato con precisione la posizione della asse neutro Applicando le condizioni di equilibrio orizzontale, verticale e di momento, ha dimostrato che l'asse neutro passa attraverso il centroide della sezione trasversale. Il suo lavoro ha stabilito diversi principi fondamentali: che le sezioni piane rimangono piane durante la flessione; che, per sezioni rettangolari, l'asse neutro si trova a metà profondità; e che tali risultati tengono solo all'interno del limite elastico; questi principi sono diventati

COPIA DI REVISIONE

la pietra angolare della moderna teoria del fascio e rimangono fondamentali per l'analisi strutturale di oggi (§7.3).

Navier ha introdotto il rapporto di flessione lineare $M = fS$A differenza dei suoi predecessori, come il Parent e il Coulomb, i cui contributi sono rimasti in gran parte accademici, le formulazioni di Navier hanno ottenuto un'adozione diffusa nel design dell'ingegneria grazie alla loro chiarezza, rigore e applicabilità.

Elasticità Navier è spesso accreditato come il fondatore del moderno elasticità Nel 1821, presentò una memoria seminale alla *Institut*, *Mémoire sur les lois du mouvement des corps solids*, (Navier, 1827b), articolando le equazioni generali di equilibrio e di movimento per un corpo elastico continuo, queste equazioni si applicavano non solo ai punti interni, ma anche alle condizioni prescritte ai confini.[49] Questa formulazione rappresentava la prima descrizione matematica completa del comportamento elastico nei media continui, fornendo la base teorica per tutti gli sviluppi successivi nella meccanica solida.

Navier inizialmente impiegava una costante elastica, che riveduva nel 1822 per includere due parametri materiali indipendenti, valorizzando la generalità del modello, che poi vennero perfezionati dal suo studente Saint-Venant, ma Navier pose la struttura fondante della teoria.

La sua pubblicazione del 1826 *LeçSuccede*, (Navier, 1826)La prima teoria generale dei solidi elastici, che offriva il primo trattamento sistematico della meccanica strutturale, non esisteva un limite tagliente tra teoria dell'elasticità e ingegneria strutturale, e figure come Navier erano impegnate profondamente in entrambi.

Fluidi di viscoso Il lavoro di Navier sulla meccanica dei fluidi culmina nella formulazione delle equazioni ora note come le equazioni Navier-Stokes. Il suo documento del 1822 introduce il concetto di attrito interno (viscosità) e propone che la resistenza in un fluido sia proporzionale al tasso di tensione, un'ipotesi in anticipo del suo tempo. Anche se il suo lavoro fu inizialmente trascurato, formò la spina dorsale concettuale per gli sviluppi successivi nella meccanica continuum e rimane centrale alle dinamiche fluide oggi. Queste equazioni hanno applicazioni pratiche estese, tra cui aerei e design automobilistico (aerodinamica e riduzione del trascinamento), predizione meteo e modellazione del clima, simulazione della corrente oceanica, analisi del flusso sanguigno in medicina cardiovascolare, calcoli del carico eolico per edifici e ponti, progettazione di pompe, turbine e e eliche, gasdotti e petrolio modellazione di flusso, dispersione di inquinamento, progettazione di scafo nave e ottimizzazione del sistema HVAC. Queste equazioni sono fondamentali per il software di dinamica dei fluidi computazionali (CFD) utilizzato in discipline ingegneristiche.

[49] Questo sistema completo comprende 15 equazioni di campo accoppiate: 3 equazioni di equilibrio, 6 lo stress costitutivo di Hookean-ean- relazioni distensive e 6 equazioni di spostamento geometrico-per 15 sconosciuti (6 stress, 6 ceppi e 3 spostamenti).

COPIA DI REVISIONE

La storia L'eredità duratura di Navier risiede nella sua capacità di sintetizzare l'osservazione empirica con la formulazione analitica, trasformando la meccanica strutturale e fluida in discipline disciplinate da equazioni differenziali piuttosto che da grafici empirici.

Mentre non è noto come Newton o Euler nel più ampio canone scientifico, all'interno di ingegneria e meccanica applicata Navier si trova tra i giganti per il suo ruolo nel trasformare l'ingegneria in una scienza esatta. Il suo approccio ha stabilito il paradigma della scienza ingegneristica che continua a guidare il campo oggi: l'applicazione sistematica di analisi matematica a problemi pratici.

Il ponte *Fiasco* Fino alla fine del Settecento e all'inizio del diciannovesimo secolo, la maggior parte delle strutture venne costruita con pietra. Tuttavia, innescata dalla Rivoluzione Industriale (1760–1840) e la produzione di ferro in particolare, nuovi ponti metallici furono costruiti in Inghilterra (e negli Stati Uniti). John Smeaton (1721–1792) fu il primo ingegnere ad utilizzare ghisa in gran parte.[50]. Gli ingegneri hanno concluso che i ponti in ghisa potrebbero non essere sicuri per grandi campate e hanno cominciato a costruire ponti sospensioni (Timoshenko, 1953)Questa transizione illustra come i guasti strutturali spesso spingono l'innovazione sia nei materiali che nelle forme strutturali.

Il primo ponte fu costruito in Pennsylvania nel 1796 da James Finley, un ingegnere esperto che lavorava in un ambiente molto diverso da quello di Navier in un ambiente molto diverso da quello di un *Grande École*Finley era pratico ed empirico, cercando con successo di produrre progetti semplici e generici che potessero essere costruiti dai fabbri rurali. Un'indicazione del suo successo è che nel 1820 aveva un certo numero di brevetti, e oltre quaranta ponti sospensioni a catena erano stati costruiti nelle innovazioni di Finley furono portati e ampliati in Gran Bretagna da Samuel Brown, un capitano navale in pensione, che decise di realizzare i principali esperimenti di bridge di ferro attraverso il ponte di Bridge. Il ponte dell'Unione fu il doppio della più lunga durata di qualsiasi ponte costruito negli Stati Uniti. Il ponte dell'Unione fu seguito da altre imprese di ingegneria in Gran Bretagna, tra cui ponti costruiti dai pionieri della rivoluzione industriale come Brunel, Stevenson e Telford (Cannone e Friedlander, 2003)Questo scambio transatlantico di idee dimostra come l'innovazione ingegneristica trascenda i confini nazionali, anche in un'epoca di comunicazione limitata.

Gli ingegneri britannici seguirono gli americani, e nel primo trimestre del XIX secolo vennero costruiti numerosi ponti in Inghilterra, il più importante di loro, il Ponte Menai con una campata di 550 ft, è stato progettato da Telford (1757–1834). Pope, 1811 era già stato pubblicato. Il governo francese, ritenendo che fossero lasciati alle spalle, ha chiamato il *École des Ponts et Chaussées* Per assistere allo sviluppo della tecnologia dei ponti sospensioni, era naturale che essi guardassero in Gran Bretagna. Su richiesta dei suoi superiori, Navier (che aveva già pubblicato il lavoro di suo zio sui ponti) andò due volte in Gran Bretagna nel 1821 e nel 1823 per studiare i ponti sospensioni. *Rapporti et Mémoire sur les Ponts Suspendus*

[50]Possibili fallimenti fragili.

COPIA DI REVISIONE

(Navier, 1830), che contiene non solo una revisione storica del campo e descrizioni dei ponti esistenti più importanti, ma anche i metodi teorici di analizzare tali strutture.

In questo libro Navier ha portato al tema per la prima volta l'approccio analitico e astratto del matematico, cercando di illustrare il potere e la sfida dell'astrazione contro un'empiricale *ad hoc* Ha fatto quello che i matematici hanno fatto per costruire un modello matematico.

> [La modellazione richiede] una particolare arte che consiste nella sostituzione delle stesse domande da risolvere da altre questioni che differiscono il meno possibile e a cui la matematica può applicare.
>
> Navier, 1830 Rapport à Monsieur Becquey, Conseiller d'état, directeur général des ponts et chaussées et des mines; et Mémoire sur les ponts suspendus

Navier ha suggerito che i risultati siano riformulati in modo da specificare i limiti teorici entro i quali dovrebbero essere rilevanti e che l'analisi matematica sia usata per determinare i rapporti tra parametri importanti. (Picon, 1988):

> È probabile che l'uso di ponti sospensioni diventerà presto diffuso; in questo modo creeremo collegamenti di comunicazione in luoghi dove sembra attualmente impossibile . . . Queste strutture esibiranno grande eleganza di forma, invariabilmente determinata dalle leggi naturali di equilibrio; potrebbero anche, se progettate da un ingegnere di talento, contribuire all'abbellimento delle città capitali, o, sospese attraverso valli precipitose, potrebbero produrre i più imponenti effetti nelle pittoresche ambientazioni delle zone montagnose.
>
> Picon, 1988 «*Navier and the introduction of suspension bridges in France*»

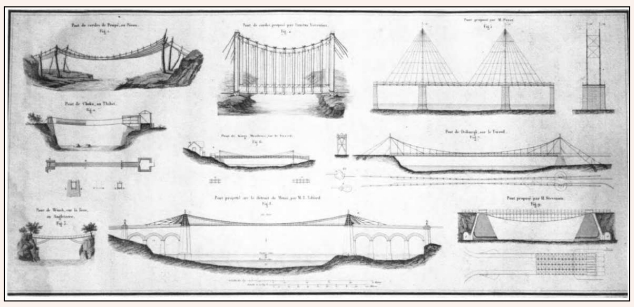


Figura 6.17: L'illustrazione di Navier di ponti sospensioni da ponti di corda primitivi di popoli indigeni al Ponte Menai di Telford (Picon, 1988)

Il tempo è venuto per Navier mettere in pratica le sue teorie, e ha proposto un progetto per un ponte sospeso sulla Senna a Parigi, di fronte a Les Invalides, che ha considerato come un'applicazione delle sue ricerche teoriche. Il ponte sarebbe composto da pier stile egiziano, 3 m di diametro e circa 15 m alto, spazioso 170 m a parte, attraverso le quali passavano catene, ciascuna formata da nove corsi di collegamenti oblunghe in ferro battuto. Le catene avrebbero supportato una piattaforma 9.5 m di larghezza, di peso quasi 600 Il

COPIA DI REVISIONE

progetto è stato ambizioso, la cui scala è quasi uguale al Ponte Menai di Telford, approvato nel 1823 dal Consiglio di amministrazione. *Ponts et Chausssées* autorità. Navier ha affermato di aver definitivamente risolto il divorzio tra teoria e pratica, indegno di un "corpo come illuminato come il *Ponts et Chausssées*" (Picon, 1988 PDF).

In realtà, non c'era bisogno urgente di un ponte in questa località, come c'era nella Parigi orientale. Piuttosto, Navier cercò grandiosità ed estetica, un edificio che aggiungerebbe alla *glorioso* di Francia e la sua amata *Corpo dei Ponts e dei Chaussées*Egli voleva dimostrare che un ponte di bellezza poteva essere fatto di ferro (piuttosto che pietra) e che poteva essere fatto seguendo i dettami dell'analisi teorica.

> Non esiste alcuna necessità urgente di costruire un ponte per gli Champs Élysées . . . Ma se si desidera che si costruisca, si faccia entrare in un monumento . . . La sua disposizione sia calcolata con l'idea di formare un edificio approvato da artisti, concordi al pubblico e onorevole all'amministrazione.
>
> . . . Questo studio (di ponti sospensioni) non sarebbe stato possibile senza i progressi compiuti nell'analisi matematica in tempi recenti, e senza le istituzioni per mezzo di cui coloro che sono incaricati della direzione delle opere pubbliche sono iniziati nelle idee più avanzate della matematica.
>
> Navier, 1823 Rapport à Monsieur le Ministre de l'Intérieur sur le projet d'un pont suspendu à établir au port des Champs-Élysées

Quindi, nel 1823 Navier presentò dei piani meticolosi ai suoi superiori *Corpo dei Ponts e dei Chaussées*Ogni dettaglio è stato progettato sulla base di analisi teorica, e Navier ha avuto sufficiente fiducia che non ha fatto ricorso alla consueta pratica di ingegneria di "overbuilding' (cioè, aggiungendo un fattore di sicurezza). Tale fiducia sarebbe inimmaginabile oggi; i codici moderni incorporano fattori di sicurezza corrispondenti a indici di affidabilità.[51]. Un comitato di esperti ha riferito molto favorevolmente sul progetto di Navier, convinto che "teoria ovunque illumina la pratica" (Cannone e Friedlander, 2003 PDF). Questo episodio illustra sia la promessa che il pericolo della scienza di ingegneria precoce: *la potenza dell'analisi matematica accoppiata con comprensione incompleta delle incertezze pratiche*[52].

Il ponte venne praticamente completato quando apparve un leggero movimento nei pozzi di ancoraggio a catena, che si aggravava sul lato Champs-Élysées, durante la notte del 6-7 settembre 1826, di uno dei condotti d'acqua della città, 0.32 m di diametro. Il torrente risultante di acqua (sotto una testa di 30 m) dai serbatoi Chaillot formarono una piscina accanto a scavi incompleti e portarono all'infiltrazione di lavori di terra già finiti. Fu installato un ponte, ma alte maree, gelate invernali e preoccupazioni finanziarie ritardarono il consolidamento di emergenza degli ancoraggi. Fu deciso di aggiornare le riparazioni fino alla stagione successiva e di smontare il ponte e le catene. (Cannone e Friedlander, 2003 PDF).

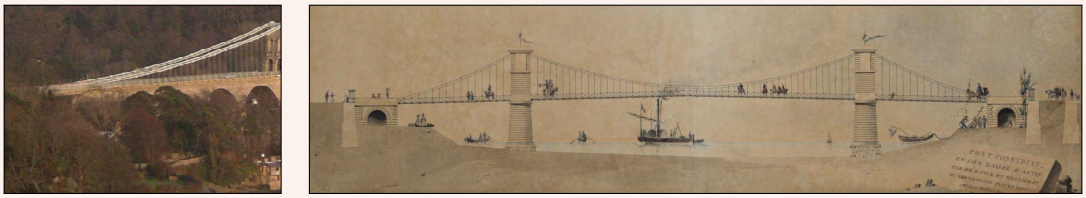
[51] Differenziato in §37.3 almeno uguale a 3

[52] Esempi di ingegneria strutturale includono il crollo del ponte Tacoma Narrows del 1940, il problema delle vibrazioni laterali del ponte del millennio di Londra del 2000 e la retrofit del quarto trimestre del Citicorp Center del 1978.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Il fallimento non era quindi strutturale ma geotecnico[53]Questo fallimento serve a ricordare che anche l'analisi strutturale più sofisticata è altrettanto buona quanto la comprensione del sistema completo, comprese le fondazioni e le condizioni ambientali.



(a) Un ponte di Telford (sotto Menai)

(b) Il Pont des Invalides proposto da Navier

Figura 6.18: Navier e Telford (ponti)

Gli articoli sarcastici apparvero nella stampa contro il Corpo, e Navier fu chiamato "quel eminente uomo di scienza i cui calcoli fallirono a Parigi". *Pont des Invalides*. Il criticismo è stato levato al Corpo per essere troppo attaccato alla teoria e per essere troppo autocratico ed elitario, rispetto agli stabilimenti di ingegneria britannica e americana. Si è suggerito che le catene devono essere state troppo pesanti per i contrafforti se non riuscissero a resistere a un "incidente di luce"; al contrario, i risultati superiori dei costruttori di ponti britannici sono stati elogiati per non "matematicizzare" il problema.

Infatti, la traiettoria di Navier dal teorico/matematico al costruttore di ponti non può che essere contrastata con quella più pratica.

6.7.4 Jean le Rond d'Alembert (1717–1783)

Jean le Rond d'Alembert nacque a Parigi nel 1717 e si abbandonò come un neonato sui gradini della chiesa di Saint-Jean-le-Rond, da cui prese il nome. Fu educato da una famiglia adottiva e successivamente supportò finanziariamente, sebbene discretamente, dal suo padre biologico, un ufficiale di artiglieria. D'Alembert ricevette una rigorosa educazione al Collège des Quatre-Nations.

Dinamica e riduzione dell'equilibrio Jean le Rond d'Alembert è stato un pensatore di illuminazione cardine, il cui lavoro ha contribuito a trasformare la meccanica da un quadro geometrico e forzato in un unico fondamento di principi astratti. *Traité de Dynamique*, (d'Alembert, 1743 PDF), ha introdotto ciò che è ora chiamato il principio di d'AlembertQuesto principio afferma che la somma delle forze applicate e delle forze inerziali, con segno opposto, deve svanire per tutti gli spostamenti virtuali, incorporando l'inerzia come

[53]Moiseff è morto tre anni dopo il completamento e il crollo del ponte sospeso Tacoma Narrows (1940) e in Francia, 100 anni dopo l'incidente del ponte di Navier, diga Malpasset, progettata da una grande *Politecnici* ingegnere, André Coyne (che da allora aveva progettato circa 100 dighe) fallì (di nuovo non un fallimento strutturale ma uno scorrevole rock) uccidendo 423 persone. (Londe, 1987).

COPIA DI REVISIONE

forza fittizio, d'Alembert ridiffusione della seconda legge di Newton in una condizione di equilibrio.

Per i dettagli analitici, consultare §36.3.1

Questo riframing era profondo, ha trasformato i problemi di movimento in problemi formalmente equivalenti alle statiche, permettendo così di applicare i metodi di lavoro virtuale e di equilibrio alle dinamiche. *Traité de Dynamique* si pone così come un lavoro fondamentale per lo sviluppo di metodi di lavoro virtuali, coordinate generalizzate e principi energetici che dominano la meccanica ottocentesca e l'analisi strutturale.

Enciclopédie e il programma razionalista D'Alembert è stato anche un importante collaboratore *Encyclopédie*, servendo come co-editore (con Diderot) dei suoi articoli matematici e scientifici; in questo ruolo, divenne una delle voci principali del razionalismo e del formalismo scientifico nella Francia settecentesca. La sua insistenza sulla chiarezza, l'astrazione e la struttura matematica formarono la presentazione della meccanica come scienza deduttiva piuttosto che una raccolta di regole empiriche. *Encyclopédie*, d'Alembert ha aiutato a diffondere la meccanica matematica ad un vasto pubblico intellettuale, incorporando ragionamenti scientifici all'interno del tessuto culturale dell'illuminismo.

Vibrazioni e Propagazione Onda Oltre alle dinamiche, d'Alembert ha dato un contributo fondamentale alla teoria delle vibrazioni. La sua analisi della stringa vibrante ha portato alla formulazione dell'equazione d'onda unidimensionale, una delle prime e più importanti equazioni differenziali parziali nella fisica matematica. Sebbene inizialmente controversa, soprattutto riguardo a questioni di condizioni limite e di soluzioni ammissibili, il suo lavoro sulla propagazione delle onde ha posto le basi per sviluppi successivi in elasticità, l'ondazione, le corde equazioni equazioni e le stringhe continue e le stringhe dinamiche strutturali.

Posizione nello sviluppo della Meccanica Mentre lo stile di d'Alembert era meno sistematico e completo di quello di Lagrange, le sue innovazioni concettuali lo segnano come una figura di transizione cruciale tra meccanica newtoniana e meccanica analitica moderna. *Encyclopédie*, d'Alembert ha contribuito a stabilire la meccanica come scienza razionale, astratta e universale.

6.7.5 Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)

Joseph-Louis Lagrange nacque a Torino nel 1736, poi parte del Regno di Sardegna. Suo padre ricoprì una posizione governativa che inizialmente forniva sicurezza finanziaria, ma le fortune familiari in seguito diminuirono, rafforzando la fiducia di Lagrange sul raggiungimento intellettuale piuttosto che sulla posizione sociale. Sebbene la prima volta fosse destinata ad una carriera legale o amministrativa, Lagrange si voltò decisamente verso la matematica come giovane dopo aver studiato in modo indipendente le opere di Galileo, Newton e Euler.

All'età di diciannove anni, Lagrange scrisse a Euler descrivendo i suoi primi risultati nel

COPIA DI REVISIONE

calcolo delle variazioni. Euler riconobbe immediatamente il suo talento e divenne mentore e sostenitore, aiutando a garantire la rapida ascesa di Lagrange all'interno della comunità scientifica europea. Questa prima indipendenza – combinata con incoraggiamento dal più importante analista dell'età – a forma di Lagrange la sua predilezione per ragionamento astratto e metodi generali su argomenti geometrici o sperimentali.

Meccanica analitica e l'eliminazione della forza Joseph-Louis Lagrange meccanica ristrutturata fondamentalmente con il suo lavoro di riferimento *Analitica medica*, (Lagrange, 1788 PDF), in cui ha eliminato il concetto di forza come primitivo e ha costruito l'intera teoria dai principi del lavoro virtuale e dell'energia. Introducendo coordinate generalizzate e metodi variazionali, Lagrange ha sviluppato un quadro che ha applicato uniformemente a sistemi meccanici complessi, sia in statici che in dinamica. *matematizzazione* di meccanica, riducendo tutti i problemi fisici ad esercizi in geometria analitica e calcolo.

A differenza della meccanica newtoniana, radicata in forze, diagrammi e costruzioni geometriche, la formulazione di Lagrange richiedeva solo quantità, coordinate e derivati scalari. I vincoli, olonomici o meno, sono stati incorporati sistematicamente attraverso coordinate generalizzate piuttosto che risolti dall'ingegno geometrico, che hanno permesso di trattare problemi di complessità senza precedenti con chiarezza concettuale e economia matematica.

***Analitica medica* e la sua Legacy** L'approccio di Lagrange elevava la meccanica a un ramo di pura matematica e poneva le basi per gli sviluppi successivi della fisica, tra cui meccanica Hamiltoniana, teoria del campo e dinamiche analitiche moderne. *Analitica medica* dichiara che "non si troverà alcuna figura in questo lavoro", una deliberata dichiarazione di metodo: l'intuizione fisica doveva essere codificata interamente in equazioni, non diagrammi.

Le formulazioni di Lagrange rimangono centrali alla moderna meccanica teorica, alla dinamica ingegneristica e alla teoria del controllo. I metodi energetici, le coordinate generalizzate e i principi variazionali – ora strumenti standard nel implicare equazioni di movimento e di equilibrio – vanno direttamente al suo lavoro. Nel XX secolo, questo punto di vista puramente analitico si rivelerebbe particolarmente compatibile con la meccanica computazionale, dove i sistemi fisici sono rappresentati e risolti attraverso la manipolazione numerica delle equazioni piuttosto che la costruzione geometrica.

Ulteriori informazioni sui contributi scientifici di Lagrange sono dati in §10.3.2.2.

6.7.6 Cauchy (Augustin-Louis 1789–1857)

Augustin-Louis Cauchy nacque a Parigi nel 1789, all'inizio della Rivoluzione francese, e ricevette la sua educazione matematica alla nuova fondazione *Politecnica Ecole*, un'istituzione espressamente creata per fornire lo stato con ingegneri formati in analisi avanzate. Cauchy si è distinta presto dalle sue eccezionali capacità analitiche e presto ha perseguito una carriera accademica che combina matematica, meccanica e servizio pubblico. I suoi anni formativi coincidono con una più ampia trasformazione della meccanica in Francia, in cui l'analisi rigorosa è stata sempre più considerata come la giusta base della teoria fisica.

COPIA DI REVISIONE

Stress a un punto e la vista locale della meccanica Augustin-Louis Cauchy ha contribuito profondamente alla matematica e alla meccanica teorica, rimodellare fondamentalmente le basi analitiche della meccanica elasticità e continuum. *stress a un punto*Prima del Cauchy, i meccanici hanno analizzato le forze che agiscono su intere sezioni, come la tensione totale in una barra o la compressione risultante in una colonna. Cauchy ha sostituito questo punto di vista integrale con uno locale, definendo lo stress come il rapporto di forza limite all'area, mentre la zona si restringe ad un punto.

Questo passaggio da parte dei risultati globali a campi puntuali ha permesso la formulazione di equazioni differenziali parziali che governano lo stato di forza interna di corpi di forma arbitraria sotto carico arbitrario — le equazioni fondamentali di elasticità.

Il Tensore di Stress e l'Equilibrio Una visione chiave è che lo stress ad un punto non può essere rappresentato da un singolo scalare o anche da un vettore; invece, la trazione (forza per area unitaria) che agisce su una superficie attraverso un punto dipende dall'orientamento di quella superficie. Il cachite ha dimostrato che questa dipendenza è lineare: se i vettori di trazione su tre piani reciprocamente perpendicolari sono noti, la trazione su qualsiasi piano può essere determinata da trasformazione lineare. *tenore di stress*— un tenore di secondo ordine con nove componenti, di cui sei indipendenti in condizioni di equilibrio.

Il formalismo dello stress-tensore ha unificato fenomeni che in precedenza erano apparsi disparati: tensione, compressione, taglio e le loro combinazioni in stati di stress complessi. e direzioni principali, e stabilito le equazioni di equilibrio locale che i campi di stress devono soddisfare in tutto un corpo, questi sviluppi hanno posto la base matematica della meccanica continuum moderna.

Dall'elasticità alla computazione Ogni analisi degli elementi finiti valuta i tensori di stress nei punti di integrazione, li trasforma in coordinate principali e li valuta contro le leggi costitutive e i criteri di fallimento—procedure che sono discendenti diretti della formulazione di Cauchy. Il suo lavoro ha fornito il linguaggio e la struttura necessari per lo sviluppo successivo di metodi numerici nella meccanica solida.

Rigor e Legacy Oltre allo stress, Cauchy ha contribuito a estrarre la teoria, alle relazioni costitutive che collegano lo stress alla deformazione, alle rigorose basi dell'analisi matematica, comprese precise definizioni di limiti, convergenza e funzioni complesse. La sua insistenza sulla precisione logica ha trasformato la meccanica da un ramo di filosofia naturale in una scienza matematica. L'apparato concettuale che ha introdotto -stress e tensione tensors, equazioni di equilibrio e relazioni costitutive - rimane la fondazione di meccanica solida e strutturale.

Ulteriori informazioni sui contributi scientifici del Cauchy sono dati in §10.3.2.4.

6.7.7 George Green (1793–1841)

George Green nacque nel 1793 a Nottingham, in Inghilterra, in una famiglia di mezzi modesti, e ricevette una piccola formazione formale e lavorò per la maggior parte della sua vita come miller, aiutando il funzionamento del mulino a vento della sua famiglia.

COPIA DI REVISIONE

Nonostante ciò, Green perseguì la matematica in modo indipendente, studiando opere analitiche avanzate in gran parte da solo. Il suo sviluppo scientifico si è verificato in quasi isolamento da istituzioni accademiche, rendendo i suoi contributi più recenti più notevoli.

Il 1828 Essay e la teoria potenziale Nel 1828, lavorando al di fuori della comunità scientifica stabilita, Green pubblicò un saggio singolare dal titolo *Un saggio sull'applicazione dell'analisi matematica alle teorie dell'elettricità e del magnetismo*Questo lavoro ha introdotto ciò che ora sono conosciuti come il teorema di Green e le funzioni di Green, concetti che diventerebbero fondativi nella fisica matematica.

Pur inquadrato all'interno di una teoria potenziale, le implicazioni del saggio si sono estese ben oltre l'elettricità e il magnetismo, introducendo identità integrali che riguardano i valori del campo all'interno di un dominio ai valori del suo confine, Green ha fornito un potente metodo per risolvere i problemi del valore limite, che si è rivelato essenziale non solo nell'elettrostatica, ma anche nell'elasticità, nella meccanica dei fluidi e nella conduzione del calore, dove le e le equazioni regolatori condividono una struttura ellittica comune.

Metodi energetici e prospettive variabili Il lavoro di Green ha introdotto implicitamente una prospettiva energetica e variativa per risolvere equazioni differenziali parziali.Esprimendo soluzioni in termini di operatori integrali e funzioni del kernel, ha posto le basi per metodi successivamente formalizzati da Thomson (Lord Kelvin), Rayleigh e altri nello studio di energia elastica, stabilità e vibrazione.

Metodi e Legacy computazionale Nonostante la pubblicazione di una manciata di carte durante la sua vita, l'eredità di Green è duratura. Le funzioni di Green ora formano la spina dorsale di molte tecniche analitiche e numeriche in ingegneria e fisica. In particolare, i moderni metodi computazionali basati sui limiti, in particolare il metodo degli elementi di confine (BEM)—solo interamente sulle identità di Green per trasformare i problemi di volume in formulazioni di confine equivalenti.

Unità di Fisica Matematica Il lavoro di Green è una dimostrazione sorprendente dell'unità della fisica matematica: le tecniche sviluppate per una teoria fisica riappare spesso, in gran parte invariate, in altre. Il suo saggio del 1828 esemplifica come una profonda intuizione matematica, anche quando si sviluppa in isolamento e si applica a un problema stretto, può modellare intere discipline.

6.7.8 - No.Ĵean Claude Barré de Saint-Venant (1797–1886)

- No.Ĵean Claude Barré de Saint-Venant nacque nel 1797 a Villiers-en-BiÈre, Francia. Formato come ingegnere civile, è entrato nel *École des Ponts et ChaussÉ*, dove l'istruzione matematica rigorosa era esplicitamente accoppiata con l'istruzione di ingegneria pratica. Questa formazione duale, analitica e costruttiva, definirebbe tutta la sua carriera. A differenza di meccanica puramente accademica, Saint-Venant lavorò all'interfaccia della teoria e dell'applicazione, cercando formulazioni che erano matematicamente sonori ma utilizzabili da ingegneri praticanti.

COPIA DI REVISIONE

Teoria di elasticità di sistema Saint-Venant è meglio conosciuto per la raffinazione e la sistematizzazione della teoria dell'elasticità sviluppata dai suoi predecessori, in particolare Navier e Cauchy. Migliora la generalità della teoria dell'elasticità incorporando esplicitamente forze del corpo e condizioni di confine, affrontando limitazioni nelle formulazioni originali di Navier.

Saint-Venant ha svolto un ruolo di mediazione cruciale tra meccanica astratta continuum e pratica ingegneristica, traducendo concetti meccanici complessi in metodologie ingegneri potrebbero applicare direttamente, ha stabilito gran parte della base teorica di analisi strutturale moderna, fondazioni che rimangono centrali alla pratica ingegneristica di oggi.

Torsione e abbandonimento di bar Prismatici I contributi più celebri di Saint-Venant riguardano la torsione e piegatura Il problema della torsione, che determina la distribuzione dello stress e l'angolo di torsione quando una barra è sottoposta a coppia, aveva resistito alla soluzione per sezioni trasversali diverse dal cerchio. Saint-Venant ha sviluppato un metodo generale basato sulle funzioni di stress che hanno permesso soluzioni per sezioni trasversali rettangolari, ellittiche e non circolari.

I suoi risultati hanno rivelato fenomeni importanti e controintuitivi: la massima sollecitazione della torsione in una sezione rettangolare si verifica al punto centrale delle lati più lunghe piuttosto che agli angoli, e le sezioni aperte a pareti sottili sono straordinariamente deboli nella torsione rispetto alle sezioni chiuse, che rimangono direttamente rilevanti per il moderno design strutturale.

In flessione, Saint-Venant ha esteso la teoria del fascio di Navier a sezioni non simmetriche, mostrando come i carichi non passano attraverso il centro di taglio indurre piegamento combinato e torsione. nelle vicinanze dei punti di applicazione del carico e nelle discontinuità geometriche, dimostrando come i campi di stress locali possono differire significativamente dalle previsioni della teoria del fascio elementare. Le sue soluzioni per carichi concentrati hanno dimostrato che questi effetti locali si decadono rapidamente con la distanza dal carico.

Principio di San Salvatore Queste osservazioni hanno portato al principio di San-VenantIl principio afferma che il campo di stress a una distanza sufficiente da una regione caricata dipende solo dalla forza e dal momento che risultano, non dalla distribuzione dettagliata del carico.

Questo principio ha profonde conseguenze pratiche: consente agli ingegneri di sostituire le condizioni di confine complesse con quelle statically equivalenti, di analizzare le strutture senza una precisa conoscenza delle distribuzioni di carico, e di credere che i dettagli locali dei supporti e delle connessioni non influiscono significativamente in tensioni lontano da quelle regioni.

Editoriale Lavoro e Legacy Saint-Venant ha anche curato e annotato la terza edizione di Navier *Résumé* e tradusse il trattato di Clebsch sull'elasticità, aggiungendo note voluminose che costituivano contributi originali, trasformando la sua vita di lavoro in elasticità da una teoria matematicamente raffinata in uno strumento di ingegneria pratica.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Le formule per rigidità torsionale, distribuzioni di stress in travi piegate, deformazione di sezioni non circolari, e il principio che porta il suo nome rimane parte del linguaggio lavorativo quotidiano di ingegneri strutturali.

Ulteriori informazioni sui contributi scientifici di Saint-Venant sono dati in §10.3.2.8.

6.8 L'ascesa dell'ingegneria strutturale come disciplina

Questa sezione riflette l'emergere di *ingegneria strutturale* Come disciplina scientifica e professionale distinta, sono stati formalizzati metodi di analisi e di progettazione, e si è chiarito il rapporto tra teoria e pratica, che si pone l'accento sull'istituzionalizzazione, la codificazione e l'identità disciplinare.

6.8.1 Karl Culmann (1821-1881)

Formazione di vita e ingegneria Karl Culmann nacque nel 1821 a Bergzabern, nella regione del Palatinato in Germania, e fu addestrato come ingegnere al Politecnico di Karlsruhe, dove ricevette una rigorosa educazione in matematica, meccanica e costruzione pratica. Fin dall'inizio Culmann mostrò una forte inclinazione verso il ragionamento geometrico e la rappresentazione visiva, preferendo approcci grafici intuitivi al calcolo puramente algebrico.

Culmann (Culmann, 1866) statici grafici fondati come disciplina sistematica, trasformando le tecniche geometriche sparse in una metodologia completa per l'analisi strutturale. *Die Graphische Statik* (Statichi grafici), pubblicato a Zurigo nel 1866 con una seconda edizione notevolmente ampliata nel 1875, stabilirono metodi visivi per analizzare le forze nelle capriate, cornici, archi e muri di contenimento che dominarono la pratica dell'ingegneria per quasi un secolo.

Culmann si alleò al Politecnico di Karlsruhe e lavorò come ingegnere ferroviario in Baviera prima di recarsi in Gran Bretagna e negli Stati Uniti (1849-1851) per studiare ingegneria dei ponti. Il suo rapporto sui ponti americani in legno e ferro introdusse gli ingegneri continentali alle pratiche americane innovative. Nel 1855 divenne professore di ingegneria presso la nuova Eidgenössische Technische Hochschule (ETH) leader in programmi Zurigo, dove costruì uno dei progetti strutturali europei.

La statistica grafica sfrutta la dualità tra forza e geometria: le forze possono essere rappresentate come vettori, e condizioni di equilibrio possono essere espresse come la chiusura dei poligoni. Culmann ha sistemato queste relazioni attraverso la forza poligono (rappresentando le magnitudine e le direzioni delle forze) e il poligono funicolare L'interazione tra questi due diagrammi, figure reciproche nella terminologia di Maxwell, consente la rapida soluzione di complessi problemi di equilibrio senza calcolo algebrico.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Per l'analisi delle trombe, i metodi di Culmann hanno permesso agli ingegneri di determinare graficamente tutte le forze membri costruendo un unico diagramma in cui ogni membro corrisponde ad un segmento di linea la cui lunghezza rappresenta la grandezza della forza.Per archi e cavi, il poligono funicolare rappresenta direttamente la linea di spinta, permettendo ai progettisti di visualizzare come le forze fluiscono attraverso strutture curve.

L'influenza di Culmann si estendeva oltre le tecniche specifiche ad una filosofia di educazione ingegneristica che enfatizzava l'intuizione geometrica e il ragionamento visivo. I suoi studenti e successori, tra cui Wilhelm Ritter, che continuarono la tradizione grafica, e Maurice Koechlin, che applicarono questi metodi alla progettazione della Torre Eiffel, sprigionano statiche grafiche in tutta Europa e nel mondo. I metodi sono rimasti standard fino a quando i computer elettronici hanno reso gli approcci algebrici più efficienti, e anche oggi, il ragionamento grafico fornisce una panoramica del comportamento strutturale che il puro calcolo non può corrispondere. I suoi diagrammi di traiettorie principali di stress in travi ispirarono il lavoro dell'anatomista Julius Wolff sul rimodellamento osseo e continuarono ad apparire nei libri di testo che illustravano come le forze fluiscono attraverso gli elementi strutturali.

6.8.2 William John Macquorn Rankine (1820-1872)

William John Macquorn Rankine nacque nel 1820 a Edimburgo, in Scozia, in una famiglia con forti interessi tecnici e scientifici. Non ricevette alcuna formazione universitaria formale in matematica o fisica; invece, era in gran parte autodidatta, studiava meccanica avanzata, matematica e termodinamica indipendentemente mentre lavorava come apprendista civile ingegneristico.

Rankine (Rankine, 1858 PDF) fu uno dei fondatori della scienza della termodinamica e una figura cardine nella creazione di meccanica ingegneristica come disciplina rigorosa nel mondo anglofono. *Manuale della Meccanica Applicata*, pubblicato per la prima volta nel 1858 e rivisto attraverso molte edizioni, colpì il divario tra meccanica teorica e ingegneria pratica, presentando metodi matematici avanzati in forme accessibili agli ingegneri praticanti.

Rankine fu in gran parte autodidatta in matematica e fisica, ma contribuì in modo fondamentale alla termodinamica (il ciclo di Rankine per motori a vapore, scala di temperatura Rankine), meccanica del suolo e analisi strutturale. Nominato Regius Professore di Ingegneria Civile e Meccanica presso l'Università di Glasgow nel 1855, congiungeva il rigore accademico con esperienza di ingegneria pratica acquisita su progetti ferroviari, portuali e di waterway.

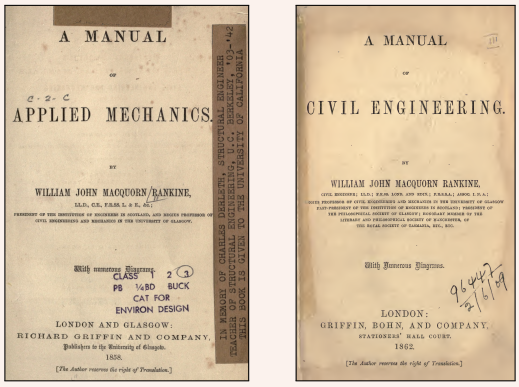
La formulazione di Rankine della teoria della pressione terrestre Rimangono fondanti nel design geotecnico e strutturale, analizzando l'equilibrio limitato delle masse del suolo, determinando le pressioni attive e passive che i suoli esercitano sul mantenimento delle pareti in condizioni idealizzanti. I coefficienti di pressione della terra di Rankine, derivati

COPIA DI REVISIONE

dall'assunzione di un terreno senza coesione con superfici di guasto planari, forniscono il punto di partenza per l'analisi di stabilità della parete e del limite di pendenza.

Il *Manuale della Meccanica Applicata* forza materiale sintetizzata, stabilità strutturale, e elasticità Rankine ha presentato la meccanica dei materiali, della teoria del fascio, dell'instaurazione delle colonne e dell'analisi di cornici e archi con precisione matematica, mantenendo l'attenzione sull'applicazione pratica. Il suo trattamento dei metodi energetici ha anticipato gli sviluppi successivi nell'analisi strutturale, e la sua chiara esposizione dei principi fondamentali ha influenzato generazioni di ingegneri formati nella tradizione britannica.

Interessante, in un momento in cui i meccanici e gli ingegneri civili praticanti in gran parte hanno condiviso un quadro intellettuale comune, Rankine ha scritto sia *Un manuale di meccanica applicata* (Rankine, 1858) e *Un manuale di ingegneria civile* (Rankine, 1862)Fico. 6.19. In tal modo, ha esemplificato una sintesi di rigorosa teoria e pratica ingegneristica che si sta in netto contrasto con la frammentazione attuale, dove le due comunità troppo spesso avanzano lungo percorsi paralleli ma deboli.



(a) Rankine, 1858 (b) Rankine, 1862

Figura 6.19: Manuali di Rankine che corrompono meccanica applicata e ingegneria civile

Rankine contribuì anche all'architettura navale, analizzando la stabilità e il movimento di rotolamento delle navi, e alla disciplina emergente della termodinamica, dove il suo lavoro sulle proprietà del vapore e l'efficienza dei motori di calore parallelarono quella di Clausius e Kelvin. La sua notevole larghezza - che attraversa la disciplina civile, meccanica e navale - esemplizzò l'ideale vittoriano del ingegnere-scienziere.

6.8.3 Christian Otto Mohr (1835-1918)

Christian Otto Mohr nacque nel 1835 a Wesselburen, nel Ducato di Holstein, dove si è strettamente integrato la matematica, la meccanica e l'ingegneria pratica. All'inizio della sua carriera, Mohr lavorò come ingegnere ferroviario, acquisendo esperienza di prima mano con ponti, terre e sistemi strutturali sottoposti a condizioni di carico reali.

COPIA DI REVISIONE

Mohr (Mohr, 1874) ha dato un contributo fondamentale all'analisi strutturale che rimane centrale alla pratica ingegneristica, sviluppando sia strumenti grafici che analitici che gli ingegneri utilizzano ogni giorno più di un secolo dopo la loro introduzione, e il suo lavoro si estende all'analisi dello stress, al calcolo dello spostamento, alle linee di influenza e ai criteri di fallimento, una vastità di contributo che si accompagna a poche altre figure nella storia della meccanica strutturale.

Mohr studiò presso la Scuola Politecnica di Hannover e lavorò come ingegnere ferroviario prima di diventare professore al Politecnico di Stoccarda (1867) e successivamente al Politecnico di Dresda (1873), dove rimase fino al suo ritiro nel 1900.

Il cerchio di Mohr (1882) fornisce un'elegante rappresentazione grafica della trasformazione dello stress. Dato i componenti di stress su due piani perpendicolari, Mohr ha dimostrato che gli stress su tutti i piani possibili attraverso un punto possono essere rappresentati da punti su un cerchio in σ-τ piano. La geometria del cerchio rivela immediatamente le principali sollecitazioni (i punti estremi sull'asse orizzontale), lo stress massimo della cesoia (il raggio del cerchio), e gli orientamenti di questi piani critici.Questa visualizzazione, ancora insegnata in ogni corso di meccanica introduttiva, trasforma le trasformazioni astratti di tensore in relazioni geometriche intuitive.

Forse più significativamente per l'analisi strutturale, Mohr ha sviluppato il metodo di carico unitario (chiamato anche il metodo di carico fittizio o il metodo Maxwell-Mohr), che calcola sistematicamente gli spostamenti nelle strutture applicando il principio del lavoro virtuale. Per trovare lo spostamento in qualsiasi punto, si applica un carico unitario fittizio a quel punto, determina le forze interne che ne derivano (in equilibrio con il carico unitario ma non necessariamente compatibile), e integra il prodotto di queste forze "virtuali" con il metodo disformazione reale applicabile in tutto il a analisi strutturale.

Mohr ha anche avanzato la teoria delle linee di influenza— i diogrammi che mostrano come forze interne, reazioni o spostamenti in un punto variano in quanto un carico unitario si muove attraverso una struttura; il suo sviluppo sistematico della costruzione della linea di influenza, essenziale per la progettazione del ponte sotto carichi mobili, ha permesso l'analisi razionale dei ponti ferroviari e autostradali., sviluppato in collaborazione con l'ingegnere francese Williot, fornisce un metodo grafico per determinare le deflettori truss dalle allungazioni dei membri, una tecnica che rivela il comportamento cinematico delle strutture in modi che i metodi puramente numerici non possono.

I contributi di Mohr all'ingegneria geotecnica sono stati altrettanto significativi., combinando la rappresentazione di Mohr di stati di stress con la legge di fallimento di Coulomb per i suoli, rimane il modello standard per la resistenza del suolo e della roccia. La sua rappresentazione grafica di buste di fallimento consente una rapida valutazione se un dato stato di stress causerà guasto—essenziale per la progettazione di fondazione, l'analisi della stabilità dei pendici e il mantenimento dei calcoli della parete.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

6.8.4 Henry Moseley (1801–1872)

La prima vita e la formazione matematica Henry Moseley nacque a Londra nel 1801 e istruì al Trinity College di Cambridge, dove ricevette una formazione rigorosa in matematica in un momento in cui il Cambridge Mathematical Tripos dominava l'educazione analitica britannica. Ordained come un ecclesiastico anglicano, Moseley perseguì tuttavia matematica applicata e meccanica con intensità insolita, riflettendo un periodo in cui i doveri clerici e l'inchiesta scientifica spesso coesistevano.

Moseley (Moseley, 1843) è stato tra i primi ad applicare sistematicamente la teoria dell'elasticità a problemi strutturali pratici, producendo un libro di testo che ha formato una generazione di ingegneri nell'analisi matematica delle strutture. *Principi meccanici di ingegneria e architettura*, pubblicato nel 1843, rappresentava un significativo progresso nell'educazione ingegneristica in lingua inglese, presentando rigorosi metodi analitici per la piegatura del fascio, colonna di indurimento, e l'analisi dell'arco in forma accessibile.

I principi meccanici Moseley ha trattato la flessione del fascio utilizzando la nascente teoria dell'elasticità, derivando formule di deflettore e distribuzioni di stress che hanno permesso una razionale proporzione dei membri strutturali. La sua analisi della stabilità della colonna ha esteso la teoria di indurimento di Euler al design pratico, considerando gli effetti delle imperfezioni e del carico eccentrico che le colonne reali inevitabilmente espongono.

L'influenza del libro è stata sostanziale e internazionale, è stata ristampata all'Accademia Militare degli Stati Uniti a West Point, con note aggiuntive di Dennis Hart Mahan, diventando un testo standard per l'educazione dell'ingegneria americana. Le traduzioni tedesche hanno portato i metodi di Moseley al pubblico continentale. La sua chiara esposizione di tecniche analitiche, combinate con esempi di lavoro estensivi, ha stabilito un modello per i libri di testo di ingegneria che persiste oggi.

Gli interessi di Moseley si estendevano oltre le strutture all'efficienza delle macchine, alla stabilità delle navi e alla meccanica delle ruote idriche. Il suo lavoro sulla stabilità dinamica – analizzando le condizioni in cui i corpi galleggianti ritornano all'equilibrio dopo perturbazione – contribuì al numero di architettura navale.

6.8.5 James Clerk Maxwell (1831–1879)

James Clerk Maxwell nacque nel 1831 a Edimburgo, in Scozia, e cresceva nella sua casa rurale a Glenlair, da giovane esibiva un'insolita attitudine per la geometria e il ragionamento fisico, producendo originali indagini geometriche mentre era ancora un ragazzo. Fu educato all'Università di Edimburgo e successivamente al Trinity College di Cambridge, dove ricevette la più forte formazione possibile in matematica e filosofia naturale, che si trasformò in una prima immersione nella geometria, nell'analisi e nell'intuizione fisica, dando vita all'abitudine di Maxwell di cercare profonde relazioni strutturali dietro diversi fenomeni fisici.

COPIA DI REVISIONE

Maxwell. (Maxwell, 1890), rinomato come uno dei più grandi fisici della storia per la sua teoria elettromagnetica, ha anche contribuito fondamentale alla meccanica strutturale attraverso il suo sviluppo di diagrammi reciproci per l'analisi della tromba. *Su figure reciproche e diagrammi delle forze* (Maxwell, 1864a) (Maxwell, 1864c) pubblicato nel 1864, fondò la base teorica per i metodi grafici che dominavano l'analisi strutturale per decenni.



XLV. *On Reciprocal Figures and Diagrams of Forces.* *By* J. Clerk Maxwell, *F.R.S., Professor of Natural Philosophy in King's College, London*‡.

RECIPROCAL figures are such that the properties of the first relative to the second are the same as those of the second relative to the first. Thus inverse figures and polar reciprocals are instances of two different kinds of reciprocity.

The kind of reciprocity which we have here to do with has reference to figures consisting of straight lines joining a system of points, and forming closed rectilinear figures; and it consists in the directions of all lines in the one figure having a constant relation to those of the lines in the other figure which correspond to them.

In plane figures, corresponding lines may be either parallel,

Figura 6.20: James Clerk Maxwell

Maxwell fu educato a Edimburgo e Cambridge, dove le sue eccezionali capacità matematiche erano immediatamente evidenti. La sua carriera si estendeva ad Aberdeen, King's College London e Cambridge, dove divenne il primo Cavendish Professor of Physics. Mentre le sue equazioni elettromagnetiche, unificando elettricità, magnetismo e luce, costituiscono il suo più grande successo, il suo lavoro sulla meccanica strutturale, la visione del colore, la termodinamica e la teoria cinetica dei gas dimostra la notevole larghezza.

I diagrammi reciproci di Maxwell sfruttano una dualità fondamentale tra diagrammi di forza e geometria strutturale. Nell'analisi di una tromba, si costruisce un diagramma di forza in cui ogni poligono corrisponde ad un giunto nella struttura, e ogni segmento di linea rappresenta la forza in un membro che collega le articolazioni adiacenti. Maxwell ha dimostrato che questo diagramma di forza è il "reciproco" del diagramma strutturale: le linee parallele in una sono regolate in una regola precisa reciprocità e le relazioni grafiche e precise sono regolate tra le relazioni grafiche.

Dove i metodi algebrici richiedevano sistemi di risoluzione di equazioni simultanee, tediose e incline agli errori prima delle macchine di calcolo, i diagrammi di Maxwell permettevano agli ingegneri di determinare le forze in complesse capriate attraverso la costruzione geometrica.

Il trattamento teorico di Maxwell è andato oltre le tecniche pratiche per stabilire profonde connessioni tra meccanica strutturale e geometria proiettiva, mostrando che esistono figure reciproche ogni volta che un quadro è staticamente determinato e sviluppato criteri per l'esistenza e l'unicità di tali diagrammi. Il suo lavoro ha influenzato le statistiche grafiche

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

di Culmann ed è stato esteso da Cremona, la cui procedura sistematica per la costruzione di diagrammi di forza porta il suo nome (il diagramma Maxwell-Cremona).

Maxwell contribuì anche al teorema di spostamenti reciproci (teorema reciproco di Maxwell), affermando che in una struttura elastica lineare, lo spostamento al punto A dovuto ad un carico unitario al punto B equivale allo spostamento al punto B a causa di un carico unitario al punto A. Questo risultato apparentemente semplice ha profonde implicazioni: riduce il numero di coefficienti di influenza indipendenti, consente la verifica sperimentale dei modelli analitici, e si basa sulla simmetria di rigidità e flessibilità matrici nell'analisi strutturale moderna (Maxwell, 1864c)Il teorema reciproco di Maxwell viene invocato, spesso implicitamente, quando gli ingegneri utilizzano linee di influenza o applicano il metodo di flessibilità per indeterminare le strutture.

6.9 Le principali storie della Meccanica

Le figure riunite qui sono unite dal loro impegno con *storia della meccanica* Invece di avanzare nuove teorie, hanno sintetizzato e interpretato gli sviluppi precedenti, plasmando come la meccanica viene compresa e trasmessa, e le loro opere forniscono continuità, prospettiva e struttura critica alla disciplina.

6.9.1 Isaac Todhunter (1820–1884)

Isaac Todhunter (1820–1884) (Todhunter e Pearson, 1893) ha prodotto il più completo racconto storico mai scritto dello sviluppo della teoria dell'elasticità e la meccanica dei materiali. Il suo monumentale *Storia della Teoria dell'Estratticità e della Forza dei Materiali, dalla Galilei all'Ora presente*, pubblicato postumo nel 1886 e ampliato da Karl Pearson nel 1893, rimane un riferimento indispensabile per chiunque cerchi di capire come l'elasticità sia diventata un quadro fondamentale della meccanica strutturale.

Todhunter era un matematico di Cambridge di un'industria prodigiosa, autore di libri di testo sul calcolo, l'algebra, la trigonometria e le statiche analitiche che hanno formato le generazioni degli studenti britannici. Ma il suo contributo duraturo risiede nelle sue opere storiche: indagini complete del calcolo delle variazioni, teoria della probabilità e le teorie matematiche dell'attrazione (la teoria della gravità e del potenziale), ognuna documentando lo sviluppo delle idee matematiche con la sua elasticità esausuale esaurientezza.

Il lavoro documenta meticolosamente l'evoluzione delle formulazioni matematiche dall'analisi pionieristica di Galileo della forza del fascio attraverso i rigorosi trattamenti di Navier, Cauchy, Poisson, Green e Saint-Venant. Todhunter analizzava le fonti originali – spesso in latino, francese, tedesco e italiano – assumendo i contenuti, i metodi e le conclusioni di centinaia di memorie e trattati.

COPIA DI REVISIONE

Karl Pearson (1857-1936), che completò e ampliava il lavoro dopo la morte di Todhunter, fu lui stesso una figura significativa, più tardi famosa come fondatore di statistiche matematiche, e portò al progetto sia la sofisticazione matematica che il giudizio critico. La storia completata si estende dalla matematica Galileo (1638) attraverso Lord Kelvin e la fine del XIX secolo, riempiendo oltre 2.500 pagine in tre volumi.

Per gli storici della meccanica e dell'ingegneria strutturale, Todhunter e Pearson restano il punto di partenza per ogni seria indagine. Il lavoro documenta non solo i successi ma anche i vicoli ciechi, le dispute prioritarie e la graduale chiarificazione di concetti che ora sembrano evidenti. e ceppo— ora insegnata come materiale elementare — è nata attraverso decenni di sforzi dalle menti matematiche più belle d'Europa.

6.9.2 Stephen Prokofievich Timoshenko (1878–1972)

Stephen Prokofievich Timoshenko (Shpotivka, Ucraina, 1878 – Wuppertal, Germania, 1972) è stato il preeminente meccanico strutturale del XX secolo, i cui libri di testo sulla forza dei materiali, l'elasticità, le vibrazioni e la stabilità allenate generazioni di ingegneri in tutto il mondo. L'Istituto Politecnico di Pietroburgo, dove in seguito servì alla facoltà fino a quando il tumulto politico dopo la Rivoluzione russa lo costrinse all'estero. Insegnò successivamente in Croazia (Zagreb) e Cecoslovacchia (Praga) prima di emigrare negli Stati Uniti nel 1922. Dopo un breve periodo di studioso di ingegneria Westinghouse a Pittsburgh, si unì all'Università del Michigan (1927) e poi alla Stanford University (1936), dove fondò il programma di ingegneria del paese di ingegnere popolare AS

Libri di testo e contributi tecnici I libri di testo di Timoshenko divennero i riferimenti standard nei loro campi, tradotti in decine di lingue e utilizzati per decenni: *Problemi di vibrazione in Ingegneria* (1928), *Forza dei materiali* (1930), *Teoria dell'elasticità* (con Goodier, 1934), *Teoria di stabilità elastica* (con Gere, 1936), e *Teoria di Piatti e Conchiglie* (con Woinowsky-Krieger, 1940). I suoi contributi tecnici includono "Timoshenko beam theory"', che rappresenta la deformazione della torsa in travi spesse e rimane essenziale per l'analisi accurata di travi profonde e strutture sandwich.

Storia della forza dei materiali Il suo *Storia della forza dei materiali*, pubblicato nel 1953 (Timoshenko, 1953 PDF), traccia lo sviluppo della scienza della meccanica solida dall'antichità ai tempi moderni con l'autorità di un maestro che aveva lui stesso avanzato il soggetto. *Storia* sottolinea lo sviluppo della comprensione fisica e dell'applicazione ingegneristica, traccia come le intuizioni sperimentali nel fallimento materiale, elasticità, e stabilità strutturale Il libro copre brevemente il mondo antico e il Rinascimento prima di concentrarsi sul Settecento, Ottocento e all'inizio del Novecento– il periodo in cui la forza dei materiali La conoscenza personale di Timoshenko con molte figure del ventesimo secolo—Prandtl, Föppl, von Kármán, e altre—-lasce l'immediatezza ai suoi capitoli successivi, mentre i suoi giudizi sull'importanza relativa dei contributi, informati da una vita di insegnamento e di ricerca, portano un'autorità che i conti puramente storici non possono corrispondere. *Storia* Per gli ingegneri strutturali, il lavoro di Timoshenko fornisce sia l'educazione tecnica che

COPIA DI REVISIONE

l'identità professionale-un senso di appartenenza ad una tradizione che si estende dalla prima analisi tentativa di Galileo di un raggio cantilever ai sofisticati metodi computazionali di oggi. Rimane la storia più accessibile e leggibile della meccanica.

6.9.3 René Dugas (1897-1957)

Dugas era una meccanica francese e storico della scienza che produsse una delle storie più complete e filosoficamente sofisticate della meccanica mai scritta. *École Polytechnique*, ha trascorso la sua carriera lì come professore di meccanica, ereditando la tradizione della meccanica razionale francese che discese da Lagrange, Laplace e Poisson. Il suo lavoro storico riflette questo background: meticolosa attenzione alle formulazioni matematiche, apprezzamento per l'interplay tra scienza pura e applicata, e sensibilità alle dimensioni filosofiche dei concetti meccanici.

Storia della Mécanique Il suo *Storia della Mécanique* (1950), tradotto in inglese come *Storia della Meccanica* (1955) (Dugas, 1955) con una prefazione di Luigi de Broglie, traccia l'evoluzione del pensiero meccanico dall'antica Grecia fino al XX secolo, illuminando come sia le esigenze pratiche che i progressi teorici hanno plasmato la scienza del movimento e dell'equilibrio. e cinematica—la leva analizza Archimede, le speculazioni cinematiche di Aristotele e dei suoi successori– e traccia i contributi medievali che hanno mantenuto viva la conoscenza meccanica e l'hanno avanzata in modi sottili. La rivoluzione scientifica riceve un trattamento esteso: la cinematica di Galileo, i principi di conservazione di Descartes, la dinamica di Huygens e la sintesi di Newton.

Depto filosofico Dugas presta particolare attenzione alle fondazioni concettuali della meccanica: le definizioni di forza, massa e inerzia; lo stato delle leggi di Newton come assioma o generalizzazioni empiriche; i principi variazionali che riformulano la meccanica in termini di condizioni estreme. Questa profondità filosofica distingue il suo lavoro da storie più puramente tecniche, e illumina come i concetti che sembrano evidenti in retrospettiva– il carattere vettoriale della forza, la distinzione tra massa e peso, l'aggiuntività delle energie—emergevano attraverso una lotta prolungata e un dibattito. I metodi di analisi strutturale—equilibrio equazioni, lavoro virtuale, principi energetici—sono applicazioni di meccanica generale a particolari classi di sistemi. Capire come questi principi sviluppati, quali alternative sono state considerate e respinte, e che le controversie hanno assistito alla loro accettazione approfondisce l'apprezzamento per gli strumenti ora utilizzati di routine. La sintesi di Dugas rivela i profondi legami tra la meccanica strutturale e l'impresa più ampia della scienza fisica.

6.9.4 Clifford Ambrose Truesdell III (1919-2000)

Clifford Ambrose Truesdell III (Los Angeles, 1919 – Baltimore, 2000) è stato una figura singolare nella meccanica del XX secolo: un matematico che insisteva sul rigore, uno storico che leggeva le fonti originali nelle loro lingue originali, e un polemico che si rallegrò di deflazionare le reputazioni e puntuali dei miti. *Archivio per la Meccanica Razionale*

COPIA DI REVISIONE

e l'Analisi (1957) e *Archivio per Storia delle Scienze Esatte* Nel 1960, stabilendo standard di rigore per entrambi i campi. I suoi contributi tecnici alla meccanica continuum—in particolare la formulazione razionale delle equazioni costitutive e la termodinamica dei materiali- erano influenti, ma il suo lavoro storico si è dimostrato altrettanto importante nel rimodellare come gli studiosi di faida compresa lo sviluppo della fisica classica. Truesdell era notoriamente eccentrico: si è rifiutato di volare, viaggiava ovunque con la nave o il treno, e sosteneva un'enorme biblioteca personale.

Saggi nella storia della Meccanica Il suo *Saggi nella storia della Meccanica* (1968) (Truesdell, 1968) e *storia della meccanica classica* (Truesdell, 1976) dissettare lo sviluppo della meccanica continuum con un'acuità critica che rivela come malintesi, errori e oscurità ritardarono la formalizzazione di elasticità, fluidità e termodinamica. Il volume raccoglie documenti sulla storia della meccanica classica, dell'elasticità, dell'idrodinamica e della termodinamica. Truesdell si avvicina ai suoi soggetti con l'occhio di uno scienziato lavorante: è interessato non solo a chi ha detto cosa quando, ma a se non persistono errori di studio. e ceppo traccia come questi concetti fondamentali – ora che sembrano elementari – – sono sorti solo gradualmente, attraverso molta confusione sulla differenza tra forza totale e forza per area unitaria, tra spostamento e tensione, tra comportamento materiale e deformazione geometrica.

Le controversie molecolari Truesdell è particolarmente illuminante sulle controversie molecolari dell'elasticità ottocentesca: i dibattiti sull'opportunità di derivare da modelli molecolari (e se così, quante costanti indipendenti un materiale potrebbe possedere) rispetto all'approccio fenomenologico che prende relazioni costitutive come fatti empirici da determinare da esperimenti. Egli mostra come l'approccio molecolare di Cauchy, mentre fecondo nella definizione del concetto di tenore di stress, ha portato a previsioni errate (come la teoria "rari-constant" che richiede solo una costante elastica per i materiali isotropici) che ha confuso il soggetto per decenni. Non esita a chiamare un argomento confuso o a identificare un errore che le generazioni successive hanno trascurato.Questa posizione critica, mentre occasionalmente aspra, serve uno scopo prezioso: ricorda ai lettori che la storia della scienza non è una marcia trionfante dall'ignoranza alla conoscenza, ma un processo di disperato e di errore in cui le buone idee sono state spesso rifiutate e le cattive idee spesso accettate. Per gli ingegneri strutturali abituati a trattare la teoria dell'elasticità come verità risolta, i saggi di Truesdell forniscono una prospettiva salutare su quanto fosse difficile quella verità.

Oltre a queste opere essenziali, l'autore non ha incontrato altri trattamenti storici di meccanica strutturale sufficientemente complete o intuitivi per meritare l'inclusione qui.Questa assenza è di per sé degno di nota: la storia dell'ingegneria strutturale - una disciplina che ha plasmato l'ambiente costruito della civiltà umana – rimane sotto osservazione da storici. Il volume attuale è un timido tentativo di affrontare questa lacuna, per portare la storia dell'ingegneria strutturale in modo palpabile ad una nuova generazione di ingegneristica

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

6.10 Donne notevoli

Sarebbe disincentivo affermare che le donne discusse in questa sezione hanno dato contributi alla meccanica sulla stessa scala di Euler, Lagrange o Cauchy. Non lo hanno fatto. Ma sarebbe altrettanto disingenuo ignorarli, per i loro risultati — assicurati contro le barriere istituzionali che hanno affrontato — erano notevoli. Se fossero stati uomini, non avrebbero potuto garantire menzione speciale; come donne in un'epoca in cui le università erano chiuse a loro, quando si registrano le società

Émilie du Châtelet (1706–1749) Gabrielle Émilie Le Tonnelier de Breteuil, marchese du Châtelet, è stata una filosofa naturale francese, matematico e fisico, nata nell'aristocrazia e ha dato un'educazione insolitamente rigorosa, divenuta tra i più importanti interpreti della fisica newtoniana sul continente. *Principia Mathematica* in francese (Newton, 1687), completata poco prima della sua morte e pubblicata postumo, rimase l'edizione francese standard per oltre un secolo e si è ancora consultata oggi. Ma du Châtelet non era solo traduttore: il suo ampio commento chiarito, esteso, e in luoghi corretti gli argomenti di Newton, incorporando sviluppi dalla matematica continentale che Newton stesso non aveva impiegato.

Oltre il *Principia*, ha contribuito alla *vis viva* polemica — il dibattito sul fatto che la quantità conservata nei processi meccanici sia stata momentanea (mv) o che ora riconosciamo come energia cinetica (mv^2) Lei *Istituzioni de Fisica* (Châtelet, 1740) sostenne per quest'ultimo, sintetizzando idee lebniziane e newtoniche in modi che anticipavano il concetto moderno di energia, che una donna potesse intervenire in modo sostanziale in una disputa che coinvolge Leibniz, Bernoullis, e l'Accademia francese parla alla natura eccezionale del suo intelletto e posizione.

Sophie Germain (1776–1831) Marie-Sophie Germain è stata un matematico francese che ha contribuito duramente alla teoria dei numeri e alla teoria dell'elasticità. Denied access to the new found École Polytechnique on the sex, ha ottenuto note di lezione attraverso i conoscenti maschi e ha presentato il suo lavoro precoce sotto lo pseudonimo "Monsieur LeBlanc." Quando Lagrange ha scoperto la vera identità del suo corrispondente mento anonimo, è diventato il suo lavoro.

Il contributo più significativo della meccanica di Germain nacque dal suo persistente impegno con il problema della placca vibrante posto dall'Accademia di Parigi nel 1809, a seguito delle drammatiche dimostrazioni di Ernst Chladni sui modelli nodali sulle piastre metalliche vibranti. L'Accademia offrì un premio per una teoria matematica che spiegava questi modelli, un problema che aveva sconfitto diversi matematici principali. Germain presentò le iscrizioni nel 1811, 1813, e infine 1816, quando le fu assegnato il premio. (Germain, 1821)Il suo approccio, pur imperfetto nella sua derivazione delle condizioni di confine, ha prodotto una deflezione di piastra differenziale parziale di quarto ordine che,

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

una volta corretta da Lagrange e poi raffinata da Kirchhoff, è diventato fondamentale per la teoria della targa:

$$D\nabla^4 w = q$$

dove D è la rigidità flessorale, w la deflezione trasversale, e q Questa equazione, chiamata in qualche momento l'equazione Germain-Lagrange in riconoscimento della sua priorità, rimane centrale all'analisi strutturale delle placche sottili. Che una donna autodidatta, che lavora in gran parte in isolamento, potrebbe dare un contributo duraturo a un problema che ha coinvolto Lagrange, Poisson e Navier è un testamento sia della sua capacità che della sua determinazione.

Emmy Noether (1882–1935) Amalie Emmy Noether era un matematico tedesco il cui lavoro ha trasformato l'algebra astratta e la fisica matematica. Anche se i suoi contributi si trovano principalmente al di fuori della meccanica strutturale propria, il suo celebre teorema che collega simmetrie alle leggi di conservazione (Noether, 1918) fornisce la base più profonda per i principi variazionali che pervadono la meccanica analitica, comprese le equazioni Euler-Lagrange incontrate (§9.3.2.2).

Il teorema di Noether afferma, in sostanza, che ogni simmetria continua di un sistema fisico corrisponde ad una quantità conservata: la simmetria di traslazione temporale produce la conservazione dell'energia; la simmetria di traslazione spaziale produce la conservazione della quantità di slancio; la simmetria rotazionale produce la conservazione del momento angolare.

Come Germain prima di lei, Noether affrontò l'esclusione istituzionale, e le fu permesso di fare lezioni a Göttingen solo sotto il nome di Hilbert, e quando i nazisti espulsero la facoltà ebraica nel 1933, emigrò negli Stati Uniti, dove morì due anni dopo. *New York Times* la descrisse come "il genio creativo più significativo finora prodotto dal momento che l'istruzione superiore delle donne ha cominciato" (Einstein, 1935). Che si accetti o meno questa valutazione, il suo teorema rimane indispensabile a chiunque cerchi di capire perché i metodi variazionali funzionano.

6.11 Analisi e contesto

6.11.1 Concorrenza, Segreteria e Progressi Scientifici

6.11.1.1 Metodi di occultamento

Il periodo più antico e moderno era un'età d'oro non solo per la scoperta scientifica, ma anche per la paranoia intellettuale. Molto prima di riviste e prestampati peer-reviewed, gli scienziati non avevano un meccanismo formale per stabilire la priorità - quindi spesso si riferivano ad una strategia insolita: pubblicare i loro risultati in codice. Questa pratica rifletteva le più profonde ansie sulla proprietà intellettuale, la reputazione professionale

COPIA DI REVISIONE

e il valore economico della conoscenza scientifica in un'epoca in cui il mecenatismo e le dispute di carriera prioritarie potrebbero fare.

Se *cifra*— un metodo di trasformazione sistematica di un messaggio per oscurare il suo contenuto o mediante *anagramma*, dove le lettere di una frase sono rimescolate in un nuovo ordine, o da enigmi latini criptici, l'obiettivo era lo stesso: piantare una bandiera senza rivelare il territorio. Questa strana pratica combinava la paura autentica del furto intellettuale con un tocco rinascimentale per i puzzle, Tabella 6.5.

Tabella 6.5: Confronto dei metodi crittografici utilizzati dai primi scienziati moderni

Metodo	Tecnica	Caratteristiche chiave	Esempio & Sicurezza
Anagramma	Risistemazione della lettera	Conta lettera fissa; semplice permutazione; nessuna chiave sistematica	- Uncino:) → *Ut tensio, sic vis*. Bernoulli: nascose la sua soluzione elastica in un anagramma alla fine del 1690 *Spettacolo del cambiamento*. Sicurezza: basso
Cifra	Sostituzione sistemica	codifica a base di regola; richiede la chiave di decrittazione; approccio algoritmico	Huygens e Leibniz: cifrai scambiati in corrispondenza catenaria. Bernoulli ha anche usato cifrai di sostituzione in note private. Sicurezza: Alto
Logogri	Puzzle multistrato	Combina diversi metodi; include enigmi e wordplay; spesso ha indizi	Bernoulli: ha posto la sfida elastica con un anagramma, un enigma, e una scadenza (festa di raccolta del 1690). Sicurezza: Variabile
Concelerio	Ritenere o accenni	Nessuna codifica formale; si basa sull'omissione; misura temporanea	Cartesio: vaghi riferimenti alle scoperte. Galileo: pubblicazione ritardata, ha mantenuto i risultati in lettere. Sicurezza: Molto basso

Questi scienziati non erano semplicemente cauti — erano competitivi, segreti e spesso profondamente diffidenti l'uno dell'altro. Il risultato era una curiosa miscela di brillantezza e sospetto: un tempo in cui le menti più grandi del mondo intaccavano le loro intuizioni in enigmi, nel caso qualcuno cercasse di rubarle.[54] Tabella 6.6.

Esempi

Gancio

)✓

[54]Oggi, i ricercatori utilizzano repository prestampati timestamp, come *X1* o arXiv—per stabilire la priorità senza indugio, assicurando sia l'apertura che l'attribuzione, che rappresenta un drammatico passaggio dal segreto codificato della cultura scientifica precoce.

COPIA DI REVISIONE

Tabella 6.6: Anagrammi, cifrai e altro ancora

Scienziato	Metodo	Testo codificato	Significato codificato
Robert Hooke § 6.6.6	Anagramma	*ceiiinosssttuv*	*Ut tensio, sic vis* ('Come estensione, quindi la forza")
	Anagramma	*abcccddeeeeefggiiiiiiiillmmmm nnnnnooprrsssttttttuuuuuuuux*	*flexile del continuum del pendio di Ut, sic stabit contiguum rigidum inversum* ('Come appende un cavo flessibile in modo, invertito, stand i pezzi tocchi di un arco')
Isaac Newton §6.6.7	Anagramma letterario	*6.3.3.3.3.4.2. 4s8t12ux*	*Dati equazionie quotcunque fluentes quantitates coinvolgitore, fluxiones invenire; et vice versa* («Veduto un'equazione che coinvolge qualsiasi numero di quantità fluenti, per trovare le oscillazioni; e viceversa»)
Galileo Galilei § 6.6.2	Anagramma lungo	*Smaismrmilmepoetaleumibu nenugttaui*	"Altissimum planetam tergeminum observavi" ('Ho osservato il pianeta più distante per avere una forma tripla')
Ren René Cartesio	Risultati negativi	Nessun cifrario, solo indizi velati	Incisa alle scoperte in ottica e geometria, successivamente pubblicata
Jakob Bernoulli § 9.3	Anagramma	*Qrzumu bapt dxqopddbbp poyl fy bbqnfqbfp lty ge mutds udthhtuhs tmixy I risultati sono stati ottenuti in modo da poter essere più efficace.*	*Portio asse applicatom inter et tangentem est ad ipsam tangentem sicut quadratum applicatoe ad constans quoddam spatium*

Dobbiamo riordinare queste 14 lettere per formare un testo latino significativo che descrive un principio scientifico.

Prima di tutto, catalogiamo le nostre lettere disponibili:

Modelli di base;

- Lettere totali: 14
- Voci: e(1), i(3), o(1), u(1) = 6 vocali
- Consonanti: c(1), n(1), s(3), t(2), v(1) = 8 consonanti
- Più frequenti: i(3), s(3), t(2)

Approccio di decrittografia sistemica:

1. Identificare parole latine comuni: Uno studioso del XVII secolo cercherà modelli latini familiari:

COPIA DI REVISIONE

Tabella 6.7: Lettere disponibili nell'anagramma di Hooke

Lettera	Conte	Lettera	Conte	Lettera	Conte
c	1	i	3	s	3
e	1	n	1	t	2
o	1	u	1	v	1

Tabella 6.8: Parole latine comuni che possiamo formare

Parola	Utilizza le lettere	Significato
ut	U, t	come / quando
E' un'altra cosa.	e, s, t	is
et	e, t	e
si		if
Si	I, I, c	così/so
in	I, n	in
Vis	v, i, s	forza/forza

2. Cercare Termini tecnici: Dato il contesto scientifico di Hooke, cerchiamo termini meccanici:

Tabella 6.9: Termini scientifici possibili da lettere disponibili

Potenziale parola	Lettere richieste	Disponibile?
tensio (tension)	t,e,n,s,i,o	✓
motus (motion)	m,o,t,u,s	X (no m)
vis (force)	v,i,s	✓

3. Provare le combinazioni di parole:

   (a) Prova 1: Iniziare con "ut"

Use: `ut` (u,t)
Remaining: `ceiiinosssv`

Si può formare «tensio»? Controllo: t(1), e(1), n(1), s(3), i(3), o(1)

Use: `tensio` (t,e,n,s,i,o)
Remaining: `ciissv`

COPIA DI REVISIONE

(b) Prova 2: Proseguendo il modello: dalle lettere rimanenti `La mia vita`, possiamo formare:

Use: `sic` (s,i,c)
Remaining: `isv`
Use: `vis` (v,i,s)
Remaining: none

(c) La soluzione emerge: Organizzare le nostre parole scoperte:

ut tensio, sic vis

Questo segue la costruzione classica latina:

- "ut...sic" = "as...so" (struttura comparativa)
- "tensio" = tensione, stretching (caso ablativo)
- "vis" = forza, forza (caso nominale)

Successivamente verifichiamo, controllando il numero di lettere

Tabella 6.10: Verifica dell'uso della lettera

Lettera	Originale	Soluzione	Abbinamento
c	1	1 (*si**c***)	✓
e	1	1 (*te*N.)	✓
i	3	3 (*Dieci**i**o*, *s**i**c*, *v**i**s*)	✓
n	1	1 (*te**n***Si'.)	✓
o	1	1 (*Estensione**o***)	✓
s	3	3 (*Dieci**s**io*, ***s**ic*, *vi**s***)	✓
t	2	2 (***t**e la sua vita*)	✓
u	1	1 (***u**t*)	✓
v	1	1 (***v**is*)	✓
Totale	**14**	**14**	✓

Infine, la frase decifrata si traduce in:

"Come tensione, così la forza"

Nota:

- **1676**: Anagramma pubblicato per stabilire la priorità
- **1678**: Soluzione rivelata in *De Potentia Restitutiva*
- **Pertinenza moderna**: Fondazione di teoria dell'elasticità e ingegneria meccanica

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Bernoulli La sfida di Jakob Bernoulli per risolvere il problema Elastica (§9.3.1)

> D'altra parte, il Consiglio ha adottato una decisione che modifica la direttiva 77/388/CEE, relativa alla protezione dei dati personali e alla protezione dei dati personali (GU L 329 del 13.12.1990, pag.
>
> Bernoulli, Jakob, 1694 «*Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus*»; Logogriph

Utilizzo della tabella 6.11, (Alassi, 2020)

Tabella 6.11: Decifrando il logografico di elastica di Bernoulli, (Alassi, 2020)

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	x	y	z
1	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	x	y
2	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
3	s	t	u	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	r

Row	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	[2]	1	2	...
Cifra	Q	r	z	u	m	u	b	a	p	t	d	x	q	o	p	d	d	b	b	p	p	o	y	l	[u]	f	y	...
Plaintext	p	o	r	t	i	o	a	x	i	s	a	p	p	l	i	c	a	t	a	m	i	n	t	e	[r]	e	7	...

Il cifrario utilizza:

- 1 fila: un turno a destra
- 2a fila: due turni a destra
- Righe 3: sei turni a destra Poi ripete il modello

Questo spiega perché "Qrzumu bapt..." decritta "l'asse del rapporto..." - sta usando la tabella di sostituzione che hai mostrato prima con un modello di ripetizione 1-2-3!

L'anagramma di Newton : Nel 1676, Isaac Newton pubblicò un anagramma crittografico per stabilire la priorità per la sua scoperta del calcolo (metodo di oscillazioni) mantenendo il metodo reale segreto, (Newton, 1960)Questa pratica era comune tra i matematici del XVII secolo per garantire la proprietà intellettuale prima della pubblicazione completa.

> `6.2.3.3.4.4.4.4.4.4.4.2.`
>
> *Dati equazionie quotcunque fluentes quantitates coinvolgitore, fluxiones invenire; et vice versa*
>
> «Consentite un'equazione che coinvolge qualsiasi numero di quantità scorrevoli, per trovare le oscillazioni; e al contrario»
>
> Newton, 1960 «*Letter to Henry Oldenburg, 24 October 1676*»

Questo è un **anagramma di frequenza** dove:

- I numeri indicano quante volte appare la lettera seguente

COPIA DI REVISIONE

- Lettere senza numeri appaiono una volta
- Tutte le lettere sono poi riordinate per formare la frase latina

Ricodifica passo per passo:

Tabella 6.12: Rompere il cifrario di Newton

Cifra	Significato	Cifra	Significato
`6a`	6 lettere a	`cc`	2 lettere c'è
`d`	1 lettera d	`a`	1 aggiuntivo
`e`	1 lettera e	`13e`	13 ulteriori e'
`ff`	2 lettera f's	`7i`	7 lettere sono
`3l`	3 lettere l'	`9n`	9 lettera n's
`4o`	4 lettera o	`4q`	4 lettere q
`rr`	2 lettere r	`4s`	4 lettere s'
`8t`	8 lettere t'	`12u`	12 lettere u'
`x`	1 lettera x		

Il numero totale di lettere disponibili per il riarrangiamento:

Tabella 6.13: Frequenza letterale completa

Lettera	Conte	Lettera	Conte	Lettera	Conte	Lettera	Conte
a	7	e	14	i	7	o	4
c	2	f	2	l	3	q	4
d	1	n	9	r	2	s	4
t	8	u	12	x	1		

Il messaggio decrittografato di Newton descrive il teorema fondamentale del calcolo :

- **Flussi** = derivati (tassi di cambiamento)
- **Fluenti** = integrali (quantità cumulata)
- Il teorema stabilisce il rapporto inverso tra differenziazione e integrazione

Nella notazione moderna, la dichiarazione di Newton corrisponde a:

$$\text{Given: } F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$
$$\text{Then: } F'(x) = f(x)$$
$$\text{Conversely: } \int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

COPIA DI REVISIONE

Questo anagramma fu la risposta di Newton alla controversia prioritaria emergente con Leibniz sull'invenzione del calcolo, e nel 1676, Newton poté poi dimostrare di aver scoperto i principi fondamentali prima della pubblicazione del 1684 di Leibniz.

Per verificare la decrittografia, si può:

1. Contare le lettere nel testo latino decrittografato
2. Confermare che corrispondono alla frequenza specificata nel codice
3. Riordinare le lettere in ordine alfabetico per ricostruire l'anagramma originale

La persistenza di questa pratica rivela quanto il progresso scientifico dipendesse dalla reputazione e dal riconoscimento individuale, piuttosto che dalle strutture istituzionali collaborative che sarebbero poi emerse.

Anche Galileo, che attraversa il suo telescopio, non poteva resistere a trasformare l'astronomia in un gioco di parole criptiche, in un mondo in cui le reputazioni venivano fatte o spezzate dalla precedenza, la scienza stava effettivamente avanzando, ma spesso sotto blocco e anagramma.

Anche Galileo, che attraversa il suo telescopio, non poteva resistere a trasformare l'astronomia in un gioco di parole criptiche, in un mondo in cui le reputazioni venivano fatte o spezzate dalla precedenza, la scienza stava effettivamente avanzando, ma spesso sotto blocco e anagramma.

6.11.1.2 Controversie e loro impatti

Come discusso in §6.11.1.1, il periodo del primo moderno è stato segnato non solo da brillantezza intellettuale, ma anche da concorrenza intensa, segretezza e sospetto. Gli scienziati spesso hanno fatto ricorso a ciferi, anagrammi e altre offuscate per garantire le loro affermazioni mentre nascondevano le loro intuizioni. Questa cultura del occultamento non era solo una strage dell'epoca, rifletteva una realtà più profonda: la scoperta scientifica è stata a lungo intricata da rivali, controversie, controversie, controversie.

La rivoluzione scientifica è stata guidata non solo dal genio individuale ma anche da reti complesse di termindexhrivalitàLa comprensione di queste relazioni personali aiuta a spiegare sia il rapido ritmo della scoperta che le dispute a volte amara che hanno accompagnato importanti scoperte.

Tabella 6.14 documenta i principali conflitti intellettuali che hanno plasmato lo sviluppo della meccanica, mentre spesso acrimonious, ha accelerato il progresso scientifico costringendo i partecipanti a sviluppare argomenti più rigorosi e spiegazioni più chiare.

Invece di vedere queste dispute come distrazioni sfortunate dal progresso scientifico, dovremmo riconoscerle come parte integrante delle dinamiche competitive che hanno portato ad un rapido progresso. L'istituzione della priorità è diventata cruciale non solo

COPIA DI REVISIONE

per la reputazione personale, ma anche per la protezione del patronato, delle posizioni accademiche e del sostegno istituzionale.

Tabella 6.14: I maggiori conflitti intellettuali nello sviluppo della Meccanica

Century	Figure coinvolte	Argomento	Natura della disputa	Risultati/Impatto
16th	Tycho Brahe vs Kepler	Modelli Celestiali	compromesso geocentrico (Tycho) contro ellisse eliocentriche (Kepler)	Le leggi di Kepler prevalsero
16th	Galileo contro Chiesa	Eliocentrismo	Galileo difese il Copernico; la Chiesa condannava l'eliocentrismo come eresia	Galileo provato dall'Inquisizione
16th	Galileo contro il Simplicio	Scienza aristotelica	Ritrazione satirica di vedute aristoteliche in *Dialogo*	conflitto profondo con la Chiesa
17th	Newton vs Hooke	Diritto di gravità	Hooke ha rivendicato la priorità; Newton ha risentito questo	Newton ha omesso Hooke in *Principia*
17th	Newton vs Leibniz	Invenzione del calcio	Scoperte indipendenti hanno portato alla disputa nazionalista e accademica	Entrambi accreditati alla fine
17th	Boyle vs Hobbes	Metodo scientifico	Sperimentalismo (Boyle) vs deduzione razionalista (Hobbes)	Pratica scientifica moderna a forma di
18th	feudo famiglia Bernoulli	Calcolo delle variazioni	Rivalori e plagio afferma tra Jakob, Johann, Daniel	Avanzi chiave stimolati
18th	Euler vs d'Alembert	Stringi vibranti	Disagrement su formulazione e interpretazione PDE	Fondamenti di analisi avanzate
19th	Poisson vs Navier	Teoria dell'elasticità	Continuum vs ipotesi molecolari nella modellazione dello stress-strain	Cauchy successivamente unificato sia con meccanica tensore
19th	Cauchy vs Poisson	Rigor in meccanica	Cauchy criticava le formulazioni di Poisson come carente rigore matematico	La teoria basata su tensori di Cauchy divenne standard
19th	Regno Unito vs scuole continentali	Meccanica	Regno Unito *F*lusso vs Continental rigore e funzioni	Dividenze culturali a lungo termine

COPIA DI REVISIONE

6.11.2 La transizione alla scienza dell'ingegneria moderna

Le figure di questo capitolo hanno orchestrato collettivamente una trasformazione fondamentale nel modo in cui gli esseri umani hanno compreso e manipolato il mondo fisico. Il passaggio dalle tradizioni artigianali medievali alla scienza dell'ingegneria moderna non si è verificato durante la notte, ma piuttosto attraverso una serie di sviluppi interconnessi che hanno attraversato tre secoli.

Tre cambiamenti chiave caratterizzano questa trasformazione:

Formalizzazione matematica: A partire dalle leggi di scalamento di Galileo e culminando con le equazioni differenziali di Navier, i praticanti hanno sempre più descritto fenomeni meccanici utilizzando relazioni matematiche piuttosto che regole empiriche. *matematizzazione* ha permesso una maggiore precisione e una maggiore generalizzazione.

Innovazione istituzionale: L'istituzione di accademie scientifiche, scuole di ingegneria e società professionali ha creato nuovi meccanismi per generare, convalidare e diffondere le conoscenze, che hanno favorito la collaborazione, intensificando anche la concorrenza, entrambi accelerati progressi scientifici.

Integrazione della Teoria e della Pratica: Le figure come Coulomb, Navier e Bernoullis hanno dimostrato che l'analisi matematica astratta potrebbe risolvere problemi di ingegneria reali.

convinse sia teorici che professionisti che la meccanica matematica non era semplicemente intellettuale soddisfacente ma praticamente preziosa.

Nel 1850, le basi erano in atto per il rapido sviluppo dell'ingegneria strutturale moderna, con la sua caratteristica combinazione di rigore matematico, validazione sperimentale e applicazione pratica.

6.11.3 La rivoluzione francese nell'educazione ingegneristica

L'emergere di una formazione di ingegneria sistematica è iniziata in Francia, dove le esigenze di un ambizioso programma di infrastrutture statali hanno creato bisogni senza precedenti per i professionisti tecnicamente formati. *Corpo dei Ponts et ChaussÉ* , stabilita nel 1716 per gestire la rete di strade, ponti e canali in espansione della Francia, che inizialmente si basa sull'apprendistato e sull'esperienza pratica, questo corpo si è evoluto in qualcosa di molto più significativo quando il governo ha fondato il *École des Ponts et Chaussées* nel 1747, la prima scuola di ingegneria civile del mondo.

Sotto la direzione di Jean-Rodolphe Perronet, *École!Ponts et Chaussées* Gli studenti hanno studiato geometria, meccanica e calcolo prima di applicare questi principi a problemi di ingegneria reali, un approccio pedagogico che parte radicalmente da apprendisti artigianali tradizionali.

Il culmine di questa innovazione francese è venuto con *École!Polytechnique*, fondata nel

COPIA DI REVISIONE

1794 durante il periodo rivoluzionario. Creato per formare ingegneri sia per il servizio militare che civile, il Politecnico ha reclutato i più distinti matematici dell'epoca come facoltà, tra cui Lagrange, Laplace, Monge e diverse figure profilate in questo capitolo. Il curriculum matematico rigoroso della scuola ha stabilito il principio che tutte le discipline ingegneristiche dovrebbero essere fondate in una conoscenza teorica sistematica piuttosto che nella tradizione empirica.

Questo modello francese si diffuse rapidamente in Europa e oltre. L'Accademia Militare degli Stati Uniti West Point, fondata nel 1802, fu trasformata sotto il sovrintendente Sylvanus Thayer (1817-1833), che aveva studiato *École!Polytechnique* durante le missioni diplomatiche in Francia. La riorganizzazione di Thayer ha introdotto la *Sistema Thayer* La prima vera scuola di ingegneria di West Point America e la creazione dell'approccio matematico che domina l'educazione tecnica americana nel corso del XIX secolo.

Le istituzioni europee hanno seguito rapidamente il seme, Tabella 6.15Il Politecnico di Karlsruhe (1825) e il Politecnico di Vienna (1815) adottarono metodi pedagogici francesi, mentre le accademie militari esistenti in Prussia, Austria e Gran Bretagna riformarono i loro curricula per sottolineare le basi matematiche.Nel 1850, l'innovazione francese aveva creato un nuovo standard internazionale per l'istruzione tecnica, che incarnava l'integrazione della teoria e della pratica che caratterizzavano la scienza dell'ingegneria moderna.

6.12 Conclusione: Dalla filosofia naturale alla scienza dell'ingegneria

I secoli XVII e XVIII segnarono una profonda trasformazione nella storia della meccanica, poiché la disciplina si evolse da un'inseguimento filosofico fondato nell'osservazione e nella geometria a una scienza rigorosamente matematica. Le figure indagate in questo capitolo—da Mozi e Archimede nell'antichità, attraverso Galileo, Newton e Bernoullis, a Cauchy, Navier, e Saint-Venant—each hanno svolto un ruolo fondamentale nella definizione di questa trasformazione classica.

Molti di questi scienziati sono stati influenzati direttamente dai loro predecessori o dai loro mentori, mentre il loro lavoro ha profondamente plasmato la prossima generazione. Alcuni, come Euler, sono stati come ponti tra epoche; altri, come Navier, hanno aiutato a entrare nell'era della scienza dell'ingegneria formalizzando conoscenze pratiche attraverso i quadri matematici.

Forse più significativamente, questo periodo ha assistito all'emergere di un nuovo tipo di praticante: l'ingegnere-scienziato che ha combinato la sofisticazione matematica con competenze pratiche. Figure come Coulomb e Navier hanno dimostrato che l'analisi matematica astratta potrebbe risolvere problemi di ingegneria reali, mentre il Bernoullis

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

e Euler hanno dimostrato che le sfide pratiche potrebbero ispirare profonde intuizioni teoriche.

La trasformazione è stata resa possibile non solo dal genio individuale ma da profondi cambiamenti istituzionali, la creazione di accademie scientifiche, la Royal Society di Londra (1660), la *Académie des Sciences* a Parigi (1666), l'Accademia di Berlino (1700), e la St. Petersburg Academy (1724)—creato nuovi meccanismi per convalidare e diffondere la conoscenza. La fondazione delle scuole di ingegneria, dalla *École des Ponts et Chaussées* (1747) al *École Polytechnique* (1794), stabilita una sistematica educazione tecnica che combinava il rigore matematico con l'applicazione pratica, queste istituzioni trasformarono l'ingegneria da un mestiere imparato attraverso l'apprendistato a una professione fondata su principi scientifici.

I testi di riferimento esaminati in questo capitolo— da Galileo *Discorsi* a Navier's *Leçon*–servato come i veicoli attraverso i quali la conoscenza tacita divenne scienza formale; questi libri fecero più che scoperte record; formarono generazioni di praticanti, stabilirono standard di rigore e crearono un linguaggio comune per il discorso di ingegneria. I grandi libri tracciano un'ascesa intellettuale dall'artigianato empirico al rigore matematico e alla padronanza computazionale: dalla purezza deduttiva della Euclide *Elementi* alle formulazioni rivoluzionarie di Newton, dall'introduzione della teoria dell'elasticità di Navier all'ingegneria all'ascesa di metodi di matrice e all'analisi degli elementi finiti.

Questi testi non sono solo documenti di storia; sono il ponteggio su cui sono costruite le discipline dell'ingegneria strutturale e dell'architettura. I problemi che risolviamo oggi–se progettando un ponte, un grattacielo, o un modello computazionale– sono plasmati dalle scoperte concettuali documentate in queste opere. Capire loro approfondisce il nostro apprezzamento della professione—non solo come una raccolta di tecniche e formule, ma come una linea di creatività.

Mentre procediamo ad esaminare gli sviluppi tecnici che sono emersi da questa fondazione storica, vale la pena ricordare che dietro ogni equazione, ogni principio, e ogni metodo è una storia umana di curiosità, persistenza e coraggio intellettuale.La meccanica strutturale che pratichiamo oggi porta l'impronta di questi individui notevoli e il periodo straordinario in cui hanno vissuto e lavorato.

6.12.1 Tavole di sintesi

Per sintetizzare gli sviluppi discussi in questo capitolo e evidenziare l'interconnessione di questi importanti contributori, le tabelle seguenti presentano sintesi concise organizzate dal tema, offrendo insieme orientamento storico e comprensione del lineage intellettuale che sorgono all'analisi strutturale moderna.

COPIA DI REVISIONE

6.12.1.1 Principali Contributori e loro influenza

Tabella 6.16 Riassumendo le forme di vita, i principali risultati e le influenze reciproche delle figure principali profilate in questo capitolo, questa visione tabulare fa riferimento all'evoluzione della meccanica strutturale attraverso l'età moderna, che mostra di continuare a plasmare l'educazione e la pratica dell'ingegneria contemporanea, dimostrando l'influenza duratura di queste figure fondazionali.

Tabella 6.16: Riassunto dei principali contributori e loro influenza nella Meccanica

Nome (Dati)	**Contributi maggiori**	**Influenzato / Influenzato da**
	Fondazioni e Filosofia	
Mozi (c. 470–391 a.C.)	Statiche primi; principi di leva; analisi di equilibrio nella tradizione cinese.	Sviluppo indipendente; riscoperto dagli studiosi occidentali
Archimedes (c. 287–212 a.C.)	Legge della leva; idrostatica; centro di gravità; rigore matematico nella meccanica.	Fondazione per tutte le successive statiche
Leonardo da Vinci (1452–1519)	Osservazione empirica; progettazione meccanica; intuizioni strutturali iniziali; ponte tra approcci medievali e moderni.	Influenzato in seguito metodi empirici; anticipato l'approccio sperimentale di Galileo
René Descartes (1596–1650)	Geometria coordinata; visione del mondo meccanistica; rifiuto della fisica aristotelica.	Influenzata nella famiglia Newton, Bernoulli
Galileo Galilei (1564–1642)	Kinematics, leggi di scala, forza dei materiali, metodi empirici.	Precursor a Newton; influenzato Hooke
Blaise Pascal (1623–1662)	Idrostatici, Legge di Pascal, metodi sperimentali di scienza.	Torricelli, Fermat; statici fluidi influenzati
	Elasticità, resistenza dei materiali, strutture	
Robert Hooke (1635–1703)	Legge di Hooke; meccanica primaverile; scienza sperimentale.	Influenzato Newton, Bernoullis
Jakob Bernoulli (1654–1705)	*Elastico* teoria; piegamento ed equilibrio di travi; teoria della probabilità.	Ispirato Euler, Daniel Bernoulli

Continuare nella pagina successiva

COPIA DI REVISIONE

Tabella 6.16: Riassunto dei principali contributori e loro influenza in Meccanica (continua)

Nome (Dati)	Contributi maggiori	Influenzato / Influenzato da
Johann Bernoulli (1667–1748)	Mastery di Leibnizian Calculus; meccanica avanzata e istruzione.	Immischiato Euler; influenzato Daniel Bernoulli
Daniel Bernoulli (1700–1782)	Principi variabili nell'elasticità; idrodinamica; teoria cinetica.	Suggerito *elastico* forma variazionale a Euler
Charles-Augustin de Coulomb (1736–1806)	Le leggi di frizione; la meccanica di torsione; statici e resistenza materiale.	Navier preceduto; influenza la scienza dell'ingegneria
Claude-Louis Navier (1785–1836)	Teoria di flessione del fascio; equazioni di elasticità e meccanica fluida.	Studente di Fourier; influenzato Saint-Venant
Siméon-Denis Poisson (1781–1840)	Introduce il rapporto di Poisson; teoria dell'elasticità espansa.	Navier debito; influenzato Saint-Venant
Adhémar J.C.B. de Saint-Venant (1797–1886)	Torsione di barre prismatiche; principio di Saint-Venant; distribuzione dello stress.	Elasticità formalizzata dopo Navier e Poisson
	Meccanica matematica	
Isaac Newton (1642–1727)	Leggi di moto; gravitazione; *Principia*; calcolo (flussi).	Rivalenza con Leibniz; influenzato tutti i meccanici classici
Gottfried Leibniz (1646–1716)	Calcolo; equazioni differenziali; *vis viva*; visione istituzionale per la scienza.	Mentored di Huygens; insegnato a Johann Bernoulli; influenzata la matematica continentale
Christiaan Huygens (1623–1695)	Teoria del pendolo; ottica d'onda; forza centripeta; precisione matematica nella meccanica.	Mentored Leibniz; influenzato Bernoullis; alternativa all'approccio newtoniano
Leonhard Euler (1707–1783)	Meccanica analitica; calcolo delle variazioni; *elastico* soluzioni; contributi matematici prolifici.	Studente di Johann Bernoulli; sviluppato idee variative di Daniel; influenzato tutti i successivi meccanici

Continuare nella pagina successiva

COPIA DI REVISIONE

Tabella 6.16: Riassunto dei principali contributori e loro influenza in Meccanica (continua)

Nome (Dati)	Contributi maggiori	Influenzato / Influenzato da
Jean le Rond d'Alembert (1717–1783)	Il principio di D'Alembert; equazioni differenziali parziali.	Lagrange influenzato; Euler contemporaneo
Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)	Meccanica lagrangiana; calcolo delle variazioni; meccanica analitica.	Metodi unificati di Newton e variazionali
Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)	Tensore di corda; elasticità rigorosa; fondazioni di meccanica continua.	Influenzato da Euler; precursore dell'elasticità moderna
George Green (1793–1841)	Teoria potenziale; identità e funzioni di Green; metodi energetici.	Ispirata fisica matematica e teoria del campo

6.12.1.2 Pubblicazioni

Tabella 6.17 elenca le principali opere citate in questo capitolo, organizzate cronologicamente dall'antichità al XX secolo, che segnano momenti cardine nel graduale *matematizzazione* di fenomeni fisici e l'emergere di ingegneria come disciplina basata sulla scienza.

Tabella 6.17: Pubblicazioni nel settore dello sviluppo della Meccanica strutturale

Anno	Autore	Titolo	Significato
		Fondazioni antiche e medievali	
5. BCE	Mozi	*Mo Jing* (Mozi, 2013)	compilation cinese su statiche, leve e vantaggio meccanico
c.300 a.C.	Euclide	*Elementi* (Euclid e Heath, 1956)	Lavoro di base in geometria e ragionamento deduttivo
3a e..	Aristotele(?)	*Mechanica* (Aristotle, 2000)	Analisi sistematica precoce delle macchine semplici e dei principi di forza
c.240 BCE	Apollonio	*Conici* (Perga, 1896)	Trattamento matematico delle sezioni coniche
3a e..	Archimede	*Opere raccolte* (Archimedes e Heath, 1897)	Fondazione di statici, idrostatici e di equilibrio

Continuare nella pagina successiva

COPIA DI REVISIONE

Tabella 6.17: Pubblicazioni sul mercato dello sviluppo della Meccanica strutturale (continua)

Anno	Autore	Titolo	Significato
1° C. BCE	Vitruvibile	*De Architectura* (Vitruvius e Morgan, 1914)	Trattamenti architettonici classici: *fermezza, utilizzazione, venustas*
1° c. CE	Eroe	*Mechanica, Pneumatica* (Alexandria, 1851)	Meccanica pratica e sistemi idraulici
11.	Al-Bīrūnī	*Kitab fi Tahqiq* (Al-Bīrūnī, 1910)	Statici, misura della densità, idrostatici
11.	Ibn al-Haytham	*Kitab al-Manazir* (Haytham, 1989)	Modellazione matematica con verifica sperimentale
1121	Al-Khāzinī	*Trattasi sulla Meccanica* (Khāzinī, 2001)	Analisi dell'equilibrio medievale e idrostatica
Rinascimento e primi moderni			
c.1452	Alberti	*De Re Aedificatoria* (Alberti, 1988)	Primo trattato architettonico rinascimentale completo
15–16 ° c.	Leonardo	*Notebooks* (Vinci, 1938 PDF)	Studi pionieristici in meccanica e resistenza dei materiali
1543	Copertino	*De Revolutionibus* (Copernicus, 1995)	Modello eliocentrico; paradigma di modellazione matematica
1570	Palladio	*I Quattro Libri* (Palladio, 1570 PDF)	Sintesi della teoria classica con la pratica della costruzione
1586	Stevin	*De Beghinselen der Weeghconst* (Stevin, 1955–1966)	Trasformazione matematica delle statiche
1620	Bacon	*Organo di Novum* (Bacon, 2000)	Fondazione per il metodo empirico
1632	Galileo	*Dialogo* (Galilei, 1632 PDF)	Dialogo sui sistemi copernici e tolemaici
1637	Cartesio	*Discours de la méthode* (Descartes, 1637b PDF)	Razionalismo cartesiano; fondazione del metodo scientifico
1638	Galileo	*Discorsi* (Galilei, 1638 PDF)	Fondazione di forza dei materiali e della cinematica
Meccanica classica e Calcolo			

Continuare nella pagina successiva

COPIA DI REVISIONE

Tabella 6.17: Pubblicazioni sul mercato dello sviluppo della Meccanica strutturale (continua)

Anno	Autore	Titolo	Significato
1673	Huygens	*Horologium Oscillatorium* (Huygens, 1986)	Dinamica, movimento rotazionale, forza centrifuga
1678	Gancio	*De Potentia Restitutiva* (Hooke, 1678)	Legge di Hooke e elasticità lineare
1687	Newton.	*Principia* (Newton, 1687)	Diritto di movimento e quadro meccanico classico
1694	J. Bernoulli	*Curvatura Laminae Elastica* (Bernoulli, Jakob, 1694)	Curvatura di travi elastiche
Fine 1600s	Leibniz	*Opere raccolte* (Leibniz, 1969)	Metodi di calcolo e variazione
1736	Euler	*Mechanica*	La meccanica newtoniana riformula analiticamente
1738	D. Bernoulli	*Idrodinamica* (Bernoulli, Daniel, 1738)	Meccanica fluida e teoria cinetica
1743	d'Alembert	*Traité de la dinamique* (d'Alembert, 1743)	Il principio di D'Alembert
1744	Euler	*Metodologia inveniendi* (Euler, 1744b)	Calcolo delle variazioni
1773	Coulomb	*Domanda di pagamento* (Coulomb, 1773b)	Metodi variabili nelle statiche strutturali
1788	Lagrange	*Analitica medica* (Lagrange, 1788)	Meccanica tramite principi variativi
Scienze dell'ingegneria di diciannovesimo secolo			
1826	Navigatore	*Leçon* (Navier, 1826)	Teoria del fascio elastico e asse neutro
1820s... 40s	Caucaso	*Opere raccolte* (Cauchy, 1841)	Stress tensore e meccanica continuum
1843	Moseley	*Principi meccanici* (Moseley, 1843)	Teoria di elasticità applicata alle strutture
1850... 60 anni	Saint-Venant	*Opere raccolte* (Saint-Venant, 1855b)	Torsione, flessione, concentrazione di stress
1858	Rankine	*Manuale della Meccanica Applicata* (Rankine, 1858)	Ponte tra teoria e pratica

Continuare nella pagina successiva

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 6.17: Pubblicazioni sul mercato dello sviluppo della Meccanica strutturale (continua)

Anno	Autore	Titolo	Significato
1864	Maxwell.	*Su figure reciproche* (Maxwell, 1864a)	Diagrammi reciproci per l'analisi della tromba
1866	Culmann	*Die Graphische Statik* (Culmann, 1866)	Statistiche grafiche formalizzate
1874	Mohr	*Lehrbuch der Mechanik* (Mohr, 1874)	Cerchio di Mohr per la trasformazione dello stress
1886	Todhunter	*Storia dell'elasticità* (Todhunter e Pearson, 1893)	Contesto storico dello sviluppo dell'elasticità
		Novecento	
1953	Timoshenko	*Storia della forza dei materiali* (Timoshenko, 1953)	Classico sondaggio storico
1955	Dugas	*Storia della Meccanica* (Dugas, 1955)	Evoluzione della meccanica da statici a teoria moderna
1968	La mia vita	*Saggi in Storia della Meccanica* (Truesdell, 1968)	Analisi critica della meccanica continuum

6.12.1.3 Istituzioni di formazione

Tabella 6.18 riassume le principali istituzioni ingegneristiche stabilite tra il 1740 e il 1850, mostrando la diffusione del modello francese di educazione tecnica sistematica in tutta Europa e oltre.

6.12.1.4 Principali controversie intellettuale

Tabella 6.19 documenta i principali conflitti intellettuali che hanno plasmato lo sviluppo della meccanica, mentre spesso acrimonious, ha accelerato il progresso scientifico costringendo i partecipanti a sviluppare argomenti più rigorosi e spiegazioni più chiare.

COPIA DI REVISIONE

Tabella 6.19: I maggiori conflitti intellettuali nello sviluppo della Meccanica

Era	Figure	Argomento	Natura della disputa	Reddito
16.	Galileo contro Chiesa	Eliocentrismo	Galileo difese il Copernico; la Chiesa condannava l'eliocentrismo	Galileo provato dall'Inquisizione
17.	Newton vs Hooke	Diritto di gravità	Hooke ha rivendicato la priorità; Newton ha risentito	Newton ha omesso Hooke in *Principia*
17.	Newton vs Leibniz	Calcolo	Scoperte indipendenti hanno portato alla disputa nazionalista	Entrambi accreditati alla fine
- 18.	Famiglia Bernoulli	Calcolo delle variazioni	Rivalori e plagio afferma tra Jakob, Johann, Daniel	Avanzi chiave stimolati
- 18.	Euler vs d'Alembert	Stringi vibranti	Disagreement sulla formulazione PDE	Fondamenti di analisi avanzate
19.	Poisson vs Navier	Teoria dell'elasticità	Continuum vs assunzioni molecolari	Cauchy unificato entrambi gli approcci
19.	Regno Unito vs Continental	Meccanica	Flussi britannici contro il rigore continentale	Dividenze culturali a lungo termine

6.12.1.5 Scadenza storica

Figura 6.21 gli scienziati hanno fatto il profilo in questo capitolo (e altri) nel contesto più ampio della storia culturale e politica, mostrando come lo sviluppo della meccanica ha parallelizzato le trasformazioni nell'arte, nella musica, nella letteratura e nella governance.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 6.15: Istituti di ingegneria e tecnica di maggiore importanza in Europa e oltre (1740-1850)

Anno	Istituzioni	Location	Tipo di	Influenza francese/Note
1741	Accademia Militare Reale	Woolwich, Gran Bretagna	Militare	Modello pre-francese; artiglieria & ingegneria
1747	École des Ponts et Chaussées	Parigi, Francia	Civile	**Modello originale** per l'ingegneria civile
1765	Bergakademie Freiberg	Sassonia	Mining	Formazione tecnica specializzata
1783	École des Mines	Parigi, Francia	Mining	Istruzione tecnica dello Stato francese
1794	École Polytechnique	Parigi, Francia	Militare/Civile	**Modello primario** per le riforme europee
1799	Bauakade	Berlino, Prussia	Architettura	adattamento tedesco dei metodi francesi
1802	U.S. Accademia Militare	West Point, Stati Uniti	Militare	Inizialmente tradizionale; in seguito influenza francese
1802	Royal Military College	Sandhurst, Gran Bretagna	Militare	Ingegneria militare britannica
1809	Istituto di ingegneri ferroviari	San Pietroburgo, Russia	Trasporti	Scuola tecnica russa
1815	k.k. Polytechnisches Institut	Vienna, Austria	Politecnico	Adozione diretta del curriculum francese
1816	Real Academia de Artillería	Segovia, Spagna	Militare	Adozione di metodi francesi in lingua spagnola
1817	West Point (riforma di livello)	West Point, Stati Uniti	Militare	**Thayer ha studiato Politecnico; modello francese completo adottato**
1822	Accademia Militare Imperiale	Rio de Janeiro, Brasile	Militare	adattamento coloniale portoghese
1825	Strumentazione di politecnici	Karlsruhe, Baden	Politecnico	**Forte influenza politecnica**
1826	University College Londra	Londra, Gran Bretagna	Università	Facoltà di ingegneria; educazione secolare
1827	Strumentazione di politecnici	Monaco di Baviera, Baviera	Politecnico	Approccio matematico francese
1828	Strumentazione di politecnici	Dresda, Sassonia	Politecnico	Curriculum tecnico sistemico
1828	Koninklijke Militaire Academie	Breda, Paesi Bassi	Militare	Scuola di ingegneria militare olandese
1828	Istituto di San Pietroburgo	San Pietroburgo, Russia	Tecnologia	Adozione russa dei metodi occidentali
1829	King's College Londra	Londra, Gran Bretagna	Università	Dipartimento di Ingegneria istituito
1832	École Centrale des Arts et Produces	Parigi, Francia	Ingegneria	Ingegneria industriale francese
1842	Academie di Koninklijke	Delft, Paesi Bassi	Ingegneria civile	Scuola di ingegneria civile olandese
1844	École Nationale Supérieure des Mines	Saint-Étienne, Francia	Mining	Scuola tecnica francese regionale
1847	Eidgenössische Poly-	Zurigo, Svizzera	Politecnico	Università tecnica svizzera

COPIA DI REVISIONE

Tradotto da IA dalla versione originale inglese, potrebbero verificarsi errori.

Tabella 6.18: Istituti di ingegneria e tecnica (1740–1850)

Anno	Istituzioni	Location	Tipo di	Note
1741	Accademia Militare Reale	Woolwich, Gran Bretagna	Militare	Modello pre-francese; artiglieria & ingegneria
1747	École des Ponts et Chaussées	Parigi, Francia	Civile	**Modello originale** per l'ingegneria civile
1765	Bergakademie Freiberg	Sassonia	Mining	Formazione tecnica specializzata
1783	École des Mines	Parigi, Francia	Mining	Istruzione tecnica dello Stato francese
1794	École Polytechnique	Parigi, Francia	Mista	**Modello primario** per le riforme europee
1799	Bauakade	Berlino, Prussia	Architettura	adattamento tedesco dei metodi francesi
1802	U.S. Accademia Militare	West Point, Stati Uniti	Militare	Inizialmente tradizionale; modello francese successivo
1815	k.k. Polytechnisches Institut	Vienna, Austria	Politecnico	Adozione diretta del curriculum francese
1817	West Point (riforma di livello)	West Point, Stati Uniti	Militare	Modello francese completo adottato
1825	Strumentazione di politecnici	Karlsruhe, Baden	Politecnico	Forte influenza politecnica
1826	University College Londra	Londra, Gran Bretagna	Università	Facoltà di ingegneria; educazione secolare
1847	ETH Zürich	Zurigo, Svizzera	Politecnico	Università tecnica svizzera

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

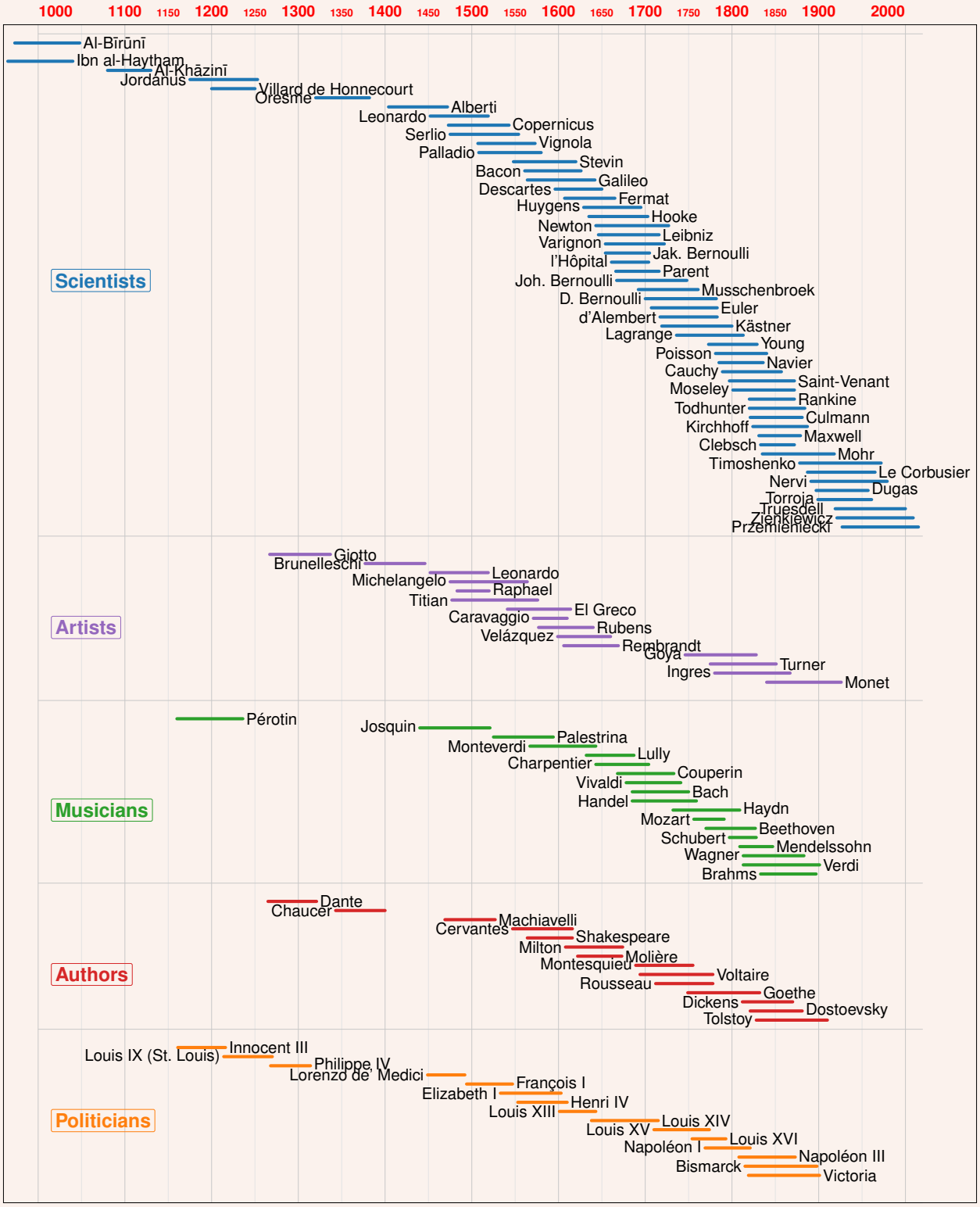


Figura 6.21: Storiche Timeline: Scienziati, Artisti, Musicisti, Autori e Politici (1000–2020). Truesdell, 1968; si noti che tutti i nomi della fila degli scienziati sono coperti in questo capitolo.

COPIA DI REVISIONE



Pannini, Interno del Pantheon

L'interno luminoso di Pannini cattura la sublime geometria: cilindro, emisfero e l'occhio della luce.

COPIA DI REVISIONE

Interludio II: Dalle intuizioni medievali alla Meccanica strutturale moderna: (1351-1879)

La storia della meccanica strutturale e dell'analisi geometrica che emerge da questi tre capitoli è un racconto affascinante e talvolta convoluto dell'evoluzione intellettuale che si estende su più di cinque secoli. Lungi da una progressione lineare delle scoperte, lo sviluppo della nostra comprensione rappresenta una complessa fondazione arazzo intrecciata da decine di menti brillanti in diversi paesi, secoli e tradizioni matematiche. Alcuni contributori costruiti apparentemente direttamente sul lavoro dei loro predecessori; altri riscoprivano i principi indipendentemente; altri continuavano i problemi.

Ciò che rende questa storia particolarmente avvincente è il modo in cui le scoperte teoriche nella matematica pura — la contemplazione di Oresme della curvatura, lo studio di Huygens sui cicloidi, lo sviluppo di Newton del calcolo — ripetutamente trovarono applicazioni inaspettate nell'ingegneria strutturale.

La maturità della meccanica strutturale come lo sappiamo oggi deve la sua esistenza non a nessun singolo genio, ma alle intuizioni accumulate di filosofi naturali, matematici, sperimentatori e ingegneri che lavorano attraverso il periodo tardo medievale alla rivoluzione industriale. Alcuni, come Leonardo e Galileo, hanno fatto osservazioni fondative che non sarebbero state pienamente comprese per secoli.

Tabella 6.20 presenta una sintesi cronologica dei principali sviluppi trattati nei capitoli 7, 8e 9, rivelando sia la natura interconnessa di queste scoperte sia la notevole creatività degli individui che li hanno resi possibili.

Tabella 6.20: Storicamente completa della Meccanica Strutturale e dell'Analisi Geometrica (1351–1879)

Data	Contributatore	Contributo	Capitolo	Significato
1351	Nicole Oresme	Concetto qualitativo della curvatura come deviazione dalla rettilineità	Ch. 8	Prima svolta concettuale verso la comprensione della curvatura

COPIA DI REVISIONE

Data	Contributatore	Contributo	Capitolo	Significato
c. 1490	Leonardo da Vinci	Esperto di cesto di appendere per la resistenza del filo	Ch. 7	Concetto di test di resistenza sistematica
c. 1500	Leonardo da Vinci	*Codice Madrid*: Distribuzione lineare delle tensioni, concetto di asse neutro	Ch. 7	Anticipa la teoria del fascio di Bernoulli da 200 anni
c. 1500	Leonardo da Vinci	schizzi di catanario (centro di studi di gravità)	Ch. 9	Osservazione precoce del problema della catena sospesa
1614	Isaac Beeckman	Osservazione dell'estensione di sforzo: " stringhe più lunghe si estendono di più"	Ch. 7	Primo riferimento indiretto al concetto di ceppo
1634	Simon Stevin	Prove catena sospesa non è parabolica	Ch. 9	Riflessioni supponendo Galileo
1638	Galileo Galilei	*Discorso*: Analisi del fascio di Cantilever; presuppone che il catenario sia parabolico	Ch. 7, Ch. 9	teoria del raggio Fondazione; ipotesi catenaria errata
1644	René Descartes	*Principia Filosofia*: Spiegazioni meccaniche di coesione materiale	Ch. 7	Trasmissione da Aristotelian a teorie meccaniche
c. 1646	Christiaan Huygens	Prove catena non parabola; scopre il cavo del ponte di sospensione è parabolico	Ch. 9	Distinta tra cavi catenari e parabolici
1657	Christiaan Huygens	Invents orologio pendolo	Ch. 8	Motivazione del problema del tautochrone
1658–1673	Christiaan Huygens	Cicloide come tautochrone; teoria sistematica evoluta/involuta	Ch. 8	Stabilisce la fondazione geometrica per curvatura
1671	Isaac Newton	*Flusso di metodo*: formule di curvatura analitica, centro di curvatura	Ch. 8	Primo trattamento matematico rigoroso della curvatura
1684	Ho fatto un bel lavoro.	Critica l'intensibile presa del raggio di Galileo	Ch. 7	Importante progresso concettuale nella teoria del fascio
1686	Ho fatto un bel lavoro.	Definisce il cerchio osculante tramite contatto a quattro punti	Ch. 8	Fondazione geometrica per curvatura
1686	Edme Mariotte	Elasticità lineare in travi; distribuzione triangolare dello stress	Ch. 7	Primo modello realistico di piegatura del fascio
1690	Jakob Bernoulli	Problemi di catenaria sfida alla comunità matematica	Ch. 9	Catalizza la cultura matematica competitiva
1690	Christiaan Huygens	Invia la soluzione catenaria crittografata	Ch. 9	Dimostra l'approccio geometrico
1690	Johann Bernoulli	Presenta la soluzione catenaria con le condizioni di pubblicazione	Ch. 9	Mostra la potenza analitica del calcolo

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Data	Contributatore	Contributo	Capitolo	Significato
1691	Ho fatto un bel lavoro.	Pubblica la soluzione catenaria; riduce i logaritmi	Ch. 9	Dimostra la supremazia del calcolo
1691	Johann Bernoulli	Raggio generale di derivazione della curvatura	Ch. 8	Approccio analitico sistemico alla curvatura
1691	Jakob Bernoulli	Poses elastica problema come sfida crittografata	Ch. 9	Avvia la prossima grande sfida matematica
1692	Jakob Bernoulli	Solves cassa elastica rettangolare	Ch. 9	Prima soluzione per problemi di curva elastica
1694	Jakob Bernoulli	*Curvatura Laminae Elastica*: Pubblica una soluzione elastica	Ch. 8, Ch. 9	Teoria Geometric Elastica con costruzione evoluta
1710	Ignace Pardies	Ulteriori analisi catenaria; vettoriale concetti di forza	Ch. 9	Avanzamenti nella teoria della catenaria
1713	Antoine Parent	Condizioni di equilibrio completo in curvatura del fascio; asse neutro	Ch. 7	Prima analisi statica completa della flessione
1724	Anonimo "LBC'	Sfida per problemi di corda moderatamente flessibili	Ch. 9	Ponti catenaria ed elastica problemi
1728	Daniel Bernoulli	Teoria unificata di linee flessibili/elastiche; modulo di piegatura	Ch. 9	Prima teoria del fascio sistematico
1728	Leonhard Euler	Carta di compensazione; soluzioni di equilibrio generale	Ch. 9	Complementi l'approccio unificato di Daniel
1729	Pieter van Musschenbroek	Diritto di inerzia sperimentale: $P \propto 1/L^2$	Ch. 9	Primo studio di accoppiamento sperimentale sistematico
1739	Pieter van Musschenbroek	*Elementa Physicae*: Test di trazione sistemica	Ch. 7	Stabilisce la metodologia sperimentale
1742	Daniel Bernoulli	Propone l'approccio di minimizzazione dell'energia a elastica	Ch. 9	Introduce principio variativo alla meccanica
1744	Leonhard Euler	*Metodologia Inveniendi*: Soluzione elastica completa mediante calcolo delle variazioni	Ch. 8, Ch. 9	Trattamento analitico definitivo
c. 1750	Euler & Daniel Bernoulli	Ravvicinamento a piccola pendenza: $\kappa \approx d^2y/dx^2$	Ch. 8	Fondazione di teoria del fascio di ingegneria
1757	Leonhard Euler	derivazione del carico di sezionamento: $P = \pi^2 EI/L^2$	Ch. 9	Prima formula di carico critica
1758	Abraham Kästner	Definizione moderna: curvatura $= d\theta/ds$	Ch. 8	Consolida il concetto di curvatura moderno
1771	Leonhard Euler	Teoria generale di stress della linea; equazioni statiche esatte	Ch. 9	Quadro teorico completo dell'asta

COPIA DI REVISIONE

Data	Contributatore	Contributo	Capitolo	Significato
1773	Charles-Augustin Coulomb	Analisi completa flessorale; $\sigma = My/I$ forma	Ch. 7	Prima teoria rigorosa dello stress piegante
1784	Charles-Augustin Coulomb	Teoria della tortura: $T = GJ/L \cdot \phi$	Ch. 7	Stabilisce analisi torsionale
1807	Thomas Young	Definisce il modulo elastico; terza regola media	Ch. 7	Presenta la proprietà materiale fondamentale
1855	Barré de Saint-Venant	Prima rigorosa derivazione elastica $\sigma = My/I$	Ch. 7	Teoria dei fasci sui solidi fondamenti teorici
1862	Alfred Clebsch	Teoria dell'elasticità sistemica	Ch. 7	Consolida il quadro matematico
1866	Saint-Venant	Annotazioni su Clebsch; sezioni piane rimangono aeroplani	Ch. 7	Completa la fondazione teorica
1879	Alberto Castigliano	Teoremi energetici per il calcolo dello spostamento	Ch. 9	Consente l'analisi sistematica delle deflezioni

Modelli di Discovery

Diversi modelli notevoli emergono da questa sintesi cronologica:

Dinastie e Reti Scientifiche I contributi multi-generazionali della famiglia Bernoulli si sviluppano per quasi due secoli, con ogni generazione che costruisce e amplia il lavoro dei loro predecessori. Allo stesso modo, i rapporti mentore-studente—Huygens formazione Leibniz, Jakob Bernoulli consigliando Johann, Johann insegnamento sia Daniele che Euler—crearono linee intellettuali che accelerarono la scoperta.

Cultura matematica competitiva Il format di sfida pubblica, pionieristico del problema catenario di Jakob Bernoulli nel 1690, ha creato un ambiente competitivo senza precedenti che ha portato rapidi progressi teorici. L'uso di soluzioni crittografate, razze di pubblicazione e dispute prioritarie rivela una comunità matematica come interessata alla reputazione e alla precedenza come con la pura conoscenza.

Teoria-Practice Sintesi Le sfide pratiche di ingegneria hanno ripetutamente portato a scoperte teoriche, mentre gli sviluppi matematici astratti hanno trovato applicazioni strutturali inattese. Il problema della catena sospesa ha catalizzato lo sviluppo della meccanica analitica; la barra piegata ha portato al calcolo variazionale; la colonna di buckling ha stabilito la teoria della stabilità.

Clustering geografico e temporaneo Alcuni periodi e regioni mostrano notevoli concentrazioni di scoperta: i Paesi Bassi nella metà del XVII secolo (Stevin, Huygens), il mondo accademico svizzero-tedesco dei primi anni del XVIII secolo (il Bernoullis, Euler), e le scuole di ingegneria francese dei secoli tardo XVIII e XIX (Coulomb, Saint-Venant).

Sviluppo di strumenti matematici La progressione della costruzione geometrica (Leonardo, Galileo) attraverso la geometria analitica (Descartes) al calcolo infinitesimale (Newton,

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Leibniz) e infine ai metodi variazionali (Euler) rivela come la sofisticazione matematica ha permesso di risolvere sempre più complessi problemi strutturali.

Questa prospettiva cronologica illumina come gli sviluppi apparentemente separati nella geometria, nell'analisi della forza e nella teoria della deformazione fossero infatti aspetti intimamente connessi di una più grande rivoluzione intellettuale che ha trasformato sia la matematica che l'ingegneria.La meccanica strutturale che conosciamo oggi è emersa non da nessuna singola scoperta, ma dalle intuizioni accumulate di decine di individui brillanti che lavorano in più secoli – ogni costruzione, estendendo, e correggendo occasionalmente il lavoro dei loro predecessori.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 7

Forza, asse neutro e stringhe flessibili

Abstract

Questo capitolo ripercorre l'evoluzione storica dell'analisi della forza strutturale e della distribuzione interna dello stress dalla fine del XV secolo fino alla metà del XIX secolo.

Un importante spostamento concettuale avvenne all'inizio del 1500 quando fu riconosciuto che gli elementi strutturali potevano fallire sotto carichi assiali o flessori, andando oltre il tradizionale focus sulla stabilità dell'arco murario, e che iniziò indagini intensive sulla distribuzione interna degli stress flessografici e sul rapporto fondamentale tra carichi applicati e capacità strutturali.

Lo sviluppo si sviluppa attraverso tre linee distinte ma interconnesse: la tradizione empirica, a partire dagli esperimenti di cesto appesi di Leonardo e prosegue attraverso l'analisi dei cantilever di Galileo, ha stabilito concetti fondamentali di test strutturali e valutazione della capacità-demand. L'approccio empirico-continuum, avanzato da Descartes, Mariotte, Parent e Coulomb, ha gradualmente sviluppato modelli più sofisticati di comportamento materiale e distribuzione della forza analitica.

Tra le tappe chiave troviamo l'analogia della leva di Galileo per travi a cantilever, il riconoscimento di Mariotte del comportamento elastico lineare e le distribuzioni triangolari di stress, l'applicazione di Parent di condizioni di equilibrio complete, il trattamento sistematico di Coulomb di piegatura e torsione, l'introduzione del concetto di modulo elastico e la derivazione definitiva dell'elasticità di Saint-Venant del rapporto fondamentale di flessione.

Significativamente, queste indagini si concentravano esclusivamente sulla forza, la capacità dei membri di resistere alle forze interne senza fallimento, rivelando però nulla sulle forme deformate che presumono le strutture caricate, che avrebbero portato alla successiva fase di sviluppo della meccanica strutturale, dove l'analisi geometrica e la previsione della deformazione sarebbero emerse come preoccupazioni altrettanto fondamentali.

7.1 Introduzione 236
7.2 Forza 236
7.2.1 Leonardo (Libera)≃ 1490) . . 236
7.2.2 Galileo (1564-1642) 237
7.2.3 Beeckman (1588-1637) 238
7.2.4 Musschenbroek (1692–1761) 239
7.3 Interno Flexural Stresses: Uno studio in tre atti 240
7.3.1 Atto I: Lignaggio empirico . 241
7.3.2 Atto II: tradizione empirica del continuo 247
7.3.3 Atto III: Lignaggio analitico . 260
7.4 Sintesi 264
7.5 Transizione 266

COPIA DI REVISIONE

7.1 Introduzione

A differenza delle tradizioni architettoniche precedenti, che si occupavano quasi esclusivamente di muratura rigida e dove il fallimento strutturale era principalmente limitato al crollo di archi e voussoirs (vedi capitolo 31), un cambiamento concettuale importante si è verificato nei primi 16th secolo. È stato poi riconosciuto – forse per la prima volta – che gli elementi strutturali potrebbero fallire anche sotto carichi assiali o flessori, che hanno dato origine a indagini intensive finalizzate alla comprensione della distribuzione interna degli stress flessografici[1]. *Galileo si e' sbagliato.*

Di conseguenza, questo capitolo affronta i primi sforzi per determinare la forza assiale e flessorale dei membri strutturali, insieme ai primi tentativi di caratterizzare la distribuzione interna degli stress flessografici.

7.2 Forza

Il concetto di *forza* La prima caratteristica meccanica di attirare l'attenzione di filosofi, architetti e scienziati, molto prima che le teorie di elasticità o deformazione fossero formalizzate, la necessità di evitare la rottura o il collasso rendeva la forza intuitiva e osservabile. I costruttori sapevano empiricamente che le colonne potevano fibbie e le travi potevano scattare, ma il motivo per cui fallivano, e in quali condizioni, rimase poco chiaro.

7.2.1 Leonardo (Libera)≃ 1490)

Per uno schizzo biografico di Leonardo, vedi Sezione 6.4.2.

Leonardo ha ideato che cosa è forse il più semplice test meccanico immaginabile—un'idea incarnata nel suo noto (anche se mai eseguito) "hanging basket' esperimento, mostrato in Fig. 7.1a. In questa configurazione, la sabbia viene gradualmente versata da una tramoggia in un cesto sospeso fino a quando il filo di sostegno si rompe. Il carico di rottura viene poi determinato pesando la sabbia accumulata. Leonardo, sempre guidato dalla curiosità empirica e da una straordinaria capacità di porre domande fondanti, ritiene che la forza di rottura variasse con la lunghezza del filo, una conclusione che la meccanica moderna ha dimostrato di essere errata.

[1] Una distribuzione che ora è nota come triangolare rispetto ad un asse neutro.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

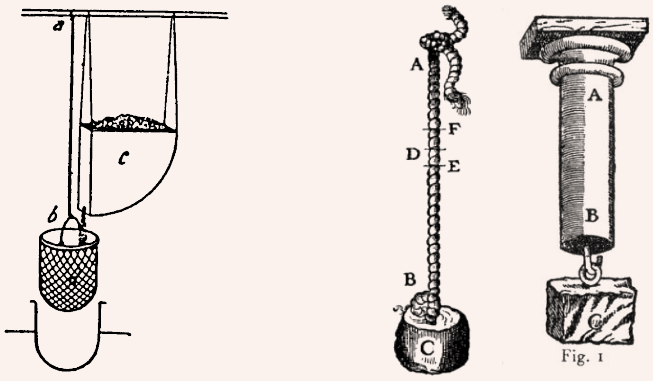
7.2.2 Galileo (1564-1642)

Per uno schizzo biografico di Galileo, vedi Sezione 6.6.2.

Galileo (Galilei, 1638) sfida l'inconcepimento di Leonardo attraverso il dialogo seguente, Fig. 7.1b:

> Salviati dice: «Temo, Simplicio ..., che ... stai facendo lo stesso errore di molti altri; cioè, se vuoi dire che una corda lunga ... non può contenere così grande un peso come una lunghezza più corta ... della stessa corda». 7.1b basta rompere la corda e chiede Simplicio dove si verificherà la rottura, e Simplicio risponde, "Let we say at D. .., perché a questo punto la corda non è abbastanza forte da sostenere, diciamo, 100 lbs."" Salviati allora, fissando la corda a F, appena sopra D, e attaccando il peso a E, indica che a D la corda è ancora soggetta allo stesso segmento di tiro, e quindi romperà il corto.
>
> Galilei, 1638

Per Truesdell, 1960, questo è il primo esempio primitivo del principio di stress della meccanica continuum, che illustra un concetto fondamentale che poi diventerà centrale all'analisi dello stress: l'idea che le forze interne dipendono dalle condizioni di carico piuttosto che dalle dimensioni geometriche.



(a) Leonardo (b) Galileo

Figura 7.1: Studi di forza assiale di Leonardo e Galileo

L'analisi strutturale, come lo sappiamo, inizia con il trattamento di Galileo del fascio di cantilever nelle discussioni contenute nei primi due "giorni" del suo *Discorso e Dimostrazioni Matematiche Rilasci a Due Nuove Scienze*[2] pubblicato nel 1638, quando Galileo aveva 74 anni.[3] Prima di procedere oltre, seguiamo le linee del suo ragionamento (Heyman, 1998b).

In un primo momento Galileo si occupava principalmente della forza di frattura dei membri strutturali, riteneva che una colonna posata a terra e supportata sia a estremità

[2]Non essere confuso con il suo precedente *Dialogo per i due sistemi mondiali principali*, pubblicato nel 1632.

[3]Cinque anni prima, era stato condannato per eresia, condannato all'ergastolo, e proibito di pubblicare ulteriori opere. *Discorso* sono stati pubblicati in Olanda, al di là della portata dell'Inquisizione, dalla famiglia Elsevier.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

che al centro. Se uno dei supporti finali venisse rimosso, egli ragionava, la colonna si rompeva a metà della lunghezza, poiché la metà di essa avrebbe effettivamente agire come un cantilever — vedi Fig. 7.2a. Poi si voltò a una diversa configurazione: una colonna verticale sospesa liberamente e caricata da un peso progressivamente crescente in basso fino a quando la rottura non si è verificata, come mostrato in Fig. 7.1b.

Ciò ha portato ad uno scambio intrigante tra i suoi personaggi, uno che, usando il linguaggio moderno, evoca concetti che ricordano i frattali: "una zona finita può contenere un numero infinito di vuoti,"" o che "un solido apparente potrebbe consistere di un numero molto grande di piccole parti che hanno forza intrinseca,' molto simile al comportamento dei cavi in acciaio bundle. Benvenuto, 1991a, poggiato sull'ipotesi che i solidi siano composti da elementi filamentosi,

> Quindi penso che in natura un solido possa essere immaginato come composto da un numero infinito di piastre o filamenti estremamente sottili, tutti uniti e legati insieme in modo che il tutto sembra essere un unico corpo solido continuo; ma in realtà la resistenza offerta da questo corpo a qualsiasi forza tendente a staccarlo o romperlo è dovuta non alla grande massa, ma alla moltitudine e all'impigliamento di questi piccoli fili.
>
> Galilei, 1632 "Dialogue Concerning the Two Chief World Systems: Ptolemaic and Copernican"

e che si deve considerare non solo il loro numero ma anche il loro grado di interrelazione, con riferimento alla Fig. 7.2b,

> Ora, se immaginiamo un filamento EF teso tra due cilindri contigui AB e CD, e consideriamo ciò che accade quando viene premuto tra di loro, o ancora quando scivola liberamente, o anche quando è ferita elicoicamente intorno ad uno di loro, osserveremo comportamenti molto diversi. Ad esempio, più fortemente si tira il filamento nel tentativo di disavvolgerlo dal cilindro, più strettamente si preme contro il cilindro.
>
> Da questo risulta che ciò che conta non è solo la forza del materiale, ma la sua disposizione. Come sappiamo che la resistenza di una corda deriva dalla moltitudine di fili di orme di cui è composto, così in legno troviamo fibre e filamenti che funzionano per lungo tempo che lo rendono più resistente alla frattura che un cavo di ormeggio della stessa lunghezza. In un cilindro di pietra o metallo, la coerenza di alcune fibre appare ancora più grande cemento, anche se a causa di una fibra di ferro.
>
> Galilei, 1632 "Dialogue Concerning the Two Chief World Systems: Ptolemaic and Copernican"

7.2.3 Beeckman (1588-1637)

Nel 1630, il filosofo e scienziato olandese Isaac Beeckman fece un'osservazione sottile ma significativa che prefigurava un concetto fondamentale della meccanica. Egli notò che quando un peso è sospeso da una corda, "il più lungo è la corda, più il peso scende..."""[4] Anche se Beeckman non formalizzava questa osservazione matematicamente, la sua osservazione costituisce la prima nota, anche se indiretta, riferimento a ciò che ora

[4] Quotazioni Drake, 1970, p. 201.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

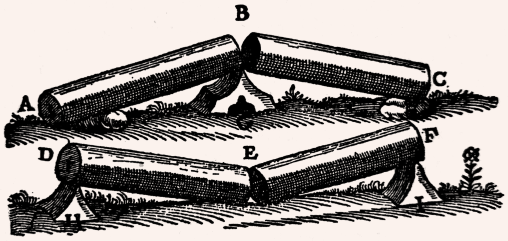
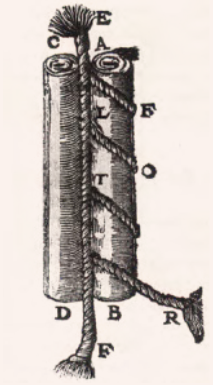


Fig. 29

(a) Rottura di un fascio



(b) La spiegazione di Galileo

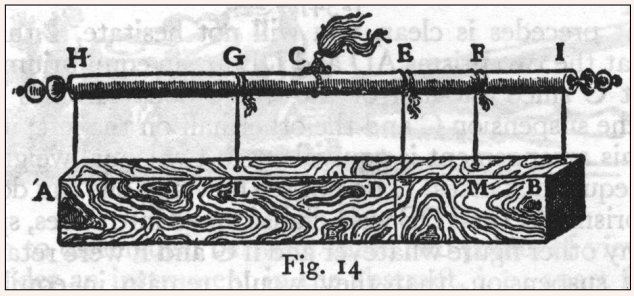


Fig. 14

(c) Legge della leva

Figura 7.2: Le vie di Galileo verso il fascio seminale a baldacchino

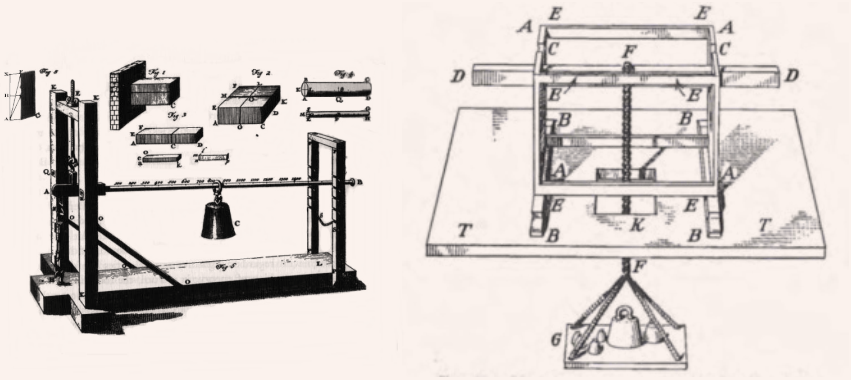
chiamiamo *sforzo*Con un collegamento intuitivo all'allungamento di una corda al carico che porta, Beeckman ha messo in evidenza una risposta misurabile di un corpo alla forza. La sua visione preda la legge di Hooke da diversi decenni e riflette la consapevolezza empirica emergente della deformazione come fenomeno meccanico degno di studio.

7.2.4 Musschenbroek (1692–1761)

Pieter van Musschenbroek fu tra i primi sperimentatori ad indagare la forza assiale dei materiali attraverso test sistematici di trazione. *Elementa Physicae* (Musschenbroek, 1739 PDF), ha descritto una serie di esperimenti in cui i pesi sono stati sospesi da fili lunghi o barre per determinare il carico massimo che potrebbero sostenere prima della rottura. 7.3aMusschenbroek ha sottolineato l'importanza di un'area trasversale uniforme e di un'omogeneità materiale nella produzione di risultati costanti, una comprensione che ha prefigurato gli standard moderni nel test dei materiali. 7.3b, e la colonna di buckling (discussa in §9.5.1.2)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Test di tensione (b) Prova di Bending

Figura 7.3: Esperimenti Musschenbroek (Musschenbroek, 1739 PDF)

7.3 Interno Flexural Stresses: Uno studio in tre atti

Le tensioni nelle strutture antiche e medievali erano basse come erano sovra-disegnate (da codici moderni). Quegli archi, cupole costruite con pietre sono stati sottoposti a stress molto più bassi delle loro capacità. Data l'assenza di linee guida scientifiche, quelle che non erano adeguatamente dimensionate semplicemente crollate (così l'importanza delle leggi di scaling Vitruvio). Semplicemente messo, il calcolo dello stress è di interesse secondario; è la forma della struttura che governa la sua stabilità.

Lo sviluppo storico della teoria flessografica rivela due percorsi in gran parte indipendenti e paralleli, Fig. 7.4, —un'empirical e francese, l'altra matematica e svizzera-tedesca—che, notevolmente, rimase sconnessa per oltre un secolo.

Il primo lignaggio, radicato in esperimento e intuito fisico, ha cominciato con **Galileo**, che poneva le prime domande sulla rottura e la scalatura del fascio. **Cartesio**, **Mariotte**, **Parità**, e culminato nel lavoro di **Coulomb**, che nel 1773 presentava una teoria di fallimento notevolmente presciente basata sulla coesione interna, che ha raggiunto la sua completa raffinatezza analitica con **Saint-Venant** a metà del XIX secolo, le cui memorie introdussero il concetto di distributive dello stress e corressero molte delle incongruenze nei modelli precedenti. Questo "passaggio francese" fu guidato in gran parte da considerazioni di rottura, coesione e validazione empirica, e rimase fondato in ragionamento geometrico e plausibilità fisica.

Al contrario, un secondo sviluppo indipendente è emerso dal lavoro di Jakob Bernoulli, che ha formulato una prototeoria di curvatura e di tensione, e ha raggiunto la sua espressione matematica formale in **Euler**La formulazione di Euler, basata sul calcolo delle variazioni e messa a terra in presupposti di elasticità lineare e di piccola deformazione, predò le opere di Coulomb e Young. Tuttavia, nonostante la produzione di una completa

COPIA DI REVISIONE

equazione differenziale della forma defletta di un fascio elastico, questo "sentiero-tedesco" era concuamente assente dalla narrativa francese.

Non vi è alcuna prova che Coulomb, Young, o anche Saint-Venant ha riconosciuto i contributi di Euler alla teoria del fascio. Questa omissione può essere attribuita a diversi fattori. In primo luogo, l'opera di Euler è stata profondamente incorporata nella matematica astratta, e scritta in latino, che può avere limitato la sua circolazione tra gli sperimentatori focalizzati sul comportamento strutturale pratico. In secondo luogo, la comunità scientifica francese del XVIII secolo si occupava principalmente di forza e rottura piuttosto che elasticità e deflezione—concerne più allineati con gli interessi di Coulomb e Mariotte che con le ipotesi idealizzate di Euler. Infine, le divisioni istituzionali e linguistiche tra tradizioni scientifiche continentali possono aver ostacolato la trasversalità delle idee, il risultato è stato un lignaggio biforcato: uno basato sulla forza e sul fallimento empirico, e l'altro sull'elasticità matematica, con la sintesi completa che si verifica solo alla fine del XIX secolo.

Questa disgiunzione colpisce, soprattutto vista la moderna concezione che il comportamento flessorale poggia quadrancamente sull'equazione introdotta da Euler. Il fatto che questa equazione è stata inizialmente ignorata dagli stessi teorici che formalizzati piegano il fascio sottolinea come i confini disciplinari e le tradizioni intellettuali possano ritardare la convergenza, anche di fronte a un'impegnativa opera precedente.

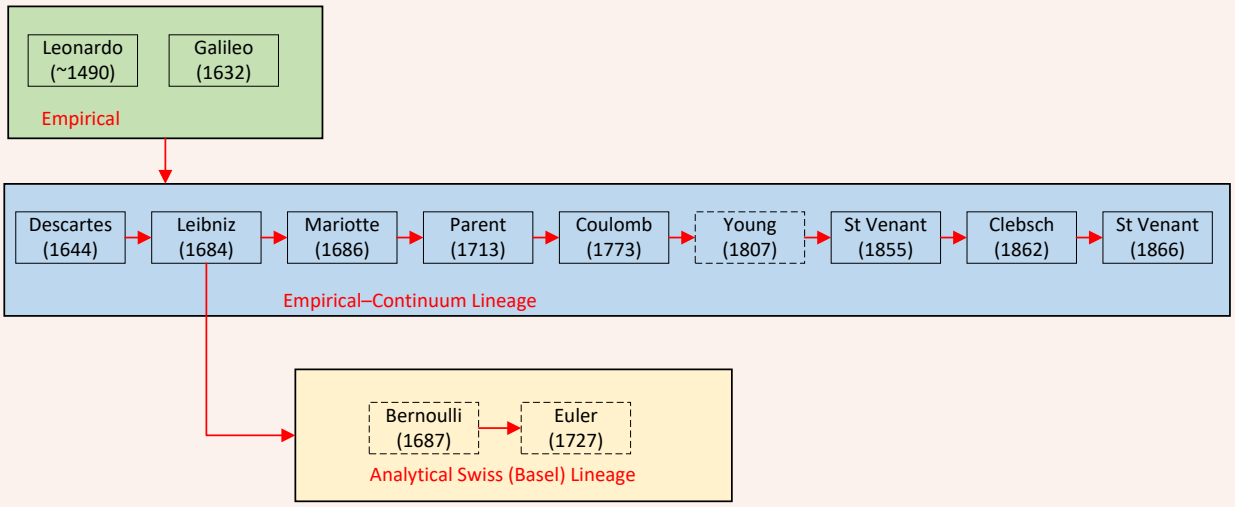


Figura 7.4: Due lineamenti paralleli a stress flessore

7.3.1 Atto I: Lignaggio empirico

Questo primo atto traccia lo sviluppo della teoria del fascio attraverso l'osservazione diretta, la sperimentazione e il ragionamento fisico. A partire dagli schizzi intuitivi di Leonardo

COPIA DI REVISIONE

e continuando attraverso l'analisi sistematica di Galileo, questa tradizione empirica ha sottolineato le preoccupazioni pratiche circa il fallimento strutturale.

7.3.1.1 Leonardo (Libera)≃ 1490)

Sebbene sia comunemente considerato che Galileo fosse il primo a risolvere il problema della flessione, le prove più recenti del cosiddetto Codice di Madrid suggeriscono che fosse stato infatti preceduto da Leonardo da Vinci (Zammattio, 1980).

Gli schizzi di Leonardo sulla flessore sono in (Da Vinci, 1490 PDF) in due folio separati.

il mio nome

A prima vista, si potrebbe pensare che gli schizzi di Leonardo, Fig. 7.5, rappresentano sia i record di misurazioni sperimentali che la teoria matematica precoce. Lungi da essa, egli pone domanda dopo domanda, con poche risposte offerte. Quando compaiono le risposte, sono tipicamente speculative e adornate con numeri rotondi convenienti in proporzione geometrica—100, 20, 4, o frazioni come 1/2, 1/4, e 1/8. Leonardo non era un sperimentale in senso moderno (come Galileo avrebbe fatto in seguito).

All'inizio, riconosceva l'importanza di comprendere i componenti fondamentali delle strutture, travi, colonne, archi e volte, come fondamento appropriato per una scienza della costruzione. 7.5, sta chiaramente contemplando la forza dei raggi[5] in relazione alla loro lunghezza, sezione trasversale, modalità di supporto e carichi applicati, considera anche la deflettorazione del fascio come funzione delle condizioni di supporto e del carico.

Le sue indagini rimasero tuttavia qualitative: gli mancavano gli strumenti matematici, il concetto di *tensione interna* e un metodo sistematico di verifica sperimentale. Nei suoi lavori non compaiono equazioni né tentativi di isolare le variabili in condizioni controllate. Il valore del contributo di Leonardo non risiede quindi nelle soluzioni, ma nel modo in cui formulò i problemi. Le domande che pose, per quanto speculative, segnarono il passaggio decisivo verso lo studio degli elementi strutturali come sistemi meccanici meritevoli di un'analisi razionale e prepararono gli sviluppi più rigorosi del secolo successivo.

Quel turno avrebbe avuto inizio in serio con Galileo, che non solo ha fatto domande simili, ma si è anche avventurato a rispondere a loro—utilizzando diagrammi di forza, argomenti di scala e esperimenti reali.

[5] La curvatura della fava appare nel recentemente scoperto *Codice Madrid*, Fig. 7.6, mentre la forza della colonna viene esplorata in Fig. 9.24a.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

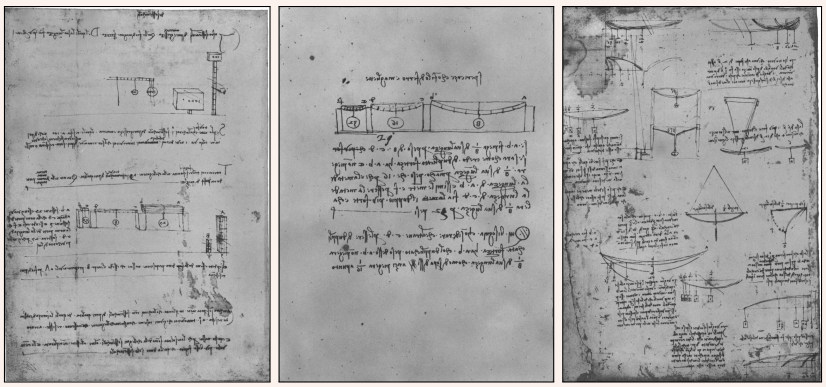


Figura 7.5: Gli schizzi di Leonardo, Folio 9v

folio 20v

Il *Codice Madrid*, scritto intorno al 1500, rimase sconosciuto per quasi 250 anni fino alla sua riscoperta nel 1965.[6] Nelle sue 197 pagine, Leonardo ha esplorato temi come meccanica, statica, geometria e costruzione di fortificazioni, che hanno un notevole valore storico, non solo perché contengono circa 15% di tutte le note sopravvissute di Leonardo, ma anche per la qualità e la rilevanza tecnica del contenuto, che si colloca tra i più significativi trattati di ingegneria della sua epoca.

Nel Folio 84, Leonardo ha analizzato la deformazione di una barra piegata e ha descritto con precisione la risposta delle sue fibre più esterne.

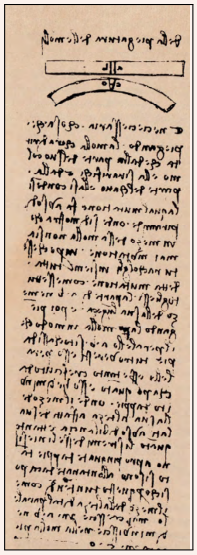
- Il lato interno della barra (di fronte al centro della curvatura) accorcia, il che significa che le fibre interne sono compresse;
- Il lato esterno allunga, indicando che le fibre esterne sono in tensione;
- La lunghezza dell'asse centrale della barra rimane invariata; e
- La quantità di allungamento o accorciamento delle fibre è proporzionale alla loro distanza da questo *asse neutro*.

In sostanza, Leonardo articolava il principio della distribuzione lineare delle ceppi in curvatura di quasi 200 anni prima di Bernoulli, una notevole intuizione che anticipa la teoria fondamentale del fascio moderno.

[6] Il *Codice Madrid* I manoscritti furono ritrovati accidentalmente nella Biblioteca Nazionale di Spagna dallo storico dell'arte Jules Piccus, il cui significato fu immediatamente riconosciuto a causa della vastità e della profondità tecnica del lavoro di Leonardo sulla meccanica e l'ingegneria.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



If a straight spring is bent, it is necessary that its convex part become thinner and its concave part, thicker. This modification is pyramidal and consequently there will never be a change in the middleof the spring. You shall discover, if you consider all of the aforementioned modifications that by taking part a b in the middle of its length and then bending the spring in a way that the two parallel lines, a and b, touch at the bottom, the distance between the parallel lines has grown as much at the top as it has diminished at the bottom. Therefore, the center of its height has become much like a balance for the sides. And the ends of those lines draw as dose at the bottom as much as they draw away at the top. From this, you will understand why the center of the height of the parallels never increases in a b nor diminishes in the bent spring at c o.

Figura 7.6: Gli schizzi di Leonardo, Folio 20v, (Zammattio, 1980)

7.3.1.2 Galileo (1632)

Galileo poi rivolge la sua attenzione al problema vecchio della leva (Fig. 7.2c), (Galilei, 1632 PDF) (secondo giorno) considera un solido uniforme sospeso da un fascio di bilanciamento da corde attaccate a entrambi i lati. C. Egli assume poi che il solido è tagliato perpendicolarmente ad un punto intermedio D, con i due segmenti risultanti temporaneamente supportati da un cavo comune a DE. Ciascuno di questi segmenti diventa così una versione più piccola del sistema originale e si bilancia sul proprio centro di gravità—punto G a sinistra e F sulla destra.

Galileo mostra inoltre che se si tratta AD sono stati sostenuti al suo punto centrale da un singolo cavo a LG, e segmento DB da un altro cavo a MF, gli altri cavi di sostegno potrebbero essere rimossi e l'equilibrio sarebbe ancora mantenuto. CG/CF è uguale a EI/EH, che a sua volta è uguale DB/AD, gli ultimi due sono proporzionali ai pesi dei segmenti.

Vale la pena notare che nel diagramma di Galileo[7], nulla si muove, né in realtà né virtualmente, il suo ragionamento è interamente statico, radicato nell'equilibrio idealizzato, piuttosto che nell'analisi cinematica o dinamica.

Galileo è finalmente pronto a affrontare il problema seminale del fascio argentato (Fig. 7.7)—una configurazione che da allora è diventata un'icona dell'applicazione della

[7]Il ragionamento di Galileo, pur espresso in termini di equilibrio e leva, anticipa il concetto moderno del *asse neutro* Anche se non considera esplicitamente lo stress interno o la distribuzione delle tensioni, le sue argomentazioni geometriche di decomposizione e simmetria riflettono un'intuizione precoce che certi piani all'interno di un corpo piegato rimangono insidiosi, un'idea che in seguito sarebbe formalizzata nella teoria del fascio.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

meccanica razionale alla teoria strutturale. Membro $ABCD$ è prismatico, e quando un



Figura 7.7: Il fascio seminale a baldacchino di Galileo

carico viene applicato al punto C, è evidente che se si verifica un fallimento, si svolgerà al punto B, dove il membro è incorporato nel muro. Il membro possiede un certo *forza assoluta*[8], vale a dire la resistenza alla trazione precedentemente discussa. Al punto di frattura, il momento di questa forza assoluta sul punto B In questa analisi, Galileo sta effettivamente valutando l'equilibrio di un momento di applicazione. *leva a manovella*[9]. In notazione moderna

$$L = \frac{Sh}{2l} \tag{7.1}$$

In Fig. 7.8a, S è la forza assoluta (cioè la trazione) del membro, che ha larghezza B e profondità d. (Se il fascio ha una sezione circolare cilindrica trasversale, Galileo nota che il braccio leva per la resistenza assoluta è il raggio R.) In termini di idee moderne di stress, Galileo ha evidentemente assunto una distribuzione uniforme Fig. 7.8b.

Galileo stesso non si avvale del valore numerico della forza assoluta S; la sua preoccupazione è principalmente di calcolo *relativo* la quantità $S/2$ è trattato semplicemente come un dato parametro fisico che entra nell'analisi, ad esempio Galileo dimostra correttamente che il rapporto tra carichi T to X necessario rompere un fascio cantilever di sezione trasversale rettangolare, quando orientato sul bordo rispetto a piatto, è pari al rapporto ca/cb (Fig. 7.8c). Poiché la sezione modulo è stata correttamente identificata nel modulo kbh^2, il fattore costante $k = 1/2$ in Eq. 7.1 Non ha effetto sul risultato, cancella nel rapporto, rafforzando il ragionamento di Galileo, pur mancando il concetto moderno di stress, cattura il corretto comportamento di scaling.[10]

[8]Galileo si riferisce alla forza intrinseca o coesa del materiale, la sua capacità di resistere alla rottura quando è sottoposta a stress interno, che si distingue dalle nozioni moderne di distribuzione dello stress o dal comportamento elastico, poiché Galileo tratta la forza come forza costante di limitazione.

[9]Il termine "cranked leva" si riferisce a un braccio leva piegato o angolare, in questo caso la geometria incorporata e proiettante del membro cantilevered, che cambia l'orientamento delle forze e delle braccia di momento.

[10]Il riconoscimento di Galileo che la forza dipende sia dalla larghezza che dalla piazza dell'altezza (bh^2)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Condizione alla frattura

(b) Distribuzione dello stress implicita

(c) Punti di forza comparativi

Figura 7.8: Le ipotesi di Galileo nel determinare la forza del fascio a trave a trave a cantilevered (a) e (b) adattate da (Heyman, 1998b)

È importante notare che Galileo non era ancora familiare con il concetto di stress; ha ancora immaginato la resistenza del fascio come derivante da filamenti interni (virtuali) che vengono staccati, come illustrato nella figura. 7.12a. Questa visione qualitativa sarebbe poi raffinata da Mariotte, che ha introdotto un'interpretazione più meccanica della tensione e della compressione delle fibre (§10.1.2) attraverso la sezione trasversale del fascio, un passo avanti verso la teoria moderna della piegatura.

Mentre può sembrare sorprendente al lettore moderno che uno scienziato della statura di Galileo potrebbe non identificare correttamente la posizione di massima stress in un raggio a baldacchino, si deve considerare il contesto storico. Nel tempo di Galileo, gli archi murari dominavano la pratica strutturale. La preoccupazione primaria di tali strutture non era insufficienza di compressione, ma piuttosto la separazione dei blocchi adiacenti a causa di forze di trazione (Chapter 31), che potrebbe portare a collassare, influenzato da ciò che sarebbe stato formalizzato nel lavoro di Leibniz (Fig. 7.10), Fig. 7.9 illustra il tipo di modalità di fallimento probabilmente previsto da Galileo, e più tardi da Mariotte, come regolato dalla separazione o rottura delle fibre inferiori sotto tensione.

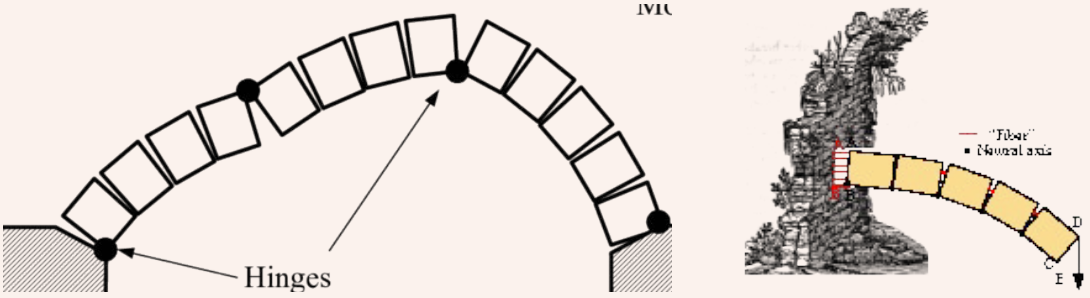
Il lavoro di Galileo è notevole in molti aspetti, non solo tra i primi ad applicare un metodo scientifico ai problemi strutturali, ma anche introducendo, per la prima volta, l'idea di un *diagramma corpo libero*. Egualmente importante, ha articolato il concetto di base di confronto strutturale *capacità di capacità* a richiesta *domanda*— un principio che rimane centrale nell'ingegneria moderna pratica.[11]

Infine, il modello di Galileo si è concentrato esclusivamente sulla tensione e sulla compressione trascurata, l'idea rivoluzionaria che esiste una linea, che ha poi definito la *asse neutro*— che lo stress è zero, non doveva ancora essere concepito; tale limitazione

è storicamente significativa, come anticipa il modulo della sezione moderna; mentre la sua formulazione mancava del concetto formale di stress o deformazione elastica, l'intuizione dimensionale riflette una comprensione precoce e notevolmente accurata delle leggi di scalamento strutturale.

[11] Mentre Galileo non usò la moderna notazione vettoriale, il suo ragionamento riguardava l'isolamento di parti di un sistema, l'identificazione di punti di forza e di reazione applicati, e la considerazione dell'equilibrio rotazionale —anticipando il moderno diagramma free-body.

COPIA DI REVISIONE



(a) Arco murario (b) Trave massonica

Figura 7.9: Sfiorazione di un "masonry beam"' rigido

avrebbe spinto la prossima generazione di ricercatori a cercare una comprensione più completa della distribuzione delle forze interne.

Il lignaggio empirico stabilito da Galileo continuerà attraverso gli investigatori che gradualmente affinano le sue intuizioni, correggendo gli errori mentre si costruisce sul suo approccio fondamentale di trattare i travi come sistemi meccanici soggetti all'analisi dell'equilibrio.

7.3.2 Atto II: tradizione empirica del continuo

Il secondo atto rappresenta una transizione critica: pur rimanendo in fase di osservazione empirica, gli investigatori cominciarono a pensare ai materiali come mezzi continui piuttosto che alle assemblaggi di filamenti discreti, aprendo nuove possibilità di comprensione delle distribuzioni interne di stress e segnando l'inizio della meccanica continuum nell'analisi strutturale.

7.3.2.1 Cartesio (1644)

Per uno schizzo biografico di Cartesio, vedere Sezione 6.6.3.

Nel 1644, Descartes pubblicò il suo *Principia Filosofia*, in cui dedicò molte pagine per indagare sia le cause fisiche che metafisiche della resistenza dei solidi, in una lettera a Mersenne (datata 1638), scrisse:

> Per quanto riguarda il signor Galileo, egli pone due cause per la coesione delle parti dei corpi: uno è il vuoto, che dice che la natura aborrisce; l'altro è una sorta di colla o materia appiccicosa che aderisce alle superfici e le lega. Ma entrambi mi sembrano completamente errati. Per il primo, non credo che la natura aborrisca un vuoto; e come per il secondo, se questa colla esistesse, dovrebbe essere più appiata.
>
> Descartes, 1897b Correspondance de René Descartes

COPIA DI REVISIONE

Gli scarti dedicarono diverse sezioni del suo lavoro per spiegare la resistenza dei solidi in termini di suo più ampio sistema filosofico, basato sull'interazione delle particelle e l'esclusione dei vuoti.[12] Un trattamento più completo del concetto di Cartesio *solidità* si trova al di là della portata di questo capitolo.

Il cuore di Cartesio *La GÉ' un peccato.étrie* (Descartes, 1637b), è stato pubblicato come appendice per *Discorsi della mÉthode* (Descartes, 1637a), ha inaugurato la geometria analitica unendo i problemi geometrici greci classici con il simbolismo algebrico. Attraverso la sua introduzione di assi coordinati, rappresentazione algebrica delle curve e tecniche di eliminazione sistematica, Descartes ha trasformato la geometria in un metodo generale per risolvere i problemi di loci e costruzione.

Descartes, tuttavia, segna un'importante figura di transizione: sebbene non abbia avuto basi sperimentali, la sua insistenza sulle spiegazioni meccaniche e la negazione delle forme aristoteliche spinse i futuri pensatori verso modelli di coesione più materiali e strutturali, e la sua visione continua della materia risulterebbe influente nel futuro sviluppo di concetti di stress e di tensione.

7.3.2.2 Leibniz (1684)

Per uno schizzo biografico di Leibniz, vedere Sezione 6.6.8.

L'interesse di Leibniz per la meccanica dei solidi fu influenzato dalla polemica contemporanea tra le teorie di Galileo e Mariotte di piegamento. Mentre Galileo aveva assunto che i travi erano perfettamente rigidi e falliti improvvisamente una volta che la loro resistenza fu superata, Mariotte introdusse intuizioni sperimentali suggerendo che la deformazione e la tensione si verificassero prima della rottura. (Leibniz, 1684).

Citazione da McDonough, 2016, Leibniz ha osservato che i risultati sperimentali, soprattutto quelli condotti da Mariotte, con cui egli corrispondeva direttamente, indicano che "un peso molto minore è sufficiente per rompere il fascio di Galileo voluto." La radice dell'errore di Galileo, Leibniz ha sostenuto (2016, p. 321), è che "ha considerato un fascio perfettamente rigido, che sarebbe stato rotto in un unico istante una volta la sua resistenza è diventata eccessiva." Al contrario, Leibniz ha mantenuto che tutti i raggi "yield in una certa misura prima che possano essere strappati, come può essere visto dal . . . esempio di uno staff che si volta prima di radersi, e l'esempio di corde, che si estendono prima che si rompono».

Anche se non ha pubblicato un trattato completo sul tema, Leibniz ha contribuito

[12]Descartes ha respinto sia l'appello di Galileo al vuoto che qualsiasi nozione di "glue" interno come metafisico, proponendo invece che la materia sia composta da particelle interbloccanti in un mezzo continuo, che egli chiamava *assemblea*In questo modo, la resistenza dei solidi deriva dall'impenetrabilità e dalla disposizione geometrica di queste particelle, sempre in contatto e in movimento. Sebbene le sue spiegazioni fossero speculative e mancate di basi empiriche, essi segnarono un importante spostamento dalle forme aristoteliche verso spiegazioni completamente meccaniche. Newton avrebbe poi affrontato e allontanato da molte ipotesi di Descartes, soprattutto la sua distanza negativa di azione.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

all'evoluzione della teoria della flessione attraverso innovazioni concettuali. Ha ritenuto che tutti i corpi lordi sono, in realtà, infinitamente divisibili. Tuttavia, la sua divisione di un fascio in fili e segmenti elementali non era destinato a riflettere la struttura fisica, ma a servire come astrazione matematica. Questa decomposizione - in fibre idealizzate (§10.1.2) e gli elementi—era chiaramente un costrutto metodologico, preludio alla moderna modellazione continuum.

Leibniz immaginava queste fibre per agire come molle che tengono insieme gli elementi del fascio[13]. In questo modello mentale, il fascio si comporta come un sistema di blocchi rigidi uniti da fibre simili a primavera lungo le loro superfici confinanti. 7.10 illustra un tale blocco $ABKC$, funzionamento come leva a due bracci con fulcro A. È collegato alla superficie adiacente DE da elementi come $1B2B$ e $1H2H$, mentre un carico viene applicato al punto C lungo il braccio AC. Mentre questo diagramma è speculativo, è coerente con le strategie generali di modellazione di Leibniz e il suo appello al ragionamento geometrico.

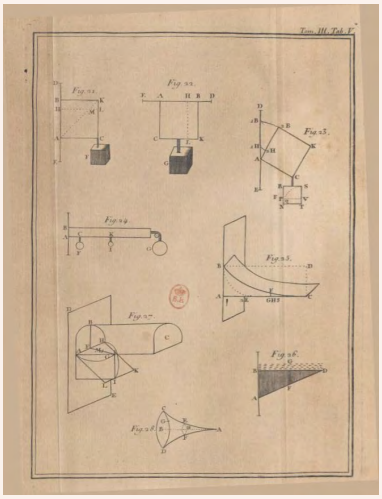


Figura 7.10: Modello con trave concettuale ispirato alla meccanica geometrica di Leibniz (Leibniz, 1684 PDF)

Anche se Leibniz ha aggiunto poco che era fondamentalmente nuovo alla meccanica dei raggi, ha posto importanti basi concettuali. Come ha detto lui stesso, avrebbe lasciato ad altri per sviluppare una teoria completa. Sembra che non avesse un interesse costante nel problema - forse perché ha visto una profondità matematica limitata in esso.

> ut proinde bis pauciss prende in considerazione tota haec materia redacta sit ad puram Geometriam, quod in physicis et meccanicais unice desideratur.

[13] A questo proposito, Leibniz potrebbe essere considerato un precursore concettuale del moderno metodo di elementi discreti (DEM), che modelli anche continui come assemblee di blocchi rigidi collegati da elementi conformi.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

> McDonough, 2016 «*Leibniz and the Foundations of Physics: The Later years*», p. 112

che può essere tradotto come: "Così, per mezzo di queste poche considerazioni, l'intero trattamento di questo soggetto è ridotto alla geometria pura—che è il principale desideratum in fisica e meccanica".[14]

Infine, in *Atto Eruditorum* (Leibniz, 1691e), giugno 1691, Leibniz nota che intende anche, tramite lettere private, affrontare *la piegatura o la curvatura di travi, di archi allungati o di qualsiasi tipo di piegatura laterale* però ha optato per ritardare la pubblicazione e conservare i dettagli per la comunicazione privata.

7.3.2.3 Mariotte (1686)

Mariotte stava indagando sulla forza dei tubi dell'acqua e ha cominciato da derivare una corretta espressione per lo spessore della parete richiesta di un tubo di diametro dato per resistere alla pressione interna. 7.11a), non riuscì a conciliare i suoi risultati con la formula di Galileo, concludendo che l'assunzione di Galileo di inestesità non era corretta e che tutti i materiali dovevano subire un certo ampliamento quando erano caricati. *Ut tensio, sic vis*.)

Mariotte ha quindi assunto che i materiali si comportano in modo lineare-elastico, mostrando un comportamento identico nella tensione e nella compressione, con una estensione massima finita prima della frattura. 7.11b) (Heyman, 1998b).

Quando Mariotte considerava la piegatura di un fascio (Fig. 7.11af), ha osservato che la somma delle forze di trazione è uguale a $S/2$— cioè solo la metà della forza di trazione assoluta del fascio — e il loro momento circa il punto D is $S/2{\times}2h/3 = Sh/3$ (vedi Fig. 7.11b). Il carico finale corrispondente viene quindi dato da:

$$L = \frac{Sh}{3l} \tag{7.2}$$

dove L è il carico esterno (denotato W nella formulazione di Galileo). Questo risultato è solo due terzi del carico definitivo previsto da Galileo (Timoshenko, 1953).

Mariotte poi procedeva più avanti. Riferire nuovamente a Fig. 7.11a-f, ha osservato che le fibre nella parte inferiore ID della sezione trasversale sono in compressione, mentre quelli nella parte superiore IA sono in tensione (Fig. 7.11c). Per calcolare il carico L necessario per superare la resistenza delle fibre di trazione, ha riutilizzato Eq. 7.2, sostituendo h con $h/2$ e raddoppiando il risultato, portando a:

$$L_1 = 2 \cdot \frac{S}{3l} \cdot \frac{h}{2} = \frac{Sh}{3l} \tag{7.3}$$

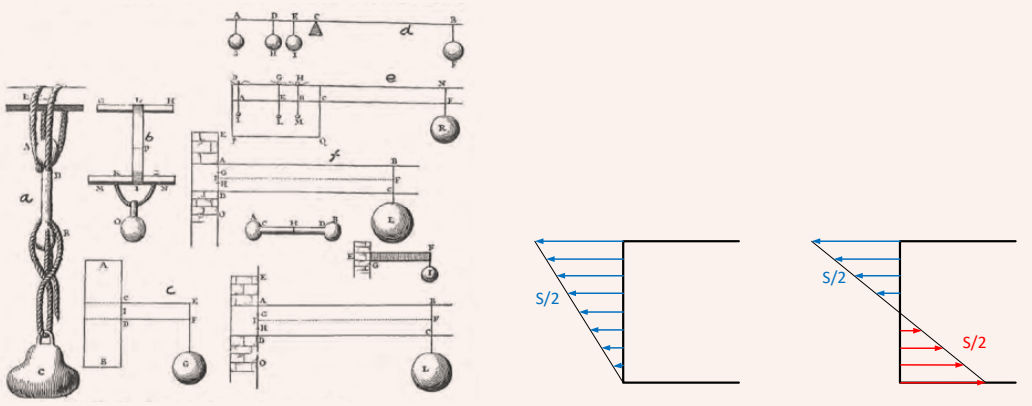
[14] L'appello di Leibniz a *geometria pura* sottolinea il precoce riconoscimento che il ragionamento geometrico potrebbe fornire potenti intuizioni sul comportamento meccanico complesso, che in seguito risulterebbe essenziale nel trattamento di problemi elastici non lineari come ad esempio il *elastico*, dove la geometria governa configurazioni di equilibrio oltre il regime lineare.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

Mentre la sua ipotesi sulla distribuzione della forza nelle fibre era essenzialmente corretta, ha fatto un errore di calcolo nella valutazione del momento delle forze di trazione rispetto al punto I. Oltre a sostituire $h/2$ per h in Eq. 7.2, avrebbe dovuto anche usare $S/2$ invece di S, che avrebbe dato il risultato corretto:

$$L_2 = 2 \cdot \frac{S}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{3l} = \frac{Sh}{6l} \tag{7.4}$$

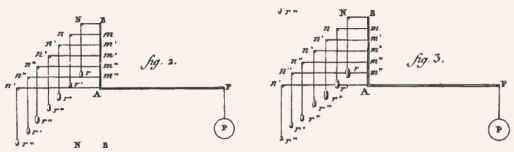
Questa supervisione ha impedito a Mariotte di arrivare alla formula corretta per la capacità di carico finale dei raggi (Timoshenko, 1953 PDF). L'errore è stato successivamente corretto da Saint-Venant.



(a) I test di Mariotte (b) L'originale di Mariotte (c) Mariotte è rivisto

Figura 7.11: Modelli di Mariotte (Heyman, 1998b PDF)

Ancora una volta, il concetto di stress non era ancora formalizzato, e il ragionamento di Mariotte rimase strettamente legato all'idea precedente di Galileo di filamenti carichi e paralleli che resiste alla tensione all'interno del fascio. Girard, 1798 nei primi 19th secolo: Fig. 7.12a ricostruisce il modello di Galileo di una leva piegata composta da fibre di trazione, mentre Fig. 7.12b Nonostante Albert Girard abbia lavorato molto più tardi, i suoi diagrammi aiutano a visualizzare il pensiero transitorio che precedeva il pieno sviluppo della teoria dell'elasticità basata sullo stress.



(a) Galileo (b) Mariotte

Figura 7.12: L'illustrazione di Galileo e dei modelli di Mariotte

COPIA DI REVISIONE

7.3.2.4 Parent (1713)

Piuttosto che mettere arbitrariamente l'asse neutro in una posizione "likely"', il genitore ha riconosciuto la necessità di soddisfare tutte le condizioni di equilibrio, (Parent, 1713). In meccanica corporea rigida bidimensionale, devono essere soddisfatte tre equazioni di equilibrio.Paente ha osservato che Galileo effettivamente soddisfatto solo un—quando il momento del carico applicato circa il fulcro Galileo aveva apparentemente trascurato le restanti due condizioni: la somma delle forze orizzontali e verticali.

Il genitore, al contrario, scrive esplicitamente l'equazione orizzontale dell'equilibrio, assume una distribuzione lineare generale della tensione (Fig. 7.13), che consente un modulo elastico ineguagliabile in tensione e compressione, nella sua formulazione, la frattura è regolata dallo stress trasile in fibra AT, anche se lo stress della compressione in fibra BX Indipendentemente dalle loro magnitudine, Parent afferma che la resistenza totale del triangolo di compressione CBX deve essere uguale a quello del triangolo trasile CAT, con le forze corrispondenti che agiscono attraverso i punti I e D, rispettivamente.

Il genitore è stato anche il primo a riconoscere la possibilità di forze che agiscono tangenziale alla sezione trasversale, a cui ora ci riferiamo come stress della cesoia.

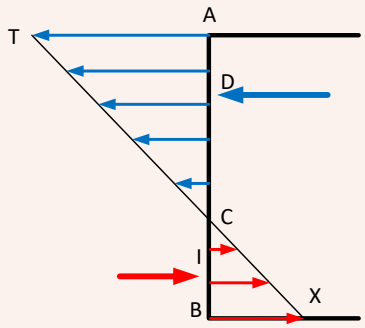


Figura 7.13: Modello del genitore

7.3.2.5 Coulomb (1773)

Charles-Augustin Coulomb ha fatto progressi significativi nell'analisi della flessione. (Coulomb, 1773b)(*Esecuzione delle domandeègles de massimizza e minimis à chi è in grado dièmes de statique relatifs à l'architettura*), ha esaminato la distribuzione della forza interna in travi a cantilever e correttamente applicato tutte e tre le equazioni di equilibrio di forza in due direzioni e equilibrio di momento su un punto. Ha considerato il fascio per consistere di fibre obbedendo alla legge di Hooke, e per il caso di comportamento elastico fino a guasto, ha stimato il momento di resistenza interna come proporzionale alla massima tensione e al quadrato della profondità della sezione, cioè, $\sigma h^2/6$.

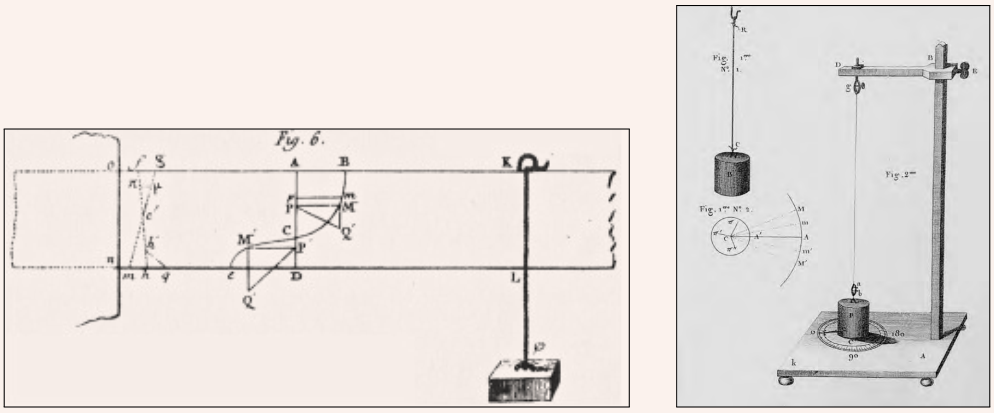
COPIA DI REVISIONE

Flessibili

Mentre questa equazione non è stata esplicitamente scritta in questa forma da Coulomb, i suoi ragionamenti e calcoli sono equivalenti in sostanza. Egli ha chiaramente identificato i ruoli di tensione e compressione, ha discusso lo spostamento dell'asse neutro, e si distingue tra comportamento di materiali elastici e rigidi. Tuttavia, non ha derivato la distribuzione di stress lineare completa o giustificato la posizione dell'asse neutro dalla teoria dell'elasticità.

Disegnamo la sua derivazione (basata su (Timoshenko, 1953 PDF))

Coulomb, 1773c PDF inizia l'analisi della curvatura esaminando la distribuzione interna dello stress in un fascio rettangolare di cantilever, come illustrato nella figura. 7.14a e discussi in Timoshenko, 1953 PDF. Il suo ragionamento può essere suddiviso in diversi passaggi chiave:



(a) equilibrio di cantilever caricato

(b) Dispositivo per la prova di vibrazioni torsionale

Figura 7.14: Gli esperimenti di Coulomb (Coulomb, 1773c PDF)

1. **Distribuzione di stringa attraverso una sezione** Coulomb considera una sezione trasversale AD vicino all'estremità fissa del cantilever. Egli osserva che la parte superiore (AC) sarà in tensione, mentre la parte inferiore è in compressione, decompone le forze di fibra in componenti orizzontali e verticali (rappresentate dai vettori PQ e $P'Q$), e applica le tre equazioni di statiche. Da questo, conclude:

    - Il **somma delle forze orizzontali** (rappresentato dalla curva BCe lungo la sezione) deve essere zero.
    - Il **somma delle forze verticali** deve essere uguale al carico applicato ϕ.
    - Il **somma di momenti** delle forze interne rispetto al punto C deve essere uguale al momento del carico applicato ϕ circa lo stesso asse.

COPIA DI REVISIONE

Egli nota che queste equazioni tengono indipendentemente dal comportamento costitutivo del materiale.

2. **Perfettamente elastico caso** Supponendo che il fascio sia fatto di un materiale perfettamente elastico obbedendo alla legge di Hooke, Coulomb esamina un elemento differenziale $ofhn$ al punto fisso. Sotto il carico applicato ϕ, il piano inizialmente orizzontale fh ruota a una nuova posizione gm. La distribuzione dello stress all'interno della sezione trasversale è illustrata da due aree triangolari: fge in tensione e emh in compressione, ognuna delle quali rappresenta tensione e stress attraverso le fibre.

   Lasciamo perdere. σ essere il massimo stress traslabile al punto f. Coulomb calcola quindi il momento di resistenza interno (per un raggio di larghezza unitaria) come segue:

$$M_{\text{int}} = 2 \cdot \sigma \cdot \frac{fe}{2} \cdot \frac{2}{3} fe = \frac{2}{3}\sigma(fe)^2 = \sigma\frac{(fh)^2}{6} \tag{7.5}$$

   Introdurre la resistenza alla trazione finale del materiale S, e denotare il braccio del carico l e la profondità totale della sezione per h, deriva il carico finale come:

$$\phi = \frac{Sh}{6l} \tag{7.6}$$

   Conclude che le forze di taglio possono essere trascurate, in particolare quando il braccio leva l è molto più grande della profondità h.

3. **Caso di compressione assolutamente rigido** Coulomb considera un materiale come la pietra, ritenuto rigido nella compressione e senza prolungamento nella tensione. h, e assume una distribuzione uniforme dello stress traslabile. Il momento interno risultante porta ad un carico massimo stimato:

$$\phi = \frac{Sh}{3l} \tag{7.7}$$

   Tuttavia, confrontando questa previsione teorica ai dati sperimentali, Coulomb scopre che il carico è sopravvalutato, proponendo quindi che il punto di rotazione reale deve essere leggermente superiore a quello attuale. h, a un certo punto h', in modo che una piccola porzione hh' della sezione porta forza di compressione.

4. **Significato e Contesto** L'analisi di Coulomb applica correttamente l'equilibrio statico alle forze interne e mostra una chiara comprensione concettuale della distribuzione dello stress all'interno di un membro di piegatura.[15]

[15] I diagrammi di stress e le stime di Coulomb sono concettualmente allineati con la teoria moderna del fascio, ma differiscono nell'esecuzione. $M = \int_A \sigma y \, dA$ con $\sigma = E\kappa y$, che porta a $M = EI\kappa$dove E è il modulo di Young, κ è la curvatura, e I Il Coulomb bypassa questa derivazione basata sul calcolo ragionando geometricamente sui blocchi di stress triangolari, e il suo trattamento di frattura utilizza lo stress finale e assume la piena ridistribuzione della plastica, un concetto formalizzato molto più tardi nella teoria dell'analisi limite e della progettazione della plastica.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Interessante, Coulomb non fa riferimento ai precedenti contributi di Parent, suggerendo che non ne fosse a conoscenza. chi nel suo trattato *La Costruzione La plus avantageuse des digues* raccomanda che i travi in legno siano trattati come elastici e in pietra come rigidi.

> Coulomb ha usato equazioni di statici correttamente nell'analisi delle forze interne e aveva idee chiare riguardo alla distribuzione di queste forze sulla sezione trasversale del fascio.
>
> Timoshenko, 1953 History of Strength of Materials

> La teoria di Coulomb... pur dando in generale risultati corretti, era difettosa in senso di principio, poiché la distribuzione dello stress non era ottenuta da una conoscenza della varietà, ma era postulata su basi empiriche.
>
> Todhunter e Pearson, 1893 A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials

Era *fino alla metà del XIX secolo* che Saint-Venant formalizzava queste idee attraverso la teoria dell'elasticità, derivando la relazione familiare $\sigma = My/I$ e che stabiliva che l'asse neutro coincide con il centroide; così, mentre Coulomb anticipava gli elementi essenziali della teoria del fascio, rimase per Saint-Venant a collocarlo su una rigorosa base teorica.

Torsione

Nel 1784 Coulomb produsse la sua memoria sulla torsione, determinando la rigidità torsionale di un filo osservando le oscillazioni torsionali di un cilindro metallico sospeso da esso[16] Fig. 7.14b. Coulomb ha assunto che la coppia di resistenza di un filo contorto è proporzionale all'angolo di torsione ϕ, e ha rilevato che il periodo di oscillazione indipendente dall'angolo di torsione (se non troppo grande), e ha così concluso che c'è una proporzionalità la coppia e l'angolo di torsione. Ha poi eseguito esperimenti con fili dello stesso materiale, ma lunghezze e diametri diversi, e ha stabilito che la coppia M sarebbe stata

$$M = \frac{\mu d^4}{l}\phi \tag{7.8}$$

dove l è la lunghezza, d diametro e μ una costante materiale. Nella notazione moderna, questo è

$$T = \frac{GJ}{L}\phi \tag{7.9}$$

dove T, G, J e ϕ sono la coppia esterna, il modulo di taglio, il momento polare dell'inerzia (J=$\pi d^4/32$ per sezione circolare), e l'angolo di torsione rispettivamente. L'espressione corrispondente per lo stress massimo della torsione è $\tau = TR/J$.

[16] Va notato che da allora Coulomb aveva già sviluppato l'equilibrio torsionale e lo ha usato per molti dei suoi studi quantitativi in elettricità e magnetismo, così come viscosità

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Coulomb aveva effettivamente derivato questa equazione, anche se l'analogia con l'equazione controparte per le tensioni flessografiche è semplice, non è chiaro wo è stato il primo uso.

$$\tau = \frac{TR}{J} \Rightarrow \sigma = \frac{My}{I} \tag{7.10}$$

Tuttavia, l'equazione dello stress flessorale è comunemente attribuita a Coulomb.

7.3.2.6 Giovane (1807)

Vedi §6.6.6 per una discussione sui contributi di Young nella tradizione iniziata da Hooke.

Interludio: Modulus

Nel 1807 Young introdusse il concetto di un modulo elastico per caratterizzare la rigidità di un materiale:

> Possiamo esprimere l'elasticità di qualsiasi sostanza per il peso di una determinata colonna della stessa sostanza, che può essere denominata il modulo della sua elasticità, e di cui il peso è tale, che qualsiasi aggiunta a esso aumenterebbe nella stessa proporzione del peso aggiunto accorcierebbe, per la sua pressione, una parte della sostanza di uguale diametro.
>
> Young, 1807 A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts

La sua definizione è un po' convoluta e differisce leggermente dall'interpretazione moderna. Il "peso del modulo" di Young ha unità di forza piuttosto che stress, e corrisponde al moderno modulo elastico (E) moltiplicato per l'area trasversale (A). Vale la pena notare che questa relazione era già stata articolata in precedenza da Euler.

Inoltre, Young si riferisce a quello che ora chiamiamo "shear" come *detrusione* e afferma che:

> Tuttavia, può essere dedotto dalle proprietà delle sostanze torsiche, che la forza varia nel semplice rapporto della distanza delle particelle dalla loro posizione naturale, e deve anche essere semplicemente proporzionale alla magnitudine della superficie a cui è applicato.
>
> Young, 1807 A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts

Qui, Young descrive correttamente la deformazione della tosapa e il modulo della taglio, e conclude anche (accuratamente) che la forza della taglio di un membro è proporzionale alla sua area trasversale.

Terza regola media; 1807

Ora torniamo al problema del *asse neutro*, dopo un breve interludio sull'introduzione del modulo elastico di Young. Young ha anche studiato la posizione dell'asse neutro in

COPIA DI REVISIONE

curvatura, estendendo il precedente lavoro di Parent e Coulomb per includere gli effetti della forza assiale, come illustrato nella figura. 7.15.

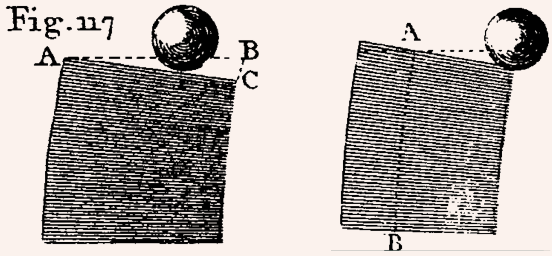


Figura 7.15: La terza regola media di Young

320. Teorema. Quando una forza viene applicata ad una colonna elastica, di forma prismatica rettangolare, in direzione parallela all'asse, le parti più vicine alla linea di direzione della forza esercitano una resistenza in direzione opposta; quelle particelle, che sono a una distanza al di là dell'asse, pari a una terza proporzionale alla profondità e dodici volte la distanza della linea di direzione della forza, rimangono nel loro stato naturale; e le parti al di là di esse agiscono nella direzione della forza.

Young, 1807 A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts

Teorema di Giovane 320, può essere letto come una dichiarazione geometrica di proporzionalità che regola l'estensione longitudinale e la compressione di una colonna elastica eccentricamente carica. F agire parallelamente all'asse di una colonna prismatica rettangolare ma a uno spostamento trasversale a dall'asse centroidale, la colonna con profondità b in direzione di flessione. Young sostiene che la tensione longitudinale varia proporzionalmente con la distanza y dalla linea di azione della forza, in modo che le fibre più vicine a quella estensione di esperienza di linea in un senso, mentre le fibre sufficientemente distanti estensione di esperienza nel senso opposto. y_0 dall'asse, per il quale l'estensione scompare, cioè. $\varepsilon(y_0) = 0$. Young determina questa posizione non risolvendo un'equazione di stress algebrico, ma con ragionamento proporzionale, affermando che y_0 è il terzo proporzionale al b e $12a$ Cosi' che $b : y_0 = y_0 : 12a$. In termini moderni questo implica $y_0 \propto \sqrt{ab}$, esprimendo l'equilibrio tra forza assiale e piegatura indotta dall'eccentricità; il teorema codifica quindi la proporzionalità lineare $\varepsilon(y) \propto y$ attraverso la profondità della sezione, anticipa il concetto di un asse neutro spostato, e illustra come Young ha inquadrato il comportamento elastico attraverso rapporti di lunghezze e forze piuttosto che attraverso equazioni costitutive esplicite.

Qui, Young descrive come la posizione dell'asse neutro varia con l'eccentricità del carico e introduce ciò che sarebbe diventato il celebre *terza regola media* in progettazione ingegneristica.

Va notato, tuttavia, che l'esposizione di Young non era sempre chiara, il materiale rilevante

COPIA DI REVISIONE

appariva come parte di una vasta raccolta di 58 conferenze che coprono diversi argomenti scientifici.

> L'intera sezione mi sembra molto oscura come la maggior parte degli scritti del suo autore distinto, tra i suoi vasti obiettivi in scienze e lingue che di esprimersi chiaramente nel dialetto ordinario dei matematici non era purtroppo incluso. Le formule della sezione erano probabilmente principalmente nuove al momento della loro apparizione, ma erano poco probabile per ottenere l'attenzione in conseguenza della forma poco attraente in cui sono stati presentati.
>
> Todhunter e Pearson, 1893 A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials

Per l'epoca di Young, il lignaggio empirico-continuum aveva stabilito la maggior parte dei concetti essenziali della teoria del fascio — il comportamento elastico, le distribuzioni dello stress, l'analisi dell'equilibrio e persino la comprensione rudimentale delle proprietà materiali.

7.3.2.7 Saint-Venant (1855)

Saint-Venant tornò all'analisi del fascio piegando oltre 80 anni dopo il lavoro pionieristico di Coulomb. Mentre Coulomb aveva già proposto una formulazione staticamente corretta che coinvolge stress di trazione e compressione, e anche comprese espressioni simili al momento moderno - relazione di stress - non ha derivato la distribuzione di stress dalla teoria dell'elasticità. *prima derivazione rigorosa* del campo di stress in curvatura utilizzando il quadro completo di elasticità lineare.

Nella sua memoria seminale (Saint-Venant, 1855c), Saint-Venant ha assunto piccole deformazioni, un materiale elastico omogeneo ed isotropico obbedendo alla legge di Hooke, e un perfetto legame tra le fibre.

- Il *asse neutro*—il locus di zero stress longitudinale — attraversa il centroide della sezione trasversale del fascio.
- Lo stress normale sotto curvatura pura varia linearmente con la distanza y da questo asse, che porta all'espressione fondamentale:

$$\sigma = \frac{M\,y}{I}$$

Questo ha segnato un punto di svolta: per la prima volta, la formula di stress di flessione è stata dedotta dal comportamento e dalla compatibilità del materiale interno, non solo dall'equilibrio. Il risultato ha sostituito ragionamento empirico o a base di fibra con un approccio elastico del continuum e geometria, comportamento materiale e distribuzione interna dello stress.

COPIA DI REVISIONE

7.3.2.8 Clebsch (1862)

Alfred Clebsch (1833-1872) ha svolto un ruolo fondamentale nello sviluppo matematico formale della teoria dell'elasticità. (Clebsch, 1862b) (*Theorie der Elasticität marcire Köperiodo*), pubblicato postumo nel 1862 e successivamente tradotto in francese nel 1866 con annotazioni dettagliate di Saint-Venant, offrì una presentazione sistematica e rigorosa delle equazioni di elasticità di governo.

Mentre Clebsch non ha introdotto il concetto del *asse neutro*, il suo trattato consolida e amplia i risultati di Saint-Venant, fornendo una derivazione più generale e formale di stress e di distribuzioni di ceppo in corpi elastici. In particolare, il suo trattamento di flessione include le condizioni in cui sorge una superficie neutra—definito come locus dei punti nel corpo deformato che sperimenta zero sforzo longitudinale.

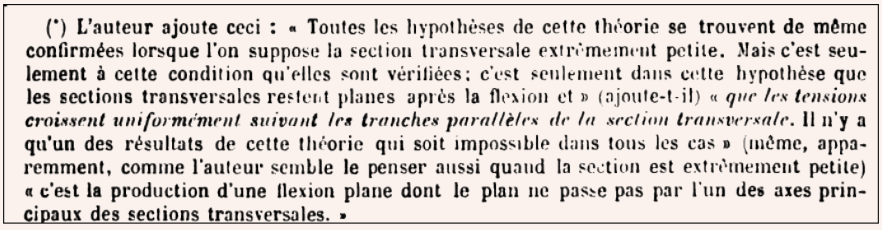
Il lavoro di Clebsch ha segnato un'importante transizione verso le formulazioni moderne, introducendo non solo chiare espressioni differenziali di equilibrio e compatibilità, ma anche anticipando i trattamenti successivi basati su tensori di elasticità.

> Clebsch ... si esprime con notevole chiarezza e precisione ... l'esposizione è in tutto in conformità rigorosa con i metodi dell'analisi superiore.
>
> Todhunter e Pearson, 1893 A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials

7.3.2.9 Saint-Venant (1866)

Saint-Venant chiarito ulteriormente e ampliato il suo lavoro precedente attraverso annotazioni nella traduzione francese del trattato di Clebsch sull'elasticità (Clebsch, 1866). Basato su precedenti intuizioni di Galileo, Mariotte e Parent, ha corretto l'ipotesi sbagliata di Mariotte che le sezioni piane rimangano a pianta esclusivamente basate sulla geometria.

Figura 7.16 mostra un estratto dalle annotazioni di Saint-Venant, dove afferma (*les tensions croissent uniformément suivant les tranches parallèles de la sezione trasversale*) che le sollecitazioni aumentano uniformemente attraverso le fette parallele della sezione trasversale.



(*) L'auteur ajoute ceci : « Toutes les hypothèses de cette théorie se trouvent de même confirmées lorsque l'on suppose la section transversale extrêmement petite. Mais c'est seulement à cette condition qu'elles sont vérifiées; c'est seulement dans cette hypothèse que les sections transversales restent planes après la flexion et » (ajoute-t-il) « *que les tensions croissent uniformément suivant les tranches parallèles de la section transversale.* Il n'y a qu'un des résultats de cette théorie qui soit impossible dans tous les cas » (même, apparemment, comme l'auteur semble le penser aussi quand la section est extrêmement petite) « c'est la production d'une flexion plane dont le plan ne passe pas par l'un des axes principaux des sections transversales. »

Figura 7.16: Estratto dalle annotazioni di Saint-Venant in (Clebsch, 1862b)

Queste precisazioni hanno contribuito a colmare il divario storico tra le prime formulazioni statiche e una teoria del fascio analitico.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

> Schegge Saint-Venant con l'analisi più semplice che le sezioni trasversali non mantengono il loro contorno originale... né la loro planarità originale... la linea neutrale è il diametro dell'ellisse dell'inerzia coniugata alla traccia del piano di carico sulla sezione trasversale.
>
> Todhunter e Pearson, 1893 A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials

I due contributi di Saint-Venant, la sua memoria del 1855 e le annotazioni del 1866, sono rimasti fondativi, e hanno stabilito non solo il teorema dell'asse neutro, ma anche il nucleo della teoria del fascio elastico come oggi praticato.

7.3.3 Atto III: Lignaggio analitico

Il terzo atto rappresenta un approccio fondamentalmente diverso alla comprensione del comportamento del fascio. Piuttosto che cominciare con i modi di guasto osservati o le distribuzioni di stress empirico, il lignaggio analitico ha iniziato con i principi matematici - in particolare, l'ipotesi che i materiali obbediscano alla legge di Hooke - e ha usato il calcolo per ricavare le equazioni che governano la deformazione elastica.

7.3.3.1 Jakob Bernoulli (1687)

Nel 1687, Bernoulli fu professore di matematica, ma il suo interesse per risolvere problemi fisici Alcuni hanno sostenuto che Bernoulli era in definitiva un bravo meccanico perché un artigiano ha cercato il suo consiglio per la migliore scelta di forma per il fascio di una scala. La conversazione con questo artigiano ha costituito la base dello studio di Bernoulli sulle strutture elastiche[17] (Alassi, 2020).

Questa conversazione fu riportata a Leibniz in una lettera nel dicembre 1687.

Questa lettera conteneva critiche sull'articolo di Leibniz sulla resistenza dei solidi e ha riferito che

> Un artigiano locale che mostra sorprendente destrezza nella fabbricazione di cordigliere. Ho facilmente percepito che la peculiarità di quest'uomo consisteva meno nella creazione delle divisioni del giogo che in modo da regolare il suo spessore che non poteva facilmente essere piegato dal suo peso e da un carico attaccato.
>
> Bernoulli, Jakob, 1855 «*Letter to G. W. Leibniz, December 1687*»

Questa conversazione con l'artigiano ha ricordato Bernoulli dell'articolo di Leibniz sulla resistenza dei solidi. Bernoulli ha osservato che poteva "ridurre a calcolare quale spessore sarebbe richiesto in un determinato giogo per garantire la giusta forza, o inversamente, per un dato spessore e lunghezza, determinare quale carico potrebbe sostenere— tutto questo basato su un unico esperimento condotto su una bacchetta dello stesso materiale.'

[17] Ancora oggi, alcuni sostengono che il buon (strutturale) ingegneria mechanician, si deve fare affidamento su studi esperimtali solidi. Forse vero, ma il converso più così.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

Inducendo alcuni risultati sperimentali di Leibniz, Bernoulli ha proposto che l'allungamento dipende da due fattori chiave: la forza di allungamento applicata e la natura del materiale. Questa lettera segna il primo caso conosciuto in cui le proprietà materiali sono state esplicitamente considerate nello studio dell'elasticità. Bernoulli è stato quindi il primo a riconoscere che la deformazione dovrebbe essere descritta per quanto riguarda la forza per area unitaria, ciò che ora chiamiamo stress, alla relativa tensione per lunghezza del materiale.

Sebbene Bernoulli avesse evidentemente osservato la deformazione plastica dipendente dal tempo delle corde di gomma, un materiale altamente sensibile all'umidità e alla temperatura, non era in grado di interpretare correttamente questo comportamento (Alassi, 2020).

Il valore di questa lettera non è solo nel suo contenuto storico ma anche nel suo carattere sociologico unico, ma ha svolto un ruolo fondamentale nello sviluppo della teoria delle strutture elastiche, fornendo a Bernoulli precisi e basati sull'esperienza. Bernoulli ha riconosciuto questo contributo facendo riferimento all'opinione dell'artigiano nella sua corrispondenza con una figura di spicco come Leibniz. Nonostante le convenzioni del tempo, l'artigiano non era invisibile a Bernoulli. Poi, come spesso ancora oggi, gli artigiani (o i tecnici, in termini moderni) sono stati considerati come semplici esecutori di istruzioni, incaricati di fare strumenti o di eseguire esperimenti, ma raramente accreditati come contributori alla conoscenza teorica. Lo ha impegnato in una discussione seria dell'articolo di Leibniz e ha dato una riflessione ponderata alle sue obiezioni.

7.3.3.2 Euler (1727)

Euler, ancora una volta, assunse una distribuzione lineare di tensioni assiali attraverso la sezione trasversale e li integrava per ottenere il momento di flessione totale, unendo così il metodo di Leibniz (che trascurava completamente la flessione) con quello di Jakob Bernoulli, che non aveva correttamente tenuto conto della variazione della tensione.

Il suo approccio, adattato da Truesdell, 1960 , è descritto di seguito.

Mentre Euler stava considerando la vibrazione di un anello circolare (Fig. 7.17a), la flessione di un segmento infinitesimale dell'anello può essere analizzata allo stesso modo di quella di un fascio diritto. 7.17b, il raggio di curvatura Ca is R, e lo spessore Aa is c. A destra, l'anello viene mostrato in una configurazione deformata. L'elemento ab, di lunghezza d'arco ds, è selezionato per abbinare la sua controparte non deformata. Il nuovo raggio di curvatura ac is r, e l'incremento risultante in lunghezza della fibra AB, a causa di ceppo assiale, è dato da Euler, 1862 :

$$d\tau = E\varepsilon = \frac{R-r}{Rr}\, c\, ds = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) c\, ds \tag{7.11}$$

COPIA DI REVISIONE

Questa espressione riguarda la forza assiale per area unitaria $E\varepsilon$ alla differenza di curvatura e forma la base del trattamento di Euler di flessore in anelli elastici.

In Fig. 7.17cc, Euler descrive la materia dell'anello come composta da fili elastici. Le particelle unite $AaeE$ e $BbeE$ sono considerati come filamenti elastici come più sono allungati, maggiore è la forza che esercitano per contrarre. $Ee\varepsilon$ è riempito di tali filamenti, disposti trasversalmente; cercano di portare i lati Ee e εe Secondo Euler, la coesione del materiale dell'anello dipende dalla forza prodotta da questi fili interni.

Euler assume quindi questa coesione per essere tale che una serie di fili di lunghezza iniziale $FG = f$, esteso a $FJ = g$, può sostenere un peso totale P (vedi Fig. 7.17cc). Cioè, il rapporto

$$\frac{P}{fg}$$

dà la forza per area unitaria di sezione trasversale e per estensione unità — un'espressione che corrisponde a quello che ora è chiamato il modulo di Young, e che fa la sua prima apparizione qui.

Nelle teorie precedenti, questo è stato considerato implicitamente:

- Nel lavoro di Galileo e quello di Leibniz, Varignon, e Parente, una costante materiale K Queste teorie consideravano lo stress, ma trascuravano la varietà associata.
- Nella teoria di Hooke, come raffinata da autori successivi, una forza elastica è stata definita come la forza necessaria per produrre una determinata varietà in un dato corpo — ma ancora una volta, senza una costante materiale esplicita.

La novità è che Euler's $P/(fg)$ È stata introdotta come costante materiale elastico, cioè come stress medio (non una forza) che produce una specifica tensione elastica (non rottura), anche se l'esistenza di una tale costante è stata chiaramente implicita dal lavoro precedente di Jakob Bernoulli, non è stata introdotta esplicitamente da lui. La sua chiara apparizione nel trattamento di Euler è dovuta al fatto che questo è il primo problema che richiede un tale modulo per una soluzione corretta.

Per quantificare la distribuzione di queste forze, Euler continua (vedi ancora Fig. 7.17cc): lasciare $eM = x$e $Mm = dx$; poi la piccola regione $MmnN$ è riempito con filamenti di lunghezza $\frac{x}{c}d\tau$. La forza F_x tirante Mn verso verso Nn is:

$$F_x = \frac{P}{fg} \cdot dx \cdot \frac{x}{c}d\tau \tag{7.12}$$

Pertanto, il peso F che deve essere applicato E e ε per produrre lo stesso momento circa il punto e as F_x agire a distanza x is:

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

$$F = \frac{x}{c} F_x = \frac{P}{f g c^2} x^2 dx\, d\tau \tag{7.13}$$

Integrazione da $x = 0$ to $x = c$ dà la forza totale (o "peso") da applicare E:

$$\text{weight} = \frac{Pc}{3fg} d\tau = \frac{1}{3} \cdot \frac{Pc^2}{fg} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) ds \tag{7.14}$$

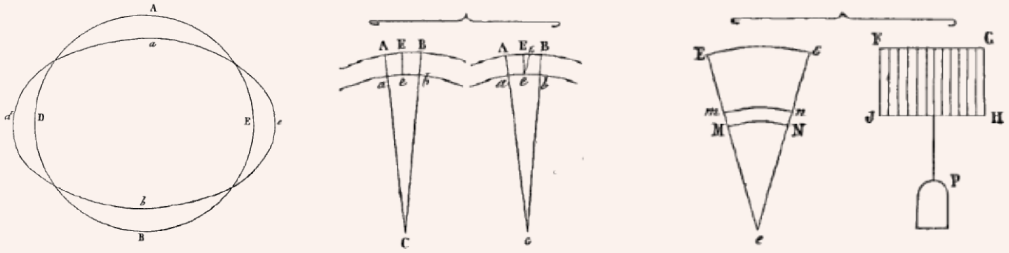
Lo riconosciamo ora come il momento classico – relazione di curvatura:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{B} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right), \qquad \mathfrak{B} = EI \tag{7.15}$$

Ecco, E è il modulo di Young e I è il secondo momento di area. Per una sezione trasversale rettangolare, e supponendo che l'asse neutro si trova al bordo del concavo, $I = \frac{1}{3} AD^2$, corrispondente formulazione di Euler in Fig. 7.17c-c. Questa rappresenta la prima derivazione rigorosa di quello che oggi chiamiamo il rapporto di curvatura del momento, un'equazione fondamentale della meccanica strutturale.

Quindi, l'introduzione di Euler *modulo di estensione* che caratterizza un materiale elastico piuttosto che un particolare esemplare è oggi chiamato da Young (Truesdell, 1968 PDF).

In documenti successivi Euler, 1760 e Euler, 1780, Euler ha presentato queste idee più compattamente e le ha spiegato meglio; in particolare, ha definito esplicitamente il modulo di estensione, che era stato utilizzato con solo osservazione di passaggio nel suo lavoro precedente.



(a) Anello oscillante indagato da Euler

(b) Diagramma per la prima derivazione della legge di Bernoulli dalla legge di Hooke (1727)

(c) La prima definizione del modulo di estensione di Euler ('Young's modulus")(1727)

Figura 7.17: Euler, Bernoulli e Hooke si uniscono (Euler, 1862 PDF)

Il risultato di Euler era notevole: lavorare esclusivamente da principi matematici e dalla legge di Hooke, ha derivato l'equazione fondamentale del fascio piegando decenni prima che la tradizione empirica raggiungesse conclusioni simili.

COPIA DI REVISIONE

7.4 Sintesi

Lo sviluppo storico della teoria flessografica rivela il complesso e non lineare percorso attraverso il quale emerge la comprensione scientifica. Tre distinte linee di linea: le osservazioni empiriche di Leonardo, la tradizione francese della sperimentazione pratica e l'approccio matematico svizzero-tedesco – hanno contribuito a comprendere le idee essenziali che avrebbero infine sintetizzato la teoria moderna del fascio.

Forse la maggior parte colpisce è quanto tempo le tradizioni analitiche ed empiriche sono rimaste separate, nonostante si occupino delle stesse domande fondamentali. La rigorosa derivazione matematica di Euler del rapporto di moment-curvature nel 1727 anticipato da decenni molti risultati che la tradizione pratica ha lottato per raggiungere. Eppure sono stati gli investigatori empiri—Galileo, Mariotte, Coulomb, e Saint-Venant—che hanno fatto le domande che praticano gli ingegneri

L'eventuale convergenza di questi approcci nel lavoro di Saint-Venant dimostra come il progresso scientifico spesso richiede sia il rigore matematico che la comprensione pratica. L'analisi strutturale moderna beneficia di questa sintesi: usiamo il rapporto matematico di Euler sulla curvatura del momento all'interno del quadro di distribuzione dello stress di Saint-Venant per risolvere i problemi pratici che prima sono stati posti da Galileo.

Tabella 7.1 riassume lo sviluppo principale del concetto di asse neutro.

Tabella 7.1: sviluppi importanti nella distribuzione di forza e stress interno

Anno	Figura / Evento	Lavoro / Titolo	Sintesi
c. 1490	Leonardo da Vinci	Esperimento del cesto di appendere	Carico incredibile di un cesto sospeso fino alla rottura del filo; sonda empirica precoce di resistenza assiale, anche se (in modo non corretto) dipendenza prevista dalla lunghezza.
1630	Isaac Beeckman	Nota sull'estensione della stringa (Drake, 1970)	Osservazioni stringhe più lunghe si estendono più sotto carico — un precoce, riconoscimento indiretto *sforzo*.
1638	Galileo Galilei	*Discorso e Dimostrazioni Matematiche Rilasci a Due Nuove Scienze* (Galilei, 1638)	La forza del cantilever tramite analogia delle leve; introduce il pensiero-demand capacità e il ragionamento proto free-body; manca il concetto di stress moderno.
c. 1500	Leonardo da Vinci	*Codice Madrid*, fol. 9v (Da Vinci, 1490 ; Zammattio, 1980)	Studi di Sketch che pongono domande sulla resistenza del fascio contro la lunghezza, la sezione, i supporti e il caricamento; il problema di inquadratura senza equazioni.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Anno	Figura / Evento	Lavoro / Titolo	Sintesi
c. 1500	Leonardo da Vinci	*Codice Madrid*, fol. 20v (Zammattio, 1980)	Anticipa la distribuzione lineare delle tensioni e l'asse neutro in curvatura secoli prima di Bernoulli.
1644	René Descartes	*Principia Filosofia*; lettere a Mersenne (Descartes, 1897b)	Si sposta dal "glue"/vacuum alle spiegazioni meccaniche del continuum della coesione; ponte concettuale verso lo stress/pensare astraneo.
1686	Edme Mariotte	Esperimenti di frusta e rottura (Heyman, 1998b; Timoshenko, 1953)	Adotta elasticità lineare, idea triangolare di stress ma pone NA a fibra estrema; deriva $L = Sh/(3l)$; quasi-miss per il risultato del momento corretto.
1687	Jakob Bernoulli	Lettera sul comportamento elastico (Bernoulli, Jakob, 1855; Alassi, 2020)	Presenta la relazione di forza-allungamento come proprietà materiale; semi stress-strain pensiero da problemi informati sull'artigianato.
1691	Gottfried W. Leibniz	*Atto Eruditorum* avviso (Leibniz, 1691e; McDonough, 2016)	Critica il raggio inestensibile di Galileo; la decomposizione concettuale della fibra/spring come modello matematico.
1713	Antoine Parent	Asse neutro ed equilibrio (Parent, 1713)	Forze di pieno equilibrio (forza e momento); riconosce i risultati trasili/compressivi devono bilanciare e annota le azioni tangenziali (serbante).
1739	P. van Musschenbroek	*Elementa Physicae* (Musschenbroek, 1739)	Test di trazione sistemica (e piegatura); resistenze comparative; metodologia di prova precoce e schedatura dei dati.
1773	C.-A. Coulomb	Memoria di flessione (Coulomb, 1773b; Timoshenko, 1953)	Si basa su tutte equazioni statiche; blocchi di stress triangolari; carico finale $\phi = Sh/(6l)$ per la custodia elastica; chiara concezione della forza interna.
1784	C.-A. Coulomb	Memoria di torsione (equilibrio di rezione)	Istituzioni $T = \frac{GJ}{L}\phi$ comportamento; periodo indipendente dall'ampiezza (piccoli angoli); analogie alla flessione chiarita.
1807	Thomas Young	*Lezioni sulla Filosofia Naturale* (Young, 1807)	Definisce (verbalmente) il modulo elastico; discute la shear ("detrusione"); la regola di metà-terzo con carico assiale eccentrico.
1855	Barré de Saint-Venant	Memoria in attesa (Saint-Venant, 1855c)	Prima derivazione elastica rigorosa: NA attraverso centroide; $\sigma = My/I$ dalla compatibilità + la legge di Hooke, non solo l'equilibrio.
1862	Alfred Clebsch	*Theorie der Elasticität* (Clebsch, 1862b)	Sistematizza l'elasticità con analisi più elevate; consolida la flessione con superficie neutra come zero locus longitudinale.

COPIA DI REVISIONE

Anno	Figura / Evento	Lavoro / Titolo	Sintesi
1866	Saint-Venant (annot.)	Francese ed. di Clebsch (Clebsch, 1866)	Clarifica le sezioni piane derivano dall'elasticità; le sollecitazioni variano uniformemente tra le fette; stringe il legame tra geometria e stress.
1727	Leonhard Euler	Anello elastico/scursione del fascio (Euler, 1862)	Derivazione momento-curvatura $M = EI\kappa$; introduce modulo esplicito come costante materiale all'interno della teoria della piegatura.
1760; 1780	Leonhard Euler	Seguito su movimento elastico/formulae (Euler, 1760; Euler, 1780)	Raffina il concetto di modulus e le formulazioni elastiche; compatta le derivazioni precedenti e generalizza le applicazioni.

7.5 Transizione

Le indagini di questo capitolo hanno stabilito i principi fondamentali che disciplinano la forza dei membri strutturali e la distribuzione interna degli stress sotto carico. Dalle osservazioni empiriche di Leonardo attraverso la rigorosa teoria dell'elasticità di Saint-Venant, abbiamo tracciato come ingegneri e matematici hanno sviluppato la nostra comprensione del perché le travi falliscono e dove si verificano le tensioni massime.

Tuttavia, queste analisi basate sulla forza hanno condiviso una limitazione comune: si sono concentrate sulla capacità dei membri di resistere alle forze interne senza affrontare la questione altrettanto importante di come questi membri deformano sotto carico. Sapendo che un raggio può portare un certo momento non ci dice nulla sulla sua forma deflettata – così questa forma governa tutto dalla stabilità strutturale alla facilità di servizio.

La transizione dall'analisi della forza all'analisi della deformazione richiedeva una rivoluzione matematica, dove i ricercatori precedenti potevano contare su equilibrio statico e proprietà materiali, lo studio delle forme deflette richiedeva sofisticati concetti geometrici che stavano solo cominciando ad emergere nel XVII secolo. La catena sospesa e la barra elastica piegata — le "Grand Challenges" che esamineremo nel capitolo 9 — non potevano essere risolte senza una profonda comprensione della curvatura, dei tangenti, delle curve osculanti e dei cerchi.

Il prossimo capitolo 8 tracciarà questa rivoluzione geometrica, dalle intuizioni qualitative di Nicole Oresme sulla curvatura attraverso il rigoroso quadro matematico stabilito da Newton, Bernoullis e Euler. Questi sviluppi non erano mere astratti matematici – hanno fornito gli strumenti essenziali che renderebbero possibile la soluzione di problemi strutturali fondamentali che avevano sfidato i filosofi naturali per secoli.

Comprendere questa fondazione geometrica è fondamentale per apprezzare il raggiun-

COPIA DI REVISIONE

gimento intellettuale rappresentato dalle soluzioni catenarie ed elastica.Quando Jakob Bernoulli pose la sua sfida elastica nel 1691, o quando la comunità matematica si opponeva alla forma della catena sospesa, non si limitava a risolvere interessanti enigmi, che stavano creando il quadro teorico che avrebbe sostenuto tutti gli sviluppi successivi nella meccanica strutturale, dalla formula di indurimento di Euler all'analisi di grande difesa moderna.

È a questa rivoluzione geometrica – gli strumenti matematici che ha creato e le scoperte concettuali che ha permesso – che ora ci giriamo nel capitolo 8. Questi sviluppi stabiliranno la fase del capitolo 9, dove geometrie e meccanica convergono nelle soluzioni eleganti ad alcuni dei problemi più belli e praticamente importanti della storia dell'ingegneria strutturale.



Caravaggio, Davide con il capo di Golia (1609-1610)

La fisica della fisica, il braccio del lancio di David, e la conseguenza di superare i limiti materiali, la forza conquistando la massa.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 8

Geometria differenziale delle curve

Abstract

Questo capitolo ripercorre le basi geometriche della curvatura dalle loro prime radici concettuali alle loro formulazioni mature settecentesche. Il materiale qui presentato è la preparazione essenziale per il prossimo capitolo (§9.3), dove il problema elastico sarà trattato in dettaglio, senza comprendere la curvatura come sviluppato qui, la formulazione meccanica delle curve elastiche non può essere adeguatamente afferrata.

Prima dell'avvento del calcolo differenziale, la curvatura è stata compresa attraverso costruzioni geometriche tangibili—tangenti, normali, cerchi osculanti ed evoluti—applicate a curve fisiche come cicloidi, catenari e barre piegate.

A partire dalle nozioni qualitative di Nicole Oresme del XIV secolo, la narrazione segue le raffinazioni progressive di Huygens, Newton, Leibniz e Bernoullis, culminando nella formulazione variazionale di Euler e nell'approssimazione di Euler-Bernoulli small-slope.

Il capitolo esamina anche lo sviluppo intrecciato di evoluti e involuti, sia come costrutti geometrici che come strumenti pratici, in particolare nel pendolo cicloidale di Huygens. Mettendo questi progressi all'interno dei loro contesti meccanici e matematici, la discussione evidenzia come la tradizione geometrica in curvatura fornisse basi essenziali per le teorie analitiche, strutturali e fisiche successive, in particolare la formulazione di Jakob Bernoulli dell'elastica, che dipende fondamentalmente dai concetti geometrici stabiliti Qui.

8.1 Introduzione: origini geometriche della curvatura e dell'elastica 269
8.2 Curvatura 269
8.2.1 Oresme (1351) 271
8.2.2 Newton (1671) 272
8.2.3 Leibniz (1686) 274
8.2.4 Johann Bernoulli (1691) . . . 275
8.2.5 Jakob Bernoulli; Theorem d'oro (1694) 277
8.2.6 Kästner (1758) 281
8.2.7 Sintesi 282
8.3 Evoluto/Involuto 283
8.3.1 Huygens (1658-1673) 284
8.3.2 Limitazioni pratiche e Legacy 286
8.3.3 Riferimenti conclusivi 286
8.4 Dalle curve geometriche alla meccanica strutturale 288
8.5 Attendere con ansia: 290

COPIA DI REVISIONE

8.1 Introduzione: origini geometriche della curvatura e dell'elastica

Prima del calcolo differenziale, la teoria della curvatura non è nata dall'astrazione, ma dalla realtà fisica e meccanica delle curve incontrate in natura: il percorso di un oggetto gettato, il cerchio di una ruota rotabile, la forma di una catena sospesa, o l'arco tracciato da una canna flessibile.

I primi pensatori, in particolare Nicole Oresme, esplorarono la curvatura dei grafi come forme spaziali molto prima che il quadro cartesiano formalizzasse tali rappresentazioni. Nel XVII secolo, strumenti geometrici come tangenti, normali, cerchi osculatori, e i centri di curvatura furono rigorosamente sviluppati da Huyrone, Newton e Bernoullis, non come entità astratti, ma come costruzioni di curvatura radicate nel comportamento di particolare curvatura fisica. *elastico* per la forma di una barra piegata e usato ragionamento geometrico per porre la sua equazione di governo.

Sebbene gli sviluppi successivi rielaborino queste idee nel linguaggio dell'analisi, questo capitolo si concentra sulla fase formativa quando la curvatura e l'elastica erano ancora comprese principalmente in termini geometrici. Sospecchia l'evoluzione di queste idee, partendo dall'immaginazione geometrica di Oresme e culminando nelle precise costruzioni dei secoli tardo XVII e primi settecento. Lungo il percorso, evidenzia le figure chiave —Huygens, Newton, Leibniz e Bernoullis — che hanno avanzato la comprensione della curvatura attraverso strumenti come evoluti, cerchi osculatori, e il calcolo geometrico di infinitesimali.

L'elastica (§9), in particolare, è emerso come il problema quintessenza, dove si sono incontrate geometrie e meccaniche, la sua soluzione richiederebbe un calcolo variazionale, ma la sua formulazione e il suo trattamento precoce sono stati quadrati all'interno della tradizione geometrica.

La comprensione geometrica della curvatura sviluppata in questo periodo si rivelerà poi fondamentale per i progressi dell'Ottocento, tra cui lo sviluppo di curvatura intrinseca di Gauss per le superfici, l'eventuale formulazione della geometria Riemanniana e applicazioni moderne che vanno dalla grafica computerizzata e dai sistemi CAD al quadro geometrico sottostante alla relatività generale di Einstein.

8.2 Curvatura

Prima di affrontare l'evoluzione della *Elastico*, (§9.3) è necessario introdurre il concetto di curvatura — la quantità geometrica fondamentale che governa come una curva si piega.

COPIA DI REVISIONE

Curvatura descrive il grado a cui una curva si devia dall'essere etero, e lo fa in una curva *locale locale* senso: misura piegarsi a un punto specifico piuttosto che su un'intera forma.

Per un cerchio, la curvatura è costante e semplicemente il reciproco del raggio: i cerchi più piccoli si piegano più bruscamente e quindi hanno una curvatura più alta. Questo caso familiare fornisce una linea di base naturale per definire la curvatura in generale. La soluzione moderna di un problema di elastica canonica - cioè la grande deflezione di un fascio cantilevered - è data in seguito in §29.2.3, e si basa sulla comprensione come la curvatura varia lungo la lunghezza del fascio.

Già nell'antichità, Euclid definiva il tangente come una linea che tocca un cerchio esattamente ad un punto senza attraversarlo, ma non erano ancora sviluppate più generali nozioni di curvatura.

La curvatura moderna, al contrario, è definita come il tasso di cambiamento dell'angolo di inclinazione della linea tangente rispetto alla lunghezza dell'arco. In termini descrittivi, misura quanto velocemente la curva gira. Se la curva è un cerchio, questo tasso di svolta è costante. Per curve arbitrarie, il metodo accettato è quello di approssimare la curva localmente da un cerchio che corrisponde sia alla sua tangente che alla sua curvatura a un punto. *cerchio osculante*[1] (Fig. 8.1) (Brackenridge, 1992 PDF). Ha gli stessi primi e secondi derivati della curva al punto di contatto.

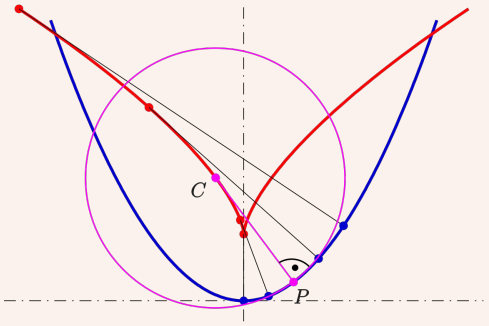


Figura 8.1: Cerchi oscillanti (violetto) di una parabola (blu); posizione corrente mostra cerchio incentrato a C e tangente a P. Locus di centri mostrati in rosso.

Benché la curvatura fosse rigorosamente definita alla fine del XVII secolo, le prime intuizioni alla curvatura appaiono fino al XIV secolo. Oltre al lavoro pionieristico di Nicole Oresme (discusso successivamente), il preciso trattamento matematico della curvatura è sorto indipendentemente dal lavoro di Newton e Leibniz. §8.3.

[1] An **cerchio osculante** (dal latino) *Osculari*, "to kiss") è il cerchio che meglio approssima una curva a un dato punto. Ha la stessa tangente e curvatura della curva a quel punto, rendendolo il cerchio unico che "kisses' la curva più da vicino. Il raggio di questo cerchio è uguale al raggio di curvatura, e il suo centro si trova sulla normale alla curva al punto di contatto.

COPIA DI REVISIONE

8.2.1 Oresme (1351)

Il concetto di curvatura è assente dalla geometria euclidea, dove i punti, le linee e i cerchi prevalsero, e nessuna nozione generale di come si formulava una curva curva. Non era fino al XIV secolo che l'idea di curvatura, come una deviazione misurabile dalla rettilineità, era stata prima accovacciata, soprattutto da Nicole Oresme.

Nel suo *Trattatus de Configurationibus qualitatum et motuum* (Oresme, 1351), Oresme ha introdotto una nozione qualitativa di curvatura, trattandola come una magnitudine continuamente variabile. Per i cerchi, ha riconosciuto che la curvatura è inversamente proporzionale al raggio e ha cercato di estendere questa idea a curve più generali.

> Non sappiamo con cosa, o per quanto riguarda l'intensità della curvatura è misurata, perché ora mi sembra che ci siano solo due [possibile] modi [per parlare della misura della curvatura]. Il primo è che l'aumento della curvatura è una funzione della sua partenza dalla rettilineità, cioè della sua distanza dalla rettilineità. [da misurare] per la quantità dell'angolo costituito da una linea retta e una curva, ad esempio, un angolo di contingenza o forse un altro angolo costruito anche da una linea retta e una curva.
>
> Serrano e Suceavă, 2017 «*A Medieval Mystery: Nicole Oresme's Concept of Curvitas*»

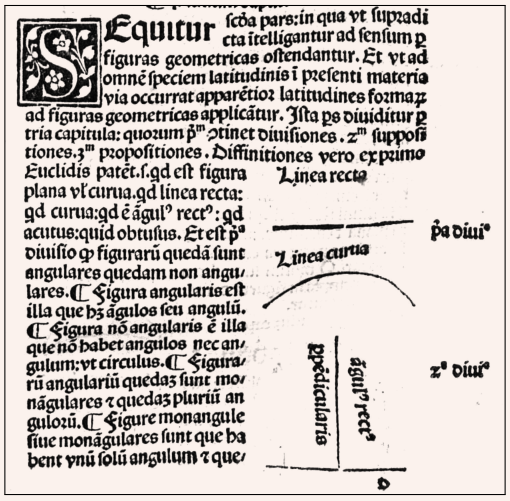


Figura 8.2: La curvatura di Oresme

Oresme non era un semplice studioso di prima classe, ma è stato accreditato con una proposta di idee che assomigliano alla legge di Gresham, alla geometria analitica, alla legge della caduta libera, alle teorie strutturali della materia e anche alla rotazione della Terra. (Clagett, 1964).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Una nota interessante: Oresme si ritiene abbia introdotto la matematica + simbolo per l'aggiunta.[2]

In molti aspetti, Oresme può essere considerato come precursore della rivoluzione scientifica (vedi §5.3). È notevole che nel corso di tre secoli passerebbe tra la concettualizzazione pionieristica di Oresme (1351) e la formulazione analitica di Newton (1671)—una testimonianza sia di come le idee rivoluzionarie di Oresme fossero e di quanto tempo ci fosse per gli strumenti matematici necessari per formalizzarle.

8.2.2 Newton (1671)

Il lavoro precoce di Newton sulla curvatura appare nel 1671, nel suo trattato seminale *Metodologia Fluxionum et Serierum Infinitarum* (Newton, 1736), dove si rivolse ai problemi delle normali, tangenti e curvatura; nel maggio del 1665 Newton aveva già sviluppato la formula generale per il raggio di curvatura per una funzione $y = f(x)$, e per l'inverno del 1670-71, cominciò a redigere quello che divenne noto come il *Metodi di Serie e Flussi*.

In questo lavoro, egli pose, tra gli altri, quanto segue:

- Problema 5: "Determinazione della curvatura di una curva a qualsiasi punto'.
- Problema 6: "La qualità della curvatura ad un punto".

Ha derivato la formula generale per la curvatura nelle coordinate cartesiane e, notevolmente, l'ha espressa anche in forma polare. Nel Problema 5, Newton ha elencato cinque condizioni di definizione che servono per determinare il raggio o il centro di curvatura (Bardini e Gianella, 2014):

- Una linea retta non ha curvatura.
- La curvatura di un cerchio è costante e inversamente proporzionale al suo raggio ($k = 1/R$).
- Se un cerchio è tangente ad una curva sul suo lato concavo, e nessun altro cerchio può essere inserito all'interno dell'angolo di contatto, condivide la stessa curvatura della curva a quel punto.
- Il centro di curvatura è il centro di un cerchio tangente alla curva ad un punto, sdraiato sul lato concavo, con la stessa curvatura. Per individuarlo, si deve intersecare le normali a due punti infinitamente vicini.

Newton ha illustrato questa costruzione utilizzando una configurazione geometrica in cui le normali DH e dh intersecarsi a un punto de come D approcci P, il punto di limite diventa il centro di curvatura C (Fig. 8.3).

[2] Il simbolo di moltiplicazione "x" fu introdotto da William Oughtred nel 1618, il segno di divisione div di Johann Rahn nel 1659, e il simbolo dell'infinito ∞ di John Wallis nel 1655.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Lo stesso cerchio ha ovunque la stessa curvatura, e in diversi Cerchi è reciprocamente proporzionale ai loro diametri.

Se un Cerchio tocca qualsiasi Curva sul suo lato concavo, in qualsiasi punto dato, e se è di tale magnitudo che nessun altro circolo tangente essere iscritto nell'angolo di contatto di quel punto, quel Cerchio sarà della stessa Curvatura come la curva è di, nel punto di contatto.

Pertanto il centro di Curvatura a qualsiasi punto della curva è il Centro del Circolo ugualmente curvato, e quindi il Radius o semi-diametro di Curvatura è parte della Perpendicolare alla curva che è terminata al centro.

E la Proporzione della Curvatura a punti diversi sarà conosciuta dalla Proporzione della Curvatura di cerchi aequi-curve, o dalla Proporzione reciproca delle Radii di Curvatura.

Un'ulteriore spiegazione viene attualmente:

Ma ci sono diversi sintomi o proprietà di questo punto C che può essere utilizzato nella sua determinazione.

Coolidge, 1952 «*The unsatisfactory story of curvature*»

1. È l'intersezione dei perpendicolari all'arco su entrambi i lati del punto, presa a intervalli infinitamente piccoli.
2. If DC si immagina di muoversi pur rimanendo perpendicolare alla curva, poi C sperimenterà il minimo movimento e fungerà da centro di rotazione.
3. Se un cerchio è disegnato con centro C e raggio DC, nessun altro cerchio può mentire tra questo e la curva.
4. Se un altro centro H di un circolo tangente gradualmente si avvicina C, alla fine i punti di contatto coincidono.
5. Ognuna di queste proprietà fornisce un metodo per risolvere il problema, ma il primo è il più semplice ed è scelto.

Come Huygens, Newton assunse che se un punto (non un'inflessione) è fissato su una curva, e un altro punto vicino lo si avvicina da entrambi i lati, l'intersezione delle loro normali converge ad un centro ben definito di curvatura.

Ha preso x come variabile indipendente, con $\dot{x} = l$ e $z = dy/dx$, con conseguente formula ben nota per il raggio di curvatura nelle coordinate cartesiane:

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \tag{8.1}$$

Newton ha fornito numerosi esempi che applicano questa formula a varie curve, concludendo la sezione con la seguente dichiarazione:

Poiché tutte le curve geometriche... possono essere riferite alle ordinazioni a destra, credo di aver fatto abbastanza. Chiunque desideri di più lo fornirà senza difficoltà dai suoi sforzi, soprattutto se, come bonus, nell'illustrazione del punto aggiungo un metodo per spirali.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

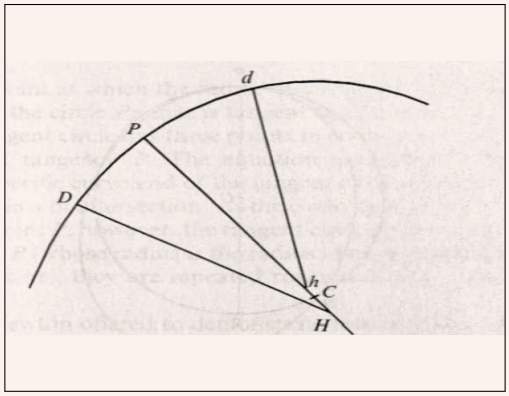


Figura 8.3: La derivazione di Newton della curvatura

Newton, 1736 Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum, cum ejusdem applicatione ad curvarum geometriam

Nonostante questi progressi fondamentali nella teoria della curvatura, l'approccio di Newton alla scoperta matematica differiva notevolmente dalla tradizione di sfida pubblica che emergerebbe nel continente. Il suo lavoro sistematico sulla classificazione delle curve, compreso l'identificazione di 72 delle 78 specie di curve cubi negli anni 1660 e 1670, rimase in gran parte inedito durante la sua vita (Whiteside, 1969)Mentre Newton possedeva gli strumenti matematici necessari per analizzare forme curve complesse, comprese quelle che in seguito sarebbero state centrali alla teoria dell'elastica, non ha mai formulato il problema fisico specifico delle curve elastiche che Jakob Bernoulli avrebbe posto come sfida pubblica due decenni dopo (§9.3). Questo contrasto tra le indagini matematiche private di Newton e le competizioni matematiche aperte dei fratelli Bernoulli riflette differenze più ampie negli approcci continentali contro inglesi alla ricerca matematica e alla diffusione.

8.2.3 Leibniz (1686)

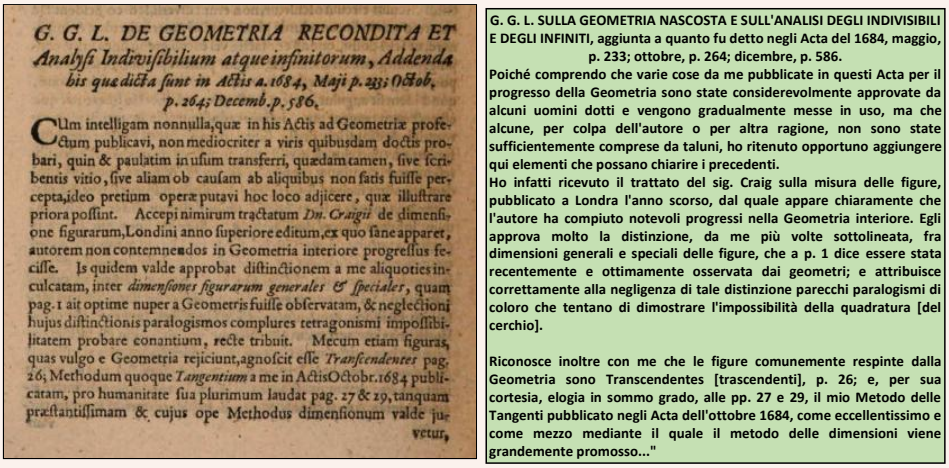
Per uno schizzo biografico di Leibniz, vedere Sezione 6.6.8.

Mentre Newton formalizzava l'espressione analitica per la curvatura, Gottfried Wilhelm Leibniz contribuì a importanti intuizioni geometriche. Nel suo articolo del 1686 "De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum" pubblicato nel 1686 *Atto Eruditorum* (Leibniz, 1686b)Fico. 8.4[3] Leibniz ha discusso il concetto di osculation, notando che un conico osculante a un vertex, quando considerato su un arco sufficientemente piccolo, non differisce sensibilmente dalla curva stessa.

Più in modo significativo, questo documento ha introdotto la notazione differenziale del calcolo di Leibniz (utilizzando dx e dyLeibniz ha dimostrato come il suo metodo di infinitesimali possa trattare problemi tangenti e quadrature in un quadro unificato,

[3]Nota che Leibniz firma semplicemente come G. G. L. (Latinizzato: *Gottfridus Guilielmus Leibnitius*).

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE



G. G. L. DE GEOMETRIA RECONDITA ET Analyſi Indiviſibilium atque infinitorum, Addenda his quæ dicta ſunt in Actis a. 1684, Maji p. 233; Octob. p. 264; Decemb. p. 586.

Cum intelligam nonnulla, quæ in his Actis ad Geometriæ profectum publicavi, non mediocriter a viris quibusdam doctis probari, quin & paulatim in uſum transferri, quædam tamen, ſive ſcribentis vitio, ſive aliam ob cauſam ab aliquibus non ſatis fuiſſe percepta, ideo pretium operæ putavi hoc loco adjicere, quæ illuſtrare priora poſſint. Accepi nimirum tractatum *Dn. Craigii* de dimenſione figurarum, Londini anno ſuperiore editum, ex quo ſane apparet, autorem non contemnendos in Geometria interiore progreſſus feciſſe. Is quidem valde approbat diſtinctionem a me aliquoties inculcatam, inter *dimenſiones figurarum generales & ſpeciales*, quam pag. 1 ait optime nuper a Geometris fuiſſe obſervatam, & neglectioni hujus diſtinctionis paralogismos complures tetragonismi impoſſibilitatem probare conantium, recte tribuit. Mecum etiam figuras, quas vulgo e Geometria rejiciunt, agnoſcit eſſe *Tranſcendentes* pag. 26; Methodum quoque *Tangentium* a me in Actis Octobr. 1684 publicatam, pro humanitate ſua plurimum laudat pag. 27 & 29, tanquam præſtantiſſimam & cujus ope Methodus dimenſionum valde juvetur,

G. G. L. SULLA GEOMETRIA NASCOSTA E SULL'ANALISI DEGLI INDIVISIBILI E DEGLI INFINITI, aggiunta a quanto fu detto negli Acta del 1684, maggio, p. 233; ottobre, p. 264; dicembre, p. 586.

Poiché comprendo che varie cose da me pubblicate in questi Acta per il progresso della Geometria sono state considerevolmente approvate da alcuni uomini dotti e vengono gradualmente messe in uso, ma che alcune, per colpa dell'autore o per altra ragione, non sono state sufficientemente comprese da taluni, ho ritenuto opportuno aggiungere qui elementi che possano chiarire i precedenti.

Ho infatti ricevuto il trattato del sig. Craig sulla misura delle figure, pubblicato a Londra l'anno scorso, dal quale appare chiaramente che l'autore ha compiuto notevoli progressi nella Geometria interiore. Egli approva molto la distinzione, da me più volte sottolineata, fra dimensioni generali e speciali delle figure, che a p. 1 dice essere stata recentemente e ottimamente osservata dai geometri; e attribuisce correttamente alla negligenza di tale distinzione parecchi paralogismi di coloro che tentano di dimostrare l'impossibilità della quadratura [del cerchio].

Riconosce inoltre con me che le figure comunemente respinte dalla Geometria sono Transcendentes [trascendenti], p. 26; e, per sua cortesia, elogia in sommo grado, alle pp. 27 e 29, il mio Metodo delle Tangenti pubblicato negli Acta dell'ottobre 1684, come eccellentissimo e come mezzo mediante il quale il metodo delle dimensioni viene grandemente promosso..."

Figura 8.4: Leibniz *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* (Leibniz, 1686b)

scrivendo equazioni come $pdy = xdx$ e presentando il segno integrale $\int$ (scritto come f nell'originale).

Mentre questo particolare articolo si concentra più sulle macchine analitiche che sulle definizioni geometriche di curvatura per se, l'approccio di Leibniz ha sottolineato che le proprietà geometriche potrebbero essere comprese attraverso analisi infinitesimali. d/dx forma—potrebbe rivelarsi particolarmente versatile per esprimere le relazioni di curvatura, diventando infine lo standard nella geometria differenziale.

Le diverse impostazioni di Newton e Leibniz, sia per i problemi del calcolo che per quelli geometrici, avrebbero scatenato la loro famosa disputa prioritaria, mentre la notazione fluxional di Newton era elegante per le dinamiche, la notazione differenziale di Leibniz si è rivelata più adattabile per le complesse espressioni che si presentano nelle formule di curvatura e nell'analisi geometrica.

Il lavoro di Leibniz in questo documento, in particolare il suo trattamento delle curve trascendente e la sua affermazione che la geometria non deve escludere curve che possono essere costruite solo attraverso processi limitanti, posate le basi per sviluppi successivi nella geometria differenziale da parte dei Bernoullis, Euler e altri.

8.2.4 Johann Bernoulli (1691)

Johann Bernoulli per la prima volta derivava una formula generale per il raggio di curvatura in un manoscritto del 1691 (Bernoulli, Johann, 1691a). La derivazione è descritta da Bos, 1974, pp. 36–37 e illustrato in Fig. 8.5.

COPIA DI REVISIONE

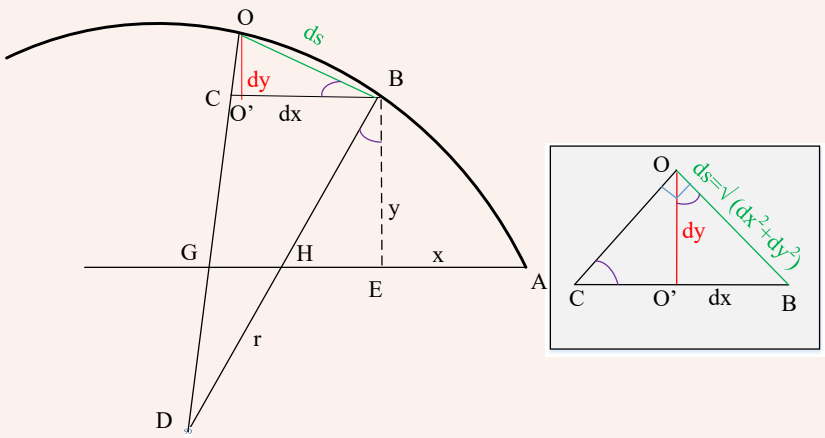


Figura 8.5: La derivazione della curvatura di Johann Bernoulli

L'obiettivo è calcolare il raggio di curvatura r a punto B, espresso come:

$$r = BH + HD \tag{8.2}$$

1. Da $\angle O'BD = \angle HBE$, triangoli $O'BO$ e EBH sono simili, così:

$$BH = BE \cdot \frac{BO}{BO'} = y \cdot \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} \tag{8.3}$$

$$AH = AE + EH = AE + OO' \cdot \frac{EB}{O'B} = x + y \cdot \frac{dy}{dx} \tag{8.4}$$

2. Il prossimo, per HD:

$$HD = r \cdot \frac{BC}{HG} \tag{8.5}$$

3. HG è il differenziale AH:

$$HG = d(AH) = d\left(x + y\frac{dy}{dx}\right) = dx + dy \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot \frac{ddy}{dx} = dx + \frac{dy^2 + y\,ddy}{dx} \tag{8.6}$$

4. Da triangoli simili ($\angle BCO = \angle BOO'$), abbiamo:

$$BC = \frac{BO^2}{BO'} = \frac{dx^2 + dy^2}{dx} \tag{8.7}$$

5. Sostituire Eqs. (8.3), (8.5), (8.6)e (8.7) in Eq. (8.2), otteniamo:

$$r = \frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx \cdot ddy} \tag{8.8}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Semplificare l'utilizzo $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$:

$$r = \frac{ds^3}{dx \cdot ddy} \tag{8.9}$$

che corrisponde a:

$$r = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \tag{8.10}$$

8.2.5 Jakob Bernoulli; Theorem d'oro (1694)

Contesto Nel suo 1694 *Atto Eruditorum* Memoir, (Bernoulli, Jakob, 1694) Jakob Bernoulli ha dato due contributi distinti ma interlocking.

- In primo luogo, in quello che ha definito il *Teorema Aureum* ('radii circulorum osculantium in terminis simplicissimis mostrei'), presenta un'espressione analitica generale per il raggio del cerchio osculante - e quindi curvatura - in termini più semplici, ad esempio. $R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y's}$ che non sia $\kappa = 1/R$Questo è indirizzato qui.
- In secondo luogo, ha usato questa curvatura invariante per risolvere il *elastico*: modellare una sottile striscia inestesa in equilibrio statico, ha accoppiato una legge di curvatura del momento (in forma moderna $M \propto \kappa$) con le relazioni cinematiche $dx/ds = \cos\theta$, $dy/ds = \sin\theta$e $\kappa = d\theta/ds$, convertendo così l'equilibrio meccanico in un'equazione differenziale risolta per la curva, che è coperta §9.3.2.1.

Va sottolineato che questo documento è stata la sua soluzione a una sfida che aveva già lanciato (§9.3.1), (Bernoulli, Jakob, 1690a). Così, inizia il giornale dicendo:

> ...relationem fili evolutionntis seu radii circuli osculatoris (non quomodocunque, ut factum in A. Lips. Mens. Jan. 1691. p. 22, sed) in terminis simplicissimis & Hæc nobis jam eo tempore, quo speculationi funis vacabamus, innotuerat, eamque mox nonnullis inter peregrinandum communicavit Frater; interea dum immensa inventi utilitas in risonda Velaria, & hac quam præ manibus habemus Elaterum Curvatura, aliisque sublimioribus, quotidie magis magisque sese mihi explicuit, effecitque tandem, ut non possim publico aureum Theorema diutius invidere...
>
> a presentare in termini più semplici e puramente differenziali il rapporto dell'evolutivo (string) o raggio del cerchio osculante. Questo era già diventato noto a me quando studiavo il catenario, e mio fratello presto lo comunicava ad alcuni durante i nostri viaggi; nel frattempo, come l'immensa utilità di questa scoperta nella soluzione della velaria, nella curvatura delle molle (elastica) che abbiamo portato qui, e che è diventato sempre più ricondito pubblico.
>
> Bernoulli, Jakob, 1694 «*Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus*»

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Derivazione del Teorema d'oro

Priusquam itaque ad institutum pergo, sunto in fico. I, portiuncula Curvae cujuspiam infinite parvae ab, bc, quibus perpendiculariter insistononte radii circuli osculatoris af, bf, concomitanti in puncto Evolutae f, facientesco angulum afb aequalem angulo gbc, quem producta portio ab E' un'idea. bc efficit; tum abscindatur $bh = bc$, ductaeque intelligantur parallelae al, bn, co, nn. bl, hom, gcn; quarum illae abscissarum, hae applicatarum elementa (sive dx, dy, ddx, ecc.) indigit. Dico,

α. Quod positis Curvae elementis ab, bc, hoc est, ipsis ds aequalibus, raggio circuli osculatoris seu longitudo fili evolventis af

$$z = \frac{dx \cdot ds}{ddy}, \quad \text{item} \quad z = \frac{dy \cdot ds}{ddx}$$

Nam $ho : bc :: ho : hc :: hc : bc ::$ (O similitud. $\triangle$rum bmh, hoc, articolo hcb, abf) $bm : bh :: ab : bf :: al : ab :: ab : bf :: al : bf :: dx : z$. Sed $ho = hm = nc = bl = nc = ddy$, et $bc = ds$; $ddy : ds :: dx : z$. Eodem modo ostendetur $ddx : ds :: dy : z$- D.E.D.

Coroll. In omni Curva, positis ejus elementis aequalibus, differenziale secundae coordinatetarum primis reciproce propoantur: cum enim $\frac{dx \cdot ds}{ddy} = z = \frac{dy \cdot ds}{ddx}$, erit $dx \cdot ddx = dy \cdot ddy$, adeoque $ddx : ddy :: dy : dx$; quod ipsum quoque ex sola similitudine $\triangle$rum bmh, hoc, liquet; ubi co Se non lo fai ddx e non si può oh Se non lo fai ddy, ut hm ad bm bl ad al dy ad dx.

β. Positis vero abscissae elementis al, bn, hoc est, ipsis dx aequalibus, raggio eritto osculantis circuli af Se non lo fai

$$z = \frac{ds^3}{dx \cdot ddy}$$

Quoniam $gc : bc :: gc : hc :: hc : bc ::$ (Os similit. $\triangle$rum bng, chg, nn. hcb, abf) $bg : bn :: ab : bf :: ab : al :: ab : bf :: ds : dx :: ds : z :: ds^2 : z \cdot dx$; accesa $gc = gn = nc = bl = nc = ddy$, et $bc = ds$; erit $ddy : ds :: ds^2 : z \cdot dx$. Q.E.D. Haud absimiliter ostendetur, quod positis dy aequalibus, futurum est $z = \frac{ds^3}{dy \cdot ddx}$.

Il suo addo nova, de quibus nec Fratri adhuc constat, Theoremata...

Prima di procedere alla questione a portata di mano, ci sia in fico. Io, una piccola porzione di qualche curva, infinitamente piccola, ab, bc, su cui perpendicolarmente si espongono i raggi del cerchio osculante af, bf, incontro in un punto dell'Evoluto f, e facendo l'angolo afb pari ad angolo gbc, che la porzione estesa ab fa con l'altro bc; poi $bh = bc$ essere tagliato, e lasciare paralleli al, bn, co, così come bl, hom, gcn essere inteso per essere disegnato; di cui il primo indica elementi di abscissas, il secondo di ordinazioni (vale a dire dx, dy, ddx, ecc.). Io dico:
α. Che quando gli elementi della curva ab, bc sono prese uguali, cioè quando ds sono uguali, il raggio del cerchio osculante o la lunghezza del filo in evoluzione af, vale a dire

$$z = \frac{dx \cdot ds}{ddy}, \quad \text{also} \quad z = \frac{dy \cdot ds}{ddx}$$

Per $ho : bc :: ho : hc :: hc : bc ::$ (per somiglianza di triangoli bmh, hoc, anche hcb, abf) $bm : bh :: ab : bf :: al : ab :: ab : bf :: al : bf :: dx : z$Ma... $ho = hm = nc = bl = nc = ddy$e $bc = ds$; $ddy : ds :: dx : z$. Allo stesso modo si vedrà che $ddx : ds :: dy : z$- D.E.D.
Corollario: in ogni curva, quando i suoi elementi sono uguali, le seconde differenze delle coordinate sono reciprocamente proporzionali al primo: per da allora $\frac{dx \cdot ds}{ddy} = z = \frac{dy \cdot ds}{ddx}$ Ci sara' $dx \cdot ddx = dy \cdot ddy$e

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

quindi $ddx : ddy :: dy : dx$; che segue anche dalla somiglianza dei triangoli bmh, hoc; co or ddx è il oh or ddy, as hm to bm, or bl to al, or dy to dx.
β. Quando gli elementi dell'ascissa al, bn sono prese uguali, cioè quando dx sono uguali, il raggio del cerchio osculante af sarà

$$z = \frac{ds^3}{dx \cdot ddy}$$

Da $gc : bc :: gc : hc :: hc : bc ::$ (per somiglianza di triangoli bng, chg, e anche hcb, abf) $bg : bn :: ab : bf :: ab : al :: ab : bf :: ds : dx :: ds : z :: ds^2 : z \cdot dx$; $gc = gn = nc = bl = nc = ddy$e $bc = ds$; $ddy : ds :: ds^2 : z \cdot dx$. Q.E.D. Allo stesso modo si sarà mostrato che quando dy siamo uguali, abbiamo $z = \frac{ds^3}{dy \cdot ddx}$.
A questi aggiungo nuovi teoremi, di cui nemmeno il mio Fratello sa ancora...
Bernoulli, Jakob, 1694 «*Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus*» pg. 264

La derivazione della soluzione è semplificata dalla mancanza di un'ipotesi di piccola pendenza, ma l'equazione differenziale risultante per la curva elastica non è solubile in termini di funzioni elementari. §9.4.1.3).

Con riferimento a Fig. 8.6, Bernoulli imposta:

$$ab = bc; \qquad af \perp ab; \qquad bf \perp bc; \qquad bh = bc; \qquad \Rightarrow al = bm \tag{8.11}$$

e i seguenti triangoli sono (vicino) simili:

$$\triangle bmh \sim \triangle hoc \quad \text{and} \quad \triangle hcb \sim \triangle abf \tag{8.12}$$

Quindi possiamo scrivere:

$$\frac{ho}{bc} = \frac{ho}{hc} \cdot \frac{hc}{bc} = \frac{bm}{bh} \cdot \frac{ab}{bf} = \frac{al}{ab} \cdot \frac{ab}{bf} \tag{8.13}$$

Per costante ds, questo semplifica $\frac{ho}{bc} = \frac{al}{bf}$. Ora...

$$bf = r; \qquad al = dx; \qquad bc = ds; \qquad ho = hm - nc = bl - nc = ddy \tag{8.14}$$

(ignorando le convenzioni dei segni).

$$\frac{dx}{r} = \frac{ddy}{ds} \tag{8.15}$$

e finalmente:

$$r = \frac{dx \cdot ds}{ddy} \tag{8.16}$$

per costante ds.

L'assunzione di una costante ds corrisponde a prendere s come variabile indipendente.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

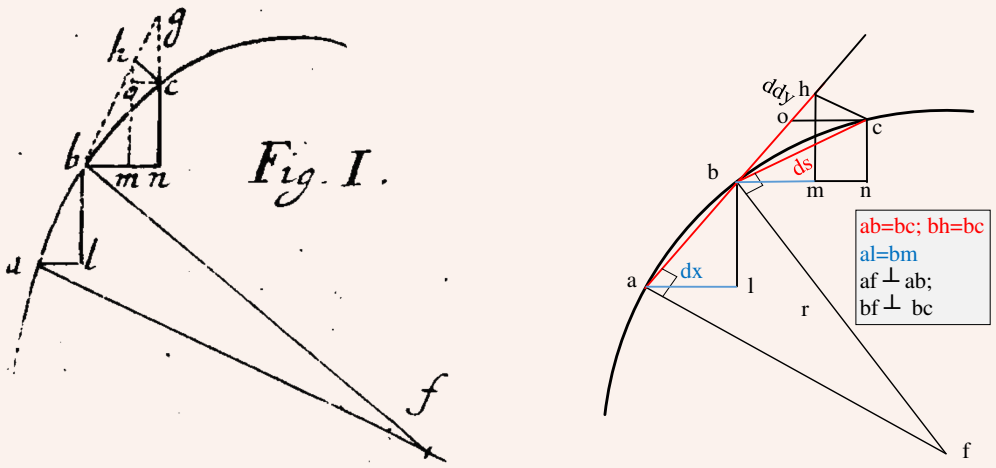


Figura 8.6: La derivazione di curvatura di Jakob Bernoulli

Da Fig. 8.6, AED è l'elastica, e GLM è la sua evoluta. Così, la frase *Evoluzione describitur* sembra indicare prendendo il *involuto* della curva GLM per costruire l'elastica AED. Punto L sull'evoluto corrisponde a punto E sull'elastica. L ha coordinate cartesian (p, z); E ha coordinate (x, y). Bernoulli utilizza chiaramente l'evoluto come strumento geometrico per definire la curvatura - centrale alla teoria dell'elastica. EL è il raggio di curvatura a punto E on AED.

Mentre la formulazione di Jakob Bernoulli era profondamente geometrica e non lineare, ha messo il palco per suo nipote Daniel (§9.3.2.1.2.4) e Euler (§9.4.1.2) avvicinare l'elastica da una prospettiva più analitica, portando ad una semplificazione cruciale.

Tabella 8.1: Confronto delle formule di curvatura originali e moderne di Bernoulli

Formulazione di Bernoulli (1694)	**Formulazione moderna**
Assumere elementi di arco uguali (ds costante)	Funzione di assums $y(x)$ con x come parametro
$z = \frac{dx \cdot ds}{ddy}$	$R = \frac{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2}$
Utilizza le differenze finite (infinitesimali)	Utilizza derivati basati sui limiti
Costruzione geometrica con evolute	Differenziazione analitica
Funziona con qualsiasi parametrizzazione	Tipicamente per esplicito $y(x)$
Basato su triangoli simili	Sulla base del tasso di cambiamento dell'angolo tangente

COPIA DI REVISIONE

Confronto: Bernoulli (1694) vs. Formulazione moderna Per collegare la formula di Bernoulli a quella moderna: A partire da $z = \frac{dx \cdot ds}{ddy}$ e utilizzando $ds^2 = dx^2 + dy^2$, possiamo scrivere: $ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

Pertanto: $R = \frac{dx \cdot ds}{d^2y} = \frac{dx^2\sqrt{1+(dy/dx)^2}}{d^2y}$

Numeratore divisorio e denominatore di dx^2: $R = \frac{\sqrt{1+(dy/dx)^2}}{d^2y/dx^2}$

La formula moderna include un fattore aggiuntivo, la discrepanza si presenta perché la formula di Bernoulli ddy (seconda differenza) ds costante) differisce subtly dal moderno d^2y/dx^2 (secondo derivato rispetto a x). Quando si tiene conto del cambiamento delle variabili e del rapporto tra differenziali, si ottiene:

$$R = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2} \tag{8.17}$$

Il fattore aggiuntivo di $[1 + (dy/dx)^2]$ nel numeratore si riferisce al fatto che, mentre la curva si inclina, gli effetti di proiezione devono essere correttamente incorporati.

Impatto storico Questo teorema divenne lo strumento chiave di Bernoulli per risolvere il problema dell'elastica. Egli lo riferisce come il suo 'teorema d'oro' non perché scoprì il concetto di curvatura o il cerchio osculante, ma perché ha fornito il metodo computazionale pratico—la 'chiave mancante'— che ha finalmente permesso ai matematici di lavorare con le curve elastiche. Come afferma a pagina 263, i tentativi precedenti (compreso uno pubblicato nel gennaio 1691) avevano affrontato cerchi osculatori, ma non in una forma adatta per risolvere problemi di meccanica trascendentale. La dipendenza del metodo dalle relazioni differenziali piuttosto che dalle costruzioni puramente geometriche ha segnato un passaggio cardine verso metodi analitici nella fisica matematica, prevenendo lo sviluppo sistematico del calcolo delle variazioni.

8.2.6 Kästner (1758)

Abraham Gotthelf Kästner (1719–1800), professore all'Università di Göttingen, era conosciuto come un prolifico espositore di matematica piuttosto che un ricercatore originale. *Anfangsgründe der Mathematik* ('Fondazioni di matematica'), (Kästner, 1786) ha aiutato a sistematizzare e divulgare molti concetti nella geometria differenziale e nell'analisi.

Nel volume del 1758, Kästner diede la definizione di curvatura, essenzialmente moderna, che la descrive come il rapporto di limitazione tra l'angolo $\Delta\theta$ tra due vicini tangenti e la lunghezza dell'arco Δs tra loro:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} \tag{8.18}$$

COPIA DI REVISIONE

Questo esprime la curvatura come il tasso di rotazione del tangente lungo la curva, una definizione che in seguito sarebbe adottata in geometria analitica e geometria differenziale moderna.

La frase originale di Kästner è la seguente:

> Man kann die Krümmung einer Linie in einem Punkte durch das Verhältnis des Winkels messen, den zwei sehr nahe Tangenten machen, zu dem zwischen ihnen liegenden Bogen, wenn dieser unendlich klein wird.
>
> Kästner, 1786 Anfangsgründe der Mathematik: Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv

Traduzione:

> Si può misurare la curvatura di una linea ad un punto dal rapporto dell'angolo formato da due tangenti molto vicini all'arco tra di loro, come l'arco diventa infinitamente piccolo.
>
> Kästner, 1786 Anfangsgründe der Mathematik: Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv

Questa definizione formalizza ciò che i matematici precedenti come i Bernoullis e gli Huygens si erano avvicinati geometricamente, basandola nel quadro del calcolo differenziale che era maturato dalla metà del XVIII secolo.

Nella moderna geometria analitica, questa idea è formalizzata ulteriormente. $y = f(x)$, la curvatura può essere scritta come:

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}$$

che collega l'intuizione geometrica di Kästner con la formula di calcolo utilizzata oggi.

Questa moderna definizione di curvatura si rivelerebbe fondamentale per i progressi dell'Ottocento, consentendo lo sviluppo di Gauss *Teorema Egregium*[4] (1827), che mostrava che la curvatura gaussiana è una proprietà intrinseca delle superfici, che alla fine porterebbe allo sviluppo della geometria riemanniana e fornisse il quadro matematico per la relatività generale di Einstein, dimostrando ancora una volta come i concetti geometrici nati da problemi pratici si evolvono in strumenti teorici profondi.

8.2.7 Sintesi

[4](Latin per "Remarkable Theorem") è un risultato importante della geometria differenziale, che riguarda la curvatura delle superfici. Il teorema dice che la curvatura gussia può essere determinata interamente misurando angoli, distanze e i loro tassi di cambiamento su una superficie, senza riferimento al particolare modo in cui la superficie è incorporata nello spazio euclideo tridimensionale ambientale.

COPIA DI REVISIONE

Tabella 8.2: Milestones in the Development of Curvature

Nome	Data	Contributo	Formula rappresentativa	Principale lavoro / Fonte
Nicole Oresme	1351	Concettuale legame tra curvatura e deviazione dalla rettilineità; descrizione qualitativa	Nessuno (qualitativo)	*Trattatus de Configurationibus qualitatum et motuum*
Isaac Newton	1671	Formula analitica per curvatura in coordinate cartesiane e polari; centro geometrico di curvatura tramite normali	$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$	*Metodologia Fluxionum et Serierum Infinitarum*
G. W. Leibniz	1686	Definizione del cerchio osculante come limite di un cerchio che interseca una curva a quattro punti di carbonizzazione	Nessuno (geometrico)	*Atto Eruditorum* (1686 articolo)
Johann Bernoulli	1691	derivazione algebrica del raggio generale di curvatura tramite differenziali	$r = \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{D}{dx^2}}$	manoscritto inedito (1691)
Jakob Bernoulli	1694	Costruzione geometrica via evolute/involute; curvatura centrale a teoria elastica	$r = \frac{dx \cdot ds}{ddy}$	*Curvatura Laminae Elasticа, Atto Eruditorum* (1694)
Leonhard Euler	1744	Quadro di calcolo variabile per elastica; Equazione Euler-Lagrange per l'ottimizzazione della curva	$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$	*Metodo Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minive Proprietate Gaudentes*
Collaborazione Euler-Bernoulli	1750	Approssimazione a piccola pendenza che porta alla teoria del fascio lineare	$\kappa \approx \frac{d^2y}{dx^2}$	Quadro variabile di Euler + Principio energetico di Daniel
A. G. Kästner	1758	Definizione moderna di curvatura come tasso di cambiamento di angolo tangente rispetto alla lunghezza dell'arco	$\kappa = \frac{d\theta}{ds}$	*Anfangsgründe der Mathematik*

8.3 Evoluto/Involuto

I concetti di evoluto e involuto nella geometria differenziale, prima introdotta da Christiaan Huygens, sono critici per comprendere la successiva copertura di curvatura, elastica e catenaria, che rappresentano un culmine del pensiero geometrico che collega la matematica pura con la meccanica pratica.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Per mettere le cose in prospettiva storica e culturale, nel 1691, Huygens espresse lo spirito del suo tempo:

> Spesso ho considerato che le curve che la natura spesso presenta al nostro punto di vista, e che lei stessa descrive, per così dire, tutte possiedono proprietà molto notevoli. Come il cerchio che si incontra ovunque. La parabola, che è descritta da flussi d'acqua. L'ellisse e l'iperbola, che l'ombra della punta di un gnomone traversa e che si incontra anche altrove. [curve] appena composto esclusivamente per l'utilizzo del calcolo geometrico su di loro.
>
> Blasjo, 2017 Transcendental curves in the Leibnizian calculus ([Capitolo 8])

Nella geometria differenziale, l'evoluto di una curva è il locus di tutti i suoi centri di curvatura. L'involuto di una curva è il locus di un punto su un pezzo di corda taut, poiché la corda è o non piegata da o intorno alla curva. L'evoluto di un involuto è la curva originale.

Matematicamente, per una curva parametrica $\vec{c}(t)$, l'evoluto è dato da:

$$\vec{E}(t) = \vec{c}(t) + \rho(t)\vec{n}(t) \tag{8.19}$$

dove $\rho(t)$ è il raggio di curvatura e $\vec{n}(t)$ è il vettore normale dell'unità. L'involuto può essere espresso come:

$$\vec{C}_a(t) = \vec{c}(t) - \frac{\vec{c}'(t)}{|\vec{c}'(t)|}\int_a^t |\vec{c}'(w)|\,dw \tag{8.20}$$

dove l'integrale rappresenta la lunghezza d'arco della corda non piegata dalla curva.

Un semplice esempio illustra questi concetti: l'evoluto di un cerchio è un unico punto al suo centro (dove tutte le normali si incontrano), mentre l'involuto di un cerchio forma una curva a spirale. Sebbene spesso errato per una spirale Archimedea, l'involuto di un cerchio è in realtà una curva distinto con le proprie proprietà uniche—una distinzione che si rivelerà cruciale nello sviluppo di denti di progettazione dei secoli dopo.

8.3.1 Huygens (1658-1673)

Mentre Apollonio aveva discusso evoluti nel libro V del suo *Conici* (c. 200 a.C.), fu Huygens a sviluppare una teoria sistematica e ad applicarla per risolvere un problema meccanico pratico. Huygens, un matematico olandese, fisico e astronomo il cui lavoro richiedeva una misurazione accurata del tempo, inventò l'orologio del pendolo nel 1657 e successivamente scoprì come renderlo veramente isorono. *Horologium Oscillatorium* (1673)(Huygens, 1673), che è considerato come una delle tre opere più importanti sulla meccanica del XVII secolo, le altre due sono Galileo *Discorso e Dimostrazioni Matematiche Rilasci a Due Nuove Scienze* (1638)(Galilei, 1638) e di Newton *Filosofiæ Naturalis Principia Mathematica* (Newton, 1687).[5]

[5] Questa valutazione delle tre più importanti opere meccaniche del XVII secolo è ampiamente accettata nella storia della letteratura scientifica.

COPIA DI REVISIONE

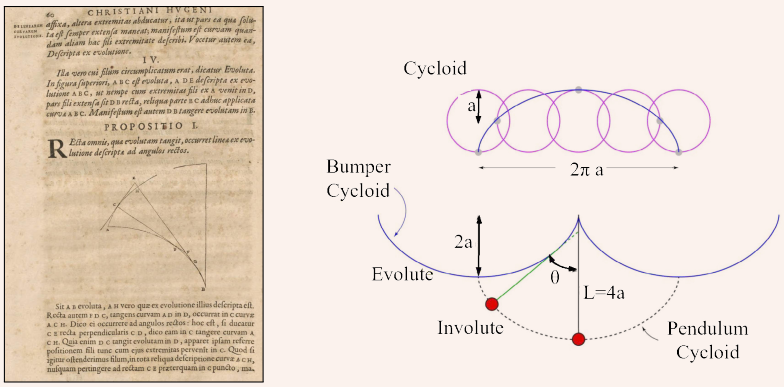


Figura 8.7: Il pendolo isorono di Huygens (Huygens, 1673)

Il periodo di movimento di un semplice pendolo (con angolo inferiore a 5°) è approssimativamente:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{8.21}$$

Mentre circa isocrono per piccole ampiezza, il semplice pendolo mostra ancora errori di tempismo che aumentano con ampiezza. (Zixuan, Jixun e Zhigang, 2018)Attraverso l'analisi geometrica, scoprì che la curva del tautochrone—lungo la quale una particella scenderà al punto più basso nello stesso tempo, indipendentemente dalla posizione di partenza—è un cicloide[6].

La proprietà cruciale che rende il cicloide la curva del tautochrone è che il quadrato della lunghezza dell'arco da qualsiasi punto a fondo è proporzionale alla differenza di altezza verticale:

$$s^2 = 8ar \cdot h \tag{8.22}$$

dove s è la lunghezza dell'arco, a è il raggio del cerchio generante, e h Questa relazione, unita alla conservazione dell'energia, assicura che il tempo di discesa sia indipendente dalla posizione di partenza, garantendo un periodo costante.

Per fare il pendolo seguire un percorso cicloidale, Huygens ha introdotto il concetto di evoluto e involuto. La sua notevole scoperta è che l'involuto di un cicloide è un altro cicloide. Posizionando due guance simmetriche a forma di cicloidale alla cima del pendolo, la corda si avvolgerebbe parzialmente intorno a queste guance mentre si aggirava.

Il periodo del pendolo cicloidale di Huygens è:

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}} \tag{8.23}$$

[6]Un cicloide è una curva tracciata da un punto su un cerchio mentre rotola lungo una linea retta.

COPIA DI REVISIONE

dove a è il raggio del cerchio generante del cicloide (notando che la lunghezza dell'arco di un cicloide completo è $8a$, e la lunghezza del pendolo è uguale $4a$).

La derivazione di Huygens era puramente geometrica, basata su proporzioni e reductio ad assurdo nel modo di Archimede, anticipando tecniche che sarebbero poi formalizzate attraverso il calcolo. La sua teoria degli evoluti, sviluppata per risolvere questo problema pratico di cronometraggio, divenne fondamentale per lo studio della geometria differenziale.

8.3.2 Limitazioni pratiche e Legacy

Nonostante la sua eleganza teorica, il pendolo cicloidale di Huygens affrontò sfide pratiche: l'attrito dalla corda che si piega intorno alle guance, l'usura sui punti di contatto e la precisa produzione necessaria per le forme cicloidali. Questi problemi furono poi circonventati dall'invenzione dell'ancoraggio (circa 1670), che permise ai pendoli di oscillare attraverso archi più piccoli dove l'errore circolare diventa trascurabile, rendendo il complesso meccanismo cicloidale non necessario per la maggior parte delle applicazioni di cronometraggio.

Il quadro matematico Huygens si è sviluppato per gli evoluti, tuttavia, si è rivelato molto più influente del suo specifico disegno del clock.

- Lo studio della caustica in ottica (la busta di raggi riflessi o rifrangenti)
- Il problema del brachistochrone (Johann Bernoulli, 1696)—trovando la curva della discesa più veloce
- La teoria generale delle buste delle famiglie delle curve
- Applicazioni moderne nel design degli ingranaggi, dove gli ingranaggi involuti mantengono rapporti di velocità costanti
- Lo sviluppo della geometria differenziale come disciplina matematica

I concetti introdotti da Huygens si rivelano essenziali per comprendere la curvatura delle curve, tra cui l'elastica e la catenaria–curves che, come ha osservato Huygens, la natura ci presenta e che possiedono "molte proprietà notevoli.'

8.3.3 Riferimenti conclusivi

La storia degli evoluti e degli involuti esemplifica un tema ricorrente nella storia della geometria: problemi pratici che portano avanti i progressi teorici che in definitiva trasgrediscono le loro applicazioni originali. Gli huygens cercavano di costruire un orologio migliore, ma invece diedero alla matematica un quadro fondamentale per capire come le curve si relazionano tra loro attraverso le proprietà di curvatura.

Come abbiamo visto in questo capitolo, la geometria non è solo un esercizio astratto ma una lente attraverso la quale possiamo comprendere sia il mondo naturale che gli artefatti che creiamo. Dai problemi antichi di squaring il cerchio alle moderne applicazioni degli

COPIA DI REVISIONE

ingranaggi involuti, i principi geometrici continuano a plasmare la nostra comprensione dello spazio, del movimento e della forma. L'evoluto e involuto, nato dalla necessità pratica di un accurato timekeeping, ci ricordano che anche le radici matematiche più astrattive spesso hanno delle radici.

Tabella 8.3 riassume importanti eventi/libri menzionati in questo capitolo.

Tabella 8.3: Curvatura & Elastica: grandi eventi e libri

Anno	Autore	Titolo del libro / Evento	Sintesi
1351	Nicole Oresme	*Trattatus de Configurationibus qualitatum et motuum* (Oresme, 1351)	Nozione primitiva che collega la curvatura alla partenza dalla rettilineità; precursore delle definizioni analitiche successive.
1657	Christiaan Huygens	Orologio a pendolo inventato (evento)	Il problema pratico di cronometraggio che motiva isorona; imposta la fase per la soluzione cicloidale (tautochrone).
1658–1673	Christiaan Huygens	Pendulo cicloidale & costruzione evoluta/involuta (evento)	Utilizza involuto di cicloide attraverso guance cicloidali per far rispettare isorony; evoluto/involuto formalizzato geometricamente.
1671	Isaac Newton	*Metodologia Fluxionum et Serierum Infinitarum* (Newton, 1736)	Formula di curvatura analitica (Cartesiano/polare); centro di curvatura tramite normali intersecanti.
1673	Christiaan Huygens	*Horologium Oscillatorium* (Huygens, 1673)	Masterwork sulle dinamiche del pendolo; cicloide come tautochrone; uso sistematico di evoluti/involuti.
1686	G. W. Leibniz	Cerchio di osculazione tramite contatto a quattro punti (evento)	Definisce il cerchio osculante come limite di un cerchio con il contatto a 4 punti di carbonizzazione; fondazione geometrica per la curvatura.
1691	Johann Bernoulli	Raggio generale di curvatura (scritto inedito)	Derivazione differenziale di r; percorso algebrico al moderno $r = \frac{(1+(y')^2)^{3/2}}{y''}$.
1694	Jakob Bernoulli	*Curvatura Laminae Elastica* (Bernoulli, Jakob, 1744a)	Elastica geometrica via evoluto/involuto; raggio di curvatura centrale a struttura curva elastica.
1744	Leonhard Euler	*Metodo Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minive Proprietate Gaudentes* (Euler, 1744b)	Calcolo delle variazioni; equazione Euler-Lagrange; esatte (non lineari) elastica formulata variativamente.
ca. 1750	Euler & Daniel Bernoulli	Piccole piste (Euler-Bernoulli) approssimazione (event)	Linearizza la curvatura $\kappa \approx y''$; rendimenti $EI\,y'' = M(x)$—fondazione della teoria del fascio classico.

COPIA DI REVISIONE

Anno	Autore	Titolo del libro / Evento	Sintesi
1758	A. G. Kästner	*Anfangsgründe der Mathematik* (Kästner, 1786)	La curvatura moderna $d\theta/ds$ (tasso di cambiamento di angolo tangente con lunghezza d'arco); consolidamento del concetto.

8.4 Dalle curve geometriche alla meccanica strutturale

Gli sviluppi geometrici tracciati in questo capitolo, dalle intuizioni qualitative di Oresme attraverso la rigorosa definizione di curvatura di Kästner, non erano solo astrazioni matematiche, ma hanno fornito il linguaggio quantitativo essenziale necessario per formulare e risolvere una nuova classe di problemi fisici: **come si deformano strutture flessibili ed elastiche sotto carico?**

La visione critica: Per qualsiasi struttura caricata che si piega—una catena sospesa, un'asta flessosa, un fascio curvato—la forma deformata è fondamentalmente caratterizzata dalla sua **curvatura ad ogni puntoS**enza i macchinari matematici per descrivere e calcolare la curvatura, i meccanici strutturali non potevano avanzare oltre le approssimazioni grezze.

Considerate le due grandi sfide che occupano il Capitolo 9:

Il Catenary (§9.2): Una catena sospesa assume una forma in cui, ad ogni punto, il **forza di tensione bilancia il peso** Ma per scrivere questo equilibrio matematicamente richiede di esprimere la geometria della catena, in particolare il rapporto tra lunghezza dell'arco, angolo di pendenza θ, e posizione verticale. Le intuizioni geometriche di Huygens (§8.3.1) e il calcolo di Newton (§8.2.2) e Leibniz (§6.6.8) ha reso possibile questo risultato, l'equazione differenziale risultante riguarda la curvatura della catena direttamente alla distribuzione della tensione lungo la sua lunghezza.

L'elastica (§9.3): Il lavoro di Jakob Bernoulli nel 1691–1694 e' un'epitomizzante connessione tra geometria e meccanica. *Quale forma assume una barra elastica sotto carico?* Il suo metodo di soluzione sfrutta direttamente i concetti geometrici sviluppati in questo capitolo:

1. Usa il suo **Teorema d'oro** (§8.2.5) per esprimere la curvatura geometricamente: $\kappa = d\theta/ds$, dove la costruzione evoluta (§8.3) fornisce la fondazione geometrica
2. Invoca un **principio fisico**: momento di piegatura M è proporzionale alla curvatura ($M \propto \kappa$)—la prima dichiarazione esplicita che collega le forze interne alla deformazione geometrica
3. Riguarda **equilibrio meccanico**: il momento deve bilanciare i carichi applicati ad ogni punto lungo la curva
4. Risultati in una **equazione differenziale** relativa curvatura geometrica al carico meccanico, solvibile attraverso le tecniche del calcolo

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Questa sintesi, dove la curvatura geometrica diventa il ponte tra deformazione e forza interna, non si sarebbe verificata senza i precedenti tre secoli di sviluppo geometrico documentati in questo capitolo.

La costruzione evoluta di Huygens, inizialmente sviluppata per il pendolo cicloidale (§8.3.1), risultata essenziale quando Jakob Bernoulli ha usato evoluti per ricavare l'equazione elastica. L'evoluto fornisce il locus di centri di curvatura, precisamente le informazioni geometriche necessarie per esprimere come la forma di un fascio piegato varia lungo la sua lunghezza.§8.2.2) e Leibniz (§6.6.8), inizialmente un concetto geometrico puro, divenne la manifestazione fisica di come un fascio piegato "wants"' a curvare ad ogni punto—l'approssimazione circolare locale governa il momento di piegatura locale. $d\theta/ds$ che Kästner formalizzato (§8.2.6) divenne la curvatura meccanica κ che appare in ogni equazione del fascio.

Il ponte dalla geometria alla meccanica: Tabella 8.4 riassume come ogni concetto geometrico sviluppato in questo capitolo ha trovato applicazione diretta nella meccanica strutturale:

Tabella 8.4: Dai concetti geometrici alle applicazioni meccaniche

Concetto geometrico	**Applicazione meccanica**
Cerchio di osculazione (Newton, Leibniz)	Il ravvicinamento locale della deflettorazione del fascio; determina i requisiti locali di rigidità di piegatura
Radio di curvatura $\rho = 1/\kappa$	Inversamente proporzionale al momento di piegatura: $M = EI\kappa$
Evoluto come locus dei centri di curvatura	Metodo di costruzione geometrico per la ricerca di forme elastiche
Tasso di rotazione $d\theta/ds$ (Kästner)	Rapporto Kinematic che collega l'angolo di pendenza alla lunghezza dell'arco nella teoria del fascio
Teorema d'oro (Jakob Bernoulli)	Strumento computazionale per la risoluzione di equazione differenziale elastica

L'eredità: La formulazione a base di curvatura stabilita da Jakob Bernoulli, raffinata da Euler nel calcolo delle variazioni (§9.4.1.2), e semplificato attraverso l'Eulero-Bernoulli approssimazione a piccole piste (§9.4.1.3), divenne la fondazione del **tutto** teoria del fascio strutturale. Ogni equazione del fascio moderno—da semplice $EIy'' = M(x)$ a formulazioni complesse di elementi finiti, ne trae la linea di linea con i concetti geometrici sviluppati in questo capitolo. $\kappa \approx d^2y/dx^2$ che consente la teoria del fascio elementare è semplicemente una linearizzazione della formula di curvatura esatta $\kappa = d\theta/ds$ derivato geometricamente dal Bernoullis.

La storia della curvatura illustra così un profondo schema nella fisica matematica: **astratti intuizioni geometriche, sviluppate per loro, in seguito rivelano indispensabili per descrivere la realtà fisica**. I cerchi osculanti di Newton, gli evoluti di Huygens, e

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

la geometria differenziale del Bernoullis non sono stati creati per risolvere i problemi strutturali – anche senza di loro, la teoria moderna delle strutture non poteva esistere. Huygens ha sviluppato evoluti per costruire un orologio migliore; Jakob Bernoulli ha riconosciuto che lo stesso macchinario geometrico potrebbe descrivere come i travi piegano.

8.5 Attendere con ansia:

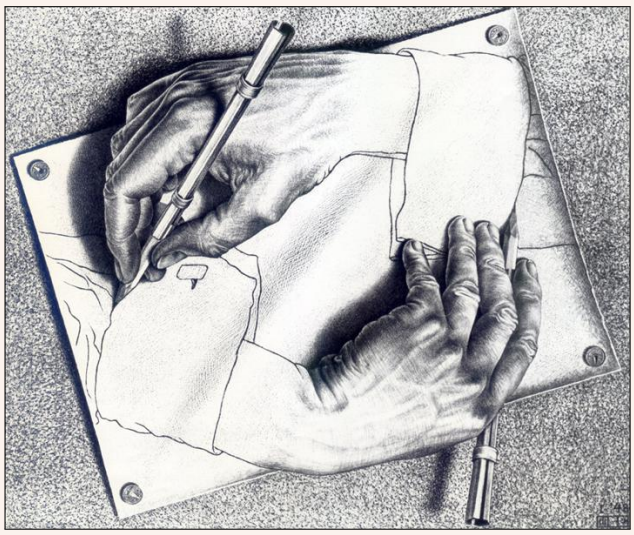
Nel capitolo 9, vedremo come questi strumenti geometrici hanno permesso la soluzione di due problemi che hanno definito la meccanica strutturale: la catenaria e l'elastica. Questi segnano un decisivo passaggio dalla costruzione geometrica alla soluzione analitica, dalla comprensione delle curve nell'astratto alla predizione del comportamento degli elementi strutturali caricati.

Il problema della catenaria mostrerà come la curvatura si riferisce alla distribuzione della tensione interna in un cavo flessibile. L'elastica dimostrerà come la curvatura governa il rapporto tra carichi applicati e la conseguente forma deformata di un'asta elastica. Entrambi i problemi condividono una struttura matematica comune: un'equazione differenziale che riguarda la proprietà geometrica della curvatura a quantità meccaniche (tensione, momento, carico).

Queste sfide riveleranno anche perché lo studio delle forme deformate, basandosi sui principi di forza dei capitoli precedenti e delle basi geometriche appena stabilite, è diventato essenziale per la comprensione completa del comportamento strutturale. Sapendo che una struttura può resistere a un determinato carico è insufficiente, dobbiamo anche prevedere quanto deformare, e se tale deformazione rimane accettabile per la sua funzione prevista.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



M.C. Escher, Disegni di mano (1948)

Curve auto-referenziali e geometrie impossibili—matematica resa visibile attraverso il paradosso artistico.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 9

Le grandi sfide: Catenario, Elastica e la nascita della Meccanica analitica

Abstract

Questo capitolo esamina l'evoluzione delle cosiddette "sfide di grana" della meccanica che ha spinto a progressi decisivi nella matematica e nell'ingegneria durante i secoli XVII e XVIII. problema catenario del 1690s — proposto da Jakob Bernoulli ma risolta da Leibniz, Johann Bernoulli, e Huygens—si evidenzia come l'applicazione Il calcolo a un vero problema fisico ha dimostrato la potenza della nuova analisi. La successiva sfida elastica di Jakob Bernoulli ha segnato un ulteriore punto di svolta, spingendo la matematica verso la calcolo delle variazioni, formulato per la prima volta da Daniel Bernoulli e poi raffinato da Euler. La sfida anonima del 1724 estendeva il campo d'indagine richiedendo soluzioni per linee flessibili ed elastiche sotto forze generali, di nuovo disegnando contributi da Daniel Bernoulli e Euler. Infine, la memoria di Euler del 1759 su la struttura di incerto trasforma una curiosità geometrica in un risultato centrale per la stabilità strutturale.

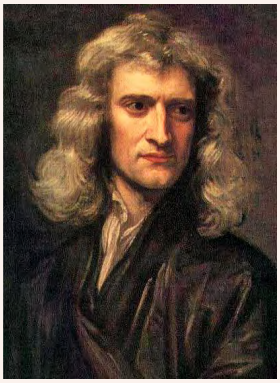
Il capitolo culmina con il trattato di Euler del 1771 Genuina principia, dove ha unificato questi fili disparati in una teoria completa delle linee deformabili, introducendo il "problema generale" dell'equilibrio di linea, Euler ha formalizzato i concetti di fattori tangenziali e normali della forza e dei risultati della linea il momento di piegamento, e le leggi di equilibrio meccanico distinte da relazioni costitutive. La sua sintesi non solo sovvenziona i problemi classici della catena, asta e colonna, ma ha anche anticipato il quadro di governo di La narrativa mostra come le sfide originariamente poste come concorsi tra i geometri hanno portato alla fine una metodologia universale che continua a sostenere l'analisi strutturale, dai ponti e torri ai materiali e ai sistemi biologici.

Di tutti i capitoli di questo libro, questo si è rivelato il più esigente e convoluto a scrivere, ma anche il più intellettuale gratificante e piacevole.

9.1 Fondazioni matematiche: dalla geometria al calcio 293
9.1.1 La Legacy greca: da Euclide alla Divide geometrica-meccanica 293
9.1.2 Rivoluzione di Cartesio: Coordinate e Algebra 294
9.1.3 La rivoluzione del Calcolo . 294
9.1.4 Da Curve a Meccanica: Il Ponte 296
9.1.5 La trasformazione completa 296
9.1.6 Notazione matematica 297
9.2 La sfida del Catenary (maggio 1690-giugno 1691) 297
9.2.1 Studi precoci 298
9.2.2 Sfide 302

COPIA DI REVISIONE

9.2.3 Le tre principali soluzioni . . 305
9.2.4 Epiloga 312
9.3 La sfida elastica (1690-1744) 313
9.3.1 La sfida di Jakob Bernoulli (1690) 313
9.3.2 Soluzioni 318
9.3.3 Riepilogo cronologico delle prime due sfide 360
9.4 An Anonymous Challenge: un ponte tra i problemi (1724) 361
9.4.1 La collaborazione di Bernoulli-Euler: prima unificazione (1728) 363
9.5 Teoria di chiusura: dall'osservazione ai carichi critici 373
9.5.1 Lavoro prematuro 373
9.5.2 Euler(1759) 375
9.6 Teoria Generale di Euler: Unificazione Completa (1771) 380
9.7 Conclusioni 384



(a) IsaacNewton (1643–1727)



(b) Christiaan Huygens (1629–1695)



(c) Ren René Cartesio (1596–1650)

Figura 9.1: Elastica protagonisti

9.1 Fondazioni matematiche: dalla geometria al calcio

Prima di rivolgersi ai grandi problemi delle catene appesa, delle barre piegate e delle colonne di indurimento, dobbiamo impostare la scena del XVII secolo: un passaggio fondamentale dalla costruzione geometrica al calcolo analitico che ha reso queste curve meccaniche trattabili.

9.1.1 La Legacy greca: da Euclide alla Divide geometrica-meccanica

La tradizione matematica ereditata dagli investigatori del XVII secolo risalgono a Euclid *Gli elementi* (c. 300 a.C.), che ha stabilito la geometria come scienza delle figure costruttive l'approccio di Euclid, che è stato esemplificato dalla sua definizione di tangente come linea che tocca un cerchio esattamente a un punto senza attraversarlo—forniva potenti metodi

COPIA DI REVISIONE

per linee, cerchi e le loro intersezioni, ma non offriva un approccio generale alle curve più complesse.

Dall'antichità, i matematici greci si distinguono *geometrico* curve—costrutbili da raddrizzamento e bussola e tipicamente rappresentabili da semplici relazioni algebriche, *meccanica meccanica* curve generate da *movimento o dispositivi* (cicloide, spirale, quadratrice).[1] Questi ultimi erano spesso considerati come al di fuori della geometria "pure", ammissibile per risolvere problemi specifici ma esclusi dal canone teorico.

Contesto storico Questo lavoro si basa sull'anagramma del 1691 di Bernoulli *Atto Eruditorum*, che ha stabilito la priorità mentre nasconde il suo metodo. L'anagramma decodificato afferma il rapporto geometrico preciso in seguito rivelato, non il piegamento inverso-momento/legge della curvatura erroneamente citata in alcuni letteratura (§6.11.1.1).

Questo confine persistette per quasi due millenni, le curve che dominano la meccanica strutturale, la categoria, l'elastica, gli evoluti, si allungano saldamente alla categoria meccanica, rendendoli resistenti ai metodi geometrici classici.

9.1.2 Rivoluzione di Cartesio: Coordinate e Algebra

La prima crepa in questa fondazione è venuta quando Descartes, 1637b ha sostenuto che, se la geometria misura le magnitudine in generale, non c'è motivo di escludere curve più complesse.[2]

Geometria analitica — coordina più algebra — ha fatto manipolare algebrica il linguaggio di lavoro dei loci. Improvvisamente, le curve potrebbero essere trattate come soluzioni alle equazioni $F(x, y) = 0$, e le proprietà geometriche potrebbero derivare attraverso il calcolo algebrico, che sfocate l'antico confine tra curve geometriche e meccaniche, ma un metodo generale per tangenti, aree e curve trascendente complesse attendeva ancora una svolta più profonda.

9.1.3 La rivoluzione del Calcolo

Evoluzione del XVII secolo: indivisibili di Cavalieri, quadrature di Torricelli, prodotti infiniti di Wallis, Barrow dualità tangente-area, Il salto decisivo è stato il calcolo differenziale di Leibniz e Newton, raffinato dai Bernoullis, Huygens e Euler.

Leibniz ha catturato l'ambito di questa trasformazione nella sua polemica *Historia et Origo Calculi Differentialis* (Leibniz, 1858)Fico. 9.2. A prescindere dalle dispute prioritarie con Newton, la sua pretesa tecnica era rivoluzionaria:

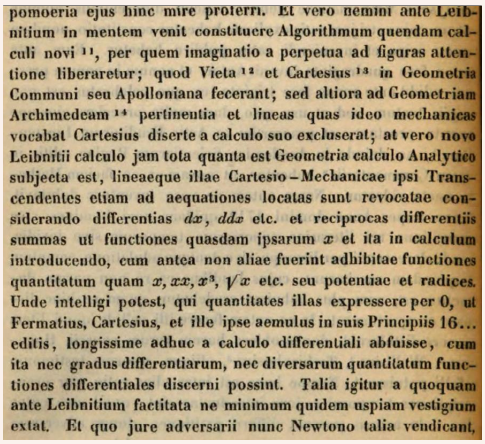
[1] Questo "dividere geometrico-meccanico" non si riferisce ad una separazione tra geometria e meccanica come discipline, ma alla classificazione greca delle curve come appartenenti alla pura teoria geometrica (costrutibile dai metodi euclidei) o alla soluzione dei problemi pratici (richiedendo dispositivi meccanici o movimento).

[2] Ironia della sorte, gli esempi di lavoro di Descartes hanno favorito ancora curve algebriche a basso grado; cf. Palomo, 2017.

COPIA DI REVISIONE

> Ora, dal calcolo di Leibniz, tutta la geometria è sottoposta al calcolo analitico, e quelle linee trascendente che Descartes chiamava meccanico sono anche ridotte alle equazioni scelte per adattarsi, considerando le differenze dx, ddx, ecc., e le somme che sono gli inversi di queste differenze, come funzioni delle x«s; e questo, semplicemente introducendo il calcolo, mentre prima di questo non erano ammissibili altre funzioni, ma x, xx, x^3, $\sqrt{x}$, ecc., cioè, poteri e radici.
>
> Leibniz, 1858, tradotto da Child, 1920

Il suo racconto, mentre il partigiano nella controversia prioritaria di Newton, cattura con precisione la rivoluzione matematica che ha fatto curve trascendente analiticamente trattabili.


pomoeria ejus hinc mire proferri. Et vero nemini ante Leibnitium in mentem venit constituere Algorithmum quendam calculi novi [11], per quem imaginatio a perpetua ad figuras attentione liberaretur; quod Vieta [12] et Cartesius [13] in Geometria Communi seu Apolloniana fecerant; sed altiora ad Geometriam Archimedeam [14] pertinentia et lineas quas ideo mechanicas vocabat Cartesius diserte a calculo suo excluserat; at vero novo Leibnitii calculo jam tota quanta est Geometria calculo Analytico subjecta est, lineaeque illae Cartesio-Mechanicae ipsi Transcendentes etiam ad aequationes locatas sunt revocatae considerando differentias dx, ddx etc. et reciprocas differentiis summas ut functiones quasdam ipsarum x et ita in calculum introducendo, cum antea non aliae fuerint adhibitae functiones quantitatum quam $x, xx, x^3, \sqrt{x}$ etc. seu potentiae et radices. Unde intelligi potest, qui quantitates illas expressere per 0, ut Fermatius, Cartesius, et ille ipse aemulus in suis Principiis 16... editis, longissime adhuc a calculo differentiali abfuisse, cum ita nec gradus differentiarum, nec diversarum quantitatum functiones differentiales discerni possint. Talia igitur a quoquam ante Leibnitium factitata ne minimum quidem uspiam vestigium extat. Et quo jure adversarii nunc Newtono talia vendicant,

Trascrizione latina:
"pomoeria ejus hinc mire proferri. Et vero nemini ante Leibnitium in mentem venit constituere Algorithmum quendam calculi novi [11], per quem imaginatio a perpetua ad figuras attentione liberaretur; quod Vieta [12] et Cartesius [13] in Geometria Communi seu Apolloniana fecerant; sed altiora ad Geometriam Archimedeam [14] pertinentia et lineas quas ideo mechanicas vocabat Cartesius diserte a calculo suo excluserat; at vero novo Leibnitii calculo jam tota quanta est Geometria calculo Analytico subjecta est, lineaeque illae Cartesio-Mechanicae ipsi Transcendentes etiam ad aequationes locatas sunt revocatae considerando differentias dx, ddx etc. et reciprocas differentiis summas ut functiones quasdam ipsarum x et ita in calculum introducendo, cum antea non aliae fuerint adhibitae functiones quantitatum quam x, xx, x^3, $\sqrt{x}$ etc. seu potentiae et radices. Unde intelligi potest, qui quantitates illas expressere per 0, ut Fermatius, Cartesius, et ille ipse aemulus in suis Principiis 16... editis, longissime adhuc a calculo differentiali abfuisse, cum ita nec gradus differentiarum, nec diversarum quantitatum functiones differentiales discerni possint. Talia igitur a quoquam ante Leibnitium factitata ne minimum quidem uspiam vestigium extat. Et quo jure adversarii nunc Newtono talia vendicant,"

Traduzione italiana:
"...i suoi confini possono così essere meravigliosamente estesi. E in verità, prima di Leibniz non venne in mente a nessuno di stabilire un certo algoritmo del nuovo calcolo [11], mediante il quale l'immaginazione fosse liberata dalla perpetua attenzione alle figure; cosa che Vieta [12] e Descartes [13] avevano realizzato nella Geometria Comune o Apolloniana. Tuttavia Descartes aveva espressamente escluso dal proprio calcolo le questioni superiori appartenenti alla Geometria Archimedea [14] e le linee che perciò chiamava meccaniche. Con il nuovo calcolo di Leibniz, invece, tutta la Geometria, per quanto estesa, è ora sottoposta al calcolo analitico; e quelle linee Cartesiano-Meccaniche, comprese le Trascendenti, sono ricondotte a equazioni determinate considerando le differenze dx, ddx ecc. e le somme reciproche delle differenze come certe funzioni degli stessi x, introducendole così nel calcolo, mentre prima non erano state impiegate altre funzioni delle quantità oltre a x, xx, x^3, $\sqrt{x}$ ecc., cioè potenze e radici. Da ciò si può comprendere che quanti espressero tali quantità con 0, come Fermat, Descartes e quello stesso rivale nei suoi Principia pubblicati nel 16..., erano ancora molto lontani dal calcolo differenziale, poiché in tal modo non si possono distinguere né i gradi delle differenze né le funzioni differenziali delle varie quantità. Pertanto non esiste in alcun luogo la minima traccia che simili procedimenti siano stati praticati da qualcuno prima di Leibniz. E con quale diritto gli avversari ora rivendicano tali cose per Newton..."

Figura 9.2: Leibniz sulla portata del calcolo (Leibniz, 1858, p. 2–3).

Sia Leibniz che Newton, attraverso diversi approcci (differenziali vs. *Flusso*, ha raggiunto la stessa svolta: curve trascendentali, prima accessibili solo attraverso la costruzione geometrica o l'approssimazione numerica, sono soggetti che si trovano per un trattamento analitico esatto.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

9.1.4 Da Curve a Meccanica: Il Ponte

Attraverso il Settecento, in particolare attraverso Euler's *Introductio in analisin infinitorum*, il concetto moderno di un *funzione* maturato accanto alla parametrizzazione della curva sistematica. $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$Abbiamo:

$$s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \quad \text{(arc-length speed)} \tag{9.1}$$

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} \quad \text{(signed curvature)} \tag{9.2}$$

Il curvatura κ Il rettore del raggio osculante-circolo rappresenta l'11bending locale della curva, che diventa il legame cruciale della meccanica attraverso leggi costitutive.

Per un'asta elastica, la relazione fondamentale che collega la geometria alla forza è:

$$M = EI\kappa \tag{9.3}$$

dove M è il momento di piegarsi, E il materiale modulo, I il secondo momento di area (geometricamente determinata), e κ la curvatura. Storicamente, questo è apparso come $M = \mathfrak{B}/R$ or $M = Ek^2\kappa$, con varie notazioni per il "modulo imminente"""

Questa equazione ingannevolmente semplice trasforma la teoria della curva geometrica in meccanica strutturale. $EI \to 0$ (perfettamente flessibile corda); l'elastica quando EI è finito (stante piegabile ma inestensibile); buckling quando i carichi assiali interagiscono con rigidità di piegatura.

9.1.5 La trasformazione completa

La rivoluzione matematica era profonda:

- **Algebraico vs. curve trascendentali**: Le curve algebriche soddisfano le relazioni polinomiali $F(x, y) = 0$ (circoli, ellisse, parabole) La catenaria, l'elastica e i loro evoluti sono trascendentali, precisamente le curve che il calcolo ha reso trattabile.
- **Dalla costruzione all'analisi**: Dove i greci e i matematici medievali hanno usato la costruzione geometrica con bussola e rettili, la nuova analisi ha risolto i problemi attraverso equazioni differenziali e integrazione.
- **Unificazione pura e applicata**: Gli stessi strumenti matematici che hanno rivelato le proprietà delle curve astratte hanno anche risolto problemi di ingegneria pressante—catene di sospensione, deflettori di trave, stabilità della colonna.

Con questa fondazione, possiamo apprezzare perché i problemi di catenaria, elastica e di buckling sono diventati le "sfide di grana" della matematica tardo XVII e primi del XVIII

COPIA DI REVISIONE

secolo, non erano solo esercizi astratti ma test di se il nuovo calcolo potesse effettivamente padroneggiare le curve meccaniche che avevano resistito all'analisi per millenni.

Come vedremo, le soluzioni a questi problemi di Jakob e Johann Bernoulli, Euler e i loro contemporanei hanno fatto più che risolvere specifiche questioni ingegneristiche - hanno stabilito le basi matematiche della moderna meccanica strutturale e hanno dimostrato la potenza senza precedenti di metodi analitici nella fisica matematica.

9.1.6 Notazione matematica

L'evoluzione della *notazione matematica* Parallelamente agli sviluppi concettuali, diversi pionieri hanno sviluppato sistemi simbolici concorrenti, e la comprensione della loro notazione aiuta quando legge le fonti primarie, Tabella 9.1.

Tabella 9.1: Differenza & simboli di integrazione

	Differenza	Integrazione (antidifferenziazione)
Leibniz	$\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$	$\int y\,dx$
Lagrange	$f'(x)$, $f''(x)$, ...	$\int \cdot\,dx$
Euler	$D_x y$, $D_x^2 y$	$\int \cdot\,dx$
Newton.	$\dot{x}$, $\ddot{x}$ (tassi di tempo)	"Fluente" $\dot{x}$ (tempo integrale); Newton non ha usato $\int$ nella sua notazione

Note: (i) Lagrange di routine usato prime e $\int$ per la quadratura; un operatore formale inverso (D^{-1}) è più tardi. (ii) Euler ha usato sia Leibnizian. $\int$ e operatori differenziali D_x (iii) Le oscillazioni/fluenti di Newton erano basate sul tempo; mappa al moderno $\frac{d}{dt}$ e $\int dt$ quando meccanica di riferezionamento incrociato.

9.2 La sfida del Catenary (maggio 1690-giugno 1691)

La storia della catenaria studi alla fine del XVII secolo è un affascinante per il lettore moderno (accademico) che si riferisce alla competitività di tre figure tortuose (Leibniz, Huygens, e i fratelli Bernoulli), ego (Leibniz che vuole dimostrare la supremazia del calcolo "his'), comunicazioni segrete (uso esteso di cifrai), comunicazioni private (tra Leibniz e Huygens), geloso tra Berna *Atto Eruditorium*e molto altro.

Il catenario poneva una sfida fondamentale: era la prima curva trascendentale a richiesta di soluzione analitica, che lo rende un caso di prova cruciale per i nuovi metodi geometrici tradizionali e di calcolo. A differenza delle curve algebriche costrutbili dalla bussola e dalla rettilineità, il sacco infinito della catena sospesa ha fatto sì che nessuna costruzione geometrica semplice potesse determinare la sua forma. Il problema ha richiesto forze

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

di bilanciamento lungo una curva di forma sconosciuta, esattamente il tipo di sfida che richiedeva i metodi differenziali sviluppati da Leibniz e Newton.

Per i Bernoullis, Fig. 6.16, era una "affare di famiglia" come tutti i protagonisti sono in qualche modo collegati: Huygens era il mentore di Leibniz, che era il consigliere di Jakob Bernoulli che era il fratello di Johann Bernoulli, che era il padre di Daniel Bernoulli e consigliere di Euler.

Quindi, è una storia che vale la pena di conoscere.

9.2.1 Studi precoci

Prima del lavoro di Bernoulli e Euler, il problema della catena sospesa aveva già preso il attenzione di molti.

9.2.1.1 Leonardo

Il problema è stato pensato per la prima volta che Leonardo da Vinci ha disegnato alcune catene appese nei suoi quaderni, Fig. 9.3Tuttavia, è più probabile che abbia cercato il suo centro di gravità piuttosto che la forma, ma ancora una volta ci piace spesso accreditare da Vinci con molte scoperte incondizionate. Galileo che presupponeva che la forma fosse una parabola. Tuttavia, mentre tutti hanno dimostrato che la curva non è una parabola, non

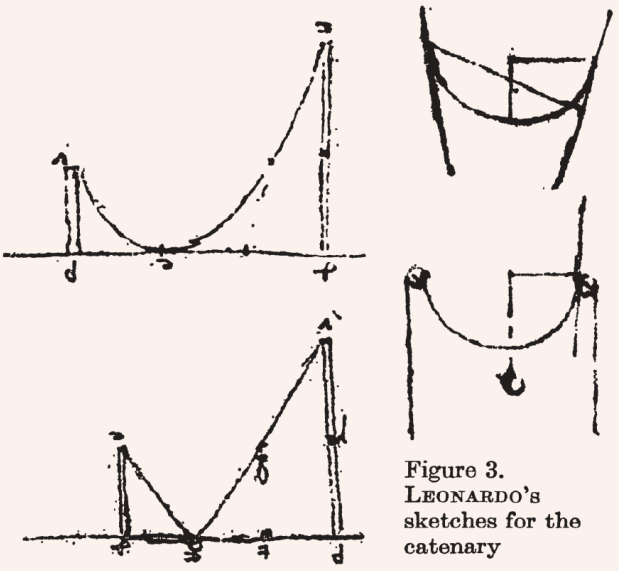


Figure 3. LEONARDO'S sketches for the catenary

Figura 9.3: Gli schizzi di Leonardo per il catenario (Truesdell, 1960)

sono stati in grado di dire quale forma la catena sospesa è realmente. Questo dovrebbe aspettare la sfida di Jakob Bernoulli.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

9.2.1.2 Galileo

Nel 1614, il matematico fiammingo Isaac Beeckman (1588-1637) annotò nel suo taccuino un cordone sospeso ("Lascia che un fascio si appenda un cordone... attaccato alle estremità in modo che si appenda liberamente e liberamente"), insieme a uno schizzo; mise anche la domanda a Descartes. [Beeckman]«' chiedere se un cavo fissato dalle unghie possa descrivere una parte di un conico, ma non c'è alcuna indicazione che Descartes abbia perseguito una soluzione o ne abbia discusso ulteriormente con Beeckman.[3].

Più tardi nel 1638 Galilei, 1638 ha indagato anche il problema e senza alcuna analisi formale ha dichiarato:

> Guidare due unghie in una parete ad un'altezza conveniente e allo stesso livello; fare la distanza tra queste unghie due volte la larghezza del retttangolo su cui si desidera tracciare la semiparabola. Questa catena assumerà la forma di una parabola, in modo che se questa forma sia segnata da punti sulla parete avremo descritto un parabola completo che può essere diviso in due parti uguali disegnando una linea verticale attraverso un punto intermedio tra le due unghie.
>
> Galilei, 1638 Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno à due nuove scienze

Va notato che Galileo, avendo già dimostrato che la traiettoria di un proiettile è parabolica, considerava che il catenario avrebbe la stessa forma.

9.2.1.3 Stevin; (1634)

Questo problema apparve anche nelle opere di Stevin (1548-1620), il cui *Les Oeuvres Mathématiques* fu pubblicato postumo nel 1634 con annotazioni del matematico Albert Girard. Nel materiale statico, Stevin tratta i problemi che coinvolgono le corde; in una nota marginale Girard afferma:

> *... perché altre corde a dondolo o a dosso sono linee paraboliche (come ho in passato dimostrato intorno all'anno 1617), come proverò dopo questo alla fine del corollario seguente.*
>
> Stevin, 1987 *Les oeuvres mathématiques*, p. 508

Non esiste una prova precedente del 1617, dopo il corollario di Stevin, Girard, (Girard, 1634) aggiunge un'ulteriore promessa (spesso nota nella letteratura secondaria) di pubblicare l'argomento completo in seguito:

> Per soddisfare la mia promessa precedente che precede l'ultimo corollario, e non avendo attualmente il tempo libero di inserire qui una copia della mia intera prova, lo renderò pubblico in un altro momento

[3]Vedi Bukowski, 2008; cf. Truesdell, 1960. Per fonti primarie, consultare Beeckman's *Gazzetta ufficiale* (ed. de Waard) e *Oeuvres de Descartes* (ed. Adam-Tannery) (Beeckman, 1939), (Descartes, 1897a)

COPIA DI REVISIONE

> insieme alle mie altre opere, Dio disposto, quando lo studio delle scienze sarà più favorevolmente ricevuto di quanto non è ora.
>
> Stevin, 1987 *Les oeuvres mathématiques*, p. 508 *(parafrasi di francese Girard)*

Non apparvero prove del genere, e Girard stesso era morto per il momento in cui l'edizione del 1634 fu emessa.[4] [5]

9.2.1.4 Huygens (c. 1646)

Huygens (Constantijn) padre era una conoscenza di Girard (che aveva annotato l'opera di Stevin) e scambiato la corrispondenza con il monaco francese Marin Mersenne (1588-1648) (Bukowski, 2008)Mersenne è spesso chiamato un centro di compensazione per idee matematiche e scientifiche, come ha risposto con molti dei migliori pensatori in tutta Europa. Come padre orgoglioso, Constantijn Huygens è stato lieto di dire a Mersenne del suo brillante figlio di diciassette anni Christiaan.

Nel 1640, i giovani Huygens (allora i suoi ragazzi) scrissero a Mersenne (Huygens, 1888b , p. 28):

> Vi invierò in un'altra lettera una prova che un cordone appeso o una catena non fa un parabola, e che cosa dovrebbe essere la pressione sul cordone matematico o uno senza gravità per farne uno; Ho trovato una tale prova non molto tempo fa.
>
> Huygens, 1888b Oeuvres completes de Christiaan Huygens, vol. 1, p. 28

Huygens scrisse a Mersenne:

> *Nulla ergo catena pendet secundum lineam parabolicam.* (Perciò, nessuna catena pende secondo la linea parabolica.)
>
> Huygens, 1888b Oeuvres completes de Christiaan Huygens, vol. 1

Tuttavia, non è stato in grado di determinare la vera forma della curva.

Poiché la catena sospesa non è una parabola, Huygens afferma di aver capito come far entrare la catena a forma di parabola con l'aiuto di alcune forze esterne. Incuriosito dalla pretesa di Huygens sulla catena sospesa, Mersenne ha risposto il 16 novembre che desidera vedere la prova

[4] Vedi (Bukowski, 2008) e (Truesdell, 1960) per la discussione.

[5] Sul confronto tra il "too stretto" di Fermat: la nota di Fermat risale al *c.* 1637 e fu stampato postumo nell'edizione 1670 di Diophantus, non 1630.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

> ... che la catena, o corda allungata, appeso sotto il proprio peso al centro, non fa una parabola, come messo da Galileo...

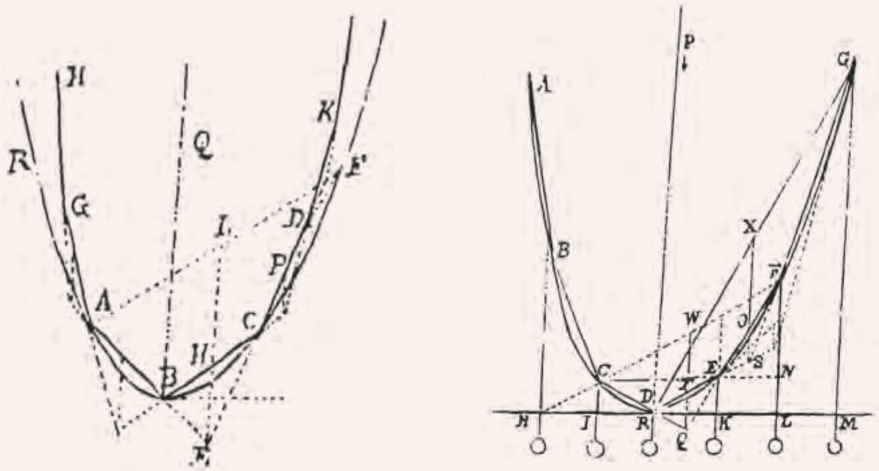
Egli afferma anche il suo desiderio di vedere la prova aggiuntiva di Huygens, mentre lo porta un passo avanti, come dice a Huygens che vuole vedere cosa vuole vedere

> deve essere la pressione per esso per fare il parabola sopra citato, e se si aggiunge, come è necessario, la pressione per esso per fare un iperbola e un'ellisse, allora si supererà te stesso.

Più tardi quel mese, Huygens risponde a Mersenne con una prova completa delle sue affermazioni riguardo alla catena sospesa.

La soluzione di Huygens è puramente geometrica, Fig. 9.4a (Huygens, 1888b). Interessante, egli "forzato' la catena sospesa per essere un parabola sospendendo pesi uguali a intervalli uguali lungo la proiezione orizzontale (al contrario di intervalli uguali lungo la stringa stessa). Ciò rappresenta una distinzione cruciale: una catenaria (catena uniforme sotto il suo peso) differisce da un cavo parabolico di ponte di sospensione (carico unitario distribuito orizzontalmente).

Una spiegazione dettagliata della soluzione di Huygens si trova in (Bukowski, 2008).



(a) Impiccatura di problemi di catena (Proposizione 8)

(b) Forcing una catena da appendere come parabola (Proposta 11)

Figura 9.4: Catenario; Christiaan Huygens (Huygens, 1888b)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Gli huygens hanno messo a riposo il suo studio della catenaria per quarantacinque anni fino alla sfida di Bernoulli (§9.2.2.2)

9.2.2 Sfide

Tabella 9.2.2.1 è un riassunto cronologico di questa storia, (come il resto di questa sezione) è in gran parte basato sull'ottimo studio recente di Alassi, 2020.

9.2.2.1 Interludio: terminologia

Prima di affrontare la sfida di Bernoulli, chiariamo i termini chiave che useremo.

Tabella 9.2: Terminologia per curve nella famiglia "Funicularia' (dopo Alassi, 2020).

Termine	Modello fisico	Assunzioni chiave / carico	Rapporto canonico (indicativo)
Funicolare	Termine ombrello: forma un filo flessibile o un foglio può assumere sotto carichi dati (include catenaria, elastica, velaria, lintearia).	Comportamento costitutivo e carico variano a seconda del caso. Obiettivo: determinare la curvatura $\kappa(s)$ dall'equilibrio.	Problema principale: equilibrio di forze/momenti $\Rightarrow$ legge di curvatura; specializzazioni sotto.
Catenaria (catenaria)	Impiccatura inestesa, catena perfettamente flessibile / cavo sotto il proprio peso; endpoint fissi.	Nessuna rigidità o taglio piegante; peso uniforme per lunghezza unitaria w.	$y = a\cosh\left(\frac{x-x0}{a}\right) + C$; equivalente $H\sqrt{1+(y')^2}$; curvatura $\kappa = \frac{w}{H}\frac{1}{1+(y')^2}$.
Elastico	Intensibile, snello snello intasibile con rigidità di flessione B (Assolutamente) elasticità").	Diritto costituzionale $M = B\,\kappa$; forze esterne di fine / movimenti imposta BCs.	Forma di Euler (planare): $B\,\theta'' + P\sin(\theta-\theta_P) = 0$; soluzioni tramite Integratori ellittici (ad esempio elastica rettangolare).
Vela	Curva di una vela rettangolare fissata ai suoi angoli e gonfiata dal vento (membrana pressurizzata).	Foglio flessibile sotto pressione uniforme (circa); filetti inestesi (idealizzazione di Bernoulli).	Membro della Commissione *Funicolare*; curvatura governata da fattori di pressione nella membrana; costruzione geometrica di Bernoulli.
La guerra	Curva di un panno rettangolare i cui due lati opposti sono supportati orizzontalmente e caricati da un fluido contenuto.	Membrana flessibile; carico trasversale varia con profondità (idrostatica).	Membro della Commissione *Funicolare*; profilo distinto da catenaria a causa di carico non uniforme.

9.2.2.2 Jakob Bernoulli's *Funicolare* sfida; 1690

Il problema della catenaria - che determina la curva matematica formata da una catena sospesa - divenne un caso di prova cardine per il calcolo emergente nel 1690, che dimostrerebbe la superiorità dei metodi analitici rispetto agli approcci geometrici tradizionali.

COPIA DI REVISIONE

Alla fine del XVII secolo, il calcolo (cortesia di Newton e Leibniz) fu nascente e la sua supremazia sui metodi "tradizionali" (geometrica) stava per essere dimostrata risolvendo il problema catenario[6].

Quindi, il tempo era maturo nel maggio 1690 per Jakob Bernoulli per sfidare la comunità matematica per risolvere il problema catenario[7] (Bernoulli, Jakob, 1690b).

Tabella 9.3 fornisce un riassunto cronologico di questa storia, in gran parte basato sull'eccellente studio recente di Alassi, 2020.

Tabella 9.3: Sviluppo cronologico della soluzione catenaria (basata su (Alassi, 2020))

Data	Da	To	Oggetto
XV secolo	Leonardo		Osservazione casuale della catena sospesa
1638	Galileo	—	Si dice che sia un parabola
fine 1600	Huygens, Pardies		No, non è un parabola.
Maggio 1690	Jakob B.	Leibniz	Emette una sfida a Leibniz & Tschirnhaus
Jul 1690	Leibniz	Jakob B.	Accetta la sfida; rivendica una soluzione; imposta la scadenza
9 ottobre 1690	Huygens	Leibniz	Invia una soluzione (cifrata); chiede di vedere Leibniz (cifrata)
13 ottobre 1690	Leibniz	Huygens	Note similitudini; cita piccole differenze
Nov 18, 1690	Huygens	Leibniz	Chiede di vedere la soluzione cifrata per la verifica
Dec. 1690	Johann B.	Editore AE	Presenta una soluzione con condizioni
31 dicembre 1690			**Deadline (non pubblicata soluzione di Leibniz)**
Jan 6, 1691	Editore AE	Leibniz	Conferma la ricezione della soluzione di Johann B.
27 gen, 1691	Leibniz	Huygens	Post-script: accetta la soluzione di Huygens ma nota un'altra curva
20 feb, 1691	Leibniz	Huygens	Johann lo prese; usò il calcolo "my"'
23 febbraio 1691	Huygens	Leibniz	Altri geometri possono risolvere questo problema facile
26 mar 1691	Huygens	Leibniz	Ammette una scivolata nel suo codice; chiede di controllare con Johann B.
Mar 1691	Jakob B.	Editore AE	Addendum: estende la soluzione del fratello
21 marzo 1691	Editore AE	Leibniz	Informare sulla soluzione di Jakob
20 aprile 1691	Leibniz	Huygens	Segnala la pressione da AE per presentare la sua soluzione
5 maggio 1691	Huygens	Leibniz	Soluzione in busta sigillata
1691	Leibniz	Editore AE	Presenta le soluzioni di Huygens
Giugno 1691	Editore AE	—	Pubblicazione delle tre soluzioni
Jul 1691	Leibniz	Huygens	Invia la sua opinione su varie conclusioni
Set 1691	Huygens	Leibniz	Rispondi
21 settembre 1691	Leibniz	Huygens	Si difende contro le accuse di plagio
Nov 16, 1691	Huygens	Leibniz	Riconciliazione; studierà il nuovo calcolo infinitesimale in profondità

L'idea era che i matematici potessero presentare soluzioni da pubblicare simultaneamente, garantendo un corretto confronto tra i metodi. *Atto Eruditorum*, (Bernoulli, Jakob, 1690b)[8].

Invitò Leibniz e Tschirnhaus[9] Jakob Bernoulli ha esteso questa pratica proponendo la

[6] Può essere shown che rotolando una parabola su una linea retta, il suo fuoco traccia un catenario.

[7] Proporre domande matematiche come concorsi era già popolare tra i matematici rinascimentali e quelli del primo-moderno, tra cui Huygens e Leibniz. (Alassi, 2020).

[8] *Atto Eruditorum* (Latin for "Acts of the Erudite") fu la prima rivista scientifica delle terre di lingua tedesca d'Europa, pubblicata dal 1682 al 1782. Fu sostenuta da Leibniz stesso che contribuì 13 articoli. Jakob Bernoulli e Euler pubblicarono anche in esso. *Atto* affiancato da Leibniz, mentre le Transazioni Filosofiche si schierarono con Newton.

[9] Tschirnhaus era un matematico tedesco che Leibniz incontrò anche a Parigi. fare riferimento al 1696 qui

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

domanda all'intera comunità matematica e in particolare ha chiesto a Leibniz e Tschirnhaus di considerare il problema. Inizialmente, Jakob non ha stabilito alcuna scadenza specifica, riflettendo la difficoltà del problema. 9.5:

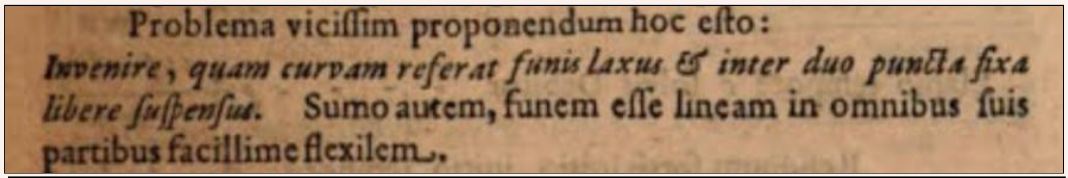
> E ora lasciamo che questo problema sia proposto: trovare la curva assunta da un filo sciolto appeso liberamente da due punti fissi. Presumo anche che il filo sia una linea facilmente flessibile in tutte le sue parti.
>
> Bernoulli, Jakob, 1690b «*Problema funicularium (challenge on the curve of a hanging thread)*»

9.2.2.3 La risposta di Leibniz e la modifica della sfida: fine del 1690

Leibniz, sebbene addestrato in legge, aveva studiato matematica con Huygens a Parigi tra il 1672 e il 1676. Quindi, Leibniz accettò la sfida e rispose alla fine del 1690, modificando efficacemente la sfida aperta di Jakob in una competizione più strutturata:

> Si suppone che anche la corda rimanga della stessa lunghezza, come una catena, piuttosto che essere allungata o contratta come un filo. Questo problema, proposto da Galileo e famoso fin dal suo tempo, non ha ancora dato a soluzione ... Perciò dovrei giustamente essere giustificato dal peso imposto, soprattutto perché sono molto attratto in altre questioni. Ma l'umanità attaccata di quell'uomo più illuminato è tale che non vorrei fallire dei suoi primi convociti. [il problema]che fino ad allora non avevo tentato, e con la mia chiave [cioè il calcolo differenziale] Tuttavia, questo problema è un po' più coinvolto del mio precedente e mostra un certo uso singolare del nostro metodo; così ho pensato che vale la pena, prima di pubblicare la mia soluzione, di dare tempo anche agli altri per esercitare la loro abilità. Da questo come per la pietra lidica conosceremo i metodi migliori; che porta molto sul miglioramento della scienza; soprattutto perché qui non si tratta di calcolo elaborato, ma di tutti i nobili. [Contesto Tschirnhausen], chi promette cose splendide di questo tipo, si chiede se vuole

sotto nel 1696 fu il fratello di Jakob, Johann Bernoulli a porre un problema (brachistochrone) ai lettori di *Atto Eruditorum*Bernoulli ha pubblicato questi contributi (tra cui Tschirnhaus) insieme a suo nella rivista nel maggio dell'anno successivo.



Problema viciſſim proponendum hoc eſto:
Invenire, quam curvam referat funis laxus & inter duo puncta fixa libere ſuſpenſus. Sumo autem, funem eſſe lineam in omnibus ſuis partibus facillime flexilem.

Sia questo, a sua volta, il problema proposto:
determinare quale curva sia descritta da una fune allentata, sospesa liberamente fra due punti fissi. Suppongo inoltre che la fune sia una linea perfettamente flessibile in ogni sua parte.

Figura 9.5: Jakob Bernoulli *Funicolare* sfida (Bernoulli, Jakob, 1690b, p. 219)

COPIA DI REVISIONE

> provare la forza del suo metodo anche qui, ma se nessuno indica prima della fine dell'anno che ha trovato una soluzione, io darò il mio, Dio disposto.
>
> Leibniz, 1690 «*Ad ea, quae vir clarissimus JB, mense Majo nupero in his Actis publicavit, responsio*»

Essenzialmente, Leibniz ha realizzato due importanti modifiche:

- Egli ha semplificato il *Funicolare* problema assumendo una catena inestensibile (la *Catenaria*)
- Egli stabilì un termine (fine del 1690) e promise di rivelare la sua soluzione se non altri emersero
- Ha sfidato Tschirnhaus per dimostrare i suoi nuovi metodi matematici

Da questo punto in avanti, la maggior parte dei partecipanti si è concentrata sulla *Catenaria* (catena inestensibile) piuttosto che Jakob più generale *Funicolare* (Cablaggio esteso) problema.

9.2.3 Le tre principali soluzioni

L'uso di ciferi (soluzioni crittografate) nei seguenti scambi rifletteva sia la natura competitiva della scoperta matematica che il desiderio di stabilire la priorità, consentendo ai colleghi di lavorare sui problemi.

9.2.3.1 Johann Bernoulli; (ammessi dicembre 1690, pubblicato giugno 1691)

Nel frattempo, Bernoulli, Johann, 1691c Risolse anche il problema della catenaria e inviò la sua soluzione direttamente al redattore dell'AE nel dicembre 1690 e stabilì una condizione per la pubblicazione della sua soluzione: voleva che venisse pubblicata nello stesso momento della soluzione di Leibniz. Johann aveva presentato la sua soluzione prima della scadenza di Leibniz, ma Leibniz non pubblicò la sua analisi; invece, continuò la sua corrispondenza con Huygens.

Durante l'inverno e la primavera del 1691, la corrispondenza tra Leibniz e Huygens continuò. In un post di una lettera inviata a Huygens il 27 gennaio 1691 senza inchiodare alcun cifrario della sua analisi, Leibniz accettò che la curva ausiliaria di Huygens potesse essere utilizzata anche per la costruzione geometrica del catenario.

> Credo che ci saranno molti altri geometri che risolveranno questo problema perché, per dirvi la verità, non sembra molto difficile, tranne che chiedete qualcosa di più di quello che ho trovato
>
> Bernoulli, Johann, 1691b «*Letter to Leibniz*»

Nella sua lettera del 2 marzo 1691, Leibniz informò Huygens che Johann Bernoulli aveva risolto con successo il problema e si orgogliose dell'idea che il suo calcolo avrebbe

COPIA DI REVISIONE

aiutato Johann. Ammettendo che il suo tono nella nomina di Tschirnhaus non era solo esigente ma anche deliberatamente provocatorio, Leibniz espresse anche la sua delusione che Tschirnhaus non aveva accettato la sfida:

> Il signor Tschirnhaus non mordeva, anche se deliberatamente parlavo in modo da attirarlo, per dargli l'opportunità di usare il suo metodo, poiché ci aveva promesso che avrebbe fatto tanto, e mi aveva persino indirettamente rimproverato per aver detto che l'analisi ordinaria non sarebbe stata sufficiente in questi casi.
>
> Leibniz, 1691d «*Letter to Huygens*»

Il 26 marzo 1691, Huygens, che aveva notato una scivolone della penna nel suo primo cipher, inviò Leibniz un secondo che era una versione corretta ed estesa del primo. Huygens suggerì che Leibniz potesse comunicare questo secondo cifrario a Johann e chiedergli di farlo in cambio. Huygens ha espresso il suo stupore al silenzio di Tschirnhaus nonostante sia stato particolarmente nominato da Leibniz, dimenticando che il termine era già scaduto, Huygens sperava che Tschirnhaus potesse trovare qualcosa nel tempo rimanente. Inoltre, in questa lettera, Huygens esprime la sua opinione sulla necessità di scambiare i cipher per garantire la priorità e prevenire le dispute.

9.2.3.2 Huygens; (ammessi ottobre 1690, pubblicato maggio 1691)

Soluzione iniziale di cifratura (ottobre 1690) La prima risposta alla versione modificata di Leibniz della sfida di Jakob venne da Christiaan Huygens, suo ex mentore, il 9 ottobre 1690. Questo scambio segnò l'inizio di una corrispondenza estesa tra i due giganti del catenario. Nella sua lettera, Huygens chiuse la sua soluzione in forma cifrante, notando che in gioventù aveva già corrisposto con Padre Mersenne (§9.2.1.4) sul problema e aveva stabilito che la curva di una catena sospesa non è una parabola, contrariamente all'ipotesi di Galileo. Huygens, a sua volta, si aspettava che Leibniz si ricambiasse inviando la sua soluzione in cipher, osservando che tra i due di loro potevano accorciare la scadenza[10] Leibniz aveva proposto, il cifrario che egli racchiudeva conteneva l'equazione della curva generatrice per la sua costruzione geometrica del catenario:

$$xxyy \propto a^4 - a^2y^2 \tag{9.4}$$

Scambio e rifiniture matematiche (ottobre 1690 – marzo 1691) Il 13 ottobre 1690, senza chiudere alcun cifrario, Leibniz rispose[11] che aveva trovato alcune somiglianze con il suo calcolo e una differenza, Fig. 9.6:

[10] Huygens inizialmente frainteso la linea temporale, credendo che Leibniz avesse fissato un periodo più lungo rispetto alla scadenza della fine dell'anno.

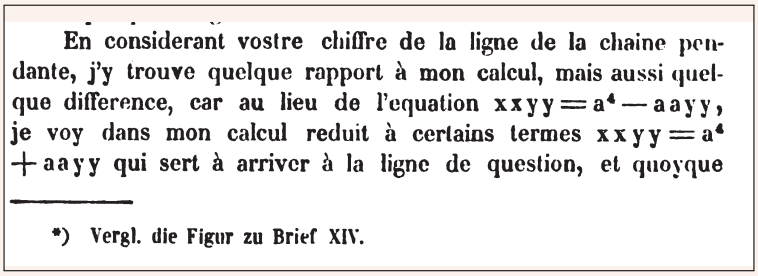
[11] Huygens e Leibniz comunicarono in francese come lingua comune erudita dal periodo di Parigi di Leibniz.

COPIA DI REVISIONE

En considerant vostro chiffre de la chaine ciondolo, j'y trouve quelque rapport à mon calcolo, mais aussique differenza, car au lieu de l'equation $xxyy = a^4 - aayy$, je voy dans mon calcolo reduit à determinati termini $xxyy = a^4 + aayy$, qui sert à arriver à la ligne de que, et quoyque cette ligne soit du nombre des trascendeantes, je ne laisse pas (supposita ejus constructione) d'en pouvoirr non seulement les touchantes, mais encor la dimension de la courbe, la superficie du solide de sa rote et la dimension de l'e

Considerando il tuo cifrario per la catena sospesa, trovo un accordo con il mio calcolo, ma anche una certa differenza. $x^2y^2 = a^4 - a^2y^2$, arrivo, quando il mio calcolo è ridotto a certi termini, a $x^2y^2 = a^4 + a^2y^2$, che serve a raggiungere la curva richiesta; e sebbene questa curva sia tra quelle trascendentali, sono tuttavia in grado (una volta che la sua costruzione si assume) di fornire non solo i tangenti, ma anche la misura della curva stessa, la superficie del solido generato dalla sua rotazione, e il volume dello spazio racchiuso dalla curva e dall'asse; e il calcolo mi offre tutto questo, come era, di propria accordo.

Leibniz, 1901 «*Letter to Christiaan Huygens, October 13, 1690*»



En considerant vostre chiffre de la ligne de la chaine pendante, j'y trouve quelque rapport à mon calcul, mais aussi quelque difference, car au lieu de l'equation xxyy = a⁴ — aayy, je voy dans mon calcul reduit à certains termes xxyy = a⁴ + aayy qui sert à arriver à la ligne de question, et quoyque

*) Vergl. die Figur zu Brief XIV.

Figura 9.6: Leibniz risponde a Huygens, oct, 1690 (Leibniz, 1923)

La differenza che Leibniz sottolinea è nell'equazione della curva ausiliaria; afferma che, con il suo calcolo, risulta essere:

$$xxyy \propto a^4 + a^2y^2 \tag{9.5}$$

Poiché nessuna dimostrazione è stata inviata, Huygens ha controllato il suo calcolo e non ha trovato alcun errore in esso, e si è transformato in in sospetto dell'accuratezza del calcolo di Leibniz (Alassi, 2020). Il 18 novembre 1690 Huygens affermò che, poiché l'unica differenza tra i risultati era un segno, fu sicuramente causato dai loro metodi diversi.[12]. Ha insistito ancora una volta che Leibniz gli invia la sua soluzione completa (Leibniz, 1901, Vol. 9). Tuttavia, Leibniz mantenne il silenzio fino al 2 marzo 1691, in cui confermò a Huygens che Johann Bernoulli aveva trovato anche la sua soluzione e che il calcolo infinitesimale certamente avrebbe dovuto aiutarlo (Leibniz, 1901, Vol. 9).

Correzione del cifrario e sottomissione finale (marzo-maggio 1691) Il 26 marzo 1691 Huygens, che aveva notato una scivolone della penna nel suo primo cipher, inviò Leibniz a una versione corretta ed estesa. Huygens suggerì che Leibniz potesse comunicare questo

[12]Era in questo scambio che Huygens coniò il nome *La catena* (Leibniz, 1901, Vol. 9).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

secondo cifra a Johann e chiedergli di fare il suo in cambio. Inoltre, Huygens espresse il suo stupore al silenzio di Tschirnhaus, nonostante fosse stato nominato da Leibniz.

Huygens scrisse a Leibniz altre due lettere insistendo a vedere la sua soluzione, ma Leibniz non era d'accordo (Alassi, 2020)Infine, il 5 maggio 1691, Huygens inviò la sua soluzione definitiva a Leibniz in una busta sigillata insieme ad una lettera che chiedeva la sua soluzione chiusa da trasmettere all'AE. Ciò segnava la fine di quasi otto mesi di corrispondenza e raffinatezza del suo approccio al problema catenario.

Pubblicazione (giugno 1691) La soluzione di Huygens fu pubblicata nel giugno 1691 insieme a quelle di Johann Bernoulli e Leibniz nel giugno 1691. *Atto Eruditorum*, che rappresenta il culmine del suo prolungato impegno con la sfida catenaria dal 1690 al maggio 1691.

9.2.3.3 Leibniz; (ammessi maggio 1691, pubblicato giugno 1691)

Pur mantenendo una vasta corrispondenza con gli Huygens durante tutto l'inverno e la primavera del 1691, Leibniz stava sviluppando contemporaneamente il proprio approccio sistematico al problema catenario. & Logarithmos's (Leibniz, 1691a), rappresentato il trattamento più completo e teoricamente profondo delle tre soluzioni.

Approccio analitico utilizzando il calcolo differenziale Il metodo di Leibniz ha esemplificato la potenza del suo nuovo calcolo differenziale, a differenza dell'approccio geometrico di Huygens, Leibniz ha trattato il catenario come un problema puramente analitico, ponendo equazioni differenziali basate sulle forze fisiche che agiscono su ogni elemento della catena sospesa. tensione e gravità.

Considerando un elemento infinitesimale della catena e applicando l'equilibrio delle forze, Leibniz ha derivato la caratteristica equazione differenziale del catenario, il suo uso sistematico dei differenziali gli ha permesso di esprimere il rapporto tra le coordinate della curva direttamente in termini di parametri fisici del problema.

Collegamento a Logaritmi e Quadratura iperbolica Forse più significativamente, Leibniz riconobbe che il problema della catenaria era fondamentalmente collegato alla quadratura dell'iperbola - essenzialmente, alle funzioni logaritmiche. Come scrisse a Huygens il 24 luglio 1691, scoprì che sia i problemi catenari che altri trascendenteri "require solo la quadratura dell'iperbola da costruire" e che aveva "ridotto tutto a logarithm."

Questa visione era rivoluzionaria. Leibniz ha dimostrato che il catenario poteva essere espresso utilizzando ciò che ora riconosciamo come funzioni iperboliche, stabilendo un collegamento diretto tra la curva geometrica e le espressioni analitiche che coinvolgono esponentiali e logaritmi. Questa riduzione ai logaritmi ha fornito non solo la descrizione matematica più elegante, ma anche il metodo più pratico per il calcolo numerico.

Trattamento Matematico completo La soluzione di Leibniz è andata oltre il semplice trovare l'equazione curva. La sua carta ha dimostrato come il catenario potrebbe essere usato "adinveniendas quotcunque medias propoles & Logarithmos' (per trovare un numero

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

di proporzionali medi e logaritmi), che mostra applicazioni pratiche della curva nella risoluzione di altri problemi matematici.

- Trovare tangenti al catenario in qualsiasi punto
- Calcolo della lunghezza dell'arco di qualsiasi parte della curva
- Determinazione dell'area sotto il catenario
- Computing l'area superficiale e il volume del solido di rivoluzione formato ruotando il catenario

Metodologia sistemica Mentre Huygens e Johann Bernoulli avevano trovato soluzioni specifiche al problema della catenaria, Leibniz sviluppò un quadro analitico completo che potrebbe essere applicato a un'intera classe di problemi simili. Il suo metodo fornì quello che chiamò "il meglio di tutte le possibili costruzioni, per trascendenti", che stabiliva il calcolo differenziale come strumento preferito per risolvere tali problemi.

Leibniz ha presentato la sua soluzione al *Atto Eruditorum* nel maggio 1691, e apparve nel numero di giugno accanto alle soluzioni di Huygens e Johann Bernoulli, completando il triumvirato di soluzioni che avrebbero stabilito il catenario come un risultato di riferimento nell'applicazione del calcolo ai problemi fisici.

9.2.3.4 Pubblicazione e Risoluzione finale; giugno 1691

Il 21 marzo 1691, Mencke ha informato Leibniz sull'articolo di Jakob Bernoulli e il suo *Additamentum ad Problema Funicolare*. Poiché l'articolo di Jakob avrebbe violato la richiesta di Johann, decisero di pubblicarlo nello stesso numero che avrebbe contenuto le soluzioni al problema della catenaria. Il 20 aprile 1691, Leibniz informò Huygens che era stato pressurizzato dai redattori dell'AE per presentare la sua risposta. Leibniz ha anche spiegato l'accordo di Johann per la pubblicazione della sua soluzione e ha attestato che non l'aveva vista lui stesso. Si è anche astenuto dal chiedere a Johann un cifrario perché Johann aveva trasmesso direttamente la sua risposta ai redattori di AE, e chiedere un cifrario avrebbe sollevato sospetti. Ricordando che la scadenza del concorso è scaduta a lungo, ha informato Huygens che avrebbe presentato la sua analisi per la pubblicazione presto e ha esortato Huygens a fare lo stesso. Leibniz ha assicurato Huygens che i redattori erano consapevoli che Huygens aveva risolto il problema prima e che avrebbero trattato la sua soluzione confidenziale.

Il 5 maggio 1691, Huygens inviò la sua soluzione a Leibniz in una busta sigillata insieme ad una lettera che chiedeva la sua soluzione chiusa per essere trasmessa all'AE. Insieme ad essa, Leibniz presentò la sua soluzione per la pubblicazione nel maggio 1691. 9.7, insieme ad una prefazione che ha descritto l'ordine e la data in cui l'editore aveva ricevuto le risposte. L'editore ha posto l'articolo di Jakob Bernoulli subito dopo le tre soluzioni.

COPIA DI REVISIONE



274 ACTA ERUDITORUM

SOLUTIO PROBLEMATIS FUNICULARII, exhibita a Johanne Bernoulli, Basil. Med. Cand.

ANnus fere est, cum inter sermocinandum cum Cl. Fratre mentio forte incidisset de Natura Curvæ, quam funis inter duo puncta fixa libere suspensus format. Mirabamur rem omnium oculis & ma-

(a) Johann Bernoulli

MENSIS JUNII A. M DC XCI. 277

DE LINEA IN QUAM FLEXILE SE pondere proprio curvat, ejusque usu insigni ad inveniendas quotcunque medias proportionales & Logarithmos. Autore G. G. L.

PRoblema Linea Catenaria vel Funicularis duplicem usum habet; unum, ut augeatur ars inveniendi seu Analysis, quæ hactenus ad talia non satis pertingebat, alterum ut praxis construendi promoveatur. Reperi enim hanc lineam ut facillimam factu, ita utilissimam effectu esse, nec ulli Transcendentium secundam. Nam suspensione

(b) Leibniz

CHRISTIANI HUGENII, DYNASTÆ IN Zülechem, solutio ejusdem Problematis.

SI Catena CVA suspensa sit ex filis FC, EA utrinque annexis, ac gravitate carentibus, ita ut capita C & A sint pari altitudine, deturque angulus inclinationis filorum productorum CGA, & catenæ totius positus, cujus vertex sit V, axis VB. TAB. VII. Fig. 2.

1. Licebit hinc invenire tangentem in dato quovis catenæ puncto. Velut si punctum datum sit L, unde ducta applicata LH dividat æqualiter axem BV. Jam si angulus CGA sit 60, erit inclinanda a puncto A ad axem recta AJV, æqualis ½ AB, cui ducta parellela LR, tanget curvam in puncto L. Item si latera GB, BA, AG sint partium 3, 4, 5, erit AIV ponenda partium 4½.

(c) Huygens

SPECIMEN ALTERUM CALCULI DIFferentialis in dimetienda Spirali Logarithmica, Loxodromiis Nautarum, & Arcis Triangulorum Sphæricorum: una cum Additamento quodam ad Problema Funicularium, aliisque, per I. B.

TAB. VIII. Fig. I. DE Spirali Logarithmica: Si in plano circuli BCH jaceat curva BDEIPC, quam secent eodem angulo obliquo radii CB, CL &c, ex centro circuli C educti, dicetur Curva hæc Spiralis Logarithmica; quoniam sumtis arcubus LM. MN &c, infinite parvis & æqualibus, hoc est, ipsis BL, BM, BN, Arithmetice proportionalibus, radii DC, EC, IC, sunt Geometrice proportionales, ob Triangula similia DCE, ECI, &c. Spiralis isthæc jam Wallisio & Barrovio considerari cœpta est;

(d) Jakob Bernoulli

Figura 9.7: Giugno 1691 *eruditis* soluzioni alla sfida catenaria di Jakob Bernoulli

9.2.3.5 Analisi post-pubblicazione e Legacy

Una volta pubblicate tutte le soluzioni, Leibniz diede a Huygens la sua opinione sulle somiglianze e le differenze di ciascuna delle descrizioni matematiche. (Leibniz, 1691c), ha fatto riferimento all'uso del suo nuovo metodo da parte di Johann Bernoulli, riducendo il problema alla quadratura dell'iperbola attraverso la loro equivalenza matematica:

> [C]omme les Equations comunis pures se risolunt par la seule estrazione des racines ; de même les Equations pures Transcendentes sont reduites aux sommes ou quadratures. Et comme on n'a pas encor perfectionné l'Analyse des Equations; de même n'ay je pas encor tellement perfectionnée ma metodo que je puisse tousjours reduire tous ces problemes Transcendans aux seules quadratures. Cependant j'en ay ouvert le chemin, et même je suis assiez avancé. Aussi les deux problems, que vous m'avés proposés, Monsieur, qui indossant d'abord une Equation Transcendente Affectée, se peuvent tous deux reduire aux quadratures; a même je trouve qu'ils ne supponent que la quadrature de l'Hyperbole pour estre construits Et quand je puis reduire ces problemes aux quadratures, je crois alors d'avoir surmonté la plus grande difficileé. Cependant pour perfectionner cette Methode il faut aussi achever la dottrina des quadratures.
>
> Come le equazioni puri ordinarie sono risolte dalla semplice estrazione delle radici; allo stesso modo le equazioni puramente trascendentali sono ridotte a somma o quadrature. E proprio come l'analisi delle equazioni non è ancora stata perfezionata; allo stesso modo non ho ancora perfezionato il mio

COPIA DI REVISIONE

> metodo che posso sempre ridurre tutti questi problemi trascendentali a superare le quadrature da solo. Tuttavia, ho aperto il percorso, e ho proposto anche problemi molto avanzati.
> Leibniz, 1691c «*Letter to Christiaan Huygens*»

La precisione del calcolo di Leibniz lo portò a sospettare che altri potessero plagiare i suoi metodi, ma quando si manifestarono tali sospetti riguardo alle soluzioni catenarie, Leibniz si difese in una lettera il 21 settembre 1691, sostenendo che i redattori dell'Atto Eruditorum avevano trattato con feroce riservatezza il contributo di Johann Bernoulli. Inoltre, Leibniz ha fatto notare vari errori commessi da Huygens. Aveva pubblicato nell'Atto Eruditorum del giugno 1688 un articolo chiamato "De Angulo contactus et osculi" in cui aveva ridotto il catenario alla somma dei secants dell'arco; avrebbe dovuto in relazione il catenario con la quadratura dell'iperbola. La risposta di Huygens in una lettera del 16 novembre 1691, fu la riconciliazione di questa disputa, e affermò che era il suo desiderio di studiare profondamente il nuovo calcolo infinitesimale per comprendere finalmente il rapporto tra il catenario e la quadratura dell'iperbola.

Nonostante ciò, e anche dopo la risoluzione della sfida di Jakob Bernoulli, Huygens continua a sostenere l'adeguatezza dei suoi metodi geometrici rispetto all'approccio analitico di Leibculniz, che riflette la transizione generazionale nella metodologia matematica, mentre Huygens, che rappresenta la tradizione geometrica più antica, gradualmente è venuto ad apprezzare la potenza del calcolo Leibniziano, è rimasto più a suo agio con le sue tecniche classiche stabilite. La soluzione di Leibniz fu una dimostrazione avvincente ai suoi contemporanei, in particolare Huygens, della potenza e dell'utilità del calcolo infinitesimale. Con questa soluzione, riuscì a presentare un metodo generale per trovare la descrizione matematica delle curve meccaniche, un approccio che forniva un modo sistematico per gestire i problemi che coinvolgono l'infinito matematico. (Palomo, 2017 PDF), stabilendo il calcolo differenziale come strumento analitico dominante per i secoli che seguirono.

Risposta di Huygens (Huygens, 1888a) fu ritardato fino al 1o settembre 1691, quando ammise di non aver collegato il catenario con la quadratura dell'iperbola. *Atto Eruditorum*. Questo potrebbe spiegare l'enorme somiglianza tra le loro procedure, come ha espresso a Leibniz in un tono non molto affabile. Anche se Johann Bernoulli ha riconosciuto che la quadratura dell'iperbola potrebbe essere utilizzata per disegnare il catenario, Leibniz è andato oltre, riducendo tutto ai logaritmi, e in tal modo, determinare come la matematica futura si svilupperà:

> Ho anche aggiunto alla mia soluzione il centro di gravità di quest'ultima figura, cioè della sua area. M. Huyghens dà la costruzione della curva supponendo la seguente quadratura: $xxyy = a^4 - aayy$, mentre M. John Bernoulli, e io stesso, hanno legato il catenario alla quadratura dell'iperbola; quest'ultimo fa un uso assolutamente giudizio della quadratura di una curva parabolica, mentre per parte mia, ho ridotto tutto a logaritmi; ho determinato in questo modo il tipo di espressione, così come il migliore di tutte le possibili costruzioni, per trascendenti è presente un solo punto di proporzione.

COPIA DI REVISIONE

> Huygens, 1888a «*Letter to Gottfried Wilhelm Leibniz, 1 September 1691*»

9.2.4 Epiloga

9.2.4.1 Unificazione dimenticata

La borsa di studio moderna ha rivelato che Jakob Bernoulli ha unificato con successo i problemi catenari ed elastici attraverso la sua derivazione di un'equazione differenziale generale, raggiungendo l'obiettivo che aveva fissato quando ha emesso la sua sfida originale del 1690 (Alassi, 2020)Questo notevole risultato rimase sepolto nei suoi taccuini privati e non venne riconosciuto sia dai suoi contemporanei che dagli storici successivi. 6.16) incluso questo lavoro in Jakob's *Varia Posthuma* in 1744, (Bernoulli, 1744) il suo significato è stato trascurato.

La natura dimenticata del contributo di Jakob divenne evidente quando un matematico anonimo che utilizzava le iniziali LBC rivivò la sfida catenaria nel numero di agosto 1724 *Atto Eruditorum* (Anonymous, 1724)Questa nuova formulazione ha richiesto l'analisi di catene che erano "moderately flessibili" e "real" piuttosto che le catene perfettamente flessibili idealizzate del problema originale. La sfida LBC ha essenzialmente riformulato il problema della funicolarizzazione più ampio di Jakob, dimostrando come l'interpretazione più stretta di Leibniz abbia spostato la visione originale di Jakob nella memoria matematica.

Leonhard Euler rispose a questa sfida nel 1728 con una soluzione che potrebbe derivare sia curve catenarie che elastica da un approccio unificato. Di conseguenza, gli storici matematici hanno tradizionalmente accreditato Euler, non Jakob Bernoulli, con la prima unificazione di questi due problemi–un attribuzione che domina il lavoro pionieristico di Jakob da più di tre decenni (Alassi, 2020)Questa visione storica rappresenta uno dei casi più significativi di una scoperta matematica che si perde alla memoria scientifica, solo per essere riscoperto in modo indipendente anni dopo.

9.2.4.2 La Lega della Matematica

Mentre la sfida catenaria del 1690-1691 era stata risolta trionfalmente da Leibniz, Huygens e Johann Bernoulli, le sue riverberazioni intellettuali continuarono a lungo dopo che le soluzioni apparvero in Acta Eruditorum. (Bernoulli, Jakob, 1677–1705)Lavorando nel suo taccuino privato, i Meditazioni, cominciò a vedere connessioni che trascendevano la catena del pendente. La catenaria non era sola: apparteneva a una famiglia che comprendeva la velaria (curve del calco), la lintearia (curve lineari), e l'elastica (curve elastiche) che Jakob riconosceva queste come manifestazioni di un principio matematico unificato, sviluppando un'equazione differenziale generale che li governava tutti.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

9.2.4.3 Paradosso di Jakob

La sfida catenaria presenta una delle ironie più toccanti della matematica: Jakob Bernoulli, il professore distinta che ha deciso di sfidare la curva di una catena sospesa, è diventato l'unico grande matematico della sua epoca incapace di risolvere il suo problema. Jakob Bernoulli non ha fornito una soluzione al problema della catena sospesa che aveva posto - un punto spesso menzionato dal fratello minore Jab Johann in una rivalità a volte più grande che ha fatto l'ultima (Deakin, 2007; Alassi, 2020 PDF). Mentre Leibniz, Huygens, e più imbarazzante, il suo fratello minore Johann tutti pubblicato soluzioni eleganti nel giugno 1691 *Atto Eruditorum*Johann, che era stato studente di Jakob in matematica, si è impadronito di questo fallimento con una glee indiscussa, vantando

> Gli sforzi di mio fratello erano senza successo; da parte mia, ero più fortunato, perché ho trovato l'abilità (lo dico senza vantarmi, perché dovrei nascondere la verità?) per risolverla in pieno.
>
> n. d. Jakob Bernoulli

La sfida che Jakob aveva progettato per mostrare il potere del nuovo calcolo invece divenne una dimostrazione pubblica che lo studente aveva superato il padrone. Forse, soprattutto, era solo nella privacy della sua *Meditazioni* notebook (Bernoulli, Jakob, 1677–1705), lontano dal pubblico scrutinio, che Jakob avrebbe poi sviluppare le sue profonde intuizioni nella famiglia unificata di curve (Alassi, 2020 PDF)—come se gli dei matematici avessero riservato i loro segreti più profondi per l'uomo stesso che aveva fallito il loro primo test.

Per i dettagli analitici, consultare §30.3.3

9.3 La sfida elastica (1690-1744)

9.3.1 La sfida di Jakob Bernoulli (1690)

Prelude: Dialogo con un Artigiano

Prima di presentare la celebre sfida elastica di Jakob Bernoulli, vale la pena di pausingare su un testo piccolo ma rivelatore a volte etichettato il suo 'dialogo con un artigiano" (Bernoulli, Jakob, 1691)[13]In pochi brevi paragrafi Bernoulli stadicherà uno scambio fittizio con un meccanico esperto che descrive, dalla pratica del laboratorio, come si piegano le

[13]Da una prospettiva strettamente scientifica questo dialogo aggiunge poco alla matematica dell'elastica, la cui importanza è quella di mostrare come un matematico del XVII secolo abbia cercato di capire da un artigiano praticante. Purtroppo, tale scambio reciproco è raro oggi: i ricercatori contemporanei guardano raramente a artigiani esperti per ispirarsi a problemi di inquadramento o nell'applicazione dei propri progressi teorici. (Alassi, 2019).

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

sottili strisce di legno—il ruolo delle pinze, i limiti della rigidità, e l'inevitabile ritorno di primavera una volta rimosso un carico DANIEL. Bernoulli ascolta ma sfida dolcemente queste osservazioni di regola-of-thumb, suggerendo che la "bent figure"' deve obbedire ad una precisa legge matematica che annuncia un mondo intero sperimentabile da principi iniziali piuttosto che si risolverà. *Atto Eruditorum* (1691–1694).

La scelta di Bernoulli di un formato di conversazione echeggia il celebre Galileo *Dialogo*, i cui vivaci dibattiti tra Salviati, Sagredo e Simplicio erano diventati un modello per presentare filosofia naturale agli studiosi e ai laici, §6.6.2 e §6.6.2Come Galileo, Bernoulli ha usato il dialogo per drammatizzare l'incontro di know-how empirico e di astrazione matematica.

Il brano non contiene equazioni e non introduce alcun calcolo delle variazioni; il suo valore sta nel illustrare il passaggio dall'intuizione artigianale alla teoria rigorosa.Per i lettori moderni serve meno come fonte tecnica che come preludio culturale, evidenziando l'impegno di Bernoulli con la meccanica pratica, riconoscendo la tradizione galileiana del discorso scientifico accessibile, e segnalando le ipotesi semplificanti—slender, ponderless, inestensible rods.

Contesto

Fino al 1690, le indagini di Galileo, Cartesio, Mariotte e altri filosofi naturali si erano concentrate principalmente su questioni di forza, distributive e distributive dello stress, distributive e modalità di fallimento, trattando i membri strutturali come corpi essenzialmente rigidi. La pubblicazione del 1690 di Bernoulli avrebbe segnato un profondo cambiamento nella meccanica dei materiali, piuttosto che chiedersi solo quando una struttura fallisse, cercò di capire come si piega e deformasse l'elasticità, introducendo il gioco continuo.

Libro principale

Articolo di Jakob Bernoulli (Bernoulli, Jakob, 1690a)[14], intitolato *Spettrimoniale alterato calculi differenziali in dimetienda spirali logaritmica, loxodromis naturarum, & areis triangulorum sphaericorum*, occupa un luogo singolare nella storia iniziale di analisi[15].

All'epoca il calcolo differenziale di Leibniz era ancora nella sua infanzia, e il suo potere di risolvere problemi concreti doveva essere dimostrato a una comunità matematica scettica. In questa pubblicazione il contributo di Bernoulli offrì esattamente una tale dimostrazione.

[14]Borse moderne (Alassi, 2020) ha stabilito che l'addendum e l'anagramma appartengono all'articolo 1690, pubblicato nel giugno di quell'anno.

[15]I lettori non familiari con le basi geometriche della curvatura, compresi i concetti di cerchi osculatori, evoluti e il tasso di cambiamento dell'angolo tangente, sono fortemente incoraggiati a consultare il Capitolo 8, che sviluppa questi concetti essenziali dalle loro origini storiche attraverso le loro formulazioni mature; il materiale presentato è prerequisito per comprendere la formulazione meccanica del problema elastico che segue.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

spirale logaritmica: Jakob esamina le proprietà delle spirali logaritmiche, calcolando le loro lunghezze d'arco, tangenti e aree, e evidenziando la loro notevole proprietà di autosimilezza. Più specificamente, mostra che i raggi disegnati dal centro intersecano la spirale ad angoli costanti e che questi raggi formano una progressione geometrica quando le lunghezze d'arco corrispondenti sono in progressione aritmetica.

Loxodromes (Rhumb Lines): Affrontando la navigazione su una sfera, Bernoulli analizza curve che attraversano tutti i meridiani ad angoli costanti, i percorsi che le navi seguono quando tengono un costante cuscinetto a bussola. Queste linee, tracciate da una costante bussola che porta sulla sfera, collegavano il calcolo con le esigenze pratiche di navigazione e cartografia, sviluppando metodi per calcolare distanze e differenze di longitudine lungo tali percorsi.

Aree di triangoli sferica: Presenta sia le costruzioni geometriche che le formule analitiche per determinare le aree dei triangoli sferico, con applicazioni all'astronomia e alla cartografia, che hanno rivelato come i metodi infinitesimali possano interagire con la trigonometria sferica classica.

I legami tra questi argomenti sono metodicologico piuttosto che topico: ogni problema richiede applicazioni sofisticate del calcolo differenziale recentemente sviluppato: la spirale logaritmica illustra le tecniche per analizzare le curve definite dalle relazioni differenziali; l'analisi loxodrome comporta integrazioni intricate sulle superfici curve; e il lavoro a triangolo sferico fonde ragionamento geometrico con il calcolo analitico; questi strumenti matematici naturalmente guidano Bernoullither verso il problema differenziale elastico.

In sostanza, la carta mostra la potenza e la versatilità del nuovo calcolo in diversi domini matematici, culminando nel problema elastico esigente annunciato nel suo addendum.

Sfida nell'Appendice

Nel 1690, mentre Jakob collaborava con Leibniz sul problema della funicolaria, incontrò quello che sarebbe diventato uno dei problemi più significativi della fisica matematica.

> Occasioni Problematis funicularіii moz in aliud non meno illustre delapsi sumus
>
> In occasione del problema funicolare, ci siamo imbattuti presto in un altro non meno illustre [problema]
>
> Bernoulli, Jakob, 1690a *«Additamentum ad Specimen alterum calculi differentialis in dimetienda spirali logarithmica, loxodromis naturarum, & areis triangulorum sphaericorum»*

> Occasione Problematis funicularіii moz in aliud non meno illustre delapsi sumus, riguarda flexiones siu curveturas trabium, arcuum tensorum aut elaterum quorumvis, a propria gravitate, vel appenso pondere aut alia quacunque virimente factas; Citazione etiam Celeberrimum Leibnitium in privati, quibus sub idem me tempus honoravit, literis digitalum opportunare video. Videtur autem hoc Problema, cum ob ipotheseos incertitudinem, tum casuum multiplicem varietatem, plus aliquanto difficileatis comportare priori, quanquam hicculos non Ego per soluzioneem casus simplicissimi

COPIA DI REVISIONE

(saltem in præmemorata ipothesi extensionis) adyta Problematis feliciter reseravi; verum ut ad imitaem Viri Excellentissimi & aliis spatium concedam suom tentandi Analysin, premam pro nunc Solutionem, eamque tantisper Logogripho occultabo, clavem cum dimostrae in nundinis Autumnalibus communicaturus.

Mentre lavoriamo sul problema Funicularia, noi [Jakob Bernoulli e Leibniz] È una piega o la curvatura di travi, archi disegnati, o bande elastiche arbitrarie, che è causata dal loro peso o da un peso appeso o da qualsiasi altra forza di piegatura. Il famoso signor Leibniz ha indirizzato la mia attenzione a questo problema in una lettera. chap: regione della fiducia dell'ipotesi o della varietà di casi, sembra essere più difficile da risolvere rispetto al problema precedente. Qui è necessario un calcolo diligente piuttosto che un tedio. Ma fortunatamente, attraverso la soluzione del caso più semplice (almeno sotto l'ipotesi che le estensioni siano proporzionali alle forze di stretching), le porte per risolvere questo problema sono state aperte a me. [Leibniz] Ho già fatto, permetterò anche ad altri qualche tempo per provare ad analizzare questo problema. Perciò, trattengo la soluzione per ora e lo nascondo in un Logogriph.

Bernoulli, Jakob, 1690a «*Additamentum ad Specimen alterum calculi differentialis in dimetienda spirali logarithmica, loxodromis naturarum, & areis triangulorum sphaericorum*»

La sfida, pubblicata nella *Atto Eruditorum*, ha effettivamente segnalato il passaggio dalle statiche dei corpi rigidi alla teoria matematica delle curve elastiche. Sebbene Newton avesse esplorato privatamente le forme correlate nel 1670 (§8.2.2), era la formulazione pubblica di Bernoulli che ha posto le basi per lo sviluppo sistematico del settore.

Bernoulli ha impiegato una strategia sofisticata: ha annunciato di possedere una soluzione che nasconderebbe in una *logogri* (§6.11.1.1, Tabella 6.6):

Qrzumu batte dxqopddbbp poylfy bbqnfqbfp ltyge murds udıbb tubstmixyyxdksdbxpgqsrkfgudl bg ipqandtt tcpgkbp aqdbkzs

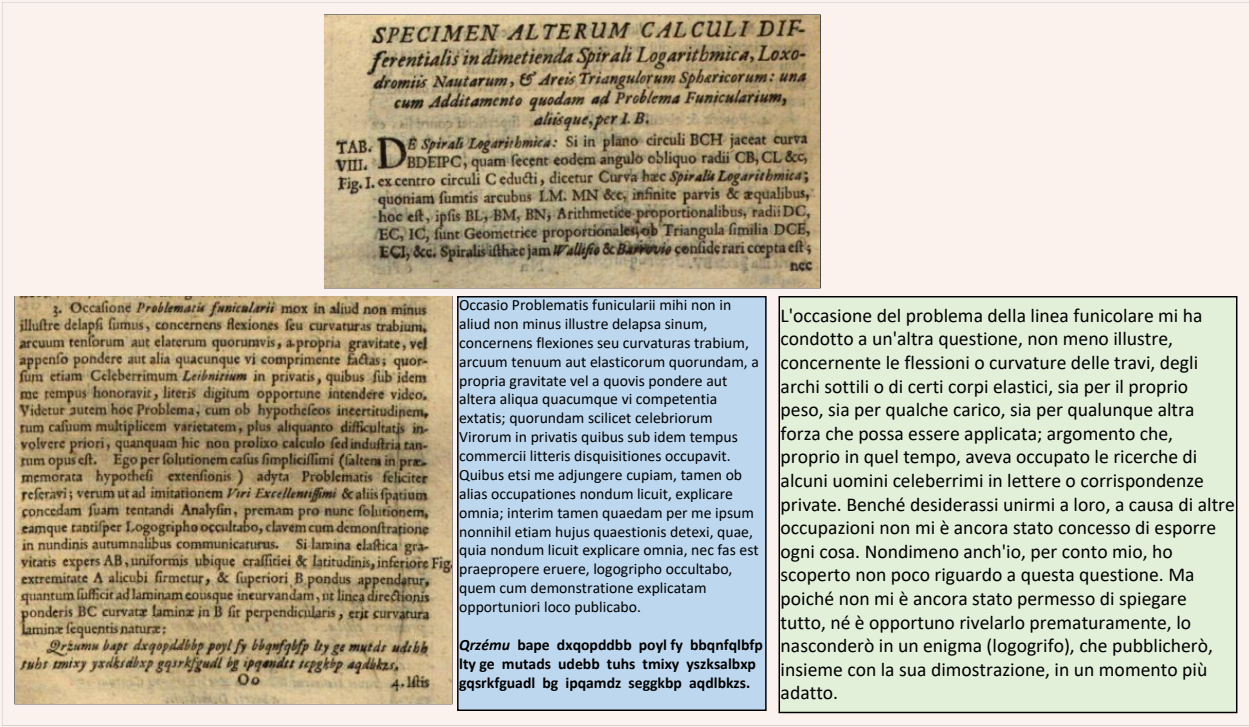
Bernoulli, Jakob, 1690a «*Additamentum ad Specimen alterum calculi differentialis in dimetienda spirali logarithmica, loxodromis naturarum, & areis triangulorum sphaericorum*»; Logogriph

Egli ha promesso di rivelare sia il cifrario che la sua soluzione da parte del Festival di Basilea! in ottobre 1690[16]Questo approccio strategico ha servito molteplici scopi: ha stabilito la sua priorità sulla scoperta, ha concesso ai contemporanei il tempo di tentare il problema in modo indipendente, e gli ha permesso di tempo supplementare per perfezionare il suo trattamento matematico.

Quando arrivò il termine ottobre 1690, non vennero presentate soluzioni da altri matematici, ma piuttosto che rivelare immediatamente la sua risposta come promesso, Bernoulli scelse di continuare a sviluppare la sua soluzione privatamente. *Meditazione CLXX*, intitolato *Quadratura Curvae, e cujus evolutione describitur inflexae laminae curvatura* (Quadratura di una curva, per l'evoluzione di cui è tracciata la curva di una lamina piegata) (Bernoulli, Jakob, 1692).

[16]La Basilea *Erbete* (fiera più bella), fondata nel 1471 dal privilegio imperiale, tradizionalmente inizia lo scorso sabato di ottobre e dura due settimane.

COPIA DI REVISIONE



SPECIMEN ALTERUM CALCULI DIFferentialis in dimetienda Spirali Logarithmica, Loxodromiis Nautarum, & Areis Triangulorum Sphæricorum: una cum Additamento quodam ad Problema Funicularium, aliisque, per I. B.

TAB. VIII. Fig. I. DE Spirali Logarithmica: Si in plano circuli BCH jaceat curva BDEIPC, quam secent eodem angulo obliquo radii CB, CL &c, ex centro circuli C educti, dicetur Curva hæc Spiralis Logarithmica; quoniam sumtis arcubus LM. MN &c, infinite parvis & æqualibus, hoc est, ipsis BL, BM, BN, Arithmetice proportionalibus, radii DC, EC, IC, sunt Geometrice proportionales, ob Triangula similia DCE, ECI, &c. Spiralis istha jam Wallisio & Barrovio conſideratio cepta est; nec

3. Occaſione Problematis funicularii mox in aliud non minus illuſtre delapſi ſumus, concernens flexiones ſeu curvaturas trabium, arcuum tenſorum aut elaterum quorumvis, a propria gravitate, vel appenſo pondere aut alia quacunque vi comprimente factas; quorſum etiam Celeberrimum Leibnitium in privatis, quibus ſub idem me tempus honoravit, literis digitum opportune intendere video. Videtur autem hoc Problema, cum ob hypotheſeos incertitudinem, tum caſuum multiplicem varietatem, plus aliquanto difficultatis involvere priori, quanquam hic non prolixo calculo ſed induſtria tantum opus eſt. Ego per ſolutionem caſus ſimpliciſſimi (ſaltem in præmemorata hypotheſi extenſionis) adyta Problematis feliciter reſeravi; verum ut ad imitationem Viri Excellentiſſimi & aliis ſpatium concedam ſuam tentandi Analyſin, premam pro nunc ſolutionem, eamque tantiſper Logogripho occultabo, clavem cum demonſtratione in nundinis autumnalibus communicaturus. Si lamina elaſtica gravitatis expers AB, uniformis ubique craſſitiei & latitudinis, inferiore Fig. extremitate A alicubi firmetur, & ſuperiori B pondus appendatur, quantum ſufficit ad laminam eousque incurvandam, ut linea directionis ponderis BC curvatæ laminæ in B ſit perpendicularis, erit curvatura laminæ ſequentis naturæ:

Qrzumu bapt dxqopddbbp poyl fy bbqnfqlbfp lty ge mutads udebb tuhs tmixy yszksalbxp gqsrkfguadl bg ipqamdzt seggkbp aqdlbkzs.

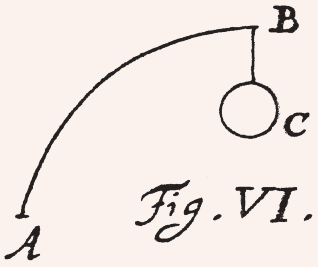
Oo 4. Iſtis

Occasio Problematis funicularii mihi non in aliud non minus illustre delapsa sinum, concernens flexiones seu curvaturas trabium, arcuum tenuum aut elasticorum quorundam, a propria gravitate vel a quovis pondere aut altera aliqua quacumque vi competentia extatis; quorundam scilicet celebriorum Virorum in privatis quibus sub idem tempus commercii litteris disquisitiones occupavit. Quibus etsi me adjungere cupiam, tamen ob alias occupationes nondum licuit, explicare omnia; interim tamen quaedam per me ipsum nonnihil etiam hujus quaestionis detexi, quae, quia nondum licuit explicare omnia, nec fas est praepropere eruere, logogripho occultabo, quem cum demonstratione explicatam opportuniori loco publicabo.

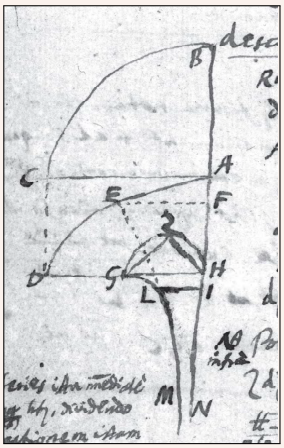
Qrzému bape dxqopdddbb poyl fy bbqnfqlbfp lty ge mutads udebb tuhs tmixy yszksalbxp gqsrkfguadl bg ipqamdz seggkbp aqdlbkzs.

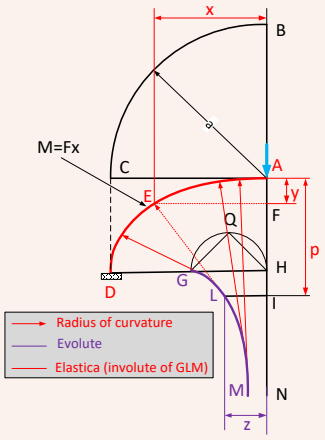
L'occasione del problema della linea funicolare mi ha condotto a un'altra questione, non meno illustre, concernente le flessioni o curvature delle travi, degli archi sottili o di certi corpi elastici, sia per il proprio peso, sia per qualche carico, sia per qualunque altra forza che possa essere applicata; argomento che, proprio in quel tempo, aveva occupato le ricerche di alcuni uomini celeberrimi in lettere o corrispondenze private. Benché desiderassi unirmi a loro, a causa di altre occupazioni non mi è ancora stato concesso di esporre ogni cosa. Nondimeno anch'io, per conto mio, ho scoperto non poco riguardo a questa questione. Ma poiché non mi è ancora stato permesso di spiegare tutto, né è opportuno rivelarlo prematuramente, lo nasconderò in un enigma (logogrifo), che pubblicherò, insieme con la sua dimostrazione, in un momento più adatto.

Figura 9.8: La sfida di Bernoulli, (Bernoulli, Jakob, 1690a)



(a) Disegno da Jakob Bernoulli (Bernoulli, Jakob, 1692)





(b) Ricostruzione moderna (basata su (Levien, 2008))

Figura 9.9: L'elastica di Jakob Bernoulli

Tabella 9.4 fornisce una panoramica delle risposte alle sfide

COPIA DI REVISIONE

Tabella 9.4: La linea temporale della sfida Elastica

Data	Evento
Giugno 1690	Jakob Bernoulli pone problemi elastici in *Spettacolo del cambiamento* (Bernoulli, Jakob, 1690a).
1690	Bernoulli codifica la soluzione in anagramma (logogriph) (Bernoulli, Jakob, 1690a).
Ottobre 1690	Pass di scadenza (Basel Collect Festival); nessuna soluzione presentata.
1692	Jakob completa privatamente la soluzione nelle *Meditationes* CLXX (Bernoulli, Jakob, 1677–1705).
Giugno 1694	Jakob pubblica *Lamina di curvatura elastica* con soluzione decodifica (Bernoulli, 1694).
1694	Huygens pubblica critica identificando configurazioni multiple di elastica (Bernoulli, 1694).
1694	Jakob risponde a Huygens, difendendo la generalità del suo metodo (Bernoulli, 1694).
1696	Johann Bernoulli pone la sfida del brachistochrone (Bernoulli, Johann, 1696).
1697	Johann pubblica la soluzione brachistochrone utilizzando l'analogia ottica (Bernoulli, Johann, 1697a).
1724	Anonimo (LBC) sfida estende il problema a linee moderatamente flessibili (Anonymous, 1724).
1728	Daniel Bernoulli & Euler pubblica una teoria della linea flessibile-elastica unificata (Bernoulli, Daniel, 1744; Euler, 1728).
1732	Euler pubblica *Soluzione problematica* con un quadro geometrico generale che unifica curve elastiche e flessibili (Euler, 1732).
Ottobre 1742	Daniel scrive a Euler proponendo il principio di minimizzazione dell'energia (Bernoulli, Daniel, 1845).
1744	Euler pubblica *Metodologia inveniendi* con soluzione variativa sistematica (Euler, 1744b).
1744	Il lavoro completo di elastica di Jakob compilato in postumo *Opera Omnia* (Bernoulli, Johann, 1713).

9.3.2 Soluzioni

Lo stesso Bernoulli fornì la soluzione a cui aveva alluso nella sua sfida attraverso un anagramma (due versioni di cui esisteva). Huygens reagì immediatamente, prendendo in esame la soluzione di Bernoulli. Euler fornì una soluzione geometrica nel 1732, seguita dal nipote di Jakob Daniel, che nel 1742 pose il seme per il calcolo variazionale che Euler formalò nel 1744, Fig. 9.10c.



(a) Jakob Bernoulli (1655-1705)



(b) Daniel Bernoulli (1700-1782)



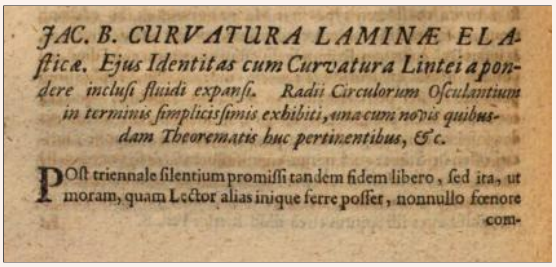
(c) Leonhard Euler (1707-1783)

Figura 9.10: Gli architetti della teoria dell'elastica: gli apparecchi matematici di Basilea (Wikipedia)

COPIA DI REVISIONE

9.3.2.1 La soluzione di Jakob Bernoulli (1694)

Contesto storico La soluzione di Bernoulli, (Bernoulli, Jakob, 1694)Fico. 9.11, il lavoro si basa sul suo anagramma 1691 in *Atto Eruditorum*, che ha stabilito la priorità mentre nasconde il suo metodo. L'anagramma decodificato afferma che il rapporto geometrico preciso in seguito ha rivelato, non la legge inversa di piegatura-momento/curvatura erroneamente citata in alcune letteratura (§6.11.1.1).


JAC. B. CURVATURA LAMINÆ ELAstica. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a pondere inclusi fluidi expansi. Radii Circulorum Osculantium in terminis simplicissimis exhibiti, una cum novis quibusdam Theorematis huc pertinentibus, &c.

POst triennale silentium promissi tandem fidem libero, sed ita, ut moram, quam Lector alias inique ferre posset, nonnullo fœnore com-

JAC. B. CURVATURA LAMINAE ELASTICAE. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a pondere inclusi fluidi expansi. Radii Circulorum Osculantium in terminis simplicissimis exhibiti, una cum novis quibusdam Theorematis huc pertinentibus, &c.

Jakob Bernoulli. Curvatura della lamina elastica. Sua identità con la curvatura di un tessuto disteso dal peso del fluido contenuto. Raggi dei cerchi osculatori espressi nei termini più semplici, insieme con alcuni nuovi teoremi pertinenti a questo argomento ecc.

Figura 9.11: La curvatura di Jakob Bernoulli Laminae Elasticae... (Bernoulli, Jakob, 1694)

Post triennale silentium promissi tandem fidem libero, sed ita, ut moram, quam Lector alias inique ferre posset, nonnullo foenore compensem, dum Elaterum curvaturam non in una sola, (ut initio fueram pollicitus,) sed generaliter in quacunqueum ithesi costrutam exhibeo... Extititit enim jam inde a Galilei quoque temporibus celebre, qui Curvam hanc, per inde ut Funicularium, Parabolam esse suspicatus erat.

Dopo tre anni di silenzio, finalmente esaudisco la mia promessa, ma compensando il ritardo con notevole interesse, mostrando la curvatura di corpi elastici non in un caso solo (come inizialmente promesso), ma generalmente sotto qualsiasi ipotesi di estensioni...
Per questo problema era già diventato famoso fin dal momento in cui Galileo, che sospettava che questa curva, come il catenario, fosse una parabola.

Bernoulli, Jakob, 1694 «*Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus*»

Bernoulli pone il suo lavoro contro tentativi falliti da Galileo e altri, sottolineando il suo raggiungimento di risolvere il problema "sotto qualsiasi ipotesi di estensioni'—una struttura generale piuttosto che casi speciali. i Lettori sono prima indicati §8.2.5 fo derivazione della curvatura di Bernoulli.

La caratterizzazione elastica

[Mantenere l'intera traduzione in latino e inglese esattamente come si ha]

Bernoulli, Jakob, 1694 «*Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere*

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus» pg. 272

CORRECT

Questo rappresenta la soluzione di Bernoulli all'** elastica rettangolare**—un caso specifico in cui un fascio elastico fissato ad un'estremità è piegato da un peso fino a quando il tangente all'estremità carica diventa perpendicolare alla direzione della forza.

L'approccio di Bernoulli si basa su una sofisticata costruzione geometrica che trasforma il problema dell'elastice fisica in un problema di generazione della curva.

1. Iniziare con una determinata curva AFC rappresentando la "legge di tensione"— il rapporto tra forze applicate AE e tensioni che ne derivano EF
2. Costruisci un cerchio quadrante GKL con area uguale alla zona sotto curva AFC
3. Per ogni punto E sulla base AB, trovare la tensione corrispondente EF e costruire la curva ausiliaria AN attraverso una specifica procedura geometrica
4. La curva elastica AQR viene poi generato da linee intersecanti da questa costruzione

La critica è che Bernoulli riconobbe l'elastica come fondamentalmente legata a ciò che oggi chiamiamo integrazioni ellittiche, ma la risolse attraverso la rettifica geometrica piuttosto che l'integrazione analitica.

Bernoulli afferma la sua relazione geometrica chiave come:

Asse Portio applicatom inter & tangentem eft ad ipfam tangentem, ficut quadratum applicazione ad conftans quoddam fpatium.

La porzione dell'asse tra l'ordinato e il tangente è al tangente stesso, come la piazza dell'ordinato è ad una zona costante.

Bernoulli, Jakob, 1694 «*Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus»* pg. 272

Tuttavia, questa affermazione deve essere compresa nell'ambito del quadro geometrico specifico di Bernoulli, il "asse del porto"' si riferisce ad un segmento particolare della sua costruzione, non semplicemente il subtangento nella terminologia moderna.

- Q come punto sulla curva elastica
- P come il piede dell'ordinato da Q all'asse AB
- p come il punto in cui il tangente a Q interseca l'asse

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Allora la proprietà di Bernoulli afferma:

$$\frac{Pp}{Qp} = \frac{QP^2}{C}$$

dove C è una zona costante legata alla rigidità di piegatura e al carico applicato.

Prospettiva moderna Da un punto di vista moderno (sviluppato molto più tardi da Euler nel 1740), il problema elastica cerca una curva $y(x)$ che minimizza l'energia di piegatura:

$$I = \int_0^L \frac{\kappa^2}{2EI}\, ds$$

a condizione di condizioni di confine, dove $\kappa = \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}$ è la curvatura.

Il Equazione Euler-Lagrange per questo problema variazionale produce:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\kappa}{(1+(y')^2)^{1/2}}\right) = \frac{P}{EI}$$

dove P è il carico applicato, che porta all'equazione differenziale:

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = -\frac{P}{EI}\sin\theta$$

dove θ è l'angolo che il tangente fa con l'orizzontale, che equivale all'equazione di un pendolo e produce integrali ellittici nella sua soluzione—lo stesso integrante ellittico che Bernoulli ha incontrato attraverso il suo metodo geometrico.

Riconoscimento della natura transcendentale Bernoulli ha riconosciuto esplicitamente che la sua soluzione ha coinvolto curve trascendentali, osservando che la curva elastica non può essere costruita dalla quadratura di qualsiasi sezione conica e richiede ciò che ora comprendiamo come integranti ellittici della forma:

$$s = \int_0^\theta \frac{d\phi}{\sqrt{a^2 - \sin^2\phi}}$$

Il suo metodo geometrico esegue efficacemente questa integrazione attraverso la rettifica della curva –un risultato notevole dato gli strumenti matematici disponibili nel 1694.

Significato storico Questo lavoro rappresenta diversi primi in matematica:

- Prima soluzione ad un caso specifico di un problema di meccanica trascendentale
- Trattamento sistematico precoce di quella che diventerà teoria delle funzioni ellittiche

COPIA DI REVISIONE

- Lavoro pionieristico in quello che sarebbe poi formalizzato come il calcolo delle variazioni
- Ponte tra metodi geometrici classici e tecniche analitiche emergenti

La soluzione geometrica di Bernoulli all'elastica rettangolare rimase importante fino a quando il trattamento analitico completo di Euler utilizzando il calcolo delle variazioni nel 1744, che risolse il problema generale di elastica per le condizioni arbitrarie di confine.

L'eleganza della soluzione puramente geometrica di Bernoulli a questo problema intrinsecamente trascendentale è uno dei migliori esempi di ingenuità matematica del XVII secolo, dimostrando come il ragionamento geometrico potrebbe sbloccare problemi che non si sarebbero arresi ad un attacco analitico diretto per decenni a venire.

Collegamento al problema del panno

[Mantenere l'intera traduzione in latino e inglese esattamente come si ha]

Bernoulli, Jakob, 1694 «*Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus*» pg. 275-276

La dualità fisica Oltre al problema dell'elastica primaria, Bernoulli ha individuato una notevole dualità fisica che dimostra la profonda struttura matematica che sta alla base della sua soluzione geometrica, osservando che la stessa curva elastica descrive anche la forma di equilibrio di una membrana flessibile o di un sacchetto di stoffa riempito di liquido e fissato a due punti.

Questa connessione rappresenta più della curiosità matematica—si rivela che due sistemi fisicamente distinti (un raggio rigido piegato sotto carico, e una membrana flessibile contenente fluido) possono essere regolati da relazioni geometriche identiche.

L'equivalenza fisica L'intuizione di Bernoulli può essere compresa attraverso le condizioni di equilibrio che regolano ogni sistema:

Elastica: Un fascio rigido subisce deformazione di piegatura sotto carichi applicati, con curvatura κ proporzionale al momento di piegatura M attraverso il rapporto $\kappa = M/(EI)$dove EI rappresenta rigidità flessorale.

Membrana riempita di fluido: Un panno flessibile e inesteso contiene liquido sotto pressione idrostatica, con curvatura locale determinata dall'equilibrio tra tensione della membrana T e la differenza di pressione Δp attraverso l'interfaccia curva.

L'equivalenza matematica nasce perché entrambi i sistemi soddisfano lo stesso rapporto fondamentale tra curvatura e distribuzione di forza (in attesa di momento nell'elastica, pressione idrostatica nella membrana).

COPIA DI REVISIONE

Analisi della Forza e Relazioni Chiave L'analisi dettagliata della forza di Bernoulli rivela diverse relazioni quantitative che distinguono le due realizzazioni fisiche nonostante la loro equivalenza geometrica:

Principio di tensione uniforme: La membrana mantiene **tensione costante** T per tutta la sua lunghezza, pari al peso totale del liquido chiuso, che contrasta nettamente con il fascio elastico, dove lo stress di piegatura varia lungo la lunghezza, essendo più debole vicino alla estremità libera (punti più vicini a R nella sua notazione).

Direzione di forza isolante: Quando la membrana viene improvvisamente liberata dai suoi vincoli, la forza idrostatica risultante agisce ad angolo θ all'orizzontale, dove $\tan\theta = EF/Ei$ per la specifica cassa rettangolare, l'intero panno viene espulso ad un angolo retto.

Forza di grandezza: La forza idrostatica totale che impeti la membrana si riferisce al peso assoluto del liquido contenuto nel rapporto $2:1$. Questo segue dalla distribuzione della pressione idrostatica integrata sulla superficie della membrana curva.

Posizione dell'asse Equilibrium: L'asse dell'equilibrio passa attraverso un punto determinato dal taglio Ao da AB tale $Ao : AB = 1 : \sqrt{2}$. In particolare, questo asse fa **non non** passare attraverso l'intersezione di linee tangenti al punto finale—una sottilezza geometrica che Bernoulli nota esplicitamente.

Ottimizzazione geometrica Bernoulli osserva una notevole proprietà estremica: tra tutte le curve di perimetro uguale (curve isopetrici) che spaziano dagli stessi endpoint, la curva elastica massimizza la distanza del centroide dalla linea di base, che rappresenta un primo esempio di ottimizzazione isopeziometrica—problemi che sarebbero sistematicamente affrontati attraverso il calcolo delle variazioni decenni dopo.

Disegna un'analogia esplicita con il catenario, notando l'affinità "remarkable" (*affinitatem miram*) tra due coppie di problemi fisicamente correlati:

- Catenario (catena a strapiombo) e Velaria (curva a vela)
- Elastica (trave a benna) e la curva a membrana riempita di fluido

In ogni coppia, un problema riguarda il peso di sé (catenaria, vela) mentre l'altro comporta carico esterno (elastica, pressione idrostatica), ma le strutture matematiche presentano somiglianze profonde.

Significato storico Questa dualità dimostra la profonda intuizione fisica di Bernoulli, riconoscendo che la sua costruzione geometrica aveva catturato qualcosa di fondamentale in termini di equilibrio nella meccanica continuum, trascendendo il contesto specifico delle travi elastiche, che si è realizzato interamente attraverso il ragionamento geometrico, senza gli strumenti analitici che avrebbero poi reso più sistematici tali connessioni.

La dualità panno-elastica anticipa diversi sviluppi importanti nella meccanica e nella fisica matematica:

COPIA DI REVISIONE

- **Teoria Membrane:** Il quadro matematico per l'analisi di strutture sottili e flessibili sotto carichi di pressione, sviluppato sistematicamente nel XIX secolo
- **Principi variabili:** Il riconoscimento che i diversi sistemi fisici possono condividere strutture matematiche comuni quando minimizzano o massimizzano lo stesso funzionale (energia, azione, ecc.)
- **Analogie fisiche:** L'uso di equivalenze matematiche per trasferire metodi di soluzione tra diversi domini fisici, una tecnica che divenne centrale alla fisica matematica del XIX secolo

Il riconoscimento di questa dualità, realizzato attraverso un ragionamento puramente geometrico nel 1694, fornisce un'idea del perché la sua soluzione elastica rimanesse il trattamento definitivo del problema per oltre mezzo secolo. Il suo metodo geometrico aveva implicitamente catturato la struttura variazionale che Euler avrebbe poi fatto esplicitare attraverso il calcolo delle variazioni nel 1744. La dualità fisica serviva come prova empirica che il suo approccio matematico aveva identificato qualcosa di genualmente fondamentale circa la meccanica dei corpi deformabili.

9.3.2.1.1 Reazione da Huygen (1694) Christiaan Huygens aveva espresso scetticismo anche prima che la soluzione di Bernoulli apparisse. In una lettera a Leibniz datato 16 Novembre 1691, scrisse:

> Non vedo l'ora di vedere cosa Mr. Bernoulli il maggiore produrrà riguardo alla curvatura della primavera. Non ho osato sperare che si esca con qualcosa di chiaro o elegante qui, e quindi non ho mai provato.
>
> Huygens, 1691 Lettre à G.W. Leibniz

Quando Bernoulli's *Curvatura Laminae Elastica* apparso nel giugno 1694, Huygens rapidamente pubblicato una critica formale nella stessa rivista (Fraser, 1991). In corrispondenza privata con Leibniz, Huygens era ancora più indicato:

> Mr. Per quanto riguarda il principio della molla, penso che l'abbia usata bene, e che è vero che i raggi che misurano la curvatura sono nel rapporto inverso delle forze che piegano la molla, anche se, a mio parere, non è solo la superficie esterna che si estende ma anche quella interna si accorcia contemporaneamente. AFC sono state una curva a seconda di infinite esperienze, dovrei trovare tutta la sua ricerca molto vaga e poco degna di tempo trascorso. E anche ora tutto quello che ha trovato non mi sembra utile, ma solo un passatempo così bello e sottile come si trova quando si ha nulla su cui impiegare la matematica più fruttuosamente.
>
> È una strana ipotesi prendere le quadrature di ogni curva come dato, e se la costruzione di un problema finisce con quello (oltre alla quadratura del cerchio e l'iperbola), non penso nulla realizzato, poiché anche meccanicamente non si sa come fare nulla. Bernoulli ha determinato la curvatura dell'arco A solo nel caso in cui i tangenti alle estremità E, F sono paralleli, che considero uniti dalla stringa EF. Rimarrebbe a dare la forma del vero arco B; di nuovo, di C, le estremità di cui puntano l'un l'altro; Ddove si incontrano, e G, dove passano oltre e sono tenuti da una canna HI.

COPIA DI REVISIONE

Huygens, 1694 Lettre à G.W. Leibniz

Huygens reagiva con la caratteristica fastidiosa, prendendosi gioco della completezza della soluzione di Bernoulli, pur riconoscendo la sofisticazione matematica del lavoro di Bernoulli, Huygens sostenne che risolveva solo un caso particolare, quello che chiamava l'"elastica rettangolare" (curva A in figura 9.12)—dove la striscia elastica forma approssimativamente un angolo giusto. Con precisione metodica, Huygens ha dimostrato che più configurazioni di curva elastica erano possibili a seconda delle forze applicate e delle condizioni di confine, come mostrato nel suo diagramma del 1694 raffigurante varie forme elastiche (curves A tramite G).

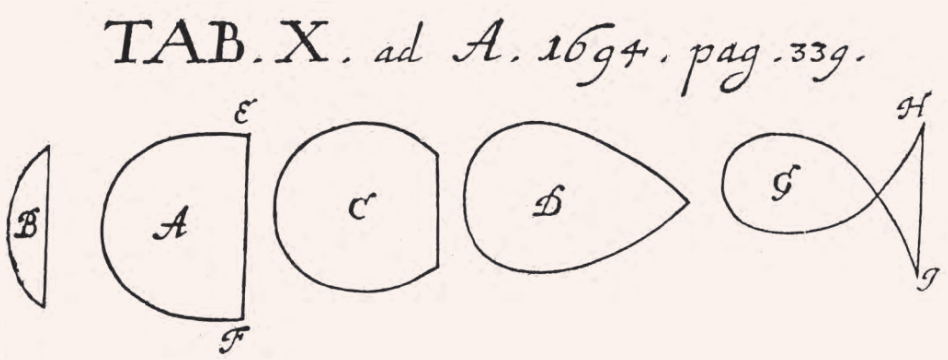


Figura 9.12: L'obiezione di Huygens del 1694 alla soluzione di Bernoulli.

Bernoulli ha riconosciuto queste critiche con grazia, in una nota di follow-up pubblicata nel 1694 (Bernoulli, 1694), ha spiegato che il suo metodo geometrico non era limitato al caso "rettangolare', poiché varie forme elastiche potevano essere generate scegliendo diverse costanti di integrazione.

Da quello che ho pubblicato negli ultimi anni... i geometri illustri Mr. Huygens e Mr. Leibniz hanno degned a sottoporre a esame speciale, dove alcune parti hanno approvato, altre, più nascoste in dichiarazione, hanno aumentato da congetture, mentre qui hanno alzato scrupoli e lì hanno espresso il loro disaccordo aperto, ho deciso di aggiungere alcuni pensieri successivi a quelli ex, e per spiegare

Che i raggi di curvatura siano inversamente come le forze di stretching (più veramente, come le allungazioni), che entrambi quegli uomini molto famosi mi considerano usato come un inizio, viene imparato dall'equazione scoperta e si tratta di una conclusione piuttosto che dell'inizio...

Così se il signor Huygens sentisse alcuni dubbi su di esso, pensando che non solo la superficie esterna è estesa ma anche l'interno contratta, avrebbe dovuto fare questa obiezione al signor Leibniz non a me, che ha adottato solo questo dieci anni più tardi dall'autore del principio.

Bernoulli, 1694 «*Responsio ad Objectiones Clarissimi Hugenii de Curvatura Laminae Elasticae*»

9.3.2.1.2 Interludi

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

9.3.2.1.2.1 Leibniz's *Vis Viva* e l'evoluzione dei concetti energetici Lo sviluppo del calcolo variazionale non può essere compreso senza comprendere l'evoluzione concettuale del pensiero energetico nel XVII e XVIII secolo. *vis viva* (letteralmente "forza vivente"), un concetto che ridivide fondamentalmente la filosofia meccanica e fornisce la base concettuale per i successivi approcci basati sull'energia ai problemi di ottimizzazione.

Questa sezione pone le basi per i successivi sviluppi di Daniel Bernoulli (§9.3.2.1.2.4) e Euler (§9.3.2.2) discusso di seguito.

1686: Leibniz's *Vis Viva* (Callenge to Cartesian Mechanics) Nel 1686, Leibniz pubblicò "Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii" (Un breve dimostrazione di un notevole errore di scarti) in *Atto Eruditorum* (Leibniz, 1686a)[17], fondamentalmente impegnativo meccanica cartesiana.

René Descartes aveva formulato il suo principio di conservazione in *Principia Filosofia* (Descartes, 1644), proponendo che la quantità di movimento nell'universo—misurata come somma scalare $\sum mv$A differenza della conservazione moderna del momento, la formulazione di Descartes ignorava le proprietà direzionali e si affidava agli argomenti teologici che Dio, essendo perfetto e immutabile, avrebbe conservato la stessa quantità totale di movimento che aveva originariamente impartito all'universo.

Leibniz ha preso di mira sia l'inadeguatezza matematica delle regole di collisione di Cartesio che le loro basi filosofiche attraverso esperimenti di pensiero accuratamente costruiti. Ha considerato due corpi uguali che collidono elasticamente, uno in movimento, uno a riposo. mv Leibniz ha dimostrato che questa violazione delle osservazioni empiriche e ha portato a assurdità fisiche, e che, in sostanza, ha dimostrato che la legge sulla conservazione di Descartes non ha tenuto conto della capacità dei corpi di svolgere il lavoro. h acquisisce velocità $v = \sqrt{2gh}$ e la capacità di sollevare un altro corpo alla stessa altezza. Questa capacità—che Leibniz ha definito *vis viva*— era proporzionale a mv^2Non lo so. mv.

Con tali esempi, Leibniz ha stabilito che, mentre Descartes aveva identificato un importante principio di conservazione, aveva erroneamente considerato la quantità conservata. *vis viva*, definito come $\sum mv^2$. Egli sostenne che questa "forza vivente" rappresentava la misura autentica della capacità di un corpo di produrre effetti, la sua capacità di superare la resistenza, sollevare pesi, o comprimere molle. mv, che si potrebbe conservare anche quando i singoli corpi hanno perso completamente la loro mozione, *vis viva* ha catturato il potere attivo inerente a corpi in movimento.

La terminologia di Leibniz rifletteva il suo più ampio programma filosofico. *vis mortua* (forza di carico), che rappresenta la pressione statica o la tensione, e *vis viva* Questa distinzione ha incarnato il suo impegno metafisico per comprendere la natura in termini di forze e attività, piuttosto che di relazioni geometriche tra particelle.

[17] Titolo completo: *Brevis demonstratio errori memorabilis Cartesii et aliorum circa legem naturae, secundum quam volunt a Deo eandem semper quantitatem motus conservari, qua et in re meccanica abutuntur*, o dimostrazione breve dell'errore degno di nota di Cartesio e altri riguardo alla legge della natura secondo la quale desiderano che Dio conserva sempre la stessa quantità di movimento, che essi abusano anche in materia meccanica.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

La Controversia Vis Viva e la sua Risoluzione La proposta di Leibniz ha scatenato quella che è diventata nota come la "vis viva polemica", un dibattito riscaldato che ha dominato la filosofia naturale europea per decenni.$\sum mv$), mentre Leibnizians ha sostenuto per vis viva conservazione ($\sum mv^2$). La controversia ha coinvolto molti pensatori principali, tra cui la famiglia Bernoulli, che generalmente ha sostenuto la posizione Leibnizian.

Il rapporto matematico tra l'energia cinetica vis viva di Leibniz e quella moderna è semplice: mv^2 differisce dal nostro $\frac{1}{2}mv^2$ solo dal fattore costante di una metà, che si è rivelato irrilevante per le argomentazioni di conservazione, poiché moltiplicando una quantità conservata da una resa costante un'altra quantità conservata. v^2Non lo so. v, ha catturato il rapporto essenziale tra movimento e effetto meccanico.

La controversia non fu completamente risolta fino al XIX secolo, quando divenne chiaro che sia slancio che energia rappresentano principi di conservazione distinti.mv) si conserva in tutte le interazioni, mentre l'energia cinetica ($\frac{1}{2}mv^2$) è conservata solo in collisioni elastiche; entrambe le quantità sono risultate essenziali per la comprensione dei sistemi meccanici, ma servono a scopi diversi in analisi.

Dal Kinetic al Potenziale: L'estensione dei concetti di forza Il quadro concettuale stabilito dalla vis viva di Leibniz si è rivelato notevolmente fertile per gli sviluppi successivi. mv^2, i filosofi naturali hanno cominciato a chiedere se i corpi stazionari sotto stress possono possedere analoghe "forza potenziale' o capacità immagazzinata per produrre movimento.

Questa estensione concettuale si rivelò cruciale per la comprensione dei sistemi elastici. Un trave compresso a molla o piegato possedeva chiaramente la capacità di produrre movimento quando rilasciato, ma questa capacità non poteva essere descritta utilizzando l'originale vis viva di Leibniz, che si applicava solo ai corpi già in movimento. La comunità matematica gradualmente sviluppò la nozione che la deformazione elastica ha conservato una sorta di potenziale vis viva che potrebbe essere convertita in cinetica vis viva al rilascio.

Dal 1740, i sofisticati pensatori come Daniel Bernoulli usavano termini come "vis viva potenzialeis" per descrivere questa capacità immagazzinata, rappresentando un ponte concettuale tra l'attenzione cinetica originale di Leibniz e quello che ora riconosciamo come potenziale energia. $\int \frac{ds}{R^2}$ che Daniel avrebbe proposto l'energia elastica rappresentava l'estensione naturale del pensiero lebniziano alla deformazione e ai problemi di costrizione.

Vis Viva e concetti di energia moderna Il rapporto tra concetti vis viva del XVIII secolo e terminologia energetica moderna può essere riassunto come segue:

- **Vis viva di Leibniz** (mv^2) = Energia cinetica moderna ($\frac{1}{2}mv^2$), differisce solo da un fattore costante
- **Vis viva potenzialeis** = Energia potenziale moderna, che rappresenta la capacità immagazzinata di produrre movimento
- **Totale vis** = Energia meccanica totale moderna (cinetica + potenziale)
- **Vis mortua** = Forze e pressioni statiche, analoghe a forzare i concetti nelle statiche moderne

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

L'evoluzione concettuale da vis viva a quella moderna richiedeva diverse intuizioni cruciali che emersero gradualmente attraverso il XVIII secolo. In primo luogo, il riconoscimento che vis viva poteva essere conservato in sistemi elastici e configurazioni gravitazionali deformate. In secondo luogo, la comprensione che totale vis viva (cinetica + potenziale) rimase costante in molti sistemi meccanici.

Implicazioni per il Calcolo Variante Il quadro vis viva si è rivelato essenziale per lo sviluppo del calcolo variazionale in diversi modi. In primo luogo, ha fornito una quantità fisicamente significativa che potrebbe essere ottimizzata - sistemi naturalmente evoluti per minimizzare il potenziale vis viva o conservare totale vis viva. In secondo luogo, ha offerto una prospettiva unificante che potrebbe gestire diversi problemi meccanici attraverso considerazioni energetiche piuttosto che analisi forza.v^2, κ^2) che risulterebbe centrale a funzioni variabili.

In seguito, quando Daniel Bernoulli formula il suo principio di energia elastica usando "vis viva potenzialeis' (§9.3.2.1.2.4) estenderà un quadro concettuale consolidato a nuovi domini, il cui punto di vista è che l'equilibrio elastico corrisponde al minimo potenziale vis viva rappresentava un'applicazione naturale del pensiero lebniziano ai problemi di ottimizzazione.§9.3.2.2).

L'importanza storica di vis viva si estende oltre il suo ruolo di precursore dei concetti energetici moderni, rappresentando un passaggio fondamentale dal pensiero geometrico alla dinamica della meccanica, dalla visione della natura come una raccolta di particelle che si muovono secondo le leggi geometriche per comprenderla come una rete di forze e trasformazioni energetiche, che risulterebbe essenziale per la rivoluzione matematica che ha permesso il calcolo sistematico variazionale.

9.3.2.1.2.2 La sfida del Brachistochrone (1696) La comunità matematica del tardo XVII secolo è stata caratterizzata da un'intensa competizione intellettuale, con i principali matematici che si sono regolarmente impegnati a mettere alla prova i metodi e a stabilire la loro reputazione.§6.6.9), la cui relazione professionale combinava la collaborazione con la rivalità, spingendo i confini del calcolo differenziale appena sviluppato.

Entrambi i fratelli avevano dato un contributo significativo alla matematica: Jakob attraverso il suo lavoro sulla teoria infinita delle serie e delle probabilità, e Johann attraverso il suo sviluppo di tecniche nel calcolo differenziale e nella meccanica. Il loro rapporto era complesso, segnato dal rispetto reciproco delle capacità altrui, insieme alla concorrenza professionale per il riconoscimento come matematici leader della loro generazione.

Johann inizia il suo trattato nella prima rivista matematica dell'epoca, *Atto Eruditorum*, con un audace annuncio sul potere trasformativo del calcolo differenziale (Bernoulli, Johann, 1696):

> Quantum Geometriae incrementum accesserit, ex quo variae infinitorum Methodi, inter quas Differentialis Calculus nemine invidente primas tenebit, inclaruerunt, mille inventorum exempla

COPIA DI REVISIONE

comprobant, quae, si verum dadire fas est, nostro hoc aevo, ut superiora taceam, etiamnum pro desperatis habebantur..."

Quanto la geometria è avanzata da quando diversi metodi di infinite sono diventati chiari—tra cui il Calcolo Differenziale, senza che nessuno lo arrabbi, si terrà il primo posto— mille esempi di scoperte dimostrano.Queste scoperte, se è permesso di parlare la verità, sono state ancora considerate senza speranza nella nostra età (per non dire nulla di tempi precedenti)..."

Bernoulli, Johann, 1696 «*Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur*»

Scrivendo in latino, la lingua franca studiosa del tempo, Johann affronta sistematicamente diversi argomenti matematici che dimostrano la potenza di questi nuovi metodi analitici:

1. Critica delle limitazioni della geometria cartesiana
2. Proprietà del cerchio e generalizzazioni
3. Proprietà Hyperbola
4. Problemi di costruzione geometrici
5. Commento a Leibniz e Tschirnhaus
6. Problemi di superficie

Dopo aver metodicamente stabilito la superiorità del calcolo differenziale rispetto agli approcci geometrici tradizionali, Bernoulli conclude il suo trattato con quello che sarebbe diventato il suo contributo più famoso e influente. il problema del brachistochrone appare quasi come una sfida finale, anche quella che avrebbe fondamentalmente rimodellare il paesaggio matematico, Fig. 9.13:

Problema novum ad cujus soluzioneem Mathematici invitantur.

Dati in plano verticale duobus punctis A & B (vid Fig. 5) assegnare Mobili M, viam AMB, per quam gravitate la sua dificendens & moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B.

Ut harum rerum amatores instigentur & propensiori animo ferantur ad tentamen hujus problematis, sciant non consiste in nue speculatione, ut quidem videtur, ac si nullum haberet usum; habet enim massimo etiam in aliis scientiis quam in meccanicais, quod nemo facile crediderit. Interim (ut forte quorundam praecipiti judicio obviam & B, non tamen illa brevissimo tempore percurritur; sed est curva AMB Geometris notissima, quam ego nominabo, si elapso hoc anno nemo alius eam nominaverit.

Un nuovo problema alla cui soluzione sono invitati i matematici.
Due punti A e B in un piano verticale (vedi Fig. 5), da assegnare a un mobile [particella] M il percorso AMB lungo il quale, scendendo per la propria gravità e cominciando a muoversi dal punto A, può arrivare all'altro punto B nel tempo più breve.
Così che gli amanti di queste cose possano essere incitati e portati con spirito più favorevole per tentare questo problema, facciano sapere che non consiste in una semplice speculazione, come appare, come se non avesse alcun uso; perché ha il più grande [applicazione] Nel frattempo (per evitare forse il giudizio di fretta di alcuni) anche se la linea retta AB è la più corta tra i endpoint A e B, tuttavia

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

> non è attraversata nel tempo più breve; ma c'è una curva AMB molto ben nota ai geometri, che io chiamerò, se alla fine di quest'anno non si è chiamato nessun altro
>
> Bernoulli, Johann, 1696 «*Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur*»

La sfida e il suo significato matematico Il problema del brachistochrone[18], posto da Johann Bernoulli nel 1696 come sfida pubblica alla comunità matematica, chiede: Data due punti a diverse altezze, qual è la curva che li collega lungo la quale una particella scivola sotto gravità (a partire dal riposo) viaggia in tempo minimo? Questa domanda ingannevolemente semplice nasconde una profonda complessità matematica perché cerca non un numero o una funzione che ottimizza una certa quantità, ma piuttosto un'intera *curva*—un oggetto geometrico definito da infinite punti.

Il carattere rivoluzionario del problema risiede nel suo requisito di ottimizzare lo spazio di tutte le curve possibili, non solo nello spazio dei numeri reali o dei parametri finiti-dimensionali.Questo rappresenta un tipo di sfida matematica fondamentalmente diverso dai problemi di ottimizzazione algebrica che dominano la matematica del XVII secolo. Dove l'ottimizzazione tradizionale ha cercato valori di variabili che massimizzano o minimizzano le funzioni, il problema del brachistochrone ha richiesto di trovare funzioni che ottimizzano l'ottimizzazione come integrazioni—cosa che ora riconosciamo.

La semplicità ingannevole del problema mascherava profonde intuizioni fisiche, mentre l'intuizione potrebbe suggerire che il percorso più breve (una linea retta) sarebbe anche il più veloce, l'intuizione di Johann, costruendo sulle precedenti indagini di Galileo sui corpi in caduta, ha riconosciuto che una particella potrebbe guadagnare velocità più rapidamente, inizialmente scendendo più ripidamente, anche se questo significasse viaggiare a più lunga distanza. Il principio di Fermat di meno tempo nell'ottica, che stabilisce principi di ottimizzazione che diventeranno fondamentali per la fisica.

Il problema ha attirato soluzioni dai più distinti matematici dell'epoca, tra cui Isaac Newton, Gottfried Leibniz, Guillaume de l'Hôpital, e Jakob Bernoulli Ogni matematico si avvicinò alla sfida utilizzando tecniche diverse, dimostrando sia la diversità dei metodi matematici disponibili che la necessità di approcci più sistematici a tali problemi di ottimizzazione. Newton lo risolse in una sola sera dopo il ritorno dai suoi doveri alla Royal Mint, presentando la sua soluzione in modo anonimo. *identificare il leone dal suo artiglio*, Questa citazione colorata sembra essere un'abbellimento storico più tardi che un fatto documentato. La competizione ha rivelato che mentre i problemi individuali potrebbero essere risolti attraverso metodi ingegnosi, la comunità matematica non ha avuto un quadro generale per la gestione dell'ottimizzazione funzionale.

Su suggerimento di Leibniz, Bernoulli ha strategicamente esteso la sfida fino a Pasqua 1697 attraverso un foglio di testo stampato chiamato 'Programma', pubblicato in Groningen.Dato

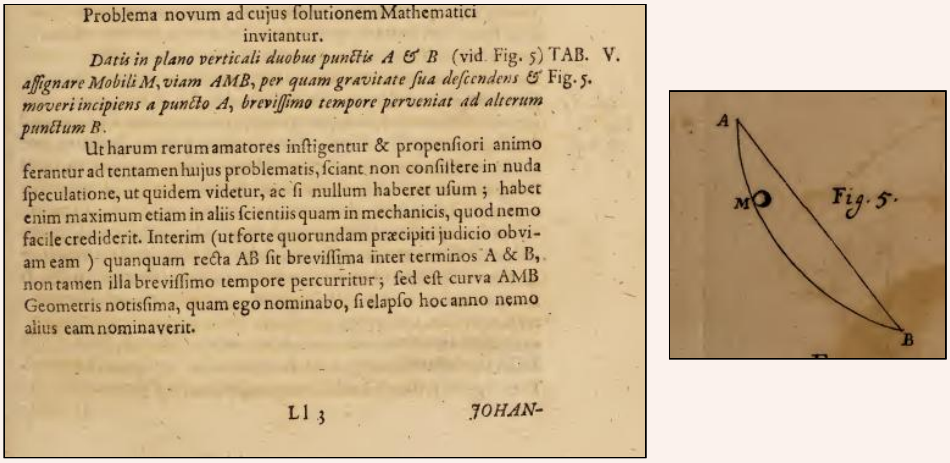
[18] Il termine "brachistochrone" (dal greco *brachistos*, più breve, e *cronos*, tempo) fu coniato dallo stesso Johann Bernoulli quando pose questo problema come una sfida alla comunità matematica nel 1696. Il problema chiede la curva lungo la quale una particella scivola da un punto all'altro in tempo minimo sotto la gravità da sola.

COPIA DI REVISIONE

1 gennaio 1697 nel Calendario Gregoriano, questa versione più grandiosa ha cominciato con una sfida diretta all'élite matematica (Bernoulli, Johann, 1697b):

> Io, Johann Bernoulli, affronto i più brillanti matematici del mondo. Nulla è più attraente per le persone intelligenti di un problema onesto e stimolante, la cui possibile soluzione darà fama e rimarrà come monumento duraturo.
>
> Bernoulli, Johann, 1697b Programma [extending the brachistochrone challenge]

Il problema del brachistochrone ha segnato un momento di spartiacque nella matematica, stabilendo quello che sarebbe diventato noto come il calcolo delle variazioni. La soluzione - che la curva ottimale è un cicloide - ha dimostrato la potenza dei metodi analitici europei continentali in un momento cruciale nella controversia di priorità Leibniz-Newton. Più profondamente, la risoluzione del problema ha stabilito i principi di ottimizzazione che in seguito fiorirebbero in meccanica lagrangiana, con l'esempio di paradigma di paradigma di paradigma moderno.



Problema novum ad cujus ſolutionem Mathematici invitantur.

Datis in plano verticali duobus punctis A & B (vid. Fig. 5) TAB. V. *aſſignare Mobili M, viam AMB, per quam gravitate ſua deſcendens & moveri incipiens a puncto A, breviſſimo tempore perveniat ad alterum punctum B.*

Fig. 5.

Ut harum rerum amatores inſtigentur & propenſiori animo ferantur ad tentamen hujus problematis, ſciant non conſiltere in nuda ſpeculatione, ut quidem videtur, ac ſi nullum haberet uſum; habet enim maximum etiam in aliis ſcientiis quam in mechanicis, quod nemo facile crediderit. Interim (ut forte quorundam præcipiti judicio obviam eam) quanquam recta AB ſit breviſſima inter terminos A & B, non tamen illa breviſſimo tempore percurritur; ſed eſt curva AMB Geometris notiſſima, quam ego nominabo, ſi elapſo hoc anno nemo alius eam nominaverit.

L l 3 JOHAN-

Figura 9.13: La sfida del brachistochrone di Johann Bernoulli (Bernoulli, Johann, 1696)

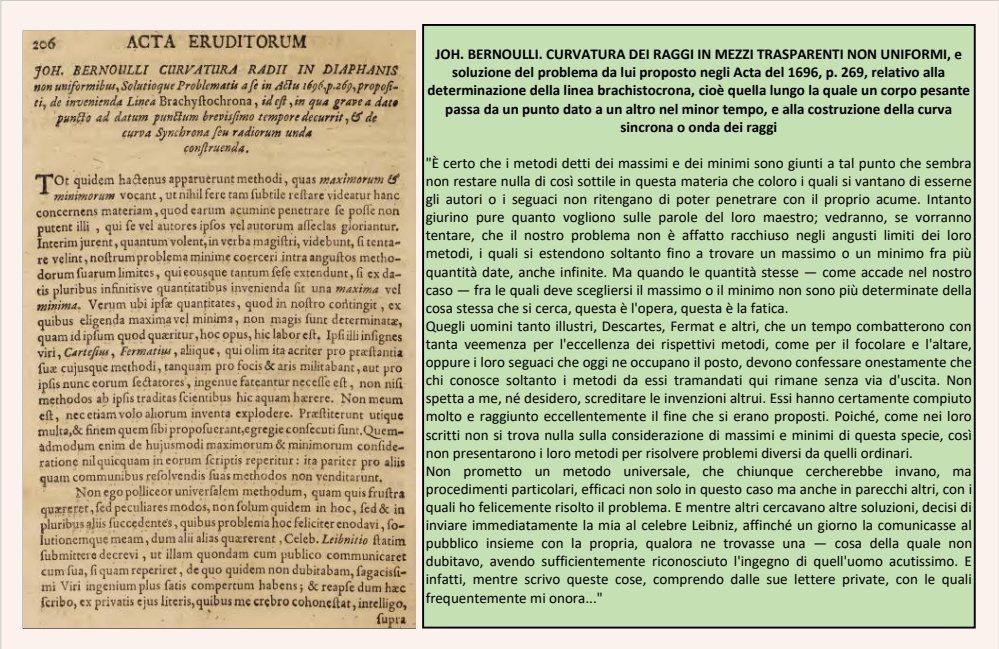
9.3.2.1.2.3 La soluzione di Johann Bernoulli (1697) Il giornale del 1697 di Johann Bernoulli, *Curvatura radii in diaphanis non uniformibus: Solutio problematis brachistochrona* [19] (Bernoulli, Johann, 1697a) emerse da questo ambiente competitivo, che rappresenta un momento di spartiacque nella storia della matematica. *Atto Eruditorum* Nel maggio 1697, questo lavoro fornì una soluzione geniale a ciò che sarebbe diventato riconosciuto come il

[19] titolo completo: *CURVATURA RADII IN DIAPHANIS non uniformibus, Solutioque Problematis a se in Actis 1696, p.269, propositi, de invenienda Linea Brachystochrona, id est, in qua grave a dato puncto ad datum punctum brevissimo tempore decurrit, & de curva Synchrona siu radiorum unda construenda* o Curvatura di Rays in Non-uniformi Trasparenti Media, e Soluzione del Problema proposto da lui in Acta 1696, p.269, riguardo alla ricerca della linea Brachystochrona, cioè, in cui un corpo pesante passa da un dato punto ad un dato punto nel più breve tempo, e riguarda la costruzione della curva Synchronous o onda di raggi

COPIA DI REVISIONE

problema fondante del calcolo variazionale. Il documento stabilì il precedente matematico per problemi di ottimizzazione che coinvolgono funzioni piuttosto che funzioni- un balzo concettuale che non sarebbe stato completamente sistemato fino al trattato monumentale del 1744 di Euler.

Ma iniziamo con la prima pagina, Fig. 9.14 Questa notevole apertura rivela la consape-


206 ACTA ERUDITORUM

JOH. BERNOULLI CURVATURA RADII IN DIAPHANIS non uniformibus, Solutioque Problematis ası in Actu 1696. p. 269. propositi, de invenienda Linea Brachystochrona, id est, in qua grave a dato puncto ad datum punctum brevissimo tempore decurrit, & de curva Synchrona seu radiorum unda construenda.

TOt quidem hactenus apparuerunt methodi, quas *maximorum & minimorum* vocant, ut nihil fere tam subtile restare videatur hanc concernens materiam, quod earum acumine penetrare se posse non putent illi, qui se vel autores ipsos vel autorum assecias gloriantur. Interim jurent, quantum volent, in verba magistri, videbunt, si tentare velint, nostrum problema minime coerceri intra angustos methodorum suarum limites, qui eousque tantum sese extendunt, si ex datis pluribus infinitisve quantitatibus invenienda sit una *maxima* vel *minima*. Verum ubi ipsæ quantitates, quod in nostro contingit, ex quibus eligenda maxima vel minima, non magis sunt determinatæ, quam id ipsum quod quæritur, hoc opus, hic labor est. Ipsi illi insignes viri, *Cartesius*, *Fermatius*, aliique, qui olim ita acriter pro præstantia suæ cujusque methodi, tanquam pro focis & aris militabant, aut pro ipsis nunc eorum sectatores, ingenue fateantur necesse est, non nisi methodos ab ipsis traditas scientibus hic aquam hærere. Non meum est, nec etiam volo aliorum inventa explodere. Præstiterunt utique multa, & finem quem sibi proposuerant, egregie consecuti sunt. Quemadmodum enim de hujusmodi maximorum & minimorum consideratione nil quicquam in eorum scriptis reperitur: ita pariter pro aliis quam communibus resolvendis suas methodos non venditarunt.

Non ego pollicor universalem methodum, quam quis frustra quæreret, sed peculiares modos, non solum quidem in hoc, sed & in pluribus aliis succedentes, quibus problema hoc feliciter enodavi, solutionemque meam, dum alii alias quærerent, Celeb. *Leibnitio* statim submittere decrevi, ut illam quondam cum publico communicaret cum sua, si quam reperiret, de quo quidem non dubitabam, sagacissimi Viri ingenium plus satis compertum habens; & reapse dum hæc scribo, ex privatis ejus literis, quibus me crebro cohonestat, intelligo, supra

JOH. BERNOULLI. CURVATURA DEI RAGGI IN MEZZI TRASPARENTI NON UNIFORMI, e soluzione del problema da lui proposto negli Acta del 1696, p. 269, relativo alla determinazione della linea brachistocrona, cioè quella lungo la quale un corpo pesante passa da un punto dato a un altro nel minor tempo, e alla costruzione della curva sincrona o onda dei raggi

"È certo che i metodi detti dei massimi e dei minimi sono giunti a tal punto che sembra non restare nulla di così sottile in questa materia che coloro i quali si vantano di esserne gli autori o i seguaci non ritengano di poter penetrare con il proprio acume. Intanto giurino pure quanto vogliono sulle parole del loro maestro; vedranno, se vorranno tentare, che il nostro problema non è affatto racchiuso negli angusti limiti dei loro metodi, i quali si estendono soltanto fino a trovare un massimo o un minimo fra più quantità date, anche infinite. Ma quando le quantità stesse — come accade nel nostro caso — fra le quali deve scegliersi il massimo o il minimo non sono più determinate della cosa stessa che si cerca, questa è l'opera, questa è la fatica.
Quegli uomini tanto illustri, Descartes, Fermat e altri, che un tempo combatterono con tanta veemenza per l'eccellenza dei rispettivi metodi, come per il focolare e l'altare, oppure i loro seguaci che oggi ne occupano il posto, devono confessare onestamente che chi conosce soltanto i metodi da essi tramandati qui rimane senza via d'uscita. Non spetta a me, né desidero, screditare le invenzioni altrui. Essi hanno certamente compiuto molto e raggiunto eccellentemente il fine che si erano proposti. Poiché, come nei loro scritti non si trova nulla sulla considerazione di massimi e minimi di questa specie, così non presentarono i loro metodi per risolvere problemi diversi da quelli ordinari.
Non prometto un metodo universale, che chiunque cercherebbe invano, ma procedimenti particolari, efficaci non solo in questo caso ma anche in parecchi altri, con i quali ho felicemente risolto il problema. E mentre altri cercavano altre soluzioni, decisi di inviare immediatamente la mia al celebre Leibniz, affinché un giorno la comunicasse al pubblico insieme con la propria, qualora ne trovasse una — cosa della quale non dubitavo, avendo sufficientemente riconosciuto l'ingegno di quell'uomo acutissimo. E infatti, mentre scrivo queste cose, comprendo dalle sue lettere private, con le quali frequentemente mi onora..."

Figura 9.14: La soluzione 1697 di Johann Bernoulli della sfida del brachistochrone (Bernoulli, Johann, 1697a)

volezza acuta di Johann Bernoulli che stava affrontando un tipo di problema matematico fondamentalmente nuovo. La sua distinzione tra ottimizzazione tradizionale — che ha determinato 'un massimo o minimo da quantità plurali o infinite date» — e la sfida del brachistochrone, dove "le quantità stesse stesse... non sono più determinate di quella cosa molto ricercata,' cattura precisamente il salto concettuale da ottimizzazione finita-dimensionale a ottimizzazione infinita-esistente.

Il brano illumina anche la cultura intellettuale e la dinamica competitiva della matematica del tardo XVII secolo. La critica acuta di Johann dei suoi predecessori, quelli che «sveglieranno dalle parole del loro maestro» e si troveranno «stuck» quando affrontano nuove sfide, riflettendo la sua fiducia nel suo approccio innovativo e le intense rivalità matematiche del periodo.[20].

[20]La critica di Johann di studiosi che «svegliavano con le parole del loro maestro» e resistevano a confrontarsi con i problemi che superano i confini dei metodi stabiliti risuona notevolmente con le dinamiche accademiche contemporanee. Questo atteggiamento ha storicamente imposto l'adesione ai paradigmi consolidati, dalla resistenza della filosofia naturale aristotelica alle descrizioni matematiche del movimento che alla fine

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

La sfida del brachistochrone aveva attirato soluzioni dai più noti matematici dell'epoca, tra cui Isaac Newton, Gottfried Leibniz, Guillaume de l'Hôpital e Jakob Bernoulli, che si avvicinarono al problema usando tecniche diverse, ma la soluzione di Johann si rivelò particolarmente influente a causa della sua metodologia innovativa e delle profonde intuizioni fisiche.

Metodo di analisi e soluzione ottico di Johann Bernoulli La soluzione di Johann Bernoulli dimostra una notevole intuizione fisica unita all'ingegno matematico. Incapace di affidarsi a metodi di variazione sistematici (che non esistevano ancora), ha impiegato un'elegante analogia ottica basata sul principio di Fermat di meno tempo. La sua idea chiave era quella di trattare il campo gravitazionale come un mezzo stratificato dove l'indice di rifrazione varia con altezza, trasformando così un problema meccanico in un'ottica.

La formulazione matematica tratta il tempo di viaggio come $\int \frac{ds}{v(y)}$ dove $v(y) = \sqrt{2gy}$ rappresenta la velocità della particella in altezza y. Applicando La legge di rifrazione di Snell e considerando la velocità crescente della particella che scende, Johann ha dimostrato che il percorso ottimale deve essere un *cicloide*Johann ha subito riconosciuto questo risultato notevole, notando che "hanc ipsissimam Cycloidem seu tautochronam Hugenianan, esse nostram Brachystochronam quaesitam" (questo stesso Cycloid o Huygens' curva più veloce è la nostra ricercata via di discesa rettilinea rivela profonda breve.

L'eleganza matematica dell'approccio di Johann sta nel suo riconoscimento che i principi di ottimizzazione da ottica possono essere trasferiti alla meccanica, anticipando la Tuttavia, il suo metodo, pur ingegnoso, rimase specifico per problemi e non ebbe la generalità necessaria per affrontare sistematicamente altri problemi variazionali. La soluzione era brillante ma non facilmente generalizzata—una limitazione che motivasse lo sviluppo di approcci più sistematici.

Limitazioni matematiche e necessità dei metodi generali Nonostante la sua scoperta concettuale, la soluzione del 1697 di Johann rivela i vincoli matematici che affrontano i matematici del primo XVIII secolo quando si tratta di problemi di ottimizzazione che coinvolgono curve. La sua analogia ottica, pur avendo successo per il brachistochrone, non ha fornito un quadro sistematico per attaccare altri problemi di variazione.

Questo divario metodologico si è sempre più evidente come i matematici hanno incontrato ulteriori sfide di ottimizzazione. La soluzione brachistochrone ha evidenziato un bisogno cruciale nella metodologia matematica: non esisteva alcuna tecnica generale per derivare le equazioni differenziali che le curve ottimali devono soddisfare. Il successo di Johann con il cicloide era notevole, ma non offriva un percorso chiaro per risolvere altri problemi

avrebbero dato origine alla meccanica galileiana e newtoniana, ad esempi più recenti. (National Institute of Standards and Technology (NIST), 2005), necessitando dello sviluppo di nuovi approcci di elementi finiti e di tecniche di modellazione multi-scala che hanno sfidato le filosofie convenzionali del design. Il processo di revisione peer, pur essenziale per mantenere gli standard, può talvolta perpetuare il conservatorismo intellettuale che Johann ha criticato, favorendo i progressi incrementali all'interno dei paradigmi accettati rispetto agli approcci rivoluzionari che potrebbero rendere obsoleti i metodi esistenti.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

variazionali come l'elastica, l'elastica problema isoterimmetrico, o il problema generale delle curve minimizzando gli integrali arbitrari.

Questa limitazione metodologica si estendeva a domande di esistenza e unicità delle soluzioni, mentre Johann dimostrava che il cicloide risolve il problema del brachistochrone, il quadro matematico per dimostrare che fornisce il minimo globale unico, o per determinare quando i problemi variazionali ammettono soluzioni, rimanevano assenti.

Influenza nello sviluppo del quadro delle variazioni successive Il problema del brachistochrone ha profondamente influenzato il pensiero successivo all'ottimizzazione e avrebbe motivato direttamente lo sviluppo di metodi di variazione sistematica. Il riconoscimento che mentre l'analogia ottica di Johann aveva risolto un problema specifico brillantemente, la matematica ha avuto bisogno di principi generali in grado di gestire qualsiasi problema di ottimizzazione che coinvolge funzioni è diventato sempre più chiaro alla comunità matematica.

L'intuizione rivoluzionaria che alla fine emergeva è stata lo sviluppo di un metodo sistematico per derivare le equazioni differenziali che le curve ottimali devono soddisfare, indipendentemente dall'ottimizzazione funzionale specifica.Questo "metodo di valori differenziali" fornirà il quadro generale che mancava dall'approccio di Johann—un modo per trasformare qualsiasi problema variazionale in un'equazione differenziale la cui soluzione ha dato la curva ottimale.

Il collegamento tra il brachistochrone del 1697 e le soluzioni elastica successive si estende più a fondo della semplice sequenza storica, entrambe le problematiche cercano curve che ottimizzano le quantità integrali: il brachistochrone minimizza il tempo di viaggio $\int \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$, mentre l'elastica minimizza energia $\int \kappa^2 ds$Il genio degli sviluppi successivi ha riconosciuto che entrambi i problemi – e in effetti tutti i problemi variazionali – potrebbero essere risolti utilizzando lo stesso approccio sistematico.

Il problema dell'elastica rappresenterebbe infine un'applicazione diretta del generale I principi variazionali che il problema del brachistochrone aveva suggerito ma non poteva sfruttare sistematicamente; dove Johann aveva bisogno di una visione fisica specifica del problema (l'analogia ottica), il metodo sistematico avrebbe fornito una procedura universale applicabile a qualsiasi problema di ottimizzazione funzionale. L'elastica sarebbe diventata non solo un altro problema risolto, ma una dimostrazione della potenza del calcolo variazionale sistematico.

La nascita di una nuova disciplina matematica La soluzione 1697 di Johann Bernoulli è dunque il momento fondamentale in cui i matematici hanno incontrato la sfida concettuale di ottimizzare gli spazi di funzioni infinite-dimensionali. Mentre le tecniche specifiche impiegate– l'analogia ottica e la legge di Snell–non generalizzavano, l'intuizione fondamentale che le curve potrebbero essere trovate dai principi di ottimizzazione risulterebbe rivoluzionaria.

Il problema del brachistochrone ha stabilito che molte questioni fondamentali nella

COPIA DI REVISIONE

meccanica e nella geometria potrebbero essere riformate come problemi variazionali. Questa comprensione si rivelerebbe cruciale non solo per il lavoro successivo sull'elastica ma per l'intero sviluppo successivo della fisica matematica. Il principio di Hamilton nella meccanica alle moderne teorie di misura in fisica, il riconoscimento che i fenomeni naturali spesso corrispondono ai principi di ottimizzazione traccia le sue origini alla scoperta di Johann nel 1697.

Il documento di Johann Bernoulli, nonostante la sua brevità, aveva inconsapevolmente aperto un ramo completamente nuovo della matematica. Lo sviluppo sistematico di questo ramo attendeva i contributi concettuali cruciali del 1740, ma la fondazione concettuale– il riconoscimento che l'ottimizzazione poteva determinare non solo numeri ma intere funzioni— era stato stabilito in modo decisivo. Il brachistochrone si era trasformato da un singolo problema impegnativo nell'esempio fondante di quello che sarebbe diventato uno dei più potenti quadri teorici.

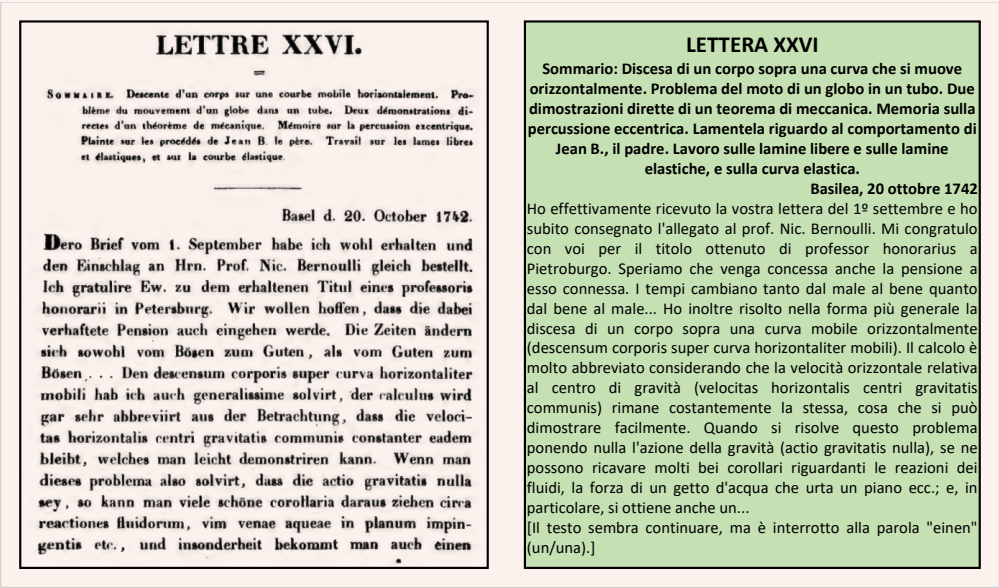
Gap Matematica: Dal 1697 al 1740 Il periodo successivo alla svolta di Johann è stato segnato da tentativi sporadici di risolvere singoli problemi variazionali utilizzando metodi ad hoc. I matematici hanno incontrato il problema isoperimetrico, le domande sulle catene pendenti (catenarie), e varie sfide di ottimizzazione della curva, ma ognuno ha richiesto il proprio approccio ingegnoso. La comunità matematica ha gradualmente riconosciuto che un quadro sistematico era disperatamente necessario.

In questi decenni, diversi sviluppi cruciali hanno posto le basi per i futuri progressi: la comprensione delle equazioni differenziali si è intensificata, i metodi per gestire le condizioni di confine sono migliorati, e il rapporto concettuale tra ottimizzazione e e equazioni differenziali è diventato più chiaro.

In questo contesto matematico Daniel Bernoulli avrebbe contribuito in modo determinante nel 1742, riconoscendo che i principi fisici della minimizzazione dell'energia avrebbero potuto fornire il ponte concettuale tra l'analogia ottica problema-specifica di Johann e un quadro variazionale veramente generale, che risulterebbe essenziale per lo sviluppo sistematico del calcolo variazionale che presto seguirebbe.

9.3.2.1.2.4 La soluzione di Daniel Bernoulli (1742) Questa sezione esamina una notevole lettera da Daniel Bernoulli a Leonhard Euler del 20 ottobre 1742, (Bernoulli, Daniel, 1845 PDF) che rappresenta una transizione cruciale nello sviluppo di metodi variativi, Fig. 9.15Il problema tecnico di Daniel si riferisce al movimento di un globo all'interno di un tubo mobile, rappresenta un'evoluzione diretta dalla sfida originale del brachistochrone, ma con strati aggiunti di complessità che hanno esposto i limiti dei metodi esistenti. (Bernoulli, Johann, 1696 PDF) chiede la curva di discesa più veloce sotto la sola gravità, il problema del tubo di Daniel introduce vincoli dinamici e frame di riferimento in movimento: la palla deve seguire il percorso prescritto del tubo mentre il tubo stesso si muove secondo un certo movimento specificato. problema di ottimizzazione in cui il movimento ottimale dipende non solo dalla gravità, ma dall'interazione tra l'inerzia della palla, il movimento del tubo e le forze di costrizione.

COPIA DI REVISIONE



LETTRE XXVI.

Sommaire. Descente d'un corps sur une courbe mobile horisontalement. Problème du mouvement d'un globe dans un tube. Deux démonstrations directes d'un théorème de mécanique. Mémoire sur la percussion excentrique. Plainte sur les procédés de Jean B. le père. Travail sur les lames libres et élastiques, et sur la courbe élastique.

Basel d. 20. October 1742.

Dero Brief vom 1. September habe ich wohl erhalten und den Einschlag an Hrn. Prof. Nic. Bernoulli gleich bestellt. Ich gratulire Ew. zu dem erhaltenen Titul eines professoris honorarii in Petersburg. Wir wollen hoffen, dass die dabei verhaftete Pension auch eingehen werde. Die Zeiten ändern sich sowohl vom Bösen zum Guten, als vom Guten zum Bösen. . . Den descensum corporis super curva horizontaliter mobili hab ich auch generalissime solvirt, der calculus wird gar sehr abbreviirt aus der Betrachtung, dass die velocitas horizontalis centri gravitatis communis constanter eadem bleibt, welches man leicht demonstriren kann. Wenn man dieses problema also solvirt, dass die actio gravitatis nulla sey, so kann man viele schöne corollaria daraus ziehen circa reactiones fluidorum, vim venae aqueae in planum impingentis etc., und insonderheit bekommt man auch einen

LETTERA XXVI

Sommario: Discesa di un corpo sopra una curva che si muove orizzontalmente. Problema del moto di un globo in un tubo. Due dimostrazioni dirette di un teorema di meccanica. Memoria sulla percussione eccentrica. Lamentela riguardo al comportamento di Jean B., il padre. Lavoro sulle lamine libere e sulle lamine elastiche, e sulla curva elastica.

Basilea, 20 ottobre 1742

Ho effettivamente ricevuto la vostra lettera del 1º settembre e ho subito consegnato l'allegato al prof. Nic. Bernoulli. Mi congratulo con voi per il titolo ottenuto di professor honorarius a Pietroburgo. Speriamo che venga concessa anche la pensione a esso connessa. I tempi cambiano tanto dal male al bene quanto dal bene al male... Ho inoltre risolto nella forma più generale la discesa di un corpo sopra una curva mobile orizzontalmente (descensum corporis super curva horizontaliter mobili). Il calcolo è molto abbreviato considerando che la velocità orizzontale relativa al centro di gravità (velocitas horizontalis centri gravitatis communis) rimane costantemente la stessa, cosa che si può dimostrare facilmente. Quando si risolve questo problema ponendo nulla l'azione della gravità (actio gravitatis nulla), se ne possono ricavare molti bei corollari riguardanti le reazioni dei fluidi, la forza di un getto d'acqua che urta un piano ecc.; e, in particolare, si ottiene anche un...

[Il testo sembra continuare, ma è interrotto alla parola "einen" (un/una).]

Figura 9.15: La lettera di Daniel Bernoulli a Euler, (Bernoulli, Daniel, 1845)

Gli approcci geometrici tradizionali, che avevano richiesto l'ingegnosa analogia ottica di Johann per risolvere anche il più semplice brachistochrone, divenne inflessibile di fronte a tali problemi di vincolo commovente. I principi basati sull'energia di Daniel, tuttavia, potrebbero gestire elegantemente queste complessità trattando l'energia dell'intero sistema come quantità unificata piuttosto che tentare di tracciare i singoli componenti di forza attraverso il cambiamento dei sistemi di coordinate. Come il linguaggio matematico si stava evolvendo da descrizioni puramente geometriche verso espressioni più analitiche, il linguaggio letterale della matematica si stava spostando dal latino universale verso una comunicazione vernacolare più accessibile. L'alternanza senza soluzione di Daniele tra spiegazioni tedesche e termini tecnici latini rispecchia la sua svolta metodologica: Stava sviluppando principi variazionali basati sull'energia che potevano gestire sistematicamente l'intera classe di problemi di ottimizzazione vincolati che includevano sia il brachistochrone originale di Johann che queste dinamiche tubolari più complesse come casi speciali.

La chiave di Daniele di comprensione metodologica appare nella sua affermazione:

> da ich aber ganz andere principia gebrauche, muss ich auch ganz andere denomination annehmen
>
> poiché uso principi completamente diversi, devo anche adottare denominazioni completamente diverse
>
> Bernoulli, Daniel, 1845 *«The 26th letter to Euler»*

Ciò rivela un cambiamento fondamentale del paradigma dai metodi geometrici e cinematici verso approcci basati sull'energia che si riveleranno storicamente trasformativi.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

La rete di corrispondenza La corrispondenza Euler-Bernoulli rappresenta uno dei più importanti scambi scientifici del XVIII secolo. Leonhard Euler (1707-1783) e Daniel Bernoulli (1700-1782) hanno mantenuto una vasta comunicazione durante la loro carriera, discutendo i problemi della meccanica, della matematica e della fisica[21].

L'Espressione Elastica Energetica e l'Intuizione Fisica Nella lettera di ottobre 1742, Daniel Bernoulli presenta una delle prime formulazioni esplicite di energia elastica:

$$\int \frac{ds}{R^2} \tag{9.6}$$

dove ds è l'elemento lunghezza dell'arco, R è il raggio di la curvatura, e $\frac{1}{R^2}$ rappresenta il quadrato della curvatura.

Questa espressione rappresenta l'energia di flessione di un'asta elastica o di un fascio, ma la formulazione di Bernoulli si basa sull'intuizione fisica piuttosto che sulla derivazione rigorosa. Il suo ragionamento ha seguito diversi passi intuitivi: riconoscere che l'energia elastica deve essere concentrata dove il fascio si piega più severamente (suggesting dependance on curvature $\kappa = 1/R$), intuendo che questa energia dovrebbe scalare quadraticamente con deformazione a seguito di analogie con altri sistemi fisici, e comprendendo che l'energia totale dovrebbe essere ottenuta integrando la densità di energia locale lungo la lunghezza del fascio.

Daniel afferma che egli assume ("ich annehme") che

> morire *vis viva* La sua capacità di produzione è di tipo «incentivo»
>
> il potenziale vis viva inerente alla piastra elastica deve essere minimo.
> Bernoulli, Daniel, 1845 «*The 26th letter to Euler*»

Questo rappresenta un notevole esempio di intuito fisico che precede la rigorosa derivazione matematica di più di un secolo, la giusta fondazione teorica emergerebbe attraverso Meccanica continuum del Cauchy (Cauchy, 1823), La teoria elastica di Poisson (Poisson, 1829)e La teoria del piatto 1859 di Kirchhoff (Kirchhoff, 1859).

Metodi variabili e quadro matematico Bernoulli menziona esplicitamente l'uso dell'«metodo isoperimetricorum» (metodo di problemi isotermici) per risolvere il problema della curva elastica, che comporta l'ottimizzazione limitata delle funzionalità e la ricerca di curve che minimizzano l'energia soggetta a vincoli geometrici. equazione differenziale di quarto ordine) dal suo approccio variazionale — significativo perché l'equazione del fascio Euler-Bernoulli è effettivamente quarto ordine, dimostrando la connessione tra principi variazionali e e equazioni differenziali due anni prima dello sviluppo sistematico di Euler-Equazione di Lagrange.

[21] Per un'edizione digitale completa della corrispondenza Euler-Bernoulli, vedere la Bernoulli–Euler Online (BEOL) progetto, il Euler Archive, e la Early Modern Letters Online (EMLO) database, tutti i quali forniscono testi ricercabili, metadati e scansioni ad alta risoluzione delle lettere originali

COPIA DI REVISIONE

La lettera discute il problema generale di una lamina elastica di lunghezza fissata a due punti con indicazioni tangenti prescritte ai punti finali, che rappresenta una delle prime formulazioni di problemi di valore limite nella teoria dell'elasticità.

Innovazione concettuale La lettera dimostra diversi sviluppi cruciali: la formulazione dell'energia elastica come parte integrante della curvatura, l'applicazione delle tecniche isopetrici ai problemi fisici, l'idea che le configurazioni naturali minimizzano l'energia, e la connessione tra fisica e calcolo avanzato. *Metodologia inveniendi* (Euler, 1744b), d'Alembert lavora su corde vibranti (D'Alembert, 1747)e Lagrange's *Analitica medica* (Lagrange, 1788).

Impostazione della fase per lo sviluppo sistemico La formulazione di principi di energia elastica di Daniel nel 1742 e la sua applicazione di metodi isopoerimetrici hanno creato sia un'opportunità che una sfida per la comunità matematica. I suoi intuizioni fisiche erano profonde, il riconoscimento che le configurazioni naturali minimizzano l'energia sarebbe fondamentale per tutta la fisica teorica.

Il divario matematico era chiaro: mentre Daniel poteva formulare espressioni energetiche come $\int ds/R^2$ e applicare tecniche isoperimetriche per ricavare equazioni differenziali di quarto ordine, non esisteva alcun metodo generale per trasformare i problemi variazionali arbitrari nelle loro equazioni differenziali corrispondenti. funzionale richiedeva un proprio approccio ingegnoso, tanto quanto il brachistochrone di Johann aveva richiesto l'analogia ottica cinquant'anni prima.

Questa limitazione metodologica avrebbe condotto l'indagine sistematica di Euler, avendo assorbito le informazioni di Daniel circa La riduzione dell'energia e la testimonianza della potenza degli approcci variazionali attraverso la loro corrispondenza, Euler ha riconosciuto la necessità di un quadro universale, un metodo sistematico che potrebbe gestire qualsiasi problema di ottimizzazione funzionale, sia che si tratti di energia elastica, geodetica, o di principi fisici completamente nuovi ancora da scoprire.

9.3.2.1.2.5 Problemi isoperimetrici vs. Calcolo delle variazioni Prima di studiare l'approccio variazionale di Euler, dobbiamo contestualizzare i termini di ceretain.

I problemi isoperimetrici rappresentano una specifica classe di sfide di ottimizzazione che emergono da antiche questioni geometriche, soprattutto il problema di Dido: tra tutte le curve chiuse di perimetro fisso, che racchiude la massima area? Questi problemi sono caratterizzati dalla necessità di ottimizzare una quantità geometrica o fisica mantenendo un vincolo su un'altra quantità.

Il calcolo delle variazioni, al contrario, è il quadro matematico completo che si è sviluppato per gestire sistematicamente i problemi isotteristici, insieme a molti altri tipi di ottimizzazione funzionale. Mentre i problemi isopetrici hanno fornito una motivazione cruciale per lo sviluppo di metodi variazionali, soprattutto attraverso le dispute dei fratelli Bernoulli nei primi anni del '700, la teoria matematica risultante si estende ben oltre l'ottimizzazione contratta per comprendere qualsiasi problema che coinvolga l'ottimizzazione delle funzionalità.

COPIA DI REVISIONE

Tabella 9.5: Problemi isoperimetrici vs. Calcolo delle variazioni

Aspetti	**Problemi isoperimetrici**	**Calcolo delle variazioni**
Definizione	Problemi di ottimizzazione con vincoli geometrici (ad esempio, perimetro fisso)	Quadro matematico generale per ottimizzare le funzionalità
Ambito	Tipo specifico di ottimizzazione limitata	Campo ampio che comprende tutte le ottimizzazioni funzionali
Periodo storico	Origini antiche (problema Dido), soluzioni case-by-case fino al 1700	Sviluppo sistemico dal 1696 (brachistochrone) al 1744 (Euler)
Struttura matematica	Optimize $I[y]$ subject to $J[y] =$ constant	Optimize $I[y] = \int F(x, y, y')dx$ (contrattato o non limitato)
Metodo di soluzione	Moltiplicatori di Lagrange: $\delta(I - \lambda J) = 0$	Equazione Euler-Lagrange: $\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$
Esempi classici	Cerchio (zona massima, perimetro fisso), problema di Dido, brachistochrone con trazione	Brachistochrone, elastica, geodetica, superfici minimali, principio di Fermat
Contributori chiave	Jakob & Johann Bernoulli (discute 1697-1701), Lagrange (metodo multiplier)	Johann Bernoulli (1696), Euler (1744), Lagrange (1788)
Relazioni moderne	Sottoinsieme del calcolo delle variazioni (problemi limitati)	Teoria generale, compresi i problemi isoperiometrici come casi speciali

Nella matematica contemporanea, i problemi isopetrici costituiscono il ramo di calcolo variabile, mentre storicamente hanno guidato lo sviluppo di metodi variazionali sistematici, rappresentano ora una categoria importante nel campo più ampio dell'ottimizzazione funzionale che comprende sia problemi legati che non vincolati.

9.3.2.2 La soluzione di Euler (Calcolo delle Variazioni) (1744)

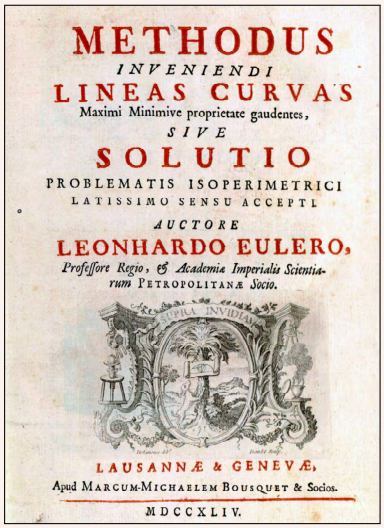
Euler's 1744 *Metodo inveniendi lineas curves massimizzare minimizzare proprietario gaudentes* (Euler, 1744b)Fico. 9.16a, rappresenta un punto di riferimento nell'analisi matematica, sia per il suo sviluppo sistematico del calcolo delle variazioni e delle sue applicazioni innovative.

- Sei capitoli principali, consegnati all'editore nel luglio 1743
- Due appendici consegnate nel dicembre 1743, le prime curve elastiche trattanti, la seconda che affronta il principio di meno azione.

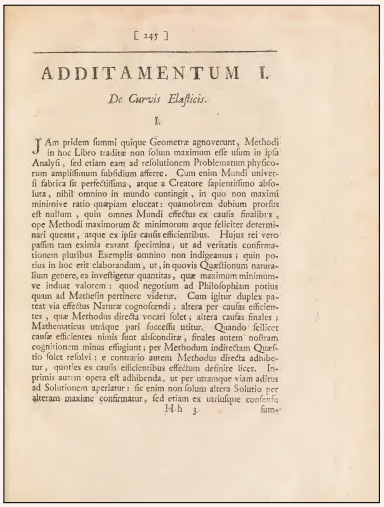
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Questa struttura riflette l'approccio metodologico di Euler: il corpo principale stabilisce le basi teoriche di quello che sarebbe diventato noto come il calcolo classico delle variazioni, tra cui l'equazione differenziale Euler (ora l'equazione Euler-Lagrange), mentre le appendici dimostrano la potenza di questi nuovi metodi attraverso applicazioni impegnative, con Additamentum che presento la sua soluzione al più grande posizionamento elastica.


METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS
Maximi Minimive proprietate gaudentes,
SIVE
SOLUTIO
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio, & Academiæ Imperialis Scientiarum Petropolitanæ Socio.
LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios.
MDCCXLIV.

(a) *Metodo di linea iveniendi...* (Euler, 1744b)


[245]
ADDITAMENTUM I.
De Curvis Elasticis.
I.
JAm pridem summi quique Geometræ agnoverunt, Methodi in hoc Libro traditæ non solum maximum esse usum in ipsa Analysi, sed etiam eam ad resolutionem Problematum physicorum amplissimum subsidium afferre. Cum enim Mundi universi fabrica sit perfectissima, atque a Creatore sapientissimo absoluta, nihil omnino in mundo contingit, in quo non maximi minimive ratio quæpiam elucear: quamobrem dubium prorsus est nullum, quin omnes Mundi effectus ex causis finalibus, ope Methodi maximorum & minimorum æque feliciter determinari queant, atque ex ipsis causis efficientibus. Hujus rei vero passim tam eximia exstant specimina, ut ad veritatis confirmationem pluribus Exemplis omnino non indigeamus; quin potius in hoc erit elaborandum, ut, in quovis Quæstionum naturalium genere, ea investigetur quantitas, quæ maximum minimumve induat valorem: quod negotium ad Philosophiam potius quam ad Matheſin pertinere videtur. Cum igitur duplex pateat via effectus Naturæ cognoscendi; altera per causas efficientes, quæ Methodus directa vocari solet; altera causas finales; Mathematicus utrâque pari successu utitur. Quando scilicet causæ efficientes nimis sunt absconditæ, finales autem nostram cognitionem minus effugiunt; per Methodum indirectam Quæstio solet resolvi: e contrario autem Methodus directa adhibetur, quoties ex causis efficientibus effectum definire licet. Inprimis autem opera est adhibenda, ut per utramque viam aditus ad Solutionem aperiatur: sic enim non solum altera Solutio per alteram maxime confirmatur, sed etiam ex utriusque conjunctis
Hh 3 sum-

(b) *Additamentum I: De curvis elasticis* (Euler, 1744a)

Figura 9.16: Il trattato di Euler del 1744 sul calcolo delle variazioni (Euler, 1744b)

Corpo principale: Fondazione del Calcolo Variante I sei capitoli del lavoro principale stabiliscono le fondazioni sistematiche del calcolo variazionale.[22] Il metodo sistematico per trovare curve che ottimizzano le funzionalità integrali, che rappresentava un nuovo tipo di problema matematico, invece di trovare valori che ottimizzano le funzioni, l'obiettivo era quello di trovare funzioni che ottimizzano le funzionalità.

Per una funzione generale della forma:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} Z(x, y, p, q, r, \ldots)\, dx \tag{9.7}$$

dove $p = dy/dx$, $q = dp/dx = d^2y/dx^2$, $r = dq/dx = d^3y/dx^3$, ecc., Euler introduce il concetto rivoluzionario del valore "differenziale".

Scrive il differenziale totale di Z as:

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \cdots \tag{9.8}$$

[22] Questa sezione si basa principalmente sulla traduzione e commento autorevoli dell'inglese da Oldfather, Ellis e Brown, 1933.

COPIA DI REVISIONE

dove:

$$M = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad P = \frac{\partial Z}{\partial p} \tag{9.9}$$

$$Q = \frac{\partial Z}{\partial q}, \quad R = \frac{\partial Z}{\partial r} \tag{9.10}$$

La visione cruciale è che per la funzionalità I per avere un estremità, il suo valore "differenziale" deve sparire:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial Z}{\partial p} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial Z}{\partial q} - \frac{d^3}{dx^3}\frac{\partial Z}{\partial r} + \cdots \right) \delta y \, dx = 0 \tag{9.11}$$

Poiché questo deve contenere per variazioni arbitrarie δy, l'integrando deve svanire, cedendo quello che ora chiamiamo l'equazione Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial Z}{\partial p} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial Z}{\partial q} - \frac{d^3}{dx^3}\frac{\partial Z}{\partial r} + \cdots = 0 \tag{9.12}$$

Questo metodo sistematico per derivare equazioni differenziali dai principi di ottimizzazione era completamente nuovo e avrebbe rivoluzionato non solo la meccanica ma tutta la fisica matematica. Nel corso dei sei capitoli, Euler ha applicato questo quadro a problemi classici, tra cui il brachistochrone, problemi isotteristici, e varie sfide di ottimizzazione geometrica, dimostrando la generalità e la potenza del suo approccio.

Euler sottolinea l'importanza della doppia verifica nel suo approccio metodologico:

> Inprimis autem opera est adhibenda, ut per utramque viam aditus ad Solutionem aperiatur: sic enim non solum altera Solutio per Allegato alla presente relazione summam percipimus voluptatem.
>
> Ma bisogna fare uno sforzo particolare per vedere che entrambi i modi di avvicinarsi alla soluzione del problema sono aperti; perché non solo è una soluzione molto rafforzata dall'altra, ma, più di questo, dall'accordo tra le due soluzioni che garantiamo la massima soddisfazione.
> Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, Sezione 1

Questo principio di duplice verifica si rivelerebbe centrale al suo trattamento del problema elastico nell'appendice.

Appendice I: Applicazione all'elastica Avendo stabilito il quadro generale del calcolo variazionale nei capitoli principali, Euler si rivolge alla sua applicazione più impegnativa nella prima appendice, *Additamentum I: De curvis elasticis* (Euler, 1744a)Fico. 9.16bQuesta applicazione non era solo illustrativa; era motivata da una visione fisica cruciale di Daniel Bernoulli e rappresentava una delle più eleganti dimostrazioni della potenza del suo nuovo quadro matematico.

COPIA DI REVISIONE

L'Insight e la Corrispondenza di Daniel Bernoulli In una lettera del 1742 ad Euler, Daniel Bernoulli aveva suggerito che l'equazione dell'elastica potesse essere ottenuta assumendo che una certa espressione — quello che ora chiamiamo energia di sforzo—è minimizzato in equilibrio:

> Ich möchte wissen, ob Ew. die curvaturam laminae elasticae nicht könnten sub hac facie solviren, dass eine lamina datae longitudinis in duobus punctis positione datis fixirt sey, also dass die Tangentes in istis punctis auch positione datae siy... hab aber sub hacie noch keine Soluzione gefunden, als per metodo isoperimetricorum, da ich annehme, dass die vis viva potenzialeis laminae elasticae insita müsse minima seyn, wie ich Ew. schon einmal gemeldet. Auf diese Weise bekomme ich eine aequationem differenziaalem 4ti ordinis, welche ich nicht hab genugsam reduciren können, um zu zeigen, dass die aequatio ordinaria elastica generale.
>
> Vorrei sapere se non si può risolvere la curvatura della lamina elastica in questa condizione, che una lamina di lunghezza data è fissata a due punti con posizioni date, e che i tangenti a questi punti sono anche dati in posizione... Questa è l'idea più generale di elastica; tuttavia, non ho ancora menzionato una soluzione a questa condizione dal metodo isoperimetrico, dato la mia supposizione che il potenziale vis viva inerente all'equazione elastica differenziale elastica
>
> Bernoulli, Daniel, 1845 «*The 26th letter to Euler*»

Nota che un *lamina* si riferisce a una sottile, piatta, flessibile striscia o trave—essenzialmente ciò che gli ingegneri moderni chiamerebbero un raggio elastico o un cantilever. $\gg$ larghezza $\gg$ spessore), insoddisfacente rispetto ai carichi applicati, inestensibile lungo la sua lunghezza, elastico (ritorno alla sua configurazione originale rettilinea quando scaricato). Pensate a un righello tenuto ad un'estremità e piegato da una forza all'altra, o da un bordo subacqueo. Il termine latino "lamina' (che significa "piastra di mezzo") era la terminologia standard del XVIII secolo per qualsiasi elemento strutturale snello che si piega principalmente attraverso curvatura.

> ich annehme, dass die vis viva potenzialeis laminae elasticae insita müsse minima seyn
>
> Presumo che il potenziale vis viva inerente alla piastra elastica debba essere minimo
>
> Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes

> "Sonsten exprimire ich die vim vivam potenzialeem laminae elastica naturaliter retaet incurvatae durch $\int(ds/R^2)$"
>
> Esprimo il potenziale vis viva di una piastra elastica, naturalmente dritta ma curvata, attraverso $\int(ds/R^2)$
>
> Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes

La corrispondenza rivela anche lo stato precario della St. L'Accademia di Pietroburgo, nel 1742, costringe gli studiosi a strategarsi su dove (e quando) pubblicare, e riflette la

COPIA DI REVISIONE

dura realtà della vita accademica del XVIII secolo, in cui gli studiosi anziani spesso hanno appropriato il lavoro dei loro giovani.

Formulazione Variazione dell'elastica Basato direttamente sull'importante intuizione di Daniel Bernoulli del 1742 sull'energia minima, Euler formula il problema dell'elastica come un principio variabile. Euler afferma il problema con precisione caratteristica:

> ut, inter omnes curve ejusdem longitudinis, quae non solum per puncta A & B transeant, sed etiam in suo punctis a retis positione datis tangantur, definiatur ea in qua sit valor hujus espressioniis $\int \frac{ds}{R^2}$ - Minimus.
>
> Che tra tutte le curve della stessa lunghezza che non solo passano attraverso i punti A e B ma sono anche tangenti a linee rette date in questi punti, quella curva essere determinata in cui il valore di $\int \frac{ds}{R^2}$ è un minimo.
> Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, Sezione 2

La chiave svolta concettuale è riconoscere che le curve elastiche corrispondono a configurazioni che minimizzano la funzionalità dell'energia totale:

$$I = \int \left[\frac{1}{2} EI\kappa^2 + V(x, y) \right] ds \tag{9.13}$$

dove il primo termine rappresenta l'energia elastica della tensione (proporzionale al quadrato della curvatura) e $V(x, y)$ rappresentazione potenziale energia delle forze esterne.

Per la pura elastica (senza forze esterne), questo riduce a:

$$I = \int \kappa^2 \, ds = \int \frac{1}{R^2} \, ds \tag{9.14}$$

Questa formulazione energetica fornisce una immediata comprensione fisica che era stata mancante da approcci precedenti.

- **Perché vengono selezionate soluzioni specifiche**: La natura sceglie configurazioni che minimizzano l'energia totale
- **Diramazioni di soluzione multiple**: Le diverse condizioni di confine portano a diversi minimi della funzionalità energetica
- **Stabilità**: Le configurazioni minime di energia sono intrinsecamente stabili
- **Capacità di generalizzazione**: lo stesso principio vale per tutti i problemi elastici

Il principio energetico spiega immediatamente l'osservazione di Huygens del 1694 di molteplici forme possibili di curva elastica: diverse condizioni di confine e parametri di carico portano a diversi minimi della funzionalità energetica, ciascuno che rappresenta una configurazione fisicamente realizzabile.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Derivation e verifica diretta Fedele al suo principio di doppia verifica, Euler procede a ricavare la stessa equazione da principi meccanici noti, stabilendo così la validità della procedura variazionale. Nelle sezioni di apertura dell'appendice, Euler ha verificato la congettura di Daniel utilizzando metodi del calcolo delle variazioni. La maggior parte dell'appendice è poi dedicata ad un'indagine con metodi diretti, non collegata alla matematica variazionale, della meccanica delle lamina elastiche.

Nella derivazione diretta, Eulero considera una lamina AB incastrata in un supporto nel punto B, Fig. 9.17. Sia B sia la tangente alla lamina in B sono considerati fissi. All'altra estremità A è collegata un'asta priva di peso, sulla cui estremità C agisce una forza P[23]. Il peso della lamina è considerato trascurabile rispetto a P.

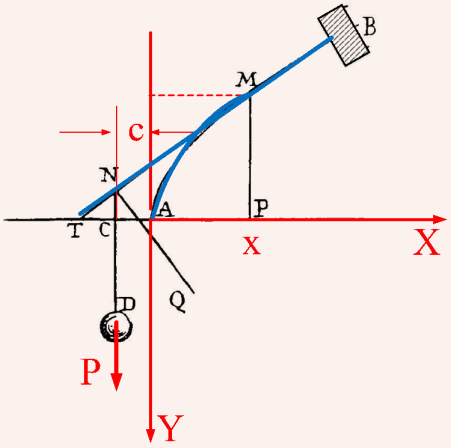


Figura 9.17: Metodo diretto di Euler "free body diagram"
Confronta con Fig. 9.28 per la successiva generalizzazione di Euler (1771) di questo diagramma 1744 elastica.

Euler impiega un sistema di coordinate cartesiano con origine a A e orientato in modo che l'asse y coincida con la direzione della forza P. M essere un punto sulla lamina con coordinate x e y. Il momento esercitato dalla forza esterna circa M is $\mathfrak{M} = P(x + c)$dove c è la distanza da A al punto C. La resistenza "forza elastica" (che oggi chiamiamo la momento di piegatura) della lamina M è considerato da Euler come dato dall'espressione Ek^2/Rdove Ek^2 è una quantità che misura la "stiffness" della lamina e R è il raggio di curvatura della lamina M. In equilibrio queste due espressioni devono essere uguali:

$$\mathfrak{M} = P(c + x) = \frac{\mathfrak{B}}{R} \tag{9.15}$$

dove $\mathfrak{B} = Ek^2$ è indicato come il "modulo imminente."

[23]Nell'impostazione di Eulero la curva elastica fornisce un modello unificato e il sistema di coordinate viene orientato una volta per tutte rispetto alla direzione della forza esterna P. Presumibilmente è questa l'origine dell'espressione sistema di coordinate euleriano, contrapposto a quello lagrangiano, impiegato nei problemi di grandi spostamenti o nella meccanica dei fluidi.

COPIA DI REVISIONE

L'espressione del raggio di curvatura era già stata derivata da Jakob Bernoulli (Eq. 8.17)

$$R = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2}$$

Sostituire questa espressione per R in Eq. 9.15 e integrando, Euler ottiene:

$$dy = \frac{-P\left(\frac{1}{2}x^2 + cx + f\right)}{\sqrt{\left(E^2k^4 - P^2\left(\frac{1}{2}x^2 + cx + f\right)^2\right)}}dx \tag{9.16}$$

dove f Euler preferisce riesprimere questo in termini di forma generale che aveva precedentemente ottenuto mediante la procedura variazionale:

$$dy = \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}{\sqrt{\left(a^4 - \left(\alpha + \beta x + \gamma x^2\right)^2\right)}}dx \tag{9.17}$$

dove i quantitativi a, α, β e γ sono collegati a quelli di Eq. 9.16 dalle relazioni:

$$P = \frac{-2Ek^2\gamma}{a^2}; \quad c = \frac{\beta}{2\gamma}; \quad f = \frac{\alpha}{2\gamma} \tag{9.18}$$

La direzione della forza P è determinato dal segno della costante γ; per i positivi γ indica nella direzione dell'asse y positivo, per negativo γ indica nella direzione dell'asse y negativo.

Euler ha riconosciuto i componenti fondamentali del comportamento elastico anche senza la teoria dell'analisi dello stress moderno, come osserva nella sua discussione sul modulo di piegatura:

> Haec autem elasticitas absoluta Ekk Pendettone primum ab natura materiae, ex qua lamina est fabrefacta; unde alia materia magis, alia minus elatere prodita dici solet. Secundo quoque a laminae l'ordine, ut expressio Ekk ubique Latitudini laminae debeat esse propolis, si cetera sint paria. Tertio vero crassities laminae plurimum confert ad valorem ipsius Ekk determinandum, quae ita comparata esse videtur, ut, Ceteris paribus, Ekk sieda ut crassitiei quadratum. Conjunctim ergo tenebit expressio Ekk rapporto tra loro compositam ex rationem elateris materiae, latitudinis laminae simplici, ac duplicata crassitiei Laminae.

> Ora questa elasticità assoluta Ek^2 dipenderà in primo luogo dal carattere del materiale da cui è stato realizzato il nastro... Anche, in secondo luogo, dipende così dalla larghezza del nastro che l'espressione Ek^2 La Commissione ha proposto di adottare una decisione che consenta di applicare la direttiva del Consiglio relativa alla protezione dei dati personali, in particolare per quanto riguarda la

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

protezione dei dati personali, la protezione dei dati personali e la protezione dei dati personali. Ek^2, che sembra essere composto in modo tale che, altre cose uguali, Ek^2 è proporzionale al quadrato dello spessore.
Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, Sezione 40

Questa notevole intuizione ha anticipato quello che ora comprendiamo come momento di inerzia della sezione trasversale di un fascio, dimostrando l'intuizione fisica profonda di Euler. Il perfetto accordo tra i suoi approcci variazionali e diretti ha fornito esattamente il tipo di doppia verifica che Euler ha valutato così fortemente, confermando sia la validità dei suoi nuovi metodi matematici che la correttezza fisica del principio energetico di Daniel Bernoulli.

9.3.2.2.1 Classificazione delle specie elastiche Storicamente, i matematici hanno tendeto a classificare oggetti matematici.[24] Euler, nella sezione *enumeratio curvarum elasticarum*, cercava di determinare la varietà "infinita di queste curve elastiche". 9.17 e traduce l'origine degli assi a distanza $\beta/2\gamma$, set $\gamma = 1$, e riduce l'equazione a:

$$dy = \frac{\alpha + x^2}{\sqrt{a^4 - (\alpha + x^2)^2}} dx$$

Notate che $a^4 - (\alpha + x^2)^2 = (a^2 - \alpha - x^2)(a^2 + \alpha + x^2)$ e impostazione $\alpha = a^2 - c^2$, ottiene:

$$dy = \frac{a^2 - c^2 + x^2}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}} dx \tag{9.19}$$

Questa equazione costituisce la base per lo studio grafico di Euler della curva elastica o della lamina[25] (i due termini sono utilizzati in modo intercambiabile) Nella figura 6 della Fig. 9.18, A è l'origine del sistema di coordinate e AE e AB sono le direzioni del positivo x e y rispettivamente. M è un punto tipico sulla curva AMC. La forza esterna P atti in positivo y-direttiva a A. Euler immagina che i punti A e B può essere considerato come unito da un filo di tensione P affinché una forza uguale e opposta P atti B.

[24] Fare riferimento a §3.2.3 per i greci, curve di piano raggruppate di Cartesio, forme cubice enumerate di Newton, ecc.

[25] In questo contesto, un *lamina* si riferisce a una sottile, piatta, flessibile striscia o trave—essenzialmente ciò che gli ingegneri moderni chiamerebbero un raggio elastico o un cantilever. ≫ larghezza ≫ spessore), insoddisfacente rispetto ai carichi applicati, inestensibile lungo la sua lunghezza, elastico (ritorno alla sua configurazione originale rettilinea quando scaricato). Pensate a un righello tenuto ad un'estremità e piegato da una forza all'altra, o da un bordo subacqueo. Il termine latino "lamina' (che significa "piastra di mezzo") era la terminologia standard del XVIII secolo per qualsiasi elemento strutturale snello che si piega principalmente attraverso curvatura.

COPIA DI REVISIONE

Le due quantità significative che associa alla curva sono la forza P e la sine dell'angolo $\angle PAM$ formato dal tangente a A e la x-Assis:

$$\begin{aligned} P &= \frac{2Ek^2}{a^2} \\ \sin(\angle PAM) &= \frac{a^2 - c^2}{a^2} \end{aligned}$$

dove questa espressione P è ottenuto da Eq. 9.18 e $\sin(\angle PAM)$ è derivato da $\tan(\angle PAM) = (a^2 - c^2)/c\sqrt{2a^2 - c^2}$ ottenuto mediante impostazione $x = 0$ in Eq. 9.19.

Euler osserva il valore della classificazione sistematica:

> Cum igitur videamus non solum Circulum in curvarum Elasticarum classe contineri, sed etiam in ipsis infinitem varietatem locum habere; opera pretium erit hic enumerationem omnium variarum specierum in hoc curvarum genere contentarum instituere. Hoc enim modo non solum indoles harum curvarum penitio perspicietur; sed etiam, casu quocunque oblato, ex sola figura dijudicare licebit, ad quamnam speciem curva formata referri debeat.
>
> Poiché quindi osserviamo che non solo il cerchio è incluso nella classe delle curve elastiche, ma più di questo, c'è una varietà infinita di queste curve elastiche, vale la pena mentre enumerate tutti i diversi tipi inclusi in questa classe di curve. Poiché in questo modo non solo il carattere di queste curve sarà più profondamente percepito, ma anche, in ogni caso, sarà possibile decidere dalla figura mera in quale classe deve essere formata la curva.
> Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, Sezione 14

Euler presenta una classificazione sistematica delle curve elastiche attraverso due approcci complementari:

1. **Specie matematiche**: Nove categorie fondamentali (Species I–IX) definite dal parametro c^2/a^2 e derivato da analisi matematica rigorose (Sezioni 25-33 del trattato)
2. **Figure illustrate**: Ventiotto diagrammi su Tabula III, IV e V che mostrano varie manifestazioni e applicazioni di queste specie

Le diverse specie sono ottenute considerando l'angolo PAM in quanto cambia di valore da 90° to −90°, come mostrato nella tabella 9.6 e Fig. 9.18.

Ogni specie è caratterizzata da:

1. Il parametro di forza: $P = \frac{2Ek^2}{a^2}$
2. L'angolo iniziale: $\sin(\angle PAM) = \frac{a^2-c^2}{a^2}$
3. La distribuzione della curva lungo la curva

Le 28 figure non sono distribuite uniformemente in tutte le 9 specie, ma riflettono

COPIA DI REVISIONE

Tabella 9.6: nove specie di elastica di Euler con parametri di definizione

Specie	Sezione	Gamma di parametri	Descrizione fisica
I	§25	$c \to 0$	Linea retta (stato naturale)
II	§26	$0 < c^2/a^2 < 1$	Curve semplici, nessuna inflessione
III	§27	$c^2/a^2 = 1$	Elastico rettangolare
IV	§28	$1 < c^2/a^2 < 1.652$	Curve inflette
V	§29	$c^2/a^2 = 1.652$	Configurazione auto-touching
VI	§30	$1.652 < c^2/a^2 < 2$	Cicli auto-attraversanti
VII	§31	$c^2/a^2 = 2$	Curve asintotiche
Vili	§32	$c^2/a^2 > 2$	Cinghie periodiche multiple
IX	§33	Limiti speciali	Cerchiamo

l'importanza pratica di certe configurazioni, la complessità matematica di casi particolari, la necessità di illustrare le condizioni di confine e di limitare i comportamenti.

Tabella 9.7: Distribuzione dei 28 dati tra le 9 specie

Specie	Designazione delle merci	Numero di figure
I	Linea di fila	1 (Fig. 1)
II	Curve semplici	6 (Fig. 2, 3, 4, 6, 23, 26)
III	Elastico rettangolare	3 (Fig. 5, 24, 25)
IV	Curve inflette	4 (Fig. 7, 8, 16, 19)
V	Auto-toccaggio	1 (Fig. 9)
VI	Auto-crossing	4 (Fig. 10, 11, 12, 20)
VII	Asintotico	2 (Fig. 12, 15)
Vili	Cicli multipli	6 (Fig. 17, 18, 22, 27, 28)
IX	Cerchiamo	1 (Fig. 21)
Casi speciali/applicabili		2 (Fig. 13, 14)

La molteplicità (condivisione) delle cifre serve a più fini:

Variazioni di parametro all'interno delle specie Ogni specie comprende una gamma continua del parametro c^2/a^2. Le cifre multiple mostrano come la forma curva si evolve all'interno di una singola specie, in quanto questo parametro varia.

Effetti di Condizione Boundaria La stessa specie matematica può manifestarsi in modo diverso in varie condizioni di confine:

- Punti finali fissi
- Configurazioni fisse (cantilever)
- Collegamenti perniciati

COPIA DI REVISIONE

Tabella 9.8: 28 figure di Euler mappate alla sua 9 specie di elastica

Figura	Tabula	Specie	Designazione delle merci	Caratteristiche chiave	Sezione
1	III	I	Linea di fila	Stato naturale, nessuna curvatura	25
2	III	II	Semplice asta piegata	tangente orizzontale alla base	26
3	III	II	Cantilever carico di forza	Peso alla fine libera	26
4	III	II	Cantilever curvo	Curvatura uniforme	26
5	III	III	Elastico rettangolare	90° tangente al punto finale	27
6	III	II	Arco curvato semplice	Deformazione di base	26
7	III	IV	S-curve con inflessione	Autoapproccio iniziale	28
8	IV	IV	Formazione figura-otto	Cicli simmetrici che si avvicinano	28
9	IV	V	loop auto-touching	Contatto a $\angle PAM = 40°41'$	29
10	IV	VI	Ciclo di auto-crocia	Singola intersezione	30
11	IV	VI	Traversazione asimmetrica	Lobi disuguali	30
12	IV	VII	Approccio di asintote	Tangente quasi verticale	31
13	IV	Caso speciale	Peso sospeso	Applicazione pratica	-
14	IV	Caso speciale	Parete montata	Applicazione di ingegneria	-
15	IV	VII	Comportamento asintotico	Estensione infinita	31
16	V	IV	Inflessioni multiple	Modello periodico	28
17	V	Vili	Oscillazione confusa	Traboccato tra paralleli	32
18	V	Vili	Complesso multi-loop	Traversazioni multiple	32
19	V	IV	Estensiva S-curve	Ampliamento grande	28
20	V	VI	Ciclo triangolare	Angolo affilato al nodo	30
21	V	IX	Caso di limitazione circolare	raggio uniforme	33
22	V	Vili	Onda periodica	Periodi multipli	32
23	V	II	Arco superficiale	Piccola deformazione	26
24	V	III	Arco profondo	Grande curvatura	27
25	V	III	Forma di Parabolic	Caricamento simmetrico	27
26	V	II	Variante curva semplice	Diverse frontiere	26
27	V	Vili	Complesso periodico	Limiti multipli	32
28	V	Vili	Configurazione estrema	Deformazione massima	32

- Momenti applicati contro forze di punta

Applicazioni di ingegneria Le cifre 13 e 14 mostrano applicazioni pratiche:

- Figura 13: Peso sospeso (comportamento simile a catena)
- Figura 14: Cantilever a parete (applicazione strutturale)

Cause transitorie e limitanti Diversi dati catturano le transizioni critiche tra le specie, mostrando come una forma deforma continuamente in un'altra come il parametro di carico cambia.

* Significato matematico

La classificazione di Euler rappresenta diverse scoperte matematiche:

1. **Prima tassonomia sistematica**: nove specie forniscono una classificazione completa di tutte le possibili deformazioni elastiche sotto le presupposti date.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

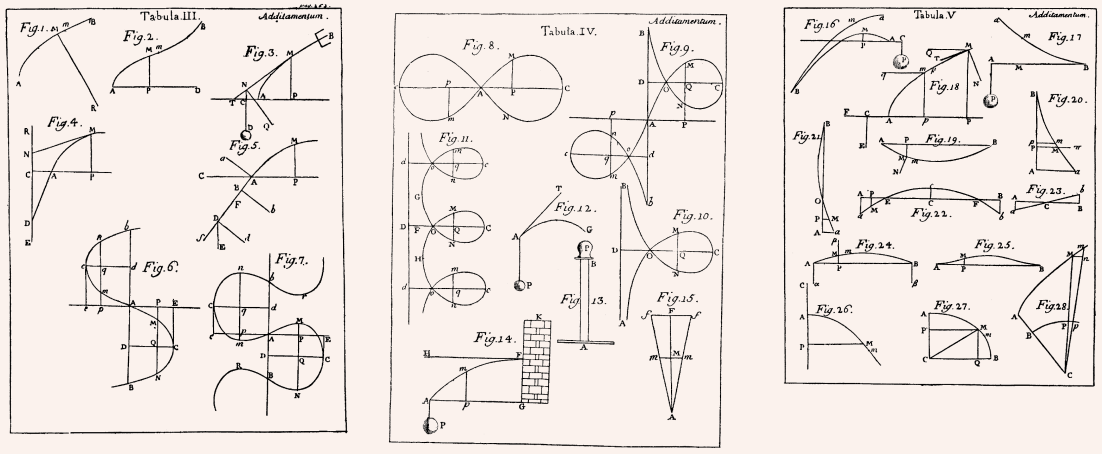


Figura 9.18: L'elastica "species' di Euler in termini di parametro di carico c^2/a^2

2. **Connessione a Integratori ellittici**: Le soluzioni esatte richiedono gli integrali ellittici, che rendono questa una delle prime applicazioni fisiche di queste funzioni speciali.

$$s = \int_0^x \frac{a^2\,dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}} \tag{9.20}$$

   Questo integrale non può essere valutato in termini di funzioni elementari.
3. **Principio variabile**: La classificazione emerge dal minimizzare il potenziale energetico funzionale:

$$\int \frac{ds}{R^2} = \text{minimum} \tag{9.21}$$

   dove R è il raggio di curvatura.

La seguente tabella presenta le equazioni matematiche e le proprietà geometriche per ciascuna delle nove specie di Euler:

* Proprietà chiave e chiarimenti

Diversi punti importanti per la struttura matematica:

- **Specie I**: La linea retta è la causa di limitazione $c \to 0$, rappresenta lo stato naturale (indeformato) dell'elastica.
- **Specie III**: L'elastica rettangolare ha la proprietà speciale che l'asse è tangente alla curva a punto A. Euler ha scoperto il notevole rapporto di area: il prodotto delle proiezioni orizzontali e verticali pari $\pi a^2/4$.

COPIA DI REVISIONE

Tabella 9.9: Specie di elastica di Euler: proprietà geometriche e equazioni curve

Specie	Nome	Equazione della curva o lunghezza dell'arco	Caratteristiche geometriche
I	Linea retta	$y = 0$ (linea di sicurezza)	Stato naturale; $R = \infty$; $c \to 0$
II	–	$dy = \frac{(a^2 - c^2 + x^2)dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}}$	Curva semplice; nessuna inflessione; $0 < c^2/a^2 < 1$; convesso; trochoid-like per piccole c
III	Regolazione elastica	$AC = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{9}{128} + \cdots\right)$	Asse tangente A; $c^2/a^2 = 1$; relazione di zona: $4AD \cdot AC = \pi a^2$
IV	–	$dy = \frac{(a^2 - c^2 + x^2)dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}}$	Punto di inflezione; $1 < c^2/a^2 < 1.652$; lobi possono autointersect
V	–	$c^2/a^2 = 1.651868$	Auto-touching; le estremità si incontrano; $AD = 0$; angolo nodale $81°22'$; $\sin(\angle PAM) = 0.651868$
VI	–	Prodotti simili a Specie IV	Auto-crossing; estensione al di là del contatto; $1.652 < c^2/a^2 < 2$; gamma di angoli nodali: $81°22' - 112°57'$
VII	–	$y = c\sqrt{c^2 - x^2} - \frac{c}{2}\ln\frac{c + \sqrt{c^2 - x^2}}{x}$	Asintotico alla linea di base AB; $c^2/a^2 = 2$; angolo nodale $112°57'$; nodo $x = 0.2884c$ dal centro
Vili	–	$dy = \frac{(x^2 - c^2 + g^2)dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)(x^2 - g^2)}}$	Cicli multipli; $c^2/a^2 > 2$; delimitati tra confini paralleli a $x = \pm c$ e $x = \pm g$; non inflessioni
IX	Circulus	$R = \text{constant} = a^2/(hq)$	Cerchio; caso di limitazione; curvatura uniforme

Victor E. Saouma
Libro I: Una breve storia della meccanica e dell'analisi strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese, potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

- **Specie V**: Il valore dei parametri critici $c^2/a^2 = 1.651868$ corrisponde a $\sin(\angle PAM) = 0.651868$, producendo la prima configurazione auto-touching.
- **Specie VII**: At $c^2/a^2 = 2$, la curva diventa asintotica alla linea di base. Il nodo (punto di intersezione) si verifica a $x = 0.2884c$ con un angolo nodale 112°57′.
- **Specie VIII**Per $c^2/a^2 > 2$, la curva mostra più loop confinati tra i confini paralleli $x = \pm c$ e $x = \pm g$.

* Rapporto tra specie e figure

Le 28 figure delle tavole di Euler illustrano varie manifestazioni di queste 9 specie matematiche, la distribuzione non è uniforme perché:

- Alcune specie (come II e VIII) espongono una maggiore varietà nelle loro realizzazioni fisiche
- Applicazioni pratiche di ingegneria favoriscono determinate configurazioni
- Casi transitori tra le specie richiedono più illustrazioni

La classificazione matematica (Tabella 9.9) fornisce la base teorica, mentre i 28 figure dimostrano la realtà fisica di queste astrattie matematiche.

Soluzioni matematiche e classificazione completa Per la pura elastica con curvatura κ, il metodo di Euler produce l'equazione differenziale del quarto ordine:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \lambda \frac{d^2y}{dx^2}\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}$$

dove λ è un parametro determinato dalle condizioni di confine, che può essere scritto più elegantemente in termini di curvatura e lunghezza d'arco come:

$$\frac{d^2\kappa}{ds^2} = \lambda\kappa$$

Le soluzioni dipendono dal segno e dalla grandezza di λ:

Per $\lambda > 0$:

$$\kappa(s) = A\cosh(\sqrt{\lambda}s) + B\sinh(\sqrt{\lambda}s)$$

Per $\lambda < 0$:

$$\kappa(s) = A\cos(\sqrt{|\lambda|}s) + B\sin(\sqrt{|\lambda|}s)$$

Per $\lambda = 0$:

$$\kappa(s) = A + Bs$$

Attraverso l'analisi dei parametri sistematici, Euler ha identificato le nove specie distinte di curve elastiche sopra descritte, ciascuna corrispondente a diverse gamme del parametro

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

λ e configurazioni fisiche diverse, dalle linee rette attraverso varie forme curve a cerchi completi.

Soluzioni Integrali Ellittiche L'analisi di Euler rivela che le soluzioni esatte comportano gli integrali ellittici, rendendo l'elastica uno dei primi esempi di un problema fisico che richiede queste funzioni speciali avanzate.

$$x(\phi) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \int_0^{\phi} \mathrm{cn}(u, k)\, du$$
$$y(\phi) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \int_0^{\phi} \mathrm{sn}(u, k)\, du$$

dove cn e sn sono giacobiti funzioni ellittiche con modulo k determinato dalle condizioni di confine.

Per l'elastica rettangolare (la sfida originale di Jacob Bernoulli), Euler mostra che la lunghezza della curva può essere espressa come:

$$s = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} K(k)$$

dove $K(k)$ è l'integrale ellittico completo del primo tipo, il rapporto tra la forza applicata e la deformazione risultante comporta:

$$P = \frac{\sqrt{2\lambda^3 EI}}{K(k)^2}$$

Questo legame tra la teoria dell'elastica e gli integrali ellittici era rivoluzionario, fornendo soluzioni esatte a problemi precedentemente intrattabili mentre guidava uno sviluppo matematico significativo.

Dalla classificazione alle soluzioni esatte Mentre la classificazione delle nove specie di Euler fornisce una comprensione completa qualitativa del comportamento elastico, l'ottenimento di soluzioni quantitative richiede strumenti matematici sofisticati. 9.19, non può essere risolto utilizzando funzioni elementari; le loro soluzioni esatte richiedono invece l'uso di integrazioni ellittiche, funzioni speciali che sono ancora in fase di sviluppo durante il periodo di Euler.

Soluzioni Integrali Ellittiche L'analisi di Euler rivela che le soluzioni esatte comportano gli integrali ellittici, rendendo l'elastica uno dei primi esempi di un problema fisico che richiede queste funzioni speciali avanzate.

COPIA DI REVISIONE

$$x(\phi) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \int_0^\phi \operatorname{cn}(u, k)\, du$$
$$y(\phi) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \int_0^\phi \operatorname{sn}(u, k)\, du$$

dove cn e sn sono funzioni ellittiche Jacobi con modulo k determinato dalle condizioni di confine.

Per l'elastica rettangolare (la sfida originale di Jacob Bernoulli), Euler mostra che la lunghezza della curva può essere espressa come:

$$s = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} K(k)$$

dove $K(k)$ è l'integrale ellittico completo del primo tipo, il rapporto tra la forza applicata e la deformazione risultante comporta:

$$P = \frac{\sqrt{2\lambda^3 EI}}{K(k)^2}$$

Questo legame tra la teoria dell'elastica e gli integrali ellittici era rivoluzionario, fornendo soluzioni esatte a problemi precedentemente intrattabili mentre guidava uno sviluppo matematico significativo.

Colonna di secchio: la prima formula Euler Euler's 1744 *Metodologia inveniendi* (Euler, 1744b) conteneva più della celebre teoria delle curve elastiche: nascosta nella Sezione 37 era il germe del suo più famoso contributo alla stabilità strutturale. *quasi a passare*, ha scritto giù la relazione che più tardi è diventata nota come la formula di indurimento Euler. In questa sezione rivisitiamo quella prima apparizione e ricostruiamo una derivazione moderna dalla sua Specie I elastica. §9.5.2, allora ci volgeremo alla sua memoria del 1759 (Euler, 1759), dove Euler finalmente riconosciuto il vero significato della formula e lo ha posto al centro di una teoria generale della stabilità della colonna.

> Il nuovo sistema di controllo P majus fit quam $\pi^2 Ekk/a^2$, nulla prorsus incurvatio erit metuenda; contra vero si stagni P fuerit majus, colonnaa incurvationi resistere non poterit. Manente autem elasticitate columnae, atque adeo ejus crassitie eadem, pondus P, quod sine periculo gestare valet, erit reciproce ut quadratum altitudinis colonnaae: colonnaaque duplo altior quartam tantum oneris partem gestare poterit.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

> Pertanto, a meno che il carico P essere più grande di $\frac{E\pi^2k^2}{a^2}$, non ci sarà assolutamente paura di piegarsi; d'altra parte, se il peso P essere maggiore, la colonna non sarà in grado di resistere alla flessione. Ora quando l'elasticità della colonna e allo stesso modo il suo spessore rimangono gli stessi, il peso P che può trasportare senza pericolo sarà inversamente proporzionale al quadrato dell'altezza della colonna; e una colonna due volte più alta sarà in grado di sopportare solo un quarto del carico.
> Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, Sezione 37

Questa formula, $P_{\text{critical}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ in notazione moderna (dove Euler's Ekk corrisponde a rigidità flessografica EI e a a lunghezza della colonna L), rappresenta uno dei risultati più importanti della meccanica strutturale e rimane fondamentale per il design dell'ingegneria di oggi, che segna la nascita della teoria della stabilità strutturale, trasformando l'ingegneria dalla pratica empirica alla disciplina scientifica.

Una moderna interpretazione di questa affermazione segue:

La formula nascosta in Specie I (1744)

Euler's 1744 *Metodologia inveniendi* conteneva una classificazione completa delle curve elastiche in nove specie distinte (§9.3.2.2.1), ma sepolto all'interno delle specie I, rappresentando configurazioni quasi rette, si può dire che Euler non ha riconosciuto inizialmente. Fraser, 1991, esaminiamo questa scoperta trascurata.

Per la Specie I, il rapporto di parametro c^2/a^2 è infinitamente piccolo, il che significa l'angolo $\angle PAM \simeq 90$ e il segmento ACB è solo leggermente curvato. Dal c è piccolo rispetto a a, Equazione generale di Euler elastica (9.19) (ripetato qui)

$$dy = \frac{a^2 - c^2 + x^2}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}}dx \tag{9.22}$$

dove a e c sono parametri determinati dalle condizioni di confine e dai carichi applicati, con il rapporto c^2/a^2 caratterizzando le diverse specie di curve elastiche.

Passo 1: Applicare la specie I Condizione: Per la Specie I, la caratteristica di definizione è che il rapporto di parametro c^2/a^2 è infinitamente piccolo. Matematicamente, questo significa $c^2 \ll a^2$, che ci permette di fare le seguenti approssimazioni:

$$a^2 - c^2 \approx a^2$$
$$2a^2 - c^2 + x^2 \approx 2a^2 + x^2$$

Sostituire queste approssimazioni in Eq. 9.22:

$$dy = \frac{a^2 + x^2}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 + x^2)}}dx$$

COPIA DI REVISIONE

Passo 2: semplificare il disinfestatore: Poiché stiamo considerando piccole deformazioni in una colonna quasi dritta, x^2 rimane piccolo rispetto a a^2. Perciò:

$$\sqrt{2a^2 + x^2} \approx \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

Questo ci dà:

$$dy = \frac{a^2 + x^2}{a\sqrt{2}\sqrt{c^2 - x^2}}dx$$

Passo 3: Ulteriori informazioni per piccole deformazioni Per la configurazione quasi retta caratteristica di incipiente buckling, la coordinata x rimane piccolo rispetto al parametro a. In questo limite:

$$a^2 + x^2 \approx a^2$$

Sostituire questa approssimazione:

$$dy = \frac{a^2}{a\sqrt{2}\sqrt{c^2 - x^2}}dx = \frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{c^2 - x^2}}dx$$

Passo 4: Modulo finale Fattore la costante da sotto la radice quadrata:

$$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{2(c^2 - x^2)}} \tag{9.23}$$

Questa equazione semplificata descrive la forma di una colonna sull'orlo della buckling. Le approssimazioni matematiche corrispondono a presupposti fisici:

- $c^2/a^2 \ll 1$: La colonna rimane quasi dritta
- Piccolo x: Le deformazioni sono infinitesimali
- $\angle PAM \simeq 90$: Il tangente alla base è quasi verticale

Integrare questo rendimento di espressione $y = \frac{a}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x}{c}$. Per una colonna di mezza lunghezza f, le condizioni di confine portano a $f = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}$. Sostituire il parametro di forza $P = \frac{2Ek^2}{a^2}$ dà:

$$P = \frac{Ek^2}{f^2} \cdot \frac{\pi^2}{4} \tag{9.24}$$

Questo risultato conteneva una notevole implicazione che Euler menzionava solo in fase di passaggio: è necessaria una forza finita per produrre anche un'infinita curvatura della colonna. Il significato fisico - che rappresenta una soglia critica per la stabilità strutturale - rimarrà irriconoscibile per tredici anni.

COPIA DI REVISIONE

Conclusioni La classificazione di elastica di Euler opera su due livelli: il quadro teorico di 9 specie matematiche e l'illustrazione pratica attraverso 28 figure. Questo approccio dualistico – combinando analisi matematica rigorosa con una documentazione visiva completa – ha stabilito un modello metodologico che ha influenzato la classificazione scientifica attraverso le discipline, dalla cristalliografia alla tassonomia biologica.

Più fondamentalmente, questo lavoro rappresenta una delle prime classificazioni complete nella fisica matematica, dimostrando come la variazione dei parametri sistematici può generare l'intero spettro di possibili comportamenti in un sistema fisico. La sintesi di Euler di principi variazionali, equazioni differenziali e integrazioni ellittiche ha stabilito l'elastica come un problema di base che continua a informare la meccanica computazionale moderna e la dinamica non lineare.

9.3.2.3 Il moderno quadro Variational

Forma forte: Eulero Classico – Lagrange Lo sviluppo storico del calcolo delle variazioni, dalle indagini sull'elastica di Jakob Bernoulli attraverso il trattamento sistematico di Euler nel suo *Metodologia Inveniendi*, ha stabilito i principi fondamentali e dimostrato la potenza dei metodi variazionali. Il quadro matematico che usiamo oggi si basa su queste basi classiche, incorporando concetti moderni che forniscono maggiore rigore e più ampia applicabilità. Per apprezzare pienamente sia l'eleganza che l'utilità pratica dei metodi di calcolo variazionali, è istruttivo esaminare l'equazione Euler-Lagrange da una prospettiva matematica contemporanea. Nel capitolo viene presentata una rigorosa presentazione del metodo 47.

In ingegneria strutturale (e meccanica) può essere avvicinato da due diversi angoli:

Newton approccio, equilibrio di slancio (equilibrio).

Lagrangian approccio: equilibrio di energia (termodinamica).

Il problema fondamentale del calcolo della variazione, d'altra parte, è quello di trovare una funzione $u(x)$ tale

$$\Pi(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x))dx \tag{9.25}$$

e che è stazionario

$$\delta\Pi = 0$$

dove δ indica il *operatore di variazione* (da non confondere con il derivato)

Definiamo $u(x)$ per essere una funzione x nell'intervallo (a, b)e F essere una funzione reale nota (come la densità di energia), e definiamo *dominio* di una funzione come la raccolta di funzioni ammissibili appartenenti a una classe di funzioni nello spazio funzionale piuttosto che in una regione nello spazio di coordinate (come è il caso di una funzione).

Cercare la funzione $u(x)$ che si artizza Π. Così, lascia $\tilde{u}(x)$ essere una famiglia di sentieri vicini della funzione di estremizzazione $u(x)$ e supponga che ai punti finali

COPIA DI REVISIONE

$x = a, b$ coincidono. Definisci $u(\tilde{x})$ come somma del percorso di estremizzazione e qualche variazione arbitraria, Fig. 9.19.

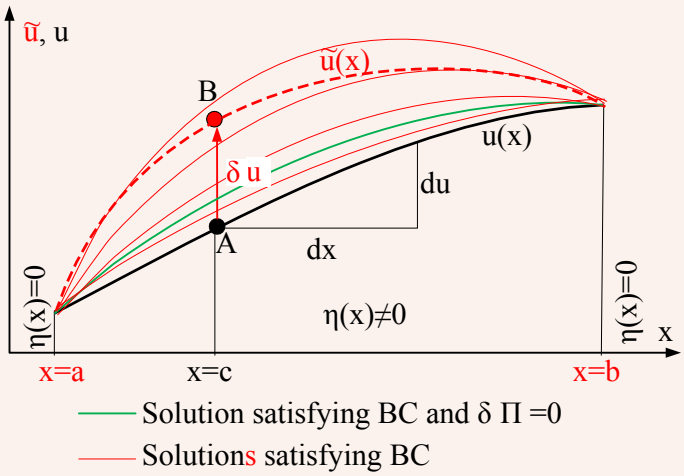


Figura 9.19: Operatori variabili e differenziali

$$\tilde{u}(x, \varepsilon) = u(x) + \varepsilon\eta(x) = u(x) + \delta u(x)$$

dove ε è un piccolo parametro, e $\delta u(x)$ è il *variazione* of $u(x)$ Questo porta a

$$\underbrace{\int_a^b \eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\right]}_{\text{I } (x \in [a,b])} + \underbrace{\eta(x)\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b}_{\text{II } (x = a,b)} = 0 \tag{9.26}$$

Ogni termine deve essere zero.

1. La prima parte ci darà *Equazione Euler*.
2. La seconda parte ci permetterà di definire *condizioni di confine*.

Parte I in Eq. 9.26 produce la Forme Forte.

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0 \quad \text{in} \quad a < x < b \tag{9.27}$$

Questa equazione differenziale è chiamata *Equazione Euler-Lagrange* associati a Π ed è una condizione necessaria per $u(x)$ per estremizzare Π.

COPIA DI REVISIONE

Rivisitazione della seconda parte di Eq. 9.26, ci permette di definire le condizioni di confine, Fig. 9.19.

$$\underbrace{\underbrace{\eta(x)}_{\text{Ess.}}\ \underbrace{\left.\frac{\partial F}{\partial u'}\right|_a^b}_{\text{Nat.}}}_{\text{Boundary Cond.}} = 0 \tag{9.28}$$

Questo può essere raggiunto attraverso le seguenti combinazioni

$$\begin{array}{rcrcll}
\eta(a) = 0 & \text{and} & \eta(b) & = 0 & \text{Essential} & \Gamma_u \\
\eta(a) = 0 & \text{and} & \frac{\partial F}{\partial u'}(b) & = 0 & \text{Mixed} & \Gamma_u \cup \Gamma_t \\
\frac{\partial F}{\partial u'}(a) = 0 & \text{and} & \eta(b) & = 0 & \text{Mixed} & \Gamma_u \cup \Gamma_t \\
\frac{\partial F}{\partial u'}(a) = 0 & \text{and} & \frac{\partial F}{\partial u'}(b) & = 0 & \text{Natural} & \Gamma_t
\end{array}$$

Come esempio: l'energia potenziale totale di un fascio che supporta un carico uniforme p è dato da

$$\Pi = \int_0^L \left(\frac{1}{2}M\kappa - pw\right) dx = \int_0^L \underbrace{\left(\frac{1}{2}(EIw'')w'' - pw\right)}_{F} dx$$

Cerchiamo di ricavare la prima variazionale di Π. Integrazione per parte due volte

$$\begin{aligned}
\delta\Pi &= \int_0^L \delta F dx = \int_0^L \left(\frac{\partial F}{\partial w''}\delta w'' + \frac{\partial F}{\partial w}\delta w\right) dx \\
&= \int_0^L (EIw''\delta w'' - p\delta w) dx \\
&= (EIw''\delta w')|_0^L - \int_0^L \left[(EIw'')'\delta w' - p\delta w\right] dx \\
&= \underbrace{\underbrace{(EIw'')}_{\text{Nat.}}\ \underbrace{\delta w')|_0^L}_{\text{Ess.}} - \underbrace{[(EIw'')'}_{\text{Nat.}}\ \underbrace{\delta w]|_0^L}_{\text{Ess.}}}_{\text{BC}} + \int_0^L \underbrace{\left[(EIw'')'' + p\right]}_{\text{Euler Eq.}} \delta w dx = 0
\end{aligned}$$

Or

$$(EIw'')'' = -p \quad \text{for all x}$$

che è l'equazione differenziale di governo dei raggi e le condizioni di confine sono date da

Essenziale		Naturale
$\delta w' = 0$	or	$EIw'' = -M = 0$
$\delta w = 0$	or	$(EIw'')' = -V = 0$

COPIA DI REVISIONE

Forma di debolezza: Galerkin / Metodi residenziali usciti Si noti che il processo può essere applicato inverso attraverso il metodo Galerkin (Chapter 52) che trasforma una forte equazione differenziale forma in una forma debole moltiplicando l'equazione governativa per una funzione di prova $v(x)$ L'integrazione per parti viene poi applicata per ridurre l'ordine dei derivati, distribuirli tra le funzioni di prova e di prova, integrando naturalmente le condizioni di confine, e questo processo fornisce una dichiarazione variazionale in cui la soluzione è ricercata in un subspazio finito-dimensionale, spaziato dalle funzioni di base.

Per la flessione di un fascio, considerare la forma forte data dall'equazione differenziale di quarto ordine:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right) = q(x), \quad x \in [0, L] \tag{9.29}$$

dove $w(x)$ è la deflezione, EI è la rigidità flessorale, e $q(x)$ è il carico distribuito. Moltiplicazione da una funzione di prova $v(x)$ e integrando:

$$\int_0^L v(x)\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)dx = \int_0^L v(x)q(x)dx \tag{9.30}$$

Applicare l'integrazione per parti due volte per trasferire derivati da w to v, e incorporando le condizioni di confine appropriate, dà la forma debole:

$$\int_0^L EI\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2w}{dx^2}dx = \int_0^L v(x)q(x)dx + \text{boundary terms} \tag{9.31}$$

Questa formulazione debole richiede solo C^1 continuità invece di C^3 continuità richiesta dalla forma forte, che lo rende adatto per la discorsizzazione degli elementi finiti.

9.3.3 Riepilogo cronologico delle prime due sfide

Lo sviluppo del problema elastico si è sviluppato in cinque decenni, Tabella 9.10 riassume questo sviluppo cronologico.

Questa linea temporale illustra l'evoluzione dell'elastica dalla sfida geometrica al problema fondamentale nella fisica matematica, dimostrando come le scoperte matematiche richiedono spesso decenni di raffinatezza attraverso più generazioni di studiosi. La risoluzione del problema ha stabilito sia le basi matematiche della meccanica strutturale che i principi variazionali che diventerebbero centrali alla fisica teorica.

COPIA DI REVISIONE

Tabella 9.10: Sviluppo cronologico del lavoro di Jakob Bernoulli sul calcolo differenziale e sul problema elastico, dalle prime pubblicazioni al completamento postumo.

Anno/Periodo	Pubblicazione/Fonte	Contenuto e significato
1670s	Newton (non pubblicato)	Studiato elastico-come curve privatamente ma non ha pubblicato risultati (§8.2.2)
1689 1690 giugno	*Spettacolo in base al valore del calcolo* (Bernoulli, 1689) (*Atto Eruditorum*) *Spettacolo mutale differenziali* (Bernoulli, 1690) (*Atto Eruditorum*)	Prima dimostrazione del calcolo lebniziano di Bernoulli; applicazioni a problemi elementari; vetrina programmatica del metodo. Il corpo principale tratta spirale logaritmica, loxodrome e triangoli sferici. *Additamentum de Problema Funicolario* pone il problema elastico codificato in un famoso anagramma (Bernoulli, Jakob, 1690a).
1690 ottobre	Scadenza passata; nessuna soluzione presentata da altri matematici.	
1692	*Meditazioni CLXX* (Bernoulli, 1677–1705) (diario privato)	Bernoulli ha completato la sua soluzione elastica privata nel suo taccuino scientifico (Bernoulli, Jakob, 1677–1705).
1694 giugno	*Lamina di curvatura elastica* (*Atto Eruditorum*)	Soluzione elastica completa pubblicata con decrittografia cifrata, prova matematica e "teorema d'oro sulla curvatura"—un chiave strumento analitico per problemi di curva elastica (Bernoulli, 1694).
1694	Critica di Huygens e risposta di Bernoulli	Pubblicato in scambio *Atto Eruditorum* chiarificando più configurazioni elastiche (Bernoulli, 1694).
Ultimo 1690s–inizio 1700s	Carte variegali ed isopetrici	Evoluzioni correlate da Bernoullis e Leibniz che estendono metodi di curvatura e minimizzazione.
1744	*Opera Omnia* (Jakob Bernoulli, postumo, a cura di G. Cramer)	Raccolta del lavoro elastico completo di Bernoulli dal *Meditazioni* e manoscritti (Bernoulli, Johann, 1713).
1744	Euler, *Metodologia inveniendi*	Trattamento sistematico definitivo con calcolo delle variazioni, che si basa sulla fondazione di Bernoulli (Euler, 1744b).

9.4 An Anonymous Challenge: un ponte tra i problemi (1724)

Adattato da (Truesdell, 1960)

COPIA DI REVISIONE

Nell'agosto del 1724, una nota di parole provocatorie apparve nel *Atto Eruditorum*Fico. 9.20, intitolato "Il famoso problema della catenaria proposto di nuovo ai geometri, soprattutto a quelli che sono membri delle società reali di Londra e Parigi' (Anonymous, 1724). La sfida, firmata misteriosamente come - L'amore[26]," pone il seguente problema:

> Lasciare ADB essere una corda o una piccola catena, non infinitamente ma moderatamente flessibile, cioè non immaginaria ma reale, che chiodi a A e B tengono fisso, in modo che per il suo peso scende verso la terra a D e assume la curva figura ADB. Questa figura, che non sembra essere indagata da mere le ipotesi ma con fatti reali, è per il vostro giudizio, uomini illustri.
>
> Supponiamo che i punti estremi A e B di questo approccio catena o recede da l'uno l'altro, tale che i tangenti a quei punti sono paralleli ad uno un altro, e quindi normale all'orizzonte (cioè verticale). questo caso è possibile è facilmente dimostrato, e senza dubbio non è ma in quel caso la curva sembra essere un ovale, come la ma questo caso include tutti gli altri: per se, ad esempio, la catena o la corda sono fissate in qualsiasi punto E e G, le parti intermedie AE, BG essere rimosso, pensi la figura la parte rimanente EDG è quindi alterata? Addio.
>
> Anonymous, 1724 «*Celebre catenariae problema geometris denuo propositum, iis praesertim qui ex Soc. Reg. sunt, quae Parisiis florent & Londini; Parisiis ad collectores actorum erud. transmissum*», pg. 366

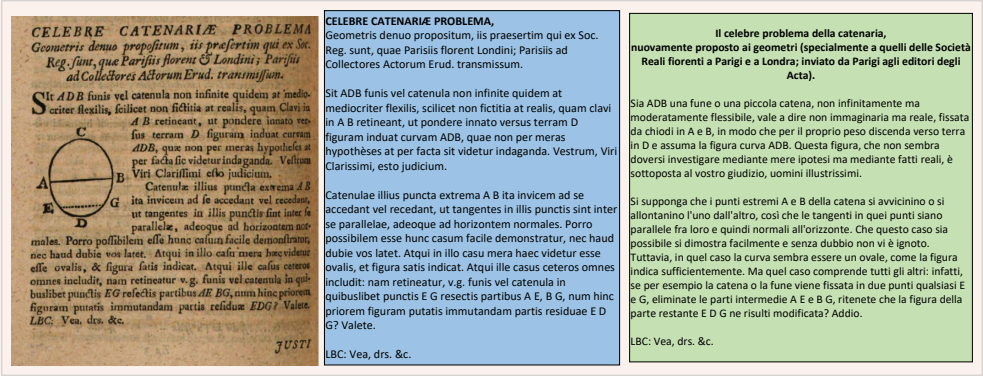


Figura 9.20: La sfida anonima del 1724 *Atto Eruditorum* (Anonymous, 1724), firmato misteriosamente come "LBC'

Questa sfida differiva fondamentalmente dal problema classico catenario introducendo l'elemento di rigidità finita—una caratteristica che collega il divario tra catene perfettamente flessibili e barre elastiche. difficoltà di unificazione si situano nel riconciliare due distinti meccanici formulazioni: il problema catenario, espresso in termini di forze di tensione, e il problema elastico, espresso in termini di momenti di piegamento (Truesdell, 1960)Jakob Bernoulli aveva posto proprio questo domanda nei suoi originali fogli elastici, chiedendo di indagare "il tipo di curve generate quando la fascia elastica è piegata dal suo peso in il problema era rimasto intatto per oltre tre decenni, mentre questa sfida del 1724

[26]Nonostante un'attenta indagine scientifica, l'identità di questo come nota Truesdell, "LBC, chiunque egli era, doveva aspettare diversi anni per una risposta (Truesdell, 1960). A questo giorno, l'autore rimane sconosciuto.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

sembrava passare inosservata inizialmente, la sua soluzione avrebbe fornito l'oggetto di Daniel Bernoulli e Le prime pubblicazioni di Euler sulla teoria del raggio unificato nel 1728.

9.4.1 La collaborazione di Bernoulli-Euler: prima unificazione (1728)

Nel 1728 San Pietroburgo, Daniel Bernoulli e Leonhard Euler dominarono la teoria emergente della meccanica strutturale: Entrambi erano stati influenzato dal lavoro pionieristico di Jakob Bernoulli, e come membri junior l'Accademia Imperiale delle Scienze, si impegnano in una competizione amichevole per Daniel Bernoulli, allora ventotto anni, era già uno scienziato celebre, mentre Euler, a ventuno, aveva pubblicato solo tre documenti.

Come lo stesso Euler ha poi raccontato, "Recently, il signore distinto. Bernoulli ed io siamo venuti su questa domanda, e considerando che non è inelegant, l'abbiamo attaccata, e abbiamo ottenuto soluzioni allo stesso tempo che concordano eccellentemente con l'un l'altro " (Euler, 1728, pg. 70). In Febbraio 1728, ciascuno comunicava una teoria unificata di flessibilità ed elasticità linee, i loro documenti che appaiono consecutivamente nello stesso volume del *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, Fig. 9.21 (Bernoulli, Daniel, 1744, pg. 57-63) (Euler, 1728, pg. 64-77). Questa pubblicazione simultanea è contrassegnata la prima unificazione di successo delle teorie catenarie ed elastica—la problema molto LBC aveva posto quattro anni prima.

9.4.1.1 Daniel Bernoulli (Establishing the Moment-Curvature Principle) 1728

Nel 1728 San Pietroburgo, Daniel Bernoulli pubblicò un'opera innovativa che avrebbe costituito la base teorica per tutta la teoria del fascio successivo. (Bernoulli, Daniel, 1744), intitolato *Metodo universale è determinandae curvaturae fili a potenziere quamcunque legem inter se observantibus extensi* (Metodo universale per determinare la curvatura di un filo teso da forze a seguito di qualsiasi legge tra di loro), ha introdotto il rapporto fondamentale della curvatura del momento che porta il suo nome di famiglia, Fig. 9.22.

Il contributo rivoluzionario di Bernoulli era riconoscere che Lavorando con un fascio sottoposto sia al proprio peso che ai carichi applicati, ha stabilito che il momento di flessione totale in qualsiasi punto deve essere uguale alla resistenza elastica del materiale.

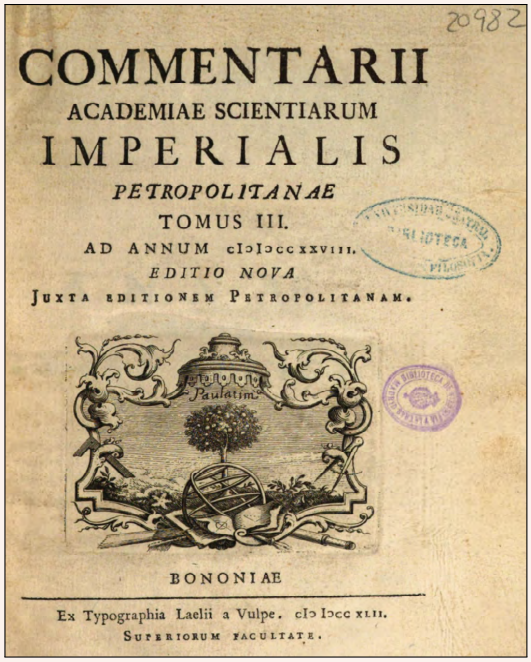
Per un elemento a fascio sottoposto a peso autonomo, Bernoulli ha dimostrato che il contributo del momento dal peso del segmento di lunghezza s is:

$$g\sigma s(x - x_e) = g\sigma s\left(x - \frac{1}{s}\int_0^s x\, ds\right) = g\sigma \int_0^s s\, dx$$

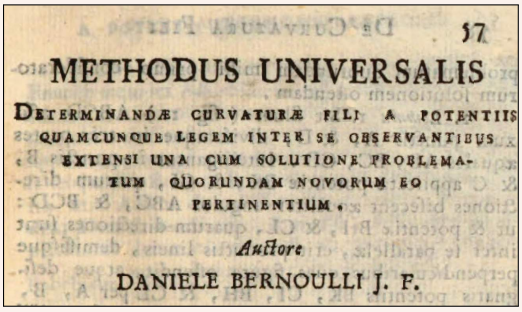
dove g è accelerazione gravitazionale, σ è il peso del fascio per lunghezza unitaria, e x_e rappresenta la posizione centroidale del segmento.

COPIA DI REVISIONE

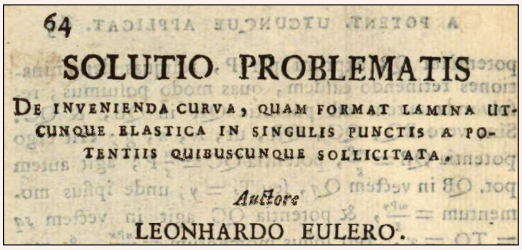
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Un problema speciale



Daniel Bernoulli (Bernoulli, Daniel, 1744)



Leonhard Euler (Euler, 1728)

Figura 9.21: Daniel Bernoulli e Leonhard Euler, l'innovativo 1728 pubblicazioni (Euler, 1728).

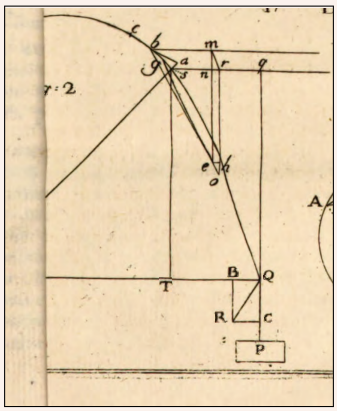


Figura 9.22: Analisi del fascio di Bernoulli che mostra effetti di carico auto-peso e applicato

Aggiungere il momento da un peso applicato P, la comprensione cruciale di Bernoulli è che questo momento totale deve essere bilanciato dalla resistenza elastica del materiale:

$$\mathcal{M} = \frac{B}{r} \tag{9.32}$$

dove B rappresenta quello che Bernoulli ha definito il "modulus di piegatura' e r è il

COPIA DI REVISIONE

raggio di curvatura, questa è la prima dichiarazione esplicita del rapporto di curvatura del momento, la fondazione di tutta la teoria del fascio.

L'equazione di equilibrio di Bernoulli diventa così:

$$g\sigma \int_0^s s\, dx + Px = \frac{B}{r} \tag{9.33}$$

Il 1728 lavoro di Bernoulli ha stabilito la base concettuale per la meccanica strutturale introducendo il principio della curvatura del momento, ma il suo approccio è rimasto in gran parte geometrico e specifico per il caso, senza il quadro matematico sistematico necessario per gestire le condizioni di carico generali e i vincoli di confine.

Le tecniche matematiche a disposizione di Bernoulli nel 1728 lo limitano a casi di carico relativamente semplici. I problemi complessi che coinvolgono carichi arbitrari distribuiti, proprietà materiali variabili, o condizioni generali di confine sono rimasti al di là della portata dei suoi metodi.

Il contributo di Bernoulli del 1728 ha fornito l'essenziale intuizione fisica, che la resistenza elastica è proporzionale alla curvatura, ma non ha avuto il macchinario matematico per sfruttare appieno questa intuizione. $\mathcal{M} = B/r$ era corretto, ma applicandolo sistematicamente a problemi complessi richiedevano metodi matematici che non esistevano ancora.

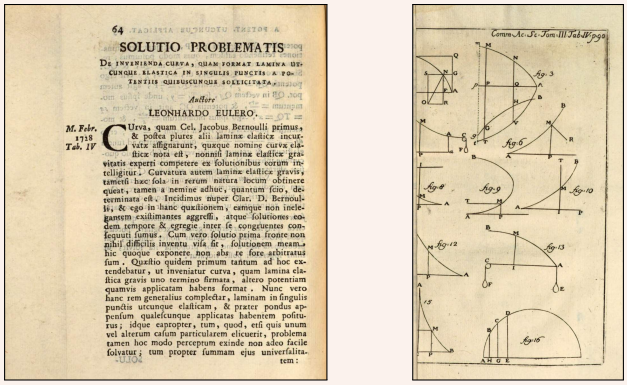
Questo divario tra comprensione fisica e capacità matematica si rivelerebbe cruciale nel motivare gli sviluppi successivi. La sfida che affronta i matematici dopo il 1728 era chiara: come costruire metodi analitici sistematici sulla comprensione fondamentale di Bernoulli per gestire le condizioni di carico arbitrarie, geometrie complesse e vincoli di confine generali.

Il rapporto tra la curvatura di Bernoulli e il 1728 rimane immutato nell'analisi strutturale moderna, ogni calcolo del fascio oggi impiega il principio che ha articolato per la prima volta: $M = EI\kappa$dove EI corrisponde al suo "modulo di piegatura" BQuesta continuità, che si sviluppa in quasi tre secoli, dimostra la natura fondamentale della sua intuizione e il suo significato per la meccanica strutturale.

9.4.1.2 Euler (dall'ottica geometrica alla rivoluzione matematica) (1732)

Quattro anni dopo che Bernoulli fondò il principio della curvatura del momento, Euler si alzò per affrontare la sfida matematica nel suo lavoro del 1732 *Solutio problematis de invenienda curva*, (Euler, 1732)Fico. 9.23, rappresenta un momento di spartiacque nella meccanica, che stabilisce tre contributi fondamentali: (1) la prima teoria generale che unifica curve elastiche e flessibili sotto un unico quadro matematico, (2) l'ipotesi elastica fondamentale $M = v\kappa$ che si basa su tutta la teoria moderna del fascio, e (3) metodi geometrici sistematici che hanno rivelato sia la potenza che i limiti delle tecniche matematiche del XVIII secolo, in ultima analisi motivando lo sviluppo del calcolo variazionale.

COPIA DI REVISIONE



SOLUTIO PROBLEMATIS

De invenienda curva, quam format lamina utcunque elastica in singulis punctis a potentiis quibuscunque sollicitata.

Auctore

LEONHARDO EULERO.

M. Febr. 1728. Tab. IV

Curva, quam Cel. Jacobus Bernoulli primus, & postea plures alii lamine elastice incurvatæ assignarunt, quæque nomine curvæ elasticæ nota est, nonnisi lamine elastice gravitatis experti competere ex solutionibus eorum intelligitur. Curvatura autem lamine elastice gravis, tametsi hac sola in rerum natura locum obtinere queat, tamen a nemine adhuc, quantum scio, determinata est. Incidimus nuper Clar. D. Bernoulli, & ego in hanc quæstionem, eamque non inelegantem exilimantes aggressi, atque solutiones eodem tempore & egregie inter se congruentes consequuti sumus. Cum vero solutio prima fronte non nihil difficilis inventu visa sit, solutionem meam hic quoque exponere non abs re fore arbitratus sum. Quæstio quidem primum tantum ad hoc extendebatur, ut inveniatur curva, quam lamina elastica gravis uno termino firmata, altero potentiam quamvis applicatam habens format. Nunc vero hanc rem generaliius complectar, laminam in singulis punctis utcunque elasticam, & præter pondus appensum qualescunque applicatas habentem positurus; idque eapropter, tum, quod, etsi quis unum vel alterum casum particularem elicuerit, problema tamen hoc modo perceptum exinde non adeo facile solvatur; tum propter summam ejus universalitatem:

Figura 9.23: Euler, 1732 *Solutio problematis de invenienda curva*

Contesto storico e l'Insight Rivoluzionario di Euler Quando Euler si rivolse al problema dell'elastica nel 1732 (Euler, 1732), stava rispondendo alla sfida di Jacob Bernoulli con un'estensione drammatica; le parole di apertura di Euler rivelano la sua profonda intuizione:

> Curva, quam Cel. Jacobus Bernoulli primus et postea plures alii laminae elasticae incurvatae assegnaarunt... nonnisi laminae elasticae gravitatis espertoi compere ex Solutionibus eorum intelligitur.
>
> La curva che il celebre Jacob Bernoulli ha assegnato per la prima volta a laminae elastiche curve si applica solo a laminae elastiche senza peso, mentre in natura tutti i corpi elastici hanno peso.
> Euler, 1732 «*Solutio problematis de invenienda curva, quam format lamina utcunque elastica in singulis punctis a potentiis quibuscunque sollicitata*»

Questa osservazione ha individuato una limitazione fondamentale: tutte le soluzioni precedenti applicate solo alle strisce elastiche senza peso, mentre i corpi elastici reali hanno sempre peso. *lamina elastica pesante* in condizioni di carico arbitrarie.

L'Ipotesi Elastica Fondamentale Il contributo più rivoluzionario di Euler era riconoscere che *resistenza elastica è proporzionale alla curvatura*. Ha proposto che quando gli elementi elastici sono ruotati per forza, il momento elastico è proporzionale sia alla resistenza elastica che all'angolo di rotazione:

$$M = \frac{v}{r} = v\kappa$$

dove v è la forza elastica e $\kappa = 1/r$ è la curvatura, proprio questa è la relazione fondamentale della teoria del fascio moderno, scritta oggi come $M = EI\kappa$ dove EI corrisponde al parametro di Euler vQuesta visione, evidente in retrospettiva, era rivoluzionaria per i primi anni del XVIII secolo e costituisce la base per tutte le successive meccaniche strutturali.

COPIA DI REVISIONE

L'Equazione Master e l'Analisi Geometrica Attraverso analisi geometriche sistematiche che coinvolgono due lemmi fondamentali sulla risoluzione della forza e calcoli del momento, Euler ha derivato la sua equazione principale:

$$\frac{v}{r} = Ex + Fy + \int_A^M P\,dx + \int_A^M Q\,dy$$

Si noti che in Fig. 9.23:

- Fig. 3: Mostra la configurazione geometrica di base per la risoluzione della forza
- Fig. 6: Appare per illustrare i calcoli del momento intorno a diversi punti
- Figs. 8-10: Mostra varie configurazioni curve (come catenari e curve elastiche)
- Fig. 12-13: Dimostrare diversi scenari di carico e condizioni di confine
- Fig. 15: mostra ciò che sembra essere una vela caricata dal vento o una membrana
- Fig. 16: Visualizza una configurazione semicircolare

dove:

- v = resistenza elastica (rigidità flessorale)
- r = raggio di curvatura
- E, F = carichi di estremità applicati in direzioni verticali e orizzontali
- P, Q = carichi distribuiti per lunghezza unitaria
- x, y = Coordinate cartesian

Interpretazione moderna dell'Equazione Master di Euler L'equazione principale di Euler è essenzialmente la *equazione dell'equilibrio del momento* per un fascio, espresso in termini di curvatura, la sua formulazione del 1732 rappresenta la prima dichiarazione generale di equilibrio di momento per curve elastiche.

Il moderno Moment-Curvature Relationship:

$$M = EI\kappa = \frac{EI}{R} \tag{9.34}$$

dove:

- M = momento di piegatura interno
- EI = rigidità flessorale (modulo elastico × momento di inerzia)
- $\kappa = 1/R$ = curvatura
- R = raggio di curvatura

L'equivalente contemporaneo è il **equazione differenziale della curva elastica**:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x) \tag{9.35}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Per un raggio con carichi distribuiti $q(x)$ (verticale) e $p(x)$ (orizzontale) e forze finali V e H:

$$M(x) = Vx + Hh + \int_0^x q(\xi)(x-\xi)\,d\xi + \int_0^x p(\xi)h(\xi)\,d\xi \tag{9.36}$$

Combinare le equazioni (9.35) e (9.36) otteniamo l'equazione moderna della controparte:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = Vx + Hh + \int_0^x q(\xi)(x-\xi)\,d\xi + \int_0^x p(\xi)h(\xi)\,d\xi \tag{9.37}$$

$$\text{Euler's } \frac{v}{r} \leftrightarrow \text{Modern } \frac{EI}{R} = EI\kappa \tag{9.38}$$

$$\text{Euler's } v \leftrightarrow \text{Modern } EI \tag{9.39}$$

$$\text{Euler's } Ex + Fy \leftrightarrow \text{Modern } Vx + Hh \tag{9.40}$$

$$\text{Euler's } \int P\,dx + \int Q\,dy \leftrightarrow \text{Modern } \int q(\xi)(x-\xi)\,d\xi + \int p(\xi)h(\xi)\,d\xi \tag{9.41}$$

La notevole intuizione è che l'approccio geometrico di Euler del 1732 catturò esattamente la stessa fisica che oggi esprimiamo attraverso l'equazione del fascio fondamentale, dimostrando la validità duratura del suo quadro matematico nonostante quasi tre secoli di sviluppo successivo.

Principio di unificazione rivoluzionaria Oltre a stabilire l'equazione fondamentale dell'equilibrio, La più profonda comprensione di Euler era riconoscere che i corpi perfettamente flessibili potevano essere descritti dallo stesso quadro impostando $v = 0$:

$$0 = Ex + Fy + \int_A^M P\,dx + \int_A^M Q\,dy \tag{9.42}$$

Questo trattamento unificato ha rivelato una visione fondamentale: catenari, curve elastiche e altre curve meccaniche non erano entità matematiche separate ma membri della stessa famiglia, che differiscono solo per il valore del parametro elastico, dimostrando l'eccezionale capacità di Euler di percepire l'unità matematica sottostante in fenomeni fisici disparati.

Dimostrare il potere quadro: La soluzione di Catenary Per dimostrare la versatilità del suo quadro, Euler ha dimostrato come ha recuperato sistematicamente i risultati noti, per la catenaria comune (salvo perfettamente flessibile sotto carico verticale uniforme con $dP = a\,ds$, $Q = 0$e $E = 0$), impostazione $v = 0$ nella sua equazione unificata dà:

$$0 = Fy + \int_A^M P\,dx \tag{9.43}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Attraverso analisi geometriche sistematiche utilizzando le relazioni $ds = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\, dx$ e adeguate tecniche di integrazione, questo riduce all'equazione catenaria familiare:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Fy}{\sqrt{a^2y^2 - F^2}} \tag{9.44}$$

Questa derivazione ha illustrato come il quadro generale recupera sistematicamente i risultati noti fornendo una più profonda comprensione geometrica della meccanica sottostante, la natura sistematica dell'approccio di Euler contrastava bruscamente con i metodi ad hoc utilizzati in precedenza per i tipi di curva individuale.

La sfida intrastabile: laminae elastica pesante Quando Euler tentò il suo obiettivo primario, risolvendo laminae elastiche pesanti sotto il proprio peso, incontrò una sfida matematica di fondamentale importanza. a per lunghezza unitaria, il carico distribuito crea una distribuzione momentanea proporzionale alla lunghezza dell'arco, portando a:

$$\frac{v}{r} = \int as\, dx \tag{9.45}$$

dove s rappresenta la lunghezza dell'arco da un punto di riferimento alla posizione in considerazione.

Questa equazione presenta una dipendenza matematica circolare che si è rivelata intrattabile con i metodi del XVIII secolo. s e il raggio di curvatura r sono loro stesse funzioni della forma curva sconosciuta $y(x)$. Nello specifico:

Lunghezza dell'arco: $s = \int_0^x \sqrt{1 + (dy/d\xi)^2}\, d\xi$

Curvatura: $\frac{1}{r} = \frac{d^2y/dx^2}{(1+(dy/dx)^2)^{3/2}}$

Sostituire queste relazioni trasforma l'equazione di Euler in una equazione integro-differenziale che coinvolge la funzione sconosciuta $y(x)$ Come ha osservato Euler, tali equazioni "non possono essere facilmente elaborate' utilizzando le tecniche matematiche disponibili nel 1732, creando dipendenze matematiche che resistevano a tutti i metodi di soluzione elementare.

Limitazioni matematiche e semi di rivoluzione Le limitazioni di Euler del 1732 rivelarono la necessità di strumenti matematici più potenti:

1. **Difficoltà di integrazione**: Casi di importanza fisica hanno fornito integrali impossibili da valutare con tecniche disponibili
2. **Metodi ad hoc**: Ogni problema richiedeva particolari costruzioni geometriche, prive di carattere sistematico
3. **Mancato principio di ottimizzazione**: Nessun principio fisico sottostante ha regolato la selezione delle soluzioni da possibilità matematiche

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Queste limitazioni, in particolare la pesante cassa elastica della lamina, hanno chiaramente indicato che i problemi meccanici fondamentali hanno richiesto strumenti matematici che non erano ancora esistenti, motivando infine lo sviluppo di Euler calcolo variativo del 1744.

Collegamento alla Teoria Moderna e all'Impatto Storico Euler's l'ipotesi elastica ha stabilito la base concettuale per l'analisi strutturale moderna. La teoria del fascio di Euler-Bernoulli discende direttamente da questo lavoro, con la relazione fondamentale $M = EI\kappa$ invariato nella forma. Il modulo elastico E e momento di inerzia I nella notazione moderna corrispondono esattamente al parametro "elastic force' di Euler vQuesta continuità dimostra come le intuizioni geometriche di Euler 1732 identificassero correttamente la fisica essenziale che rimane centrale all'ingegneria strutturale.

L'approccio geometrico sistematico, mentre infine superato da metodi variazionali, ha stabilito il modello per la meccanica analitica: identificare i principi fisici fondamentali, sviluppare strutture matematiche che esprimono questi principi e applicare tecniche di soluzione sistematica.

Legacy e Bridge alla rivoluzione analitica Il lavoro di Euler del 1732 rappresenta un momento cardine in cui l'intuizione geometrica ha rivelato sia la potenza che i limiti dei metodi matematici esistenti. Dimostrare chiaramente che i problemi fisici importanti superavano la capacità delle tecniche attuali, questo lavoro ha fornito una motivazione cruciale per lo sviluppo del calcolo variazionale—la rivoluzione matematica che consentirebbe la soluzione sistematica dei problemi di ottimizzazione nella meccanica.

L'unificazione di curve elastiche e flessibili in un unico quadro esemplificò il genio di Euler per percepire l'unità matematica sottostante, che divenne caratteristica della fisica matematica del XVIII secolo: ricercando principi generali che spiegano fenomeni diversi attraverso strutture matematiche comuni.

Più in modo significativo, l'identificazione di Euler dell'ipotesi elastica $M = v\kappa$ Ogni analisi strutturale moderna, infine, ripercorre questa fondamentale visione del rapporto tra curvatura e resistenza elastica.

Il 1732 opera così si pone come un culminante risultato della meccanica geometrica e una chiara dimostrazione della necessità di metodi matematici più potenti, posizionandola perfettamente come un ponte tra la tradizione geometrica del XVII secolo e la rivoluzione analitica del successivo XVIII secolo.

9.4.1.3 Teoria Euler-Bernoulli

Il termine moderno "Euler-Bernoulli beam theory"' riflette un'attenta attribuzione storica che riconosce i contributi complementari di entrambi La visione fisica di Daniel Bernoulli del 1728 e il quadro matematico di Euler del 1732, che caratterizzano la doppia designazione, mentre la letteratura ingegneristica contemporanea merita l'esame della sua precisione storica e dell'evoluzione della terminologia stessa.

Bernoulli: La componente "Bernoulli" della designazione onora principalmente la

COPIA DI REVISIONE

fondazione di Daniel Bernoulli del 1728 rapporto di curvatura del momento $\mathcal{M} = B/r$Questo rappresenta il primo riconoscimento esplicito che la resistenza elastica è proporzionale alla curvatura, l'intuizione di base su cui poggia tutta la teoria del fascio successivo, ma l'attribuzione riconosce anche implicitamente l'eredità familiare più ampia di Bernoulli, in particolare La formulazione del 1691 di Jakob Bernoulli del problema originale di elastica che ha motivato l'intero campo di indagine.

Il contributo di Daniel Bernoulli era fondamentalmente concettuale: riconoscendo che il momento interno in un fascio piegato deve essere uguale alla resistenza elastica del materiale, espressa come la La rigidità flessorale divisa dal raggio di curvatura, che ha fornito il principio fisico che regola la deformazione elastica, ma non ha avuto i macchinari matematici necessari per l'applicazione sistematica a scenari di carico complessi.

Euler: Il 1732 opera di Euler elevava la visione fisica di Bernoulli in una teoria matematica completa, mentre Euler si basava sul principio della curvatura del momento stabilito da Daniel Bernoulli, i suoi contributi erano trasformativi piuttosto che solo incrementali:

1. **Metodologia sistemica**: Euler ha sviluppato metodi geometrici che potrebbero essere applicati sistematicamente in diverse condizioni di carico
2. **Equazione dell'equilibrio generale**: La sua equazione principale comprendeva proprietà elastiche arbitrarie, carichi distribuiti e condizioni di confine in un quadro unificato
3. **Unificazione teorica**: Euler ha dimostrato che le curve elastiche e le curve perfettamente flessibili appartenevano alla stessa famiglia matematica

La sofisticazione matematica di Euler ha permesso l'applicazione pratica del principio fisico di Bernoulli, trasformando una visione isolata in una teoria di lavoro della meccanica strutturale.

La denominazione composta «Teoria del fascio di Euler-Bernoulli» non è emersa immediatamente dopo la pubblicazione di questi documenti fondativi. L'evoluzione terminologica riflette il graduale riconoscimento all'interno della comunità ingegneristica di entrambi i ruoli essenziali:

Periodo iniziale (1732-1800): I riferimenti contemporanei tipicamente accreditati i singoli contributi separatamente, con il lavoro di Euler che guadagnano rilievo a causa della sua completezza matematica e applicabilità pratica.

Sviluppo del XIX secolo: Poiché la teoria del fascio si è sistematizzata all'interno dell'istruzione e della pratica ingegneristica, la natura fondamentale del principio della curvatura di Bernalì ricevette un crescente riconoscimento a fianco dei metodi matematici di Euler.

Modern Standardizzazione: La designazione di "Euler-Bernoulli" è diventata standard

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

nella letteratura ingegneristica del XX secolo, riflettendo il consenso studioso che entrambi i contributi erano essenziali per la teoria completa.

La doppia attribuzione riflette con precisione lo sviluppo storico della teoria del fascio, riconoscendo che né l'intuizione fisica di Bernoulli né il quadro matematico di Euler costituivano da soli una teoria completa dei raggi elastici:

- **La limitazione di Bernoulli**: Mentre si stabilisce il principio fondamentale, il suo lavoro del 1728 non ha metodi sistematici per trattare problemi complessi
- **La dipendenza di Euler**: Nonostante lo sviluppo di tecniche matematiche sofisticate, l'approccio di Euler si basava fondamentalmente sul rapporto di curvatura di Bernoulli
- **Necessità complementare**: La teoria completa richiedeva sia la comprensione fisica che la macchina matematica

L'equazione moderna del raggio $M = EI\kappa$ combinato con il rapporto di equilibrio $EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x)$ direttamente incarna entrambi i contributi storici:

$$\text{Bernoulli's insight:} \quad \mathcal{M} = \frac{B}{r} \rightarrow M = EI\kappa \tag{9.46}$$

$$\text{Euler's framework:} \quad \frac{v}{r} = f(\text{loading}) \rightarrow EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x) \tag{9.47}$$

Questa continuità dimostra che la designazione di "Euler-Bernoulli' rappresenta più di una convenzione storica, identifica con precisione le origini concettuali dei rapporti matematici che continuano a governare l'analisi strutturale moderna.

Alcuni conti storici sottolineano diversi aspetti dello sviluppo teorico:

- **Jakob Bernoulli sottolinea l'importanza**: Riconoscere la sfida del 1691 elastica come affermazione del problema fondamentale
- **Il primato di Euler**: Concentrandosi sul trattamento matematico completo di Euler come il progresso teorico decisivo
- **Sviluppo collettivo**: Visualizzare la teoria del fascio come emergente dalla più ampia comunità del XVIII secolo di fisici matematici

Tuttavia, la designazione standard "Euler-Bernoulli' rimane storicamente defensibile e pedagogicamente preziosa, identificando chiaramente i due componenti essenziali: principio fisico e struttura matematica.

In sintesi, il termine "teoria del fascio di Euler-Bernoulli" rappresenta un'attribuzione storica accurata che riconosce sia l'intuizione fisica fondamentale fornita dal rapporto di curvatura del 1728 di Daniel Bernoulli che il quadro matematico sistematico sviluppato

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dall'analisi geometrica di Euler, che riflette la natura complementare dei loro contributi e la realtà storica che la teoria del fascio completo richiedeva sia la comprensione fisica che la sofistica matematica.

La persistenza di questa terminologia in quasi tre secoli di sviluppo ingegneristico testimonia il significato duraturo di entrambi i contributi fondamentali e l'accuratezza dell'attribuzione storica che rappresentano.

9.5 Teoria di chiusura: dall'osservazione ai carichi critici

A differenza della catenaria e dell'elastica, il problema della colonnina non ha avuto origine in un concorso, ma come estensione creativa di Euler del lavoro precedente.

9.5.1 Lavoro prematuro

9.5.1.1 Leonardo (ca. 1490s)

Leonardo scrisse quello che è un trattato breve su pilastri, travi, corde e archi, offrendo regole precise piuttosto che tendenze vaghe (Truesdell, 1960, p. 20)Truesdell discute la straordinaria comprensione qualitativa del comportamento strutturale di Leonardo da Vinci, e osserva che Leonardo ha esaminato pilastri sia sperimentalmente che concettuale (Fig. 9.24a) cercando di capire perché alcuni falliscono piegando mentre altri falliscono schiacciando; secondo Truesdell, Leonardo riconosce il ruolo critico della geometria di carico: quando la linea verticale di azione del carico passa attraverso l'asse centroidale del pilastro, il membro In tali condizioni Leonardo credeva, erroneamente in senso qualitativo, che l'elemento accorcia senza deviazione laterale. Truesdell contrasta allora questa prima visione con i trattamenti analitici successivi di Galileo, Mariotte e Euler, illustrando come l'intuizione rinascimentale gradualmente cedette ad una teoria matematica completa di piegamento e stabilità.In sostanza, Truesdell utilizza l'osservazione di Leonardo per evidenziare i primi, pre-riconoscimento matematico di ciò che ora è inteso come carico eccentrico e bucklingpiegatura indotta.

Dalle osservazioni sparse, Leonardo propose regole proporzionali per il massimo carico carico P di una colonna di area A, diametro d, e lunghezza L, come

$$P \propto \frac{\sqrt{A}}{L}, \qquad P \propto d^2. \tag{9.48}$$

Preso letteralmente, queste regole superstiti sono *reciprocamente incoerente* (in seguito) $A \sim d^2$ avrebbe fatto la prima relazione predire $P \sim d/L$). Incertezze paleografiche, è un'interpretazione cauta. che Leonardo ha affermato solo le tendenze qualitative: la forza diminuisce con lunghezza e aumenta con dimensioni trasversale, ma non possedeva

COPIA DI REVISIONE

Tabella 9.11: Analisi comparativa dei contributi di Bernoulli (1728) ed Eulero (1732) alla teoria delle travi

Aspetti	Bernoulli 1728	Euler 1732
Innovazione primaria	Primo momento esplicito - relazione di curvatura: $\mathcal{M} = B/r$	Ipotesi elastici fondamentali: $M = v\kappa$ con struttura geometrica sistematica
Approccio matematico	Analisi geometrica di casi di carico specifici con calcoli di momento	Metodo geometrico sistemico con due lemmi fondamentali e principi di equilibrio generale
Ambito di applicazione	Fasci con carichi di punti auto-peso e applicati	Proprietà elastiche arbitrarie, carico distribuito (P, Q), e condizioni generali di confine
Equazione chiave di governo	$g\sigma \int_0^s s\,dx + Px = \frac{B}{r}$	$\frac{v}{r} = Ex + Fy + \int_A^M P\,dx + \int_A^M Q\,dy$
Risultati dell'unificazione	Problemi limitati al fascio con carico combinato	Curve elastiche unificate, corpi perfettamente flessibili (catenarie), e tutti i casi intermedi
Insight fisico	La resistenza elastica è proporzionale alla curvatura	I corpi flessibili emergono come un caso di limitazione quando $v = 0$; comprensione fisica completa
Problemi risolti con successo	• Fascio sotto il peso di sé • Applicazioni di carico punti • Forze ad angoli arbitrari	• Derivazione catenaria comune • Casi di carico parabolici • Applicazioni della forza normale • Forze normali/tangentiali combinate • Tutti i problemi perfettamente flessibili
Limitazioni maggiori	• Ad hoc metodi per ogni caso • Limitato al semplice caricamento • Non esiste un quadro sistematico • Non può gestire confini complessi	• Lamina elastica pesante intrattabile • Difficoltà di integrazione complesse • Nessun principio di ottimizzazione • I metodi geometrici non hanno generalità
Strumenti matematici	Analisi geometrica di base, equilibrio di momento, calcolo del centro di gravità	Lemma geometriche avanzate, teoria del momento sistematica, equazioni differenziali generali, metodi parametrici
Carattere metodologico	Costruzioni geometriche specifiche per i problemi	Approccio sistemico: individuare i principi → deriva l'equazione generale → applicare a casi specifici
Trattamento del carico	Forze autopesse più discrete applicate	Carico distribuito generale: verticale (P), orizzontale (Q), più carichi finali (E, F)
Contesto storico	Costruire sul lavoro di elastica di zio Jakob	Rispondendo alla sfida del 1691 di Jakob Bernoulli con un'estensione
Che cosa ha dimostrato	Momento - relazione curvatura è fondamentale per il comportamento elastico	Questa relazione può essere applicata sistematicamente per risolvere diversi problemi meccanici
Cosa rimaneva irrisolto	geometrie complesse, carichi distribuiti, problemi di ottimizzazione	Laminae elastica pesante, problemi variativi che richiedono principi estremi
La tradizione moderna	Momento-relazione della curva invariata: $M = EI\kappa$ (300 anni)	Euler–Bernoulli fondazione teoria del fascio, sviluppo motivato del calcolo delle variazioni
Relazioni	Fornito principio fisico fondamentale	Costruiti metodi matematici sistematici sulla fondazione di Bernoulli

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

un coerente legge elastico-stabilità (Timoshenko, 1953 PDF). In termini moderni, lui il percepimento *tendenza di indurimento* di lunghi, sottili montanti sotto assiale compressione.

9.5.1.2 Pieter van Musschenbroek (1729)

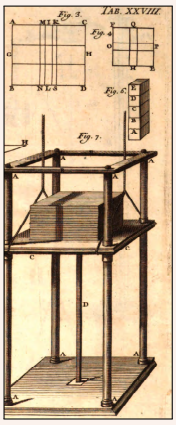
Un primo sperimentatore, van Musschenbroek, ha esplicitamente attaccato i problemi di coesione e stabilità *esperimento*. Utilizzo dell'apparecchio in Fig. 9.24b, ha stabilito che il carico limite nella compressione di campioni prismatici snelli varia inversamente con il *quadrato* della lunghezza, e ha proposto una regola empirica per sezioni rettangolari:

$$P \propto \frac{h^2 B}{L^2}, \tag{9.49}$$

dove h è lo spessore del lato che diventa curvato (il lato "bent") e B è l'altro lato (Van Musschenbroek, 1729 PDF). L^{-2} la scalatura è il punto storicamente decisivo (prevede la dipendenza funzionale che apparirà più tardi nella teoria di Euler).h^2 piuttosto che l'elastice $EI \sim Bh^3$) indicare che il limite osservato riflette gli effetti di flessione/frattura sulla strada del fallimento piuttosto che un'instabilità elastica pulita. *primo studio sistematico* dei membri compressi che espongono la deflezione laterale e precede l'analisi di Euler di circa quindici anni.



(a) Gli schizzi di Leonardo relativi al buckling



(b) apparato di van Musschenbroek (1729)

Figura 9.24: Studi di compressione precoce si concentrano su fenomeni di instabilità assiale.

9.5.2 Euler(1759)

Mentre gli esperimenti di van Musschenbroek avevano stabilito l'empirical L^{-2} La legge di scaling per l'insufficienza della colonna, la base teorica per la comprensione dell'instabilità

COPIA DI REVISIONE

del processo di buckling emerse da una fonte inaspettata: il lavoro di Euler sulle curve elastiche.

Nel 1759, Euler presentò un documento all'Accademia di Berlino (Euler, 1759) che rappresentava una riesame cruciale del suo lavoro di elastica del 1744, Fig. 9.25. Il paragrafo di apertura, tradotto da Euler, 1759, rivela il suo riconoscimento tardivo:

> Lorsque j'ai traité des courbes élastiques dans le supplément de mon traité des isopérimètres, j'en ai tiré une conséquence, touchant la force des colonnes, qui m'a paru fort remarquable. Elle consiste dans la charge qu'une colonne peut porter sans se courber. J'ai trouvé une règle qui a lieu pour les colonnes d'une épaisseur égale dans toute leur hauteur; et si l'on désigne par a la hauteur de la colonne, et par Ekk le moment de roideur, la charge qu'une telle colonne peut porter sans se courber sera $= \frac{\pi\pi \cdot Ekk}{aa}$, π La mia risposta è: $= 1$. Su en conclut que cette charge est en raison inverse du carré de la hauteur de la colonne.
>
> Quando ho sviluppato curve elastiche nel supplemento al mio Treatise su Isoperimetri, ho tratto da loro una conclusione per quanto riguarda la forza delle colonne che mi colpisce come molto notevole. Riguarda i carichi che una colonna può sostenere senza intasamento. La regola che ho trovato si applica alle colonne di area trasversale costante; e se si designa l'altezza della colonna = a, e il momento di resistenza = Ekk, il carico che una tale colonna può sostenere senza buckling è = $\pi\pi.Ekk/aa$dove π significa la circonferenza di un cerchio di diametro = 1. Da questo si conclude che il carico è inversamente proporzionale al quadrato dell'altezza della colonna.
>
> Euler, 1759 «*Sur la force des colonnes*»

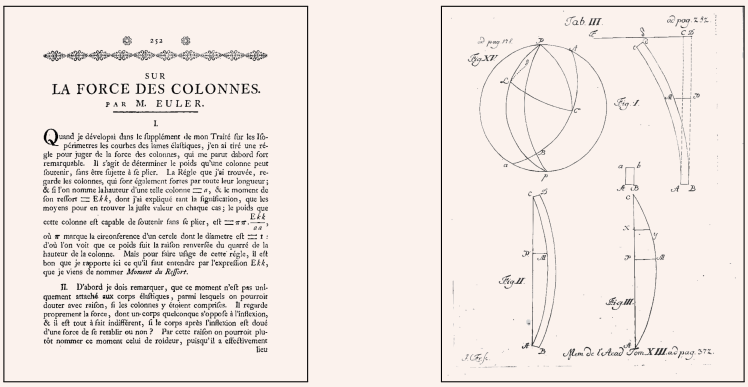

SUR
LA FORCE DES COLONNES.
PAR M. EULER.

Figura 9.25: Carta seminale di Euler su buckling (Euler, 1759)

Questo rappresenta la prima articolazione chiara di quello che ora conosciamo come la formula di indurimento di Euler: $P_{\text{critical}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ in notazione moderna.

Il lavoro di Euler del 1757 generalizzò il concetto oltre i corpi puramente elastici, sottolineando che il "momento di resistenza" Ek^2 si applica più in generale:

COPIA DI REVISIONE

> Si tratta in sostanza di una forza per mezzo della quale qualsiasi corpo resiste a un cambiamento di curvatura, ed è totalmente immateriale se un tale corpo dopo la flessione è dotato di una forza per ristabilire la sua forma originale o meno. *momento di roideur*, perché si verifica in tutti i corpi che resistono alla flessione, che siano elastici o meno.
>
> Euler, 1759 «*Sur la force des colonnes*»

Sia Euler (1759) che il moderno "Species I"' (§9.3.2.2.1) l'approccio comincia dallo stesso elastica quadratura, che esprime la curva di una linea elastica compressa:

$$dy = \frac{a^2 + x^2}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}}\, dx. \tag{9.50}$$

Questa relazione nasce dall'equilibrio della rigidità di piegatura EI (Euler's Ekk), carico assiale P, e curvatura, e costituisce il punto di partenza condiviso.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Dedotto da Specie I (Euler, 1744a)

1. Inizia direttamente da Eq. (9.50).
2. Assumere $c^2 \ll a^2$ (Specifiche I stato). Approssimativo:
$$a^2 - c^2 \approx a^2, \quad 2a^2 - c^2 + x^2 \approx 2a^2 + x^2.$$
3. Per piccoli x, semplificare ulteriormente:
$$dy \approx \frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{c^2 - x^2}}\, dx.$$
4. Integrare:
$$y = \frac{a}{\sqrt{2}} \arcsin\frac{x}{c}.$$
5. Applicare la condizione di confine in cima: $f = \dfrac{\pi a}{2\sqrt{2}}$ per mezza lunghezza f.
6. Con $P = \dfrac{2Ek^2}{a^2}$, ottenere
$$P = \frac{Ek^2}{f^2} \cdot \frac{\pi^2}{4}.$$
7. Per la lunghezza totale $L = 2f$ e $Ek^2 = EI$,
$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}}.$$

(Euler, 1759) (Original)

1. Presenta Eq. (9.50) dalla sua teoria dell'elastica precedente.
2. Per la cassa quasi dritta, la riduce al ODE lineare:
$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} + P\,y = 0.$$
3. Soluzione:
$$y(x) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right).$$
4. Con cerniere... punte a cerniera: $y(0) = 0$, $y(a) = 0$.
5. Soluzione non banale $\Rightarrow$ condizioni di vita:
$$\sqrt{\frac{P}{EI}}\,a = \pi.$$
6. Di qui il carico critico:
$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{a^2}}$$

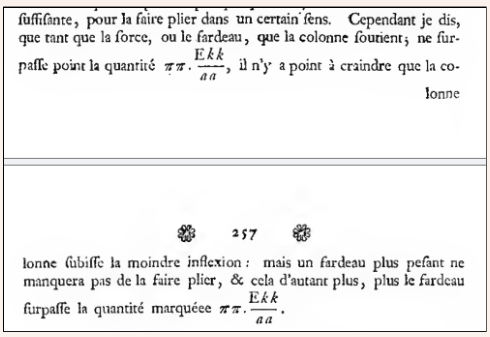
La strada di Euler attraversa l'equazione differenziale di equilibrio e interpreta la biforcazione come soglia di stabilità. La Specie che mi avvicina utilizza un'esplicita asintotica sulla quadratura elastica per raggiungere la stessa condizione. Entrambi rivelano la stessa legge fisica: il carico di indurimento critico varia inversamente con il quadrato della lunghezza. Fig. 9.26

Nonostante questa svolta, l'analisi di Euler conteneva limitazioni significative che sarebbero state risolte solo attraverso gli sviluppi successivi:

Manca il concetto di instabilità: Euler non ha riconosciuto che Eq. 9.24 rappresentava un punto di biforcazione in cui il carico di piccole dimensioni aumenta al di sopra del

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.


suffisante, pour la faire plier dans un certain sens. Cependant je dis, que tant que la force, ou le fardeau, que la colonne soutient, ne surpasse point la quantité $\pi\pi . \frac{Ekk}{aa}$, il n'y a point à craindre que la colonne

257

colonne subisse la moindre inflexion : mais un fardeau plus pesant ne manquera pas de la faire plier, & cela d'autant plus, plus le fardeau surpasse la quantité marquée $\pi\pi . \frac{Ekk}{aa}$.

Cependant je dis, que tant que la force, ou le fardeau, que la colonne soutient, ne surpasse point la quantité $\pi\pi Ekk/aa$, il n'y a point à craindre que la colonne subisse la moindre inflexion : mais un fardeau plus pesant ne manquera pas de la faire plier, & cela d'autant plus, plus le fardeau surpasse la quantité marquée $\pi\pi Ekk/aa$.

Tuttavia affermo che, finché la forza, o il carico, sostenuto dalla colonna non supera la quantità $\pi\pi Ekk/aa$, non vi è alcun rischio che la colonna subisca la minima inflessione. Ma un carico più pesante la farà inevitabilmente flettere, e tanto più quanto maggiore sarà l'eccedenza del carico rispetto alla quantità indicata $\pi\pi Ekk/aa$.

Figura 9.26: Euler, 1759 dichiarazione del carico di buckling critico

valore critico avrebbe portato a grandi deformazioni e potenziali guasti. Il concetto di carico "critico" e di instabilità strutturale non sarebbe completamente sviluppato fino a molto più tardi il lavoro sulla teoria della stabilità.

Proprietà intersettoriali non corrette: Anche se Euler correttamente riconosciuto che Ek^2 misurato rigidità, ha erroneamente congetturato che per un raggio rettangolare di larghezza b e spessore h, il modulo di flessione era proporzionale a Ebh^2. Il rapporto corretto coinvolge $Ebh^3/12$, ma il concetto del momento dell'inerzia e dell'analisi corretta della distribuzione dello stress non emergerebbe fino al lavoro di Coulomb (1773) e successivamente sviluppi nella teoria del fascio.

Impatto e Legacy

La derivazione di Euler del carico di buckling critico è una delle realizzazioni più significative della meccanica strutturale. $P_{\text{critical}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ confermato lo sperimentale di van Musschenbroek L^{-2} scaling fornendo il quadro teorico per capire perché tale comportamento si verifica.

Più fondamentalmente, questo lavoro ha introdotto il concetto di carichi critici nell'analisi strutturale, l'idea che le strutture non possano fallire attraverso la ripartizione dei materiali ma attraverso l'instabilità geometrica, che si rivelerebbe rivoluzionaria, stabilendo la base per tutto il lavoro successivo nella stabilità strutturale e trasformando l'ingegneria da un mestiere empirico in una scienza basata su principi matematici.

Il percorso della derivazione matematica di Euler all'applicazione ingegneristica dimostra anche come le scoperte teoriche spesso precedono la loro interpretazione pratica. Mentre i metodi variazionali del 1744 hanno fornito la corretta relazione matematica, la comprensione delle sue implicazioni fisiche ha richiesto l'indagine continua e lo sviluppo di teorie complementari nel comportamento materiale e nell'analisi strutturale.

COPIA DI REVISIONE

Conclusioni

La derivazione del carico di indurimento critico rappresenta il culmine di una tradizione matematica che ha avuto inizio con la sfida elastica di Jakob Bernoulli. Fraser, 1991 osservata, Euler si trovava veramente sulle spalle dei giganti: Jakob Bernoulli derivava l'equazione di elastica, Gli Huygens hanno formulato il problema della determinazione delle forme bent, Newton ha dato origine al tema della classificazione sistematica, e Daniel Bernoulli ha suggerito l'approccio variazionale.

L'approccio di Euler, trattando le equazioni di base dell'elasticità come postulati fisici soggetti alla determinazione sperimentale e allo sviluppo matematico, ha anticipato gli sviluppi successivi nella fisica matematica, ma, a differenza di approcci positivistici successivi che hanno sottolineato la matematica come uno strumento operativo, Euler ha raggiunto una fondamentale integrazione della concezione matematica e fisica.

La formula di buckling $P_{\text{critical}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ Essa ha stabilito il concetto di carichi critici e di instabilità strutturale, trasformando l'ingegneria dalla pratica empirica in una scienza basata su principi matematici, una trasformazione la cui influenza si estende alla meccanica computazionale moderna e all'analisi della stabilità.

9.6 Teoria Generale di Euler: Unificazione Completa (1771)

All'inizio del 1770, le principali sfide delle linee deformabili erano state emesse e risolte.

La sequenza di grandi sfide si è svolta quasi come un dramma in fasi. Il catenario, prima posto da Jakob Bernoulli, è stato determinato in definitiva da Leibniz, Johann Bernoulli e Huygens, anche se, ironia della sorte, non da Jakob stesso (§9.2). Poco dopo, Jakob pose nuovamente il problema dell'elastica, che egli stesso risolse parzialmente e che Euler portò a compimento nel 1744 (§9.3), aiutato da un importante interludio in cui il calcolo delle variazioni fu concepito per la prima volta da Daniel Bernoulli e poi rigorosamente raffinato da Euler.§9.4) ha aggiunto ulteriore slancio, essendo preso e risolto da Daniel Bernoulli e Euler. Infine, il culmine arrivò con il celebre memoriale di Euler del 1759 sull'incoronazione delle colonne, che trasformarono una curiosità matematica in un risultato centrale della meccanica strutturale.

Dal 1771 Euler era pronto a disegnare questi fili insieme, vedendo la catenaria, l'elastica, la sfida anonima e il problema di indurimento delle colonne, ognuno risolto a sua volta, non cercò più di infilarli in un unico tessuto analitico. *Genuina principia* (Euler, 1771), ha presentato quello che può giustamente essere chiamato *grande teoria unificante* di linee deformabili,[27] gettare l'equilibrio e il moto come sotto un insieme di equazioni di governo, Fig. 9.27.

[27] Nella fisica moderna, la ricerca di una "teoria unificata di Gran", che unisce le forze forti, deboli e

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

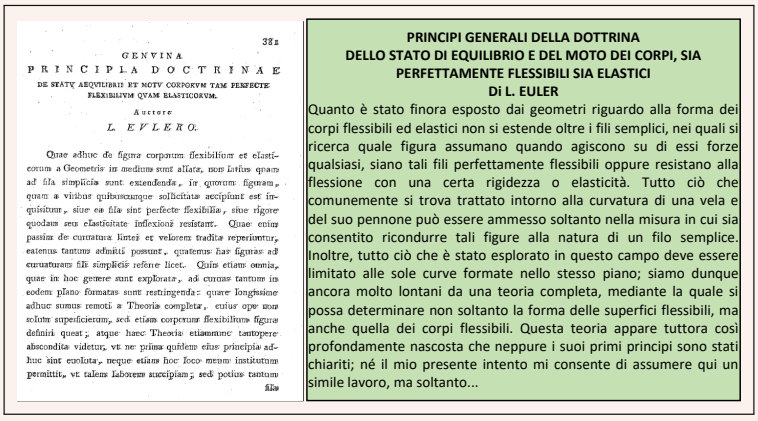
"Genuina principia doctrinae de statu aequilibriii et motu corporum tam perfecte flexibilium quam elasticorum".

«I principi autentici della dottrina dell'equilibrio e del moto dei corpi, sia perfettamente flessibili che elastici».

Euler, 1771 « *Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flesibilium quam elasticorum*», p. 1

Con questa linea di apertura audace, Euler ha dichiarato il suo intento di stabilire una meccanica universale di linee deformabili, subendo le grandi sfide in un unico sistema teorico.

Questa dichiarazione fa esplicita volontà di Euler: stabilire la prima meccanica veramente universale di linee flessibili ed elastiche.



GENVINA
PRINCIPIA DOCTRINAE
DE STATV AEQVILIBRII ET MOTV CORPORVM TAM PERFECTE FLEXIBILIVM QVAM ELASTICORVM.
Auctore
L. EVLERO.

Quae adhuc de figura corporum flexibilium et elasticorum a Geometris in medium sunt allata, non latius quam ad fila simplicia sunt extendenda, in quorum figuram, quam a viribus quibuscunque sollicitata accipiunt est inquisitum, sive ea fila sint perfecte flexibilia, sive rigore quodam seu elasticitate inflexioni resistant. Quae enim passim de curvatura lintei et velorum tradita reperiuntur, eatenus tantum admitti possunt, quatenus has figuras ad curvaturam fili simplicis referre licet. Quin etiam omnia, quae in hoc genere sunt explorata, ad curvas tantum in eodem plano formatas sunt restringenda: quare longissime adhuc sumus remoti a Theoria completa, cuius ope non solum superficierum, sed etiam corporum flexibilium figura definiri queat; atque haec Theoria etiamnunc tantopere abscondita videtur, vt ne prima quidem eius principia adhuc sint evoluta, neque etiam hoc loco meum institutum permittit, vt talem Laborem suscipiam; sed potius tantum fila

PRINCIPI GENERALI DELLA DOTTRINA DELLO STATO DI EQUILIBRIO E DEL MOTO DEI CORPI, SIA PERFETTAMENTE FLESSIBILI SIA ELASTICI
Di L. EULER

Quanto è stato finora esposto dai geometri riguardo alla forma dei corpi flessibili ed elastici non si estende oltre i fili semplici, nei quali si ricerca quale figura assumano quando agiscono su di essi forze qualsiasi, siano tali fili perfettamente flessibili oppure resistano alla flessione con una certa rigidezza o elasticità. Tutto ciò che comunemente si trova trattato intorno alla curvatura di una vela e del suo pennone può essere ammesso soltanto nella misura in cui sia consentito ricondurre tali figure alla natura di un filo semplice. Inoltre, tutto ciò che è stato esplorato in questo campo deve essere limitato alle sole curve formate nello stesso piano; siamo dunque ancora molto lontani da una teoria completa, mediante la quale si possa determinare non soltanto la forma delle superfici flessibili, ma anche quella dei corpi flessibili. Questa teoria appare tuttora così profondamente nascosta che neppure i suoi primi principi sono stati chiariti; né il mio presente intento mi consente di assumere qui un simile lavoro, ma soltanto...

Figura 9.27: Euler "grand-unifying' paper, (Euler, 1771)

Il problema generale e il principio di stress

Nel trattato del 1771 Euler mise in piedi quello che chiamò il "problema generale" dell'equilibrio di linea: una curva di piano BMA sottomesso a forze distribuite arbitrarie, Fig. 9.28. Tagliando fantasiosamente la curva ad un punto M e isolando il segmento, ha sostituito la parte sequestrata da equivalente stress risultante—una forza tangenziale T, una forza normale V, e un momento di piegatura interno $\mathfrak{M}$. Questa costruzione è il seme concettuale di analisi moderna dello stress-resultante.

Espressa qui nella moderna notazione intrinseca (la derivazione latina di Euler utilizza

elettromagnetiche, riecheggia l'ambizione di Euler di sottoporre i problemi catenari, elastica e di buckling in un unico sistema analitico.

COPIA DI REVISIONE

simboli diversi e una convenzione di segno leggermente diversa), le equazioni di equilibrio leggere

$$\frac{dT}{ds} + V\frac{d\phi}{ds} = -F_t, \tag{9.51}$$

$$\frac{dV}{ds} - T\frac{d\phi}{ds} = -F_n, \tag{9.52}$$

$$\frac{d\mathfrak{M}}{ds} - V = 0, \tag{9.53}$$

dove $r^{-1} = d\phi/ds$ è la curvatura e ϕ indica l'angolo tangente (nella convenzione di Euler, spesso il complemento dell'angolo di pendenza).

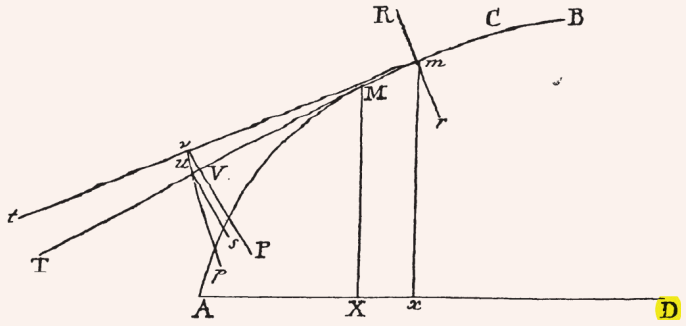


Figura 9.28: Il diagramma di Euler per l'equilibrio generale di una linea (Euler, 1771 PDF).

Unificazione e Generalizzazione delle Grandi Sfide

Le equazioni generali di Euler comprendono, come casi particolari, i problemi classici delle linee deformabili:

Catenary (catena flessibile): If $\mathfrak{M} = 0$ (senza rigidità di piegatura) e $F_t = 0$, $F_n = g\sigma$ (peso per unità di lunghezza), le equazioni si riducono al problema catenario risolto da Leibniz, Johann Bernoulli e Huygens.

Elastica (Scapo elastico): Con $F_t = F_n = 0$ (non carico distribuito) e la legge costitutiva $\mathfrak{M} = EI/r$, si recupera l'equazione elastica prima posata da Jakob Bernoulli e completamente sviluppata da Euler nel 1744.

Secchiatura a colonna (1759): Applicato ad una colonna prismatica azionata assialmente, lo stesso quadro rende la condizione di stabilità linearizzata. $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$ per le estremità a cerniera; nel più ampio 1771, la definizione di questo appare come un problema particolare di autovalore (biforcazione) all'interno della teoria generale.

COPIA DI REVISIONE

> *"... $d^3\phi$ ad differenziaalia quarti gradus assurget.'*
>
> "...il terzo termine derivato si eleva ad un'equazione differenziale di quarto ordine".
> Euler, 1771 « *Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flesibilium quam elasticorum*», p. 12

Questo passaggio evidenzia come il metodo di Euler produce naturalmente l'equazione elastica di ordine superiore, un punto di riferimento nell'analisi strutturale.

Linea generale Equilibrium (1771): Il trattato del 1771 mostra soprattutto che le stesse equazioni governano *qualsiasi* linea sotto arbitrarie distribuzioni tangenziali e normali di carico, con o senza piegare rigidità. Euler stesso ha sottolineato l'adattabilità della sua soluzione:

> *Non è difficile erit Solutionem nostram etiam ad alios casus accommodare..."*
>
> "Non sarà difficile adattare la nostra soluzione anche ad altri casi..."
> Euler, 1771 « *Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flesibilium quam elasticorum*», p. 13

Questo nuovo livello di generalità ha sollevato l'analisi da casi speciali ad un principio universale di equilibrio di linea e, in sezioni di compagno del memoir, a problemi di movimento (vibrando stringhe e barre elastiche), legando così statiche e dinamiche all'interno di un metodo.

Chiusura Prospettiva

Assunti insieme, questi lavori segnano il completamento del programma di Euler su linee deformabili. L'elastica del 1744 forniva la fondazione matematica; il 1759 il memoriale sulle colonne ha dimostrato la sua potenza nella risoluzione di un problema di ingegneria centrale; e il trattato del 1771 elevava il soggetto ad una teoria universale di equilibrio e movimento per linee flessibili ed elastiche. In questa progressione, Euler trasformò le sfide isolate di catene, aste e colonne in sfaccettature di un unico quadro analitico—un risultato che non solo unificava i meccanici del suo secolo ma prevedeva anche i principi di governo delle moderne formulazioni di stress-resultant e continuum.

La sintesi: dalle sfide alla scienza

L'evoluzione dalle sfide individuali a una teoria unificata segna una trasformazione fondamentale nella scienza meccanica. Il problema catenario degli anni 1690 ha dimostrato la nuova potenza del calcolo nell'ottimizzazione. La sfida elastica di Jakob Bernoulli ha spinto la matematica verso metodi variazionali. Il problema della stabilità ha rivelato come la teoria astratta potrebbe anticipare fenomeni critici nelle strutture ingegneristiche.

COPIA DI REVISIONE

La teoria generale di Euler del 1771 sintetizzava questi risultati in un quadro completo che:

- **Geometria e meccanica unificate**: curvatura e deformazione collegate direttamente con i risultati della forza interna;
- **Stabilito il principio di stress**: introdotti T (tangential) V (normale) e $\mathfrak{M}$ (momento) come quantità fondamentali;
- **Metodologia generale fornita**: equazioni di equilibrio formulate indipendenti dalle leggi materiali, con relazioni costitutive che forniscono chiusura;
- **Distinguished kinematics dal comportamento materiale**: descrizione geometrica chiaramente separata da ipotesi costitutive;
- **Abilitazione della classificazione sistematica**: ha dimostrato come le linee sia perfettamente flessibili che elastiche emergano come casi particolari del quadro generale.

Il viaggio da Le osservazioni qualitative di Galileo sulla forza del fascio alle equazioni differenziali di Euler hanno attraversato quasi due secoli di sviluppo matematico e meccanico. Le grandi sfide hanno agito come catalizzanti, avanzando in analisi di calcolo, variazionale e ragionamento fisico. La loro ultima unificazione sotto la teoria generale di Euler ha dimostrato come i problemi specifici e ben posti possono scoprire i principi universali.

L'eredità si estende ben oltre i problemi originali. L'analisi strutturale moderna, dai grattacieli ai ponti sospensioni, dai materiali micro-scala alle molecole del DNA, si basa sulle fondamenta che si sono stabilite per la prima volta attraverso la risoluzione di queste "semplice" domande sulle catene pendenti, sulle barre piegate e sulle colonne compresse.

> *Non è difficile erit Solutionem nostram etiam ad alios casus accommodare..."*
>
> "Non sarà difficile adattare la nostra soluzione anche ad altri casi..."
> Euler, 1771 « *Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flesibilium quam elasticorum*», p. 13

L'osservazione conclusiva di Euler cattura lo spirito della sua memoria del 1771: un quadro non limitato a problemi particolari, ma aperto, adattabile e duraturo.

9.7 Conclusioni

Il percorso delle riflessioni qualitative di Galileo sulla forza del fascio (§7.2.2) alle equazioni universali di linee deformabili di Euler si sono svolte quasi due secoli e hanno trasformato

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

i meccanici da un mestiere guidato dall'analogia e dall'esperimento in una scienza matematica. Ogni sfida ha avuto un ruolo decisivo: il catenario ha rivelato la potenza del calcolo nella risoluzione dei problemi di ottimizzazione; la matematica pressata elastica verso metodi di variazione e le equazioni differenziali di ordine superiore; il problema anonimo 1724 ha esteso queste intuzioni alle leggi di stabilità generale; e la teoria di Eubuckling.

La sintesi di Euler del 1771 ha segnato il culmine di questa progressione: il "problema generale" dell'equilibrio di linea, ha introdotto il meccanismo concettuale dei risultati di stress—forza genenziale, forza normale e momento di piegatura—e l'equilibrio cinematico separato dalla risposta materiale.

L'eredità di queste grandi sfide è profonda: quello che è iniziato come concorsi intellettuali tra i principali geometri europei riformulano la meccanica delle strutture e pone le basi per l'analisi di ingegneria moderna. Oggi, dalla progettazione di ponti e grattacieli alla modellazione delle microstrutture e delle biomolecole matematiche, le equazioni forgiate per la prima volta nello studio di catene, aste e colonne rimangono fondanti.

Tabella 9.12: Una linea temporale cronologica unificata delle tre grandi sfide: Catenary, Elastica e Anonimo Challenge

Data	Sfida	Evento
c. 1490s	Studi preliminari	Leonardo da Vinci schizza catene appese nei suoi quaderni.
1614	Studi preliminari	Isaac Beeckman nota il problema del cordone sospeso e ne discute con Descartes.
1634	Studi preliminari	Stevin's *Oeuvres Mathématiques* pubblicato postumo, con le annotazioni di Girard che affermano un catenario parabolico.
1638	Studi preliminari	Galileo indaga sul catenario ma non ritiene che sia parabolico (Galilei, 1638).
c. 1646	Studi preliminari	I giovani Huygens (età 17 anni) dimostrano a Mersenne che il catenario non è parabolico.
1670s	Studi preliminari	Newton studia curve elastiche simili in privato, ma non pubblica i suoi risultati.
1690 maggio	Catenary	Jakob Bernoulli emette il *Funicolare* sfida in *Atto Eruditorum*(Bernoulli, Jakob, 1690b).
1690 giugno	Elastico	Jakob Bernoulli pone il problema elastica in *Spettacolo del cambiamento*, codificato come anagramma (Bernoulli, Jakob, 1690a).
1690 Late	Catenary	Leibniz accetta la sfida e la riforma la concentra sulla *La catena*.
1690 ottobre 9	Catenary	Huygens risponde con una soluzione cifrata.
1690 ottobre 13	Catenary	Leibniz risponde a Huygens senza usare il codice.
1690 ott	Elastico	Termine per la presentazione del festival di raccolta di Basilea; nessuna soluzione presentata.
1690 dic	Catenary	Johann Bernoulli presenta la sua soluzione ai redattori di *Atto Eruditorum* (Bernoulli, Johann, 1691c).
1691 gen 27	Catenary	Leibniz riconosce il metodo ausiliario-curve di Huygens.
1691 febbra 23	Catenary	Huygens esprime fiducia sulla difficoltà del problema.
1691 Mar 2	Catenary	Leibniz informa Huygens della soluzione di successo di Johann.
1691 Mar 21	Catenary	Jakob presenta *Additamentum ad Problema Funicolare*.

Continuare nella pagina successiva

COPIA DI REVISIONE

Libro I: Una breve storia della meccanica e dell'analisi strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 9.12 (Seguito)

Data	Sfida	Evento
1691 Mar 26	Catenary	Huygens manda un cifrario corretto.
1691 maggio 5	Catenary	Huygens e Leibniz presentano soluzioni finali (Huygens, 1888a; Leibniz, 1691a).
1691 Jun	Catenary	Le tre soluzioni (Huygens, Leibniz, Johann Bernoulli) pubblicate simultaneamente in *Atto Eruditorum* (Huygens, 1888a; Leibniz, 1691a; Bernoulli, Johann, 1691c).
1692	Elastico	Jakob Bernoulli completa la soluzione elastica privata in *Meditazioni CLXX* (Bernoulli, Jakob, 1677–1705).
1694 Jun	Elastico	Jakob pubblica *Lamina di curvatura elastica*, decodifica dell'anagramma e rivela il "teorema d'oro" (Bernoulli, Jakob, 1694).
1694	Elastico	Huygens pubblica una critica che identifica configurazioni multiple di elastica (curves A–G).
1694	Elastico	Jakob risponde con grazia a Huygens, difendendo la generalità del suo metodo geometrico (Bernoulli, 1694).
1696	Correlati	Johann Bernoulli pone la sfida del brachistochrone in *Atto Eruditorum* (Bernoulli, Johann, 1696).
1697 Jan	Correlati	Johann estende il termine del brachistochrone tramite una stampa *Programma*.
1697 maggio	Correlati	Johann pubblica la soluzione brachistochrone utilizzando l'analogia ottica; Newton, Leibniz, l'Hôpital, e Jakob anche risolverlo (Bernoulli, Johann, 1697a).
1724 Aug	Anonimo	Una sfida anonima (segnata "LBC") appare in *Atto Eruditorum* riguardo le catene "moderately flessibili" (Anonymous, 1724).
1724–1727	Anonimo	La sfida passa in gran parte inosservata; nessuna risposta immediata.
1728 febbraio	Anonimo	Daniel Bernoulli ed Euler presentano indipendentemente soluzioni linea flessibili e elastiche unificate (Bernoulli, Daniel, 1744; Euler, 1728).
1728	Anonimo	Entrambe le soluzioni pubblicate consecutivamente *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*Vol. 3 (Bernoulli, Daniel, 1744; Euler, 1728).
1728	Anonimo	Daniel stabilisce il rapporto fondamentale del momento-curvatura $M = B/r$ (Bernoulli, Daniel, 1744).
1729	Correlati	Pieter van Musschenbroek pubblica studi sperimentali di indurimento che mostrano $P \propto L^{-2}$ scacciamento (Van Musschenbroek, 1729).
1732	Elastica/Anonymous	Euler pubblica *Soluzione problematica*— un quadro geometrico generale che unifica curve elastiche e flessibili: $M = v\kappa$ (Euler, 1732).
1742 ott 20	Elastico	Daniel Bernoulli scrive a Euler proponendo il principio di minimizzazione dell'energia: "vis viva potenzialeis" deve essere minimo (Bernoulli, Daniel, 1845).
1742	Elastico	Daniel esprime energia elastica come $\int ds/R^2$ e deriva l'equazione differenziale del quarto ordine (Bernoulli, Daniel, 1845).
1744 lug	Elastico	Euler consegna i principali capitoli di *Metodologia inveniendi* all'editore (Euler, 1744b).
1744 dic	Elastico	Euler consegna due appendici: Additamentum I (elastica) e II (azione minima) (Euler, 1744b).
1744	Elastico	*Metodo inveniendi lineas curves* pubblicato, presentando il primo trattamento sistematico del calcolo variazionale (Euler, 1744b).

Continuare nella pagina successiva

COPIA DI REVISIONE

Libro I: Una breve storia della meccanica e dell'analisi strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 9.12 (Seguito)

Data	Sfida	Evento
1744	Elastico	Euler classifica nove specie di curve elastica (Species I–IX) con una caratterizzazione matematica completa (Euler, 1744a).
1744	Elastico	Il lavoro completo di elastica di Jakob appare postumo *Opera Omnia*, a cura di Gabriel Cramer (Bernoulli, Jakob, 1744b).
1759	Fibbia	Euler pubblica la sua formula di intasamento a colonna $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$, riconoscendo il 1744 Specie I caso' significato (Euler, 1759).
1771	Unificazione	Euler pubblica *Genuina principia* unificare tutte e tre le sfide in una teoria generale delle linee deformabili (Euler, 1771).
1771	Unificazione	Euler introduce il "problema generale" con i risultati dello stress: forza tangenziale T, forza normale V, e momento di piegatura $\mathfrak{M}$ (Euler, 1771).

Tabella 9.13: Pubblicazioni citate nella linea temporale cronologica unificata

Autore/i	Anno	Citazione	Titolo	Designazione delle merci
Galileo Galilei	1638	(Galilei, 1638)	*Discorsi e dimostrazioni matematiche*	La curva catenaria è parabolica, propone in modo errato il lavoro di base sulla forza del fascio e sulla meccanica strutturale.
Jakob Bernoulli	1690	(Bernoulli, Jakob, 1690b)	*Problematica funicolare*	Emette la sfida catenaria alla comunità matematica in *Atto Eruditorum*, chiedendo la curva formata da una catena sospesa
Jakob Bernoulli	1690	(Bernoulli, Jakob, 1690a)	*Spettacolo mutale differenziali*	Posi il problema elastico con la soluzione codificata in un anagramma; promette di rivelare la soluzione del festival di raccolta di Basilea in ottobre
Johann Bernoulli	1691	(Bernoulli, Johann, 1691c)	*Soluzione problematica*	La soluzione catenaria di Johann, presentata agli editori nel dicembre 1690 e pubblicata nel giugno 1691 insieme a Leibniz e Huygens
Christiaan Huygens	1691	(Huygens, 1888a)	*Risultato della catenari*	Soluzione catenaria geometrica di Huygens con curve ausiliarie; sviluppata attraverso la corrispondenza cifrare con Leibniz
Gottfried W. Leibniz	1691	(Leibniz, 1691a)	*De linea in quam flexile se pondere proprio curvat*	La soluzione catenaria di Leibniz che stabilisce collegamenti a logaritmi e funzioni iperboliche; trattamento più completo
Jakob Bernoulli	1692	(Bernoulli, Jakob, 1677–1705)	*Meditazioni CLXX*	Il taccuino scientifico privato di Jakob contenente la sua soluzione elastica completa; rimase inedito durante la sua vita
Jakob Bernoulli	1694	(Bernoulli, Jakob, 1694)	*Curvatura Laminae Elastica*	Prima soluzione elastica pubblicata con il "teorema d'oro" relativa curvatura al momento di piegatura; decodifica l'anagramma 1690

Continuare nella pagina successiva

COPIA DI REVISIONE

Tabella 9.13 (Seguito)

Autore/i	Anno	Citazione	Titolo	Designazione delle merci
Jakob Bernoulli	1694	(Bernoulli, 1694)	*Responsio ad Dn. Hugenium*	Risposta graziosa alla critica di Huygens, difendendo la generalità del suo metodo geometrico per il problema elastico
Johann Bernoulli	1696	(Bernoulli, Johann, 1696)	*Problema novum*	Posi la sfida del brachistochrone in *Atto Eruditorum*; diventa il problema fondante del calcolo delle variazioni
Johann Bernoulli	1697	(Bernoulli, Johann, 1697a)	*Curvatura radii in diaphanis non uniformibus*	Soluzione Brachistochrone con analogia ottica e principio di Fermat; dimostra che il cicloide è la curva della discesa più veloce
Anonimo (LBC)	1724	(Anonymous, 1724)	*Celebre catenariae problema*	Sfida anonima per catene "moderately flessibili", che colmano il divario tra catenari puramente flessibili e curve elastiche rigide
Daniel Bernoulli	1728	(Bernoulli, Daniel, 1744)	*Metodo universale determinandae curvatura fili*	Stabilisce il rapporto fondamentale della curvatura del momento $\mathcal{M} = B/r$ che diventa il fondamento di tutta la teoria del fascio
Leonhard Euler	1728	(Euler, 1728)	*Solutio problematis de invenienda curva*	Prima teoria unificata di linee flessibili ed elastiche; pubblicata consecutivamente con il giornale di Daniel Bernoulli in risposta alla sfida del 1724
Pieter van Musschenbroek	1729	(Van Musschenbroek, 1729)	*Sperimentazione di fisioterapia*	Studi sperimentali di buckling che istituiscono $P \propto L^{-2}$ legge di scalazione empiricamente, trent'anni prima della teoria di Euler
Leonhard Euler	1732	(Euler, 1732)	*Solutio problematis de invenienda curva*	Quadro geometrico generale con ipotesi elastica $M = v\kappa$ unificare problemi di curva elastici e flessibili in teoria singola
Daniel Bernoulli	1742	(Bernoulli, Daniel, 1845)	Lettera a Euler (20 ottobre)	Propone il principio di minimizzazione dell'energia per l'elastica; esprime l'energia elastica come $\int ds/R^2$ e deriva l'equazione differenziale di quarto ordine
Leonhard Euler	1744	(Euler, 1744b)	*Metodo inveniendi lineas curves*	Sviluppo sistemico del calcolo variazionale, compresa l'equazione Euler-Lagrange; trattato di riferimento che istituisce il campo
Leonhard Euler	1744	(Euler, 1744a)	*Additamentum I: De curvis elasticis*	Soluzione elastica completa con classificazione di nove specie distinte (I–IX) utilizzando metodi di variazione sistematici
Jakob Bernoulli	1744	(Bernoulli, Jakob, 1744b)	*Opera Omnia* (Possuale)	Completi opere raccolte tra cui manoscritti elastici precedentemente inediti provenienti dai *Meditazioni*; a cura di Gabriel Cramer

Continuare nella pagina successiva

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 9.13 (Seguito)

Autore/i	Anno	Citazione	Titolo	Designazione delle merci
Leonhard Euler	1759	(Euler, 1759)	*La forza delle colonne*	Deriva la formula di indurimento della colonna $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$; riconosce in ritardo il significato delle specie I dal 1744
Leonhard Euler	1771	(Euler, 1771)	*Genuina principia doctrinae de statu aequilibri*	Gran unificazione che presenta la teoria generale delle linee deformabili con i risultati dello stress (forzatangentiale, forza normale, momento di curvatura)

Contesto culturale (1670–1790)

Questo periodo collega il tardo barocco, il Rococo e i primi anni classici—un'epoca di assolutismo che gradualmente cede il passo al razionalismo dell'illuminismo. Scienza, arte e filosofia hanno condiviso un fascino con armonia, ordine e proporzione, poi arricchito dall'espressività emotiva che prefigurava il romanticismo.

Italia

Compositori: Antonio Vivaldi (1678–1741) esemplifica la vitalità barocca; Domenico Scarlatti (1685–1757) virtuosismo avanzato della tastiera; Giovanni Battista Pergolesi (1710–1736) e Giovanni Paisiello (1740–1816) contribuirono a modellare la prima opera comica.
Nota: I tribunali frammentati e il patronato della chiesa hanno sostenuto le arti, anche quando la leadership scientifica migrava verso nord.

Francia

Compositori: Jean-Baptiste Lully (1632–1687), François Couperin (1668–1733), e Jean-Philippe Rameau (1683–1764) formarono il barocco francese; Christoph Willibald Gluck (1714–1787), attivo a Parigi, opera riformata.
Scrittori e filosofi: Voltaire, Montesquieu, Diderot e Rousseau... anche un compositore–corporò il *Filosofe* Racine e Molière hanno colmato la grandeur classica con il dramma moderno.
Pittori: Antoine Watteau (1684–1721) raffinata eleganza rococò; François Boucher (1703–1770) e Jean-Honoré Fragonard (1732–1806) hanno epitomizzato la sua sensualità; Jacques-Louis David (1748–1825) ha annunciato il Neoclassicismo e la prossima rivoluzione.
Nota: Parigi è emersa come capitale intellettuale dell'Europa; *Encyclopédie* riflette lo spirito scientifico di sistematizzare tutte le conoscenze.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Germania

Compositori: Johann Sebastian Bach (1685–1750), George Frideric Handel (1685–1759), e Georg Philipp Telemann (1681–1767) dominarono il primo secolo; Joseph Haydn (1732–1809) e Wolfgang Amadeus Mozart (1756–1791, austriaco ma centrale della cultura tedesca) condussero la transizione classica.
Scrittori e filosofi: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) ha colmato scienza e metafisica; Gotthold Ephraim Lessing (1729–1781) pionieristico dramma moderno tedesco; Klopstock e Herder hanno anticipato il romanticismo; Goethe (1749–1832) e Schiller (1759–1805) hanno chiuso il periodo.
Artisti: Anton Raphael Mengs (1728–1779) e Johann Zoffany (1733–1810) hanno favorito un raffinato stile neoclassico.
Nota: Il lavoro di campi dell'Impero Romano sostenne diversi patronati, parallelando nuove accademie scientifiche a Berlino e a Göttingen.

Svizzera

Scrittori e pensatori: Jean-Jacques Rousseau (1712–1778) di Ginevra trasforma il pensiero europeo e l'estetica musicale;
Nota: La vita intellettuale svizzera incarna il cosmopolitismo dell'illuminismo, producendo polimi al confine tra scienza e arte.

Sintesi

In tutta Europa, le arti e le scienze hanno condiviso una ricerca comune di ordine e di proporzione, più tardi equilibrata dall'individualità e dal sentimento. Lo stesso razionalismo che ha guidato Newton, il Bernoullis, e Euler hanno trovato espressione visiva in Neoclassicismo e incarnazione intellettuale nella filosofia di illuminazione —un'unità di pensiero e di arte che ha definito l'Europa prima del turno romantico.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Caravaggio, Judith Holofernes (1599-1602)

Il momento critico dell'azione decisiva—le grandi sfide richiedono una risoluzione al punto della massima tensione.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 10

Meccanica del continuo: fondamenti dell'analisi strutturale

Abstract

Questo capitolo esamina il cambiamento di paradigma dalle teorie molecolari a continuum dell'elasticità che si è verificato durante il XIX secolo, stabilendo le basi matematiche La rivoluzione intellettuale ha cominciato con il riconoscimento che il comportamento elastico non poteva essere adeguatamente spiegato da semplici modelli molecolari basati su forze centrali tra i punti materiali. Il fallimento di questi modelli, in particolare la loro previsione che il rapporto di Poisson deve essere pari a 1/4 per tutti i materiali, ha fornito una riconcettualità fondamentale della materia come mezzo continuo governato da equazioni di campo.

Il capitolo traccia i contributi della scuola matematica francese, in particolare del Cauchy introduzione del tenore di stressNavier's sintesi della teoria e della pratica, e di Green formulazione rivoluzionaria basata sul potenzialeQuesti sviluppi, concentrati nel notevole periodo del 1820-1860, trasformarono l'elasticità da una raccolta di regole empiriche in una rigorosa scienza matematica.

Oltre alla narrazione storica, il capitolo presenta le leggi fondamentali di bilancio: conservazione della massa, quantità di moto ed energia, che costituiscono la base universale della meccanica del continuo. La teoria costitutiva mostra come il comportamento specifico dei materiali sia caratterizzato dai principi di oggettività, simmetria materiale e coerenza termodinamica. Il quadro continuo così emerso, soprattutto nella formulazione energetica, fornì l'infrastruttura teorica dei metodi pratici di analisi strutturale sviluppati dagli ingegneri nei decenni successivi.

Centrale di questa narrazione è la tensione metodologica tra approcci meccanici riduzionisti e formulazioni continuum fenomenologiche, riflettendo più profondi impegni filosofici sul rapporto tra struttura microscopica e comportamento macroscopico. La risoluzione di questo dibattito, favorendo la meccanica continuum, riconoscendo i limiti di entrambi gli approcci, esemplifica come la prova empirica e l'eleganza matematica possono guidare insieme il progresso scientifico.

10.1 Molecolare molecolare *vs* Teorie di elasticità 393
10.1.1 Panoramica 394
10.1.2 Da Galileo alla Scuola Molecolare Francese 394
10.1.3 L'ascesa dell'approccio continuo 395
10.1.4 Tabella di confronto 396
10.1.5 Quale teoria ha prevalso? . . 396
10.1.6 Riferimenti storici 397
10.2 Meccanica del continuum 399

COPIA DI REVISIONE

10.3 Introduzione 400
10.3.1 Rivoluzioni francesi e la nascita di una moderna elasticità 400
10.3.2 Fondamenti di Meccanica e Teoria di Elasticità 400
10.4 Il quadro matematico completo . . . 412
10.4.1 Euler e la Conservazione della Messa 412
10.4.2 Cauchy (1789-1857) e il bilanciamento del moto lineare . . 413
10.4.3 Bilancia del Momento angolare 413
10.4.4 Clausius (1822-1888), Thomson (1824-1907), e Duhem (1861-1916) Leggi termodinamiche 414
10.4.5 Seconda Legge (Diseguaglianza intropia): 415
10.4.6 Sviluppo storico e Sintesi moderna 415
10.5 Teoria costitutiva: comportamento materiale 416
10.5.1 Il quadro generale 416
10.5.2 Noll (1925-2017) e l'oggettività: Il principio dell'indifferenza della struttura dei materiali 417
10.5.3 Verde (1793-1841) e Iperelasticità 418
10.5.4 Voigt (1850-1919) e simmetria dei materiali 419
10.5.5 Coleman (1930-1992) e Noll: Restrizioni termodinamiche 419
10.5.6 Prospettiva storica: dall'empiricismo alla teoria 420
10.5.7 Connessione all'analisi strutturale 421
10.5.8 Che cosa c'è in un nome? L'evoluzione della Meccanica e dei suoi praticanti 421
10.6 Conclusioni 429

10.1 Molecolare molecolare *vs* Teorie di elasticità

All'inizio del XIX secolo, i principi variazionali e la meccanica analitica sviluppati da Euler, Lagrange e Bernoullis avevano fornito potenti strumenti matematici per la comprensione dei sistemi meccanici, ma una questione fondamentale rimase irrisolta: *Qual è la natura della deformazione elastica in corpi solidi?* Sono emersi due risposte concorrenti, ognuna che riflette profondamente diversi impegni filosofici circa il rapporto tra struttura microscopica e comportamento macroscopico.

Il dibattito tra le tendenze molecolari e continuum si avvicina all'elasticità non era semplicemente tecnico, rappresentava un più profondo divario metodologico nella fisica matematica. Dovrebbe essere elasticità derivata dai primi principi, basandosi su su ipotesi sulla costituzione microscopica della materia? O dovrebbe essere formulata fenomenologicamente, descrivendo corpi continui attraverso equazioni di campo senza riferimento alla struttura atomica sottostante? Questa questione animava gran parte della meccanica del primo XIX secolo e plasmava lo sviluppo di ciò che ora riconosciamo come meccanica continuum.

La risoluzione di questo dibattito ha avuto profonde conseguenze per l'analisi strutturale. La formulazione continuum che alla fine prevalse, in particolare la sua variante basata sul potenziale fondata sui principi energetici—fornito il fondamento teorico su cui Navier, Clapeyron, e in seguito ingegneri avrebbero costruito metodi pratici per analizzare travi,

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

piastre e cornici; comprendere questo cambiamento di paradigma è quindi essenziale per apprezzare il motivo per cui i contributi francesi alla meccanica continuum, che esaminiamo nelle sezioni successive, ha preso la forma particolare che hanno fatto.

Iniziamo delineando i due quadri teorici concorrenti e la crisi sperimentale che ha costretto una rivalutazione dell'approccio molecolare.

10.1.1 Panoramica

La teoria dell'elasticità storicamente si è evoluta attraverso due paradigmi principali:

1. **Teoria molecolare (o meccanica)**: che intende spiegare l'elasticità modellando la materia come composta da particelle discrete (atomi o molecole) che interagiscono attraverso forze meccaniche (spesso centrali).
2. **Teoria del continuum**: che tratta la materia come un mezzo continuo e descrive la risposta elastica attraverso variabili di campo come stress e tensione.

All'interno della teoria continuum, sono emersi due formulazioni distinte:

- **Formulazione generale continuum**: Lo stress è espresso in funzione di tensione, senza supporre che derivi da un potenziale.
- **Formulazione potenziale**: Lo stress deriva da una funzione scalare di densità di energia W- Si'. $\sigma = \partial W / \partial \varepsilon$. Questo sottoinsieme è anche conosciuto come iperelasticità.

Questi quadri riflettono diverse filosofie: la teoria molecolare è radicata nella meccanica newtoniana e riduzionismo; teoria continuum (soprattutto la forma potenziale-basata) è fondata in principi variazionali e consistenza termodinamica.

10.1.2 Da Galileo alla Scuola Molecolare Francese

Galileo ha introdotto l'idea di materiali composti da filamenti fibrosi (§7.3.1.2), un'ipotesi che dominava i primi modelli di forza e deformazione, che poneva le basi per interpretazioni corpuscolari di elasticità.

All'inizio del XIX secolo, i meccanicisti francesi, in particolare Navier (1821), Cauchy (1822-1823), e Poisson (1829)—formularono l'elasticità assumendo la materia è fatta di punti materiali che interagiscono attraverso le forze centrali. Navier fu il primo a ricavare equazioni continuum da assunzioni molecolari nel 1821, predendo lo sviluppo più sistematico di Cauchy, anche se Cauchy successivamente forniva un quadro più generale e rigo per la teoria analitica di stress e di questo sforzo.

Tuttavia, è emerso un problema fondamentale: la teoria molecolare prevedeva che il rapporto di Poisson, il rapporto tra il trasverso e lo sforzo assiale sotto carico uniassiale,

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

doveva essere uguale precisamente 1/4 per tutti i materiali isotropici, una conseguenza matematica diretta dell'assunzione di forze centrali tra i punti di materiale. (Capecchi, Ruta e Trovalusci, 2010 PDF; Todhunter e Pearson, 1893 PDF).

Il fallimento centrale della teoria molecolare era quindi la sua previsione che il rapporto di Poisson deve essere pari a 1/4 per tutti i materiali isotropici, conseguenza dell'assunzione di forze centrali tra i punti materiali. ≈ 0, gomma ≈ 0.5), confutando in modo decisivo il quadro molecolare e rivelando che la natura richiedeva due costanti elastiche indipendenti piuttosto che la sola costante prevista dalla teoria molecolare.

10.1.3 L'ascesa dell'approccio continuo

Per superare i limiti dei modelli molecolari, le formulazioni continuum di elasticità gradualmente hanno guadagnato prominenza durante il 1830-1850s.

Caucaso ha posto le basi di tensori di stress e di tensione all'interno di un corpo continuo, formulando ciò che sarebbe diventato il modello di continuum generale. Tuttavia, anche mentre ha sviluppato il quadro matematico della meccanica continuum, inizialmente ha mantenuto analogie meccaniche basate sulle interazioni molecolari, cercando di conciliare i due approcci.

George Green Nel suo notevole serie di carte sulla luce e sull'elasticità del 1837-1839, introdusse un approccio innovativo basato sul potenziale, riconoscendo che le vere leggi molecolari che governano la materia rimasero sconosciute e forse inconsapevoli in quel momento, egli audacemente postulava che il comportamento elastico potesse essere descritto da una funzione scalare potenziale senza riferimento ai meccanismi molecolari sottostanti. (Green, 1839a; Green, 1839b).

Nonostante il suo successo empirico, l'approccio di Green incontrò la resistenza iniziale, soprattutto in Francia, dove le interpretazioni meccanistiche radicate nei principi newtoniani erano preferibili filosoficamente. Anche i teorici brillanti come Lamé, Clapeyron, e il giovane Saint-Venant lottarono attraverso il 1840 per capire esattamente perché la teoria molecolare tradizionale aveva fallito, riluttante ad abbandonare l'ideale riduzionista.[1]

Il punto di svolta è venuto gradualmente. **Saint-Venant**, inizialmente un difensore degli approcci molecolari, divenne negli anni 1850 uno dei sostenitori più efficaci della teoria continuum, il suo sviluppo del metodo semiinverso per risolvere i problemi di elasticità e la sua validazione sperimentale sistematica delle previsioni continuum contribuì a stabilire

[1]Questo rivela un più profondo contrasto metodologico tra la ricerca francese di eleganza analitica fondata in primi principi e l'empirismo britannico più pragmatico che ha sottolineato l'adeguatezza fenomenologica e la vestibilità sperimentale. La tradizione francese, esemplificata dal Politecnico École, ha valutato il rigore matematico e la derivazione dalle leggi meccaniche fondamentali. era più disposto a postulare relazioni fenomenologiche, come la funzione energetica della varietà di Green, se concordavano con l'osservazione, anche senza giustificazione meccanica, che continuava a influenzare lo sviluppo della meccanica nel corso del XIX secolo, con i francesi che gradualmente si avvicinavano a apprezzare la potenza degli approcci fenomenologici quando i meccanismi fondamentali rimasero oscuri.

COPIA DI REVISIONE

la credibilità della teoria. Bravais, 1866 ulteriormente illuminato il problema mostrando che la struttura molecolare comporta accordi geometrici molto più complessi delle semplici interazioni dei punti, aiutando a colmare il divario concettuale tra descrizioni atomistiche e continuum.

10.1.4 Tabella di confronto

Aspetti	**Teoria molecolare**	**Teoria del Continuum**
Ontologia	Particelle discrete	Mezzo continuo
Derivazione dello stress	Da forze interatomiche	Dal diritto costitutivo
Forma costitutiva	Basato sulle forze centrali	**(a)** Generale: $\sigma = f(\varepsilon)$ **(b)** Basato su potenziale: $\sigma = \partial W/\partial \varepsilon$
Filosofia	Riduzionista, meccanismo	Fenomenologica, variazionale
I principali sostenitori	Hooke, Navier, Poisson, Cauchy (prima), Kelvin, Maxwell	Cauchy (generale), Verde (potenziale), Lamé, Saint-Venant, Piola, Kirchhoff
costanti elastiche	Predetti uno (Poisson ratio = 1/4)	Consente due costanti indipendenti
Trattamento dell'anisotropia	Dalla struttura reticolare	Imposto tramite simmetria W or f
Il dominio storico	1820 fino a 1840	A partire dal 1850
Ruolo moderno	Basi di dinamiche molecolari, modellazione multiscala	nucleo di FEM e meccanica solida; potenziale modello chiave in iperelasticità e deformazione finita

Tabella 10.1: Contrasting teorie molecolari e continuum di elasticità, con due formulazioni continuum.

10.1.5 Quale teoria ha prevalso?

Verso la fine del XIX secolo, **teoria del continuum** Il fallimento dei modelli molecolari di prevedere i risultati sperimentali chiave — in particolare il vincolo del rapporto Poisson e la necessità di due costanti elastiche — combinate con l'aumento di potenti metodi analitici e computazionali basati su formulazioni continuum, hanno portato ad un cambiamento fondamentale del consenso teorico.

Tra le formulazioni continuum, il *modello basato sul potenziale* ha guadagnato particolare prominenza per modellare materiali elastici (reversibili), soprattutto dopo lo sviluppo di

COPIA DI REVISIONE

teorie costitutive termodinamicamente costitutive nel XX secolo (ad esempio, Truesdell e Noll, Coleman e Noll). Il quadro ha anche dimostrato essenziale per una grande deformazione e elasticità non lineare attraverso il lavoro di Rivlin, Mooney, e altri.

Tuttavia, le teorie molecolari hanno sperimentato una notevole rinascita nel XX secolo attraverso la meccanica statistica e, successivamente, la dinamica molecolare computazionale. Oggi, integrano i modelli continuum in approcci multiscala, con simulazioni atomiste che informano le relazioni continuum costitutive - una sintesi che avrebbe soddisfatto sia le scuole molecolari che continuum del XIX secolo.

10.1.6 Riferimenti storici

Fonti primarie di Contributor

Autore	Anno	Citazione	Titolo	Designazione delle merci
Navigatore				
Navigatore	1821	(Navier, 1821)	*Sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*	Prima derivazione delle equazioni continuum da ipotesi molecolari
Navigatore	1827	(Navier, 1827a)	*Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*	Versione estesa con sviluppo matematico completo
Caucaso				
Caucaso	1822	(Cauchy, 1822)	*Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps*	La formulazione iniziale del concetto di stress
Caucaso	1823	(Cauchy, 1823)	*Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps*	Sviluppo sistemico del tenore di stress
Caucaso	1828	(Cauchy, 1828)	*Les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement intérieur*	Equazioni di equilibrio generale per corpi elastici
Caucaso	1829	(Cauchy, 1829)	*Il Consiglio ha adottato una decisione relativa alla conclusione di un accordo di cooperazione tra la Comunità e i paesi dell'Europa centrale e orientale.*	Teoria molecolare dell'elasticità con le forze centrali
Poisson				
Poisson	1829	(Poisson, 1829)	*Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques*	Teoria molecolare completa; introduce il rapporto di Poisson
Poisson	1831	(Poisson, 1831)	*Mémoire sur la propagation du mouvement dans les milieux élastiques*	Proliferazione delle onde in supporti elastici
Verde				
Verde	1828	(Green, 1828)	Un saggio sull'applicazione dell'analisi matematica all'elettricità e al magnetismo	Presenta l'approccio alle funzioni potenziali

COPIA DI REVISIONE

Autore	Anno	Citazione	Titolo	Designazione delle merci
Verde	1837	(Green, 1837)	Sulla riflessione e sulla rifrazione della luce	Applicazione precoce all'elasticità ottica
Verde	1839	(Green, 1839a)	Sulle leggi di riflessione e di rifrazione della luce	Sviluppo della funzione di energia di sforzo
Verde	1842	(Green, 1842)	Sulla propagazione della luce nei media cristallizzati	Estensione a materiali anisotropici
Ferreri (ed.)	1871	(Ferrers, 1871)	Matematica di George Green	Collezioni con commento
Lamé e Clapeyron				
La mia & Chiaro	1831	(Lamé e Clapeyron, 1831)	*Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solids homogènes*	Lavoro comune sull'equilibrio interno dei solidi
La mia & Chiaro	1833	(Lamé e Clapeyron, 1833)	*Mémoire sur la solidification par refroidissement d'un globo liquide*	Applicazione dell'elasticità ai problemi di raffreddamento
La mia	1852	(Lamé, 1852)	*Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité*	Trattamenti completi; costanti Lamé
Chiaro	1857	(Clapeyron, 1857)	*Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis*	Teorema di tre momenti per travi continue
Saint-Venant				
Saint-Venant	1855	(Saint-Venant, 1855b)	*Mémoire sur la torsion des prismes*	Metodo semiinverso; teoria della torsione
Saint-Venant	1856	(Saint-Venant, 1855c)	*Mémoire sur la flessore des prismes*	Prolungamento alla flessione delle barre prismatiche
Saint-Venant	1864	(Saint-Venant, 1864)	*Mémoire sur l'établissement des équations des mouvements intérieurs*	Plastica oltre limite elastico
Brava.				
Brava.	1850	(Bravais, 1850)	*La Commissione ha presentato una relazione sulla situazione dei problemi economici e monetari e la politica industriale.*	Distribuzioni di punti regolari; teoria della reticenza
Brava.	1866	(Bravais, 1866)	*Études cristallographiques*	Struttura cristallina e arrangiamenti molecolari
Fondazioni precedenti				
Galilei	1638	(Galilei, 1638)	*Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a due nuove scienze*	Forza dei materiali; teoria del fascio di cantilever
Gancio	1678	(Hooke, 1678)	*De Potentia Restitutiva, o della primavera*	Prima formulazione di diritto di elasticità (Legge di Hooke)
Euler	1744	(Euler, 1744b)	*Metodo Inveniendi Lineas Curvas* (Appendice): *De curvis elasticità*)	Calcolo variabile; curve elastiche
Altri importanti contributori				

COPIA DI REVISIONE

Autore	Anno	Citazione	Titolo	Designazione delle merci
Piola	1833	(Piola, 1833)	*La meccanica delle strutture naturalmente estesi*	Piola tenore di stress; formulazione variazionale
Kirchhoff	1850	(Kirchhoff, 1859)	*Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe*	Teoria del piatto con piegatura e stretching

Fonti secondarie e storiche

Autore	Anno	Citazione	Titolo	Designazione delle merci
Todhunter & Pearson	1886–1893	(Todhunter e Pearson, 1893)	Storia della Teoria dell'Estrattività e della Forza dei Materiali	Storia dell'era vittoriana autoritaria
Timoshenko	1953	(Timoshenko, 1953)	Storia della forza dei materiali	Prospettive ingegneristiche sullo sviluppo
La mia vita	1960	(Truesdell, 1960)	Meccanica Razionale di Corpi flessibili o elastici 1638–1788	Analisi completa del XVII-XV secolo
La mia vita & Noll	1965	(Truesdell e Noll, 1965)	Le Teorie di Meccanica non Linear Field	Quadro meccanico continuum moderno
Szabó	1977	(Szabó, 1977)	*Geschichte der mechanischen Principien*	Storia completa (in tedesco)
Grattan-Guinness	1990	(Grattan-Guinness, 1990)	Convoluzioni in matematica francese, 1800–1840	Analisi dettagliata della scuola francese
Benvenuto	1991	(Benvenuto, 1991a)	Introduzione alla storia della Meccanica Strutturale	Storia meccanica strutturale a due volumi
Amore	1927	(Love, 1927)	Una trattativa sulla Teoria Matematica dell'Estratticità	Trattamenti classici con note storiche
Capecchi	2010	(Capecchi, Ruta e Trovalusci, 2010)	Storia delle leggi di lavoro virtuali	Prospettive moderne sulla storia della meccanica

10.2 Meccanica del continuum

Questo capitolo segna una transizione al quadro analitico della meccanica continuum, in cui gli organismi materiali sono modellati come media continui regolati da variabili di campo come lo spostamento, la tensione e lo stress. L'enfasi è posta sugli sviluppi concettuali e matematici che hanno raggiunto la maturità nel XIX secolo, quando la meccanica si è

COPIA DI REVISIONE

evoluta da ragionamento in larga misura discreto e geometrico in una teoria sistematica fondata nell'analisi.

Il materiale qui presentato si concentra su questo consolidamento di idee a fine fase, evidenziando come concetti fondamentali – forze interne, deformazione, equilibrio e stabilità – siano stati rigorosamente definiti e interconnessi all'interno del quadro continuum. Il trattamento è intenzionalmente conciso ma matematicamente completo, illustrando come la meccanica continuum ha fornito la base su cui sono state costruite in ultima analisi strutturali e la teoria dell'ingegneria moderna.

10.3 Introduzione

10.3.1 Rivoluzioni francesi e la nascita di una moderna elasticità

I secoli XVI-XVIII furono "dominati" dai filosofi o scienziati naturali britannici, olandesi, tedeschi, italiani e svizzeri, e naturalmente vi furono alcune intrusioni di Mariotte e Coulomb tra gli altri, ma i contributi francesi erano minimi (anche se Parigi forniva un luogo di incontro per Leibniz e Huygens).

Tuttavia nel XIX secolo, la Francia ha condotto il mondo nell'applicazione dei principi scientifici ai problemi pratici, avendo stabilito il famoso *École des Ponts et Chaussées* e la *ÉCola Polytechnique* rispettivamente nel 1747 e nel 1794, quest'ultimo, fondato da Gaspard Monge durante la Rivoluzione, fu militarizzato sotto Napoleone I nel 1804, e fornirono un crogiolo all'interno del quale molti eminenti ingegneri insegnarono o studiarono. Lagrange Lam é (1795-1870), Monge, Poisson per il primo; Cauchy (1789-1857), Darcy, Navier, Freyssinet, Saint-Venant(1797-1886), per la seconda. In alcuni casi, entrambe le istituzioni rivendicavano lo stesso come gli alunni (Navier, e Saint-Venant).

Il lavoro teorico di Navier sulla flessione del fascio e sui raggi continui, pubblicato per la prima volta nel 1826 *LeçSuccede*La teoria generale del fascio, inclusa quella che divenne nota come l'ipotesi Bernoulli-Navier (che le sezioni piani rimangono ali e normali all'asse neutro), sostenne gran parte del disegno strutturale del XIX secolo. Tuttavia, i grandi progetti come il Britannia Bridge (1850) di Robert Stephenson si basarono su un'ampia sperimentazione sperimentale condotta da William Fairbairn e formule empiriche di Eaton Hodgkin. (Clark e Stephenson, 1850; Charlton, 1982).

10.3.2 Fondamenti di Meccanica e Teoria di Elasticità

10.3.2.1 Coulomb (1736-1806) e la Fondazione Ingegneria

Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806) colpì il divario tra meccanica teorica e ingegneria pratica, un ingegnere militare che servì ampiamente nelle colonie francesi, Coulomb unì

COPIA DI REVISIONE

un'analisi matematica rigorosa con una attenta sperimentazione. *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture* (1773) (Coulomb, 1773b) A differenza dei suoi contemporanei che si concentravano sui principi meccanici astratti, Coulomb affrontava problemi direttamente rilevanti per la costruzione:

1. **Teoria della pressione terrestre**: Coulomb ha sviluppato la prima teoria razionale per il calcolo della pressione della terra laterale sul mantenimento delle pareti. Utilizzando il principio del lavoro virtuale combinato con l'assunzione di una superficie di fallimento del piano, ha derivato:

$$P = \frac{1}{2}\gamma H^2 K_a$$

   dove K_a Questo lavoro ha gettato le basi per l'ingegneria geotecnica moderna e rimane oggi concettualmente valida.
2. **Teoria della frizione**: Attraverso esperimenti approfonditi, Coulomb ha stabilito che la forza di attrito è proporzionale alla forza normale e indipendente dall'area di contatto—la legge $F = \mu N$ che porta il suo nome, si distingue tra attrito statico e cinetico e riconosce il ruolo della coesione nei suoli, formulando:

$$\tau = c + \sigma \tan \phi$$

   Questa legge di attrito è diventata fondamentale per l'analisi delle strutture con interfacce di contatto e interazione con la struttura del suolo.
3. **Teoria di vapore e colonna**: Coulomb ha indagato la forza dei raggi sotto flessione, proponendo che il fallimento si verifica quando lo stress traslitto raggiunge un valore critico. La sua analisi della struttura di bloccaggio delle colonne, sebbene meno sofisticata di Euler's, affrontava aspetti pratici come il carico eccentrico e le imperfezioni materiali che la teoria idealizzata di Euler trascurava.

L'eredità di Coulomb non si limita a formule specifiche ma alla sua metodologia: unendo meccanica analitica con validazione sperimentale e ragionamento geometrico. Il suo lavoro ha dimostrato che la meccanica razionale potrebbe essere applicata a problemi di ingegneria reali, influenzando l'orientamento pratico del Politecnico École e stabilendo meccanica ingegneristica come disciplina distinta dalla matematica pura.

Il XIX secolo ha assistito ad una notevole trasformazione nel trattamento matematico della meccanica, passando dall'analisi discreta delle particelle e dei corpi rigidi al trattamento continuo dei solidi deformabili, che è quasi interamente un risultato francese, emergente dal fertile ambiente intellettuale del nuovo *École Polytechnique* e *École des Ponts et Chaussées*Nel corso di alcuni decenni, una costellazione di geniali matematici e ingegneri ha stabilito le basi teoriche su cui poggia tutta l'analisi strutturale moderna.

COPIA DI REVISIONE

10.3.2.2 Lagrange (1736-1813) e la Fondazione analitica

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), (§6.7.5) anche se addestrato a Torino, ha trascorso i suoi anni più produttivi a Parigi e divenne professore presso il Politecnico di École alla sua fondazione. *Analitica medica* (1788) (Lagrange, 1788 PDF) meccanica rivoluzionaria sostituendo ragionamenti geometrici con metodi puramente analitici, di particolare importanza per la meccanica strutturale sono stati:

Per i dettagli analitici, consultare §24.2.3

1. **Il principio del lavoro virtuale**: L'elegante formulazione del lavoro virtuale di Lagrange ha fornito la base per i metodi energetici nell'analisi strutturale, dimostrando che per un sistema in equilibrio, il lavoro virtuale svolto da tutte le forze attraverso qualsiasi spostamento virtuale compatibile è zero:

$$\delta W = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

   Questo principio sarebbe poi diventato fondamentale per il metodo di spostamento e l'analisi degli elementi finiti.
2. **Coordinate generalizzate**: L'introduzione di coordinate generalizzate di Lagrange liberava meccanica da vincoli geometrici, consentendo l'analisi di sistemi complessi attraverso coordinate minime.
3. **Il Calcolo delle Variazioni**: Sebbene sviluppato in precedenza da Euler, Lagrange sistematizzava metodi variazionali, che si rivelerebbe essenziale per la formulazione di problemi di valore limite nell'elasticità.

L'approccio analitico di Lagrange ha profondamente influenzato la prossima generazione di matematici francesi, stabilendo la metodologia con la quale si svilupperebbero le meccaniche continuum.

10.3.2.3 Metodi matematici di Fourier(1768-1830)

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), un altro apparecchio al Politecnico di École, ha dato il suo contributo primario attraverso il suo *La storia della vita* (1822) (Fourier, 1822)Mentre si concentrava sulla conduzione del calore, il lavoro di Fourier aveva profonde implicazioni per la meccanica:

1. **Equazioni differenziali parziali**: Fourier ha dimostrato come i fenomeni fisici possano essere descritti da equazioni differenziali parziali con condizioni di confine appropriate — una metodologia che sarebbe stata trasferita direttamente ai problemi di elasticità.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

2. **Serie Fourier**: Il suo metodo di rappresentazione delle funzioni come serie infinita di funzioni trigonometriche forniva potenti strumenti per risolvere i problemi di valore limite nell'elasticità.
3. **Analisi dimensionale**: L'approccio sistematico di Fourier alle dimensioni fisiche ha influenzato la formulazione di costanti elastiche e proprietà materiali.

Anche se Fourier non ha lavorato direttamente sull'elasticità, il suo quadro matematico si è rivelato indispensabile per gli sviluppi successivi nella meccanica continuum.

10.3.2.4 Cauchy (1789-1857) e il concetto di stress

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) (§6.7.6) è il principale architetto della teoria matematica dell'elasticità, durante il suo mandato al Politecnico di École (1816-1830), produsse una serie di memorie che stabilirono l'elasticità come una rigorosa scienza matematica (Cauchy, 1827; Cauchy, 1828)Il suo contributo più profondo è stato l'introduzione del tenore di stress — un balzo concettuale che ha risolto due secoli di confusione sulla natura delle forze interne nei solidi.

La pre-storia: Forza senza stress

Prima del Cauchy, filosofi naturali e ingegneri hanno lavorato con *forze su sezioni* senza un chiaro concetto di stress come una quantità intensiva a un certo punto. Galileo, nella sua analisi del fascio cantilever (1638), ha parlato della "resistenza assoluta' di una sezione trasversale—una forza totale, non un'intensità distribuita. (1686) e Parent (1713) affinata la teoria del fascio di Galileo riconoscendo che i «fibri» su un lato dell'asse neutro sono in tensione mentre quelli dall'altro sono in compressione, ma sono ancora concepiti come proprietà della sezione nel suo insieme.

Coulomb (1773), nella sua analisi di travi e muri di contenimento, ha fatto il passo cruciale di considerare il *distribuzione* di forze in una sezione e ha introdotto l'idea che il fallimento si verifica quando si raggiunge un'intensità critica. Eppure anche Coulomb non ha avuto un quadro generale per descrivere lo stato della forza interna in un punto arbitrario su un piano arbitrario attraverso un solido.

La difficoltà fondamentale è stata questa: a differenza delle forze esterne, che agiscono su punti definiti o su superfici definite, le forze interne dipendono da *che taglio immaginario* La forza trasmessa attraverso un piano orizzontale attraverso un punto differisce, in generale, dalla forza trasmessa attraverso un piano verticale attraverso lo stesso punto. Come si può caratterizzare lo "stato di forza interna" in un punto in cui la risposta dipende da quale piano si considera?

Risoluzione del Cauchy: Il Tensore di Stress

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Per i dettagli analitici, consultare §O.2.2

Il genio di Cauchy era riconoscere che questa apparente complessità nasconde una semplicità di fondo. (Cauchy, 1822; Cauchy, 1823), ha introdotto il concetto del *vettoriale di trazione* $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})}$: la forza per area unitaria trasmessa su una superficie immaginaria con unità normale $\mathbf{n}$. Il vettore di trazione dipende sia dal punto in questione che dall'orientamento della superficie.

Cauchy allora ha dimostrato, da una bella argomentazione che coinvolge l'equilibrio di un tetraedro infinitesimale, che il vettore di trazione su *qualsiasi* aereo può essere calcolato dai vettori di trazione su *tre* In particolare, se conosciamo le trazioni su piani perpendicolari alle x, ye z Assi, possiamo trovare la trazione su qualsiasi piano con una semplice operazione lineare.

Figura 10.1: L'argomentazione del tetraedro di Cauchy. Un tetraedro infinitesimale è tagliato dal corpo, con tre facce perpendicolari agli assi di coordinate e un volto inclinato con unità normale $\mathbf{n}$. Equilibrio del tetraedro, come la sua dimensione si restringe a zero, cede il rapporto $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$.

Il Cauchy Tetrahedron Argomento

Considerare un infinito tetraedro taglio da interno di un corpo (Figura 10.2). Tre facce sono perpendicolari alle assi coordinate, con aree dA_x, dA_y, dA_z; la quarta faccia è un piano obliquo con unità esterna normale $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ e zona dA. Per geometria:

$$dA_x = n_x\, dA, \quad dA_y = n_y\, dA, \quad dA_z = n_z\, dA$$

I vettori di trazione sui tre volti coordinati sono $-\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_x)}$, $-\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_y)}$, $-\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_z)}$ (negativo perché le normali esterne indicano nelle direzioni di coordinate negative per questi volti). $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})}$.

L'equilibrio della forza richiede (neglecting forze del corpo, che scalano come volume $\sim dA^{3/2}$ e diventare trascurabile rispetto alle forze superficiali $\sim dA$ come il tetraedro si restringe):

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} dA - \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_x)} dA_x - \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_y)} dA_y - \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_z)} dA_z = \mathbf{0}$$

Sostituire le relazioni geometriche e dividere da dA:

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = n_x \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_x)} + n_y \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_y)} + n_z \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_z)}$$

Questo è **Il teorema del Cauchy**: la trazione su qualsiasi aereo è *funzione lineare* dell'unità normale. Definire il *tenore di stress* $\boldsymbol{\sigma}$ come la matrice le cui colonne sono i vettori di trazione sui piani di coordinate:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

COPIA DI REVISIONE

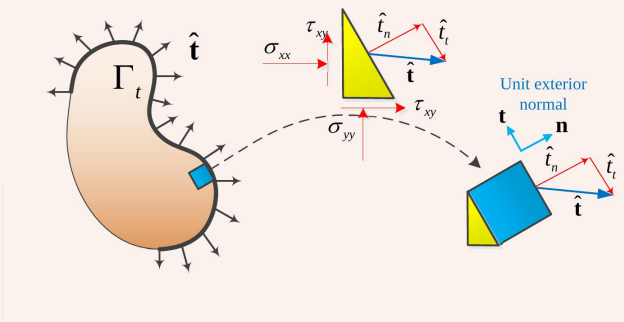
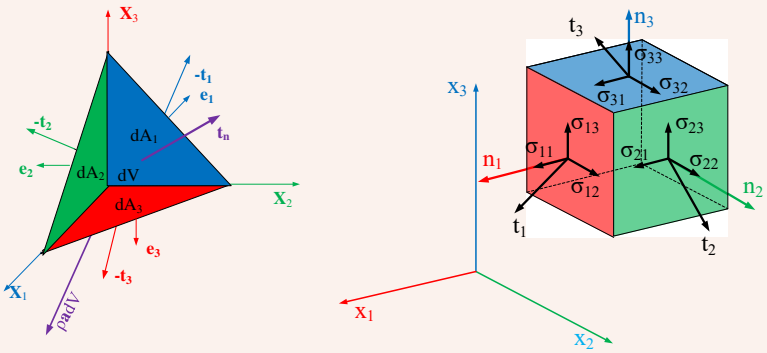


Figura 10.2: Forze di superficie

equazione (10.3.2.4) diventa:

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$$

Questa singola equazione incapsula la risoluzione di Cauchy del puzzle del duecento. *argomento in discussione* (Fig. 10.3): considerare un tetraedro infinitesimale con tre facce allineate con i piani di coordinate–ciascuna che trasporta i componenti di stress corrispondenti σ_{ij}- e una faccia obliqua ABC con unità esterna normale $\boldsymbol{n}$ e zona dA. Come il tetraedro si restringe a un punto, l'equilibrio delle forze in ogni direzione di coordinate richiede che la trazione $\boldsymbol{t}$ sul volto obliquo essere espressamente espressa esclusivamente in termini di trazioni sui tre volti coordinati—siielding precisamente il rapporto lineare (10.3.2.4). Il tenore di stress $\boldsymbol{\sigma}$ caratterizza completamente lo stato della forza interna ad un punto; la trazione su qualsiasi piano attraverso quel punto è ottenuta dal funzionamento lineare (10.3.2.4). Stress non è né scalare né un vettore ma un *tenore*—una mappa lineare da vettori normali unità $\boldsymbol{n}$ a vettori di trazione $\boldsymbol{t}$.



(a) Tetrahedron (b) Stresses

Figura 10.3: Cauchy: tetraedro allo stress

COPIA DI REVISIONE

Sinmetria della tensione di corda

Considerando l'equilibrio del momento del tetraedro infinitesimale (o, equivalente, un cubo infinitesimale), il Cauchy ha dimostrato che il tenore di stress è simmetrico:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

Ciò riduce il numero di componenti indipendenti di stress da nove a sei. La simmetria ha profonde conseguenze: garantisce l'esistenza di tre componenti di stress reciprocamente perpendicolari *direzioni principali* lungo il quale la trazione è puramente normale (senza cesoia), con corrispondente *stress principali* σ_1, σ_2, σ_3.

Le Equazioni Fondamentali

Con il tenore di stress in mano, Cauchy ha derivato le equazioni fondamentali della meccanica continuum:

1. **Equazioni di Equilibrio** (in assenza di forze del corpo):

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

   con equazioni analoghe per la y e z indicazioni. In notazione compatta: $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$.
2. **Relazioni di spostamento** (per piccole deformazioni):

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

3. **Relazioni costitutive**: Cauchy inizialmente propose una teoria molecolare relativa allo stress, anche se la sua formulazione sarebbe stata perfezionata dai ricercatori successivi.

Rappresentanza grafica di Mohr (1882)

Il tenore di stress, per tutta la sua eleganza, rimase un po' astratto per gli ingegneri praticanti. ha fornito una brillante interpretazione grafica che ha reso accessibile il concetto di tenore (Mohr, 1882b). **Il cerchio di Mohr** rappresenta tutte le possibili combinazioni di stress normali e di taglio su piani attraverso un punto come punti su un cerchio (o, in tre dimensioni, su tre cerchi).

Prestazioni principali $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, lo stress normale σ e stress della cinghia τ su qualsiasi piano soddisfare:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 \leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Lo stress massimo della cinghia si verifica sugli aerei 45 alle direzioni principali e uguale $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$Il cerchio di Mohr divenne uno strumento indispensabile per gli ingegneri, consentendo una rapida determinazione grafica delle sollecitazioni su piani arbitrari e formando la base per criteri di guasto nella meccanica della plasticità e della frattura.

Significato storico

L'introduzione del tenore di stress di Cauchy rappresentava una rottura completa dall'approccio del XVIII secolo, piuttosto che studiare elementi strutturali specifici (api, colonne), formulava equazioni generali di campo applicabili a qualsiasi mezzo elastico continuo. Il salto concettuale——riconoscendo che lo stress è un tenore, non un vettore— era forse il singolo progresso più importante nella storia della meccanica continuum.

Come osservava Truesdell, il lavoro di Cauchy trasformò la meccanica da una scienza di *forze* a una scienza *campi*. Lo stato di un corpo continuo è caratterizzato non da forze discrete a punti discreti, ma da campi tensori che variano continuamente attraverso lo spazio. Questo punto di vista teoretico del campo, prima raggiunto per lo stress, sarebbe in seguito esteso a tensione, temperatura, velocità e tutte le altre quantità di fisica continuum.

Il tenore di stress rimane il fondamento di tutte le moderne analisi strutturali: se si utilizzano metodi analitici, elementi finiti o dinamiche molecolari, il tenore di stress del Cauchy fornisce il linguaggio per descrivere le forze interne.

10.3.2.5 Rapporto di Poisson (1781-1840) e semplificazione di Cauchy

Siméon Denis Poisson (1781-1840) (§6.7.2), un collega di Cauchy al Politecnico di École, ha dato diversi contributi cruciali alla teoria dell'elasticità (Poisson, 1829):

Il rapporto di Poisson:

Poisson ha scoperto che quando una barra elastica è allungata longitudinalmente, si contrae lateralmente, e il rapporto tra sforzo laterale e longitudinale è una costante del materiale:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{\text{lateral}}}{\varepsilon_{\text{longitudinal}}}$$

Inizialmente prediceva (in modo errato, basato su modelli molecolari) che $\nu = 1/4$ Anche se questo valore specifico era sbagliato, il concetto di rapporto di Poisson divenne fondamentale per la teoria dell'elasticità.

Equazioni per i materiali isotropici:

Poisson semplifica le equazioni del Cauchy per i materiali isotropici, riducendo il numero di costanti elastiche indipendenti a due. Per un materiale isotropico, le relazioni tra stress e trazione prendono la forma:

$$\sigma_{xx} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{xx}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove λ e μ sono le costanti Lamé (anche se questa notazione è venuta più tardi).

Teoria del piatto:

Poisson sviluppò anche la teoria delle piastre elastiche, estendendo la teoria del fascio a due dimensioni e derivando l'equazione differenziale di governo per la deflettorazione della piastra.

Per i dettagli analitici, consultare Capitolo 34

10.3.2.6 Navier's (1785-1836) Sintesi e applicazione

Claude-Louis-Marie-Henri Navier (1785-1836)§6.7.3 occupa una posizione unica sia come teoretico rigoroso che come ingegnere pratico; dopo essersi diplomato al Politecnico di École, divenne professore all'École des Ponts et Chaussées, dove insegnò dal 1819 fino alla sua morte.

Le Equazioni Navier:

Indipendentemente dal Cauchy e dall'utilizzo di metodi diversi, Navier ha derivato le equazioni fondamentali dell'elasticità, il suo approccio, basato sulle forze molecolari tra i punti materiali, ha portato alle equazioni di equilibrio in termini di spostamenti (le equazioni Navier):

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

dove $\mathbf{u}$ è il vettore di spostamento e $\mathbf{f}$ rappresenta le forze del corpo.

Ponte tra teoria e pratica:

Il grande successo di Navier fu quello di tradurre la matematica astratta di Cauchy e Poisson in applicazioni di ingegneria pratica. *Résumé des Leçons* (Navier, 1826) è diventato il testo standard per gli studenti di ingegneria, presentando:

- Teoria della fascio derivata dalle equazioni generali di elasticità
- Metodi per il calcolo delle sollecitazioni e delle deflettori nelle strutture pratiche
- Analisi di travi continue e integrate (discusso in dettaglio nella sezione 11.3.1)
- Applicazioni a ponti, edifici e macchine

Navier ha dimostrato che la sofisticata matematica della meccanica continuum potrebbe produrre formule di progettazione pratiche.

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = q(x)$$

COPIA DI REVISIONE

divenne uno strumento standard per gli ingegneri strutturali, un diretto discendente delle equazioni di campo di Cauchy, ma abbastanza semplice per il calcolo pratico.

10.3.2.7 Lamé's (1795-1870) Costanti elastici

Gabriel Lamé (1795-1870), professore presso il Politecnico di École e successivamente École des Ponts et Chaussées, portò al rigore matematico e alla visione fisica della teoria dell'elasticità (Lamé, 1852).

Le Costanti Lamé:

Lamé riformula le equazioni costitutive per i materiali isotropici in termini di due costanti elastiche che ora portano il suo nome, λ e μ. La legge generalizzata di Hooke diventa:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

dove δ_{ij} è il delta del Kronecker e la convenzione di sommazione di Einstein si applica.

Queste costanti si riferiscono a parametri di ingegneria più familiari:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Metodi di soluzione:

Lamé ha sviluppato metodi sistematici per risolvere problemi di elasticità, in particolare per i corpi con simmetria geometrica (sfere, cilindri), il cui lavoro su cilindri a parete spessa sotto pressione rimane una soluzione classica, ampiamente utilizzata nella progettazione dei vasi di pressione.

10.3.2.8 Saint-Venant (1797-1886) e il metodo semi-inverso

Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886) (§6.7.8) rappresenta il culmine della teoria dell'elasticità francese del XIX secolo, laureato in politecnico École, ha trascorso la maggior parte della sua carriera presso l'École des Ponts et Chaussées, dove ha curato e annotato la terza edizione di Navier *Résumé* (Navier, 1864 PDF).

Il metodo semi-inverso:

La grande innovazione di Saint-Venant è stata il metodo semi-inverso per risolvere i problemi di elasticità, piuttosto che risolvere il sistema completo di equazioni differenziali con condizioni di confine (spesso impossibile), egli avrebbe:

1. Assumere una forma per lo stress o il campo di spostamento basato sull'intuizione fisica

COPIA DI REVISIONE

2. Verificare che questa ipotesi soddisfi l'equilibrio e la compatibilità
3. Determinare i rimanenti sconosciuti dalle condizioni di confine

Questo approccio pragmatico ha fornito soluzioni a problemi precedentemente intrattabili.

Principio di San Salvatore:

Forse il suo contributo più influente era il principio che portava il suo nome:

santo-venant1855memoria

Se le forze che agiscono su una piccola parte della superficie di un corpo elastico sono sostituite da un altro sistema statically equivalente di forze che agiscono sulla stessa parte della superficie, questa ridistribuzione del carico produce cambiamenti sostanziali nelle sollecitazioni localmente ma ha un effetto trascurabile sulle sollecitazioni a distanze che sono grandi rispetto alle dimensioni lineari della superficie su cui le forze sono cambiate.

Questo principio giustificava l'uso di condizioni limite semplificate nei problemi pratici e divenne fondamentale per l'analisi ingegneristica.

Soluzioni Classiche:

Le memorie di Saint-Venant hanno fornito soluzioni definitive a:

- **Torsione di alberi non circolari** (Saint-Venant, 1855a): Egli ha dimostrato che le sezioni trasversali non rimangono aeroplane durante la torsione (riscaldamento), derivanti dalle equazioni e soluzioni di governo per varie forme di sezione trasversale.
- **Bending of Beams**: Ha affinato la teoria del fascio, la contabilità della deformazione della tosapa e la correzione alla teoria elementare.
- **Flessione, Tensione e compressione di barre prismatiche**: Il suo trattamento completo ha unificato varie condizioni di carico in un quadro matematico comune.

Per i dettagli analitici, consultare §23.2

10.3.2.9 Metodi energetici di Clapeyron (1799-1864)

Benoît-Paul-Émile Clapeyron (1799-1864), sebbene più noto ai termodinamici, contribuì a far parte della meccanica strutturale attraverso il suo lavoro sui metodi energetici (Clapeyron, 1834).

COPIA DI REVISIONE

Teorema di Clapeyron:

Il suo teorema sull'energia elastica (discusso nel dettaglio nella sezione 48.1.6.1) afferma che l'energia di tensione in un corpo elastico equivale a metà del lavoro svolto dalle forze esterne:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}\, dV = \frac{1}{2}\int_S \mathbf{t}\cdot\mathbf{u}\, dS + \frac{1}{2}\int_V \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\, dV$$

Questo risultato è diventato fondamentale per i metodi energetici nell'analisi strutturale.

Equazione a tre piani:

Il lavoro successivo di Clapeyron (Clapeyron, 1857) su travi continue (Sezione 11.3.2) ha fornito strumenti pratici che hanno colmato il divario tra la teoria dell'elasticità astratta e la pratica dell'ingegneria strutturale.

10.3.2.10 Il successo francese in prospettiva

I contributi di questi matematici e ingegneri francesi, concentrati in un periodo notevolmente breve (circa 1820-1860), stabilirono la meccanica e la teoria dell'elasticità continuum come scienze matematiche rigorose.

1. **Sostegno istituzionale**: Il Politecnico di École ha fornito un ambiente unico in cui matematici e ingegneri hanno lavorato fianco a fianco, con una ricerca esplicitamente valutata accanto all'insegnamento.
2. **Sofisticazione matematica**: La tradizione francese dell'analisi matematica, che deriva da Lagrange, ha fornito gli strumenti necessari per la formulazione e la risoluzione delle equazioni differenziali parziali di elasticità.
3. **Motivazione di ingegneria**: Le esigenze pratiche dell'ingegneria civile, in particolare della costruzione ferroviaria e dei ponti, hanno fornito sia la motivazione che la validazione per gli sviluppi teorici.
4. **Continuità intellettuale**: Ogni generazione ha costruito sistematicamente sul lavoro dei suoi predecessori, con gli studenti che diventano professori e prolungano il lavoro dei loro mentori.

Nel 1860 le basi teoriche della meccanica continuum erano essenzialmente complete; la sfida per il resto del secolo sarebbe quella di tradurre questo quadro matematico in metodi pratici per l'analisi strutturale —metodo accessibili agli ingegneri praticanti senza richiedere la padronanza della fisica matematica avanzata.

COPIA DI REVISIONE

10.4 Il quadro matematico completo

Dopo aver esaminato lo sviluppo storico e i principali protagonisti della meccanica del continuo, presentiamo ora le basi matematiche dell'intera teoria. Le leggi fondamentali di bilancio, ossia conservazione della massa, quantità di moto ed energia, trascendono ogni materiale particolare ed esprimono principi fisici universali. Combinate con le relazioni costitutive specifiche dei materiali, discusse nella sezione successiva, esse formano un quadro matematico completo per descrivere il comportamento dei mezzi continui.

La formulazione di queste leggi di equilibrio nella loro forma moderna si è verificata gradualmente durante tutto il XIX secolo, anche se il loro contenuto fisico è stato compreso in precedenza. Il lavoro di Cauchy nel 1820 ha stabilito il equilibrio di slancio lineare nella forma che riconosciamo oggi., anche se formulato nel 1840-1850s da ClausiusThomson (Signore Kelvin), e altri, non sono stati sistematicamente incorporati in meccanica continuum fino al XX secolo opera di Duhem Truesdell e Coleman.

10.4.1 Euler e la Conservazione della Messa

Il principio di conservazione di massa afferma che la massa non può essere creata né distrutta all'interno di un continuum, (Euler, 1757b) (Euler, 1757a). Per un volume di materiale $V(t)$ delimitato da superficie $S(t)$ muovendosi con il materiale, questo principio è espresso come:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho \, dV = 0$$

dove $\rho(\mathbf{x}, t)$ è la densità di massa in posizione $\mathbf{x}$ e tempo t.

Applicando il teorema di trasporto di Reynolds e notando che l'integrale deve sparire per qualsiasi volume materiale arbitrario produce la forma locale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

dove $\mathbf{v}$ è il campo di velocità. *equazione di continuità**.

Per un materiale incompressibile (ρ = constant), questo semplifica:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Nella descrizione lagrangiana, seguendo le particelle materiali, la conservazione della massa assume la forma particolarmente elegante:

$$\rho_0 \, dV_0 = \rho \, dV$$

dove il sottoscritto 0 indica le quantità di configurazione di riferimento, o equivalente:

$$\rho_0 = \rho J$$

dove $J = \det(\mathbf{F})$ è il giacobino del gradiente deformazione tenore $\mathbf{F}$.

COPIA DI REVISIONE

10.4.2 Cauchy (1789-1857) e il bilanciamento del moto lineare

Il bilanciamento del moto lineare rappresenta la seconda legge di Newton applicata ad un continuum; per un volume materiale, il tasso di cambiamento di slancio equivale alla somma delle forze applicate:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho \mathbf{v}\, dV = \int_{S(t)} \mathbf{t}\, dS + \int_{V(t)} \rho \mathbf{b}\, dV$$

dove $\mathbf{t}$ è il vettore di trazione (forza per area unitaria) sulla superficie, e $\mathbf{b}$ rappresenta le forze del corpo per massa unitaria (come la gravità).

La comprensione fondamentale del Cauchy era riconoscere che il vettore di trazione a un punto dipende linearmente dall'unità esterna normale $\mathbf{n}$ alla superficie:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$$

dove $\boldsymbol{\sigma}$ è il tenore di stress del Cauchy. Questa relazione, conosciuta come *Il principio di stress del Cauchy*, è uno dei capisaldi della meccanica continuum.

Applicando il teorema divergenza e localizzando la forma integrale, si ricavano le equazioni di movimento del Cauchy:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}$$

dove D/Dt denota il materiale derivato del tempo. In forma di componente (utilizzando la sommazione di Einstein):

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i$$

Per problemi in elastostatica (senza accelerazione), questo riduce a:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

le equazioni di equilibrio che Cauchy, Navier, e i loro contemporanei derivarono nel 1820.

10.4.3 Bilancia del Momento angolare

L'equilibrio del momento angolare afferma che il tasso di cambiamento di slancio angolare di un volume materiale è uguale ai momenti applicati:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}\, dV = \int_{S(t)} \mathbf{x} \times \mathbf{t}\, dS + \int_{V(t)} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{b}\, dV$$

In assenza di stress di coppia distribuiti (copie corporee), questo principio porta ad un risultato notevolmente semplice ma profondo: il tenore di stress caucasico deve essere simmetrico:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad \text{or} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Questa condizione di simmetria, riducendo i nove componenti indipendenti del tenore di stress a sei, è stato riconosciuto dal Cauchy ed è fondamentale per tutti gli sviluppi successivi nella teoria dell'elasticità, il che implica che lo stato di stress ad un certo punto può essere completamente descritto da tre normali stress e tre sollecitazioni della cinghia.

La simmetria del tenore di stress ha implicazioni profonde, che garantisce l'esistenza di tre direzioni di stress principali ortogonali reciprocamente ortogonali. in ogni punto, allineati con gli autovettori di σ, lungo il quale solo normali stress agiscono.

10.4.4 Clausius (1822-1888), Thomson (1824-1907), e Duhem (1861-1916) Leggi termodinamiche

10.4.4.1 Prima legge (Energy Balance):

Rudolf Clausius (Clausius, 1850; Clausius, 1854; Clausius, 1879) e William Thomson (Thomson, 1848; Thomson, 1851; Thomson, 1855) e il mondo (Duhem, 1891; Duhem, 1911; Duhem, 1893).

La prima legge della termodinamica estende il bilancio energetico meccanico per includere gli effetti termici. Per un volume di materiale, il tasso di cambiamento dell'energia totale (cinetica più interna) è uguale al tasso di lavoro svolto più il tasso di alimentazione termica:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho\left(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2+e\right) dV = \int_{S(t)} \mathbf{t}\cdot\mathbf{v}\, dS + \int_{V(t)} \rho\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}\, dV - \int_{S(t)} \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\, dS + \int_{V(t)} \rho r\, dV$$

dove e è l'energia interna specifica per massa unitaria, $\mathbf{q}$ è il vettore del flusso di calore, e r è l'alimentazione termica per massa unitaria.

Utilizzando il principio di stress del Cauchy e applicando il teorema divergente produce la forma locale:

$$\rho\frac{De}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \nabla\cdot\mathbf{q} + \rho r$$

dove $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T)$ è il tasso di deformazione tensore (la parte simmetrica del gradiente velocità).

Il termine $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$ rappresenta la potenza di stress, il tasso a cui gli stress funzionano per volume unitario, per materiali elastici sottoposti a deformazioni reversibili, questo lavoro viene immagazzinato come energia elastica e può essere completamente recuperato.

Per problemi puramente meccanici in cui gli effetti termici sono trascurabili, la prima legge si riduce a una dichiarazione sull'energia meccanica. In elastostatica, dove l'energia cinetica è zero e i processi sono quasi-statici, il lavoro svolto dalle forze esterne viene immagazzinato come energia di tensione:

$$W_{\text{ext}} = U$$

Questo equilibrio energetico è in grado di sostenere il teorema di Clapeyron e i principi variazionali che sono diventati centrali all'analisi strutturale.

COPIA DI REVISIONE

10.4.5 Seconda Legge (Diseguaglianza intropia):

Clausius ha formulato la seconda legge della termodinamica (diseguaglianza dell'introduzione)

La seconda legge della termodinamica impone restrizioni fondamentali sul comportamento materiale attraverso la disuguaglianza Clausius-DuhemNella sua forma locale, questo afferma che il tasso di produzione entropia deve essere non negativo:

$$\rho \frac{D\eta}{Dt} - \frac{\rho r}{\theta} + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) \geq 0$$

dove η è l'entropia specifica per massa unitaria e θ è la temperatura assoluta.

Utilizzo della prima legge per eliminare r e l'espansione dei termini rende la disuguaglianza di dissipazione:

$$\rho \left(\frac{D\psi}{Dt} + \eta \frac{D\theta}{Dt} \right) - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \leq 0$$

dove $\psi = e - \theta\eta$ è l'energia libera Helmholtz.

Per materiali elastici sottoposti a processi isotermici (θ = constant), la seconda legge richiede che il lavoro di stress corrisponda al tasso di cambiamento di energia libera:

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = \rho \frac{D\psi}{Dt}$$

Questa restrizione termodinamica fornisce la base teorica per il postulato di Green che i materiali elastici ammettono una funzione di densità energetica di sforzo—un rapporto che i teorici molecolari hanno lottato per derivare da principi primi. L'approccio termodinamico affianca elegantemente i dettagli a livello molecolare, affermando che lo stoccaggio e la reversibilità di energia bastano a garantire l'esistenza di un potenziale.

10.4.6 Sviluppo storico e Sintesi moderna

La formulazione di queste leggi di equilibrio si è evoluta in oltre un secolo:

- **1820 (Cauchy, Navier)**: Stabilito il bilanciamento del moto lineare per i solidi elastici, derivante dalle equazioni di equilibrio dello stress. Riconosciuto la simmetria del tenore di stress.
- **1840-1850 (Clausius, Thomson, Rankine)**: Formulato le prime e le seconde leggi della termodinamica per sistemi macroscopici, inizialmente nel contesto dei motori termici e dei cicli termodinamici.
- **1850-1860 (Saint-Venant, Thomson)**: Incorporando concetti termodinamici in meccanica continuum, anche se principalmente per fluidi e conduzione termica.

COPIA DI REVISIONE

- **1900s-1910s (Duhem)**: Termodinamica sistematicamente formulata dei mezzi continui, introducendo il concetto di variabili interne per processi dissipativi.
- **1960 (Truesdell, Coleman, Noll)**: Stabilito il moderno quadro termomeccanico, che mostra come la seconda legge limita le relazioni costitutive attraverso la disuguaglianza Clausius-Duhem e la procedura Coleman-Noll.

La sintesi moderna, sviluppata nel XX secolo, ha dimostrato che queste leggi di equilibrio, unite a relazioni costitutive adeguatamente formulate (Sezione 10.5), forniscono un quadro completo e coerente per la meccanica continuum. Le leggi di equilibrio sono universali, si applicano a tutti i media continui, mentre le relazioni costitutive catturano il comportamento specifico materiale.

Per la teoria dell'elasticità, l'intuizione chiave è che le leggi di equilibrio sono insufficienti per determinare la risposta di un corpo. Tre equazioni di equilibrio di slancio forniscono solo tre equazioni per i sei componenti indipendenti di stress (a causa di simmetria). Il divario è chiuso da relazioni costitutive che collegano lo stress alla deformazione, il soggetto della sezione successiva.

10.5 Teoria costitutiva: comportamento materiale

Le leggi di equilibrio presentate nella sezione precedente si applicano universalmente a tutti i mezzi continui – esprimono principi fisici fondamentali che trascorrono il tipo materiale. Tuttavia, queste leggi non possono prevedere come un materiale specifico risponderà alle forze applicate. L'acciaio e la gomma soddisfano le stesse equazioni di equilibrio di slancio, ma si comportano radicalmente in modo diverso in condizioni di carico identiche. *relazioni costitutive*— espressioni matematiche che collegano quantità cinematiche (deformazione), tasso di tensione) a quantità cinetiche (stress, flusso di calore).

Lo sviluppo della teoria costitutiva rappresenta uno dei grandi successi intellettuali della meccanica continuum, il dibattito del XIX secolo tra approcci molecolari e fenomenologici ha portato alla fine a principi generali che guidano la modellazione costitutiva su tutti i materiali., simmetria materiale, consistenza termodinamica— sormontato gradualmente da ragionamenti teorici e da osservazioni sperimentali (Truesdell e Noll, 1965).

10.5.1 Il quadro generale

Una relazione costitutiva per un materiale elastico esprime lo stress come funzione di deformazione.

$$\sigma = \hat{\sigma}(\mathbf{F}, \mathbf{X})$$

dove $\mathbf{F}$ è il tenore di gradiente di deformazione, $\mathbf{X}$ denota il punto materiale, e $\hat{\sigma}$ è la funzione costitutiva.

COPIA DI REVISIONE

Questa affermazione apparentemente semplice nasconde domande profonde:

- Quale forma dovrebbe la funzione $\hat{\sigma}$ Prendere?
- Quali restrizioni impone la fisica a questa funzione?
- Come simmetria materiale limita la risposta?
- Quando può derivare lo stress da un potenziale (funzione di energia a catena)?

Le risposte a queste domande sono emerse da una combinazione di analisi teoriche, osservazione sperimentale e ragionamento termodinamico, e ora esaminiamo i principi chiave che governano le relazioni costitutive.

10.5.2 Noll (1925-2017) e l'oggettività: Il principio dell'indifferenza della struttura dei materiali

Un requisito fondamentale per qualsiasi relazione costitutiva è *oggettività* or *telaio materiale indifferenza*: la risposta materiale deve essere indipendente dall'osservatore; se giriamo il laboratorio o superiamo un movimento rigido del corpo, le forze interne all'interno del materiale non devono cambiare. (Noll, 1958), fornisce restrizioni essenziali alla forma di relazioni costitutive.

Matematicamente, consideri due osservatori collegati da una rotazione dipendente dal tempo $\mathbf{Q}(t)$ e traduzione $\mathbf{c}(t)$:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{c}(t)$$

Il principio di oggettività richiede che lo stress del Cauchy si trasformi come:

$$\sigma^* = \mathbf{Q}\sigma\mathbf{Q}^T$$

Questo requisito apparentemente innocuo ha implicazioni profonde, il che implica che lo stress non può dipendere direttamente dal gradiente deformazione $\mathbf{F}$ (che non è obiettivo), ma solo su misure oggettive di deformazione. La misura corretta è il giusto tenore di deformazione del Cauchy-Green:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$$

o il suo inverso $\mathbf{C}^{-1}$, o il tenore di ceppo Green-Lagrange:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$$

Per piccole deformazioni, dove $\mathbf{F} \approx \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u}$, questo riduce al tenore di ceppo infinitasimale familiare:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)$$

Il principio di oggettività fornisce quindi una guida fondamentale per la formulazione di relazioni costitutive: utilizzare solo misure cinetiche oggettive.

COPIA DI REVISIONE

10.5.3 Verde (1793-1841) e Iperelasticità

An *materiale elastico* è uno per il quale lo stress corrente dipende solo dalla deformazione corrente, indipendente dalla storia della deformazione o dal tasso di deformazione:

$$\sigma = \hat{\sigma}(\mathbf{F}) \quad \text{or} \quad \sigma = \hat{\sigma}(\mathbf{C})$$

Una classe più restrittiva è *iperelasticità* or *Materiali elastici*, per cui lo stress deriva da una funzione scalare di densità di energia di sforzo W:

$$W = W(\mathbf{C})$$

Lo stress viene quindi determinato da:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{\sqrt{J}}\mathbf{F}\frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}}\mathbf{F}^T$$

dove $J = \det(\mathbf{F})$.

Per piccole deformazioni, questo semplifica drammaticamente. Se $W = W(\boldsymbol{\varepsilon})$, allora:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$$

Questo è precisamente il postulato di Green dal 1839 (Green, 1839a)—che lo stress elastico può essere derivato da una funzione potenziale; ciò che Green ha introdotto fenomenologicamente è stato successivamente giustificato termodinamicamente: per deformazioni elastiche isotermiche, la libera energia Helmholtz serve come funzione di energia di tensione, e la seconda legge garantisce la sua esistenza.

La distinzione tra materiali elastici e iperelastici generali è cruciale:

- **Elastico generale**: $\sigma = \mathbf{f}(\varepsilon)$ con $\mathbf{f}$ arbitro
- **Iperanto**: $\sigma = \partial W/\partial \varepsilon$ con W una funzione scalare

I materiali iperelastici hanno una proprietà speciale: le relazioni tra stress e trazione sono simmetriche.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

allora l'iperelastica richiede:

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}} = C_{klij}$$

Questa simmetria, nota come *relazioni reciproche*—riduce il numero di costanti elastiche indipendenti; per un materiale elastico anisotropico generale, si potrebbe $6 \times 6 = 36$ componenti indipendenti C_{ijkl}. La simmetria di stress e di tensione riduce questo a 21, ma l'iperelastica (esistenza di W) la riduce ulteriormente a 21 costanti indipendenti per il caso più generale.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

10.5.4 Voigt (1850-1919) e simmetria dei materiali

I materiali reali possiedono spesso la struttura interna—latticestal, orientamento della fibra, stratificazione—che rende la loro risposta indipendente dalla direzione. *Simmetria dei materiali* La classificazione sistematica dei sistemi di cristallo e le loro simmetrie elastiche è stata stabilita da Woldemar Voigt nel suo trattato completo sulla fisica del cristallo (Voigt, 1910).

Una simmetria materiale è una rotazione $\mathbf{G}$ della configurazione di riferimento che lascia invariata la risposta materiale:

$$W(\mathbf{G}^T\mathbf{C}\mathbf{G}) = W(\mathbf{C})$$

Il set di tutte queste rotazioni forma il *gruppo di simmetria materiale*. Diversi gruppi di simmetria caratterizzano diverse classi materiali:

- **Triclinico** (senza simmetria): 21 costanti indipendenti
- **Monoclinico** (un piano di simmetria): 13 costanti indipendenti
- **Ortopedia** (tre piani di simmetria ortogonale): 9 costanti indipendenti
- **Transversely isotropic** (un asse di simmetria rotazionale): 5 costanti indipendenti
- **Isotropo** (tutte le rotazioni sono simmetrie): 2 costanti indipendenti

Per i materiali isotropici, quelli senza indicazioni preferite,W può dipendere solo dagli invarianti di $\mathbf{C}$ (o equivalente, di $\boldsymbol{\varepsilon}$). Per piccole deformazioni, la forma più generale è:

$$W = W(I_1, I_2, I_3)$$

dove $I_1 = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$, $I_2 = \frac{1}{2}[(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})^2 - \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2)]$, $I_3 = \det(\boldsymbol{\varepsilon})$.

Per elasticità lineare con piccoli ceppi, mantenendo solo i termini quadratici in tensione:

$$W = \frac{\lambda}{2}(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2)$$

che produce:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}$$

Questa è proprio la legge generalizzata di Hooke con costanti Lamé λ e μ— la relazione costitutiva che Lamé formulava nel 1852 e che domina la teoria dell'elasticità lineare;λ, μ) o equivalente (E, ν) sono il minimo richiesto per risposta elastica isotropica, precisamente la conclusione che le contraddizioni sperimentali della teoria molecolare forzate sulla scuola continuum.

10.5.5 Coleman (1930-1992) e Noll: Restrizioni termodinamiche

La seconda legge della termodinamica pone restrizioni fondamentali alle relazioni costitutive oltre quelle imposte dall'oggettività e dalla simmetria materiale. La disuguaglianza

COPIA DI REVISIONE

Clausius-Duhem, applicata ai materiali elastici sottoposti a deformazioni isotermiche, fornisce diversi requisiti critici. (Coleman e Noll, 1963).

1. Esistenza di energia di tensione: Per i processi isotermici, la seconda legge richiede che il lavoro di stress sia un perfetto differenziale, e questo equivale a richiedere che lo stress derivi da un potenziale, giustificando il postulato di Green dai principi termodinamici.

2. Convessità dell'energia di tensione: La funzione di energia di tensione $W(\varepsilon)$ deve essere convesso per la stabilità dei materiali. Matematicamente:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \xi_{ij} \xi_{kl} > 0 \quad \text{for all non-zero } \xi$$

Ciò assicura che la matrice tangente di rigidità sia definita positiva, una condizione necessaria per configurazioni di equilibrio stabili.

3. Restrizioni sulle costanti elastiche: Per elasticità lineare isotropica, la stabilità termodinamica richiede:

$$\mu > 0 \tag{10.1}$$
$$3\lambda + 2\mu > 0 \tag{10.2}$$

Questi si traducono a requisiti di ingegneria familiari:

$$E > 0 \quad \text{(positive Young's modulus)} \tag{10.3}$$
$$-1 < \nu < \frac{1}{2} \quad \text{(bounds on Poisson's ratio)} \tag{10.4}$$

Il bordo superiore $\nu < 1/2$ corrisponde al limite di incompressione, mentre $\nu > -1$ assicura energia positiva di sforzo. I materiali reali soddisfano questi limiti, con la maggior parte dei materiali di ingegneria che hanno $0 < \nu < 0.5$.

La teoria molecolare della teoria molecolare esclude la previsione della teoria inferiore $\nu = 1/4$ essere universali – gli esperimenti mostrano sughero vicino a 0, mentre la gomma si avvicina a 0,5. Il quadro termodinamico ospita questa variazione naturalmente, dove la teoria molecolare non poteva.

10.5.6 Prospettiva storica: dall'empiricismo alla teoria

Lo sviluppo della teoria costitutiva illustra l'interazione tra esperimento, teoria e astrazione matematica:

XVII-XVIII secolo (Hooke, Euler): Osservazione empirica della proporzionalità tra forza e deformazione. Legge di Hooke per le molle, generalizzata da Euler a travi e colonne.

1820-1840 (Navier, Cauchy, Poisson): Tentativi di derivare relazioni costitutive da modelli molecolari. $\nu = 1/4$) ma stabiliva il quadro matematico.

COPIA DI REVISIONE

1837-1839 (Green): Posto fenomenologico della funzione di energia da sforzo. Predicted due costanti elastiche, esperimento corrispondente. Resistenza dai meccanicisti francesi che volevano derivazione di primi principi.

1850s-1860s (Saint-Venant, Thomson, Bravais): Riconoscere che la struttura molecolare è più complessa di quanto si presume, aumentando l'accettazione dell'approccio continuum.

1960-1970 (Truesdell, Noll, Coleman) Termomeccanica razionale moderna. formulazione sistemica di oggettività, simmetria materiale e restrizioni termodinamiche.

La moderna comprensione sintetizza questi elementi storici: le relazioni costitutive devono soddisfare l'oggettività (indifferenza dei quadri), devono rispettare la simmetria dei materiali, devono essere termodinamicamente ammissibile, e per i materiali elastici, dovrebbero idealmente derivare da una funzione potenziale, che, piuttosto che dai dettagli molecolari, governano la modellazione costitutiva.

10.5.7 Connessione all'analisi strutturale

Per gli ingegneri strutturali del XIX secolo, la teoria costitutiva forniva il legame cruciale tra le equazioni di campo astratto di Cauchy e i calcoli pratici. Una volta che la relazione tra stress e stress per un materiale è stata stabilita, sia attraverso la funzione energetica di Green che le costanti di Lamé, gli ingegneri potrebbero:

1. Combinare relazioni cinematiche ($\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$)
2. Con relazioni costitutive ($\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}$)
3. Equazioni di equilibrio ($\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$)

per ricavare equazioni differenziali in termini di spostamento. Le equazioni di Navier rappresentano proprio questa combinazione per l'elastodinamica. Per le travi, lo stesso approccio ha dato origine all'equazione familiare $EI\frac{d^4y}{dx^4} = q(x)$.

Le relazioni costitutive colmano così il divario tra la teoria astratta del continuum e i metodi pratici di analisi strutturale—metodo che Navier, Clapeyron, e i loro successori si svilupperebbero per analizzare le strutture indeterminate, oggetto dei capitoli successivi.

10.5.8 Che cosa c'è in un nome? L'evoluzione della Meccanica e dei suoi praticanti

Che cosa si chiama rosa / da qualsiasi altro nome puzza di dolce—ma nelle scienze meccaniche, i nomi sono profondamente importanti. *meccanica continuum*, *elasticità*, *meccanica dei solidi*e *meccanica dei materiali* spesso vengono utilizzati in modo intercambiabile nella letteratura moderna, creando una notevole confusione, che riflette non solo la storia intellettuale, ma la trasformazione dell'identità professionale stessa: *filosofi naturali* e *ingegneri dell'architetto*

COPIA DI REVISIONE

del XVII secolo, attraverso l'emergere del professionista *ingegnere* e *meccanico* nel XIX secolo, alle discipline accademiche specializzate del XX secolo.

10.5.8.1 L'identità mutante dell'analista strutturale

Prima di comprendere l'evoluzione dei nomi disciplinari, dobbiamo apprezzare quanto radicalmente i praticanti stessi si siano trasformati.

L'era dell'apprendimento universale (1600-1790) Nel XVII e XVIII secolo, coloro che studiarono la forza delle strutture non possedevano un'identità professionale unificata. Galileo Galilei (1564-1642) era un *filosofo naturale*—un termine che comprende quello che ora ci separano nella fisica, nell'astronomia, nella matematica e nella meccanica; §7.2.2) apparve accanto alle osservazioni astronomiche e agli esperimenti sui corpi cadenti, tutti unificato sotto l'ombrello delle leggi della natura.

Robert Hooke (1635-1703) esemplifica ancora più sorprendentemente questo universalismo: fu contemporaneamente curatore di esperimenti per la Royal Society, architetto (disegnando edifici dopo il Grande Fuoco di Londra), microscopista e teorico meccanico. *ut tensio sic vis* (v. §6.6.6) non è apparso in un trattato sulla meccanica strutturale ma in un lavoro su molle e corpi elastici di ogni tipo.

In Francia, i soggetti interessati alla costruzione hanno tenuto il titolo *architetto* or *In questo caso*, ma non erano ancora le professioni specializzate che conosciamo oggi. Edme Mariotte (1620-1684, vedi §7.3.2.3) ha condotto esperimenti sulla pressione dell'acqua, sulla fisiologia vegetale e sulla rottura del fascio con la stessa struttura. si muoveva fluidamente tra posizioni come professore di matematica al Collège Royal, architetto e consulente per la costruzione di ponti. La distinzione moderna tra matematica pura, scienza applicata e pratica ingegneristica non esisteva ancora.

Anche Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806, vedi §10.3.2.1), scrivendo alla fine del XVIII secolo, annoiare il titolo *ingénieur militaire*—un ingegnere militare i cui doveri comprendevano il disegno di fortificazione, l'indagine e i compiti amministrativi accanto alle sue indagini teoriche; il suo memoriale sulla pressione terrestre e la forza del fascio è stato sottoposto all'Académie des Sciences non come esercizio accademico ma come guida pratica per la costruzione militare.

Non c'era campo chiamato *meccanica dei materiali* or *elasticità*— non c'era *meccanica* (broadly construed) e la sua applicazione a problemi pratici di costruzione. *La scienza dei sogni* (Bélidor, 1729) o *Architettura Idraulico* (Bélidor, 1737-1739), che riflette la fusione della conoscenza teorica con l'arte pratica.

Nascita dell'Ingegnere Professionale (1790-1850) La Rivoluzione francese e l'era napoleonica precipitarono una trasformazione decisiva. (1794) e l'École des Ponts et Chaussées (riorganizzato 1795) creò, per la prima volta, una formazione professionale sistematica per gli ingegneri, non più appresa attraverso l'apprendistato o l'auto-studio, ma attraverso una rigorosa formazione matematica. *Ingénieurs des ponts et chaussées* (ingegner di ponti e

COPIA DI REVISIONE

strade) o *ingénieurs militaires*, professionisti con percorsi di carriera definiti, conoscenze standardizzate e identità aziendale.

La generazione ha portato, in modo crocifisso, una ricerca matematica senza precedenti ai problemi strutturali. §6.7.3), anche se addestrato come ingegnere, possedeva abilità matematiche rivali matematici puri. *Résumé des Leçons* rappresentava una nuova sintesi: derivazione matematica rigorosa al servizio dell'applicazione ingegneristica. Navier e i suoi contemporanei hanno chiamato il loro campo *Micallique appliquée* (meccanica applicata), distinguerlo da *razione di mécanique* (meccanica razionale)— la teoria matematica astratta sviluppata da Lagrange e da altri.

Il termine *La sua essenza* (elasticità) emerse durante questo periodo per descrivere la teoria matematica della deformazione reversibile nei solidi. §6.7.6 e §10.3.2.4), anche se soprattutto un matematico, intitolato le sue memorie fondamentali su *l'equilibrio e il movimento di corpi elastici solidi o fluidi*. Entro il 1830, *corpo elastico* aveva acquisito significato tecnico: un solido continuo il cui stress dipende dalla tensione attraverso determinati rapporti matematici.

L'identità professionale è rimasta fluida. Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886, vedi §6.7.8) ha tenuto il titolo *Ingénieur des pontss et chaussées* Ma ha trascorso la sua carriera in gran parte nella ricerca teorica piuttosto che nei progetti di costruzione. Era un ingegnere? Un fisico matematico? I suoi contemporanei hanno usato tutti questi termini, riflettendo il fatto che i confini disciplinari sono rimasti permeabili.

Cristallizzazione disciplinare (1850-1900) La metà del XIX secolo ha assistito alla cristallizzazione di distinte identità professionali e disciplinari. *ingegnere civile* divenne una professione riconosciuta, istituzionalizzata attraverso l'istituzione degli ingegneri civili (a cura del 1828). *Ingegnere meccanico* emerse come identità separata con l'istituzione di ingegneri meccanici (1847). *meccanica applicata* (Cambridge, 1875) e *ingegneria* (comunità diverse).

Il termine *teoria dell'elasticità* divenne standard in inglese attraverso il lavoro di **George Gabriel Stokes** (1819-1903) e William Thomson, Lord Kelvin (1824-1907), entrambi professori di filosofia naturale che hanno contribuito ampiamente alla teoria elastica. **Augusto Edward Hough amore** (1863-1940) consolidata questa tradizione con il suo monumentale *Una trattativa sulla Teoria Matematica dell'Estratticità* (1892-1893) (Love, 1927 PDF), che stabilisce *elasticità* come disciplina matematica riconosciuta distinta sia dalla meccanica pura che dalla pratica ingegneristica.

In Germania, le università tecniche (*Technische Hochschulen*) sviluppato un sistema parallelo che produce *Diplom-Ingenieure*— ingegneri laureati con una profonda formazione teorica. Christian Otto Mohr (1835-1918, vedi §11.4.2), professore al Politecnico di Dresda, incarna questa tradizione: il suo libro di testo *Technische Mechanik* (1860) meccanica teorica unificata con applicazione di ingegneria.

Alla fine del secolo, era emerso un consenso ruvido: *meccanica* si riferisce alla scienza generale delle forze e del movimento; *teoria dell'elasticità* o semplicemente *elasticità* alla teoria

COPIA DI REVISIONE

matematica dei solidi elastici; *resistenza dei materiali* (*résistance des matériaux*, *Festigkeitslehre*) alle applicazioni di ingegneria; e *meccanica applicata* per l'applicazione più ampia dei principi meccanici ai problemi di ingegneria.

Specializzazione di XX secolo (1900-1970) Il XX secolo ha portato una crescente specializzazione e la moltiplicazione di nomi subdisciplinari. **Stephen P. Timoshenko** (1878-1972), formato in Russia, lavorando negli Stati Uniti, ha letteralmente scritto i libri di testo che hanno definito la terminologia moderna. *Forza dei materiali* (1930) (Timoshenko e Gere, 1976) stabilito che il termine per l'istruzione universitaria, mentre il suo *Teoria dell'elasticità* (1934, con J.N. Goodier) (Timoshenko e Goodier, 1970 PDF) codificato *elasticità* per lo studio di laurea. *Teoria di stabilità elastica* (1936) scavato la stabilità come campo semi-autonomo.

Il termine *meccanica solida* emerse gradualmente, apparentemente prima nelle scuole di ingegneria americane durante gli anni '40-1950, per comprendere elasticità, plasticità, viscoelastica e altri fenomeni inelastici sotto un unico ombrello. stabilita una Divisione di Meccanica Applicata (1927), in seguito evolvendosi in divisioni separate per diverse specialità. *meccanica solida* or *elastico*, con ditte distinte, conferenze e comunità di ricerca.

Lo sviluppo del ventesimo secolo più drammatico è stato l'emergere di *meccanica continuum* come disciplina matematica astratta. Clifford Truesdell (1919-2000), lavorando a Johns Hopkins e successivamente all'Università Indiana, promosse la meccanica del continuum come una teoria di campo unificata che comprende tutti i comportamenti materiali. *Archivio per la Meccanica Razionale e l'Analisi* (fondato 1957) e il suo trattato con Walter Noll (1925-2017), *Le Teorie di Meccanica non Linear Field* (1965) (Truesdell e Noll, 1965), stabilita meccanica continuum come una rigorosa teoria assiomatica, che si appella principalmente a matematici applicati e fisici teorici.

Dal 1970, il moderno paesaggio disciplinare era essenzialmente completo. *meccanica dei materiali* (sotto-laurea), *resistenza avanzata dei materiali* or *teoria dell'elasticità* (primo anno di laurea), *meccanica continuum* (laurea avanzata), e vari argomenti specializzati in *meccanica solida*. L'identità professionale era sempre più legata a questi settori specifici: uno era un meccanico continuum, un elastico, un analista strutturale, o meccanica computazionale.

10.5.8.2 Dall'identità professionale ai contenuti disciplinari

In questo contesto di evoluzione dell'identità professionale, possiamo ora comprendere come il contenuto intellettuale e le metodologie della meccanica strutturale si cristallizzano nei quattro settori distinti ma sovrapposti che creano la confusione terminologica di oggi.

Meccanica dei materiali: Gli Empiricisti di Ingegneria (1600-1790) Che cosa chiamiamo ora *meccanica dei materiali* emerse dalle indagini pratiche di Galileo (forza del fascio, vedi §7.2.2), Mariotte (correzione degli errori di Galileo, vedi §7.3.2.3), e Coulomb (pressione della terra, attrito, teoria del fascio, vedi §10.3.2.1). Questi pionieri hanno stabilito una disciplina ingegneristica caratterizzata da:

- Modelli monodimensionali semplificati (abrasmi, colonne, alberi)

COPIA DI REVISIONE

- Osservazioni fenomenologiche da test
- Ragione geometrica con poligoni di forza e equilibrio del momento
- Applicabilità diretta ai problemi di progettazione
- Strumenti matematici elementari (calcolo base al massimo)

Questo approccio è stato fondamentalmente pragmatico: ogni elemento strutturale ha richiesto il proprio trattamento specializzato, senza pretese alla teoria generale del campo. La metodologia persiste oggi nell'istruzione di ingegneria universitaria, tipicamente sotto titoli come *Meccanica dei Materiali*, *Forza dei materiali*, or *Meccanica di ingegneria dei solidi*. Libri di testo moderni di Beer & Johnston, Hibbeler, o Gere & Timoshenko seguire essenzialmente lo stesso approccio pedagogico stabilito 300 anni fa, aggiornato con esempi moderni e fattori di sicurezza.

Elasticità: La Scuola Matematica Francese (1820-1850) Il termine *elasticità* (*La storia dell'élasticité*) cristallizzato durante la notevole fioritura della fisica matematica francese nei decenni successivi alla Rivoluzione.

Navier (vedi §6.7.3) si avvicinava all'elasticità da fondazioni molecolari, derivanti da equazioni differenziali parziali per solidi elastici dalle interazioni della forza centrale tra le particelle.

Cauchy (vedi §6.7.6) ha preso il percorso complementare, sviluppando l'elasticità come teoria del campo continuum senza riferimento alla struttura molecolare. La sua introduzione del tenore di stress, relazioni dislocamento delle tensioni e e equazioni di equilibrio differenziale (1822-1828) hanno creato il quadro matematico ancora oggi utilizzato.

Saint-Venant (vedi §10.3.2.8) sintetizzare questi approcci e dimostrare come i problemi di valore limite potrebbe essere risolto per corpi di interesse pratico di ingegneria - la sua memoria di torsione (1855) e studi di flessore hanno stabilito i problemi canonici di elasticità.

La scuola francese ha creato *La sua essenza* come disciplina matematica caratterizzata da:

- Formulazione del continuum tridimensionale con quantità di tensore
- Le leggi costitutive lineari (legge di Hooke) generalizzato a 3D)
- Equazioni differenziali parziali con condizioni di confine
- Impegno a soluzioni analitiche esatte, se possibile
- Applicazione della matematica avanzata (variabili complessi, teoria potenziale, serie infinita)

Questa tradizione raggiunse la sua apoteosi in Amore *Teoria matematica dell'elasticità* (1892-1893), che rimase il riferimento definitivo in lingua inglese per oltre mezzo secolo. & Goodier, Sokolnikoff, Barber—continua questa enfasi sui metodi di soluzione analitica, anche se ora completato da approcci numerici.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Meccanica dei solidi: La sintesi german-russo-americana (1850-1960) Università tecniche tedesche, istituti politecnici russi e scuole di ingegneria americana hanno sviluppato una tradizione parallela enfatizzando:

- Validazione sperimentale a fianco dello sviluppo teorico
- Inclusione del comportamento inelastico (plasticità, stanchezza)
- Metodi grafici e approssimativi per applicazione pratica
- Teoria della stabilità e analisi dinamica
- Metodi di energia e principi variativi

Figure chiave comprese Mohr (metodo grafico, cerchio di stress, vedi §11.4.2), August Föppl (1854-1924) e suo figlio Ludwig Prandtl (1875-1953), che pionierò la teoria della plasticità, e in modo cruciale Timoshenko, i cui libri di testo definirono il campo per le generazioni.

Il termine *meccanica dei solidi* (or *meccanica solida*) emerse gradualmente a metà del XX secolo per abbracciare questa portata più ampia — l'elastica estesa per includere qualsiasi comportamento meccanico dei materiali strutturali.

- Elasticità lineare e non lineare
- Plasticità e analisi dei limiti
- Viscoelastica e il raccolgono
- Meccanica di frattura e danni
- Stabilità e stabilità
- Dinamica strutturale
- Metodi computazionali (FEM)

Questo è il contenuto dei programmi di laurea moderni in ingegneria civile e meccanica, riflessa in libri di testo come Fung's *Fondazioni di Meccanica Solida*Malvern's *Introduzione alla Meccanica di un Medio Continuo*, o Boresi & Schmidt *Meccanica avanzata dei materiali*.

Infine, l'etimologia del termine *motore strutturale* è discusso in §11.2.

Meccanica del continuum: L'astrazione assiomatica (1945-1970) Dopo la seconda guerra mondiale, i matematici cercarono un quadro unificato che trascendesse la distinzione dei solidi. **La mia vita** e Noll, nel loro trattato *Le Teorie di Meccanica non Linear Field* (1965), formulato *meccanica continuum* come teoria del campo assiomatico caratterizzato da:

- Cinematica generale dei corpi continui (deformazione, movimento)
- Diritto dell'equilibrio (massa, slancio, energia) indipendente dalla costituzione
- Teoria costitutiva attraverso funzionalità che soddisfano i principi generali
- Indifferenza della struttura e simmetria materiale come assioma
- Restrizioni termodinamiche su risposta costitutiva

COPIA DI REVISIONE

- Estrema generalità matematica e astrazione

All'interno di questo quadro, elasticità, viscosità, plasticità diventano tutti casi speciali di teoria costitutiva. *Introduzione alla Meccanica del Continuum* o di Holzapfel *Meccanica solida non lineare*, fornisce la base teorica per la meccanica computazionale e lo studio di materiali complessi (tessuti biologici, polimeri, media granulari).

La meccanica del continuum nella tradizione Truesdell-Noll si rivolge principalmente a matematici applicati e fisici teorici. La maggior parte dei curricula ingegneristici continuano ad insegnare le più antiche formulazioni più concrete di elasticità e meccanica solida, riservando la meccanica continuum per lo studio avanzato di laurea o la ricerca specializzata.

10.5.8.3 Il paesaggio disciplinare oggi

Queste traiettorie storiche si sono cristallizzate in campi distinti ma sovrapposti, riassunti nella tabella 10.4.

Tabella 10.4: Confronto delle Teorie Meccaniche: Prospettive storiche e tecniche

Aspetti	Meccanica dei Materiali	Elasticità	Meccanica dei solidi	Meccanica del Continuum
Figure fondatrici	Galileo, Mariotte, Coulomb, Parent	Navier, Cauchy, Saint-Venant, Love	Timoshenko, Prager, Hill, Drucker	Truesdell, Noll, Ericksen
Periodo storico	1638-1850 (pre-matematica)	1820-1900 (formulazione matematica)	1900-1960 (somma di ingegneria)	1945-1970 (astrazione assiomatica)
Scuole nazionali	Italiano, Francese empirico	Politecnica francese	tedesco TH, russo, americano	Americano, Italiano
Identità professionale	Architetto, ingegnere militare	Ingénieur, filosofo naturale	Professore di ingegneria	Matematica applicata
Ambito	Elementi strutturali semplificati (1D)	Solidi elastici (3D continuum)	Tutti i comportamenti solidi	Tutti i materiali continui
Livello matematico	Calcolo elementare, geometria	PDE, calcolo vettoriale, variabili complesse	PDE, tensori, calcolo variabile	Analisi astratta dei tensori, analisi funzionale
Leggi costituenti	Elastico lineare (implicito)	Elastico lineare (legge di Hooke esplicita)	Elastico, plastica, viscoelastico, danno	Qualsiasi funzione costitutiva
Deformazione	Piccole varietà solo	Di solito piccolo ceppo; alcuni grandi	Piccolo o grande; non lineare	Arbitrario; non linearità geometrica piena
Filosofia	Empirismo pragmatico	Esattezza matematica	Realizzazione di ingegneria	Rigor assiomatico
Problemi tipici	Deflezione del vapore, incerniere della colonna, torsione dell'albero	Concentrazione di stress, contatto, cilindri spessi	Insufficienza strutturale, collasso di plastica, frattura	Fondazioni teoretiche, teoremi di esistenza
Metodi di soluzione	Formule di manuale, tabelle	Analitico (Sforzo aereo, variabili complesse)	FEM, analisi dei limiti, approssimazione	Principi generali di variazione
Libri di testo chiave	Gere & Timoshenko; Birra & Johnston; Hibbeler	Amore; Sokolnikoff; Timoshenko & Bene.	Timoshenko (variato); Fung; Malvern	La mia vita & Noll; Gurtin; Holzapfel
Contesto educativo	Sophomore/giunista laureato	Laureato senior/ laureato di primo anno	Laureato (MS/PhD)	Laureato Avanzato (PhD)
Utilizzo attuale	Universale in curricula di ingegneria	Decidere negli Stati Uniti; forte in Europa	Dominante nella ricerca	Specializzato (matematica applicata, biomeccanica)

COPIA DI REVISIONE

10.5.8.4 Convenzioni e relazioni terminologiche

I rapporti tra questi campi possono essere compresi sia attraverso la discesa storica che con il contenimento logico:

Discesa storica:

Meccanica dei Materiali → Elasticità → Meccanica dei solidi → Meccanica del Continuum

Ogni campo è emerso generalizzando, matematizzando, o astrattando il suo predecessore. Elasticità formalizzata e generalizzata l'analisi di stress della meccanica dei materiali. Meccanica dei solidi elasticità estesa per includere fenomeni inelastici scoperti attraverso la ricerca del ventesimo secolo (plasticità, strisciamento, frattura).

Contenimento logico:

Meccanica del Continuum ⊃ Meccanica dei solidi ⊃ Elasticità ⊃ Meccanica dei Materiali

In termini di portata, ogni campo è una specializzazione del suo successore. La meccanica del continuum si applica a tutta la materia continua; la meccanica dei solidi limita ai materiali solidi; l'elasticità limita ulteriormente alla deformazione reversibile; la meccanica dei materiali rende ulteriori ipotesi semplificanti sulla distribuzione dello stress e sulla geometria dei problemi.

La confusione in terminologia deriva dal fatto che questi campi condividono problemi e metodi sovrapposti, e che un problema di curvatura del fascio può essere trattato a quattro livelli:

- **Meccanica dei materiali**: Utilizzo $\sigma = My/I$ e teoria del fascio elementare
- **Elasticità**: Risolvere l'equazione biarmonica $\nabla^4\phi = 0$ con condizioni di confine appropriate
- **Meccanica dei solidi**: Compresa la plasticità a supporti, sollecitazioni residue o effetti a tempo dipendente
- **Meccanica del continuum**: Come esempio di formulazione di problemi di valore limite di restrizione che dimostra i principi generali

La stessa situazione fisica, diversi livelli di sofisticazione matematica, supposizioni diverse, intuizioni diverse.

10.5.8.5 Convenzioni adottate in questo libro

Per chiarezza e coerenza, adottiamo la seguente terminologia in tutto questo lavoro:

- **Meccanica del Continuum**: Il quadro matematico generale per la materia continua, compresi i concetti fondamentali (stress, tensione, leggi di equilibrio) indipendenti dal comportamento costitutivo.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

- **Elasticità** (or *Teoria dell'elasticità*): La teoria matematica dei solidi lineari elastici, sottolineando soluzioni esatte o semianalitiche ai problemi di valore limite, utilizzata nel discutere della tradizione francese del XIX secolo e dei metodi di soluzione classica.
- **Meccanica dei solidi** (or *Meccanica solida*): La più ampia scienza ingegneristica del comportamento dei materiali solidi, tra cui la plasticità, la viscoelastica, i danni e la frattura.
- **Analisi strutturale** (or *Teoria delle Strutture*): l'applicazione di meccanica solida a sistemi strutturali reali (frame, trusse, conchiglie), compresi i metodi analitici e numerici.
- **Meccanica dei Materiali** (or *Forza dei materiali*): L'approccio ingegneristico semplificato e unidimensionale utilizzato nei corsi introduttivi e nel design preliminare.

Quando si parla di sviluppi storici, si utilizza la terminologia del periodo e dell'autore in questione, riconoscendo che gli scrittori del XIX secolo utilizzati *elasticità* per quello che ora potremmo distinguere come meccanica continuum, che *resistenza dei materiali* era quasi universale prima del 1900, e che *meccanica solida* Il lettore deve sempre interpretare la terminologia storica in contesto, comprendendo che i confini disciplinari erano molto meno rigidi nel periodo formativo di quanto non si manifestano nel curriculum accademico specializzato di oggi.

L'evoluzione dal filosofo naturale alla meccanica solida specializzata, dalle dimostrazioni geometriche di Galileo al rigore assiomatico di Truesdell, rappresenta non solo il progresso intellettuale, ma una trasformazione fondamentale nel modo in cui organizziamo la conoscenza e l'identità professionale.

10.6 Conclusioni

Questo capitolo ha tracciato il notevole viaggio intellettuale dalle teorie molecolari dell'elasticità al quadro continuum completo che domina la moderna meccanica strutturale. Il cambiamento di paradigma qui esaminato - dai tentativi di riduzionisti di derivare il comportamento materiale dalle forze intermacolari alle formulazioni fenomenologiche basate su equazioni di campo e principi energetici - rappresenta uno dei momenti cardine della storia della meccanica.

Il fallimento delle teorie molecolari, epitomizzate dalla loro previsione errata del rapporto di Poisson e insufficienti costanti elastiche, costrinse una riconcettualizzazione fondamentale di come modellare solidi deformabili.—in particolare Cauchy, Navier, Lamé e Saint-Venant—hanno stabilito l'apparato matematico dei tensori di stress, delle misure di sforzo e delle relazioni costitutive che costituiscono la base della meccanica continuum.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Le leggi universali dell'equilibrio—conservazione di massa, slancio ed energia, unitamente alla disuguaglianza entropia, forniscono il quadro entro il quale tutte le teorie continuum devono operare; queste leggi trascendono il tipo materiale, applicando allo stesso modo a fluidi, solidi e materiali più complessi; tuttavia, le leggi di equilibrio non possono prevedere la risposta materiale; esse devono essere integrate da relazioni costitutive che catturano il comportamento specifico del materiale.

I principi che disciplinano la formulazione costitutiva — l'oggettività, la simmetria materiale, l'ammissibilità termodinamica — si sono gradualmente allontanati dall'interazione tra ragionamento teorico e osservazione sperimentale.) si è dimostrata particolarmente potente, garantendo la conservazione dell'energia e fornendo un quadro sistematico per la modellazione dei materiali; le due costanti elastiche indipendenti richieste per i materiali isotropici (Lamé's λ e μ, o equivalentemente il modulo di Young e il rapporto di Poisson) rappresentano la complessità minima richiesta dalla realtà sperimentale, una conclusione che i teorici molecolari non potevano raggiungere dai primi principi.

La sintesi raggiunta nel 1860 è stata notevole: un quadro matematico completo in grado di descrivere il comportamento meccanico dei mezzi elastici continui in condizioni di carico e di confine arbitrarie., combinato con la compatibilità cinematica, le relazioni costitutive e le equazioni di equilibrio, ha dato sistemi di equazioni differenziali parziali che potrebbero, in linea di principio, prescrivere la risposta di qualsiasi corpo elastico.

La teoria generale dell'elasticità, per tutta la sua eleganza matematica, si applicava naturalmente a corpi continui di semplice geometria. Le strutture reali—trusse, cornici, archi, ponti sospensioni—considerate di componenti discreti collegati a giunti, con condizioni di carico molto più complesse di quelle misurabili a soluzione analitica. Come potrebbero gli ingegneri sfruttare la potenza della meccanica continuum per l'analisi strutturale pratica senza risolvere equazioni differenziali parziali?

La risposta si basa su metodi specializzati che sfruttavano la particolare geometria e il carico di elementi strutturali: teoria del fascio, metodo di spostamento, metodo di forza, principi energetici per strutture indeterminate. Navier ha pionierizzato questa traduzione con la sua analisi di travi continue, derivando l'equazione governativa $EId^4y/dx^4 = q(x)$ dalla teoria generale tridimensionale., il teorema di tre momenti, e successivamente gli sviluppi di Maxwell e Castigliano rappresentano successive perfezionamenti di questo programma: estraendo dalla teoria del continuum generale gli ingegneri specifici strumenti hanno bisogno di analisi strutturale.

È a questi metodi pratici—il lavoro di Navier sulle strutture staticamente indeterminate, i teoremi di Clapeyron e il successivo sviluppo delle procedure di analisi sistematiche, che ora ci rivolgiamo, rappresentano le prime applicazioni di meccanica continuum di successo a problemi di importanza centrale per gli ingegneri strutturali, colmare il divario tra teoria del campo astratto e calcolo pratico. Il quadro continuum stabilito in questo capitolo fornisce la base rigorosa; i metodi strutturali del prossimo capitolo dimostrano la sua realizzazione ingegneristica.

COPIA DI REVISIONE



Caravaggio, L'Insorto di Cristo (1603-1604)

Carico distribuito, peso trasferito attraverso contatto continuo, una meditazione sui campi di stress in forma umana.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 11

L'analisi strutturale: sintesi e applicazione

Abstract

Questo capitolo finale traccia la sintesi della meccanica continuum in analisi strutturali pratiche — la trasformazione della teoria dell'elasticità astratta in metodi sistematici per l'analisi delle strutture ingegneristiche reali. A partire dal trattamento di Navier di travi statalmente indeterminate negli anni 1820, seguiamo lo sviluppo attraverso il teorema strutturale reciproco di Maxwell, i metodi geometrici di Mohr, i principi energetici di Castigliano-Breslau, il metodo Cross

Il capitolo esamina poi come la rivoluzione computazionale degli anni '50-1960 trasformò questi metodi classici in formulazioni a matrice. Il metodo di rigidità diretta di Turner e colleghi, e il metodo di elementi finiti di Clough non emerse come partenze dalla teoria classica ma come implementazioni sistematiche dei principi stabiliti abilitati dal calcolo digitale.

Questo capitolo completa l'arco storico iniziato con gli esperimenti di Galileo sulla forza e il movimento, mostrando come due secoli di sviluppo teorico trovassero espressione pratica in metodi che raggiunsero la chiusura tra teoria matematica, capacità computazionale e progettazione ingegneristica.

11.1 Introduzione 433
11.2 Ingegneria strutturale, etimologia . 434
11.3 Sviluppo precoce: fasci di indeterminamento statica 436
11.3.1 Navier (1785–1836): Il primo trattamento sistemico 436
11.3.2 Clapeyron (1799–1864): L'Equazione dei Tre Momenti . 437
11.4 Trasmissione ai metodi generali . . . 437
11.4.1 Maxwell (1831–1879): Il teorema reciproco 438
11.4.2 Mohr (1835-1918): Metodi geometrici e analogici 438
11.4.3 Castigliano (1847–1884): Metodi energetici 439
11.4.4 Müller-Breslau (1851-1925): Linee di sistematizzazione e influenza 440
11.4.5 Il metodo della Forza: Compatibilità e Flessibilità 441
11.4.6 Concetti e procedure fondamentali 441
11.4.7 Il metodo della Forza: Riepilogo e Legacy 443
11.5 Il metodo di spostamento: dalla teoria alla pratica 443
11.5.1 Fondazioni teoriche: Formulazioni di prima stiffness . . 444
11.5.2 Metodo di riduzione della pendenza: Formulazione sistemica 445

COPIA DI REVISIONE

11.5.3 Hardy Cross (1885–1959): Il metodo di distribuzione del momento 446
11.5.4 Prolungamenti e Variazioni . 449
11.5.5 Il metodo di spostamento: Riepilogo e Legacy 451
11.6 Linee di influenza e carichi mobili . 451
11.6.1 Winkler (1835–1888): Sviluppo precoce 451
11.6.2 Principio di Müller-Breslau . 452
11.6.3 Applicazioni e Legacy 452
11.7 Verso la Formulazione Matrix: Il Ponte Concettuale alla Computazione . 452
11.7.1 La struttura matrice dei metodi classici 453
11.7.2 Dall'itterazione alla soluzione Matrix 453
11.7.3 I limiti della calcolatore della mano: Impostazione della fase per la computazione . . 454
11.7.4 Conclusione: Prosecuzione e Trasformazione 454
11.8 Requisiti fondamentali dell'analisi strutturale 455
11.9 Riassunto cronologico dei contributori 458
11.9.1 Conclusioni 460

11.1 Introduzione

Settemila anni dopo che le prime tavolette cuneiformi registrarono la conoscenza dell'ingegneria, e due secoli dopo che furono poste le fondamenta della meccanica continuum, arriviamo al culmine del nostro viaggio storico: la sintesi della teoria matematica e della pratica strutturale nell'analisi computazionale moderna.

Abbiamo assistito agli esperimenti di Galileo che hanno stabilito che la forza materiale era quantificabile e governata da leggi razionali. Abbiamo seguito la trasformazione della meccanica di Newton in una disciplina matematica. Abbiamo osservato lo sviluppo della meccanica continuum - la teoria dello stress di Caauchy, le equazioni del campo di Naviculer -trasformando la nostra comprensione di come i materiali rispondono al carico.

Questo capitolo esamina come tale sfida sia stata soddisfatta attraverso lo sviluppo dell'analisi strutturale come disciplina ingegneristica distinta, basandosi sulle basi matematiche della teoria dell'elasticità stabilita nel capitolo precedente, la meccanica è entrata in una fase nuova e decisiva, sempre più spinta dalle esigenze dell'ingegneria strutturale. 10) che si era maturato attraverso il lavoro dei matematici all'inizio del XIX secolo trovarono ora espressione concreta nell'analisi delle strutture reali: ponti, cornici e archi la cui complessità devatò la semplicità di sistemi staticamente determinati. La sfida non era più quella di definire le leggi della materia, ma di applicarle sistematicamente alle assemblee di membri le cui forze interne non potevano essere dedotte dall'equilibrio solo.

È in questa transizione, dal continuo al discreto, dalla teoria generale dell'elasticità alla scienza specifica delle strutture – che è emersa una nuova generazione di pensatori – ingegneri francesi (Navier e Clapeyron), il Maxwell britannico, il Castigliano italiano e i professori tedeschi (Mohr e Müller-Breslau) trasformarono la meccanica in analisi

COPIA DI REVISIONE

strutturale, introducendo potenti teoremi di energia e compatibilità che rendevano la meccanica *indeterminato* non insolubile ma *elegantemente quantificabile.*

La prima fase, che si estendeva approssimativamente dal 1820 al 1950, vide lo sviluppo di metodi di calcolo della mano: procedure sistematiche per l'analisi delle strutture statically indeterminate. Questo capitolo traccia l'evoluzione di questi metodi analitici che hanno colmato la teoria dell'elasticità e il design strutturale—metodo che in seguito costituirebbero la base dello spostamento e della rigidità si avvicina al centro dell'analisi strutturale del ventesimo secolo. Dal lavoro pionieristico di Navier sui travi continui all'equazione a tre piani di Clapeyron, dal teorema reciproco di Maxwell ai principi energetici di Castigliano, dai teoremi di Mohr alla distribuzione del momento di Hardy Cross, la narrazione segue come l'intuizione concettuale si distillasse gradualmente in metodi generali, culminando in un quadro unificato per la distribuzione del momento. analizzare strutture complesse.

La seconda fase, a partire dagli anni '50, ha visto che questi metodi classici si evolvono in formulazioni matrici misurabili all'implementazione del computer, culminando nel metodo degli elementi finiti. Ciò che rende questa narrazione convincente è la rivelazione della continuità sotto la rivoluzione apparente. Il metodo degli elementi finiti non è emerso come una rottura dalla teoria classica ma come la sua estensione sistematica.

Il capitolo procede quindi in due sezioni principali: il primo esamina i metodi di calcolo della mano, dai raggi continui di Navier attraverso principi energetici e condizioni di compatibilità, culminando con la distribuzione del momento di Hardy Cross, l'apogeo del calcolo della mano. Il secondo esamina come i computer digitali hanno permesso la riformalazione in metodi di matrice: il metodo di rigidità diretta a Boeing, l'estensione di Clough ai media continui come metodo di elemento finito dominante e la rapida maturazione in fase di calcolo strutturale contemporanea.

In questo modo, questo capitolo porta a compimento l'arco storico che ha avuto inizio con gli esperimenti di Galileo sulla forza e sul movimento, attraversato le grandi formulazioni della meccanica continuum, e culmina nella nascita di analisi strutturale computazionale moderna, una disciplina che ha finalmente raggiunto la chiusura tra teoria, calcolo e design.

Esaminiamo ora come si è compiuta questa sintesi, ma prima esaminiamo l'origine del termine "ingegneria strutturale".

11.2 Ingegneria strutturale, etimologia

Il moderno contenuto tecnico dell'ingegneria strutturale preda a lungo il nome moderno. Per gran parte del XVIII e dell'inizio del XIX secolo, quello che oggi raggruppamo sotto "analisi strutturale" e "ingegneria strutturale" è stato distribuito tra ingegneria civile, architettura, statici, forza dei materiali, e (più tardi) elasticità. Nel corso del XIX secolo, l'aumento della scala strutturale, nuovi materiali (ron, poi acciaio), e il kit di

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

strumenti analitici in espansione (stabilità, teoria elastica, metodi energetici, statici grafici e, infine, metodi di matrice) incoraggiarono una specializzazione più chiara all'interno dell'ingegneria civile. In inglese, questa specializzazione si riflette non da un singolo atto di "coining" ma da una graduale stabilizzazione della terminologia nell'uso professionale e pubblicato.

Per l'uso inglese, le date più defensible ancorate provengono dal Dizionario inglese di Oxford. *ingegneria strutturale* con le prime prove nel 1859 (*structural engineering, n.* n.d.) e il sostantivo professionale *ingegnere strutturale* con le prime prove nel 1867 (*structural engineer, n.* n.d.). L'ordinazione è storicamente plausibile: l'etichetta di attività diventa comune prima del titolo professionale. All'inizio del XX secolo il titolo è istituzionalizzato; nel Regno Unito, l'organismo ora conosciuto come Istituzione degli Ingegneri Strutturali traccia la sua origine al 1908 e riferisce l'adozione del suo attuale nome nel 1922 (*Our history* 2026). L'adozione istituzionale non è il primo avvenimento delle parole, ma è un importante marcatore di stabilizzazione professionale.

La pratica francese e tedesca mostra la stessa specializzazione sottostante ma con diverse vie linguistiche. In francese, il lavoro che l'inglese in seguito etichettava "ingegneria strutturale" era storicamente inquadrato attraverso frasi come *Calcul des constructions*, *resistenza des materiaux*e *theorie des constructions*, piuttosto che attraverso un unico titolo professionale esattamente parallelo a «ingegnere strutturale». L'identità professionale è stata fortemente plasmata dal contesto istituzionale (in particolare, le grandi ecoles e corps), con ruoli di ingegneria espressi attraverso titoli civili e costruttivi. *Baustatik* (letteralmente "building statics"'), che funziona come termine ombrello che spazia la teoria, i metodi di calcolo, e la loro applicazione a costruzioni reali portanti (Kurrer, 2008)Kurrer sottolinea sia l'ampiezza del campo che il problema linguistico: le lingue diverse lottano per il nome, rigorosamente e con succinctly, un dominio che include teoria, calcolo e pratica; in tedesco, *Baustatik* divenne il termine ampiamente accettato (Kurrer, 2008).

Il termine *analisi strutturale* storicamente, la stessa attività appare sotto le voci più vecchie (ad esempio, "statics" o "theory of Structure"'), e solo successivamente diventa una frase standardizzata che esplicitamente nomina l'atto analitico: la determinazione delle forze interne, delle deformazioni e della stabilità dei sistemi di trasporto del carico, e quindi, l'"ingegnere strutturale" e l'"analisi strutturale" devono essere trattati come prodotti della differenziazione professionale del XIX secolo e dell'inizio del XX secolo: l'ex nominare un'identità praticante in inglese, e quest'ultimo nomina un insieme sempre più formalizzato di procedure analitiche le cui radici intellettuali sono molto più antiche della terminologia moderna.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

11.3 Sviluppo precoce: fasci di indeterminamento statica

Mentre le teorie della flessore dominavano il paesaggio scientifico nel Settecento (Capo. 7), è stata l'analisi di travi statticamente indeterminate che dominavano l'Ottocento, che è stato stimolato direttamente dall'emergere dell'era ferroviaria e della costruzione di metalli, che ha portato naturalmente all'uso diffuso di travi continue e supporti fissi (encastré).

La sfida fondamentale delle strutture statticamente indeterminate è che le equazioni di equilibrio sono insufficienti per determinare tutte le forze e le reazioni sconosciute. Le equazioni aggiuntive devono essere derivate dalle condizioni di compatibilità – requisiti che la struttura deformata rimane continua e adeguatamente sostenuta. Il riconoscimento di questa distinzione, e lo sviluppo sistematico dei metodi per sfruttarla, rappresenta una delle grandi conquiste intellettuali della meccanica strutturale del XIX secolo.

11.3.1 Navier (1785–1836): Il primo trattamento sistemico

L'emergere della costruzione del ferro e l'espansione delle reti ferroviarie negli anni 1820 crearono problemi pratici urgenti che non avevano affrontato la meccanica classica. I ponti di ferro e i viadotti ferroviari impiegavano spesso travi continue che spaziavano a più supporti—configurazioni che non potevano essere analizzate solo da equazioni di equilibrio.

Nell'edizione 1826 della sua *Leçon* (Navier, 1826, p. 33), Navier divenne probabilmente il primo ad analizzare sistematicamente un fascio statically indeterminato, in particolare un fascio su tre supporti. (Navier, 1833) prolungare questo trattamento *incastrerà* (clamati) e più complesse configurazioni di travi continue.

Il riconoscimento del Navier del problema fondamentale è evidente nella sua affermazione:

> Quando un carico è supportato da più di due barre inclinate nello stesso piano verticale o da più di tre barre inclinate non nello stesso piano, le condizioni di equilibrio lasciano indeterminati, tra certi limiti, le forze imposte nella direzione di ciascuna delle barre.
>
> Navier, 1826 Résumé des leçons données à l'École royale des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines

Per un fascio continuo su più supporti, ha riconosciuto che la deflezione a ogni supporto intermedio deve svanire, fornendo le equazioni aggiuntive necessarie per determinare le reazioni ridondanti. Il suo metodo, pur specifico per i raggi continui, ha stabilito il principio fondamentale che guiderebbe tutti gli sviluppi successivi nel XIX secolo: *L'indeterminanza statica viene risolta invocando la compatibilità delle deformazioni.*

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

11.3.2 Clapeyron (1799–1864): L'Equazione dei Tre Momenti

Per i dettagli analitici, consultare §25.3

.

Un importante anticipo arrivò nel 1857 quando Benoît Clapeyron pubblicò il suo celebre "teorema di tre momenti" (Clapeyron, 1857)Questo elegante risultato ha fornito un rapporto diretto tra i momenti di flessione a tre supporti consecutivi di un fascio continuo, eliminando la necessità di lavorare direttamente con l'equazione differenziale della curva elastica.

Per un fascio continuo con campate di lunghezza ℓ_1 e ℓ_2 tra tre supporti consecutivi con momenti M_1, M_2e M_3, l'equazione di Clapeyron prende la forma:

$$M_1\ell_1 + 2M_2(\ell_1 + \ell_2) + M_3\ell_2 = -6\left(\frac{A_1}{\ell_1} + \frac{A_2}{\ell_2}\right)$$

dove A_1 e A_2 rappresenta le aree delle M/EI diagrammi per le campate semplicemente supportate sotto il carico applicato.

L'equazione di tre momenti rappresentava una svolta concettuale, piuttosto che risolvere equazioni differenziali con più condizioni di confine, gli ingegneri potevano ora scrivere equazioni algebriche direttamente per i momenti di supporto sconosciuti. n supporti, questo rendimento $n - 2$ equazioni lineari simultanee—un problema facilmente risolvibile dai metodi computazionali disponibili a metà del XIX secolo (Timoshenko, 1953).

Il teorema di Clapeyron divenne il metodo standard per analizzare i raggi continui e fu ampiamente insegnato nelle scuole di ingegneria per quasi un secolo. La sua influenza si estendeva molto oltre la sua applicazione immediata: dimostrava che i metodi algebrici sistematici potevano sostituire i casi con l'analisi dei casi, indicando la strada verso i metodi di matrice generale del XX secolo.

11.4 Trasmissione ai metodi generali

Mentre il teorema di Clapeyron risolse elegantemente il problema del fascio continuo, rimase specifico a quel tipo strutturale. La domanda più ampia persisteva: si poteva elaborare un metodo generale, applicabile ad ogni struttura staticamente indeterminata — quadri, archi, trozze — indipendentemente dalla configurazione? La risposta sarebbe emergere attraverso lo sviluppo di metodi energetici e il principio del lavoro virtuale, concetti che unificherebbero il trattamento di strutture struttura indeterminate comuni.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

11.4.1 Maxwell (1831–1879): Il teorema reciproco

Per i dettagli analitici, consultare §24.2.2

.

La fondazione teorica per il metodo di forza fu posta da James Clerk Maxwell nel suo notevole documento del 1864 *Sulla Calcolo dell'Equilibrio e della Stiffness dei Cornici* (Maxwell, 1864c)Anche se Maxwell è ricordato principalmente per i suoi contributi rivoluzionari alla teoria elettromagnetica, il suo lavoro sulla meccanica strutturale era altrettanto profondo. Il suo interesse nei problemi strutturali è emerso dal suo approccio caratteristico: la ricerca dell'unità matematica attraverso fenomeni fisici apparentemente disparati.

Il teorema reciproco di Maxwell afferma che per una struttura elastica lineare, lo spostamento a punto i a causa di un carico unitario a punto j pari allo spostamento al punto j a causa di un carico unitario a punto i:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

Questo risultato apparentemente semplice ha profonde implicazioni, implica che la matrice di flessibilità (rilanciando le forze agli spostamenti) deve essere simmetrica, una proprietà che divenne fondamentale per l'analisi strutturale. Maxwell ha usato questo principio per ricavare procedure sistematiche per il calcolo delle deflettori nelle capriate e nei frames.

Anche la carta del 1864 di Maxwell introdusse quello che oggi si chiama teorema di Maxwell per il calcolo delle deflettenze con carichi fittizi—una tecnica che sarebbe stata in modo indipendente riscoperta e generalizzata da altri. (Timoshenko, 1953; Charlton, 1982).

11.4.2 Mohr (1835-1918): Metodi geometrici e analogici

Christian Otto Mohr, professore al Politecnico di Dresda e successivamente al Politecnico di Stoccarda, ha dato numerosi contributi fondamentali alla meccanica strutturale tra il 1868 e il 1906. Il suo lavoro sui metodi grafici e l'interpretazione geometrica del comportamento strutturale ha fornito agli ingegneri potenti strumenti pratici per l'analisi.

Cerchio di Mohr per Stress Anche se non direttamente legato a strutture indeterminate, il cerchio di Mohr (1882) per rappresentare gli stati di stress è diventato uno degli strumenti più utilizzati nella meccanica (Mohr, 1882a). L'elegante costruzione geometrica permette una visualizzazione immediata di stress principali e massima sollecitazione della cesoia, concetti essenziali per comprendere il fallimento strutturale.

Area del Momento Teoremi

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Per i dettagli analitici, consultare §22.3.4

I teoremi della zona di Mohr (1868) fornivano un metodo geometrico per il calcolo delle piste e delle deflettori in travi (Mohr, 1868):

Primo teorema: Il cambiamento del pendio tra due punti su una curva elastica è uguale all'area sotto M/EI diagramma tra quei punti.

Secondo teorema: La deviazione verticale di un punto dal tangente ad un altro punto equivale al primo momento del M/EI area diagramma sul primo punto.

Questi teoremi, derivati dall'equazione del fascio fondamentale $d^2y/dx^2 = M/EI$, ha permesso agli ingegneri di bypassare l'integrazione e lavorare direttamente con aree e centriidi—calcoli eseguiti graficamente o con semplice aritmetico.

Il metodo di Analogia

Per i dettagli analitici, consultare §22.3.4.7

Mohr ha anche sviluppato *carico elastico* or *trave di coniugazione* analogia, che ha trasformato i problemi di deflettore in problemi di momento equivalenti. M/EI diagramma come carico su un fascio coniugato, deflettori e pendici del fascio reale si possono trovare da travi e momenti nel fascio coniugato—un'elegante trasformazione che semplifica notevolmente i calcoli (Timoshenko, 1953).

11.4.3 Castigliano (1847–1884): Metodi energetici

Per i dettagli analitici, consultare §48.5

Alberto Castigliano, ingegnere ferroviario italiano, ha dato i suoi contributi fondamentali, mentre è ancora studente presso l'Istituto Politecnico di Torino. La sua tesi di dottorato, pubblicata nel 1873 e successivamente ampliata nel suo trattato del 1879 (Castigliano, 1879)Il lavoro di Castigliano è stato motivato direttamente dalle esigenze pratiche del progetto ferroviario del ponte, dove è stata essenziale un'analisi rapida delle complesse configurazioni strutturali.

Il primo teorema di Castigliano Il parziale derivato dell'energia totale della tensione rispetto ad uno spostamento è uguale alla forza applicata corrispondente:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_i} = P_i$$

Questo teorema, sebbene teoricamente importante, trovò meno applicazione pratica del suo secondo teorema.

COPIA DI REVISIONE

Il secondo teorema di Castigliano Il parziale derivato dell'energia totale di deformazione rispetto ad una forza equivale allo spostamento corrispondente:

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = \delta_i$$

Questo risultato, a volte chiamato teorema del carico dell'unità, divenne il cavalletto di lavoro dei calcoli di deflettorazione.

$$U = \int \frac{M^2}{2EI}\,dx + \int \frac{N^2}{2EA}\,dx + \int \frac{V^2}{2GA}\,dx$$

la deviazione in qualsiasi punto in qualsiasi direzione potrebbe essere trovata differenziando rispetto ad un carico applicato (o mughetto) in quella direzione.

Per le strutture staticamente indeterminate, il teorema di Castigliano ha fornito un metodo diretto: le forze ridondanti potrebbero essere trattate come sconosciute, e le condizioni di compatibilità (che le deflettenze in certi punti devono svanire) hanno fornito le equazioni necessarie. Questo approccio, noto come metodo di minor lavoro, ha dichiarato che le forze ridondanti si distribuiscono per minimizzare l'energia totale di sforzo. (Charlton, 1982).

11.4.4 Müller-Breslau (1851-1925): Linee di sistematizzazione e influenza

Per i dettagli analitici, consultare §28.3

Heinrich Müller-Breslau, professore presso la Technische Hochschule di Berlino Charlottenburg, ha sintetizzato e sistemato i vari approcci alle strutture indeterminate nel suo trattato monumentale *Die neueren Metodologia per il Festigkeitslehre* (Müller-Breslau, 1886).

Formulazione del metodo generale della forza Müller-Breslau ha presentato il metodo di forza nella sua forma più generale. n gradi di indeterminanza statica, la procedura è:

Passo 1: Selezionare n forze ridondanti $X_1, X_2, \ldots, X_n$ e rimuovere i vincoli corrispondenti, creando una struttura "primaria' staticamente determinata.'

Fase 2: Calcolate le sostituzioni δ_{ij} in posizione di ridondante i a causa del valore unitario di ridondante j, più spostamenti δ_{i0} a causa di carichi applicati.

Passo 3: Compatibilità di forza—i luoghi dislocamento in luoghi ridondanti devono corrispondere alle condizioni di supporto effettive:

$$\delta_{i0} + \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} X_j = \Delta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dove Δ_i sono gli spostamenti di supporto noti (spesso zero).

Questo sistema n equazioni in n Ignoti determina tutte le forze ridondanti. Il metodo è sistematico, generale e applicabile a qualsiasi struttura.

COPIA DI REVISIONE

Linee di influenza Müller-Breslau ha anche sviluppato la teoria delle linee di influenza, i digrammi che mostrano come una forza o un momento particolare variano come un carico unitario attraversa la struttura (Müller-Breslau, 1887)Il suo principio di costruzione delle linee di influenza ha dichiarato che la linea di influenza per una forza o un momento particolare ha la stessa forma della curva di deviazione che si traduce quando tale forza o momento è dato un valore unitario e la struttura è consentita di deformare.

Questa interpretazione geometrica ha fornito agli ingegneri potenti metodi grafici per l'analisi di strutture sotto carichi in movimento - critici per la progettazione di ponti ferroviari, la sfida ingegneristica dominante della fine del XIX secolo (Timoshenko, 1953; Charlton, 1982).

11.4.5 Il metodo della Forza: Compatibilità e Flessibilità

Per i dettagli analitici, consultare Capitolo 25

I contributi di Maxwell, Mohr, Castigliano e Müller-Breslau, sebbene sviluppati in modo indipendente, costituivano i componenti essenziali di ciò che sarebbe diventato un quadro analitico unificato. Maxwell aveva stabilito il teorema reciproco e il concetto di flessibilità coefficienti; Mohr aveva fornito metodi geometrici per calcolare le deflettori; Castigliano aveva dimostrato la potenza dei principi energetici per determinare i dislocamenti e le condizioni di compatibilità; e Müller-Breslazioni.

Questa sezione presenta il metodo di forza non come l'invenzione di un singolo individuo, ma come sintesi degli sviluppi teorici sopra descritti. Agli inizi del Novecento, questo metodo si era cristallizzato in una procedura sistematica insegnata in ogni scuola di ingegneria. Prima di esaminare il suo lascito e i suoi limiti, è essenziale comprendere i concetti fondamentali e la struttura logica che unificano le intuizioni di questi pionieri in un quadro analitico coerente.

11.4.6 Concetti e procedure fondamentali

Prima di esaminare lo sviluppo storico, è essenziale comprendere la logica fondamentale del metodo di forza, che invertisce la normale sequenza di analisi strutturale.

Gradi di indeterminanza statica

Per i dettagli analitici, consultare §19.1.4

Una struttura è staticamente indeterminata quando le equazioni di equilibrio da sole sono insufficienti per determinare tutte le forze sconosciute. n, rappresenta il numero di equazioni aggiuntive richieste oltre l'equilibrio.

- Un raggio semplicemente supportato: determinato ($n = 0$)

COPIA DI REVISIONE

- Un fascio fisso: indeterminato con $n = 3$ (due reazioni di momento e una reazione verticale sono ridondanti)
- Un fascio continuo m supporti: indeterminato con $n = m - 2$
- Una cornice o una tromba chiusa: l'indeterminanza dipende dal numero di membri, articolazioni e condizioni di supporto

La procedura del metodo di forza Il metodo di forza tratta certe forze o reazioni come sconosciute primarie, in particolare, le n La procedura sistematica è:

Passo 1: Selezionare Ridondanti. Scegli n forze (reazioni o forze interne) come ridondanti. La scelta è arbitraria ma colpisce l'efficienza computazionale. $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Fase 2: Crea la Struttura Primaria. Rimuovere i vincoli che corrispondono ai ridondanti, creando una struttura primaria statisticamente determinata che può essere analizzata solo dall'equilibrio, spesso rimuovendo supporti, tagliando i membri, o introducendo cerniere.

Passo 3: Analizzare la Struttura Primaria. Calcolate le posizioni ridondanti a causa di:

- Carico applicato: spostamenti δ_{i0} in posizione ridondante i
- Valori unitari di ogni ridondante: coefficienti di flessibilità δ_{ij} = spostamento in posizione i a causa della forza unitaria in posizione j

Passo 4: Enforce Compatibilità. La struttura reale deve essere continua e correttamente supportata, pertanto gli spostamenti in luoghi ridondanti (computati come sovrapposizione di effetti di carico e effetti ridondanti) devono essere uguali alle condizioni di vincolo effettive:

$$\delta_{i0} + \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} X_j = \Delta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dove Δ_i sono gli spostamenti di supporto noti (tipicamente zero per i supporti rigidi).

Passo 5: Risolvere per i Redundants. Questo sistema n equazioni in n gli sconosciuti determinano tutte le forze ridondanti X_j.

Passo 6: Superposizione. Una volta che i ridondanti sono noti, tutte le altre forze e momenti seguono dalla sovrapposizione della soluzione di struttura primaria e gli effetti ridondanti.

Perché 11 Metodo di flessibilità? Il metodo è chiamato metodo di flessibilità perché funziona con coefficienti di flessibilità δ_{ij}, che riguardano le forze di spostamento. La matrice di flessibilità $\mathbf{F} = [\delta_{ij}]$ Per le strutture elastiche lineari, questa matrice è simmetrica (come Maxwell proverebbe) e definita positiva.

Interpretazione fisica Il metodo di forza incarna un principio fondamentale: *La natura distribuisce le forze per soddisfare sia l'equilibrio che la compatibilità*. L'equilibrio è soddisfatto in ogni fase (con la scelta della struttura primaria), mentre la compatibilità fornisce i vincoli aggiuntivi che determinano come le forze distribuiscono tra i percorsi ridondanti.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Il metodo separa così i due requisiti fondamentali dell'analisi strutturale, dell'equilibrio e della compatibilità, trattandoli sequenziali piuttosto che contemporaneamente.

Le basi teoriche di questo approccio sono state fondate principalmente attraverso il lavoro di Maxwell, Mohr, Castigliano e Müller-Breslau, i cui contributi ora esaminiamo.

11.4.7 Il metodo della Forza: Riepilogo e Legacy

Nel 1900, il metodo di forza è stato completamente sviluppato e ampiamente insegnato, i suoi vantaggi sono stati chiari: sistematico e generale (applicabile a qualsiasi struttura staticamente indeterminata), basato su principi fisici sonori (compatibilità delle deformazioni), fornendo soluzioni esatte per strutture elastiche lineari, e attuabile con gli strumenti computazionali disponibili nell'era pre-computer.

La limitazione primaria era computazionale: i coefficienti di flessibilità δ_{ij} Per le strutture altamente ridondanti (grandi cornici, travi continue con molte campate), il metodo divenne impraticabile. Un raggio continuo su dieci supporti necessari per risolvere otto equazioni simultanee; una cornice multistoria potrebbe facilmente generare venti o più sconosciuti.

Questo costrizione pratica spingerebbe lo sviluppo di approcci alternativi, il metodo di spostamento e la sua prole, il metodo di rigidità, che domina l'analisi strutturale del ventesimo secolo, riconcettando fondamentalmente quali quantità dovrebbero essere trattate come sconosciute.

11.5 Il metodo di spostamento: dalla teoria alla pratica

Il metodo di spostamento rappresenta un cambiamento fondamentale nella prospettiva del metodo di forza, piuttosto che trattare le forze come sconosciute e soddisfare la compatibilità, il metodo di spostamento tratta spostamenti (specificamente, rotazioni e traduzioni articolari) come sconosciuti e soddisfa l'equilibrio.

Considerare un semplice telaio del portale: il metodo di forza richiede la soluzione di reazioni ridondanti a supporti (forze esterne), mentre il metodo di spostamento risolve direttamente per rotazioni articolari (sostituzioni interne).Per una cornice con articolazioni rigide, questo approccio basato sullo spostamento comporta tipicamente meno sconosciute—spesso notevolmente meno.

Lo sviluppo del metodo di spostamento si è sviluppato in diverse fasi che spaziano dagli anni 1860 agli anni '30, culminando nel metodo di distribuzione del momento di Hardy Cross che domina l'analisi strutturale per tre decenni.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

11.5.1 Fondazioni teoriche: Formulazioni di prima stiffness

I semi concettuali del metodo di spostamento apparvero in diverse opere della metà del XIX secolo, anche se non fiorivano completamente fino all'inizio del XX secolo.

Clebsch (1862): Analisi di Truss da Stiffness Nel 1862 Alfred Clebsch, professore di fisica teorica a Göttingen, presentò nel suo trattato influente *Theorie der Elasticitä marcire Köperiodo* (Clebsch, 1862a) Un elegante algoritmo per l'analisi delle tre travi articolate del perno tridimensionale. Per ogni giunto, Clebsch ha introdotto tre componenti di spostamento cartesiano sconosciuti. Una tipica barra che collega due nodi collega sei componenti di spostamento, e per una struttura stabile, il sistema completo di equazioni segue da equilibrio, geometria e la legge di Hooke.

La formulazione di Clebsch era, in sostanza, una prima forma del metodo di rigidità diretta, che lavorava con rigidità dei membri piuttosto che con flessibilità, e li radunò attraverso la compatibilità geometrica e l'equilibrio. (Saint-Venant, 1855c), ha notato che questo approccio ha ricondotto alle note di conferenza di Navier del 1826, dove Navier aveva analizzato la decomposizione di una forza lungo tre barre coplanarie considerando le deformazioni (Navier, 1826, p. 33).

Saint-Venant affermò che nelle sue note di lezione del 1838 aveva presentato *il principio generale di tale metodo per la determinazione delle intensità e dei momenti delle reazioni*, e che nel 1843 aveva mostrato che *per questi tipi di problemi ci sono sempre lo stesso numero di equazioni come sconosciuti quando i membri della struttura sono piegati, estesi o compressi e torsi.* Mentre la priorità storica rimane poco chiara, il quadro concettuale è stato chiaramente emergente dalla metà del secolo.

Manderla (1880): Soluzioni Iterative Heinrich Manderla, giovane assistente di Monaco, presentò nel 1880 un metodo per analizzare i frame con le articolazioni rigide che lavoravano direttamente con le rotazioni articolari come sconosciute (Kurrer, 2003)Manderla non solo ha formulato le equazioni di equilibrio in termini di rotazione, ma ha anche proposto una procedura di soluzione iterativa, un'anticipazione presciente dei metodi che avrebbero dominato l'analisi strutturale cinquant'anni dopo. Il suo lavoro ha ricevuto un riconoscimento immediato limitato, ma ha costituito un importante legame concettuale nello sviluppo.

Mohr (1892): Disseminazione e Sviluppo Otto Mohr, nel suo giornale del 1892 su sollecitazioni secondarie nelle capriate (Mohr, 1892), presentata una versione modificata dell'approccio di Manderla che ha portato il metodo ad una maggiore attenzione tra gli ingegneri tedeschi. Il trattamento di Mohr ha chiarito l'interpretazione fisica: le rotazioni articolari erano i gradi naturali di libertà per le strutture con connessioni rigide, e l'equilibrio alle articolazioni ha fornito le equazioni di governo. Il calcolo dei momenti secondari nelle travature, mentre un'approssimazione (supponendo che gli effetti di flessione non influiscano significativamente gli spostamenti nodali in direzioni di utilità in coordinate), ha dimostrato la formulazione pratica).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

11.5.2 Metodo di riduzione della pendenza: Formulazione sistemica

Per i dettagli analitici, consultare §27.2

Il metodo di deflettorazione del pendio è emerso all'inizio del XX secolo come primo approccio basato su spostamento completo e sistematico all'analisi strutturale. Il metodo ha espresso i momenti di fine dei membri direttamente in termini di rotazioni articolari e di equilibrio forzato ad ogni giunto, producendo un sistema di equazioni per le rotazioni sconosciute.

Bendixen (1914): Sviluppo europeo Axel Bendixen, ingegnere tedesco, pubblicò una delle prime presentazioni sistematiche di ciò che sarebbe diventato il metodo di deflettore a pendenza nel 1914 (Bendixen, 1914). Per un raggio prismatico di lunghezza L con rotazione finale θ_A e θ_B e relativo spostamento finale Δ, Bendixen ha derivato le espressioni per i momenti finali:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}(2\theta_A + \theta_B - 3\psi) + M_{AB}^{FEM} \tag{11.1}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L}(\theta_A + 2\theta_B - 3\psi) + M_{BA}^{FEM} \tag{11.2}$$

dove $\psi = \Delta/L$ è la rotazione degli accordi e M_{AB}^{FEM}, M_{BA}^{FEM} sono i momenti fissi a causa del caricamento sul membro.

Queste equazioni di deflettore a pendenza hanno fornito un rapporto diretto tra i momenti di fine membro (che devono soddisfare l'equilibrio) e gli spostamenti congiunti (le sconosciute). Scrivendo equazioni di equilibrio in ogni articolazione - che la somma dei momenti di fine membro che si incontrano in un giunto deve uguale a qualsiasi momento articolare applicato - un sistema di equazioni per le rotazioni congiunte sconosciute ha portato.

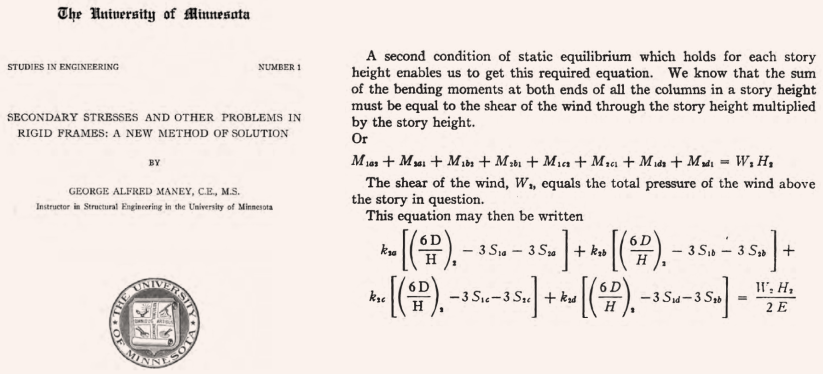
Maney (1915): American Systematization George A. Maney, professore all'Università del Minnesota, sviluppato e sistematizzato in modo indipendente il metodo di deflettore del pendio nel suo documento di riferimento 1915 (Maney, 1915). Il suo lavoro si è aperto con una chiara dichiarazione del bisogno pratico (Fig. 11.1):

> Con l'aumento delle dimensioni e della complessità delle strutture moderne sia in acciaio che in cemento, la relativa importanza pratica della teoria delle sollecitazioni indeterminate è notevolmente aumentata, e in particolare è diventato importante sviluppare metodi lavorabili che si conferiranno al designer di ufficio. Vista da un punto di vista puramente teorico, il campo di stress indeterminato è da molti anni un campo piuttosto ben lavorato, ma molti dei metodi standard di analisi lasciano molto a desiderare come metodi di lavoro per la progettazione di ufficio, e si ritiene che qualsiasi sistema di attacco che accorcia il lavoro dettagliato e riduce il lavoro puramente matematico La professione sarà accolta con difficoltà.
>
> Maney, 1915 «*Secondary Stresses and Other Problems in Rigid Frames: A New Method of Solution*»

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Il metodo esprime i momenti a ogni lato di un supporto in termini di rigidità dell'elemento adiacente e (non noto) angoli di rotazione. Poi le equazioni di equilibrio (comprese le "fixed end action") sono scritte per ogni articolazione, con conseguente sistema di equazioni lineari in termini di sconosciute rotazioni articolari $\boldsymbol{\theta}$. Una volta determinata la rotazione di ogni membro, si può facilmente sostituire e ottenere i momenti. È chiaramente un metodo di spostamento, anticipando le formulazioni di matrice che emergeranno decenni dopo.



The University of Minnesota

STUDIES IN ENGINEERING NUMBER 1

SECONDARY STRESSES AND OTHER PROBLEMS IN RIGID FRAMES: A NEW METHOD OF SOLUTION

BY

GEORGE ALFRED MANEY, C.E., M.S.
Instructor in Structural Engineering in the University of Minnesota

A second condition of static equilibrium which holds for each story height enables us to get this required equation. We know that the sum of the bending moments at both ends of all the columns in a story height must be equal to the shear of the wind through the story height multiplied by the story height.
Or

$$M_{1a_2} + M_{2a_1} + M_{1b_2} + M_{2b_1} + M_{1c_2} + M_{2c_1} + M_{1d_2} + M_{2d_1} = W_2 H_2$$

The shear of the wind, W_2, equals the total pressure of the wind above the story in question.
This equation may then be written

$$k_{2a}\left[\left(\frac{6D}{H}\right)_2 - 3S_{1a} - 3S_{2a}\right] + k_{2b}\left[\left(\frac{6D}{H}\right)_2 - 3S_{1b} - 3S_{2b}\right] +$$
$$k_{2c}\left[\left(\frac{6D}{H}\right)_2 - 3S_{1c} - 3S_{2c}\right] + k_{2d}\left[\left(\frac{6D}{H}\right)_2 - 3S_{1d} - 3S_{2b}\right] = \frac{W_2 H_2}{2E}$$

Figura 11.1: La formulazione del metodo di deflettorazione del pendio del 1915 di Maney (Maney, 1915)

La chiara presentazione di Maney e gli esempi di lavoro hanno reso il metodo accessibile agli ingegneri praticanti, riconoscendo che per molte strutture, le traduzioni congiunte potrebbero essere trascurate o trattate separatamente, semplificando l'analisi per risolvere solo le rotazioni congiunte. *deflettore di pendenza senza lati* versione dimostrata particolarmente efficiente per travi continue e cornici monostoria (Maney, 1915).

Vantaggi e limitazioni Il metodo di deflettorazione del pendio ha offerto vantaggi significativi rispetto al metodo di forza: meno sconosciute per i telai tipici (solo rotazioni articolari contro tutte le forze ridondanti), formulazione sistematica in cui le proprietà dei membri sono combinate attraverso equilibrio piuttosto che compatibilità, estensione naturale alle strutture con articolazioni rigide, e determinazione diretta di momenti in tutte le posizioni critiche.

Tuttavia, ha ancora richiesto di risolvere un sistema di equazioni simultanee, un significativo carico computazionale per le grandi strutture. Un telaio di dieci storie sottoposto al carico del vento potrebbe richiedere 40-50 rotazioni articolari come sconosciuti, con tempi di soluzione di 2-3 giorni per un ingegnere esperto.

11.5.3 Hardy Cross (1885–1959): Il metodo di distribuzione del momento

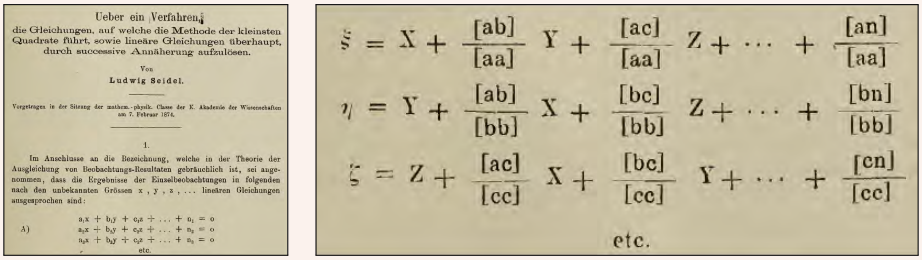
Per i dettagli analitici, consultare §27.3

COPIA DI REVISIONE

Il metodo di distribuzione del momento, introdotto da Hardy Cross nel 1930 (Cross, 1932), analisi strutturale rivoluzionaria, che ha trasformato la soluzione delle equazioni simultanee in un processo iterativo che potrebbe essere eseguito con un calcolo minimo – spesso a mano su un unico foglio di carta.[1].

Contesto storico: La ricerca dell'itterazione Nel 1930, l'analisi di cornici multistory sottoposte a carichi laterali (vento o sismico) era diventata un problema pratico pressante, in particolare negli Stati Uniti dove i telai in acciaio con connessioni rigide erano di costruzione standard. Il metodo di deflettore a pendenza, mentre sistematico, richiesto risolvere grandi sistemi di equazioni.

Carl Friedrich Gauss aveva descritto un approccio iterativo al suo studente Gerling nel 1823, e Philipp Ludwig von Seidel aveva formalizzato il metodo nel 1873. (Seidel, 1873) (Fig. 11.2). Il metodo Gauss-Seidel ha risolto un sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ Tuttavia, questi metodi hanno richiesto un'attenta attenzione ai criteri di convergenza e hanno offerto agli ingegneri poca comprensione fisica del comportamento strutturale da analizzare.


Ueber ein Verfahren, die Gleichungen, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate führt, sowie lineare Gleichungen überhaupt, durch successive Annäherung aufzulösen.

Von

Ludwig Seidel.

$$\xi = X + \frac{[ab]}{[aa]} Y + \frac{[ac]}{[aa]} Z + \cdots + \frac{[an]}{[aa]}$$
$$\eta = Y + \frac{[ab]}{[bb]} X + \frac{[bc]}{[bb]} Z + \cdots + \frac{[bn]}{[bb]}$$
$$\zeta = Z + \frac{[ac]}{[cc]} X + \frac{[bc]}{[cc]} Y + \cdots + \frac{[cn]}{[cc]}$$
etc.

Figura 11.2: Metodo di approssimazioni successive di Seidel 1873 per la risoluzione di sistemi lineari (Seidel, 1873). Mentre matematicamente suonava, mancava l'interpretazione fisica che gli ingegneri cercavano.

Hardy Cross, professore di ingegneria strutturale all'Università dell'Illinois, si avvicinò al problema da una prospettiva di ingegnere, e la sua idea chiave era quella di reinterpretare l'iterazione matematica come processo fisico: piuttosto che soddisfare simultaneamente tutte le equazioni di equilibrio, perché non farli rispettare sequenziali, congiunte da un giunto?

Il processo di distribuzione del momento Il metodo di cross inizia con tutte le articolazioni artificialmente fisse, impedendo la rotazione. I momenti fissi dovuti al carico vengono calcolati per ciascun membro. Poi, congiunto per giunto, i vincoli sono *rilasciato*, e il momento sbilanciato in ogni giunto viene distribuito ai membri dell'incontro in proporzione alle loro rigidità; questa distribuzione crea squilibri a giunti adiacenti, che vengono poi rilasciati ed equilibrati a loro volta.

I concetti chiave sono:

[1] A differenza dei tempi moderni, i primi lettori di ingegneria hanno studiato articoli tecnici in dettaglio e hanno inviato regolarmente commenti e critiche agli autori.

COPIA DI REVISIONE

Fattore di stanchezza: Per un membro del momento dell'inerzia I e lunghezza L con estremità fissa:

$$K = \frac{4EI}{L}$$

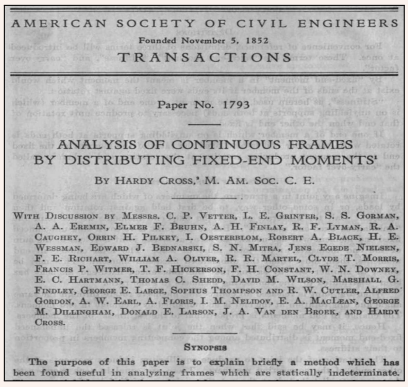
Fattore di distribuzione: Per un giunto con più membri che si riuniscono, la frazione di un momento sbilanciato assegnato al membro i is:

$$DF_i = \frac{K_i}{\sum K}$$

Carry Over Factor: Quando un momento M viene applicato ad una estremità di un fascio fisso, un momento di $M/2$ Questo fattore di assunzione di $1/2$ è fondamentale per il processo iterativo.

Impatto e adozione Il metodo di distribuzione del momento è stato immediatamente riconosciuto come trasformatore. (Cross, 1932) (Cross e Morgan, 1932) Nel giro di pochi anni, il metodo è stato insegnato in quasi ogni scuola di ingegneria in tutto il mondo. Gli ingegneri praticanti potrebbero analizzare strutture che in precedenza avrebbero richiesto specialisti di consulenza.

Il successo del metodo si è esteso oltre l'analisi strutturale, e lo stesso Cross ha dimostrato la sua più ampia applicabilità applicando la stessa filosofia iterativa per analizzare la distribuzione del flusso nelle reti di tubazioni e nei circuiti elettrici. (Cross, 1936), riconoscendo che questi sistemi hanno condiviso la stessa struttura matematica dell'equilibrio di rete, Fig. 11.3.


AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS
Founded November 5, 1852
TRANSACTIONS

Paper No. 1793

ANALYSIS OF CONTINUOUS FRAMES BY DISTRIBUTING FIXED-END MOMENTS

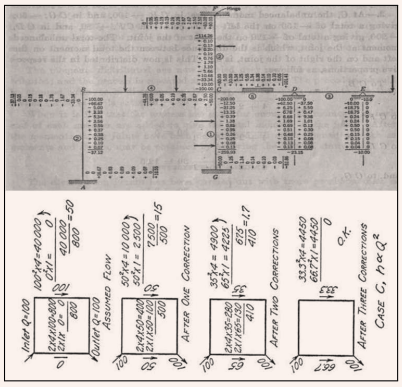
By Hardy Cross, M. Am. Soc. C. E.

With Discussion by Messrs. C. P. Vetter, L. E. Grinter, S. S. Gorman, A. A. Eremin, Elmer F. Bruhn, A. H. Finlay, R. F. Lyman, R. A. Caughey, Orrin H. Pilkey, I. Oesterblom, Robert A. Black, H. E. Wessman, Edward J. Bednarski, S. N. Mitra, Jens Egede Nielsen, F. E. Richart, William A. Oliver, R. R. Martel, Clyde T. Morris, Francis P. Witmer, T. F. Hickerson, F. H. Constant, W. N. Downey, E. C. Hartmann, Thomas C. Shedd, David M. Wilson, Marshall G. Findley, George E. Large, Sophus Thompson and R. W. Cutler, Alfred Gordon, A. W. Earl, A. Flores, I. M. Nelidov, E. A. MacLean, George M. Dillingham, Donald E. Larson, J. A. Van den Broek, and Hardy Cross.

Synopsis

The purpose of this paper is to explain briefly a method which has been found useful in analyzing frames which are statically indeterminate.

(a) Carta di riferimento del 1930 (Cross, 1932)



(b) Applicazioni per cornici e reti di tubazioni (Cross, 1936)

Figura 11.3: Hardy Cross carta trasformativa

Il successo del metodo derivava dalla sua chiarezza fisica: gli ingegneri capivano che cosa ogni passo compiuto. Richiedevano solo operazioni aritmetiche senza soluzione di equazione, era la correzione di sé (i eroi in un ciclo sono stati corretti in successive

COPIA DI REVISIONE

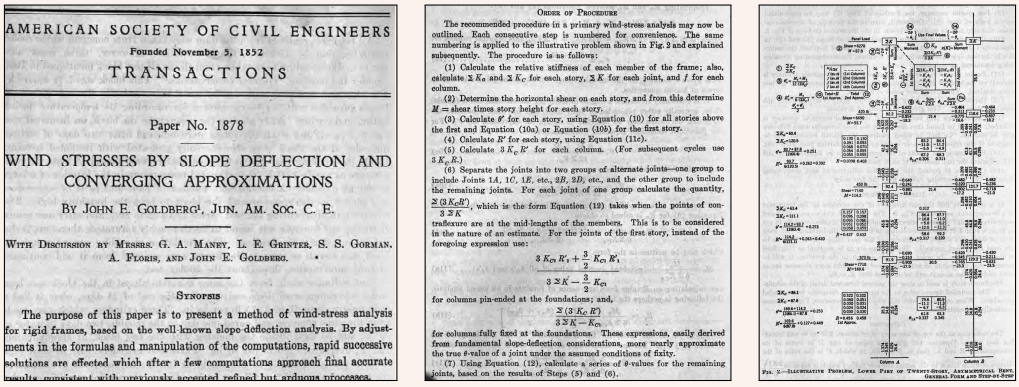
iterazioni), rimase flessibile (l'analista poteva fermarsi a qualsiasi accuratezza desiderata), e si è dimostrato ugualmente applicabile a piccole o grandi strutture.

La distribuzione dei movimenti ha dominato l'analisi strutturale dal 1930 al 1960, quando i computer digitali hanno cominciato a consentire i metodi di matrice che lo soppiantavano.

11.5.4 Prolungamenti e Variazioni

Goldberg (1934): Analisi del carico laterale Mentre la distribuzione del momento di Cross ha rivoluzionato l'analisi di cornici senza laterizio, il carico laterale ha presentato una sfida più complessa. La determinazione degli spostamenti di laterizi nella formulazione originale di Cross ha richiesto una procedura iterativa convoluta che ha frustrato molti ingegneri, in particolare in California dove l'analisi sismica è diventata critica dopo il devastante terremoto di San Francisco del 1906 e i suoi numerosi post-shocks.

Joseph E. Goldberg affrontò questa sfida nel 1934 (Goldberg, 1934 PDF) con un metodo che distribuiva pendii articolari (rotazioni) piuttosto che momenti. L'approccio di Goldberg era analogo al metodo di Cross, ma fece approssimazioni successive su piste sconosciute piuttosto che momenti sconosciuti (Fig. 11.4). Per i frame con laterway, il metodo di Goldberg ha fornito un percorso più diretto alla soluzione, distribuendo piste intorno al telaio fino a quando lo squilibrio non è diventato accettabilemente piccolo. Dopo la distribuzione, si potrebbe rapidamente trovare le deflettenze laterali di ogni piano, quindi calcolare i momenti finali in ogni fascio e colonna.


AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS
Founded November 5, 1852
TRANSACTIONS

Paper No. 1878

WIND STRESSES BY SLOPE DEFLECTION AND CONVERGING APPROXIMATIONS

By John E. Goldberg[1], Jun. Am. Soc. C. E.

With Discussion by Messrs. G. A. Maney, L. E. Grinter, S. S. Gorman, A. Floris, and John E. Goldberg.

Synopsis

The purpose of this paper is to present a method of wind-stress analysis for rigid frames, based on the well-known slope-deflection analysis. By adjustments in the formulas and manipulation of the computations, rapid successive solutions are effected which after a few computations approach final accurate results consistent with previously accepted refined but arduous processes.

Order of Procedure

The recommended procedure is a primary wind-stress analysis may now be outlined. Each consecutive step is numbered for convenience. The same numbering is applied to the illustrative problem shown in Fig. 2 and explained subsequently. The procedure is as follows:

(1) Calculate the relative stiffness of each member of the frame; also, calculate ΣK_{co} and ΣK_c for each story, ΣK for each joint, and f for each column.

(2) Determine the horizontal shear on each story, and from this determine M = shear times story height for each story.

(3) Calculate θ' for each story, using Equation (10) for all stories above the first and Equation (10a) or Equation (10b) for the first story.

(4) Calculate R' for each story, using Equation (11c).

(5) Calculate $3\,K_c\,R'$ for each column. (For subsequent cycles use $3\,K_c\,R$.)

(6) Separate the joints into two groups of alternate joints—one group to include Joints 1A, 1C, 1E, etc., 2B, 2D, etc., and the other group to include the remaining joints. For each joint of one group calculate the quantity, $\frac{\Sigma\,(3\,K_c R')}{3\,\Sigma K}$, which is the form Equation (12) takes when the points of contraflexure are at the mid-lengths of the members. This is to be considered in the nature of an estimate. For the joints of the first story, instead of the foregoing expression use:

$$\frac{3\,K_{co}\,R' + \frac{3}{2}\,K_{c}\,R'}{3\,\Sigma K - \frac{3}{2}\,K_{co}}$$

for columns pin-ended at the foundations; and,

$$\frac{\Sigma\,(3\,K_c\,R')}{3\,\Sigma K - K_{co}}$$

for columns fully fixed at the foundations. These expressions, easily derived from fundamental slope-deflection considerations, more nearly approximate the true θ-value of a joint under the assumed conditions of fixity.

(7) Using Equation (12), calculate a series of θ-values for the remaining joints, based on the results of Steps (3) and (6).

Fig. 2.—Illustrative Problem, Lower Part of Twenty-Story, Asymmetrical Rigid Frame and Step-by-Step

Figura 11.4: adattamento del 1934 di Goldberg di deflettore di pendenza per l'analisi del carico eolico (Goldberg, 1934 PDF)

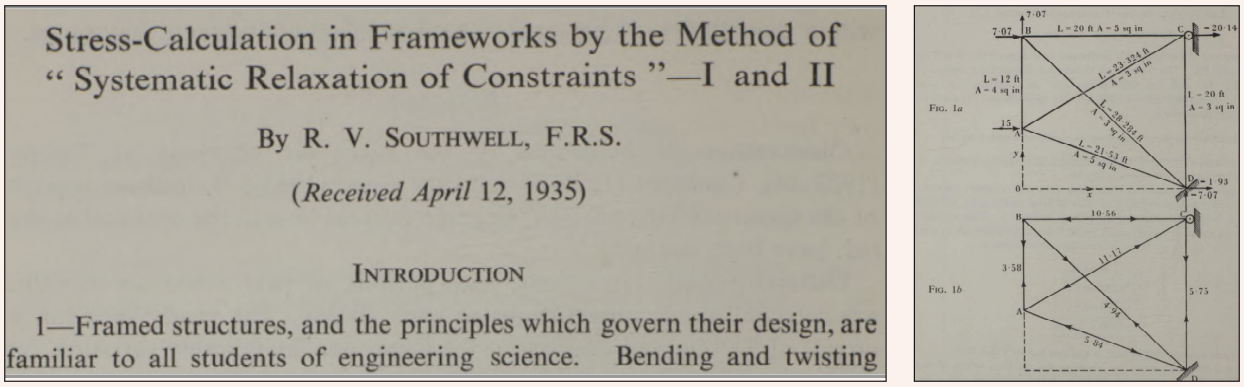
La relazione di Goldberg ha generato una vasta discussione tra i professori di ingegneria strutturale, con il dibattito che si concentra sull'efficienza computazionale e sull'interpretazione fisica. La sezione di discussione, che spazia da dieci pagine, ha incluso il commento da parte dei principali accademici del tempo. *così chiamato metodo di distribuzione del momento* era solo un modo di *alleviare la tensione sull'immaginazione che è necessario per visualizzare le distorsioni fisiche della struttura*. Al contrario, un commentatore ha elogiato

COPIA DI REVISIONE

il metodo Maney-Goldberg: *la semplicità, la rapidità e l'accuratezza che si possono ottenere nell'analisi di un telaio è davvero sorprendente.*

Il vantaggio principale è stato il rapido calcolo delle prime approssimazioni delle rotazioni finali in travi e colonne, e quindi accurate stime iniziali di momenti finali. Questa approssimazione fisica delle rotazioni ha formato il cuore del metodo Maney-Goldberg, dimostrando valore per la progettazione di edifici sottoposti a carichi eolici. Nonostante la sua promessa, il metodo è stato rapidamente oscurato da raffinazioni all'approccio di Cross e successivamente da metodi informatici. Saliklis e Parker, 2014 .

Southwell (1935): Il metodo di rilassamento Richard Southwell, lavorando indipendentemente ad Oxford, sviluppò il metodo di rilassamento nel 1935 (Southwell, 1935)L'interpretazione fisica di Southwell era elegante: immaginate un quadro inizialmente scaricato con vincoli articolari che impediscono lo spostamento. Quando vengono applicati carichi esterni, il quadro rimane in pericolo, tutto il carico è a carico dei vincoli. *relax rilassante* Se ad ogni fase il vincolo che porta il carico più grande è rilassato, le forze di costrizione residue diminuiscono verso zero. È fisicamente evidente che più del carico esterno sarà trasferito al quadro, fino a che la forza residua a carico dei vincoli diventi inferiore a quella del chap: regione della fiducia nei carichi applicati (Fig. 11.5).


Stress-Calculation in Frameworks by the Method of
"Systematic Relaxation of Constraints"—I and II

By R. V. Southwell, F.R.S.

(*Received April* 12, 1935)

Introduction

1—Framed structures, and the principles which govern their design, are familiar to all students of engineering science. Bending and twisting

(a) La carta del 1935 di Southwell

(b) Applicazione a capriate congiunte

Figura 11.5: Metodo di rilassamento di Southwell (Southwell, 1935)

Southwell, ignaro della carta di Cross del 1930 quando sviluppò il suo metodo, in seguito riconobbe che i due approcci erano *in sostanza esattamente equivalente*Tuttavia, Southwell ha notato un importante vantaggio: mentre la distribuzione del momento era particolarmente adatta a frame rigidi (comune nella pratica americana), il metodo di rilassamento applicato ugualmente bene a capriate con pin-jointed (più comune nella pratica britannica).

Il metodo di distribuzione del momento ha dominato la pratica di analisi strutturale fino all'avvento dei metodi degli elementi finiti negli anni '60. Il metodo di rilassamento, mentre meno prominente nell'analisi strutturale, ha trovato una vasta applicazione nella

COPIA DI REVISIONE

meccanica computazionale, dove i risolutori iterativi basati sul rilassamento rimangono ampiamente utilizzati per risolvere grandi sistemi di equazioni sparse.

11.5.5 Il metodo di spostamento: Riepilogo e Legacy

Il metodo di spostamento, sia nelle sue incarnazioni di deflettorazione e distribuzione del momento, rappresentava un progresso concettuale oltre il metodo di forza. Lavorando con spostamenti come sconosciuti primari e soddisfacenti, riduceva il numero di sconosciuti per strutture tipiche, prevedeva una formulazione più naturale per strutture con articolazioni rigide, portava ad efficienti procedure di soluzione iterativa (particolarmente di distribuzione del momento), e stabiliva il quadro intellettuale per il metodo di rigidità.

La filosofia del metodo di spostamento, che si inserisce in relazione con la rigidità dei membri e si applica all'equilibrio, diventerà la base per l'analisi strutturale della matrice e, in definitiva, il metodo degli elementi finiti.

11.6 Linee di influenza e carichi mobili

Mentre il metodo di spostamento ha trasformato l'analisi delle strutture fisse sotto carico statico, gli ingegneri civili hanno affrontato una sfida aggiuntiva: strutture soggette a carichi in movimento. I ponti ferroviari, in particolare, hanno richiesto agli ingegneri di determinare non solo le forze sotto una posizione di carico singola, ma la massima forza possibile come treno ha attraversato la struttura.

Questo problema richiedeva un quadro analitico diverso, che ha catturato come una quantità strutturale varia come un carico unitario si muove attraverso la struttura. La risposta è passata attraverso lo sviluppo della teoria delle linee di influenza, che sarebbe diventato indispensabile per la progettazione dei ponti ferroviari, la sfida dominante nell'ingegneria strutturale della fine del XIX secolo.

11.6.1 Winkler (1835–1888): Sviluppo precoce

Emil Winkler, professore al Politecnico tedesco di Praga, ha dato i primi contributi alla teoria delle strutture sotto carico in movimento. (Winkler, 1875) ha introdotto il concetto di rappresentare la variazione di una quantità strutturale (reazione, momento, taglio) come un carico unitario attraversa la struttura.

Winkler ha riconosciuto che la linea di influenza per qualsiasi forza o momento in una struttura statisticamente determinata potrebbe essere costruita esclusivamente da statici, trattando la posizione di carico unitaria come parametro sconosciuto.Per le strutture indeterminate, tuttavia, la linea di influenza incorporava le deformazioni strutturali -

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

richiedendo sia metodi di energia che i coefficienti di flessibilità sviluppati da Maxwell e altri (Timoshenko, 1953 PDF).

11.6.2 Principio di Müller-Breslau

Come indicato in precedenza (§11.4.4), il contributo fondamentale di Müller-Breslau è stato riconosciuto che le linee di influenza hanno un'interpretazione geometrica diretta: *la linea di influenza per una forza o un momento particolare ha la stessa forma della curva di deflettorazione che si traduce quando tale forza o momento viene data una sostituzione o rotazione unità, e la struttura è autorizzata a deformarsi di conseguenza* (Müller-Breslau, 1887).

Questo principio ha trasformato la costruzione della linea di influenza da un calcolo noioso ad un'elegante costruzione grafica. Un ingegnere potrebbe schizzare la forma defletta qualitativamente e determinare in tal modo dove il carico mobile ha prodotto l'effetto massimo — prezioso per il design preliminare e per la comprensione del comportamento strutturale.

11.6.3 Applicazioni e Legacy

La teoria della linea di influenza è diventata essenziale per determinare le forze massime sotto carichi mobili del treno, analizzando serie di carichi concentrati (carico ruote), ottimizzando forme strutturali per minimizzare gli effetti massimi e la comprensione del comportamento strutturale sotto varie posizioni di carico.

Mentre meno prominente nella pratica moderna (dove l'analisi del computer può valutare in modo efficiente più casi di carico), le linee di influenza rimangono concettualmente importanti per la comprensione del comportamento strutturale e sono ancora utilizzate per l'analisi delle buste e gli studi di posizionamento del carico.

11.7 Verso la Formulazione Matrix: Il Ponte Concettuale alla Computazione

I metodi di calcolo delle mani sviluppati tra il 1826 e il 1930, dall'equazione di tre momenti di Clapeyron alla distribuzione del momento di Cross, rappresentavano più di ingegnosi scorciatoie computazionali, contenevano, spesso implicitamente, il quadro concettuale che sarebbe stato formalizzato in seguito come analisi strutturale matrice e metodi di elementi finiti.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

11.7.1 La struttura matrice dei metodi classici

Considerare le equazioni di dissoluzione del pendio per un fascio o un telaio continuo. i e j, i momenti finali possono essere espressi come:

$$\begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_i^{FEM} \\ M_j^{FEM} \end{Bmatrix}$$

Questo è proprio un rapporto di rigidità membro della forma $\mathbf{f}^e = \mathbf{k}^e \mathbf{d}^e + \mathbf{f}_0^e$dove $\mathbf{k}^e$ è la matrice di rigidità del membro, $\mathbf{d}^e$ il vettore di spostamento membro, e $\mathbf{f}_0^e$ le forze di fine fissa.

Quando Maney assemblava le equazioni di deflettore del pendio per un'intera struttura, rafforzando l'equilibrio a ogni giunto:

$$\sum M_i = 0 \quad \text{at each joint}$$

stava implicitamente costruendo una matrice di rigidità globale $\mathbf{K}$ attraverso il montaggio di rigidità dei membri, cedendo il sistema:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{M}$$

dove $\boldsymbol{\theta}$ rappresenta tutte le rotazioni e $\mathbf{M}$ tutti i momenti applicati. Questa è proprio l'equazione di rigidità della struttura che sarebbe formalizzata negli anni '50 (Turner et al., 1956).

Allo stesso modo, i coefficienti di flessibilità di Mohr δ_{ij}— lo spostamento in posizione i a causa del carico unitario in posizione j—formare una matrice di flessibilità $\mathbf{F}$Il metodo di forza di Müller-Breslau ha sistematicamente assemblato questa matrice di flessibilità e l'ha invertita (concettualmente, risolvendo le equazioni di compatibilità) per trovare forze ridondanti.

$$\mathbf{FX} = \boldsymbol{\Delta}$$

relative forze ridondanti $\mathbf{X}$ a spostamenti di compatibilità $\boldsymbol{\Delta}$.

La dualità tra la forza e i metodi di spostamento, tra flessibilità e rigidità, era inerente ai metodi classici, ma sarebbe stata pienamente riconosciuta e sfruttata con le formulazioni matrici dell'età del computer.

11.7.2 Dall'itterazione alla soluzione Matrix

Il metodo di distribuzione del momento di Hardy Cross fornisce forse il ponte più chiaro dai metodi classici ai calcoli.

$$\theta_i = \theta_i^0 + \sum_j C_{ij} M_j$$

La sua distribuzione e il suo trasporto erano, in termini matrici, una iterazione Gauss-Seidel applicata al sistema $\mathbf{K}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{M}$.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Ciò che ha reso rivoluzionario il metodo di Cross non era il principio matematico (Gauss-Seidel iteration era noto) ma l'interpretazione fisica: gli ingegneri potevano visualizzare ogni iterazione come un processo fisico di rilascio e di restritzione delle articolazioni.

In età informatica, questa stessa visione informerebbe i risolutori iterativi per grandi sistemi di elementi finiti. La scelta tra soluzione diretta (analogo per risolvere le equazioni di deflettore di pendenza) e soluzione iterativa (analogo alla distribuzione di momento) dipenderebbe dalla dimensione del problema, dalla struttura di sparsità e dalla precisione richiesta—considerazioni anticipate dai metodi classici.

11.7.3 I limiti della calcolatore della mano: Impostazione della fase per la computazione

Nel 1950, i metodi di calcolo delle mani avevano raggiunto i loro limiti pratici. Un telaio a dieci piani sottoposto al carico del vento potrebbe richiedere 40-50 rotazioni articolari come sconosciuti (metodo di difesa della pista), 5-10 cicli di distribuzione del momento con un'attenta contabilità, 2–3 giorni di calcolo da un ingegnere esperto, e la verifica da ricalcolo indipendente per catturare errori aritmetici.

Per strutture ancora più complesse cornici, gusci o strutture tridimensionali con centinaia di membri, i metodi manuali sono diventati impraticabili indipendentemente da quanto intelligente la formulazione.

Il fattore limitante non era concettuale ma computazionale: formando e risolvendo grandi sistemi di equazioni, anche con tutte le intuizioni di metodi energetici, teoremi reciproci e procedure iterative, superava la capacità umana all'interno di scale di tempo di ingegneria pratica.

Il computer digitale, emergente negli anni '50, avrebbe eliminato questa limitazione, ma in modo critico, il quadro concettuale era pronto: relazioni di rigidità per i singoli membri, assemblaggio attraverso la compatibilità e l'equilibrio, soluzione da metodi diretti o iterativi. La trasformazione dal calcolo manuale all'analisi computazionale sarebbe una delle scale e velocità, non metodologia fondamentale.

11.7.4 Conclusione: Prosecuzione e Trasformazione

La storia dei metodi di calcolo delle mani rivela una potente verità sulla scienza dell'ingegneria: i progressi principali rappresentano spesso la raffinatezza e la sistematizzazione delle idee esistenti piuttosto che le rotture rivoluzionarie. Il metodo degli elementi finiti, quando emerse negli anni '50, sarebbe presentato da alcuni come un'innovazione radicale.

Ciò che è cambiato è stata la capacità di lavorare in scala: assemblare matrici di rigidità per migliaia di elementi, risolvere sistemi di migliaia di equazioni, visualizzare e post-processo risultati per strutture tridimensionali complesse. Il computer ha permesso agli ingegneri di applicare principi stabiliti a problemi di complessità senza precedenti.

COPIA DI REVISIONE

Il ponte dal calcolo manuale all'analisi degli elementi finiti non era quindi un chasm che richiedeva un salto, ma un percorso continuo di sviluppo. La sezione successiva esamina come questo percorso si è sviluppato - come i metodi perfezionati nell'era delle regole di scorrimento e dei fogli di calcolo trasformati in metodi computazionali che definiscono l'analisi strutturale moderna.

11.8 Requisiti fondamentali dell'analisi strutturale

Per i dettagli analitici, consultare §17.1.2.2

Dalla Fisica alle Equazioni di Campo

Dopo aver tracciato lo sviluppo storico dell'analisi strutturale del primo Navier trattamento sistematico attraverso le formulazioni matrici del mezzo secolo XX, ci fermiamo a distillare il principio essenziale che unifica ogni metodo incontrato e ogni metodo deve ancora venire. [2] (§10.5.7):

1. **Equilibrio**: Le forze interne devono bilanciare i carichi esterni; nessun elemento della struttura può sperimentare forze sbilanciate; ad ogni punto, il campo di stress deve soddisfare le equazioni dell'equilibrio statico (o dinamico).
2. **Leggi costituenti**: Le stringhe devono essere collegate a ceppi in base alle proprietà meccaniche del materiale, il materiale ci dice come la forza e la deformazione sono connesse, sia elastica, plastica o altro.
3. **Compatibilità dei luoghi di lavoro**: Le deformazioni devono essere geometricamente coerenti; la struttura rimane continua; non si stacca o si sovrappone; le vie devono derivare da un campo di spostamento continuo, monovalore, che rispetta le condizioni di supporto e mantiene la connettività tra i membri.

Una soluzione che viola qualsiasi di questi requisiti non è semplicemente approssimativo– è sbagliato. Un campo di stress in perfetto equilibrio è inutile se implica un materiale che non esiste. Un campo di spostamento che è perfettamente continuo ci dice nulla se i risultati stress violano l'equilibrio. I tre requisiti non sono opzioni indipendenti da cui possiamo scegliere; sono richieste simultanee che qualsiasi soluzione fisicamente realizzabile deve soddisfare.

[2] In strutture staticamente determinate, le equazioni di equilibrio da sole producono la distribuzione completa della forza. Le leggi costitutive e le condizioni di compatibilità diventano necessarie solo per i calcoli di spostamento o quando la struttura è stabilmente indeterminata.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

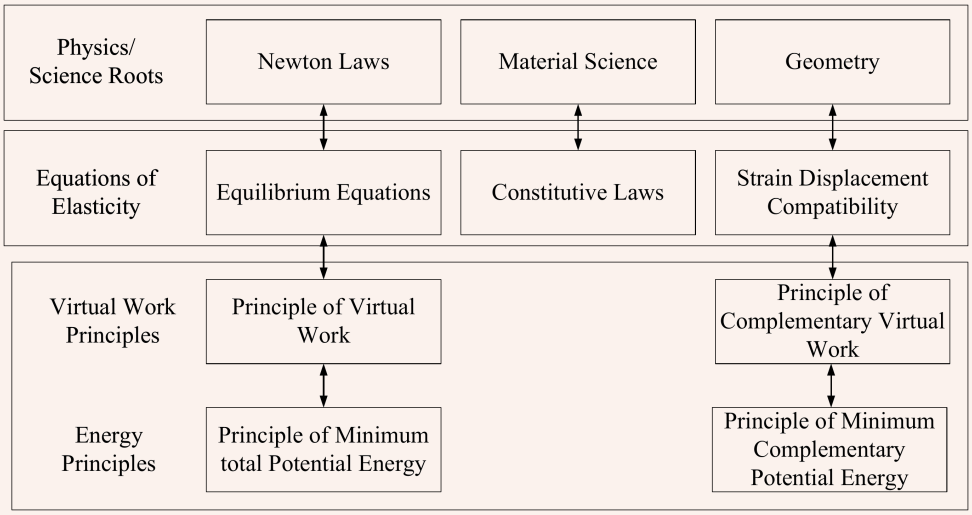


Figura 11.6: Dalla fisica newtoniana (top) attraverso equazioni di campo (middle) ai principi variazionali lagrangiani (bottom).

Tre livelli di Formulazione

Figura 11.6 mostra l'architettura logica della meccanica strutturale in tre livelli discendente, ciascuno che rappresenta un modo distinto di esprimere la stessa realtà fisica sottostante.

In alto, il *fondazioni fisiche*Le leggi di Newton governano l'equilibrio delle forze; la scienza materiale caratterizza come le sostanze rispondono al carico; la geometria costringe a deformare i corpi continui, non sono costrutti matematici ma verità empiriche sul mondo fisico, stabiliti attraverso l'osservazione e l'esperimento nel corso dei secoli.

La fila centrale rappresenta la *Formulazione Newtoniana o vettoriale*. Qui le basi fisiche sono gettate nel linguaggio delle equazioni differenziali e dei campi vettoriali. Le equazioni di equilibrio esprimono le leggi di Newton come la divergenza svaninte del tenore di stress—un equilibrio puntiforme delle forze in ogni posizione del continuum. Le leggi costitutive traducono il comportamento materiale in relazioni algebriche tra stress e tensori di tensione. Le equazioni dislocamento di tensione codificano la consistenza geometrica come relazioni differenziali tra il campo vettoriale di spostamento e il tenore di tensione. Questa formulazione, sviluppata principalmente da Cauchy, Navier e Saint-Venant nel XIX secolo, tratta le forze come le quantità primarie e procede attraverso operazioni vettoriali e equazioni differenziali parziali.

Le righe inferiori rappresentano il *Lagrangian o formulazione di energia*In questo contesto lo stesso contenuto fisico viene rielaborato nel linguaggio delle funzioni di energia scalare e dei principi variazionali. Piuttosto che rafforzare l'equilibrio in senso punto attraverso equazioni differenziali, caratterizzamo la soluzione come la configurazione che minimizza

COPIA DI REVISIONE

il potenziale totale energetico—o equivalente, la configurazione per cui il lavoro virtuale scompare.

Le due formulazioni—Newtoniano e Lagrangiano—sono matematicamente equivalenti. Ogni soluzione ottenuta risolvendo le equazioni differenziali della fila centrale può essere ugualmente ottenuta estremizzando le funzionalità energetiche della fila inferiore. Tuttavia differiscono profondamente nel carattere: la formulazione newtoniana parla di forze e del loro equilibrio; la formulazione lagrangiana parla di energia e della sua minimizzazione.

La dualità della Formulazione Lagrangiana

All'interno del quadro lagrangiano si trova un'ulteriore dualità, visualizzata nelle due colonne in fondo alla Figura 11.6Questa dualità rispecchia la distinzione tra spostamento e forza, tra quantità cinematiche e statiche.

Sul lato sinistro, il Principio del Lavoro Virtuale–tratta da Lagrange, 1788 nel suo *MéAnalitica del canique* alle statiche di Bernoulli, Johann, 1725 – e la sua controparte energetica, il Principio di Energia Totale Minima, forniscono dichiarazioni variazionali radicate nello spostamento. Questi principi affermano che tra tutti i campi di spostamento cinematicamente ammissibile, la vera soluzione minimizza la totale energia potenziale, o equivalentemente, che il lavoro virtuale scompare per qualsiasi sviluppo virtuale compatibile.

Sul lato destro si pone la formulazione complementare: il principio del lavoro virtuale complementare e il principio dell'energia potenziale complementare minima forniscono dichiarazioni variazionali radicate in vigore, che si sviluppano attraverso il lavoro di Crotti, 1888 e Engesser, 1889, afferma che tra tutti i campi di stress stabilmente ammissibile, la vera soluzione minimizza l'energia complementare. Iniziando con presupposti di stress che soddisfano automaticamente l'equilibrio, invocando leggi costitutive per ottenere ceppi, e poi rafforzando la compatibilità attraverso la minimizzazione dell'energia, questo duplice approccio garantisce inoltre che tutti e tre i requisiti siano soddisfatti – ma li attraversa nell'ordine opposto. Castigliano, 1879 teoremi, che riguardano i derivati dell'energia agli spostamenti e alle forze rispettivamente, purché gli strumenti pratici con i quali gli ingegneri sfruttassero questi principi.

Il ruolo centrale delle leggi costitutive

Nella formulazione newtoniana, essi forniscono il legame algebrico tra stress e tensori di tensione. Nella formulazione lagrangiana, definiscono la densità di energia di tensione da cui derivano tutte le quantità energetiche. Senza un comportamento materiale per collegare forza e deformazione, le due parti di qualsiasi formulazione sarebbero rimaste disconnesse——equilibrio non direbbe nulla circa lo spostamento, lo stress e la compatibilità.

La struttura simmetrica della Figura 11.6, con le sue due vie a livello lagrangiano, spiega perché il metodo di rigidità e il metodo di flessibilità devono produrre risultati identici

COPIA DI REVISIONE

quando correttamente applicato. Sono diversi traversali della stessa fisica sottostante-uno che inizia con spostamenti (soddisfacente compatibilità prima) e lavorare verso l'equilibrio, l'altro inizio con forze (soddisfacendo prima equilibrio) e lavorando verso la compatibilità.

11.9 Riassunto cronologico dei contributori

Tabella 11.1: Contributori all'analisi strutturale: A Riassunto cronologico

Autore	Data	Citazione	Contributo principale
Fondazioni Variazioni			
Leonhard Euler (1707–1783)	1744		Calcolo delle variazioni; principi variativi sottostanti FEM
Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)	1788		Meccanica analitica; formulazione variazionale della meccanica
Lord Rayleigh (1842–1919)	1870s		Metodi energetici per le vibrazioni; precursore del metodo Rayleigh-Ritz
Walther Ritz (1878-1909)	1909	(Ritz, 1909)	Metodo di approssimazione variabile; modello concettuale per elementi finiti basati su dislocazioni
Boris Galerkin (1871-1945)	1915	(Galerkin, 1915)	Metodo residuo ponderato; liberazione di FEM da principi variazionali
Richard Courant (1888-1972)	1943	(Courant, 1943)	Funzioni di prova pietsose su sottodomini triangolari; matrici sparse attraverso il supporto compatto
Metodi di calcolo della mano: Metodo di forza			
Claude-Louis Navier (1785–1836)	1826	(Navier, 1826)	Primo trattamento sistematico di travi statically indeterminate
Benoît Clapeyron (1799–1864)	1857	(Clapeyron, 1857)	Equazione a tre movimenti per raggi continui
Alfred Clebsch (1833–1872)	1862	(Clebsch, 1862a)	Metodo di spostamento anticipato per capriate con pin-jointed 3D

Continuare nella pagina successiva

COPIA DI REVISIONE

Tabella 11.1 continuato dalla pagina precedente

Autore	Data	Citazione	Contributo principale
James Clerk Maxwell (1831–1879)	1864	(Maxwell, 1864c)	Teorema reciproco; coefficienti di flessibilità
Christian Otto Mohr (1835-1918)	1868	(Mohr, 1868)	Teoremi di zona del momento; analogia del fascio coniugato; cerchio di Mohr
Emil Winkler (1835–1888)	1868	(Winkler, 1875)	Teoria della linea di influenza precoce per carichi in movimento
Philipp von Seidel (1821–1896)	1873	(Seidel, 1873)	Metodo iterativo per sistemi lineari (Gauss-Seidel)
Alberto Castigliano (1847–1884)	1879	(Castigliano, 1879)	Metodi energetici; teoremi relativi alla tensione energetica alle forze e agli spostamenti
Heinrich Manderla	1880		Analisi della struttura iterativa utilizzando rotazioni articolari come sconosciute
Barré de Saint-Venant (1797–1886)	1883	(Saint-Venant, 1855c)	Commento che collega Clebsch al precedente lavoro di Navier
Heinrich Müller-Breslau (1851–1925)	1886	(Müller-Breslau, 1886)	Sistematizzazione del metodo di forza; principio della linea di influenza
Metodi di calcolo della mano: Metodo di spostamento			
Axel Bendixen (1881-1946)	1914	(Bendixen, 1914)	Equazioni di difesa della pila (sviluppo europeo)
George A. Maney	1915	(Maney, 1915)	Metodo di difesa della pila (sistematizzazione americana)
Croce di Hardy (1885-1959)	1930	(Cross, 1932)	Metodo di distribuzione del Moment
Joseph E. Goldberg	1934	(Goldberg, 1934)	Distribuzione della pila per l'analisi del carico laterale
Richard Southwell (1888-1970)	1935	(Southwell, 1935)	Metodo di rilassamento
Differenze finite			
Karl Pearson (1857-1936)	1905	(Pearson, 1905)	Indagini sperimentali sulle dighe

Continuare nella pagina successiva

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 11.1 continuato dalla pagina precedente

Autore	Data	Citazione	Contributo principale
Lewis Fry Richardson (1881-1953)	1911	(Richardson, 1911)	Metodo di differenza finito per l'analisi dello stress
Metodi di matrice e elementi finiti			
John Argyris (1913-2004)	1954	(Argyris e Kelsey, 1960)	Analisi strutturale matrice; principi energetici; fondazioni di analisi non lineari
M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin, L.J. Topp	1956	(Turner et al., 1956)	Metodo di rigidità diretta; elementi di stress triangolari
Michael J. Turner (1909-1985)	1959	(Turner, 1959)	Esposizione formale del metodo di rigidità diretta
Ray W. Clough (1920-2016)	1960	(Clough, 1960)	Metodo di elemento finito coniato; estensione ai supporti continui
Edward L. Wilson (1931–2024)	1960	(Wilson, 1960)	Analisi di primo elemento finito non lineare
Nathan M. Newmark (1910-1981)	1959		Metodo di time-stepping per analisi dinamiche
E.L. Wilson & R.W. Clough	1962	(Wilson e Clough, 1962)	Prima analisi degli elementi finiti dinamici (formulazione di matrice del metodo Newmark)
O.C. Zienkiewicz (1921-2009) & Y.K. Cheung	1965	(Zienkiewicz, 1967)	Libro di testo dell'elemento finito
J.S. Przemieniecki (1924-2015)	1968	(Przemieniecki, 1968)	Libro di testo sistemico sull'analisi strutturale della matrice
Gilbert Strang & George Fix	1973	(Strang e Fix, 1973)	Teoria di convergenza matematica per FEM

11.9.1 Conclusioni

Questo capitolo ha tracciato l'evoluzione dell'analisi strutturale del lavoro pionieristico di Navier sui travi continui attraverso lo sviluppo di metodi generali per strutture staticamente indeterminate, culminando nei metodi di matrice e nell'analisi degli elementi finiti che dominano la pratica contemporanea.

Diversi temi emergono da questo arco storico:

Da Specifico a Generale: I primi metodi (travi continui di Navier, tre momenti di Clapeyron) affrontarono specifiche forme strutturali. A poco a poco si espongono metodi

COPIA DI REVISIONE

più generali, il teorema reciproco di Maxwell, i metodi energetici di Castigliano, il metodo di forza sistematico di Müller-Breslau, che raggiunse il culmine nei metodi di matrice, che trattano tutte le strutture (e in ultima analisi continua) all'interno di un'i unificato.

Complementarità dei metodi di forza e di spostamento: Il XIX secolo ha sviluppato entrambi gli approcci: metodo di forza (Maxwell, Mohr, Castigliano) e metodo di spostamento (deflessione a pila, distribuzione del momento). Ciascuno dei vantaggi offerti dipende dalla struttura e dalle preferenze dell'analista.

Teoria e Computazione: Ogni importante progresso è stato abilitato dalla tecnologia computazionale disponibile. Le equazioni di Clapeyron potrebbero essere risolte a mano. La distribuzione del Moment ha reso pratica l'analisi di frame multi story. I metodi di Matrix hanno richiesto computer digitali. L'interazione tra l'intuizione teorica e la capacità computazionale ha guidato il progresso in tutto.

Insight fisico e Rigor matematico: I migliori metodi combinarono la comprensione fisica (interpretazioni geometriche di Mohr, bilanciamento iterativo di Cross) con rigore matematico (teorema reciproco di Maxwell, principi energetici), che rendevano i metodi affidabili e insegnabili.

Proseguimento con la Meccanica del Continuum: Nel corso dell'analisi strutturale, si è sviluppata la meccanica continuum stabilita da Cauchy, Navier e dai loro contemporanei. Principi energetici, condizioni di compatibilità, relazioni costitutive, tutte riconducibili alla teoria fondamentale sviluppata all'inizio del XIX secolo.

L'analista strutturale moderno, che lavora con un sofisticato software di elementi finiti, si pone alla fine di una lunga catena di sviluppo intellettuale. Le matrici di rigidità degli elementi calcolate automaticamente dal software incarnano gli stessi principi di elasticità che Navier deriva dai primi principi. Il processo di assemblaggio echeggia il teorema reciproco di Maxwell. Gli algoritmi di soluzione implementano la filosofia del metodo di spostamento sviluppata da Bendixen, Maney e Cross.

Comprendere questo sviluppo storico fornisce più che una prospettiva storica, offre una panoramica del perché i metodi funzionano come fanno, quando sono appropriati e come potrebbero essere estesi. I metodi classici rimangono preziosi per l'insegnamento (fornire l'intuizione fisica), per l'analisi preliminare (offre stime rapide), e per la validazione (controllare i risultati del computer contro i calcoli manuali).

Mentre l'analisi strutturale continua ad evolversi, verso analisi non lineari, risposta dinamica, ottimizzazione, chap: regione della fiducia La sintesi realizzata dai pionieri dell'Ottocento, trasformando la matematica astratta della meccanica continuum nei metodi pratici dell'analisi strutturale, creò una disciplina che continua a crescere pur rimanendo fedele alle sue radici.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Vermeer, L'astronomo (1668)

La mano dello studioso si avvicina al globo celeste: la teoria finalmente afferra la struttura della realtà.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 12

Metodi computazionali

Abstract

Questo capitolo traccia lo sviluppo di metodi computazionali in analisi strutturali–metodo che fondamentalmente richiedono la soluzione di sistemi discretizzati di equazioni e quindi divenne pratico solo con il calcolo digitale. A partire dal metodo di differenza finita di Richardson per l'analisi dello stress (1911), seguiamo l'emergere di analisi strutturale di matrice attraverso le formulazioni energetiche di Argyris e la collaborazione Boeing-Berkeley che ha prodotto il metodo di rigidità diretta. Il capitolo culmina con la denominazione di Clough del metodo degli elementi finiti (1960), le prime applicazioni per l'analisi della diga, e il rapido sviluppo delle capacità non lineari e dinamiche. La decisione NASTRAN (1969) di abbandonare il metodo di forza segna il trionfo delle formulazioni basate sullo spostamento che definiscono la meccanica computazionale moderna.

12.1 Metodi di Differenze Finite per Continua 464
12.1.1 Pearson e Richardson: Analisi della Stress di Dam (1905–1911) 464
12.1.2 Metodi di soluzione iterativa 466
12.2 Analisi strutturale della matrice . . . 467
12.2.1 Kron: Analisi della rete e Analogie strutturali 467
12.2.2 Johann H. Argyris (1913-2004) 467
12.2.3 L'Aerospaziale (Ali d'Ali) Contesto: 1950 468
12.2.4 NBS/Navy; Samuel Levy . . 469
12.2.5 Boeing; Turner e il metodo diretto di stiffness 471
12.3 Il metodo degli elementi finiti 474
12.3.1 Fondazioni matematiche . . 475
12.3.2 Priorità e Terminologia: Che cosa è (e non è) il metodo degli elementi finiti 479
12.3.3 Ray Clough (1920-2016) . . . 479
12.3.4 Il computer e il programma di Berkeley 480
12.3.5 Norfork Dam: la prima domanda principale 481
12.3.6 Analisi non lineare e dinamica (1960-1962) 482
12.4 Consolidamento e Disseminazione . 483
12.4.1 Oleg Zienkiewicz (1921-2009) 483
12.4.2 La conferenza di Wright-Patterson (1965) 484
12.4.3 Richard Gallagher (1927-1997) 484
12.4.4 Metodo di forza Versus Stiffness Metodo Dibattito 484
12.4.5 La decisione NASTRAN (1969) 485
12.4.6 Generalizzazione 486
12.4.7 Libri di testo e Adozione in tutto il mondo 486
12.4.8 Impatto e applicazioni attuali 487
12.5 Riepilogo e contributi chiave 488
12.6 Conclusioni 490

COPIA DI REVISIONE

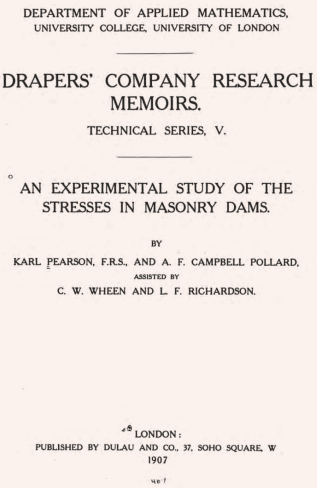
12.1 Metodi di Differenze Finite per Continua

I metodi di calcolo delle mani del capitolo 11 Anche un telaio multi-story moderato potrebbe coinvolgere 40 -50 sconosciuti di spostamento; formando le equazioni e portando a termine l'eliminazione e la sostituzione posteriore a mano potrebbe consumare diversi giorni di lavoro concentrato. Le procedure iterative hanno ridotto questo peso, ma sono rimaste intensive di lavoro e non hanno offerto un percorso sistematico ai problemi di complessità arbitraria.

Parallelamente a questi sviluppi nell'analisi strutturale, una linea di indagine separata ha cercato di risolvere le equazioni differenziali parziali che governano i media continui. Il metodo di differenza finita, che sostituisce derivati con differenze algebriche su una rete, ha offerto un percorso numerico ai problemi di elasticità intrattabili da mezzi analitici—aprendo possibilità che i metodi manuali non potessero mai affrontare.

12.1.1 Pearson e Richardson: Analisi della Stress di Dam (1905–1911)

Karl Pearson (1857–1936), professore all'Università College di Londra e una figura fondante di statistiche matematiche, è stato affidato a completare il monumentale lavoro di Todhunter e Pearson, 1893 Interessantemente per un matematico, si è poi fatto carico di problemi di elasticità applicati all'inizio del 1900, tra cui lo stress e la distribuzione delle cesoie nelle dighe murarie, che ha indagato attraverso esperimenti di modello e l'accompagnamento di lavori teorici (Pearson, 1905; Pearson et al., 1907)Fico. 12.1.


DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS,
UNIVERSITY COLLEGE, UNIVERSITY OF LONDON

DRAPERS' COMPANY RESEARCH MEMOIRS.

TECHNICAL SERIES, V.

AN EXPERIMENTAL STUDY OF THE STRESSES IN MASONRY DAMS.

BY

KARL PEARSON, F.R.S., AND A. F. CAMPBELL POLLARD,

ASSISTED BY

C. W. WHEEN AND L. F. RICHARDSON.

LONDON:
PUBLISHED BY DULAU AND CO., 37, SOHO SQUARE, W
1907

Figura 12.1: Il lavoro sperimentale di Pearson sulle dighe (Pearson et al., 1907)

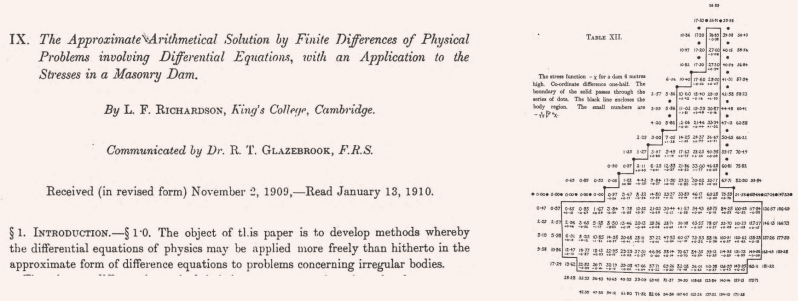
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Pearson e collaboratori erano candidi ai limiti di ciò che avevano raggiunto. L'introduzione al loro memoir del 1907 sottolinea che è stato trascorso un lungo periodo alla ricerca di soluzioni approssimative per contorni realistici di diga:

> L'attuale relazione sul lavoro sulle dighe di modelli condotta negli ultimi tre anni nel Dipartimento di Matematica Applicata presso l'Università di Londra, contiene, come deve essere frequentemente il caso in ricerche simili, un resoconto di scarsamente una decima delle indagini, sperimentali e teorici, che sono state effettuate o tentate. Molte settimane, non sarebbe esagerato dire molti mesi, sono state spesi nello sforzo di ottenere soluzioni non esatte, ma approssimative di Equation (iii) adatte (a) ai tipi attuali di dim cotour, e (b) a quello che abbiamo accertato sperimentalmente di essere la forma generale di distribuzione della tosaia sulla base. Se non siamo riusciti finora in questi tentativi, non segue che il successo non potrà più essere seguito ai nostri sforzi o probabilmente agli altri.
>
> Pearson et al., 1907 An experimental study of the stress in Masonry Dams

Uno degli assistenti riconosciuti in questo lavoro è Lewis Fry Richardson (1881-1953). Anche se Pearson riconobbe che i suoi sforzi analitici non erano riusciti, riconobbe che il successo potrebbe essere raggiunto da altri – e infatti fu Richardson stesso che, entro pochi anni, produsse una delle prime applicazioni di ingegneria sistematica di sostituzione delle equazioni differenziali di differenziale di governo dell'elasticità da parte di *equazioni di differenza finite su una maglia*, con attenzione pratica *confini irregolari* («punti di frontiera» contro «pezzi di corpo») e alla realtà computazionale di risolvere il sistema algebrico risultante (Richardson, 1911)Fico. 12.2. [1]



IX. *The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems involving Differential Equations, with an Application to the Stresses in a Masonry Dam.*

By L. F. Richardson, *King's College, Cambridge.*

Communicated by Dr. R. T. Glazebrook, *F.R.S.*

Received (in revised form) November 2, 1909,—Read January 13, 1910.

§ 1. Introduction.—§ 1·0. The object of tl.is paper is to develop methods whereby the differential equations of physics may be applied more freely than hitherto in the approximate form of difference equations to problems concerning irregular bodies.

Table XII.

Figura 12.2: Analisi di differenze finite di Richardson per un problema di stress della diga (Richardson, 1911)

Il contributo di Richardson in questo contesto può essere riassunto come:

1. Infuso il problema del continuum in un insieme finito di equazioni mesh-point attraverso differenze centrali

[1] Il giornale di Richardson è spesso citato dal suo volume anno (1911); il lavoro stesso è stato ricevuto nel 1909 e letto all'inizio del 1910.

COPIA DI REVISIONE

2. Gestione della complessità geometrica attraverso un trattamento speciale dei punti di confine
3. Risolvere il sistema lineare risultante con il successivo ravvicinamento—un metodo di soluzione semi-iterative ora ampiamente conosciuto come *Richardson!*—supplementato da mesh raffiment e idee di estrapolazione che in seguito divenne fortemente associato al suo nome

La tecnica di estrapolazione-utilizzando soluzioni su mesh successivamente raffinati per stimare la soluzione esatta— è ora universalmente conosciuta come *Richardson!extrapolazione* e rimane un punto di riferimento dell'analisi numerica.

Posizione nel calcolo strutturale. Per geometrie complesse, le differenze finite per la discorizzazione spaziale sarebbero in seguito soppiantate in gran parte dal metodo degli elementi finiti. *tempo di steppa* (ad esempio, i regimi di differenze centrali, il metodo di Newmark) restano essenziali nelle dinamiche strutturali, e molte implementazioni di elementi finiti combinano la discorizzazione spaziale da parte di FEM con l'integrazione del tempo da differenze finite.

12.1.2 Metodi di soluzione iterativa

La discorsizzazione a differenza finita dei PDE ellittici produce grandi sistemi di equazioni lineari con matrici a coefficiente ridotto e strutturato. Richardson ha riconosciuto che la soluzione diretta (eliminazione gaussiana) era impraticabile per i grandi sistemi e ha sviluppato approcci iterativi.

La Gauss... connessione del mare. Il metodo iterativo Richardson impiegato era strettamente legato a quello che Philipp Ludwig von Seidel aveva descritto nel 1874 (Seidel, 1873 PDF) per la risoluzione di sistemi derivanti da problemi minimi quadrati (§L.2.3.1). Il metodo–updating ogni sconosciuto in sequenza utilizzando i valori più recenti di tutti gli altri sconosciuti— era stato comunicato in precedenza da Gauss al suo studente Gerling (1823), anche se Seidel potrebbe essere stato inconsapevole di questo. *Gauss– Metodo di separazione*.§27.4 fornisce un esempio impressionante della corrispondenza stretta tra il metodo Moment-Distribution e la procedura di analisi iterativa Gauss-Seidel.

Super-relaxazione di successo (SOR). Un'accelerazione significativa è stata raggiunta introducendo un parametro di sovrarilassazione $\omega > 1$:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \frac{r_i^{(k)}}{a_{ii}}$$

dove $r_i^{(k)}$ è il residuo del il'equazione. La scelta ottimale ω dipende dalle proprietà spettrali del problema; per casi favorevoli, SOR può accelerare drammaticamente la convergenza rispetto alla Gauss di base–Imperazione di Seidel.

Queste tecniche iterative risulterebbero essenziali non solo per problemi di differenza

COPIA DI REVISIONE

finiti, ma in seguito per i grandi sistemi radi derivanti da discretizzazioni degli elementi finiti.

12.2 Analisi strutturale della matrice

I metodi di calcolo delle mani del capitolo 11–difesa delle piste, distribuzione del momento– contenuto implicitamente tutti gli ingredienti di analisi strutturale matrice. Ciò che era necessario era: (1) una notazione sistematica matrice per organizzare i calcoli, e (2) macchine di calcolo in grado di gestire i sistemi risultante. Entrambi sono emersi nel decennio successivo alla seconda guerra mondiale.

Il computer non ha cambiato i calcoli di analisi strutturale; ha cambiato ciò che l'analisi strutturale potrebbe calcolare.

12.2.1 Kron: Analisi della rete e Analogie strutturali

Gabriel Kron (1901-1968), lavorando alla General Electric, sviluppò metodi di tensore per analizzare reti elettriche che avevano una profonda influenza sull'analisi strutturale. (Kron, 1944) dimostrate profonde analogie tra reti elettriche e sistemi strutturali.

Il "metodo di lacrimolazione' di Kron'—decomposizione di un grande sistema in sottosistemi, analizzando ciascuno separatamente, quindi ricollegandosi attraverso le condizioni di compatibilità— tecniche di distruzione moderne anticipate La sua notazione di tenore, mentre inizialmente non familiare agli ingegneri strutturali, forniva un quadro matematico rigoroso per la trasformazione tra sistemi di coordinate.

12.2.2 Johann H. Argyris (1913-2004)

John Argyris (1913-2004), Fig. 12.14a, pubblicato una serie di articoli in quattro numeri di *Ingegneria dell'aviazione* nel corso del 1954-1955 che rappresentano una pietra miliare importante nella formalizzazione dell'analisi strutturale della matrice, che in seguito è stata raccolta e ampliata Argyris e Kelsey, 1960 .

Argyris ha tratto esplicitamente i teoremi energetici di Castigliano e i principi reciproci di Maxwell, gettandole in notazione matrice adatta al calcolo sistematico.

> L'analogia tra gli sviluppi delle flessiibilità e rigidità... mostra chiaramente che parallelamente all'analisi delle strutture con forze come sconosciute deve esserci una teoria corrispondente con deformazioni come sconosciute.
>
> Argyris e Kelsey, 1960 Energy theorems and structural analysis

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

La presentazione laterale nella sua tabella II (Fig. 12.7a) ha dimostrato che il metodo di forza classica e il metodo di spostamento sono stati realizzati attraverso passi esattamente analoghi – una chiarificazione concettuale che ha aiutato gli ingegneri a comprendere l'unità matematica che sta alla base dei diversi approcci.

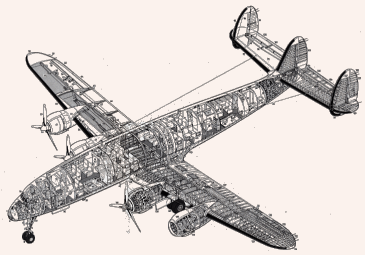
I contributi di Argyris includono:

- Notazione di matrice sistemica per analisi strutturali
- Esposizione chiara dei principi energetici in forma matrice
- Quadro che collega i metodi classici all'implementazione computazionale
- Fondazione per l'analisi non lineare attraverso formulazioni incrementali

12.2.3 L'Aerospaziale (Ali d'Ali) Contesto: 1950

Contesto storico La rapida transizione, durante la fine degli anni '40 e l'inizio degli anni '50, dalle ali rette convenzionali alle configurazioni di taglio e di taglio, ha creato problemi di analisi strutturale per i quali i metodi classici basati su travi non erano più adeguati. Le ali delta combinavano rapporti di basso aspetto, sottili fogli di copertura, spars non parallel e percorsi di carico altamente ridondanti, producendo un forte accoppiamento tra piegatura a senso di span, piegatura a corda e torsione. I modelli di stress e deformazione che ne risultano non potevano essere catturati in modo affidabile utilizzando idealizzazioni monodimensionali semplificate, in particolare nella regione radice e in layout multispar, che non erano solo teoricamente: limitano direttamente l'accuratezza e l'efficienza della progettazione di aerei in un momento in cui i margini di prestazione erano restringimento e l'iterazione sperimentale era costoso.

L'impulso per l'analisi strutturale computazionale è venuto in gran parte dall'industria aerospaziale. 12.3) era diventato complessi assemblaggi di costole, spars e pannelli sottili che formano configurazioni molto ridondanti a raggi e conchiglie.



(a) Constellazione Lockheed (1943-1958)



(b) Boeing 707 (1958-1979)

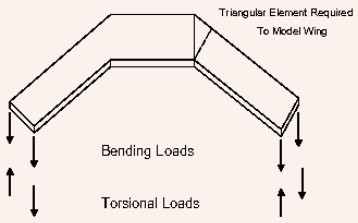
Figura 12.3: Aeromobili commerciali degli anni '50

Per tali strutture, il metodo classico della forza—costruito sulle opere di Maxwell, Mohre Castigliano— era ben adatta quando i pannelli potevano essere modellati in modo

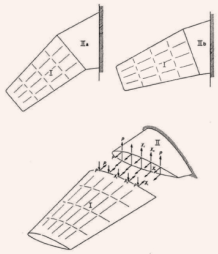
COPIA DI REVISIONE

conservativo come porta-forza-sveglia in piano; con una scelta giudiziosa di sistemi di forza ridondanti e di validazione sperimentale, anche le ali posteriori di alto rapporto di aspetto potrebbero essere ospitate (Felippa, 2001). Il metodo di spostamento classico (slope-deflection) anche trovato applicazione nelle vibrazioni e analisi aeroelastic, dove i calcoli di spostamento accurati erano essenziali.

Tuttavia, le esigenze militari degli aerei stavano cambiando. Le ali a forma di Delta per il volo supersonico richiedevano elementi di pannello bidimensionali della geometria arbitraria, triangolare e quadrilatero, che non potevano più essere idealizzati come membri unidimensionali (Fig. 12.4a). Questa sfida di "deletawing" ha guidato lo sviluppo di nuovi approcci analitici e computazionali.



(a) Struttura di prova delta del lato del reticolo (Clough e Wilson, 1999)



(b) I tentativi di soluzione basati sulla flessibilità (Argyris e Kelsey, 1960)

Figura 12.4: Il problema dell'ala delta e i tentativi di soluzione precoce

12.2.4 NBS/Navy; Samuel Levy

Durante il primo periodo della Guerra Fredda, il National Bureau of Standards (NBS, predecessore di NIST) ha mantenuto una stretta e sostenuta collaborazione di ricerca con l'Ufficio Aeronautico della Marina Militare degli Stati Uniti. I requisiti di navale per le configurazioni ad alta velocità, spazzata e di delta-wing hanno messo in richieste senza precedenti sui metodi di analisi strutturale, in particolare per i programmi di analisi aeronautica altamente ridondanti e sottili in cui si sono verificati i classici programmi di semplificazione di elaborazione di elaborazione di elaborazione di elaborazione.

Levy, 1953 È una carta di riferimento, purtroppo raramente citata al di fuori della letteratura aerospaziale, che rappresenta uno dei primi tentativi sistematici di formulare il problema delta-wing in modo computazionalmente trattabile, matrice-orientato e preda il lavoro Boeing discusso di seguito.

COPIA DI REVISIONE

> Il carico portato dall'ala è considerato la somma di (1) che trasportava dagli spars e dalla copertura in curvatura a senso di ampiezza, (2) che trasportava dalle costole e coprire foglio in curvatura a senso di accordo, e (3) che trasportava dal foglio di copertura in torsione. Il carico portato da ciascuno di questi tre meccanismi è determinato in termini di deflettori ai giunzioni delle costole e dei disgiunti di rotazione.
>
> Levy, 1953 «*Structural analysis and influence coefficients for delta wings*»

Il metodo si basa sul principio di *deformazioni coerenti*, in cui la risposta strutturale dell'ala si esprime interamente in termini di un limitato insieme di variabili di spostamento — cioè le deflettori alle giunzioni di costole e spars. L'ala è concettualmente decomposta in meccanismi di carico interagenti: curvatura a senso di span di spars e fogli di copertura, piegatura a corda di costole e fogli di copertura, e torsione portato principalmente dai fogli di copertura (Fi. 12.5). Ogni meccanismo contribuisce alle forze interne espresse in termini di deflessioni di giunzione, rafforzando così la compatibilità cinematica.

L'equilibrio è applicato equando, ad ogni giunzione, la somma delle forze interne ai carichi applicati esternamente,

$$P_r = L_r^S + L_r^R + L_r^T,$$

che porta, su assemblea su tutte le giunzioni, alla relazione globale

$$\{P\} = [A]\{y\},$$

dove $[A]$ è una matrice di rigidità composita ottenuta per sovrapposizione dei tre meccanismi. Le deflettezioni sono poi ottenute da

$$\{y\} = [A]^{-1}\{P\},$$

dopo di che forze interne e sollecitazioni sono recuperati da sostituzione posteriore.

A livello di singoli membri, Levy scrive anche relazioni di conformità locali $\{y\} = [\delta]\{L\}$ e la forma di rigidità equivalente $\{L\} = [\delta]^{-1}\{y\}$La formulazione di Levy è incentrata sullo spostamento e sulla base di matrice, ma rimane specifica per i problemi: la decomposizione nei meccanismi strutturali è adattata alle ali delta, e l'astrazione dell'elemento non è ancora universale. Il suo lavoro è quindi meglio inteso come un passo cruciale di transizione verso l'analisi basata sulla rigidità, piuttosto che come metodo di elemento finito nel senso moderno.

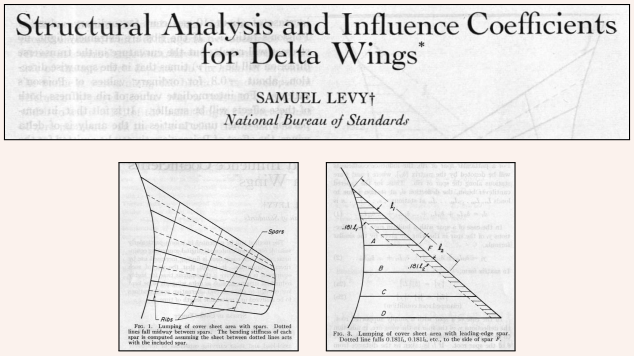
Levy (1953): Method of Consistent Deformations

$$\{P\} = [A]\{y\}, \qquad \{y\} = [A]^{-1}\{P\},$$

dove l'equilibrio nodale è scritto direttamente in termini di deflettori di giunzione, e la matrice di rigidità composito $[A]$ è ottenuto da sovrapposizione di contributi di rigidità basati su meccanismo (ripiegamento dispar, piegatura della costola, torsione).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.


Structural Analysis and Influence Coefficients for Delta Wings*

SAMUEL LEVY†

National Bureau of Standards

Figura 12.5: Dettagli di Levy, 1953

12.2.5 Boeing; Turner e il metodo diretto di stiffness

Nel giugno 1952, Ray W. Clough (1920-2016), poi giovane assistente professore presso UC Berkeley, si unì a Boeing come Summer Facoltà Fellow sotto la supervisione di M. Jonathan Turner (Clough, 2004). Assegnata all'unità di dinamica strutturale, Clough è stata impegnata nell'analisi delle caratteristiche vibrazione e deflettori di un grande modello strutturale di dilatazione. I primi tentativi di rappresentare l'ala come un assemblaggio di elementi di fascio unidimensionali si sono rivelati inadeguati, confermando i limiti delle idealizzazioni classiche già identificate nella ricerca delta-wing contemporanea.

La chiave concettuale di Turner, articolata esplicitamente in Turner et al., 1956, era di inquadrare l'analisi strutturale interamente in termini di spostamenti nodali piuttosto che di forze interne; due condizioni sono state imposte come fondamentali: equilibrio di forze e compatibilità delle deformazioni. Quando gli spostamenti nodali sono presi come gli sconosciuti, la determinanza statica diventa infondata; il campo di spostamento corretto è quello per cui l'equilibrio è soddisfatto.

Il metodo viene introdotto richiamando la relazione elementare per una molla elastica lineare,

$$F = k\,\delta,$$

e estendendolo a sistemi multi-grado di libertà utilizzando la notazione di matrice,

$$\{F\} = [K]\{\delta\}.$$

La matrice di rigidità globale $[K]$ si ottiene con la somma diretta delle matrici di rigidità di singole unità strutturali — travi, spars, costole, idraulici e piastre — ciascuno di essi si riferisce ad un sistema comune di coordinate nodali.

Operativamente, Turner definisce la costruzione di $[K]$ colonna per colonna: mentre tutti i gradi di libertà nodali sono tenuti fissi, un singolo componente di spostamento è imposto a un nodo; le forze necessarie per far rispettare che lo spostamento popola la colonna corrispondente. Prima dell'imposizione delle condizioni di confine, la matrice è singolare,

COPIA DI REVISIONE

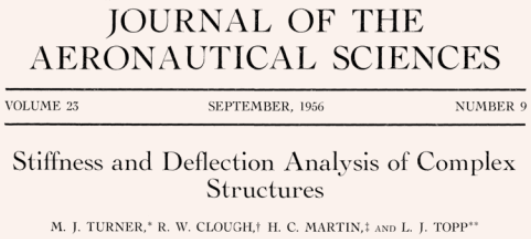
riflettendo modalità corpo rigido. Le condizioni di supporto sono applicate eliminando i componenti di spostamento prescritti, fornendo un sistema nonsingolare ridotto.

Turner (1956–1959): Direct Stiffness Method

$$\{F\} = [K]\{\delta\}, \qquad [K] = \sum_e K^e,$$

dove ogni elemento rigidezza matrice K^e contribuisce alla rigidità globale mediante la sovrapposizione. I sostituzioni vengono risolti prima; le forze interne e gli stress seguono la sostituzione posteriore.

Turner ha presentato la prima esposizione formale di questa procedura in occasione di una riunione del pannello delle strutture e dei materiali AGARD a Aquisgrana (Turner, 1959)Ha inoltre notato che i problemi non lineari, che si pongono a grandi deflettori o effetti termici, potrebbero essere trattati attraverso una linearizzazione incrementale con aggiornamenti di rigidità, anticipando gli sviluppi successivi nell'analisi non lineare.


JOURNAL OF THE
AERONAUTICAL SCIENCES

VOLUME 23 SEPTEMBER, 1956 NUMBER 9

Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures

M. J. TURNER,* R. W. CLOUGH,† H. C. MARTIN,‡ AND L. J. TOPP**

Figura 12.6: Analisi strutturale della matrice (Turner et al., 1956 PDF)

Il consolidamento finale del metodo di rigidità diretta non si è verificato attraverso un nuovo progresso concettuale, ma attraverso la sua codificazione sistematica, che ha avuto luogo nel suo libro di riferimento. *Teoria dell'analisi strutturale di Matrix* (Przemieniecki, 1968 PDF). Disegnando direttamente sull'evoluzione del Boeing e sulla formulazione AGARD di Turner, Przemieniecki ha presentato il metodo di rigidità come unificato, struttura basato su elementi applicabile a capriate, travi, cornici, griglie e piastre.

Per i dettagli analitici, consultare §42.2.2

Le innovazioni chiave del metodo sono state:

- **Element Stiffness Matricis:** Ogni membro strutturale è caratterizzato da una matrice di rigidità $[k]$ le forze di fine elemento relative a spostamenti finali: $\{f\} = [k]\{d\}$
- **Trasformazione in Coordinate Globali:** Le matrici di elementi, naturalmente espresse nelle coordinate locali, si trasformano in un sistema di coordinate globali comune

COPIA DI REVISIONE

- **Montaggio per Superposition:** La matrice di rigidità della struttura globale $[K]$ è assemblato sommando i contributi di tutti gli elementi, nel rispetto della connettività
- **Partizione e Soluzione:** L'equazione di rigidità del padrone $\{F\} = [K]\{D\}$ è diviso per separare i luoghi noti e sconosciuti, quindi risolto per gli sconosciuti
- **Sostituzione posteriore:** Le forze di estremità degli elementi sono recuperate da matrici di rigidità degli elementi e spostamenti calcolati

Il termine "direct"' distingue questo metodo dai metodi di flessibilità (forza) precedenti che richiedeva la determinazione di quali forze erano ridondanti. Il metodo di rigidità funziona direttamente con spostamenti come sconosciuti, che non richiede l'identificazione di ridondanze. Ogni struttura, determinata o indeterminata, viene trattata in modo uniforme (Przemieniecki, 1968 PDF).

Il potere del metodo di rigidità diretta sta nel suo carattere sistematico e algoritmico:

1. Definire elementi e nodi
2. Generare matrici di rigidità degli elementi (da formule standard)
3. Trasformare in coordinate globali
4. Assemblare la matrice di rigidità globale
5. Applicare le condizioni di confine
6. Risoluzioni $[K]\{D\} = \{F\}$ per spostamenti
7. Recuperare le forze dell'elemento

Ogni passo segue regole deterministiche, rendendo il metodo ideale per l'implementazione del computer.

12.2.5.1 Flessibilità contro la stanchezza: un dibattito continuo

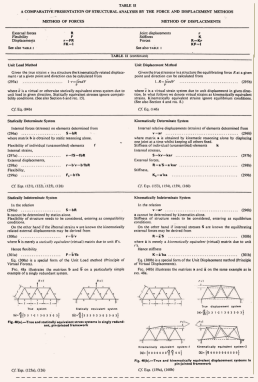
Fin dalla metà degli anni '50, si è discusso in corso sulla supremazia del metodo di flessibilità rispetto al metodo di rigidità.

La presentazione laterale della tabella II in Argyris e Kelsey, 1960 PDFFico. 12.7, ha cercato di dimostrare che il metodo di forza classica e il metodo di spostamento stavano attraversando esattamente la stessa sequenza di passi. Przemieniecki, 1968 PDF[2] pubblicato il suo libro seminale confrontando i due metodi con numerosi esempi.

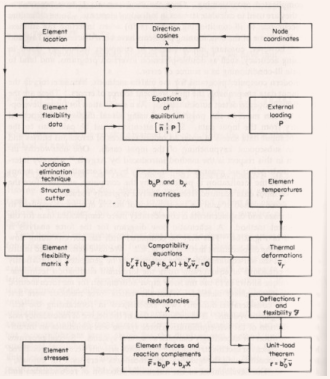
Alcuni ingegneri, alla fine in grado di scrivere programmi Fortran, hanno concluso che i metodi avevano capacità simili e la scelta di uno o l'altro era una questione di gusto. La maggior parte dei gruppi di strutture, mantenendo la tradizione, optato per il metodo classico della forza. Ma i pochi ingegneri che hanno provato a implementare entrambi

[2]Che ha introdotto molti concetti e nozioni attualmente utilizzati oggi, rimane uno dei migliori libri sul tema.

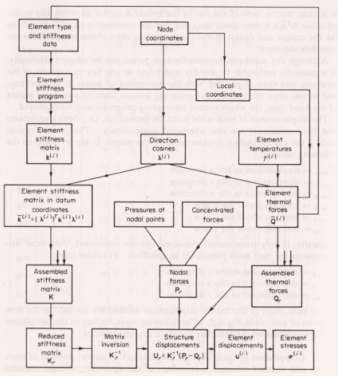
COPIA DI REVISIONE



(a) Il confronto tabulare di Argyris



(b) Metodo di forza



(c) Metodo di sostituzione

Figura 12.7: Confronto tra la forza e gli approcci di spostamento (Argyris e Kelsey, 1960; Przemieniecki, 1968)

hanno notato una differenza significativa. E che era prima del metodo di rigidità diretta, che non ha doppia controparte sotto la decomposizione, è apparso (Felippa, 2001).

I codici metodo Legacy classici della forza continuarono ad essere utilizzati in molte aziende aerospaziali. La scissione ricorda una risposta di Einstein quando chiese la reazione della vecchia guardia alla nuova fisica: "non li convincimmo; li abbiamo sopravvissuti." Gli ingegneri strutturali assunti negli anni '40 e '50 erano spesso in posizioni manageriali negli anni '60, favorendo il metodo della forza classica.

12.3 Il metodo degli elementi finiti

Transizione: Dalla profondità diretta agli elementi finiti. Alla fine degli anni '50, il metodo di rigidità diretta aveva raggiunto una forma algoritmica matura e completamente generale. Le strutture erano idealizzate come assemblaggi di componenti discreti, matrici di rigidità degli elementi sono state assemblate in un sistema globale, le condizioni limite sono state imposte dall'eliminazione dei vincoli, e gli spostamenti sono stati risolti prima con le forze recuperate dalla sostituzione posteriore. Ciò che rimase irrisolto non era la procedura computazionale, ma la sua interpretazione e la portata.

Il decisivo passo concettuale verso il metodo degli elementi finiti consisteva nel riconoscere che la stessa struttura basata sulla rigidità poteva essere applicata sistematicamente a *mezzi continui* introducendo la suddivisione artificiale in elementi dotati di campi di spostamento assunte. Questo passo unificato analisi strutturale matrice con teorie variazionali e di approssimazione sviluppate indipendentemente dalla matematica e dalla meccanica. Il metodo degli elementi finiti non è così emerso come sostituzione del metodo di rigidità

COPIA DI REVISIONE

diretta, ma come sua naturale estensione da assemblaggi strutturali discreti a continui di geometria arbitraria.

12.3.1 Fondazioni matematiche

I metodi di matrice sviluppati a Boeing contenevano tutti gli ingredienti di ciò che sarebbe diventato il metodo degli elementi finiti, ciò che mancava era il quadro concettuale unificante che collegava la pratica ingegneristica alla teoria matematica, che si stava sviluppando parallelamente attraverso il lavoro dei matematici.

Ritz (1878-1909). Walther Ritz (1878-1909) ha sviluppato una tecnica di approssimazione per problemi variazionali: esprime la funzione sconosciuta come una combinazione lineare di funzioni ammissibili, con coefficienti determinati attraverso la minimizzazione dell'energia (Ritz, 1909).[3]

Galerkin (1871-1945). Boris Galerkin (1871–1945) metodi di approssimazione prolungati oltre problemi variazionali attraverso il metodo dei residui ponderati (Galerkin, 1915): richiedere che il residuo dell'equazione di governo sia ortogonale alle funzioni di peso scelte.

Nella meccanica strutturale computazionale, il metodo di Galerkin non è solo una generalizzazione storica delle tecniche variazionali; è il principio unificante che collega differenze finite, metodi energetici e elementi finiti. Con l'equilibrio in senso integrale attraverso l'ortogonalità del residuo allo spazio delle variazioni ammissibili, Galerkin fornisce la forma debole utilizzata in pratica. Quando le funzioni di prova e peso sono scelte identiche (la scelta Bubnov-Galerkin), la formulazione risultante è proprio quella utilizzata nell'analisi degli elementi finiti standard di spostamento. In questo senso, il metodo degli elementi finiti è meglio considerato non come un'invenzione separata, ma come una particolare discorsizzazione Galerkin applicata agli spazi di approssimazione polinomiale.

Per i dettagli analitici, consultare §52.3.4

Alexander Hrennikoff (1941). Alexander Hrennikoff (1896-1984), un ingegnere strutturale russo-canadese, introdusse il *analogia del reticolo* per risolvere problemi di elasticità (Hrennikoff, 1941)Il suo metodo di "framework" ha sostituito una piastra o una membrana continua con un reticolo equivalente di elementi a barre unidimensionali, il cui comportamento collettivo ha approssimato quello del continuum. Sebbene limitato a domini rettangolari e incapace di gestire geometrie arbitrarie, l'approccio ha stabilito il concetto fondamentale di discotizzazione di un dominio continuo in un assemblaggio di elementi più semplici– il nucleo concettuale di analisi finita.

Richard Courant (1888-1972). Richard Courant (1888-1972), lavorando indipendentemente da Hrennikoff e avvicinandosi al problema da una prospettiva puramente matematica,

[3] Lord Rayleigh ha rivendicato la priorità, portando al nome "Rayleigh–Ritz metodo."

COPIA DI REVISIONE

introdusse funzioni di prova a senso pezzo definite sopra sottoregioni triangolari nel suo discorso del 1943 alla American Mathematical Society (Courant, 1943).

Courant ha iniziato rivedendo il metodo classico Rayleigh-Ritz, in cui si cerca di minimizzare un funzionale $I(\phi)$ approssimando la soluzione attraverso combinazioni lineari di funzioni coordinate $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$Fico. 12.8:

$$\phi_n = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \cdots + c_n\omega_n \tag{12.1}$$

I coefficienti c_i sono determinati sostituendo questa espressione nel problema variazionale e risolvendo il sistema risultante di equazioni lineari derivanti dalla condizione di minimizzazione:

$$I(\phi_n) = F(c_1, \ldots, c_n) = \min . \tag{12.2}$$

Mentre teoricamente sonoro, Courant ha osservato i limiti pratici di questo approccio:

Ritz's construction proceeds as follows: We start with an arbitrarily chosen system of "*coordinate functions*"

(13) $$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots,$$

which should satisfy the two conditions:

(a) Any linear combination

(14) $$\phi_n = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \cdots + c_n\omega_n$$

of them is admissible in the variational problem.

(b) They should form a complete system of functions in the sense that *any* admissible function ϕ and its relevant derivatives may be approximated with any degree of accuracy by a linear combination of coordinate functions and of their corresponding derivatives, respectively.

If we begin with such a system of coordinate functions, it is clear that for n sufficiently large and for a suitable choice of the coefficients $c_1, c_2, \cdots, c_n$ of (14) we can find admissible functions ϕ_n for which $I(\phi_n)$ differs arbitrarily little from d. In other words, it is possible to find a minimizing sequence $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n, \cdots$ as a sequence of linear combinations of the coordinate functions. In order to obtain such a minimizing sequence we choose the c_i in the following manner. We consider any function ϕ_n defined by (14) and substitute it in our variational problem. $I(\phi_n)$ then becomes a function $F(c_1, \cdots, c_n)$ of the n parameters c_i which we may now determine from the ordinary minimum problem of the calculus

(15) $$I(\phi_n) = F(c_1, \cdots, c_n) = \min.$$

Figura 12.8: Il coraggio presenta *prova funcrr* (Courant, 1943)

> La difficoltà che sfida l'abilità inventiva del matematico applicato è trovare le funzioni coordinate adeguate e valutare l'accuratezza del risultato. Da un punto di vista pratico quasi ogni successo dipende dalla selezione delle funzioni coordinate. Se queste funzioni sono scelte senza un adeguato riguardo all'individualità del problema il compito di calcolo diventerà senza speranza.
>
> Courant, 1943 «*Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*»

Per i dettagli analitici, consultare §48.6

Il Courant si è poi rivolto a metodi di differenza finiti, notando la loro superiorità in molti casi perché "'finite differenze sono attaccate direttamente ai valori della funzione stessa senza un mezzo intercettante come le funzioni coordinate più o meno arbitrarie"""""""" Questa osservazione lo ha portato a proporre una rilettura cruciale che sarebbe diventata la base concettuale del metodo degli elementi finiti:

COPIA DI REVISIONE

> Se i problemi variazionali contengono derivati non superiori al primo ordine il metodo di differenza finita può essere subordinato al metodo Rayleigh-Ritz considerando nella competizione solo funzioni ϕ che sono lineari nelle mesh di una suddivisione della nostra rete in triangoli formati da diagonali delle piazze della rete. Per tali funzioni poliedri gli integrali diventano somme espresse dal numero finito di valori di ϕ nei punti netti e le condizioni minime diventano le nostre equazioni di differenza.
>
> Courant, 1943 «*Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*»

La chiave di lettura qui è profonda: piuttosto che selezionare le funzioni di coordinate globali che abbracciano l'intero dominio, si può invece usare semplici *lineare a senso unico* funzioni definite localmente su sottoregioni triangolari. Su ogni triangolo, la funzione ϕ varia linearmente, e la continuità viene applicata ai bordi condivisi tra triangoli adiacenti. Le quantità sconosciute diventano semplicemente i valori di funzione ϕ_i ai vertici (net-point) della triangolazione; quando tali funzioni lineari (poliedrali) a senso pezzo vengono sostituite in un'integrale variabile come l'integrale Dirichlet

$$D(v) = \iint_B \left(v_x^2 + v_y^2 \right) dx\, dy, \tag{12.3}$$

l'integrale si riduce a una somma finita che coinvolge solo i valori nodali, e le condizioni variazionali producono un sistema di equazioni algebriche lineari per questi sconosciuti.

Il Courant ha immediatamente riconosciuto la generalizzazione di questa interpretazione che ha permesso:

> Una tale interpretazione suggerisce una vasta generalizzazione che offre grande flessibilità e sembra avere un notevole valore pratico; invece di iniziare con una rete quadratica o rettangolare, possiamo considerare fin dall'inizio qualsiasi superficie poliedrica con bordi su una rete arbitrariamente scelta (preferibilmente triangolare) . I nostri integrali di nuovo diventano somme finite, e la condizione minima sarà equazioni per i valori di ϕ Mentre queste equazioni sembrano meno semplici delle equazioni di differenza originali, si ottiene l'enorme vantaggio di una migliore adattabilità ai dati del problema e quindi si possono spesso ottenere buoni risultati con pochissimo calcolo numerico.
>
> Courant, 1943 «*Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*»

Nell'appendice al suo indirizzo, Courant ha dimostrato il metodo sul problema della torsione Saint-Venant per una sezione trasversale con più connessioni — una cornice quadrata con un foro quadrato. Esplosione della simmetria per ridurre il dominio computazionale a un etto della sezione trasversale, ha applicato sia il metodo classico Rayleigh-Ritz con funzioni di prova polinomiale che il suo nuovo approccio reticolare.

> Nei reti-tringles le nostre funzioni sono state scelte come lineari, in modo che il problema variazionale si traduce in equazioni lineari per le u_i.
>
> Courant, 1943 «*Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*»

COPIA DI REVISIONE

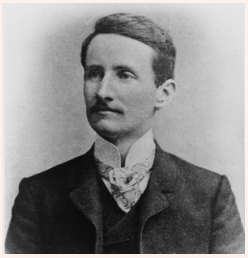
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

I risultati hanno mostrato una rapida convergenza della rigidità torsionale S: caso a) con due sconosciute rese $S = 0.344$; caso b) con tre sconosciute $S = 0.352$; caso e) con cinque sconosciute prodotte $S = 0.353$; e caso (d) con nove sconosciuti—corresponding al metodo di differenza finito ordinario— anche dato $S = 0.353$. Notevolmente, anche la triangolazione più corest con solo due valori nodali sconosciuti ha catturato la rigidità all'interno 3% del risultato convergente.

Il Courant ha concluso con una valutazione dell'ampia applicabilità del metodo e una dichiarazione previsionale:

> Questi risultati mostrano in se stessi e, comparando, il metodo generalizzato delle reti triangolari sembra avere vantaggi... È ovviamente adattabile a qualsiasi tipo di dominio, molto più della procedura Rayleigh-Ritz in cui la costruzione di funzioni ammissibili di solito offrirebbe ostacoli decisivi. In una pubblicazione separata verrà mostrato come il metodo può essere esteso anche ai problemi delle piastre e ad altri problemi che coinvolgono derivati più elevati.
>
> Courant, 1943 «*Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*»

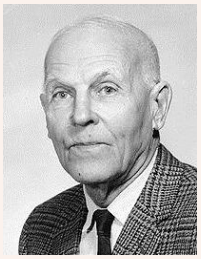
Questo ha promesso l'estensione a problemi di piastra — richiedendo C^1 La continuità per le equazioni di quarto ordine—si rivelerebbe molto più impegnativo di quanto forse previsto dal Courant, e avrebbe occupato i ricercatori di elementi finiti per decenni a venire. Tuttavia, il quadro concettuale essenziale era ora in atto: soluzioni approssimative ai problemi di valore limite potrebbero essere costruite suddivise in elementi geometrici semplici, definendo le funzioni di prova polinomiale a senso pezzo su questi elementi, e determinando i parametri nodali sconosciuti attraverso il principio variazionale.



(a) Walther Ritz (1878-1909)



(b) Boris Galerkin (1871-1945)



(c) Hrennikoff (1896-1984)



(d) Richard Courant (1888-1972)

Figura 12.9: Fondamenti matematici del metodo degli elementi finiti

Tenuto in isolamento, la formulazione di Courant è stata spesso citata, in modo retrospettivo, come prima apparizione dell'idea dell'elemento finito. Si sono fatti reclami simili, da diverse prospettive disciplinari, per diversi sviluppi appena riesarati. Per evitare confusione derivante da tale etichettatura retrospettiva, è utile chiarire esplicitamente come la terminologia e la priorità vengano utilizzate nel presente conto storico.

COPIA DI REVISIONE

12.3.2 Priorità e Terminologia: Che cosa è (e non è) il metodo degli elementi finiti

Nella letteratura storica, le dispute prioritarie che circondano il metodo degli elementi finiti spesso derivano da usi diversi di terminologia piuttosto che disaccordo sostanziale sulla matematica o algoritmi sottostanti. Molto prima dell'introduzione del termine "elemento finito", i matematici avevano sviluppato potenti tecniche di approssimazione basate su principi variazionali (Ritz), residui ponderati (Galerkin), e funzioni di prova a senso pezzo su sottodomini (Courant). Questi contributi costituiscono fondazioni matematiche essenziali, ma non costituiscono da soli un metodo computazionale generale per l'analisi ingegneristica.

Al contrario, le formulazioni di rigidità matrice sviluppate in ingegneria aerospaziale durante gli anni '50 hanno fornito una procedura completa e algoritmica per il montaggio e la risoluzione di grandi sistemi di equazioni di equilibrio, ma sono stati inizialmente inquadrati in termini di componenti strutturali piuttosto che continue discreti. Il metodo di elemento finito è emerso quando queste due linee di sviluppo sono stati unificati: i media continui sono stati discorsizzati in sottoregioni finite dotate di campi di spostamento precedentemente governati e i principi di spostamento.

In questo conto, il metodo degli elementi finiti non è quindi inteso come un'unica invenzione attribuibile ad un individuo, ma come la convergenza della teoria del ravvicinamento matematico, l'analisi strutturale matrice e il calcolo digitale.

12.3.3 Ray Clough (1920-2016)

La 2a Conferenza ASCE sulla Computazione Elettronica, tenutasi a Pittsburgh nel settembre 1960, ha fornito a Clough l'opportunità di presentare il metodo alla comunità dell'ingegneria civile. La sfida principale era selezionare un nome appropriato. A Boeing, "metodo di rigidità diretta" ha descritto la procedura di assemblaggio ma non l'innovazione essenziale di discorsizzare i media continui in elementi con i campi di spostamento assunti.

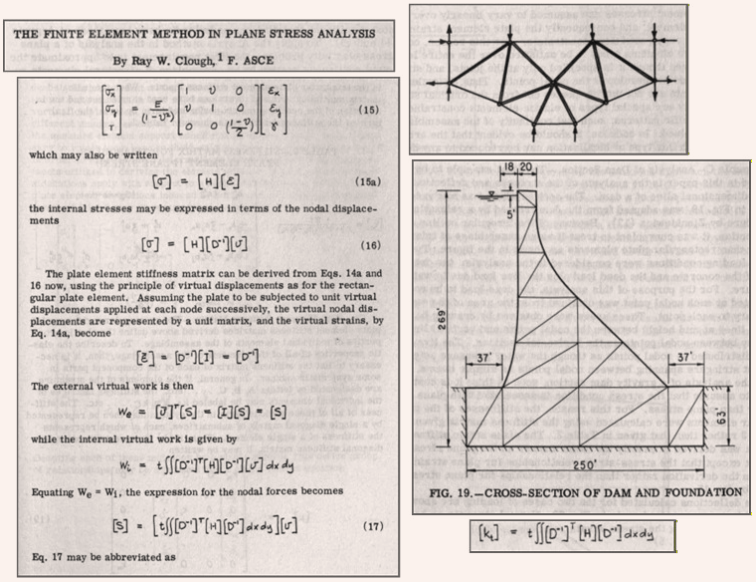
Osservando l'analogia alle differenze finite–ma riconoscendo che le equazioni di elasticità sono state applicate in modo indipendente nelle regioni discrete—La ricerca ha deciso che questi blocchi di costruzione dovrebbero essere chiamati "finite element."' La sua carta è stata intitolata "The Finite Element Method in Plane Stress Analysis"'' (Clough, 1960)Fico. 12.10.

Il documento concluso con osservazioni che rimangono rilevanti:

> Gli esempi precedenti hanno dimostrato l'applicabilità dell'approccio dell'elemento finito all'analisi dei problemi di stress aereo in generale. I risultati sembrano indicare che il metodo è molto efficace fintanto che la variazione di stress lineare assunta all'interno degli elementi è ragionevolmente rappresentativa della variazione di stress effettiva.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



THE FINITE ELEMENT METHOD IN PLANE STRESS ANALYSIS

By Ray W. Clough,[1] F. ASCE

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau\end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \left(\frac{1-\nu}{2}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\epsilon_x\\ \epsilon_y\\ \gamma\end{bmatrix} \quad (15)$$

which may also be written

$$[\sigma] = [H][\epsilon] \quad (15a)$$

the internal stresses may be expressed in terms of the nodal displacements

$$[\sigma] = [H][D'][v] \quad (16)$$

The plate element stiffness matrix can be derived from Eqs. 14a and 16 now, using the principle of virtual displacements as for the rectangular plate element. Assuming the plate to be subjected to unit virtual displacements applied at each node successively, the virtual nodal displacements are represented by a unit matrix, and the virtual strains, by Eq. 14a, become

$$[\bar{\epsilon}] = [D'][I] = [D']$$

The external virtual work is then

$$W_e = [\bar{v}]^T[S] = [I][S] = [S]$$

while the internal virtual work is given by

$$W_i = t\iint[D']^T[H][D'][v]\,dx\,dy$$

Equating $W_e = W_i$, the expression for the nodal forces becomes

$$[S] = \left[t\iint[D']^T[H][D']dx\,dy\right][v] \quad (17)$$

Eq. 17 may be abbreviated as

FIG. 19.—CROSS-SECTION OF DAM AND FOUNDATION

$$[k_i] = t\iint[D']^T[H][D']\,dx\,dy$$

Figura 12.10: La carta di Clough del 1960 nomina il metodo dell'elemento finito (Clough, 1960)

> Un importante vantaggio di questo metodo di analisi è che è completamente compatibile con l'analisi di altri tipi di sistemi strutturali, come cornici, capriate, ecc. Quindi non è un problema analizzare un sistema costituito da combinazioni di tali elementi. È necessario solo stabilire le matrici di rigidità dei vari tipi di elementi...
>
> Clough, 1960 *«The finite element method in plane stress analysis»*

Quando è stato presentato, il documento ha avuto un impatto immediato – il metodo richiesto "computer digitali automatici' non ancora disponibile per i tecnici strutturali tipici.

12.3.4 Il computer e il programma di Berkeley

Nel 1957, Clough iniziò un corso a Berkeley dal titolo "Matrix Analysis of Structures"., con 4K di memoria a 16 bit, era stato installato nel College of Engineering, che poteva risolvere al massimo 40 equazioni; solo le mesh grossolane erano fattibili.

Uno studente di laurea, Edward L. Wilson (1931–2024), fu insoddisfatto dello sforzo necessario per risolvere problemi di elementi finiti utilizzando programmi di matrice algebra disponibili. Nel 1958 iniziò a sviluppare un programma di elementi finiti automatizzati basato su elementi di stress piani rettangolari.

Nel 1959, l'IBM 704 è stato installato—32K di memoria a 32 bit con aritmetica a punto variabile, circa 100 volte più veloce dell'IBM 701. Questo ha permesso l'analisi di strutture

COPIA DI REVISIONE

pratiche con mesh sottili, trasformando gli elementi finiti da una curiosità di ricerca in uno strumento di ingegneria pratico.

Gli sforzi di programmazione di Wilson culminarono in SAP (Programma di analisi strutturale), che ha distribuito liberamente alle università e alle imprese di ingegneria in tutto il mondo. Questa strategia di diffusione aperta ha accelerato l'adozione del metodo degli elementi finiti e ha stabilito una tradizione di sviluppo software condiviso a Berkeley che ha influenzato le generazioni di codici di analisi strutturale.

12.3.5 Norfork Dam: la prima domanda principale

Nel 1920, il professor R.E. Davis ha condotto studi per la diga di Hoover. Alla fine degli anni '50, modelli e studi materiali per la diga di Oroville sono stati condotti dai professori Raphael, Eberhart e Pirtz. Era naturale che la prima applicazione importante del programma di elementi finiti appena sviluppato sarebbe stata ad una diga.

Su raccomandazione del Dr. Roy Carlson, consulente del distretto di Little Rock del Corpo degli ingegneri, Clough ha presentato una proposta per analizzare Norfork Dam—una diga di gravità con una crepa verticale indotta dalla temperatura vicino al centro. La proposta ha dimostrato la capacità del metodo di modellare strutture di geometria arbitraria con diverse proprietà materiali nella diga e nella fondazione.

La proposta Clough è stata accettata su una proposta analoga del computer di Richard MacNeal Il progetto Norfork ha fornito l'opportunità di estendere il metodo all'analisi non lineare della chiusura della crepa sotto carico idrostatico. Wilson e lo studente laureato Ian King hanno condotto le analisi dettagliate. La significativa conclusione ingegneristica: la diga cracked era sicura.

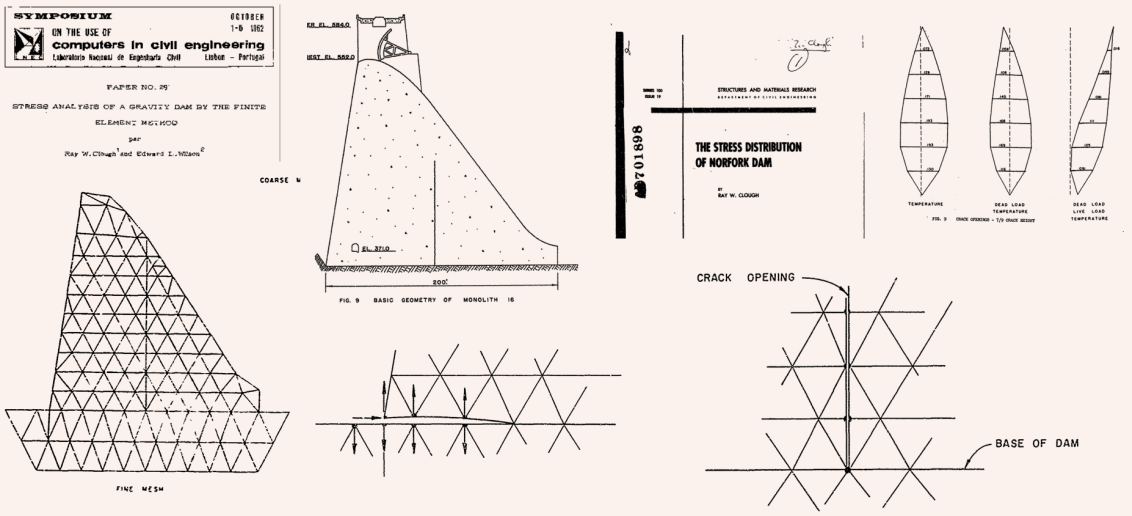


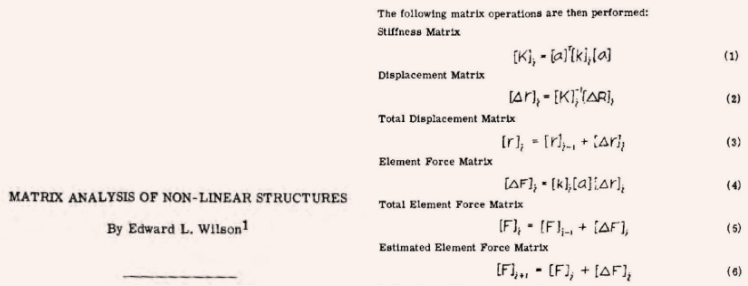
Figura 12.11: Analisi degli elementi finiti di Norfork Dam (Clough, 1962; Clough e Wilson, 1962)

COPIA DI REVISIONE

Il rapporto del Corpo degli Ingegneri (Clough, 1962) fu presentato nel 1962 e un documento relativo fu presentato al Simposio sull'uso dei computer in ingegneria civile a Lisbona (Clough e Wilson, 1962). Questa era solo la seconda volta "elemento finito" apparì in un titolo di carta fuori Berkeley.

12.3.6 Analisi non lineare e dinamica (1960-1962)

Lo stesso anno (1960) vide la pubblicazione della prima analisi degli elementi finiti non lineari, mentre Wilson, lavorando su un progetto NSF sotto la direzione di Clough, scrisse un programma di analisi del frame bidimensionale con un rapporto non lineare di curvatura del momento definito dalla Ramberg-Osgood equazione. I carichi sono stati applicati in modo incrementale, producendo un'analisi pushover-type (Wilson, 1960)Fico. 12.12.



MATRIX ANALYSIS OF NON-LINEAR STRUCTURES

By Edward L. Wilson[1]

The following matrix operations are then performed:

Stiffness Matrix

$$[K]_i = [a]^T[k]_i[a] \quad (1)$$

Displacement Matrix

$$[\Delta r]_i = [K]_i^{-1}[\Delta R]_i \quad (2)$$

Total Displacement Matrix

$$[r]_i = [r]_{i-1} + [\Delta r]_i \quad (3)$$

Element Force Matrix

$$[\Delta F]_i = [k]_i[a][\Delta r]_i \quad (4)$$

Total Element Force Matrix

$$[F]_i = [F]_{i-1} + [\Delta F]_i \quad (5)$$

Estimated Element Force Matrix

$$[F]_{i+1} = [F]_i + [\Delta F]_i \quad (6)$$

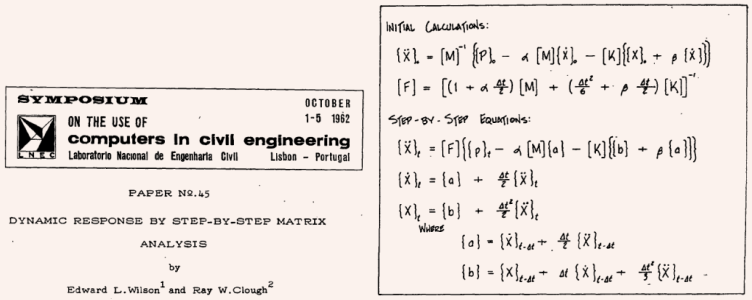
Figura 12.12: Prima analisi degli elementi finiti non lineari (Wilson, 1960)

> L'approccio di carico incrementale presentato in questo documento fornisce un metodo generale di analisi delle strutture con proprietà materiali non lineari, che si approssima l'analisi di una struttura per somma delle analisi di una serie di strutture che agiscono linearmente sotto un piccolo incremento di carico esterno.
>
> Wilson, 1960 «*Matrix Analysis of Nonlinear Structures*»

Wilson e Clough hanno presentato un altro documento di riferimento al Simposio di Lisbona del 1962 sull'analisi dinamica delle risposte passo dopo passo[4] (Wilson e Clough, 1962). Questo documento formulato in matrice forma l'algoritmo di time-stepping sviluppato da Nathan M. Newmark Newmark, una figura tortuosa nell'ingegneria strutturale dell'Università dell'Illinois, aveva introdotto il suo sistema di integrazione incondizionatamente stabile nel 1959 (Newmark, 1959). L'implementazione Wilson-Clough ha eliminato la necessità di iterazione ad ogni passo di volta attraverso un'inversione iniziale di matrice, rendendo il metodo di Newmark pratico per grandi sistemi di elementi finiti, Fig. 12.13.

[4]quando la frequenza del carico applicato (eccitazione) di una struttura è inferiore a circa un terzo della sua frequenza naturale più bassa di vibrazione, allora possiamo trascurare gli effetti inerziali e trattare il problema come quasi-statico, altrimenti una dinamica Per una struttura molto flessibile, anche un carico applicato lentamente può richiedere un'analisi dinamica.

COPIA DI REVISIONE


SYMPOSIUM
ON THE USE OF
computers in civil engineering
Laboratorio Nacional de Engenharia Civil Lisbon – Portugal
OCTOBER
1-5 1962

PAPER Nº.45

DYNAMIC RESPONSE BY STEP-BY-STEP MATRIX ANALYSIS

by

Edward L.Wilson[1] and Ray W.Clough[2]

Figura 12.13: Analisi degli elementi finiti di prima dinamica (Wilson e Clough, 1962)

> Il metodo passo-passo, come presentato in questo documento, prevede una procedura sistematica per determinare la risposta dinamica dei sistemi di massa discreti sottoposti a carico arbitrario. La formulazione delle equazioni passo-passo in forma matrice permette la risposta di un sistema da determinare con una sequenza ripetuta di operazioni di matrice. Inoltre, l'iterazione su ogni incremento di tempo, che è richiesto da altre procedure, è eliminata da un'inversione iniziale di matrice.
>
> Wilson e Clough, 1962 «*Dynamic Response by Step-by-Step Matrix Analysis*»

Questo lavoro fu il preludio al crescente focus di Clough sull'ingegneria dei terremoti, culminando nel suo libro di testo classico (Clough e Penzien, 1975).

Per i dettagli analitici, consultare §53

12.4 Consolidamento e Disseminazione

12.4.1 Oleg Zienkiewicz (1921-2009)

Olgierd Cecil Zienkiewicz (1921-2009), Fig. 12.14c, nato in Inghilterra a un padre polacco, ha stabilito il metodo degli elementi finiti come strumento universale per l'analisi ingegneristica. Dopo il primo lavoro sull'analisi dello stress di diga presso l'Università di Edimburgo, si è trasferito all'Università del Galles, Swansea, nel 1957, dove ha costruito uno dei più importanti gruppi meccanici computazionali del mondo. *Metodo degli elementi finiti nella meccanica strutturale e del continuum*, è stata la prima dedicata interamente al soggetto e ha formato una generazione di ingegneri in tutto il mondo. Ciò che distingue Zienkiewicz è stata la sua estensione incessante del metodo oltre la meccanica strutturale— a dinamiche fluide, trasferimento termico, elettromagnetici, e problemi multifisici accoppiati—dimostrare che gli elementi finiti hanno fornito un quadro unificato per praticamente tutte le equazioni di campo della fisica matematica. *Journal internazionale per i metodi numerici in ingegneria*,

COPIA DI REVISIONE

Zienkiewicz ha fatto più di chiunque per diffondere il metodo degli elementi finiti a livello internazionale.

12.4.2 La conferenza di Wright-Patterson (1965)

Un evento fondamentale nel consolidamento internazionale del metodo degli elementi finiti è stato la Conferenza sui metodi di Matrix nella Meccanica strutturale tenutasi nella Base dell'Aeronautica di Wright-Patterson nell'ottobre 1965, che ha riunito i principali gruppi di ricerca di analisi strutturale di tutto il mondo, fornendo un forum per lo scambio di idee che si erano sviluppate in gran parte parallelamente.

12.4.3 Richard Gallagher (1927-1997)

Richard H. Gallagher[5] Argyris ha presentato applicazioni a solidi, piastre e conchiglie, insieme a nuove formulazioni di elementi, tra cui l'elemento triangolare a sei nodi nelle coordinate di area naturale e l'elemento ten-nodo solido tetraedrale nelle coordinate di volume naturale. La conferenza ha dimostrato che il metodo era maturato da sviluppi isolati a Boeing, Berkeley, coerente con la disciplina di Swan.

Prima Gallagher aveva prodotto il AGARDOgraph 69, *Uno studio di correlazione dei metodi di analisi strutturale della matrice* (Gallagher, 1964), un'indagine completa commissionata dal pannello strutture e materiali AGARD; questo rapporto del 1964 ha sistematicamente confrontato gli approcci di forza e di spostamento praticati attraverso l'industria del telaio aereo, delineato aree di accordo tra metodi apparentemente disparati e formulazioni di elementi valutati attraverso ampie analisi delle strutture ali multiweb.

Gallagher stesso divenne un importante contributo alla teoria degli elementi finiti, in particolare per le strutture delle conchiglie, e il suo libro di testo (Gallagher, 1975) ha fornito un altro importante percorso per la diffusione del metodo.

12.4.4 Metodo di forza Versus Stiffness Metodo Dibattito

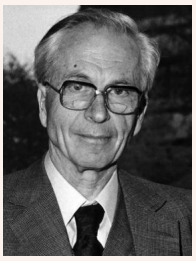
Nel corso degli anni '50 e '60, il dibattito ha continuato a considerare i relativi meriti di forza (flessibilità) e metodi di spostamento (stiffness). 12.7) ha mostrato i metodi che procedono attraverso passi analoghi. Przemieniecki, 1968[6] ha fornito un confronto sistematico con numerosi esempi.

Alcuni ingegneri che potevano scrivere i programmi di Fortran hanno concluso che i metodi avevano capacità simili; scegliere tra di loro era una questione di gusto. La maggior

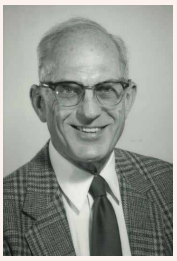
[5] Gallagher è incluso in questo pantheon perché è stato il professore preferito dell'autore come studente di laurea a Cornell, dove ha insegnato corsi su elementi finiti, ottimizzazione strutturale e conchiglie. In quest'ultimo corso, potrebbe derivare l'equazione differenziale di ottavo ordine che governa la teoria generale delle conchiglie appena che si aggrappa alle sue note.

[6] Questo libro ha introdotto molti concetti e nozioni ancora in uso oggi, rimane uno dei migliori trattamenti del soggetto.

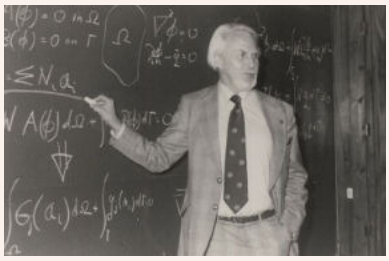
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE



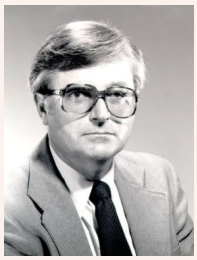
(a) Argyris (1913-2004)



(b) Clough (1920-2016)



(c) Zienkiewicz (1921-2009)



(d) Wilson (1931–2024)



(e) Gallagher (1927-1997)

Figura 12.14: I fondatori moderni del metodo degli elementi finiti

parte dei gruppi aerospaziali, la tradizione di sostegno, ha favorito il metodo di forza. Ma gli ingegneri che hanno implementato entrambe le differenze significative. Il metodo di rigidità diretta non aveva una doppia controparte che corrispondeva alla sua semplicità algoritmica. (Felippa, 2001 PDF).

Come ha notato Felippa, la scissione ricorda la risposta di Einstein sulla reazione della vecchia guardia alla nuova fisica: "non li abbiamo convinti; li abbiamo sopravvissuti." Gli ingegneri assunti negli anni '40-'50, ora in gestione, favorito il metodo di forza.

12.4.5 La decisione NASTRAN (1969)

La risoluzione definitiva è stata presa attraverso una decisione istituzionale, nel 1965 la richiesta di deposito della NASA per la costruzione del NASTRAN sistema di elementi finiti, chiamato per lo sviluppo simultaneo delle versioni di Displacement and Force con capacità identiche, tra cui dinamiche e buckling.

Nel 1969, lo sviluppo della versione Force fu annullato, che segnava la fine del metodo di forza come concorrente serio per i programmi di elementi finiti generali, e la formulazione basata sullo spostamento divenne lo standard universale.

COPIA DI REVISIONE

12.4.6 Generalizzazione

Mentre il metodo degli elementi finiti ha avuto origine nella meccanica strutturale, i suoi principi matematici—-varianti e le formulazioni residue ponderate applicate ai domini discretizzati–proved applicabili a qualsiasi problema di valore limite regolato da equazioni differenziali parziali. 12.15 illustra, le equazioni di governo di meccanica solida, meccanica fluida, conduzione termica, diffusione e conduzione elettrica condividono la stessa struttura matematica, che differisce solo nel significato fisico dei coefficienti variabili e materiali di campo.

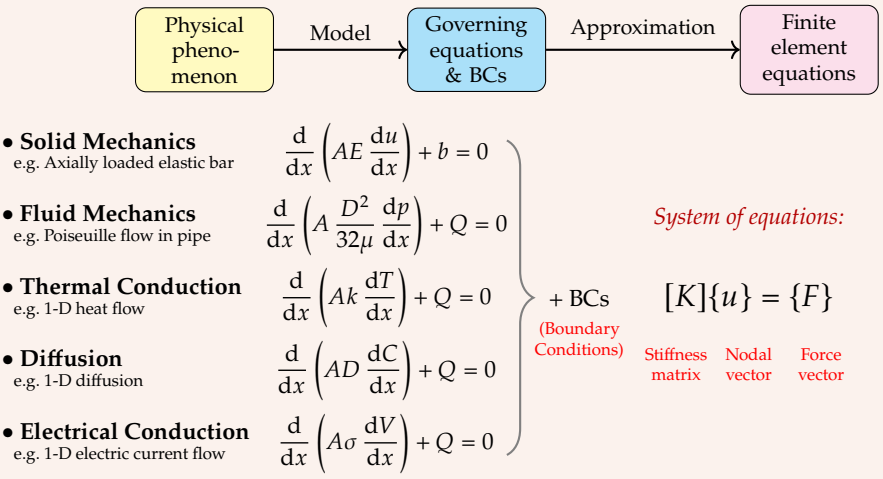


Figura 12.15: Generalizzazione del metodo degli elementi finiti a molteplici discipline fisiche: nonostante diverse equazioni di governo, tutti producono la stessa struttura algebrica

In ogni caso, la discorsizzazione degli elementi finiti produce un sistema della forma familiare $[K]\{u\} = \{F\}$, dove la matrice di rigidità, gli sconosciuti nodali e il vettore di forza assumono interpretazioni specifiche per problemi.Questa universalità è stata riconosciuta presto da Zienkiewicz e dai suoi collaboratori a Swansea, che ha sistematicamente esteso il metodo per il trasferimento di calore, il flusso di seepage, i elettromagnetici, e alla fine per i problemi di ingegneria multifisica accoppiata. Il metodo dell'elemento finito ha così trasceso le sue origini come strumento per l'analisi dello stress aereo per diventare virtualmente tutta la tecnica numericante di ingegneria.

Tabella 12.1 dettagli l'interpretazione fisica delle variabili di campo e delle costanti materiali per ogni classe di problema unificata dal quadro degli elementi finiti.

12.4.7 Libri di testo e Adozione in tutto il mondo

Il primo libro di testo dedicato al metodo degli elementi finiti è stato scritto da Zienkiewicz, 1967. Di particolare rilievo: anche in questo testo di fondazione, l'analisi di diga è apparsa tra gli esempi illustrativi (Zienkiewicz e Cheung, 1964; Zienkiewicz e Cheung,

COPIA DI REVISIONE

Tabella 12.1: Classificazione dei vari problemi fisici

Problema fisico	Principio di conservazione	Variabile di Stato	Flusso	Costi di materiale	Fonte	Equazione costitutiva
Deformazione di un corpo elastico	Equilibrio delle forze	Slocamento o forze	Stress o tensione	Il Modulo di Young, il rapporto di Poisson	Forza corporea o trazione	La legge di Hooke
Rete elettrica	Equilibrio delle correnti	Tensione o intensità	Flusso elettrico	Conduttività elettrica	Carica elettrica esterna	La legge di Kirchhoff
Torsione	Conservazione dell'energia potenziale	Funzione di stringa o di deformazione	Tasso di torsione	Modulo di taglio	$-2\times$ angolo di torsione	La legge di Hooke
Trasferimento termico	Conservazione dell'energia	Temperatura	Flusso di calore	Conduttività termica	Calore interno o esterno	La legge di Fourier
Flusso fluido	Conservazione del momento	Velocita'	Stress di taglio	Viscosità	Forze corporali	La legge di Stokes
Flusso attraverso i mezzi porosi	Conservazione della massa	Testa idraulica	Tasso di flusso	Permeabilità	Fonti fluide	La legge di Darcy
Elettrostatici	Conservazione del flusso elettrico	Potenziale elettrico	Flusso elettrico	Permissività	Carica	La legge di Coulomb
Magnetostatico	Conservazione del potenziale magnetico	Potenziale magnetico	Flusso magnetico	Permeabilità magnetica	Corrente	La legge di Maxwell

1965)—un'indicazione precoce dell'affinità naturale del metodo per strutture massicce e geometricamente complesse.

Zienkiewicz e Taylor, 2000 prodotti trattamenti completi che hanno formato generazioni di ingegneri in tutto il mondo, coprendo la formulazione di elementi per varie fisiche, elementi isoparametrici, integrazione numerica, analisi non lineare e dinamica, e raffinatezza della rete adattativa.

Bruce Irons, lavorando con Zienkiewicz a Swansea, introdusse il concetto isoparametrico (1966)—utilizzando le stesse funzioni di interpolazione per entrambi i campi di geometria e spostamento (Irons, 1966)Questa elegante formulazione ha permesso di rappresentare esattamente i confini degli elementi curvi, facilitando l'integrazione numerica sistematica tramite la quadratura di Gauss su un elemento genitore, e unificato il trattamento di diversi tipi di elementi. Il concetto isoparametrico è diventato fondamentale per praticamente tutte le moderne implementazioni degli elementi finiti.

Le basi matematiche sono state solidificati da Strang e Fix, 1973, stabilire una rigorosa teoria della convergenza che ha dato al metodo la sua certificazione teorica.

12.4.8 Impatto e applicazioni attuali

Nel 1980, FEM era diventato il metodo numerico dominante per l'analisi ingegneristica., NASTRAN, ADINA, ecc.) ha permesso di analizzare strutture e sistemi di complessità senza precedenti. Oggi, FEM è onnipresente:

- **Strutture:** Edifici, ponti, aerei, veicoli spaziali, automobili

COPIA DI REVISIONE

- **Produzione:** Formatura, fusione, simulazioni di lavorazione
- **Biomeccanica:** Meccanica di ossa, analisi dei tessuti molli, pianificazione chirurgica
- **Geomeccanica:** Progettazione della Fondazione, analisi tunnel, risposta terremoti
- **Multifisica:** Interazione termica e strutturale, struttura fluida

FEM ha trasformato il design dell'ingegneria da un'arte basata sull'esperienza a una scienza basata sulla simulazione. I prototipi possono essere testati virtualmente prima della fabbricazione fisica. L'ottimizzazione può esplorare gli ordini di grandezza degli spazi di progettazione più grandi di quanto possibile.

Eppure le radici del FEM nei metodi classici —metodo di forza, metodo di spostamento, principi energetici—rimangono evidenti. La matrice di rigidità dell'elemento è semplicemente l'analogico discreto dell'operatore di rigidità continuum. L'assemblaggio per sovrapposizione riecheggia il principio del lavoro virtuale. Il processo di soluzione segue la stessa logica di equilibrio di spostamento-forza stabilita da Maxwell, Castigliano e i loro contemporanei.

12.5 Riepilogo e contributi chiave

Tabella 12.2 riassume i principali contributori ai metodi computazionali nell'analisi strutturale, organizzati cronologicamente per categoria.

Tabella 12.2: Principali collaboratori dei metodi computazionali nell'analisi strutturale

Contributatore	Anno	Riferimento	Contributo
Metodi di differenze finiti			
Karl Pearson (1857-1936)	1905	(Pearson, 1905)	Le indagini sperimentali sulle sollecitazioni di diga
Lewis Fry Richardson (1881-1953)	1911	(Richardson, 1911)	Metodo di differenza finito per l'analisi dello stress; estrapolazione di Richardson
Metodi di soluzione iterativa			
Philipp Ludwig von Seidel (1821–1896)	1874	(Seidel, 1873)	Gauss– Metodo di iterativo del modello
Fondamenti matematici del FEM			
Walther Ritz (1878-1909)	1909	(Ritz, 1909)	Metodo di approssimazione variabile (Rayleigh–Ritz)

Continuare nella pagina successiva

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

Tabella 12.2 – *Continua*

Contributatore	Anno	Riferimento	Contributo
Boris Galerkin (1871-1945)	1915	(Galerkin, 1915)	Metodo di residui ponderati
Alexander Hrennikoff (1896-1984)	1941	(Hrennikoff, 1941)	Analogia reticolare; metodo di struttura per l'elasticità
Richard Courant (1888-1972)	1943	(Courant, 1943)	Funzioni di prova pietaria sulle sottoregioni triangolari
Analisi strutturale della matrice			
Gabriel Kron (1901-1968)	1944	(Kron, 1944)	Metodi di tensione; analisi della rete; concetti di strutturazione
John Argyris (1913-2004)	1954–55	(Argyris e Kelsey, 1960)	Matrice formulazione di teoremi energetici; forza - dualità di spostamento
Metodo di stiffness diretto e elementi finiti			
M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin, L.J. Topp	1956	(Turner et al., 1956)	Metodo di rigidità diretta; elementi di stress triangolari
M. Jonathan Turner (1909-1985)	1959	(Turner, 1959)	Esposizione formale del metodo di rigidità diretta; estensioni non lineari
Nathan M. Newmark (1910-1981)	1959	(Newmark, 1959)	Metodo di integrazione del tempo di Newmark
Ray W. Clough (1920-2016)	1960	(Clough, 1960)	Definito "metodo elemento infinito"; estensione ai supporti continui
Sviluppo di Berkeley			
Edward L. Wilson (1931–2024)	1960	(Wilson, 1960)	Prima analisi degli elementi finiti non lineari; programma SAP
R.W. Clough & E.L. Wilson	1962	(Clough, 1962)	Analisi della diga Norfork; prima applicazione FEM
E.L. Wilson & R.W. Clough	1962	(Wilson e Clough, 1962)	Analisi FEM dinamica prima; matrice Metodo Newmark
Libri di testo e Disseminazione			
Conferenza Wright-Patterson	1965		Consolidamento internazionale della ricerca FEM

Continuare nella pagina successiva

COPIA DI REVISIONE

Tabella 12.2 – *Continua*

Contributatore	Anno	Riferimento	Contributo
Bruce M. Irons (1924-1983)	1966	(Irons, 1966)	Concetto di elemento isoparametrico
O.C. Zienkiewicz (1921-2009) & Y.K. Cheung	1967	(Zienkiewicz, 1967)	Libro di testo dell'elemento finito
J.S. Przemieniecki (1924-2015)	1968	(Przemieniecki, 1968)	Libro di testo sistemico sull'analisi strutturale della matrice
Gilbert Strang & George Fix	1973	(Strang e Fix, 1973)	Teoria di convergenza matematica per FEM
Richard H. Gallagher (1927-1997)	1975	(Gallagher, 1975)	Libro degli elementi finiti; sviluppo degli elementi di shell
Sviluppo del software			
NASA / MSC / Martin	1965–69		Sviluppo NASTRAN; versione della forza annullata 1969

12.6 Conclusioni

I metodi computazionali tracciati in questo capitolo— dalle differenze finite di Richardson attraverso l'analisi strutturale della matrice al metodo degli elementi finiti—rappresentano non una rottura dalla meccanica strutturale classica, ma la sua estensione sistematica abilitata dal calcolo digitale.

Gli sviluppi chiave sono stati:

1911: Metodo di differenza finita di Richardson per l'analisi dello stress —il primo approccio numerico sistematico ai problemi continuum

1954–1956: La formulazione matrice di Argyris dei principi energetici; Turner–Contrassegna la collaborazione producendo il metodo di rigidità diretta

1959: L'esposizione formale di Turner del metodo di rigidità diretta; il sistema di integrazione del tempo di Newmark

1960: La denominazione di Clough del metodo degli elementi finiti; prima analisi non lineare FEM

1962: Analisi FEM dinamica; Analisi Norfork Dam dimostrando applicazione pratica

1965–1969: Sviluppo NASTRAN e trionfo dei metodi basati su dislocazioni

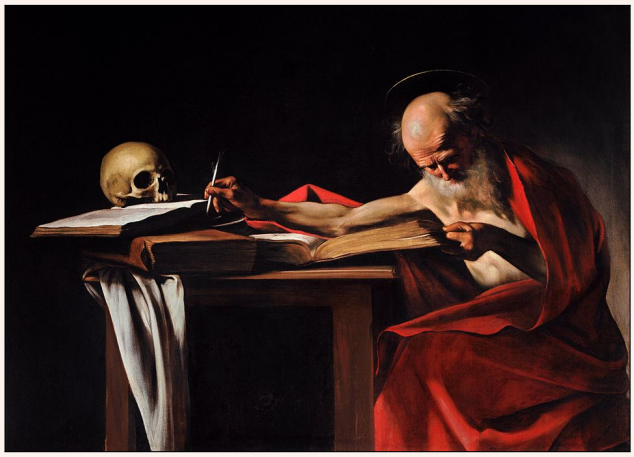
I matrici di rigidità degli elementi, le procedure di assemblaggio e i principi energetici

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dell'analisi degli elementi finiti moderni si tracciano direttamente ai concetti sviluppati da Maxwell, Castigliano e dai loro contemporanei del XIX secolo.

L'analista strutturale di oggi, lavorando con un sofisticato software di elementi finiti in grado di risolvere sistemi con milioni di gradi di libertà, si trova alla fine di un arco di sviluppo che inizia con il primo trattamento di Navier di travi indeterminate. I principi rimangono quelli stabiliti due secoli fa; solo la scala di applicazione è cambiata.



Caravaggio, San Girolamo Scrittura (1605-1606)

Lo studioso trascrive e trasmette la conoscenza, dal manoscritto alla stampa al codice, il compito eterno di preservare e propagare il metodo.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 13

Dall'abaco agli algoritmi: storia del calcolo nella scienza e nell'ingegneria

Abstract

L'evoluzione del calcolo è inseparabile dall'evoluzione della matematica, ingegneria e ragionamento scientifico. Fin dai primi dispositivi manuali per ecosistemi digitali moderni, il calcolo ha manipolazione simbolica progressivamente automatizzata, liberando l'intelletto umano per una visione concettuale piuttosto che un aritmetico ripetitivo. fornisce una panoramica storica formale di tale sviluppo, con particolare enfasi sugli strumenti che hanno plasmato la scienza e l'ingegneria pratica. Esclude deliberatamente la storia del metodo di rigidità e formulazioni di elementi finiti, che sono coperti in un capitolo successivo.

13.1 Introduzione 493
13.2 Dispositivi antico e primitivi computazionali 493
13.3 Automata meccanica e macchine di calcolo anticipate 495
13.4 Babbage e Lovelace: Origini concettuali della programmazione 497
13.5 Calcolo scientifico analogico (1900–1945) 498
13.6 La rivoluzione digitale (1945-1960) . 499
13.7 Lingue di programmazione e software scientifico precoce 500
13.8 Timeline delle principali evoluzioni computazionali 501
13.9 Software di ingegneria e strutturale (1960-1980) 501
13.10 L'era del PC e l'espansione della ingegneria computing (1980-2000) . . 502
13.11 Ecosistemi computazionali moderni (2000-Present) 503
13.12 Evoluzione della Scrittura Tecnica e del Reporting 504
13.13 Conclusioni 506

COPIA DI REVISIONE

13.1 Introduzione

Questo capitolo ripercorre il lungo arco intellettuale che ha prodotto il moderno elaborazione scientifica, a partire dai primi dispositivi manuali e che porta agli ecosistemi digitali integrati che ora sostengono l'ingegneria Dal tavolino abaco e logaritmico a Pascal e Leibniz calcolatrici, la narrazione mostra come l'automazione meccanica la fondazione per i progressi concettuali di Babbage e Lovelace. XX secolo introdusse analizzatori differenziali analogici, seguiti da la rivoluzione digitale segnata da ENIAC, EDSAC, e la prima architetture memorizzate-programma. La maturazione dei linguaggi di programmazione, soprattutto FORTRAN, catalizzando lo sviluppo del software di ingegneria da SAP e NASTRAN a ABAQUS e ANSYS. Personal computing, MATLAB, Mathematica, e alla fine Python ha trasformato la velocità, la scala e riproducibilità dell'analisi scientifica. Il capitolo si conclude con il moderno flussi di lavoro che coinvolgono BIM, modellazione parametrica e simulazione basata su cloud, riflettere una disciplina in cui le capacità computazionali sono ora inseparabile dalla creatività ingegneristica e dal rigore.

13.2 Dispositivi antico e primitivi computazionali

L'Abacus

Il primo dispositivo computazionale ampiamente usato è l'abacus , le cui origini precedono numeri posizionali lunghi. In varie forme, è apparso in Mesopotamia, Grecia, Cina e Giappone. abacus incarna due idee centrali: notazione posizionale ed esplicita rappresentazione dello stato, Fig. 13.1. Ogni perla o contatore corrisponde ad un discreto valore, e proventi aritmetici da transizioni di stato sistematiche. Lungo prima dell'analisi formale, l'abacus ha abilitato i commercianti e gli amministratori per eseguire aritmetica accurata e ripetibile.

Logaritmi di Napier e Regola di scorrimento di Oughtred

Napier, 1614 introdotto logaritmi nel 1614, fornendo un radicale semplificazione del calcolo numerico. Logaritmi, Napier ha mostrato che la moltiplicazione potrebbe essere eseguita da *aggiungere* logaritmi, e divisione per *sottrarre* loro. le sue parole:

> *"Con queste proporzioni, si trasformano in molteplici situazioni difficili aggiunte e divisioni in sottrazioni."*
> - John Napier, *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (1614)

Questa trasformazione accelera notevolmente il calcolo astronomico, navigazione, indagine e lavoro di ingegneria precoce. Un semplice moderno esempio illustra l'intuizione

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

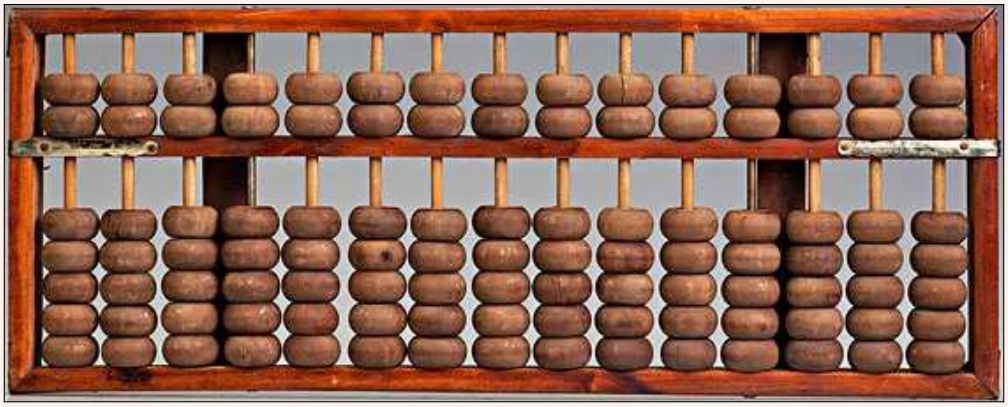


Figura 13.1: Abaco cinese tradizionale (suanpan)

di Napier[1]. Henry Briggs presto completato il lavoro di Napier introducendo base-10 logaritmi e la pubblicazione di ampie tabelle stampate che sono rimaste strumenti standard per secoli.

Costruire sulla svolta concettuale di Napier, Oughtred, 1632 ha introdotto la regola di scorrimento circa 1632, usando due scale logaritmiche scorrevoli. Per più di trecento anni, lo scorrevole era il principale strumento computazionale di ingegneri. moltiplicazione rapida, divisione, estrazione delle radici, e, in special forme, operazioni trigonometriche e esponenziali; vedi Fig. 13.2.

Verso la fine del XIX e l'inizio del XX secolo, scivolo di ingegneria regole molto raffinate e specifiche per la disciplina. li ha usati per calcolare le proprietà della sezione, i rapporti di snellezza, il vento pressioni, tensioni consentite e coefficienti di momento, spesso in congiunzione con i manuali di progettazione in acciaio. Il design dei grattacieli primi si è fatto carico di tali strumenti.

In questo contesto, il metodo di distribuzione del momento di Hardy Cross , introdotto nel 1930, diffusione rapidamente in parte perché il suo aritmetico iterativo era ideale per calcolo di scorrimento-rule. Il metodo non ha richiesto la risoluzione di grandi sistemi di equazioni contemporaneamente; invece, passava e equilibravano momenti attraverso una sequenza di operazioni semplici che potrebbero essere efficientemente effettuato su scale logaritmiche.

[1]Per esempio, $\log(3\times 4) = \log 3 + \log 4$. Utilizzando logaritmi comuni, $\log 3 \approx 0.4771$ e $\log 4 \approx 0.6021$, così la loro somma 1.0792 rendimenti $10^{1.0792} \approx 12$, il prodotto corretto. La divisione è trattata allo stesso modo: $\log(12/3) = \log 12 - \log 3$.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

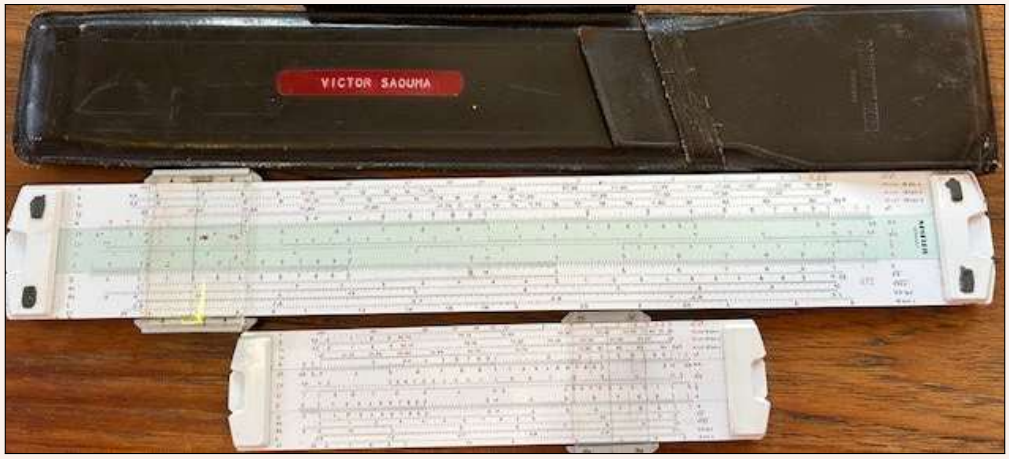


Figura 13.2: Regole di scorrimento dell'istituto

13.3 Automata meccanica e macchine di calcolo anticipate

Pascal's Adding Machine

In 1642, Pascal, 1645 costruito una macchina di aggiunta meccanica (la "Pascalina") utilizzando treni di ingranaggi per automatizzare l'aggiunta e la sottrazione. Le carri venivano propagate meccanicamente attraverso il meccanismo dell'ingranaggio. costosa e limitata nella gamma, la Pascaline ha segnato una pausa concettuale: aritmetica di routine potrebbe essere delegata a una macchina.

Leibniz's Stepped Reckoner

Gottfried Wilhelm Leibniz ha esteso il calcolo meccanico inventando il tamburo a gradini. Il suo "Stepped Reckoner" (Leibniz, 1691b) potrebbe eseguire moltiplicazione e divisione con aggiunta ripetuta e sottrazione. Leibniz ha suggerito che le dispute logiche potrebbero, in linea di principio, essere si stabilirono per calcolo, prefigurando l'idea di ragionamento algoritmico, Fig. 13.3.

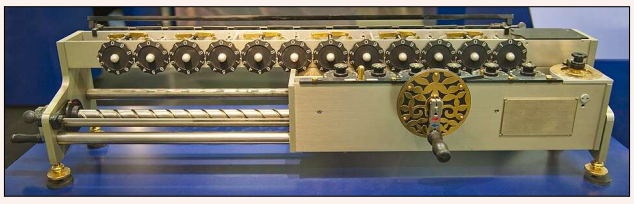


Figura 13.3: Leibniz's Stepped Reckoner

COPIA DI REVISIONE

Calcolatori industriali

Nel corso del XVIII e XIX secolo, calcolo più robusto macchine sono state sviluppate per il settore bancario e assicurativo, ma sono rimasti meccanicamente complesso e costoso. Gli ingegneri hanno continuato a contare principalmente su regole e tavoli di scorrimento per la maggior parte strutturale e meccanica calcoli.

I calcolatori elettronici palmari sono emersi nei primi anni '70, a partire con modelli pionieristici di aziende come Casio, Fig. 13.4, che ha introdotto alcuni dei primi calcolatori elettronici compatti al mercato commerciale. Questi dispositivi iniziali hanno sostituito il calcolo meccanico con integrato circuiti e display a LED, offrendo velocità e portabilità senza precedenti.



Figura 13.4: Calcolatore elettronico Casio (ca. 1970)

Hewlett–Packard presto seguito con più avanzato scientifico e strumenti programmabili, che stabiliscono una presenza dominante tra ingegneri. La serie HP della fine degli anni '70 e all'inizio degli anni '80- il HP 10C, Fig. 13.5, HP 11C e HP 15C—introdotto molti utenti a *Inversione Notazione polacca*[2] (RPN), un sistema in cui i risultati precedenti degli operatori. RPN ha eliminato la necessità di parentesi e presse a chiave ridotte, ma ha richiesto un cambiamento concettuale che potrebbe essere non-intuitivo; HP dell'autore 10C rimane un vivido promemoria di come inizialmente disorientare che la transizione potrebbe essere.

Queste calcolatrici rappresentavano un ponte cruciale tra la barra di scorrimento strumenti digitali moderni e di calcolo: portatili, precisi e programmabile molto prima che i personal computer diventassero onnipresenti. calcolatori scientifici e grafici—se da Casio, Texas Strumenti, o HP—inherit questo lignaggio, fornendo simbolico manipolazione, operazioni di matrice e risolutori numerici impensabili l'era delle scale logaritmiche.

[2]Notazione polacca inversa (RPN) è una sistema di input basato su stack in cui gli operandi sono inseriti *prima di prima* il operatore. Ad esempio, per calcolare $3 + 4$, richiede un calcolatore RPN `3 4 +`, che spinge 3 e 4 su uno stack interno e poi l'operatore. I genitori non sono necessari (ad esempio, per calcolare $(3 + 4) \times 5$, uno entra `3 4 + 5 *`). RPN riduce i tasti e la complessità di analisi, ma può sentirsi controintuitivo per gli utenti abituato alla notazione standard di infissione.

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE



Figura 13.5: Il primo calcolatore dell'autore

13.4 Babbage e Lovelace: Origini concettuali della programmazione

Il motore di differenza e il motore analitico

Charles Babbage propose il Difference Engine per meccanizzare calcolo di tabelle polinomiali utilizzando differenze finite. La sua più ampia visione, il motore analitico , andato molto più lontano. descritto nei suoi scritti e più tardi Babbage, 1864 Motore analitico incluso un "store" (memoria), un "millo" (aritmetico) unità), ingresso a schede perforate, ramificazione condizionale e dispositivi di uscita. In concept, anticipa l'architettura del moderno programma-immagazzinato computer.

Ada Lovelace e Computazione Simbolica

Lovelace, 1843 ha fornito note dettagliate sull'Analitico di Babbage Ingegnere nella sua traduzione del giornale di Menabrea, 13.6. Ha riconosciuto che macchina potrebbe manipolare simboli generali e non solo numeri, e lei incluso quello che è spesso considerato come il primo algoritmo pubblicato, per calcolo numeri di Bernoulli. Lovelace così articolato l'idea di programmazione ben prima che esistesse un computer generale funzionante.

Nonostante la loro brillantezza concettuale, i motori di Babbage non sono mai stati completato nella sua vita, a causa di finanziario, politico, e limitazioni di produzione. Ricostruzioni parziali alla fine del ventesimo secolo, tuttavia, hanno dimostrato la fattibilità meccanica della sua disegni.

COPIA DI REVISIONE

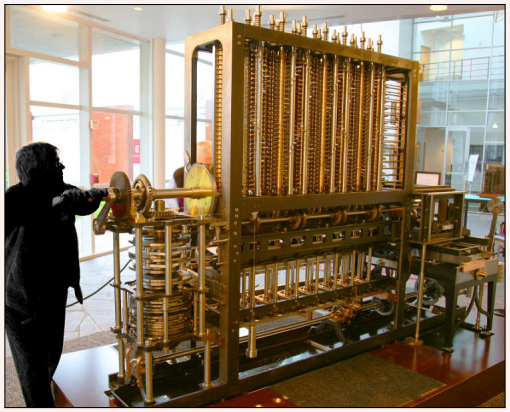


Figura 13.6: Motore analitico di Babbage

13.5 Calcolo scientifico analogico (1900–1945)

Integratori meccanici e pensiero analogico

All'inizio del XX secolo, gli ingegneri cominciarono a progettare macchine che direttamente incarnare la struttura delle equazioni matematiche. Meccanico integratori implementati integrazione continua tramite dischi rotanti e rulli; ingranaggi differenziali e collegamenti costruiti somme e differenze. Questi dispositivi implementarono il calcolo analogico: il comportamento di un sistema fisico rappresentava la soluzione di un'equazione.

Analizzatore differenziale di Bush

Bush, 1931 descritto l'analizzatore differenziale, costruito in MIT negli anni '20 e '30, Fig. 13.7. Questa macchina ha utilizzato più integratori meccanici unità accoppiate da alberi e amplificatori coppia per risolvere i sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Gli ingegneri lo impiegano per studiare il fascio deflettori, vibrazioni e sistemi dinamici ben prima del digitale la simulazione è diventata fattibile.

Gli analizzatori differenziali e i relativi dispositivi analogici hanno svolto ruoli importanti in balistica, progettazione di aerei e ricerca nucleare precoce. soluzioni in tempo reale ma limitate da precisione meccanica, deriva e complessità. Queste limitazioni hanno fornito una forte motivazione per perseguire computazione digitale elettronica.

COPIA DI REVISIONE

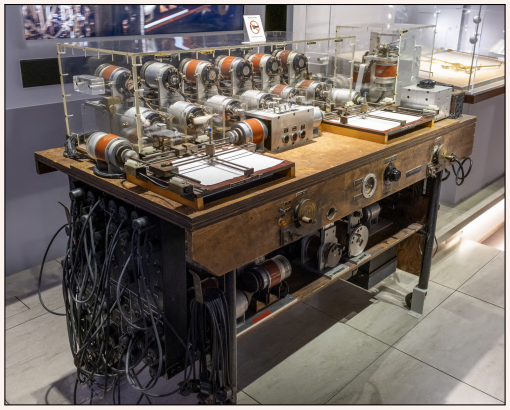


Figura 13.7: Analizzatore differenziale di Bush

13.6 La rivoluzione digitale (1945-1960)

ENIAC

L'integratore numerico elettronico e il computer (ENIAC), sviluppato presso l'Università della Pennsylvania e annunciato nel 1946, Fig. 13.8, è ampiamente considerato come primo computer digitale elettronico su larga scala. ordine di 18.000 tubi sottovuoto e potrebbe eseguire diverse migliaia operazioni al secondo (Eckert e Mauchly, 1946). Programmazione necessaria rewiring cavi e connettori di impostazione, ma ENIAC ha dimostrato che Il calcolo elettronico era pratico.

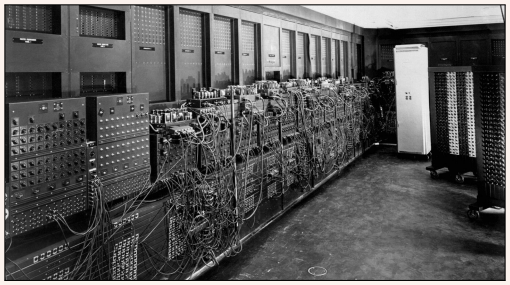


Figura 13.8: Computer ENIAC

Von Neumann Architettura e programmi archiviati

John von Neumann e i suoi collaboratori hanno proposto il programma di archiviazione architettura, in cui le istruzioni e i dati del programma risiedono in un comune Questo concetto, articolato in primi rapporti sul design EDVAC, è diventato il modello per quasi tutti i computer digitali successivi. algoritmo separato dall'hardware, che consente un'idea di programma memorizzata riprogrammazione senza rimboschimento fisico.

COPIA DI REVISIONE

EDSAC e UNIVAC

Il calcolatore automatico di stoccaggio elettronico del ritardo (EDSAC), costruito a Cambridge e la prima operativa nel 1949, fu uno dei primi pratici macchine memorizzate-programma. Wilkes, 1951 documentato il suo funzionamento e Intorno allo stesso tempo, UNIVAC sono stato consegnato al censimento degli Stati Uniti Ufficio di presidenza nel 1951, diventando il primo programma di immagazzinamento disponibile sul mercato computer (Corporation, 1951).

EDSAC e UNIVAC hanno segnato la transizione dai prototipi sperimentali ai elaborazione scientifica e amministrativa pratica. programmi e analisi numeriche in vari campi sono stati presto implementati su tali macchine.

13.7 Lingue di programmazione e software scientifico precoce

I primi computer digitali sono stati programmati in codice o montaggio macchina, che limita la complessità dei codici scientifici pratici. introduzione di lingue di alto livello ha trasformato questa immagine.

FORTRAN e ALGOL

Backus, 1957 descritto FORTRAN (FORmula TRANslation), rilasciato da IBM nel 1957. FORTRAN ha permesso agli ingegneri di esprimere algoritmi numerici usando notazione algebrica, array e loop. Compilers tradotto questi le dichiarazioni in codice macchina efficiente. FORTRAN rapidamente è diventato il lingua dominante per il calcolo numerico e rimane importante oggi.

ALGOL, introdotto alla fine degli anni '50, contribuì al flusso di controllo strutturato costrutti e regole di scoping che hanno influenzato le lingue successive come C, Pascal, e molti altri. Mentre meno ampiamente usato nella pratica dell'ingegneria che FORTRAN, i contributi concettuali di ALGOL erano significativi.

Centri di calcolo e elaborazione batch

Università e laboratori stabiliti centri di calcolo centralizzati equipaggiato con mainframe. Gli ingegneri hanno preparato il codice FORTRAN su perforato carte, lavori presentati a un operatore, e aspettato per l'output stampato. Il debug richiede spesso più cicli di presentazione. regime a forma di primi flussi di lavoro computazionali e algoritmici incoraggiati efficienza.

COPIA DI REVISIONE

13.8 Timeline delle principali evoluzioni computazionali

Anno	Milestone
ca. 2000 a.	Abacus in uso diffuso
1614	Napier presenta logaritmi (Napier, 1614)
1632	Regola di scorrimento di Oughtred (Oughtred, 1632)
1642	Pascal aggiunge la macchina (Pascal, 1645)
1690s	Leibniz's Stepped Reckoner (Leibniz, 1691b)
1830s	Il concetto di Babbage Analytical Engine (Babbage, 1864)
1843	Le note di Lovelace sul motore analitico (Lovelace, 1843)
1925–1931	Analizzatore differenziale di Bush (Bush, 1931)
1946	Operazioni di ENIAC (Eckert e Mauchly, 1946)
1949	Operazione EDSAC (Wilkes, 1951)
1951	UNIVAC Ho consegnato (Corporation, 1951)
1957	FORTRAN rilasciato (Backus, 1957)
1960s	SAP, STRUDL, NASTRAN, ANSYS primitivi, ecc. (Wilson, 1969; NASA, 1968)
1978	Prima release ABAQUS (*ABAQUS User's Manual* 1978)
1984	MATLAB introdotto (*MATLAB User's Guide* 1984)
1988	Mathematica introdotta (Wolfram, 1988)
2000s	Pitone stack scientifico, BIM, strumenti parametrici (Foundation, 2001)

Tabella 13.1: Timeline delle principali pietre miliari nel calcolo scientifico e ingegneristico

13.9 Software di ingegneria e strutturale (1960-1980)

Il periodo 1960-1980 ha assistito all'emergere di usi generali software di ingegneria che automatizzato molte attività di analisi strutturale.

SAP e STRUDL

All'Università della California, Berkeley, Analisi strutturale Programma (SAP) è stato sviluppato come un codice basato sulla rigidità generale per l'analisi di struttura e elementi finiti (Wilson, 1969). Nel tempo, SAP si è evoluto in SAP IV, SAP90, e infine SAP2000 e ETABS.

In Georgia Tech, STRUDL (Structural Design Language) è stato sviluppato come un sistema integrato che combina analisi, progettazione e gestione dei dati. è stato uno dei primi esempi di una struttura specifica di dominio lingua.

COPIA DI REVISIONE

NASTRAN, ANSYS e ABAQUS

NASTRAN (NASA Structural Analysis), sviluppato per la prima volta negli anni '60 sponsorizzazione della NASA, fornito formati standardizzati di input e un ampio spettro di funzionalità di elementi finiti (NASA, 1968). È diventato un piattaforma di riferimento per l'analisi aerospaziale e meccanica.

ANSYS, le cui radici risalgono ai primi anni '70, si è evoluta in un generale ambiente multifisico (Swanson, 1971). ABAQUS, primo rilasciato in 1978 (*ABAQUS User's Manual* 1978), specializzato in elemento finito non lineare analisi e successivamente ampliata per coprire una vasta gamma di materiali e condizioni di carico.

Tutti questi codici sono stati inizialmente utilizzati sui computer mainframe, con input preparato su schede perforate e risultati stampati su stamponti di linea.

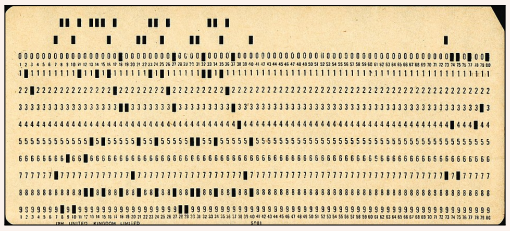


Figura 13.9: Carte di punzonatura e flusso di lavoro di elaborazione batch

13.10 L'era del PC e l'espansione della ingegneria computing (1980-2000)

L'avvento dei microprocessori e dei personal computer alla fine degli anni '70 e all'inizio degli anni '80 il calcolo decentralizzato. solo sui mainframe; potrebbero eseguire analisi sostanziali sul desktop macchine.

Computing interattivo

Il calcolo interattivo ha sostituito la presentazione del lotto e incoraggiato modellazione esplorativa. Interfacce grafiche hanno cominciato a integrare o sostituire i file di input basati su testo, specialmente come memoria e grafica capacità migliorate.

MATLABILE

MATLABILE , originariamente sviluppato alla fine degli anni '70 e commercializzato da MathWorks nel 1984, divenne uno strumento centrale per numeri algebra lineare,

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

elaborazione del segnale, controllo e dinamiche strutturali (*MATLAB User's Guide* 1984). Il suo linguaggio orientato alla matrice, risolutori incorporati, e grafica lo ha reso ideale per prototipazione rapida e insegnamento.

Mathematica

Mathematica , presentato da Wolfram, 1988, manipolazione simbolica combinata, risolutori numerici e visualizzazione. Per gli ingegneri, ha fornito un ambiente potente per la derivazione e verifica delle espressioni analitiche, risolvendo il differenziale simbolico equazioni, e l'esplorazione delle dipendenze dei parametri.

Proliferazione del software strutturale

Con l'aumento della potenza del PC, il software strutturale è diventato più accessibile:

- SAP2000 e ETABS hanno fornito un'analisi completa dell'edificio e strumenti di progettazione.
- STAAD si è ampliato nei mercati civili e industriali.
- ADINA ha offerto funzionalità avanzate non lineari e multi-fisiche.
- SAFE ha affrontato lastre e fondazioni.

Questi programmi hanno permesso agli ingegneri di visualizzare forme di modalità, stress contorni e risposte di storia del tempo in modi che sarebbero stati impraticabile nell'era del mainframe.

Poiché il software di analisi strutturale è diventato onnipresente, sono emersi dubbi ben fondati sul suo uso improprio (Powell, 2008 PDF).

13.11 Ecosistemi computazionali moderni (2000-Present)

Python e Open-Source Scientific Computing

Nei primi anni 2000, Python evoluto in un maggiore piattaforma di calcolo scientifica, supportata da librerie come NumPy, SciPy e Matplotlib. La Python Software Foundation ha formalizzato la sviluppo del linguaggio (Foundation, 2001). Con l'avvento di Jupyter Notebooks, Python è diventato un ambiente standard per riproducibili Ricerca computazionale.

Per gli ingegneri strutturali, Python consente la scrittura di elementi finiti framework, simulazioni probabilistiche, elaborazione dati per la struttura monitoraggio della salute e accoppiamento con risolutori esterni.

COPIA DI REVISIONE

Computing ad alta efficienza

Le simulazioni strutturali e sismiche moderne richiedono spesso elevate prestazioni elaborazione (HPC). Risolutori paralleli, accelerazione GPU e cloud piattaforme abilitano:

- analisi dinamiche non lineari su larga scala,
- simulazioni stocastiche con molte realizzazioni,
- modelli di struttura fluido o termomeccanica accoppiata.

HPC ha trasformato le formulazioni accademiche in strumenti pratici per valutazione dei rischi e dei rischi.

Modellazione di informazioni sull'edificio (BIM) e progettazione parametrica

Modellazione di informazioni sull'edificio (BIM) integra informazioni architettoniche, strutturali e costruttive in un unico modello digitale. Software come Revit e Tekla Structures permette coordinamento di geometria, materiali, carichi e connessioni. Le classi di fondazione dell'industria (IFC) facilitano lo scambio di dati tra software di analisi, piattaforme BIM e strumenti di fabbricazione.

Strumenti di progettazione parametrici e generativi (Grasshopper, Dynamo) ulteriormente estendere le capacità di modellazione consentendo geometria e topologia guidati da regole o criteri di ottimizzazione, questi strumenti consentono prestazioni progettazione guidata di forme strutturali complesse, spesso in concomitanza con risolutori di elementi finiti.

13.12 Evoluzione della Scrittura Tecnica e del Reporting

Dai manoscritti ai processori di Word

Storicamente, la comunicazione scientifica si basava sui manoscritti scritti a mano e la composizione meccanica. Le revisioni erano laboriose, e notazione matematica richiesto tipi specializzati. aspetto standardizzato ma non supportava equazioni o automatizzate referenze. I primi processori di parole facilitarono la modifica ma non erano progettati per grandi equazioni-dense opere tecniche.

COPIA DI REVISIONE

Microsoft Word

Microsoft Word e simili strumenti hanno reso la creazione di documenti ampiamente accessibile, ma la modifica dell'equazione, la riproduzione trasversale e la bibliografia la gestione è rimasta fragile per grandi progetti. Per un libro con centinaia di equazioni, figure e citazioni, mantenere la consistenza è difficile in tali ambienti.

LaTeX

LaTeX, sviluppato da Leslie Lamport, è diventato il standard definitivo per la composizione scientifica. precisione, coerenza bibligrafica e programmabilità lo rendono la piattaforma solo valida per un lavoro tecnico di questa scala e complessità. Senza la flessibilità e l'automazione offerte da LaTeX— la sua gestione di collegamenti ipertestuali, riferimenti incrociati, macro personalizzate, figure e vaste reti citazione—questo libro semplicemente non poteva essere prodotto. No processore di parole convenzionale, tra cui Microsoft Word, potrebbe gestire il La coesione strutturale, matematica e referenziale è necessaria qui. ogni cifra, equazione, tabella e citazione in questo volume viene generato attraverso LaTeXmacro, garantendo chiarezza, riproducibilità e una coerenza presentazione.

MathCad

Mathcad è un ambiente di calcolo ingegneristico che integra matematica, testo e grafica all'interno di un unico documento, Fig. 13.10. Consente agli ingegneri di eseguire calcoli simbolici e numerici utilizzando la notazione matematica standard, piuttosto che la sintassi di programmazione. Una delle sue caratteristiche di definizione è che i calcoli e il testo esplicativo coesisteno senza soluzione di continuità, consentendo la creazione di report tecnici auto-documentanti.

Le unità sono gestite in modo nativo, riducendo significativamente il rischio di errori dimensionali. Gli ingegneri possono inserire trame, tabelle e studi di parametri direttamente accanto alle equazioni di governo.

Il suo paradigma del foglio di lavoro rende presupposti, formule e risultati immediatamente visibili e tracciabili. Mathcad supporta anche la documentazione incorporata, i collegamenti ipertestuali e il commento formattato all'interno dello stesso file computazionale.

A causa della sua trasparenza e leggibilità, è ampiamente utilizzato in ingegneria meccanica, civile, elettrica e aerospaziale. È particolarmente utile per i controlli di progettazione, i calcoli di conformità del codice e la verifica dei risultati dell'element finito.

COPIA DI REVISIONE

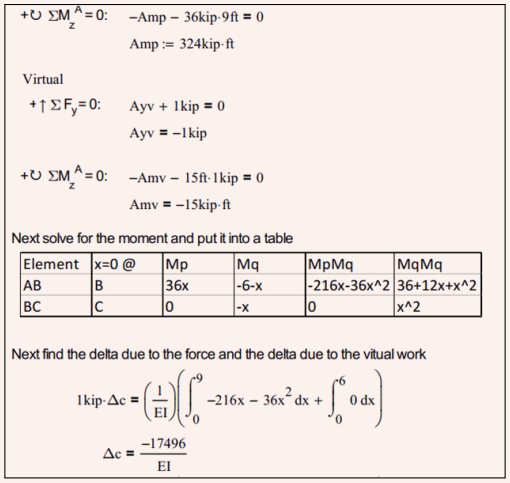


Figura 13.10: Eample di MathCad

Oggi, Mathcad è diventato uno strumento standard in molti uffici di ingegneria[3], colmare il divario tra analisi rigorose e comunicazione tecnica chiara.

Appendice J fornisce una vasta collezione di esempi di MathCad che corrispondono a problemi di analisi strutturale risolti in tutto questo libro.

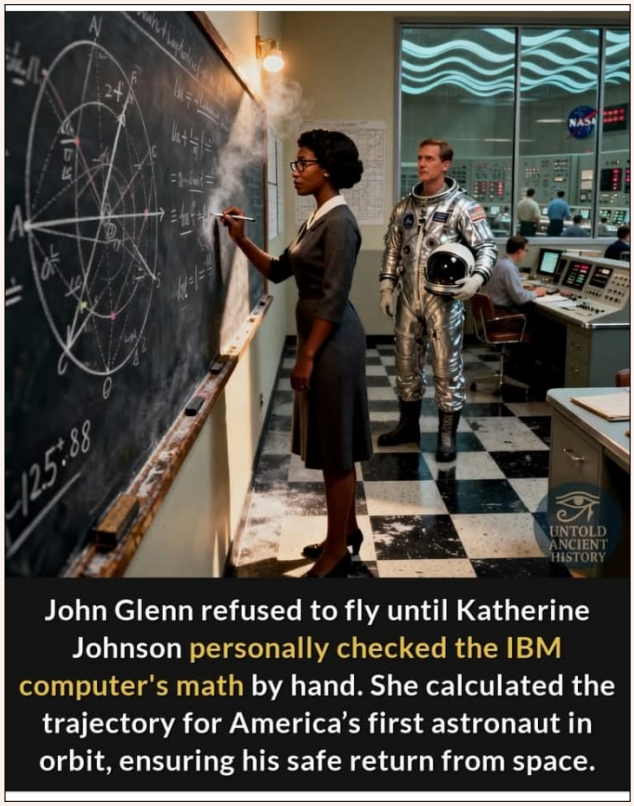
13.13 Conclusioni

Lo sviluppo del calcolo, dall'abacus al moderno algoritmico ecosistemi, riflette uno sforzo sostenuto per automatizzare ed estendere l'uomo ragionamento. Ogni stadio—logaritmi, regole di scorrimento, calcolatori meccanici, macchine analogiche, computer digitali, linguaggi di programmazione e ambienti software integrati –ha ampliato la capacità dell'ingegnere per modellare, analizzare e progettare sistemi complessi.

Analisi strutturale moderna, simulazione numerica e progettazione data-driven poggiare su questo lignaggio. I metodi e gli strumenti descritti in questo capitolo forma la base computazionale su cui l'analitica più avanzata sono costruite tecniche dei capitoli successivi.

[3]Ho da tempo sostenuto — finora senza successo — che tutti i compiti degli studenti siano presentati in Mathcad, sia per risparmiarci l'agonia di decifrare la scrittura e formare gli studenti in una piattaforma software ampiamente utilizzata in pratica.

COPIA DI REVISIONE



Autoprogetti

COPIA DI REVISIONE

Capitolo 14

L'evoluzione della forza e i principi virtuali

Abstract

Questo capitolo traccia lo sviluppo parallelo e intrecciato di due concetti fondamentali nella meccanica: la nozione di forza *e la* principio del lavoro virtuale. *A partire dalla personificazione divina della forza nell'antico Egitto e Mesopotamia, seguiamo la graduale apparizione del ragionamento meccanico attraverso la filosofia naturale greca, dove la distinzione di Aristotele tra movimento naturale e violento dominato da quasi due millenni. La narrazione procede attraverso i contributi medievali degli studiosi islamici— che ha affinato il concetto di* maggio *(impeto)—e gli scolari latini, in particolare l'uso implicito di Jordanus de Nemore di spostamenti virtuali attraverso la "sorziosità posizionale".*

La rivoluzione rinascimentale e scientifica segna la svolta decisiva. Stevin's clootcrans *la dimostrazione (1586) introdusse l'impossibilità di un moto perpetuo come criterio di equilibrio, mentre Galileo articolava il commercio tra forza e spostamento in macchine semplici. Gli scarti hanno contribuito alla fondamentale comprensione che gli spostamenti infinitesimali—il "l'inizio del movimento'—sono le quantità adeguate per le statiche, e Torricelli ha riformulato l'equilibrio come una condizione variazionale al centro della gravità. Questi fili furono intrecciati insieme da Johann Bernoulli, la cui lettera del 1715 a Varignon diede la prima dichiarazione generale del principio delle velocità virtuali: in equilibrio, la somma delle forze moltiplicate per i loro spostamenti virtuali svanisce.*

Il capitolo culmina con la sistematizzazione settecentesca di d'Alembert, che ha esteso il lavoro virtuale alle dinamiche attraverso il suo principio di forze inerziali, e da Lagrange, il cui Analitica medica *(1788) ha elevato il principio alla fondazione di tutti i meccanici—espressi esclusivamente attraverso operazioni algebriche senza un unico diagramma. Esaminiamo anche i contributi di Lazare Carnot sui movimenti geometrici e la teoria delle macchine, e l'estensione di Fourier a vincoli di di disuguaglianza.*

14.1 Introduzione 509
14.2 Antichità e il Divino 511
14.2.1 Egitto 511
14.2.2 Mesopotamia 512
14.2.3 India 513
14.3 Antichità classica e filosofia naturale 514
14.3.1 Greci 514
14.3.2 Romani, Plotino (204–270) . 521
14.3.3 Bizantino, Filoposio (490–570) 522
14.4 Periodo medievale e sciolasticismo . 523
14.4.1 Gli studiosi islamici 523
14.4.2 Giordania di Nemore (ca 1225-ca1260) e gravità posizionale 524

COPIA DI REVISIONE

14.4.3 Medioevo: Università di Parigi 524
14.5 Rinascimento e rivoluzione scientifica 527
14.5.1 Leonardo da Vinci (1452-1519) 527
14.5.2 Benedetti (1530–1590) 528
14.5.3 Pardie (1636–1673) 529
14.5.4 Simon Stevin (1548–1620) . . 529
14.5.5 Galileo (1564-1642) 533
14.5.6 Keplero (1571–1630) 537
14.5.7 Cartesio (1596–1650) 539
14.5.8 Torricelli (1608–1647) 545
14.5.9 Wallis (1616–1703) 547
14.5.10 Lebniz (1646–1716) 548
14.5.11 Newton (1642–1726) 549
14.5.12 Bernoulli, Daniel (1700-1782) 551
14.5.13 Lettera di Johann Bernoulli del 1715 552
14.5.14 Varignon (1654–1722) 555
14.5.15 D'Alembert (1717–1783) . . . 556
14.5.16 Kant (1724-1804) 561
14.5.17 Lagrange (1736–1813) 562
14.5.18 Fourier (1768–1830) 565
14.5.19 Carnot Lazare (1753–1823) . 566
14.6 Epiloga 568
14.7 Conclusioni 568

14.1 Introduzione

Nel suo libro "Scienza e Ipotesi" (La Scienza et l'Hypothèse), Poincaré Poincaré, 1905 discute famoso l'antropomorfo origine del concetto di forza a una certa lunghezza[1].

In effetti, i concetti di *forza* e *lavoro virtuale* si trovano tra le più fondamentali della meccanica, ma le loro storie sono raramente raccontate insieme. Si tratta di un'omissione, per le due idee sviluppate in dialogo intimo: progressi nella forza di comprensione hanno ripetutamente chiesto nuovi principi di equilibrio, mentre la raffinatezza del ragionamento virtuale a sua volta chiarito che cosa deve significare "forza"; l'attuale capitolo offre una narrazione unificata di questa duplice evoluzione, che spazia da circa venticinque secoli alle moderne formulazioni mitiche.

Cominciamo con la forza come attributo divino— l'Egiziano *N.*, il mesopotamico *Enlil*, la Bibbia *Shaddai!*–prima di rivolgersi ai Greci, per i quali la filosofia naturale ha sostituito la teologia come quadro per comprendere il mondo fisico. La distinzione di Aristotele tra il movimento naturale e violento, anche se in definitiva errato, ha stabilito il vocabolario concettuale che avrebbe dominato il pensiero occidentale fino alla Rivoluzione scientifica. La scuola peripatetica ha prodotto *Mechanica*, forse il primo testo per cercare una spiegazione unificata del vantaggio meccanico, trovandolo nelle proprietà "marvellous" del cerchio. Archimede, al contrario, offrì rigorose prove geometriche della legge sulle leve, ma nessun principio generale–una limitazione che Descartes avrebbe successivamente caratterizzato come spiegare *Cosa?* ma non è vero *perché*.

Nel mondo islamico, studiosi come Avicenna e al-Baghdadi hanno affinato il concetto

[1] «L'accelerazione di un corpo è uguale alla forza che agisce su di esso divisa dalla sua massa. Può questa legge essere verificata dall'esperimento? In caso affermativo, dobbiamo misurare le tre magnitudine menzionate nell'enunciazione: accelerazione, forza e massa. Ammetto che l'accelerazione può essere misurata, perché passo sopra la difficoltà derivante dalla misurazione del tempo. Ma come dobbiamo misurare la forza e la massa?

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

di forza impressionata aristotelica nella teoria della *maggio*In Europa Latina, Jordanus de Nemore ha introdotto "la gravità posizionale" – il peso effettivo di un corpo su un piano inclinato – un'idea che implicitamente invoca spostamenti virtuali, anche se senza riconoscerli come tale. La teoria dell'impeto di Buridan e le intuizioni cinematiche per la rivoluzione di Oreme.

Il Rinascimento ha portato un nuovo spirito empirico, Leonardo da Vinci ha catalogato le proprietà delle macchine semplici; *clootcrans* (1586) derivava la legge del piano inclinato dall'impossibilità di moto perpetuo, un ragionamento che è riconoscibilmente "virtuale" in carattere. Galileo articolava il trade-off fondamentale: ciò che si ottiene in forza si perde in velocità.

La sintesi decisiva è arrivata nel XVII secolo. Descartes insistette che l'equilibrio non dipende dai moti finiti ma dagli spostamenti infinitesimali—il "affinamento del movimento'– e ha mostrato come la costruzione tangente estende questo ragionamento a vincoli curvi. Torricelli riformulato equilibrio come una condizione variazionale: un sistema di corpi pesanti è in equilibrio se e solo se nessun movimento ammissibile può abbassare la loro profondità generale di gravità. *vis viva* polemica) e gli inizi di un calcolo simbolico adatto a quantità dirette.

In una lettera a Varignon del 26 febbraio 1715, egli affermò il principio delle velocità virtuali nella sua forma generale: per qualsiasi sistema in equilibrio, la somma delle forze moltiplicate per lo spostamento virtuale nella sua direzione svanisce. Varignon riconobbe il risultato come «così generale e così bello» che cercò immediatamente il permesso di pubblicarlo.

Il Settecento trasformò questo principio nella fondazione della meccanica analitica. *Traité de Dynamique* (1743) lavoro virtuale esteso alle dinamiche dal semplice esito del trattamento dei termini inerziali come forze: il corpo accelerante può essere considerato in equilibrio sotto l'azione combinata di forze impressionate e inerziali. *Analitica medica* (1788) sistematizzò l'intero soggetto, introducendo coordinate generalizzate e mostrando che le forze di vincolo appaiono naturalmente come i moltiplicatori di Lagrange del problema variazionale. La sua famosa vanto—che il lavoro non contiene un unico diagramma—testimonia alla potenza dell'approccio analitico. *movimenti geometrici* e la *momento di attività*, colmare il divario tra principi astratti e scienza pratica delle macchine; Fourier ha esteso il quadro a vincoli di disuguaglianza, aprendo la porta alla meccanica di contatto moderna.

Nel corso di questa narrazione, due temi si ripetono. Il primo è la tensione tra *Cosa?* e la *perché*–tra le dimostrazioni che una particolare condizione di equilibrio detiene (Archimede) e principi che spiegano perché deve tenere (Bernoulli, Lagrange). La seconda è l'astrazione graduale della forza da un attributo divino, ad una qualità di corpi in movimento, ad una quantità matematica definita dai suoi effetti sugli spostamenti virtuali.

Anche indirizzato (indiretto in questo capitolo) è il concetto di prallelogramma di

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

forze. Infatti, una delle idee matematiche più fondamentali del vettore[2] L'analisi è l'idea dell'aggiunta di vettori. La somma di due vettori che hanno un punto di origine comune è definito come il vettore originario allo stesso punto e che si estende al comò opposto del parallelogramma definito dai due vettori originali. modo simile, e da questa corrispondenza deriva gran parte dell'utilità dell'analisi vettoriale (Crowe, 1994).

L'idea di un parallelogramma di velocità può essere trovata in vari antichi autori greci e il concetto di un parallelogramma le forze non erano comuni nei secoli XVI e XVII. All'inizio del XIX secolo parallelogrammi di fisica entità frequentemente apparivano in trattati, e questo utilizzo indirettamente ha portato all'analisi vettoriale, per questa idea ha fornito un esempio sorprendente come le entità vettoriali potrebbero essere utilizzate per applicazioni fisiche (Crowe, 1994). La copertura del parallelogramma di forze sarà intrecciata con quanto segue.

Il concetto di vettore non fu introdotto fino al XIX secolo da William Rowan Hamilton [3] (lavorare sul suo *Il mio nome* algebra); da non confondere con il calcolo vettoriale[4]. Quindi, la nozione di vettori era assente per tutti i seguenti contributori al parallelogramma di forze.

Il capitolo si conclude con un epilogo sulle quattro forze fondamentali della fisica—-un richiamo che le nostre "forze" strutturali sono in definitiva elettromagnetiche di origine—— e un tavolo cronologico che riassume i principali sviluppi dall'antichità al XIX secolo. Il lettore che segue questa narrativa, speriamo, acquisisca non solo una prospettiva storica ma anche un più profondo apprezzamento del perché il principio del lavoro virtuale occupa così centrale un posto nella meccanica strutturale.

14.2 Antichità e il Divino

Questa sezione è fortemente basata su *Concepts of Force* by Jammer, 1957.

14.2.1 Egitto

F

[2]Interessante, il concetto di "vettore" non emerse fino al XIX secolo, nemmeno Cartesio che era il padre della geometria analitica (aka "coordinate geometria"", aka "Cartesian geometria") ne pensò.

[3]Chi fu anche il primo a coniare i termini "scalar" e "tensor" (comunque, si riferiva alla lunghezza di un quaternione. Voigt, 1898 nel 1898 che diede il senso moderno del termine).

[4]Gibbs (fisico americano) e Heaviside (scienziato britannico) in modo indipendente successivamente sviluppato calcolo vettoriale per spiegare meglio le equazioni di Maxwell.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

As[5] le prime società sviluppate in civiltà urbane, la nozione di forze imprevedibili che governano il mondo trasformato in idea di una gerarchia strutturata di forze naturali. Gradualmente, queste forze sono venuto ad essere personificato come spiriti potenti o dei. La mitologia antica, servendo come sistema di credenze primarie sistematizzate nei primi tempi, ha abbracciato sia la cosmologia che ciò che potrebbe essere considerato come la "fisica' della forza di persona pre-scientifica era struttura.

Il concetto astratto di forza, considerato come entità divina, può essere ripercorso all'antico Egitto, in particolare nei testi della dinastia ottocentesca e della letteratura demotica successiva. che era concettualizzata come una divinità personale che incarna la forza divina, piuttosto che essere identificata come intermediario daemonica o angelico. Il concetto di forza divina è rappresentato come una potente entità inviata dal Dio Sole a rispondere a una richiesta, illustrando che "nht" comprende non solo violenza e ferocia, ma anche elementi di ordine e di moralità anche nelle sue prime raffigurazioni.

Come illustrazione la resa geroglifica del nome demotico "Pn-n-n-nht-w" Fig. 14.1a, in cui la figura con il coltello rappresenta il concetto di forza divina.



(a) "Pn-n-nfit-w" (Jammer, 1957) (b) Enlil (c) El Shaddai

Figura 14.1: Deità associate alla forza nell'antichità

14.2.2 Mesopotamia

F

Nella civiltà mesopotamica, i populace affrontarono fenomeni naturali frequenti e imprevedibili, come temporali, venti e inondazioni, che portarono distruzione. *Enlil*, il dio delle tempeste, che simboleggiava dinamismo e cambiamento, contrastando con il cielo-dio *A.*, rappresenta la stabilità e la permanenza. *Enlil* incarnato sia la forza bruta che il principio organizzativo nell'universo, agendo come regolatore contro il caos.

[5]This chapter interweaves two main themes: *Forces* and the *Virtual Principles*. To help the reader keep track, material primarily concerned with forces is flagged in the margin with F; material primarily concerned with virtual principles with V; and sections that substantially engage both are marked FV.
If you find this chapter somewhat disjointed—or at times repetitive—it is simply because it began as two separate chapters ("Force" and "Virtual Forces") that were later carefully merged.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

L'associazione del Dio biblico con il concetto di forza è evidente attraverso numerosi riferimenti che collegano il Suo nome con termini che denotano forza, potere e vigore nella Bibbia. Per esempio, parole come "hail", "might" ("pot") "power", "strength" e "vigor" sono spesso usate per descrivere attributi divini. Alcuni studiosi suggeriscono che il nome "shaddai" è la forza di radice.

14.2.3 India

F

Il Jainas[6], seguaci di Jina (*Vardhamana*), che viveva intorno allo stesso tempo del Buddha, sviluppò un pluralismo atomo realistico e relativistico (*Anekantarada*). In particolare, non hanno incorporato il concetto di forza, che si trova in contrasto con la scienza occidentale, dove l'idea della forza svolge un ruolo fondamentale.

In Jaina fisica, la categoria *Ajiva* è suddiviso in diversi componenti: materia (*La mia vita*), spazio (*Akasha*), mozione (*D'altronde, la Commissione ha deciso di non procedere ad un'indagine.*), riposo (*ad un'altra*), e il tempo (- *Ciao.*). *Dharma* e *ad un'altra* si riferiscono alle condizioni di movimento e riposo, rispettivamente, sono senza forma e passivi, semplicemente facilitando o ostacolando il movimento o il riposo, si avvicina all'acqua che sostiene il movimento di un pesce o la terra fornendo una base per gli oggetti a riposo.- *Ok.*) e "change' (*La mia famiglia*), senza assumere un ruolo di agente dinamico rispetto al concetto di forza occidentale.

Nel giainismo, *Dharma* (movimento) e *ad un'altra* (resto) sono intricatemente legati al karma Mentre il concetto di karma riguarda principalmente le conseguenze morali ed etiche delle proprie azioni, ha anche implicazioni per il regno fisico.

Il karma, nel giainismo, si riferisce all'accumulo di residui morali o conseguenze derivanti da azioni intenzionali. Ogni azione, fisica, verbale o mentale, lascia un'impronta sull'anima, nota come karma, che aderisce all'anima e influenza le sue esperienze e le sue circostanze future.

Il rapporto tra karma e il mondo fisico, compreso il movimento e il riposo, può essere compreso nei seguenti modi:

Karma e Azione: Secondo la filosofia di Jain, il karma è generato da azioni intenzionali. Quando un individuo si impegna in azioni che coinvolgono il movimento o il riposo, accumulano corrispondenti conseguenze karmiche. Ad esempio, se qualcuno esegue un atto di violenza (trasformando il movimento), accumulano particelle karmiche che possono portare a future esperienze di sofferenza.

Karma e condizioni: Si ritiene che il Karma influenzi le condizioni e le circostanze della vita di un individuo, compreso il loro ambiente fisico e le esperienze. Le

[6]Jainas sottolinea la non violenza (evitare di ferire gli insetti), la veridicità, il non-rubare, il celibato e la non-possesso (alcuni monaci e suore asceti, praticare forme estreme di ascetismo, tra cui la rinuncia agli attaccamenti mondani (come il panno) e quindi la pratica della nudità).

COPIA DI REVISIONE

conseguenze karmiche delle azioni passate possono modellare le condizioni che facilitano o ostacolano il movimento e il riposo. Ad esempio, le conseguenze karmiche favorevoli possono portare a un ambiente confortevole favorevole a riposo, mentre il karma sfavorevole può portare a ostacoli o sfide che impediscono il movimento.

Karma e Liberazione: Nel giainismo, l'obiettivo ultimo è quello di ottenere la liberazione (*Moksha*) dal ciclo di nascita e di morte (*Samsara*) liberando l'anima dalla schiavitù karmica, questa liberazione si ottiene attraverso pratiche spirituali volte a purificare l'anima e a spargere il karma accumulato. Trascendendo l'influenza del karma, gli individui si ritiene che si raggiunga uno stato di beatitudine eterna e libertà da limitazioni mondane, comprese quelle legate al movimento e al riposo.

Il karma, dunque, si riferisce principalmente alle conseguenze morali, la sua influenza si estende a vari aspetti della vita, tra cui il regno fisico. L'accumulo e la risoluzione del karma sono intricati legati alle esperienze di movimento, riposo e alle condizioni generali di esistenza nel mondo.

14.3 Antichità classica e filosofia naturale

14.3.1 Greci

L'approccio greco alla meccanica era sia filosofico che pratico, tendendo a discutere i principi meccanici nel contesto della filosofia naturale.

Per gli antichi greci, filosofia naturale era essenzialmente lo studio del mondo naturale e dei suoi fenomeni, che coinvolgono quello che oggi trattiamo come discipline separate come la fisica, la biologia, la chimica e l'astronomia. A differenza della scienza moderna, non si basava fortemente sulla sperimentazione, ma era plasmato dall'osservazione, dal ragionamento logico e dalla speculazione teorica.§ 5.3).

Questa continuità è fondamentale, mentre l'inchiesta mesopotamica si basava ampiamente sull'osservazione a lungo termine, la scienza greca ha sempre sottolineato il ragionamento astratto, le cui indagini spesso si basavano su prove limitate, e talvolta superficiali, empiriche, seguite da deduzione logica e da argomentazioni teoriche.

Tuttavia, per breve tempo, delineamo i profili dei principali influencer, Fig. 14.2.

14.3.1.1 Empedocle (494-434 a.C.)

F

Empedocle Fico. 14.2a, era un antico filosofo e poeta greco che viveva intorno al V secolo a.C., nato ad Acragas (oggi Agrigento) in Sicilia, che era allora una colonia greca.

COPIA DI REVISIONE



(a) Empedocle (b) Platone (c) Aristotele (d) Posidonio (e) Arcidiota

(f) Plotinos (g) Philoponus (h) Avicenna (i) Baghdadi

Figura 14.2: I principali primi influencer del concetto di forza

Empedocles posò la necessità di due forze opposte, "amore" (*Filati, Filia*) e "strife' (*neikos*), che egli ha classificato insieme ai quattro elementi di terra, acqua, aria e fuoco, Fig. 14.3L'amore serviva come forza coesa che lega l'esistenza armoniosamente, mentre lo scontro causava la rottura e la separazione tra gli elementi. Questo ciclismo di amore e di lotta, simile alla respirazione di un organismo, rifletteva lo sfondo medico di Empedocle, che derivava dalla sua comprensione dell'universo dalla fisiologia. L'amore, simile all'attrazione fisica, nasceva dal concetto di unione nella fisiologia.

Le sue idee filosofiche erano influenti nel pensiero greco antico e continuarono ad essere studiate e discusse da filosofi successivi, tra cui Aristotele e gli Stoici.

14.3.1.2 Platone (427-348 a.C.)

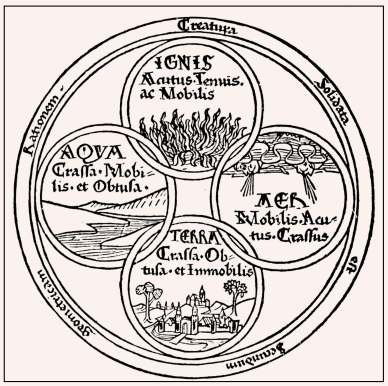
Platone , 14.2b interpretarono i due agenti di Empedocle come attrazione e repulsione, suggerendo che essi operano in sequenze alternate, mentre Heraclitus credeva che queste forze operassero simultaneamente.

Platone, influenzato dalle sue dottrine metafisiche, si incuriosisce con la questione dell'origine del movimento. (Libro 10), esplora vari tipi di movimento, come la locomozione,

COPIA DI REVISIONE



(a) Agroalimentare



(b) theory four elements (fire, air, water and earth)

Figura 14.3: Empedocle (circa)

la rotazione e la combinazione, in ultima analisi, riportandoli al moto spontaneo—il principio fondamentale della vita e dell'anima[7]

> **Strano ateniese**: Allora dobbiamo dire che l'automozione è l'origine di tutte le mozioni, e la prima che sorge tra le cose a riposo, come tra le cose in movimento, è il principio più grande e potente del cambiamento, e quello che è cambiato da un altro e ancora si muove altro è secondo.
> **Cleinias, un cretese**: Molto vero.
> **Ath.**: In questa fase dell'argomento mettiamo una domanda.
> **Cie.**: Che domanda? **Ath.**: Se dovessimo vedere questo potere esistente in qualsiasi terreno, acquoso, o sostanza ardente, semplice o composto — come dovremmo descriverlo?
> **Cie.**Vuoi chiedere se dovremmo chiamare una vita di potere così automotiva?
> **Ath.**- Si'.
> **Cie.**: Certo che dovremmo.
> **Ath.**E quando vediamo l'anima in qualcosa, non dobbiamo fare lo stesso, non dobbiamo ammettere che questa è la vita?
> **Cie.**: Dobbiamo
>
> Plato, 350 BC Laws, Book X

Tuttavia, gli scritti di Platone non applicano questo concetto metafisico di forza quando spiega il moto reale. Ad esempio, a parere di Platone, la gravità, che provoca il moto di caduta degli oggetti terreni, non è legata al suo concetto generale di forza. Invece, viene introdotta un'altra ipotesi inspiegata: la tendenza di cose simili ad unirsi insieme: la terra è così attratta verso terra, l'acqua verso l'acqua e il fuoco verso il fuoco.

Ciò implica naturalmente che ogni elemento ha la sua regione designata nello spazio, e che in seguito è stata adottata da Aristotele, che è stato nominato regioni nello spazio, o "luoghi naturali".

[7] Nota come in seguito Galileo impiegava la stessa forma di dialogo per avanzare le sue idee.

COPIA DI REVISIONE

14.3.1.3 Aristotele (384-322 a.C.)

Aristotele Fico. 14.2c, allievo di Platone, tutore di Alessandro Magno. Attraverso questa geometrizzazione della gravità, tuttavia, "l'idea di attrazione gravitazionale era per secoli espulsa dalla filosofia naturale[8] V

Per la sua meccanica propria, Aristotele si limita esclusivamente al concetto di forza come l'agenzia coinvolta in *tirando o spingendo*, e ignora il concetto di forza platonica come inerente alla materia o a quello che possiamo chiamare oggi energia. Egli continua a dire "Per è solo quando qualcosa di esterno muove una cosa, o lo porta a riposare contro la propria tendenza interna, che diciamo questo accade per forza; altrimenti non diciamo che accade per forza'.

Aristotele non menziona le unità in cui ritiene che la forza debba essere misurata. Si può presumere che un'unità di peso possa essere stata utilizzata per questo scopo, poiché il peso era storicamente la prima forza da misurare e veniva utilizzata come riferimento per altre forze fino ai tempi moderni. I greci probabilmente misuravano la forza usando il peso quando leve operative, come le presse ad olio.

Le sue teorie si basavano sulle sue osservazioni, vedendo che gli oggetti si riposeranno quando la forza viene rimossa (quindi un carro si riposerà quando il cavallo smette di tirarlo). Inoltre, se gli oggetti cadono si muovono attraverso un mezzo, come l'aria o l'acqua (di nuovo, il movimento attraverso un vuoto era considerato impossibile).

Naturale Secondo Aristotele, il moto naturale era inerente agli oggetti ed era guidato dalla loro natura essenziale, ad esempio, gli oggetti pesanti tendono a cadere verso il basso perché è la loro naturale tendenza a cercare il loro "posto naturale" al centro della Terra.

Violenza Aristotele credeva che gli oggetti richiedessero una forza esterna continua a sostenere il movimento contrario alle loro tendenze naturali, per esempio spingere una pietra avrebbe causato il movimento orizzontale, ma il movimento avrebbe cessato[9] una volta che la forza fu rimossa perché la naturale tendenza della pietra era di venire a riposo

. In movimento violento, non appena l'agente smette di provocarlo, il movimento si ferma anche: in altre parole, lo stato naturale di un oggetto deve essere a riposo, poiché Aristotele non affronta l'attrito che non è ancora concepito come una sorta di forza nel quadro di Aristotele. Sebbene Aristotele includa un agente esterno che "porta un corpo a riposare contro la propria tendenza interna" sotto la categoria di forze, non possiede un principio di inerzia Di conseguenza, la continuazione di una mozione obbligatoria non può

[8] Non è stato fino a tardi, con i progressi nella comprensione scientifica durante il Rinascimento e il lavoro di figure come Galileo e Newton, che il concetto di attrazione gravitazionale ha ottenuto l'accettazione e è diventato parte integrante della nostra moderna comprensione della fisica.

[9] Poincaré, 1905 scrive: "Come «Potrebbero credere che la mozione cessi con la causa della mozione»?

COPIA DI REVISIONE

essere considerata come una «propensione interna» e l'attrito, pertanto, non può essere riconosciuto come forza.

Il moto del proiettile era un punto di attacco per la teoria aristotelica del movimento. Per sua teoria, tale movimento era difficile da spiegare, per un movimento proiettile, come violento, ha chiesto un movimento distinto che deve continuamente essere in contatto con la cosa spostata.

Aristotele, adotti la classificazione degli Empedocle, poiché lui, terra e acqua erano considerati elementi pesanti, tendendo a muoversi verso il basso verso il centro della Terra (*gravita*, mentre l'aria e il fuoco erano considerati elementi leggeri, tendenti ad innalzarsi sopra gli elementi più densi (*Levitas*). Questa era una base per la *teoria della pesantezza e della leggerezza*. Quindi, in un vuoto, non c'è mezzo per sostenere il movimento, e in assenza di resistenza l'oggetto si muoverà a velocità infinita! (così! *Natura aborri vuoto*).

È importante notare che il concetto di inerzia era alieno alla fisica di Aristotele. Aristotele, e i suoi seguaci hanno ritenuto che un corpo è stato mantenuto in movimento solo dall'azione di una forza esterna continua. *Peripatetic* supporre, un tema ricorrente nella storia del concetto di forza che si riferisce al concetto di movimento naturale e alla distinzione tra movimento naturale e violento.

Da un punto di vista scientifico, la fusione di metafisica e fisica nel pensiero aristotelico si è rivelata dannosa: per quasi 19 secoli, il suo lavoro ha mantenuto uno status autorevole che ha impedito ulteriori progressi.

Aristotele affrontò il problema del parallelogramma delle forze. Barnes, 1984 citazioni *Mechanica*

> Ora, se i due spostamenti di un corpo sono in qualsiasi proporzione fissa, lo spostamento risultante deve necessariamente essere una linea retta, e questa linea è la diagonale della figura, fatta dalle linee disegnate in questa proporzione. . . . . E il converso è anche vero. È chiaro che, se un punto si sposta lungo la diagonale da due spostamenti, è necessariamente spostato secondo la proporzione dei lati del parallelgramma; per altrimenti si muoverà lungo la diagonale[a]
>
> Aristotle, 2000 Mechanica, Mechanica 1: 848b. Cf. 23: 854b- 855a
>
> [a] I riferimenti a Aristotele seguono la numerazione standard Bekker, in cui i numeri si riferiscono alle divisioni di pagina e colonna della 1831 edizione di Immanuel Bekker *L'opera di Aristotelis*(ad esempio, "848b" significa pagina 848, colonna destra).

14.3.1.4 Archimede (287–212 a.C.): La dimostrazione di "What""

Archimede (287–212 a.C.) ha preso un approccio completamente diverso nel suo *De Planorum Aequilibriis* (Sul Equilibrio dei Piani) (Archimedes, -250). Come Benvenuto Osservazioni, "Mentre Aristotele riguarda la meccanica di una teoria fisica, mirando a una sintesi universale, Archimede pensa agli statici come una scienza razionale e autonoma,

COPIA DI REVISIONE

fondata su postulati quasi auto-evidenti e costruita su rigorose dimostrazioni matematiche"' (Benvenuto, 1991a).

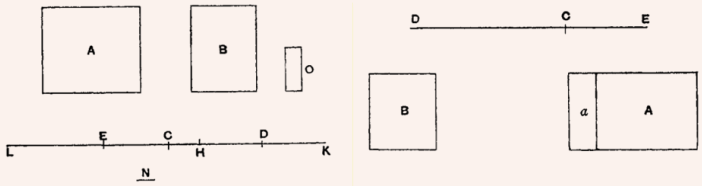
In libro I (Props. 6–7), Archimedes afferma la legge sulle leve nella sua forma più generale: 'Due magnitudine, sia commensurabili che incommensurabili, equilibrio a distanze reciprocamente proporzionale alle magnitudine"' (Archimedes, -250). La sua prova è stata lanciata in termini di *magnitudine* (non ancora "forces") e procede da una costruzione geometrica esplicita: scegliere un punto C su una linea DE in modo che i segmenti del fulcro soddisfino la proporzione reciproca (ad esempio, $A : B = DC : CE$), poi mostrare che posizionare le magnitudine D e E produce equilibrio circa C. Nel caso del Commesurable, egli suddivide le braccia in parti uguali e riduce l'equilibrio a raggruppamenti simmetrici; per il caso incommensurabile, estende l'argomento per approssimazione, preservando la stessa conclusione proporzionale. (Archimedes, -250).

Un modo moderno per *visualizza* lo stesso ragionamento è attraverso un esperimento di pensiero in cui le magnitudine sono rappresentate da molti piccoli e uguali "pesi" distribuiti uniformemente lungo la leva (Figura 14.4). Iniziare con un carico uniformemente distribuito su una leva di lunghezza totale $(p + q)$, noto (per simmetria) per bilanciare il suo punto centrale O. Spaccare la leva in due segmenti di lunghezze $2p$ e $2q$; ogni segmento, con lo stesso argomento di simmetria, può essere sostituito da un singolo risultante proporzionale alla sua lunghezza (cioè, $2p$ e $2q$) agire a proprio punto di vista, questi punti intermedi si trovano a distanze q e p da O, quindi l'equilibrio del sistema distribuito originale implica l'equilibrio di due carichi concentrati $2p$ e $2q$ posto a leva bracci q e p—cioè, la legge sulle leve nella forma reciproca $2p \cdot q = 2q \cdot p$, or $p : q = p : q$ (equivalentemente) $A : B = DC : CE$ nella notazione di Archimede).

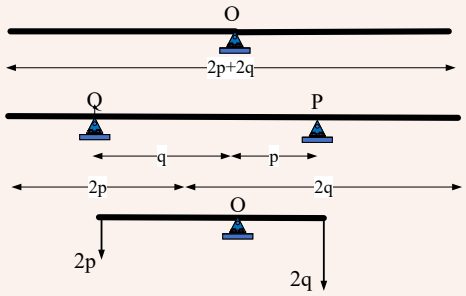
> Prenda io. **I POSTULATE il seguente:**
>
> 1. I pesi uguali a distanze uguali sono in equilibrio, e pesi uguali a distanze non uguali non sono in equilibrio ma incline verso il peso che è a maggiore distanza.
> 2. Se, quando i pesi a certe distanze sono in equilibrio, qualcosa che si aggiunge a uno dei pesi, non sono in equilibrio ma incline a quel peso a cui è stato fatto l'aggiunta.
> 3. Allo stesso modo, se qualcosa essere portato via da uno dei pesi, non sono in equilibrio ma incline verso il peso da cui nulla è stato preso.
> 4. Quando le cifre del piano uguali e simili coincidono se applicate l'uno con l'altro, i loro centri di gravità coincidono allo stesso modo.
> 5. In cifre che sono disuguali ma simili ai centri La gravità sarà simile. in relazione a figure simili, intendo dire punti tali che, se diritte le linee sono disegnate da loro agli angoli uguali, fanno uguali angoli con i lati corrispondenti.
>
> . . . . . .
>
> **Proposizioni 6, 7.**
>
> Due magnitudine, anche commensali [Prop. 6] o incommensurabile [Prop. 7], equilibrio a distanze reciprocamente proporzionali alle magnitudine.

COPIA DI REVISIONE

Archimedes, -250 De Planorum Æquilibriis (On the Equilibrium of Planes)



(a) Originale



(b) Interpretazione moderna (adattata da (Salencon, 2017))

Figura 14.4: La prova di Archimedes della legge della leva

Questa prova è matematicamente rigorosa ma, come Descartes in seguito osserva, "Spiegare *Allegato* ma non *sieda*- Si'. *Cosa?* ma non è vero *perché* (Descartes, 1898)Archimedes non invoca alcun principio generale; ogni macchina richiede la propria dimostrazione da postulati specifici.

Si potrebbe presumere che Archimede, padre di statiche, abbia avuto una comprensione approfondita del concetto di forza. Tuttavia, questo non è il caso. Infatti, i suoi contributi al concetto di forza erano minimi. Il suo approccio era principalmente geometrico, concentrandosi sulla distanza e il peso.

14.3.1.5 Posidonio (135-51 a.C.) e la Stoica

A differenza della visione di forza di Aristotele, come emanante dalla sostanza e situata nel soggetto, Posidonio Fico. 14.2d, vede la forza come fondamentale e inerente al rapporto tra gli oggetti. La forza, per lui, è una corrispondenza reciproca, una *simpatia per la simpatia* tra gli oggetti che interagiscono, unificando l'universo attraverso un sistema di forze.

Questa concezione stoica della forza, dove l'agente e il paziente sono inseparabili, rispecchia la loro convinzione nell'unità del cosmo. La Stoica disegna paralleli tra questa

COPIA DI REVISIONE

idea e il concetto di "simpatia" in medicina, dove una parte del disturbo del corpo influisce sull'intero, estendendo questa nozione al cosmo.

Solo con gli Stoici il concetto di forza prende una nuova direzione. L'inchiesta sul rapporto tra maree e movimenti di corpi celesti inizia questo cambiamento. Questa indagine non è nuova; Aristotele in precedenza lo ha affrontato, enfatizzando tirando e spingendo forze per spiegare il fenomeno. Secondo lui, il movimento del sole genera venti, che poi spinge le acque del mare, causando maree. *tono*, una tensione universale.

14.3.2 Romani, Plotino (204–270)

F

Il concetto di "simpatia" come forma di forza ha svolto un ruolo significativo nella letteratura scientifica, filosofica e mistica del periodo romano anche. Fico. 14.2f, un filosofo di rilievo di questa epoca, spesso attribuito azione a una distanza ad esso.

La magia e l'astrologia, che erano temi centrali nella vita intellettuale del periodo romano e del Medioevo, sembravano trovare una razionalizzazione nel concetto di forza di Plotino. Secondo Plotino, la magia opera attraverso il legame simpatico tra oggetti simili e dissimili. La magia simpatica implica indurre un certo stato in una parte dell'universo con la convinzione che uno stato corrispondente sia prodotto altrove.

Quindi, il concetto di forza per i Romani è stato influenzato da varie tradizioni filosofiche, tra cui quelle dei Greci. In filosofia stoica, la forza era spesso vista come un aspetto intrinseco dell'universo, che governava le interazioni tra gli oggetti. Era strettamente legata alla credenza stoica nel destino e nel determinismo, così come la loro enfasi sulla convivenza con la natura. Inoltre, gli ingegneri romani e gli strateghi militari svilupparono le conoscenze pratiche della forza attraverso il loro lavoro nell'edilizia delle infrastrutture e nelle guerre di abbandono.

In letteratura latina, i concetti di forza fisica e di agenzie occulte sono spesso mescolati insieme senza distinzione. *virtuosismo* Inoltre, poiché la traduzione Vulgate rende comunemente il greco *dinamite* as *virtuosismo*, lo stesso termine viene utilizzato per indicare le forze in contesti fisici e religiosi.

Il concetto di "simpatia" era anche impiegato per fornire un supporto logico all'astrologia. "Sympathy" è stato usato per spiegare l'influenza della luna sulle maree, come ha fatto Plotinus, e i suoi effetti sugli esseri viventi. Proclus si è espanso su questa idea, affermando che le sfere celesti influenzano gli eventi mondani.

Plotinus aveva posto la domanda: "Do the stars have any effect'?? Egli ha visto le stelle, come Platone ha fatto, come esseri eteri e divini, espressioni dell'onniscienza dell'anima mondiale. Diversamente i fedeli aristoteliani che, come Tolomeo, hanno respinto le azioni a distanza e hanno cercato di spiegare le maree attraverso le forze di contatto (come le correnti atmosferiche, il calore e la luce), Plotinus influenzaronomica

COPIA DI REVISIONE

14.3.3 Bizantino, Filoposio (490–570)

F

John Philoponus Fico. 14.2g, conosciuto anche come Johannes Philoponus o Giovanni il Grammarico, era un filosofo bizantino, teologo e scienziato che viveva nel VI secolo d.C. È nato ad Alessandria d'Egitto. Philoponus ha dato contributi significativi a vari campi tra cui filosofia, teologia e scienza naturale.

In filosofia, Philoponus è meglio conosciuto per la sua critica della fisica di Aristotele, (Philoponus, 1993). Ha sfidato le idee aristoteliche riguardo al movimento, sostenendo contro il concetto di uno stato naturale di riposo per gli oggetti e proponendo che una forza esterna era necessaria per mantenere un oggetto in movimento. Questo ha sfidato la nozione di movimento di Aristotele e ha posto le basi per gli sviluppi successivi nella fisica, in particolare durante il Rinascimento e la rivoluzione scientifica.

Philoponus sostiene in primo luogo esplicitamente contro la spiegazione di Aristotele che una pietra gettata, dopo aver lasciato la mano, non può essere spinta oltre dall'aria dietro di essa.

> Per questo motivo, l'aria spinta non contribuisce né a nulla o solo a pochissimo a questo movimento, ma se i corpi in movimento sono necessariamente spostati in questo modo, è chiaro che lo stesso processo si svolgerà molto più facilmente se una freccia o una pietra viene gettata necessariamente e contro la sua tendenza in uno spazio vuoto, e che nulla è necessario per questo, tranne il lanciatore
>
> Philoponus, 1993 Philoponus: On Aristotle Physics 4.1–5

.

Quest'ultima frase è intesa a dimostrare che nello spazio vuoto, che Aristotele rifiuta, e contrariamente all'opinione di Aristotele, un corpo in movimento continuerà a muoversi.

Per motivi di esperimento e di ragione, ha concluso che ci deve essere un'incorporea or *inclinazione* (tendenza di un oggetto di muoversi o accelerare in una direzione particolare sotto l'influenza di una forza) forza motrice che viene assorbita dal proiettile e provoca il suo movimento fino a quando non viene speso dalla resistenza.

Per Philoponus, l'inclinazione è impartita dal proiettore al proiettile' e ha continuato a proporre il concetto di impulso . Egli ha suggerito che gli oggetti in movimento possedessero un innato Secondo Philoponus, questo impulso era responsabile del continuo movimento di un oggetto e poteva spiegare vari fenomeni osservati in natura. In altre parole, il movimento era mantenuto da alcune proprietà del corpo, impartito quando era in movimento. È importante notare che per lui, il concetto di *forza incorporea* spiega anche il moto naturale come la caduta libera di un corpo e il movimento dei cieli, che tornerà come un problema nel Rinascimento, e che si deve sottolineare che Philoponus utilizza due espressioni diverse per l'impeto: capacità cinetica (*dinamite*) e forza cinetica (*Energeia*). Entrambe le espressioni designano nella sua teoria un concetto, che è vicino al concetto

COPIA DI REVISIONE

di energia di oggi, ma sono ben lontane dalle concezioni aristoteliche di potenzialità e di realtà.

Quindi, Philoponus è accreditato con la creazione di alcune delle basi per il pensiero moderno, più critico e l'analisi scientifica, rompendo con alcuni degli aspetti più difettosi della logica aristotelica e platonica smentindo la loro teoria della gravità.

14.4 Periodo medievale e sciolasticismo

Il periodo medievale vide l'amalgama della teologia cristiana con la fisica aristotelica attraverso lo sciolasticismo, che cercò di razionalizzare i fenomeni naturali con la dottrina religiosa, ma spesso mancava di una giustificazione empirica. Il Rinascimento accese un cambiamento verso l'osservazione e la sperimentazione, ponendo la fase della rivoluzione scientifica.

14.4.1 Gli studiosi islamici

F

14.4.1.1 Avicenna (980–1037)

Abu-Ali-al-Husayn ibn AbdAllah ibn Sina, Fig. 14.2h, (meglio conosciuto come Avicenna) (980-1037) rivisitò il lavoro di Aristotele, e sviluppò una teoria più complessa del movimento, suggerendo che un proiettile riceva dal suo "mover" *maggio* una quantità relativa alla pesantezza dell'oggetto (peso) che lo aiuta a portare il moto. Quindi, ogni oggetto che accetta l'«atto di resa» (*al-mail*) dall'esterno deve avere qualche inclinazione naturale *Istruzione* che sarebbe ridotto da attrito. Non è veramente chiaro se *maggio* Avicenna ha quindi concordato che un impeto è impartito ad un proiettile dal lanciatore, ma a differenza di Philoponus, che credeva che fosse una virtù temporanea che avrebbe rifiutato anche in un vuoto, lo ha visto come persistente, che richiedeva forze esterne come la resistenza all'aria per dissiparlo.

Per Avicenna, l'inclinazione, tuttavia, non è una forza stessa ma piuttosto una forza *strumento della forza del movimentatore* per comunicare la sua azione alla cosa commossa. *maggio* è qualcosa di permanente ma distruttibile. Come Aristotele, Avicenna ha distinta un "matte naturale' (*scheda maggioī́ī*), che è la causa del moto naturale dei corpi cadenti e di un "violent mayl" (*L'articolo 1, paragrafo 1, del regolamento (CEE) n.ī*), la causa del moto proiettile. Se non c'era resistenza al mayl, per esempio, in un vuoto, persisterebbe infinitamente come il movimento che genera. Egli ha anche sostenuto che un proiettile in un vuoto non si fermerebbe se non fosse agito su (che è coerente con la prima legge di Newton).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

14.4.1.2 Baghdadi (1080–1165)

F

Un altro critico di Aristotelia "teoria dell'impeto" era Hibat Allah Abu'l-Barakat al-Baghdaadi[10] Fico. 14.2i, chi ha scritto *Kitab al-Mu'tabar*, dove negava l'idea di Aristotele che una forza costante produce un movimento uniforme, distingueva la velocità e l'accelerazione e mostrava che la forza è proporzionale all'accelerazione piuttosto che alla velocità, prefigurando così la seconda legge di movimento di Newton, affermando che il commutatore conferisce una forte inclinazione (*L'articolo 1, paragrafo 1, del regolamento (CEE) n.ī*) sul movimento e che questo diminuisce mentre l'oggetto in movimento si allontana dal movente.

Ha modificato la teoria di Avicenna e ha dichiarato che *L'articolo 1, paragrafo 1, del regolamento (CEE) n.ī* è auto-espending, quindi ci potrebbe essere un movimento violento in un vuoto, che sarebbe venuto a una fine senza resistenza esterna.

14.4.2 Giordania di Nemore (ca 1225-ca1260) e gravità posizionale

V

Jordanus de Nemore era la meccanica più importante del periodo medievale, nel suo trattato sulla scienza dei pesi, *Elementa super dimostraem ponderum* (connessa quasi al più tardi *De ratione ponderis* ha analizzato il piano inclinato confrontando le "velocities" (slocazioni) di pesi su piani di diversa inclinazione. Il suo argomento, che un peso su un piano più ripido ha maggiore "pisoria posizionale"' (*gravitas secundum situm*) perché discende più per una data mozione lungo il piano—voca in modo implicito spostamenti virtuali, anche se senza riconoscerli come tali. Questo concetto di gravità posizionale, che effettivamente decompone la forza gravitazionale secondo la direzione di costrizione, era un contributo originale sorprendente (almeno nella sua forma esplicita e sistematica) e rappresenta un passo cruciale verso la comprensione moderna dei sistemi meccanici contrattati.

14.4.3 Medioevo: Università di Parigi

F

L'Università medievale di Parigi era una società composta da gruppi in gran parte autonomi, che si applica non solo alla sua divisione in quattro facoltà distinte di arti, teologia, diritto canonico e medicina, ma era vero delle quattro nazioni della facoltà di arti.

Oresme era sia un filosofo naturale che un teologo, mentre la competenza professionale di Buridan era limitata alla filosofia naturale che praticava da molti anni come maestro di arti nella Facoltà di arti. Buridan ha commentato quasi esclusivamente sull'Aristotele.

[10] Anche kown dal suo nome di nascita ebraico Baruch ben Malka prima che si convertisse dal giudaismo all'Islam.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

L'eredità di Oresme è abbastanza diversa. Non solo ha commentato almeno sei trattati di Aristotele, ma ha scritto quasi il doppio di molti trattati su una vasta gamma di argomenti.

14.4.3.1 Buridan (1295-1358)

Jean Buridan (Johannes Buridanus) ha affinato la teoria della *Impulso* A differenza della F



(a) Buridan (b) Oreme

Figura 14.5: Buridan, Oresme

classica visione aristotelica, che riteneva che gli oggetti si spostassero solo finché una forza veniva continuamente applicata a loro, la teoria di Buridan suggerì che un oggetto avrebbe continuato a muoversi con una velocità costante, a meno che non fosse agito da una forza esterna. (Buridan, 1991)In altre parole, Buridan ha introdotto l'idea di inerzia, per cui un oggetto mantiene il suo stato di movimento a meno che non abbia agito su una forza esterna.

Egli suggerì anche che entrambe le forze di resistenza all'aria e di gravità arresteranno il corpo. Buridan inoltre suggerì che l'impeto impartito ad un corpo aumentato con la velocità con cui è stato messo in moto, e con la sua quantità di materia. Ovviamente, stiamo avvicinando e avvicinandoci al concetto moderno di slancio, contrariamente a Newton, questa era ancora una descrizione qualitativa:

> ...dopo aver lasciato il braccio del lanciafiglio, il proiettile sarebbe stato mosso da un impulso datogli dal lanciafiamme e continuerà ad essere mosso finché l'impeto rimase più forte della resistenza, e sarebbe di durata infinita non era diminuito e danneggiato da una forza contraria che resiste o da qualcosa che lo inclinaggia ad un movimento contrario.
>
> Buridan, 1991 John Buridan: Questions on the Eight Books of Aristotle's Physics

Per quanto riguarda l'impeto celeste delle sfere, scrisse

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

> Dio, quando creò il mondo, mosse ciascuno degli orbi celesti come Egli compiva, e nel muoverli impressionò in loro impeti che li commuovevano senza che dovessero spostarli più...E quegli impeti che impressionavano nei corpi celesti non furono poi diminuiti o corrotti, perché non c'era alcuna inclinazione dei corpi celesti per altri movimenti.
>
> Buridan, 1971 John Buridan: Quaestiones super libros De caelo et mundo

Quindi, nel caso del moto dei corpi celesti, l'impeto è la forza impressionata da Dio, che provoca la loro eterna *circolare* movimento. Questo concetto di impulso aiuta a descrivere tutti i tipi di movimento: movimento terrestre, violento e naturale di corpi pesanti, così come movimento di corpi celesti, non materiali.

Buridan ha anche sostenuto che l'impeto è una qualità variabile la cui forza è determinata dalla velocità e dalla quantità della materia in materia. In questo modo, l'accelerazione di un corpo in caduta potrebbe essere compresa in termini di graduale accumulo di unità di impulso. *Impulso* La teoria è che Buridan la considerasse causa e non frutto del movimento (una grande differenza) nonostante le sue implicazioni rivoluzionarie, Buridan non usò il concetto di impeto per trasformare la scienza della meccanica.

Con l'introduzione del concetto di inerzia e sottolineando il ruolo dell'osservazione empirica nella comprensione del mondo naturale, Buridan ha comunque spianato la strada per la rivoluzione scientifica del XVI e XVII secolo.

14.4.3.2 Oresme (1320-1382)

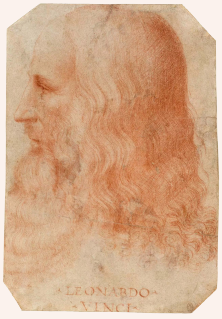
Oresme (Sottotitoli)§8.2.1) ampliato sulle idee di Buridan riguardo al moto proiettoriale F
e alla conservazione dell'impeto, sviluppando ulteriormente la nozione che l'impeto potrebbe essere trasferito tra i corpi durante le collisioni o le interazioni.

I suoi commenti su Aristotele e i suoi trattati sulla filosofia naturale furono ampiamente letti e influenti durante il tardo Medioevo e il Rinascimento, i cui lavori contribuirono a diffondere e divulgare le idee di Buridan e di altri pensatori medievali, inclusi quelli legati all'impeto e alla dinamica.

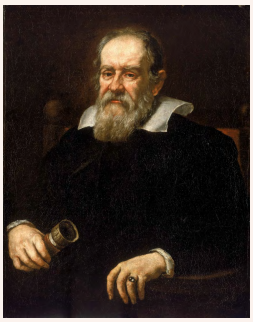
I contributi di Buridan e Oresme alla teoria dell'impeto hanno svolto un ruolo cruciale nella preparazione del terreno intellettuale per la rivoluzione scientifica del XVI e XVII secolo. Il passaggio dalla fisica aristotelica e verso un approccio più empirico e matematico rigoroso allo studio della natura deve molto agli intuizioni e agli argomenti di figure come Buridan e Oresme.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.


(a) Leonardo


(b) Benedetti


(c) Galileo


(d) Kepler


(e) Cartesio


(f) Leibniz

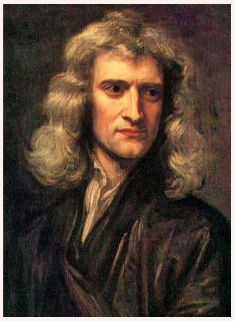

(g) Newton.

Figura 14.6: Leonardo, benedetti, galileo, kepler, descartes, leibniz, newton

14.5 Rinascimento e rivoluzione scientifica

14.5.1 Leonardo da Vinci (1452-1519)

Senza dubbio, Leonardo, Fig. 14.6a, (§7.2.1) era ben consapevole della teoria di Buridan, e sicuramente aveva qualcosa da scrivere sul concetto di forza (Vinci, 1938 PDF). F

Ecco la definizione di forza di Leonardo,

> Dico che la forza è una virtù spirituale, un potere invisibile che, per mezzo di violenza accidentale, è causato dal moto, introdotto e infuso nei corpi, che sono disegnati e deviati dalla loro abitudine naturale, dando loro una vita attiva di un potere meraviglioso; costringe tutte le cose create a cambiare forma e luogo, corre con furore alla sua morte desiderata, e si diversifica secondo le cause. La lentezza lo rende grande e la velocità lo rende debole. Nasce dalla violenza e muore di libertà. E più grande è, più velocemente si consuma. Caccia con furore ciò che si oppone alla sua distruzione, desidera sconfiggere, uccidere la sua causa, ciò che lo ostacola, e vincere, si uccide; diventa più potente trovando ostacoli più grandi. Tutto sfugge con la furia alla sua morte. Essere costretto a tutto, nulla si muove senza di essa. Quando il corpo nasce, non cresce e il suo peso e la sua forma non vengono modificati. Nessun movimento fatto da esso è sostenibile. Cresce in stanchezza e scompare per riposo. Il corpo dove è confinato non ha libertà. E spesso, attraverso il moto, genera una nuova forza.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

> Vinci, 1938 The Notebooks of Leonardo da Vinci

Quello che Leonardo definisce è piuttosto impeto, o forse quello che chiamiamo oggi energia cinetica.

14.5.2 Benedetti (1530–1590)

Giovanni Benedetti, Fig. 14.6b, modificato la teoria maturante dell'impeto insistendo che la forza impressionata produce solo il movimento rettilineo: F

> ...,[Qualsiasi] parte della materia corporea che si muove da sola quando un impulso è stato colpito su di esso da qualsiasi forza motrice esterna ha una naturale tendenza a muoversi su un rettilineo, non un percorso curvo.
>
> Benedetti, 1585 Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber

Benedetti utilizza l'esempio familiare di una pietra che si rotea in una slitta per sostenere che il movimento circolare è forzato, non naturale, e che il corpo "cerca" un percorso rettilineo una volta rilasciato.

Tuttavia, la descrizione ampiamente citata del tangente percorso della pietra, insieme alla dichiarazione che l'impeto impressionato gradualmente e continua a diminuire, non è Benedetti. Originariamente nella precedente scuola di impeto parigina, in particolare Alberto di Sassonia, che dà la versione canonica nella sua Quaestiones super Physicam. La sua formulazione recita:

> Quando il proiettile viene rilasciato dalla slitta si prende il suo percorso, con la natura come sua guida, dal punto in cui ha smesso la slitta, lungo una linea tangente al cerchio che ha fatto,... Ora è vero che l'impeto impressionato gradualmente e continua a diminuire.
>
> Saxony, 1988 Quaestiones super libros Physicorum Aristotelis

Il racconto di Albert sottolinea due punti assenti a Benedetti: la geometria tangente-linea del rilascio, e il decadimento dell'impeto dovuto alla resistenza—entrambi caratteristici della scuola parigina del XIV secolo.

Per Benedetti (Drake, 1976), al contrario, l'aumento della velocità in movimento è il risultato di un'azione continua della forza, mentre la tendenza naturale verso il basso (*gravita*) rimane costante. In obliquo movimento verso l'alto di un corpo pesante, assumendo nessuna resistenza all'aria, l'impeto impressionato spinge il corpo dritto solo finché rimane più forte della tendenza verso il basso intrinseca. Poiché la tendenza verso il basso è costante, un presunto conflitto sorge tra i due poteri; come l'impeto impressionato indebolisce, alla fine l'equilibrio, a cui la tendenza naturale riporta il corpo alla terra.

COPIA DI REVISIONE

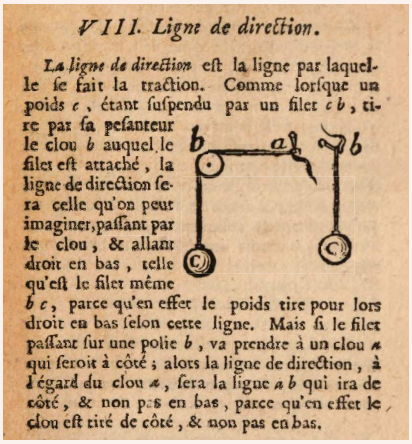
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

> ...;Essere la tendenza verso il basso del corpo, causata dalla sua pesantezza, entra subito e, mescolandosi con la forza impressionata, non permette alla linea di rimanere dritto per lungo, ma lo fa rapidamente diventare curvato.Per il corpo è mosso da due poteri, uno colpito dalla forza, l'altro dalla natura.
>
> Benedetti, 1585 Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber

14.5.3 Pardie (1636–1673)

F

Pardies è tra i primi pionieri della risoluzione della forza e il concetto di equilibrio, e ha formulato tecniche matematiche per analizzare la stabilità delle strutture e la distribuzione delle forze all'interno dei sistemi meccanici. Ha anche dato importanti contributi alla comprensione della parallelgramma di forze, metodo geometrico per determinare la forza risultante che agisce su un corpo sottoposto a più forze, il suo lavoro ha contribuito a stabilire i principi matematici che sottendevano l'equilibrio delle forze e ha posto le basi per sviluppi successivi nel campo delle statiche Fico. 14.7.



VIII. Ligne de direction.

La ligne de direction eſt la ligne par laquelle ſe fait la traction. Comme lorſque un poids *c*, étant ſuſpendu par un filet *c b*, tire par ſa peſanteur le clou *b* auquel le filet eſt attaché, la ligne de direction ſera celle qu'on peut imaginer, paſſant par le clou, & allant droit en bas, telle qu'eſt le filet même *b c*, parce qu'en effet le poids tire pour lors droit en bas ſelon cette ligne. Mais ſi le filet paſſant ſur une polie *b*, va prendre à un clou *a* qui ſeroit à côté; alors la ligne de direction, à l'égard du clou *a*, ſera la ligne *a b* qui ira de côté, & non pas en bas, parce qu'en effet le clou eſt tiré de côté, & non pas en bas.

Figura 14.7: Nozioni di equilibrio Pardies, 1710

14.5.4 Simon Stevin (1548–1620)

F/V

Sulla forza

F

Simon Stevin, Fig. 14.8, matematico fiammingo cui si attribuisce la fondazione dell'i-

COPIA DI REVISIONE

drostatica, fu il primo a formulare il principio di *equilibrio*[11] delle forze, noto anche come *parallelogramma delle forze*.

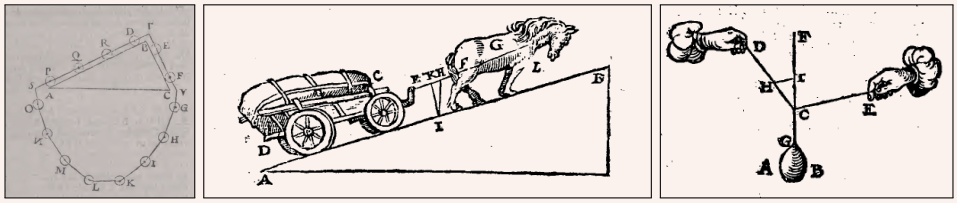


Figura 14.8: Simon Stevin (1548-1620)

Il suo trattato (Stevin, 1586) sulle statiche hanno coperto la determinazione dei centri di gravità, applicazioni statiche (*De Weeghdaet*), e idrostatici (*De Waterwicht*), Fig. 14.9. Interessante, in questa pubblicazione ribadisce anche la sua convinzione dell'eccellenza delle lingue germaniche. Secondo lui, l'olandese è il linguaggio migliore per scopi scientifici perché combina brevità con chiarezza[12].


DIALECTIKE
OFTE
BEVVYSCONST.
Lecrende van allen saecken recht ende
constelick Oordeelen, Oock opcnende
den weech tot de alderdyptte verbor-
ghentheden der Natueren.
Beschreven int Neerdaytsch door
Simon Stevin van Brugghe.
Tot Leyden,
By Christoffel Plantijn.
M. D. LXXXV.
Fig. 5
DE
BEGHINSELEN
DER WEEGHCONST
BESCHREVEN DVER
SIMON STEVIN
van Brugghe.
Tot Leyden,
Inde Druckerye van Christoffel Plantijn,
By Françoys van Raphelinghen.
cIↃ. IↃ. LXXXVI.
Fig. 6
292
GEORGE SARTON

Figura 14.9: La pubblicazione principale di Stevin (Stevin, 1586)

Stevin (Miller, 2017) confronta le forze esercitate da due corde che sostengono un peso alla forza necessaria per sostenerla con un unico cavo verticale. 14.10, il peso AB potrebbe essere supportato da un singolo cavo CFdove C è il centro di gravità del peso, o da due corde CD e CE. In quest'ultimo caso, le forze esercitate dai cordoni possono essere trovate disegnando paralleli dai cordoni al verticale: se la forza totale necessaria per sostenere il peso con un solo cavo (cioè il "peso dell'intero prisma") è proporzionale al CI, allora la forza componente diretta verso D è proporzionale a CHdove H si trova disegnando la linea HI parallela all'altra forza componente diretta verso E. Allo stesso modo, disegnando l'altro parallelo, IK, dà una magnitudo proporzionale alla forza diretta verso E, vale a dire

[11] La terza legge di Newton, «a ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria», viene spesso interpretata erroneamente come equilibrio tra due forze. In realtà, se un corpo A esercita una forza F_a sul corpo B, allora B esercita una forza uguale e contraria F_b su A. Non vi è equilibrio, perché F_a e F_b agiscono su corpi diversi.

[12] Infatti, per molti anni negli Stati Uniti, studenti laureati—specialmente quelli in chimica e fisica—era tenuto a studiare tedesco.

COPIA DI REVISIONE

CK. Le due forze componenti, proporzionali ai lati del parallelogramma, hanno insieme un effetto equivalente alla singola forza proporzionale a CI- La diagonale.

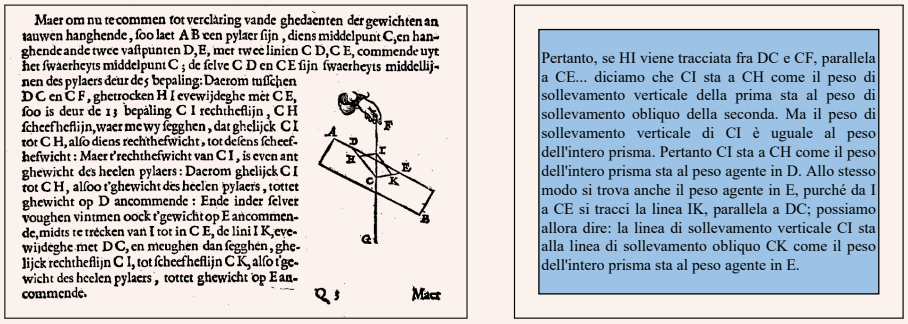


Figura 14.10: La raffigurazione di Stevin di un corpo sostenuto da uno o due corde; (Stevin, 1586) e (Miller, 2017)

Nonostante le apparenze, tuttavia, questa non è una vera regola parallelogram per le forze, ma solo le magnitudine delle quantità sono calcolate; le indicazioni sono date *a priori*. In modo crocifisso, Stevin non mostra che le forze componenti produrranno necessariamente un risultato in una direzione specifica—il verticale. Egli semplicemente assume questo sarà il caso. Le informazioni direzionali vengono messe nella costruzione ma non estratte da esso. Quindi, nel migliore dei casi, questa è una regola per decomporsi una data magnitudine scalare in altri due; le forze non sono trattate come magnitudine dirette, o *vettori*.

Stevin ha dimostrato che le forze che agiscono su un corpo potrebbero essere rappresentate geometricamente e che la forza risultante potrebbe essere determinata dalla loro aggiunta, e questo principio ha fornito un quadro matematico per analizzare gli effetti delle forze multiple che agiscono su un corpo e ha posto basi importanti per lo sviluppo successivo delle leggi di movimento di Newton.

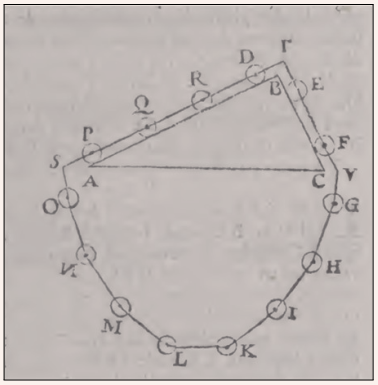
Fare riferimento anche a §14.5.4 per ulteriori discussioni sul trattato di Stevin.

I Clootcrans e il lavoro virtuale

Stevin ha dato un contributo decisivo al suo famoso *clootcrans* (reath of sfere) (wreath of sferes) dimostrazione del 1586 (Stevin, 1586). Una catena di palle uniformemente distanziate intrecciate su una zeppa triangolare (Figura 14.11) deve essere in equilibrio, per altrimenti sarebbe in moto perpetuo—che Stevin considerava ovviamente impossibile. Da questo, ha derivato la legge del piano inclinato. Stevin era così orgoglioso di questa prova che la figura appare sulla copertina dei suoi libri con il motto "Wonder en is gheen wonder" (Magic non è magia).

V

COPIA DI REVISIONE




DE
BEGHINSELEN
DER WEEGHCONST
BESCHREVEN DVER
SIMON STEVIN
van Brugghe.

TOT LEYDEN,
Inde Druckerye van Christoffel Plantijn,
By Françoys van Raphelinghen.
cIↃ. IↃ. LXXXVI.

Figura 14.11: Stevin's *clootcrans* dimostrazione.

Agricoltura, pesca, pesca marittima tottet ftaltwicht des cloots op de rechter fijde.

Tghegeven. Laet ABC een driehouck wesen diens plat fy rechthouckich op den fichteinder, ende den grondt AC euewydich vanden fichteinder, ende op de fijde AB, die dobbel fy an BC, ligghe een cloot D, ende op de fijde BC een cloot E, euewichtich ende euegroot incontrato den cloot D.

T'begeerde. Wy mocten bewyfen dat ghelijck de fijde AB 2, tot BC 1, alfoo t'ftaltwicht des cloots E, tottet)

Tbereytsel. Laet ons maecken rondtom den driehouck ABC een crans van veerthien clooten, euegroot, Euewichtich, ende euewijt van malcandcren als E,F,G,H,I,K,L,M,O,P,Q,R,D,al ghefnoert an een lini, Porta di ftreckende haer middelpunten, alfo dat fy op die middelpunten drayen mueghen...

Tbewys. Soo t'ftaltwicht der vier clooten D,R,Q,P, niet euen en waer incontrato het ftaltwicht der twee clooten E,F, t'en of t'ander fal fwaerder fijn; laet wesen (foo mueghelick waer) de vier D,R,Q,P... de acht clooten fullen neerwaert rollen, ende d'ander fes rijfen.

Maer dit foo wefende, den crans der clooten... de acht clooten ter flincker fijde wederom neer fellen, , ende rijfing ter ander, omdat de reden altijdt de felue is, altijdt ghedueren fal, ende de clooten fell uyt haer feluen een eeuwich roerfel maken, t'welck valfch è.

Daerom ghelijck de lini AB, tot BC, alfoo den cloot D tot den cloot E.

Come il lato destro del triangolo è a sinistra, così è il "standing peso' della sfera sul lato sinistro al peso in piedi della sfera sul lato destro.

Data: Lascia che ABC sia un triangolo il cui piano è perpendicolare all'orizzonte, con base AC parallela all'orizzonte. Sul lato AB, che è il doppio BC, lasci là si trova una sfera D; e sul lato BC una sfera E, uguale in peso e dimensione a D.
Obbligatorio: dimostrare che come AB (2) è a BC (1), così il peso in piedi della sfera E è al peso in piedi di la sfera D.

Preparazione: Facciamo, intorno al triangolo ABC, una corona di quattordici sfere, uguali in dimensioni e peso e allo stesso modo spazio, etichettato E, F,G,H,I,K,L,M,N,O,P,Q,R,D, tutti infilati su una linea che passa attraverso i loro centri in modo che possano girare quei centri...

COPIA DI REVISIONE

> **Prova:** Se il peso in piedi delle quattro sfere D,R,Q,P non erano uguali al peso in piedi delle due sfere E,F, allora uno o l'altra parte sarebbe più pesante... le otto sfere si sarebbero rotolate verso il basso e le altre sei sarebbero aumentate.
> Ma se fosse così, la corona delle sfere si ripiegava a sinistra e si alzava a destra; e poiché la ragione sarebbe sempre lo stesso, questo continuerà per sempre, e le sfere di se stesse produrranno un moto eterno, che è falso.
> Pertanto, come la linea AB è a BC, così è la sfera D a sfera E.
> Stevin, 1586 De Beghinselen der Weeghconst

Quello che Stevin sta dicendo:

- **Legge del piano inclinato (progetto meccanico).** Per contatto senza attrito, la forza (o "peso efficace") necessaria lungo un incline è proporzionale alla lunghezza incline: nella notazione di Stevin,
$$\frac{D}{E} = \frac{AB}{BC},$$
così più lungo il pendio (per la stessa altezza), più piccolo il tirante richiesto.
- **Formula equivalente moderna.** Per un peso W su un'inclinazione di angolo θ, lunghezza L, e l'altezza h,
$$P = W \sin\theta = W\,\frac{h}{L},$$
così due rampe diverse alla stessa altezza richiedono forze in proporzione inversa alle loro lunghezze.
- **Collegamento concettuale al ragionamento "virtuale".** Stevin sostiene per contraddizione: se le forze non si bilanciassero, il sistema si aggirava attorno a un ciclo chiuso e cedeva il moto perpetuo.

Stevin probabilmente considerava questa derivazione come tra le più importanti nel trattato, che spiegherebbe perché il *clootcrans* appare come una vignetta di pagina-titolo (Figure 14.11).

14.5.5 Galileo (1564-1642)

Galileo Galilei Fico. 14.6c, si trova in una giuntura cardine nella storia della meccanica, i suoi contributi abbracciano due domini interconnessi: il concetto nascente di inerzia che alla fine avrebbe spostato la teoria dell'impeto, e un ragionamento proto-virtuale-lavoro che anticipa le formulazioni successive basate sull'energia dell'equilibrio meccanico.

Da Impeto a Inerzia

Nel suo *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica & i movimenti locali* (Galilei, 1638)Galileo ha avviato una concezione moderna di slancio,

COPIA DI REVISIONE

caratterizzando l'impeto come effetto e misura del moto trattato come funzione di peso e di velocità. I suoi esperimenti con piani inclinati e corpi in caduta lo hanno portato a formulare il principio di inerzia, che afferma che un oggetto rimarrà nel suo stato di movimento— sia a riposo che a muoversi con velocità costante—a meno agito da una forza esterna.

Ricordiamo che la teoria dell'impeto ha implicito che in assenza di una forza, un oggetto si riposerà; il concetto di inerzia non è stato compreso. Le parole proprie di Galileo segnano la transizione:

> Ho osservato che i corpi fisici hanno un'inclinazione verso un movimento, come corpi pesanti verso il basso, che mo è esercitata da loro attraverso una proprietà intrinseca e senza necessità di un speciale dispositivo di spostamento esterno, ogni volta che non sono ostacolati e ad un'altra mozione hanno un'altra ripugnanza, come gli stessi corpi pesanti per avanzare verso l'alto, per cui non si muovono mai in quel modo a meno che non gettato violentemente verso l'alto da un movimento esterno. Infine, ad alcuni movimenti sono indifferenti, come sono corpi pesanti al movimento orizzontale[a] to che non hanno né inclinazione né ripugnanza ... E quindi, tutti gli impedimenti esterni che vengono rimossi, un corpo pesante su una superficie sferica concentrica con la terra sarà indifferente per riposare o per muoversi verso qualsiasi parte dell'orizzonte. E rimarrà in quello stato in cui è stato posto una volta; che è, se collocato in uno stato di riposo, lo conserverà; e se posto in movimento verso ovest, per esempio, manterrà in quel movimento. Così una nave... avendo una volta ricevuto qualche impulso attraverso il mare tranquillo, si muove continuamente intorno al nostro globo senza mai fermarsi... se ... tutto potrebbero essere rimossi gli impedimenti etrinsici.
>
> Galilei e Drake, 1990 «*Discoveries and opinions of Galileo: including The starry messenger (1610), Letter to the Grand Duchess Christina (1615), and excerpts from Letters on sunspots (1613), The assayer (1623)*»
>
> [a]Per Galileo, "orizzontale" implica un movimento di un corpo che è *non non* verso o lontano dal centro della Terra.

Galileo introduce qui il concetto di inerzia per la prima volta.[13] Si nota che inizia con *inerzia circolare* (di corpi celesti), e poi si estende a navi che vanno *intorno a te* il globo. Purtroppo, non c'è una menzione diretta, esplicita di *inerzia lineare*, anche se si poteva certamente essere deferiti dall'osservare la vela di una nave (presumibilmente lungo una linea retta per un osservatore) che dovrebbe aspettare Newton. *meccanica improvvisa a inerziale classico* meccanica.

Vale anche la pena notare che Galileo in seguito (nel 1632) concluse che sulla base di questa premessa iniziale di inerzia, è impossibile dire la differenza tra un oggetto in movimento e uno stazionario senza alcun riferimento esterno per confrontarlo contro—un principio Einstein avrebbe abbracciato in seguito, anche se è estremamente improbabile che fosse stato direttamente ispirato da Galileo:

[13]I precursori del pensiero inerziale appaiono nelle tradizioni di impeto precedenti; il punto qui è che Galileo dà una dichiarazione insolitamente esplicita e fisicamente messa a terra (prima in forma circolare/orizzontale) e lo usa sistematicamente.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

> SALV. Quindi, persistono ancora in quell'idea inveterata di non muoversi a meno che le nostre gambe non ci portino.
>
> Quello che stai dicendo è vero, mio caro Simplicio, se l'oggetto che vedi è in movimento mentre rimani fermo per osservarlo. Ma se sei in un pozzo quando il pozzo e insieme si sono portati avanti dalla rotazione della terra, non vedi che non in un'ora, né in mille, né in tutta l'eternità mai sarà superato dalla bocca del pozzo? Il modo in cui il movimento agisce su un oggetto non muovibile
>
> Galilei, 1632 "Dialogue Concerning the Two Chief World Systems: Ptolemaic and Copernican"

La Regola d'Oro della Meccanica

V

Oltre al suo lavoro sull'inerzia, Galileo collega l'efficacia delle macchine alle distanze attraverso le quali le forze agiscono, e lo fa in modo che anticipa il ragionamento del lavoro virtuale successivo. In *Le cose si fanno* (Galilei, 1594), afferma un vincolo generale sugli strumenti meccanici: nessun dispositivo può veramente moltiplicare la forza senza una perdita compensativa della velocità (e, in modo equivalente, un aumento del tempo).

> cio' che e'è, che quanto si guadagna di forza per mezo loro, esatto si scapita nel tempo e nella velocitàtà.
>
> Ciò è: qualsiasi cosa sia ottenuta in vigore con i loro mezzi è persa dalla stessa quantità nel tempo e in velocità (velocità).
>
> Galilei, 1594 Le mecaniche

Questo principio di compensazione—più tardi popolare nei libri di testo come il *regola d'oro della meccanica*— afferma che qualsiasi guadagno in vigore deve essere pagato per una corrispondente perdita di velocità (o, equivalente, un aumento della distanza e del tempo attraverso il quale la forza mobile agisce).

Galileo osserva immediatamente che la dichiarazione può apparire paradossale, perché la vite (e le relative disposizioni) possono sembrare aumentare la forza *senza* richiedendo un viaggio più lungo del movimento rispetto al corpo mosso:

> ... senza che il motore si muova per più lungo viaggio che il mobile.
>
> ... senza il movente che passa attraverso un viaggio più lungo del corpo mosso.
>
> Galilei, 1594 Le mecaniche

In altre parole, la sua analisi inquadra il piano inclinato e le macchine semplici in termini dei rispettivi "travels" (- *Cosa?*) della potenza mobile e del carico; tuttavia la sua spiegazione rimane dispiegata nel linguaggio del tempo e della velocità.[14]

[14] A differenza delle formulazioni successive basate sul lavoro, Galileo spesso discute attraverso confronti

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

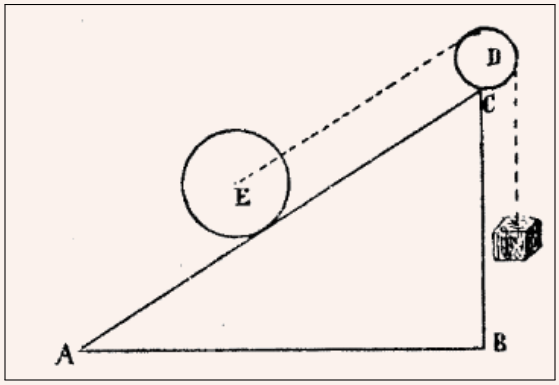


Figura 14.12: Studio piano inclinato di Galileo (Galilei, 1594)

Per sciogliere l'aspetto del paradosso, Galileo ritorna al piano inclinato e confronta i movimenti in un ambiente geometricamente controllato. Ciò che conta non è solo la distanza tracciata lungo una guida, ma il cambiamento verticale contro la gravità. In notazione moderna (idealizzata, senza attrito), sollevando un peso W attraverso un'altezza h tirando lungo un piano di lunghezza L richiede una forza

$$P = W\,\frac{h}{L} = W \sin\theta,$$

in modo che il prodotto $P\,L$ uguale $W\,h$La macchina riduce la forza richiesta solo aumentando la distanza (e quindi, a cadenza comparabile, il tempo) attraverso il quale la forza applicata deve agire. Galileo esprime questo compromesso in termini di velocità e tempo piuttosto che in termini di "lavoro', ma il contenuto è lo stesso: *non si può ottenere vantaggio meccanico senza pagare per esso in movimento* (Galilei, 1594).

Questa linea di pensiero si corre parallela all'argomento precedente di Simon Stevin basato sull'argomento pro-piane *clootcrans*: Stevin deduce l'equilibrio dall'impossibilità di moto perpetuo, e da questo equilibrio recupera la proporzionalità che governa il piano inclinato. Galileo raggiunge lo stesso vincolo fisico dal punto di vista delle macchine, sottolineando il necessario scambio tra forza e distanza (quindi il tempo) attraverso il quale la forza agisce. (Stevin, 1586; Galilei, 1594).

In questo senso, la "regola d'oro" di Galileo è un antenato stretto di formulazioni virtuali e virtuali di spostamento successive: per una macchina ideale in equilibrio, qualsiasi piccolo movimento ammissibile è limitato in modo che il lavoro netto delle forze applicate annulla. Gli autori successivi riecherebbero lo stesso invariante in un linguaggio analitico più sistematico, ma l'intuizione centrale è già presente negli scritti meccanici di Galileo e si riecheggia ancora nella *Discorsi* nel contesto più ampio delle macchine semplici e della trasmissione della forza (Galilei, 1638).

cinematici di velocità e tempi, un inquadramento che rimane più vicino alle precedenti (pre-Newtononian) discussioni di movimento.

COPIA DI REVISIONE

Limitazioni matematiche e contesto storico

Galileo mancava del quadro matematico della geometria analitica e del calcolo cartesiano che Newton avrebbe poi comandato. Sebbene il suo contemporaneo Keplero abbia formulato le sue famose tre leggi, i contributi matematici di Galileo rimasero limitati, spesso euristici o semplicistici in natura.§7.2.2) dimostrare questa limitazione, quindi non sorprende che Galileo non abbia specificamente formulato un'equazione relativa all'inerzia—questo doveva aspettare Newton.

Galileo, considerato il "padre della fisica" o "padre della meccanica sperimentale", riuscì a sostenere il Copernicanismo, essendo fisicamente vicino al Papa (che mantenne la visione geocentrica aristotelica). Mentre Galileo fu costretto a riprendere le sue convinzioni eliocentriche davanti alla Chiesa cattolica romana, Bruno, filosofo italiano e frate domenicano, affrontò la persecuzione e fu infine giustiziato per la sua inflessibile assuefazione dell'eliocentrismo e di altre teorie cosmologiche considerate eretiche dalle autorità religiose.

14.5.6 Keplero (1571–1630)

F

Discutere l'emergere dell'universo eliocentrico è al di là della portata di questo libro, ma il passaggio lontano dalla geocentricità ha spinto una riesaminazione dei concetti di forze e di impeto, che sono centrali al centro di questo capitolo.

Un rapido richiamo: il lavoro di Bache ha coinvolto una vasta raccolta di osservazioni, documentando meticolosamente i movimenti dei corpi celesti e compilando i dati nelle tabelle, nonostante la completezza del suo approccio empirico, queste osservazioni non hanno un quadro matematico coeso o una spiegazione fisica[15]L'assenza di una fondazione teorica completa significava che le osservazioni di Bache rimasero disconnesse da una più profonda comprensione della meccanica celeste.

Era Johannes Kepler, Fig. 14.6d, che alla fine ha fornito il modello matematico necessario per dare un senso a queste osservazioni, con le sue leggi del moto planetario; tuttavia, una spiegazione completa dei principi sottostanti doveva attendere l'opera infondente di Newton e la sua teoria della gravitazione universale (Kepler, 1609). Semplicemente messo, Kepler è stato il primo a cercare un *definizione quantitativa della forza*Vediamo come.

Ma prima, dobbiamo notare che Kepler era ambiguo: in un unico e lo stesso lavoro il concetto di forza è talvolta indicato come un'anima e talvolta come una quantità corporea fisica, quasi meccanica. Chiaramente, anche lui, stava lottando per svezzarsi da Aristotele. *Cosmonografico del Mistero1* Keplero mantiene ancora la concezione tradizionale celeste della forza come anima che anima i corpi e dirige i loro movimenti appropriati.

Keplero concepisce la natura universale delle forze gravitazionali e chiama la gravità

[15]Ciò è simile a condurre numerosi test materiali, limitandoci a tabularli in un foglio di calcolo. Ciò che manca è un modello di costitutivo matematico sovraarcheggio per spiegare i fenomeni sottostanti.

COPIA DI REVISIONE

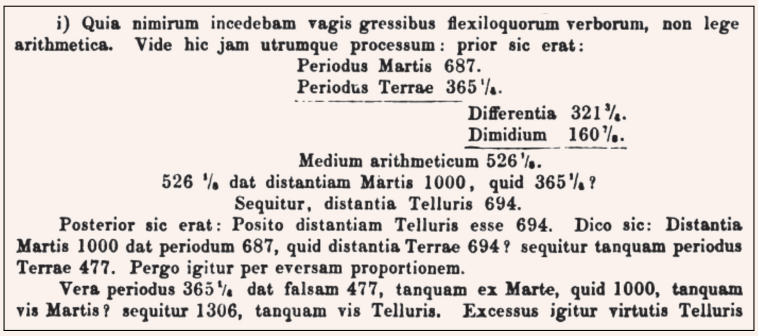
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

una "passività" piuttosto che un'attività. Egli è giunto alla conclusione di una coincidenza temporale delle maree con alcune posizioni lunari. Come risultato di queste indagini, alcuni hanno avanzato la teoria che la luna provoca le maree. Keplero concorda con questi sostenitori della teoria della luna, ma generalizza questi risultati in un senso importante: gli oceani sono molto attratti da gli oggetti, gli oceani inclusi, sono attratti dalla terra. Fig. 14.13.

Kepler ha cercato una spiegazione dinamica del moto planetario nel suo primo trattato astronomico *Astronomia nova*. Nell'introduzione del libro scrive:

> La gravità è un affetto reciproco tra i corpi correlati, che tende ad unirli e a congiunti (di cui anche la facoltà magnetica), mentre la terra attrae la pietra piuttosto che la pietra tende verso la terra. Anche se abbiamo posto il centro della terra al centro del mondo, non sarebbe verso questo centro del mondo come tale che i corpi pesanti sarebbero portati, ma verso il centro del trasporto rotondo.
>
> Kepler, 1609 Astronomia nova: Aitiologia, seu physica coelestis

Nella stessa *Astronomia nova* (1609) Keplero menziona la scoperta che l'orbita di un pianeta è «un percorso ovale, perfettamente ellittico». Dichiarò di avere ottenuto il risultato mediante «prove assai laboriose e calcoli su un grandissimo numero di osservazioni». Precisò inoltre che il successo dipendeva dall'abbandono del metodo di Tolomeo, basato sul moto medio del Sole anziché su quello apparente. Tolomeo riteneva che la differenza tra i due moti non fosse percepibile e aveva scelto il primo per comodità di calcolo; Copernico (1473–1543) e Brahe (1546–1601) lo avevano seguito. Keplero sosteneva invece che occorresse considerare il moto apparente e assumere come riferimento il vero corpo del Sole. Neppure questo, però, era sufficiente: la corrispondenza fra calcoli e osservazioni doveva anche ricevere una spiegazione fisica. Il modello nascosto nelle osservazioni doveva quindi accordarsi con i tre ambiti che, per Keplero, costituivano il quadro della riforma astronomica: geometria, fisica e osservazione (Hon e Zik, 2009).



i) Quia nimirum incedebam vagis gressibus flexiloquorum verborum, non lege arithmetica. Vide hic jam utrumque processum: prior sic erat:

Periodus Martis 687.
Periodus Terrae 365 ¼.
Differentia 321 ¾.
Dimidium 160 ⅞.
Medium arithmeticum 526 ⅛.

526 ⅛ dat distantiam Martis 1000, quid 365 ¼?
Sequitur, distantia Telluris 694.

Posterior sic erat: Posito distantiam Telluris esse 694. Dico sic: Distantia Martis 1000 dat periodum 687, quid distantia Terrae 694? sequitur tanquam periodus Terrae 477. Pergo igitur per eversam proportionem.

Vera periodus 365 ¼ dat falsam 477, tanquam ex Marte, quid 1000, tanquam vis Martis? sequitur 1306, tanquam vis Telluris. Excessus igitur virtutis Telluris

Figura 14.13: Calcoli Keplero (Kepler, 1855)

Si deve notare che Kepler non ha mai invocato l'inerzia (moderna) nella sua scrittura, osservando che la velocità planetaria è più alta a perielio e più bassa a a afelio, Kepler si

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

è convinto che il ruolo del Sole in questo fenomeno era essenzialmente fisico in natura e quindi *più meccanico di spirituale*.

> Se si sostituisce la parola "anima' la parola "forza", si ha il principio stesso su cui si basa la fisica celeste del trattato su Marte ecc. ... Prima ho creduto che la causa del moto planetario è un'anima, affascinata come ero dagli insegnamenti di J. C. Scaliger sulle intelligenze motorie. Ma quando ho capito che questi motivi causano un senso corporeo che non è così vicino alla conclusione solare.
>
> Kepler, 1609 Astronomia nova: Aitiologıa, seu physica coelestis

Eccolo!

Infine, il suo lavoro prefigurava la scoperta della legge di gravità, come ha riconosciuto che la forza che agisce sui pianeti deve essere una forza radiale e attraente incentrata sul sole.

14.5.7 Cartesio (1596–1650)

René Descartes ha dato un contributo cruciale sia al concetto di forza che al principio del lavoro virtuale, dove Kepler era «meccanico», traendo conclusioni (e equazioni) da osservazioni, Descartes—non dimentichiamo che era un grande filosofo (*Sum di Cogito Ergo*)-guarda un approccio più speculativo, i suoi concetti spiegano come i corpi si muovono e interagiscono in base ai principi filosofici, anche se il suo approccio non ha il formalismo matematico e il potere predittivo del lavoro di Kepler.

Interessante, gli stessi cattolici Cartesio trascorrevano la maggior parte della sua vita nella Repubblica Olandese, dove si era unito all'Esercito degli Stati Olandesi Protestanti come mercenario e studiava ingegneria militare come stabilito da Simon Stevin, che era anni dell'età d'oro olandese, caratterizzato da apertura culturale in netto contrasto con l'ambiente più repressivo in Francia.

Ulteriori su Descarts in §6.6.3.

Forza e Impeto

F

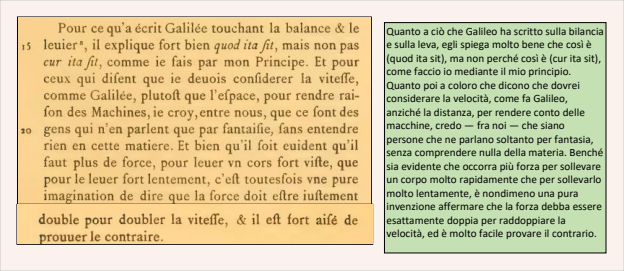
Descartes[16] il contributo al concetto di forza era quello di presentare un'alternativa ontologica[17] quadro in cui il tradizionale non0f impetus non poteva più trovare un posto, Fig. 14.14.

Il concetto di impulso di Cartesio si concentrò principalmente sul moto dei corpi sulla

[16] Ulteriori su Descartes in §6.6.3

[17] Ontologia: il ramo della filosofia riguardante la natura dell'essere, dell'esistenza o della realtà; in termini più semplici, si occupa di questioni su quali sono fondamentalmente le cose, come esistono e cosa significa per qualcosa che esiste.

COPIA DI REVISIONE


Pour ce qu'a écrit Galilée touchant la balance & le leuier*, il explique fort bien *quod ita ſit*, mais non pas *cur ita ſit*, comme ie fais par mon Principe. Et pour ceux qui diſent que ie deuois conſiderer la viteſſe, comme Galilée, plutoſt que l'eſpace, pour rendre raiſon des Machines, ie croy, entre nous, que ce ſont des gens qui n'en parlent que par fantaiſie, ſans entendre rien en cette matiere. Et bien qu'il ſoit euident qu'il faut plus de force, pour leuer vn cors fort viſte, que pour le leuer fort lentement, c'eſt toutesfois vne pure imagination de dire que la force doit eſtre iuſtement double pour doubler la viteſſe, & il eſt fort aiſé de prouuer le contraire.

Quanto a ciò che Galileo ha scritto sulla bilancia e sulla leva, egli spiega molto bene che così è (quod ita sit), ma non perché così è (cur ita sit), come faccio io mediante il mio principio. Quanto poi a coloro che dicono che dovrei considerare la velocità, come fa Galileo, anziché la distanza, per rendere conto delle macchine, credo — fra noi — che siano persone che ne parlano soltanto per fantasia, senza comprendere nulla della materia. Benché sia evidente che occorra più forza per sollevare un corpo molto rapidamente che per sollevarlo molto lentamente, è nondimeno una pura invenzione affermare che la forza debba essere esattamente doppia per raddoppiare la velocità, ed è molto facile provare il contrario.

Figura 14.14: René Descartes (1596–1650)

Terra piuttosto che sui corpi celesti, e si preoccupava più di spiegare il movimento terrestre, come il moto dei proiettili, piuttosto che il moto orbitale dei pianeti.

Nel suo *Principi di filosofia* (1644), Descartes sostiene che Dio è la «causa universale e primaria del movimento» nella misura in cui egli conserva la quantità totale di movimento e di riposo che inizialmente ha creato nell'universo per mezzo della sua «concurrenza ordinaria». In seguito, Descartes ha spiegato che Dio conserva il mondo materiale «per la stessa azione e secondo le stesse leggi di quando l'ha creato». *Principi*, l'identificazione dell'atto di creazione di Dio con il Suo atto di conservazione serve a mostrare che Dio porta a quei trasferimenti in movimento derivanti da collisioni che conservano la quantità totale di movimento e di riposo che inizialmente ha creato (Schmaltz, 2003).

Secondo Descartes, l'universo era pieno di una sostanza chiamata "etere", e questo etere era in costante movimento, formando vortici o vortici. I corpi celesti, compreso il sole, i pianeti e le stelle, erano portati avanti da questi vortici, molto simili a oggetti che fluttuano in un flusso:

> Ma desidero ora che consideri quale sia la gravità di questa terra è, cioè, la forza che unisce tutte le sue parti, e che rende tutti tendono verso il suo centro, tutti più o meno secondo come sono più o meno grandi e solidi; che non è altro e consiste solo in questo, che le parti del piccolo cielo che la circonda, girare molto più rapidamente che il proprio fare intorno al suo centro, tendono anche con molta più forza per ritirarsi da essa, e di conseguenza spingeteli lì.
>
> Descartes, 1927 Selections

Qui Descartes cerca di dimostrare che le particelle più voluminose che costituiscono il vortice nel centro di cui la terra è situata si muovono costantemente verso la circonferenza del vortice, a causa della loro maggiore massa; la materia terrestre, coerente in grandi grumi, non può cedere così facilmente alla pressione esteriore come questa sostanza eterea (Jammer, 1957).

Sviluppi virtuali e la costruzione tangente

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Dopo le intuizioni geometriche di Stevin, Descartes ha portato una chiarezza senza precedenti al principio del lavoro virtuale, trasformandolo da una regola di proporzione in una base per tutte le statiche. (Descartes, 1898), rappresentano un decisivo progresso concettuale: il riconoscimento che solo *Infiniti* gli spostamenti sono importanti, e questo *spazio spazio spazio*—non velocità—è la misura corretta di vantaggio meccanico.

Il principio fondamentale (1637). In una lettera a Christiaan Huygens il 5 ottobre 1637, accompagnando il suo breve trattato *Esplicazione delle moschee per l'aide su pipì avec une pipistrello leva di forza un fardeau fort pesant*, Descartes ha dichiarato il principio fondamentale con ammirevole chiarezza:

> L'invenzione di tutte queste macchine è fondata su un principio, che è che la stessa forza che può sollevare un peso, per esempio di 100 libbre, fino a due piedi, può anche sollevare un peso di 200 libbre fino a un piede, o un peso di 400 libbre fino a mezzo piede, e così via, a condizione che sia applicato a loro.
>
> Descartes, 1898 Correspondance, mars 1638 – decembre 1639, Descartes to Huygens, 5 October 1637, AT I, 435–436

Il principio esprime la conservazione del prodotto fra carico e spostamento verticale. Ricorda superficialmente la regola di proporzione di Aristotele, ma presenta una differenza decisiva: *non fa riferimento al tempo né alla velocità*. La "forza" di cui parla Cartesio non è uno sforzo istantaneo, bensì un'*azione* misurata dal prodotto del peso per l'altezza percorsa. Come avrebbe spiegato in seguito, questa azione possiede "due dimensioni", mentre la forza necessaria soltanto a sostenere un peso fermo ne possiede una.

La Geometria di Dislocazione Infinitesimale (1638). Descartes ha sviluppato le implicazioni del suo principio in una lettera notevole a Mersenne datato 13 luglio 1638. Qui introdusse il concetto decisivo di *movimento incipiente*—l'"inizio del movimento"—e ha mostrato come applicare il suo principio a corpi costretti a muoversi lungo percorsi curvi.

La chiave di lettura appare presto nella lettera:

> Da questo risulta evidente che la relativa pesantezza di ogni corpo, o qual è la stessa cosa, la forza che deve essere impiegata per sostenerla e impedirla di scendere quando è in una certa posizione, deve essere misurata dalla *inizio del movimento* che il potere di sostegno avrebbe dovuto fare, se alzarlo o seguirlo se scendesse. Così che la proporzione tra la linea retta che questo movimento descriverebbe e che che segnasse quanto il corpo avrebbe significato mentre si avvicina al centro della terra, è la stessa di quella tra la sua assoluta e relativa pesantezza.
>
> Descartes, 1898 Correspondance, mars 1638 – decembre 1639, Descartes to Mersenne, 13 July 1638, AT II, 228–229

Diverse caratteristiche di questo passaggio meritano l'enfasi. In primo luogo, la frase "inizio del movimento" (*inizio della mouvement*) segnala che Descartes non si preoccupa di spostamenti finiti ma con quelli infinitesimali—la geometria del vincolo ad un certo punto, non il percorso attraversato su una distanza misurabile.*sarebbe dovuto fare*," "*descrivo*")

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

indica che non consideriamo spostamenti reali ma *potenziale potenziale* Questo apre la porta al concetto di *virtualità* che sarebbe stato poi reso esplicito da Johann Bernoulli.

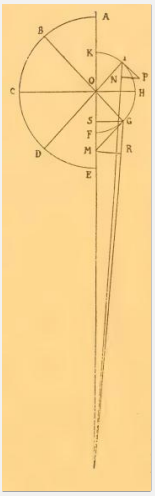
Poche righe dopo, Descartes ha reso esplicito il carattere infinitesimale del suo ragionamento:

> Nota che dico *comincia a scendere*, e non semplicemente discendono, perché è solo l'inizio della discesa che deve essere tenuto in considerazione.
>
> Descartes, 1898 Correspondance, mars 1638 – decembre 1639, Descartes to Mersenne, 13 July 1638, AT II, 233

Questa è una dichiarazione decisiva, ciò che conta non è il movimento finito, ma l'infinisimasimale *inizio* di movimento.

La leva e la costruzione della tangente. Descartes ha illustrato il suo principio attraverso tre esempi: la puleggia, il piano inclinato e la leva. L'esempio della leva è particolarmente importante perché mostra come gestire i vincoli che forzano il movimento lungo i sentieri curvati. Il passaggio completo merita la citazione, perché rappresenta una delle più chiare esposizioni di statiche pre-Lagrangian:

Esempio 3 — La leva.



Lasciamo perdere. CH essere una leva supportata al punto O in modo tale che, quando è sollevato o abbassato, la fine C descrive il semicirco $ABCDE$ e la fine H il semicircolare $FGHIK$, di cui semicerchio O Inoltre, non si tenga conto del suo spessore o del suo peso, ma si consideri una linea diritta matematica in cui il punto O Ora osservate che, mentre la forza o il potere che lo muove descrive l'intero semicerchio $ABCDE$ e agisce lungo quella linea $ABCDE$, anche se il peso (che suppongo essere all'altro lato) descrive allo stesso modo il semicerchio $FGHIK$, non è tuttavia sollevato dalla lunghezza di quella linea curva $FGHIK$, ma solo per la lunghezza della linea retta FKQuindi la proporzione tra la forza che muove questo peso e la sua pesantezza non deve essere misurata dalla proporzione tra i due diametri di questi cerchi, o tra le due circonferenze, ma piuttosto da quella tra la circonferenza del primo e il diametro del secondo.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

> Considerate inoltre che questa forza non deve essere quasi così grande da spostare la leva quando è vicino A o vicino E come quando è vicino B o vicino D, né tanto grande quando è vicino B o vicino D come quando è vicino C. Il motivo è che il peso aumenta meno in quelle posizioni. Questo è facile da vedere se, supponendo che la linea COH essere paralleli all'orizzonte e AOF per tagliarlo ad angolo retto, si prende il punto G altrettanto distante dai punti F e He il punto B altrettanto distante dai punti A e Ce, dopo aver disegnato GS parallela all'orizzonte, si nota che la linea FS, che segna quanto questo peso aumenta mentre la forza agisce lungo la linea AB, è molto più piccolo della linea SO, che segna quanto aumenta mentre la forza agisce lungo la linea BC.
>
> Ora, per misurare esattamente ciò che questa forza deve essere ad ogni punto della linea curva $ABCDE$, si deve pensare che agisce lì nello stesso modo come se trascinasse il peso su un piano circolaremente inclinato; e l'inclinazione ad ogni punto di questo piano circolare (o sferico) deve essere misurata da quella della linea retta che tocca il cerchio a quel punto. B, per trovare la proporzione deve avere alla pesantezza del peso che è allora al punto G, si deve disegnare il tangente GM, e un'altra linea dal punto G, come GR, che tende dritto verso il centro della terra; poi dal punto M, preso a volontà sulla linea GM, disegnare MR ad angolo retto a GR; e si deve considerare che la pesantezza di questo peso, al punto G, è alla forza che sarebbe richiesto in quel luogo per sostenerla o spostarla lungo il cerchio FGH Come la linea GM è il GR. Quindi, se la linea BO è supposta raddoppiare la linea OG, la forza al punto B bisogno solo di essere a questo peso al punto G come metà della linea GR è a tutta la linea GM; e se BO e OG sono uguali, questa forza deve essere a questo peso come tutta la linea GR è a tutta la linea GM, ecc.
>
> Allo stesso modo, quando la forza è al punto D, per sapere quanto peso poi al punto I pesa, bisogna disegnare il tangente IP e la linea retta IN verso il centro della terra; e dal punto P, preso a volontà sul tangente, disegnare PN ad angolo retto a IN, per avere la proporzione tra la linea IP e metà della linea IN (in caso DO è in posa doppia OI) corrispondente a quello tra la pesantezza del peso e la forza che deve essere al punto D per spostarla, e così per gli altri.
>
> Ora mi sembra che questi tre esempi siano sufficienti per assicurare la verità del principio che ho proposto e per dimostrare che tutto trattato in statici dipende da esso. Per la cuneo e la vite sono solo piani inclinati, e le ruote di cui si compone macchine sono solo leve. . . .
>
> Descartes, 1898 Correspondance, mars 1638 – decembre 1639, Descartes to Mersenne, 13 July 1638, AT II, 235–237

La mossa cruciale di questa analisi è la sostituzione del percorso curvo da parte sua *tangente* Questa è una costruzione differenziale-geometrica: il tangente cattura la direzione istantanea del moto permesso, e il rapporto $GM : GR$ In un linguaggio moderno, diciamo che Descartes sta calcolando la componente della forza gravitazionale lungo la direzione del vincolo – o equivalente, valutando il lavoro virtuale per uno spostamento infinitesimale lungo il tangente.

Spazio, non velocità. Descartes era pienamente consapevole che il suo approccio differiva da quello dei suoi predecessori e contemporanei, molti dei quali formulavano principi meccanici in termini di velocità. In una lettera a Mersenne il 15 novembre 1638, contrastava il suo approccio con Galileo:

> Pour ce qu'a écrit Galilée touchant la balance et le levier, il explique fort bien *Allegato* Le donne non fanno *sieda*Et pour ceux qui disent que je devois considérer la vitesse, comme Galilée, plutôt que

COPIA DI REVISIONE

> l'espace, pour rendre raison des Machines, je croy, entre nous, que ce sont des gens qui n'en par le fantaisie, sans entendre rien en cettetière. . .
>
> Per quanto riguarda quello che Galileo ha scritto sul bilanciamento e sulla leva, spiega molto bene *cosa succede* ma non *perché succede*E, come faccio io attraverso il mio Principio, e per coloro che dicono che dovrei considerare la velocità, come fa Galileo, piuttosto che lo spazio, per spiegare le macchine, credo, tra noi, che sono persone che parlano solo dalla fantasia, senza capire nulla della questione. . .
>
> Descartes, 1898 Correspondance, mars 1638 – decembre 1639, Descartes to Mersenne, 15 November 1638, AT II, 433–434

Questo passaggio rivela la convinzione di Cartesio che il suo principio non fornisce semplicemente una regola corretta ma una vera *spiegazione*Galileo e altri potrebbero derivare la legge della leva, ma la loro invocazione di velocità oscurava la vera ragione di vantaggio meccanico. In una lettera di accompagnamento del 12 settembre 1638, Descartes elaborava sul perché escludeva deliberatamente la velocità dalla sua formulazione:

> Non è la differenza di velocità che rende questi pesi devono essere uno doppio l'altro, ma la differenza nello spazio. . . E se ho mostrato qualsiasi abilità in qualsiasi parte di questo piccolo trattato sulle statiche, sono disposto a renderlo noto che è più in questo solo che in tutto il resto. Perché è impossibile dire qualcosa di buono o solido sulla velocità senza aver spiegato quale pesantezza è veramente, e insieme con esso l'intero sistema del mondo. Ora perché non ho voluto intraprendere questo, ho trovato un modo per omettere questa considerazione, e per separare gli altri potrebbe.
>
> Descartes, 1898 Correspondance, mars 1638 – decembre 1639, Descartes to Mersenne, 12 September 1638, AT II, 353–355

Descartes ha riconosciuto che un trattamento completo delle velocità richiederebbe una teoria delle dinamiche, un resoconto di come le forze producono accelerazioni, che a sua volta richiederebbero la comprensione della natura della gravità stessa. Con la formulazione di statici puramente in termini di spostamenti spaziali, ha raggiunto una teoria autocontenuta che non dipendeva da questioni non risolte in fisica. Il principio del lavoro virtuale, nelle mani di Cartesio, è diventato una dichiarazione puramente geometrica sull'equilibrio, indipendente da eventuali ipotesi dinamiche.

La Lega degli Oscar

I contributi di Cartesio al principio del lavoro virtuale possono essere riassunti in quattro punti:

1. **Il principio fondamentale**: La "forza" (azione) necessaria per sollevare un peso è misurata dal prodotto di peso e altezza, e questo prodotto viene conservato in tutte le macchine semplici, che generalizza le intuizioni di Stevin in un assioma universale per le statiche.
2. **Il punto di vista infinitesimale**: Ciò che conta non è lo spostamento finito, ma

COPIA DI REVISIONE

l'«inizio del movimento»— lo spostamento infinitesimale compatibile con i vincoli, trasformando il principio da una dichiarazione sui moti effettivi in una relazione *virtuale* spostamenti.

3. **La costruzione tangente**: Per i vincoli curvi, lo spostamento rilevante viene misurato lungo il tangente alla curva di costrizione, che consente di applicare il principio a sistemi meccanici arbitrari.
4. **Spazio sulla velocità**: Le variabili appropriate per le statiche sono spostamenti spaziali, non velocità, questa separazione delle statiche dalle dinamiche è stata una scelta metodologica deliberata che ha dato al principio la sua caratteristica generalità.

La formulazione di Descartes fu presto generalizzata da John Wallis (1616–1703), che nel suo *Mechanica* (1670–1671) estendeva il principio alle forze arbitrarie: "I movimenti avanti o indietro delle forze motorie sono ottenuti dai prodotti delle forze dai loro movimenti avanti o indietro stimati lungo le direzioni di queste forze"""""" (Wallis, 1670)Ma era Johann Bernoulli che, nel secolo successivo, darebbe al principio la sua formulazione definitiva e il suo nome: il principio *velocità virtuale*.

14.5.8 Torricelli (1608–1647)

V

Evangelista Torricelli (1608–1647)[18] fu l'ultimo studente di Galileo e, dopo la morte di Galileo nel gennaio 1642, suo successore come matematico al Granduca Ferdinando II de' Medici a Firenze. *Opera geometrica* (Torricelli, 1644)L'unico lavoro da presentare nella sua vita. La seconda parte di questo trattato, *De motu gravium naturaliter discendentium et proiectorum*, contiene un principio di equilibrio che si rivelerebbe un legame cruciale tra le statiche Archimediche e il principio di lavoro virtuale di Bernoulli e Lagrange.

In una breve sezione preliminare intitolata *Il mio lavoro*, Torricelli ha dichiarato il suo assioma fondamentale, Fig. 14.15:

> *Praemittamus.*
> Duo grauia simul coniuncta ex se moueri non posse, nisi centrum comuni grauitatis ipsorum disceseat.
>
> Quando enitur solfo di coppia grauia inter se coniuncta fuerint, vt ad motum vnius motus etiam alterius consequatur, erunt duo illa grauia tamquam graue vnum ex duo compositum, siue id libra sit, siue troclea, siue qualibet alia Mechanica ratione. Quando vero ita constitutum fuerit vt nullo modo commune ipsius centrum grauitatis disceseere possit, graue penitus in suo positione quiescet: alias enim frustra moueretur; orizzontalii, scilicet latione, quae nequam deorsum tendit.

[18] Torricelli è forse meglio conosciuto per la sua invenzione del barometro (1643) e per la legge di "Torricelli" che governa l'efluce fluido da un orifizio. Ma i suoi contributi alla meccanica, anche se meno celebrata, sono di fondamentale importanza per la storia del lavoro virtuale.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

> Lo confermeremo con la dimostrazione; procediamo subito a stabilire che, in Galileo, è un principio o un postulato. *Prepariamo questo.*
> Due corpi pesanti, uniti insieme, non possono muoversi di se stessi a meno che il loro comune centro di gravità scenda.
> Quando due corpi pesanti sono stati collegati tra loro in modo tale che, al movimento di uno, il movimento dell'altro segue anche, quei due corpi pesanti saranno come un corpo pesante composto da due—se sia un equilibrio, o una puleggia, o da qualsiasi altra disposizione meccanica. Un peso di questo genere non si muoverà mai se il suo centro di gravità non scende.
>
> Torricelli, 1644 Opera geometrica

Il contrapositivo dà il criterio per l'equilibrio: *un sistema di corpi pesanti collegati è in equilibrio se e solo se, per ogni possibile movimento, il loro centro comune di gravità non può scendere*.

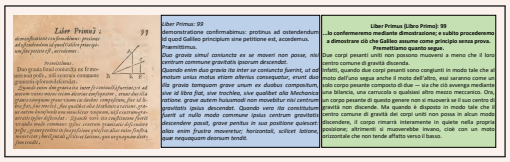


Figura 14.15: L'assioma di Torricelli

Questa semplice dichiarazione ingannevole rappresenta una generalizzazione profonda. Il principio antico—che un *singolo* il corpo è in equilibrio quando sostenuto al suo centro di gravità— era ben noto da Archimede. Quello che Torricelli ha riconosciuto è che per un *aggregato aggregato* di corpi rigidi collegati, il centro di gravità dell'intero sistema (contenuto secondo le regole Archimedean) ha lo stesso significato fisico. Se nessun movimento virtuale può abbassare questo punto, il sistema è in equilibrio.

Relazione al lavoro virtuale

Anche se il principio di Torricelli non menziona esplicitamente spostamenti virtuali o lavoro virtuale, è equivalente al principio del lavoro virtuale per sistemi soggetti a gravità. n corpi pesanti con pesi W_i a altezze z_i sopra un dato. L'altezza del centro di gravità è

$$\bar{z} = \frac{\sum_i W_i z_i}{\sum_i W_i}$$

Per qualsiasi spostamento virtuale $\delta \mathbf{r}_i$, il cambiamento virtuale nell'altezza del centro di gravità è

$$\delta \bar{z} = \frac{\sum_i W_i \, \delta z_i}{\sum_i W_i}$$

COPIA DI REVISIONE

La condizione di Torricelli che il centro di gravità non può scendere ($\delta \bar{z} \geq 0$ per tutti i moti ammissibili, con uguaglianza in equilibrio per spostamenti reversibili) è equivalente a richiedere che il lavoro virtuale di gravità svanisca:

$$\delta W = -\sum_i W_i \, \delta z_i = 0 \tag{14.1}$$

Il principio centrale della gravità è quindi un caso particolare del principio del lavoro virtuale, limitato alle forze gravitazionali.

Da Torricelli a Bernoulli

Torricelli ha usato il suo principio per dare eleganti prove di risultati in meccanica, tra cui la legge del piano inclinato e l'equilibrio dei sistemi su piani di inclinazioni diverse–risultati che Galileo aveva trattato con altri metodi. Il suo approccio aveva vantaggi distinti: non ha richiesto alcuna decomposizione di forze, nessuna considerazione di "tendencies a movimento," e nessun appello al ragionamento dinamico.

Il principio fu assunto da meccanicisti successivi, in particolare Wallis e Huygens, e divenne una delle diverse formulazioni concorrenti della condizione di equilibrio nel XVII secolo. Quando Johann Bernoulli articolava il principio delle velocità virtuali nel 1715, sintetizzava l'intuizione di Torricelli con la tradizione più antica che derivava dallo pseudo-aristotelico. *Mechanica*: Il principio di Bernoulli applicato a *qualsiasi* forze, non solo la gravità, ed ha espresso la condizione di equilibrio in termini di scomparsa del lavoro virtuale piuttosto che la stazionaria di un centro di gravità.

Lagrange, nel sondaggio storico che apre il suo *Analitica di Mécanique*, ha dato a Torricelli pieno credito per questo importante passo intermedio:

> Torricelli fut le premier qui réduisit le principe des vitesses virtùlles à cette condition, que le centre de gravité des poids ne discese pas.
>
> Torricelli fu il primo a ridurre il principio delle velocità virtuali a questa condizione: che il centro di gravità dei pesi non scenda.

Nell'arco dello sviluppo *Mechanica* Il contributo di Torricelli occupa una posizione centrale, dimostrando che l'equilibrio potrebbe essere caratterizzato da una proprietà estrema- il centro di gravità nella sua posizione più bassa possibile— piuttosto che da un equilibrio di forze o momenti. Questa prospettiva variazionale, generalizzata oltre la gravità ai sistemi di forza arbitrari, sarebbe diventata il segno distintivo della meccanica analitica.

14.5.9 Wallis (1616–1703)

V

John Wallis, nel suo *Mechanica* (1670–1671) (Wallis, 1670)Egli ha dichiarato che «i movimenti avanti o indietro delle forze motorie sono ottenuti dai prodotti delle forze

COPIA DI REVISIONE

dai loro movimenti avanti o indietro stimati lungo le direzioni di queste forze». Questa generalizzazione oltre la gravità era un passo importante verso il principio generale che Bernoulli avrebbe articolato.

14.5.10 Lebniz (1646–1716)

F

Leibniz ha dato contributi sia al concetto di forza che all'apparato matematico che alla fine lo descriverebbe.

Forza e Monadologia

Per Leibniz, Fig. 14.6f, in *Monadologia*, la forza può essere intesa come espressione dell'attività inerente o appetizione di *monadi*Mentre la forza nel senso meccanico tradizionale comporta un'azione esterna su corpi, Leibniz concepito come principio interno inerente a tutte le sostanze. *monadi*[19], guidati dalla loro *inclinazione*, risultano nella manifestazione della forza come cambiamenti nelle loro percezioni o stati. Nota analogia con la teoria indebitata di seguito *Impulso*.

Verso un Calcolo della Situazione

Finora le forze erano ancora trattate essenzialmente come scalari: una magnitudine tracciata, mentre la geometria della configurazione forniva le indicazioni.

Leibniz fu insoddisfatto di questa divisione tra calcolo e figura, diventando un precursore concettuale di un calcolo simbolico di "situazione", una notazione che significa codificare posizione, orientamento e anche movimento come di magnitudo. (Leibniz e Loemker, 1956):

> Ho scoperto alcuni elementi di una nuova caratteristica che è completamente diversa dall'algebra e che avrà grandi vantaggi nel rappresentare alla mente, esattamente e in un modo fedele alla sua natura, anche senza figure, tutto ciò che dipende dalla percezione del senso. Algebra è la caratteristica per numeri o magnitudine non definite, ma non esprime la situazione, gli angoli e il movimento direttamente. Di conseguenza è spesso difficile analizzare le proprietà di una figura per calcolo, e ancora più difficile trovare dimostrazioni geometriche molto convenienti e costruzioni, anche quando il calcolo algebrico è completato. Ma questa nuova caratteristica, che segue le figure visive, non può non dare la soluzione, la costruzione, e la dimostrazione geometrica allo stesso tempo, e in modo naturale e in un'analisi, cioè, attraverso una determinata procedura.
>
> Leibniz e Loemker, 1956 Philosophical Papers and Letters

[19] Nel sistema filosofico di Leibniz, *monad.* è un concetto metafisico fondamentale che rappresenta una sostanza indivisibile, immateriale e autocontenuto

COPIA DI REVISIONE

Il punto chiave è la sua insistenza che una meccanica di successo ha bisogno di un linguaggio che porta "dove' e "come diretto" insieme a "how much"— un programma che prefigura trattamenti sistematici in seguito di quantità dirette.

La lotta Vis Viva

Dalla fine del XVII secolo a gran parte del XVIII, la meccanica continentale era divisa da una domanda ingannevole: quale quantità cattura meglio la "vera misura" del potere movente?(Descartes, 1644; Leibniz, 1686a) Carisini (e molti Newtoniani, in un diverso idioma) enfatizzarono la "quantità del movimento", proporzionale alla mv,(Descartes, 1644; Newton, 1687) perché traccia ciò che viene scambiato in impatti e perché appare naturalmente in argomenti di equilibrio-di-mozione. Leibniz, al contrario, ha sostenuto che la "forza vivente" *vis viva* è proporzionale a mv^2,(Leibniz, 1686a) insistendo che questo è ciò che la natura conserva in molti processi meccanici e che misura la capacità di un corpo di produrre effetti.

La controversia è stata acuita da esperimenti di collisione e sull'effetto '" di un peso in movimento, (Gravesande, 1722). Se si chiede che cosa un corpo in movimento può raggiungere contro la gravità, il relativo confronto è quanto alto può aumentare un peso. v^2 Non con v, che favoriva la misura di Leibnizian; tuttavia nelle interazioni impulsive (collizioni, cambiamenti improvvisi), ciò che bilancia attraverso i corpi è momentaneo, più vicino mvGran parte della controversia persisteva perché entrambe le parti cercavano di elevare la loro quantità preferita nella definizione unica della forza, mentre le domande sottostanti erano diverse: una riguarda l'impulso e lo scambio nel tempo, le altre preoccupazioni lavorano e la capacità di produrre cambiamenti di configurazione.(d'Alembert, 1743)

Un lettore moderno può vedere la risoluzione successiva: mv e mv^2 non sono rivali ma invarianti distinti (in diverse condizioni) legati a principi distinti. Il Momentum è la moneta naturale di impulso e le equazioni di movimento; $\frac{1}{2}mv^2$ è la moneta naturale del lavoro e dell'energia.

14.5.11 Newton (1642–1726)

F

Finalmente arriva Isaac Newton, Fig. 14.6g. Un genio (§6.6.7), e un alchimista (6.6.7)! è proprio lo stesso uomo che ha scritto uno dei libri più influenti *Filosofia Naturalis Principia Mathematica* mai scritto, dilatato anche in Alchimia[20]Mentre potremmo considerare questo con una certa condescenza, è importante riconoscere che tali inseguimenti non erano comuni (anche se spesso secretivi) durante il suo periodo di tempo.

[20]per Newton, Alchemy non stava solo cercando di creare la mitica pietra di filosofero, per trasmutare metalli di base in oro, ma anche per lui ottenere una più profonda conoscenza empirica del mondo materiale e acquisire potere sulla natura.

COPIA DI REVISIONE

Newton fu il primo a articolare la definizione di forza con chiarezza e precisione senza precedenti, risolvendo ambiguità che persero fino ad allora. Ad esempio, Newton fu influenzato dalla legge di Kepler che aveva continuato a dare un'influenza alla legge di Kepler, che aveva influito fino ad allora. *sembra implicare* che la forza esercitata dal sole sui pianeti diminuisce con la distanza.

Attraverso la sua scoperta della gravità (Newton, 1687 PDF), Newton unificato i principi celesti stabiliti da Keplero con osservazioni terrestri da Galileo e da Cartesio, formando una teoria completa.Questa unità era evidente nella sua realizzazione che la forza che induce la caduta di una mela è la stessa forza responsabile dell'orbita della luna.

Newton fece una chiara distinzione tra peso e massa, o quella che chiamò «quantità della materia», un concetto che era stato concepito già da Buridan, Kepler, e Galileo, ma prima. Newton non era mai stato coscientemente ed esplicitamente riconosciuto come concetto di base nella meccanica. *Principia* Definizione III:

> Il '*vis insita*[a] , o forza innata della materia, è un potere di resistere da cui ogni corpo, per quanto in essa sta, continua nel suo stato attuale se è di riposo, o di muoversi uniformemente in avanti in una linea giusta.
>
> Newton, 1687 PDF Mathematical principles of natural philosophy
>
> [a]Non essere confuso con Leibniz's *vis viva* ('vivere forza"), proporzionale a mv^2 (l'energia cinetica fino ad un fattore costante). *vis insita* è inerzia: un potere inerente di resistere ai cambiamenti di stato.

La natura inerte della materia è qui concepita come forza di inattività, e l'inerzia, a parere di Newton, è

> ... una sorta di forza inerente (*insita*) in materia e latente finché non si è colpita altra forza sul corpo, "endeavors to change its condition"... È resistenza fino a quando il il corpo, per mantenere il suo stato attuale, si oppone alla forza colpita; è impulso fino al corpo, non facilmente cedendo il passo alla forza impressionata di un altro, tenta di cambiare lo stato di quell'altro.
>
> Newton, 1687 PDF Mathematical principles of natural philosophy

In questa definizione, la forza non è (ancora) concepita come causa di movimento o di accelerazione, ma in seguito nella definizione IV lui ha definito *forza impressionata*

> Una forza impressionata è un'azione esercitata su un corpo, per cambiare il suo stato, sia di riposo, sia di movimento uniforme in una linea giusta.
>
> Newton, 1687 PDF Mathematical principles of natural philosophy

La transizione di Newton dall'azione delle forze impulsive all'azione delle forze continue avviene nella prima proposizione nella *Principia*Mentre Newton potrebbe aver scoperto la gravità, ma non aveva idea di come funzionasse, ha assunto che agisce istantaneamente,

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

che doveva aspettare Einstein che guardasse lo spazio e il tempo come intrecciato in un tessuto curvo, che si incurva questo spazio, ed è la deformazione o la cura di quel tempo spaziale che creano ciò che ci sentiamo come gravità. *teoria della relatività generale*[21]

Newton ha affrontato anche la legge del parallelogramma delle forze da considerazioni puramente dinamiche (Dugas, 1988):

> Corrolario I (alla seconda legge)... Un corpo di due forze congiunte descriverà la diagonale di un parallelogramma, nello stesso tempo che descriverebbe i lati da quelle forze a parte. Se un corpo in
>
> un dato momento, dalla forza M impressionato a parte nel posto A, se con un movimento uniforme si tratti di A to B; e dalla forza N impressionato in parte nello stesso posto, dovrebbe essere trasportato da A to C; completare il parallelogramma $ABCD$, e, da entrambe le forze che agiscono insieme, sarà nello stesso tempo portato nella diagonale da A to D. Per da quando la forza N agisce in direzione della linea AC, parallela a BD, questa forza (per la seconda legge) non altera affatto la velocità generata dall'altra forza M, per la quale il corpo viene trasportato verso la linea BD. Il corpo quindi arriverà alla linea BD nello stesso tempo, se la forza N essere impressionato o no; e quindi alla fine di quel tempo si troverà da qualche parte nella linea BD. Con lo stesso argomento, alla fine dello stesso tempo si troverà da qualche parte nel CD di linea. Pertanto si troverà nel punto D, dove si incontrano entrambe le linee, ma si muoverà in una linea giusta A to D, per legge I.
>
> Newton, 1687 Mathematical principles of natural philosophy, Book I, Cor. I to Law II

Newton parla esplicitamente di un moto uniforme come risultante da una data forza, mentre è il cambiamento di movimento, cioè di massa di tempi di accelerazione, che, secondo la seconda legge di movimento è proporzionale alla forza colpita. Queste due idee apparentemente contraddittorie potrebbero essere state riconciliate nella mente di Newton solo in una condizione: Newton concepisce l'azione accelerativa della forza come una serie di azioni successive che impartiscono all'oggetto in movimento incrementi successivi di velocità (Jammer, 1957).

14.5.12 Bernoulli, Daniel (1700-1782)

Eclissato dall'altro lavoro, Daniel Bernoulli ha lavorato anche sui principi che si riferiscono al parallelogramma delle forze. F

I primi sostenitori di una spiegazione statica spesso affermano che il parallelogramma delle forze non dipende dalla seconda legge di Newton, sostenendo che le forze si unirebbero ancora a un modello di parallelogramma anche se il rapporto tra forza e movimento fosse diverso da quello che è descritto dalla seconda legge di Newton.

In questo contesto, Bernoulli, Daniel, 1726 per motivarla, suggerì che una vasta gamma di alternative alla seconda legge di Newton avrebbe potuto tenere, ma non lo ha fatto. Tra queste alternative "controproduttive" sono che la forza risultante è proporzionale alla

[21] La relatività speciale è quella che ha dato $e = mc^2$ e assume un telaio inerziale di riferimento (senza accelerazione).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

radice quadrata dell'accelerazione risultante, o alla sua radice cuba, o alla sua piazza. Ma anche se una di queste possibilità controproduttive avesse mantenuto il suo caso.

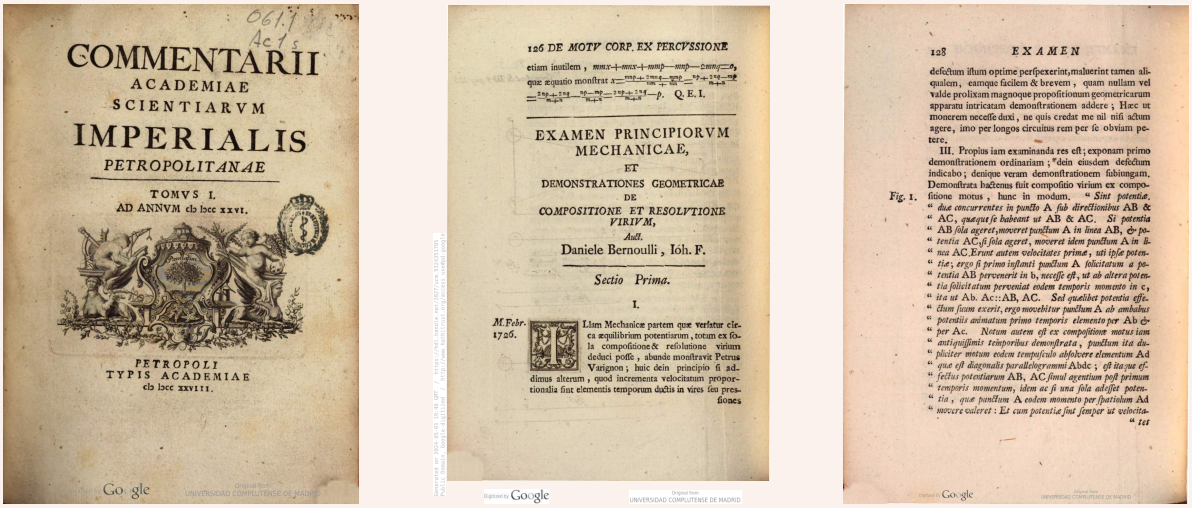

COMMENTARII
ACADEMIAE
SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE
TOMVS I.
AD ANNVM ɔɔ Iɔɔ XXVI.
PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE
ɔɔ Iɔɔ XXVIII.
126 DE MOTV CORP. EX PERCVSSIONE
EXAMEN PRINCIPIORVM MECHANICAE, ET DEMONSTRATIONES GEOMETRICAE DE COMPOSITIONE ET RESOLVTIONE VIRIVM,
Daniele Bernoulli, Iòh. F.
Sectio Prima.
I.
M. Febr. 1726.
128 EXAMEN
Fig. 1.

Figura 14.16: Bernoulli su parallelogramma di forze (Bernoulli, Daniel, 1726)

> Ci sono due forze concomite al punto A nelle direzioni AB & AC, proporzionale a AB & AC. Se la forza AB dovesse agire da sola, si muoverebbe il punto A lungo la linea AB, e se la forza AC dovesse agire da sola, si muoverebbe lo stesso punto A lungo la linea AC. Tuttavia, le velocità iniziali saranno come le forze stesse; quindi, se al primo momento il punto A, spinto dalla forza AB, raggiunge o, è necessario che l'altra forza raggiunga c allo stesso momento, come ad esempio Ab. Ac::AB, AC. & Ac. È noto dalla composizione del movimento, dimostrato fin dai tempi più antichi, che il punto, così mosso doppiamente nello stesso momento minuscolo, completerà l'elemento Ad che è la diagonale del parallelogramma Abdc; così, l'effetto delle forze AB, AC che agiscono insieme dopo il primo momento del tempo, è lo stesso come se fosse presente una singola forza, che potrebbe muovere il punto A attraverso lo spazio Ad allo stesso momento: E poiché le forze sono sempre proporzionali...
>
> Bernoulli, Daniel, 1726 «*1726. em Examen principiorum mechanicae et demonstrationes geometricae de compositione et resolutione virium. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 1, 126-142*»

14.5.13 Lettera di Johann Bernoulli del 1715

Il principio delle velocità virtuali, nella sua forma analitica moderna, apparve per la prima volta in una lettera di Johann Bernoulli (1667–1748) a Pierre Varignon (1654–1722), datato 26 febbraio 1715.[22] Questa lettera, conservata nella postuma di Varignon *Nouvelle*

[22]La data è comunemente indicata come "26 gennaio 1717"' nella letteratura, a seguito di un errore di stampa nella postuma di Varignon *Nouvelle Mécanique* (1725). La data corretta, come stabilito dalla borsa di studio moderna, è il 26 febbraio 1715; vedi la *Dizionario completo della Biografia Scientifica*- Si'. - "Bernoulli, Johann".

COPIA DI REVISIONE

Mécanique ou Statique (Varignon, 1725), rappresenta un momento di spargimento d'acqua nella storia della meccanica —la prima esplicita, dichiarazione generale di ciò che sarebbe diventato la fondazione di statici analitici.

Varignon presenta il contributo di Bernoulli all'inizio della Sezione IX del Volume 2:

> Dans une Lettre écrite de Bâle le 26. Janvier 1717, M. (Jean) Bernoulli, après y avoir défini ce qu'il entendoit par le mot d'*Energie*, de la maniere qu'on le va voir dans la définition suivante, m'annonça qu'*en tout équilibre de force quelconques, en quelque maniere qu'elles soient appliquées les unes sur les autres, ou médiatement ou immédiatement, la somme des Energies affermaatives sera égale à la somme des somme des negativas, prises assertativement.*
>
> In una lettera scritta da Basilea il 26 gennaio 1717, M. (Jean) Bernoulli, dopo aver definito ciò che intendeva con la parola *Energia* nel modo indicato nella seguente definizione, mi ha annunciato che *in ogni equilibrio di forze, in qualunque modo si applichino l'uno all'altro, mediamente o immediatamente, la somma delle Energie positive sarà pari alla somma delle Energie negative, prese positivamente.*
>
> Varignon in Bernoulli, Johann, 1725 «*Lettre de Bâle du 26 Janvier 1717*»

(Nota che la data indicata nel testo pubblicato di Varignon contiene l'errore di stampa sopra discusso.)

La reazione di Varignon rivela il significato che ha attribuito a questo principio:

> Proposizione di una serie & si belle, que, voyant que je la pouvois aisément déduire de la Théorie précédente, je lui esigeai la permesso qu'il m'accorda, de l'ajouter ici avec la démonstration que cette Théorie m'en fournissoit, & Non mi sembra di essere un'idea.
>
> Questa proposizione mi apparve così generale e così bella che, vedendo che potevo facilmente dedurre dalla Teoria precedente, chiesi il suo permesso—che lui concesse—per aggiungerlo qui con la dimostrazione che questa Teoria mi ammobiliò, e che non mi ha mandato.
>
> Varignon in Bernoulli, Johann, 1725 «*Lettre de Bâle du 26 Janvier 1717*»

La definizione chiave segue, nelle parole di Bernoulli, Fig. 14.17:

> **DEFINIZIONE XXXII** Concevez (disoit-il) plusieurs forze differenti qui agissent suivant differenti tendences ou direzioni pour tenir en equilibre un point, une ligne, une superficie, ou un corps; concevez aussi que l'on imprime a tout le systeme de ces force un petit mouvement, soit parallele a soi-meme suivant une direction quelconque, soit autour d'un point fixe thatconque: il vous sera aise de comprendre que par ce mouvement chacune de ces force avancera ou reculera dans sa direction, a moins que quelqu'une ou plusieurs des force n'ayent leurs tendences perpendiculaires a la direction du petit mouvement; auquel cas cette force, ou ces force n'avanceroient ni neculen auto ces avancements ou reculements, qui sont ce que j'appelle vitesses virtùlles, ne font autre scelto que ce dont chaque ligne de tendance augmente ou diminue par le petit mouvement; & c'è una riduzione delle diminuzioni se trouvent, si l'on tire une perpendiculaire a l'estremite de la ligne de tendance de quelque force, laquelle perpendiculaire retranchera de la meme ligne de tendance, mise dans la situazione voisine par le petit mouvement, une petite partie qui sera la mesure de la vitesse.

COPIA DI REVISIONE

DEFINIZIONE XXXII Concettivo (ha detto) diverse forze che agiscono con tendenze o direzioni diverse per tenere un punto, una linea, una superficie, o un corpo in equilibrio; concepire anche che si impartisce all'intero sistema di queste forze un piccolo movimento, una traduzione parallela a se stessa in qualche direzione, o una rotazione su un punto fisso: sarà facile capire che con questo movimento ciascuna di queste forze avanza o si ritirerà lungo la sua direzione, a meno che una o più forze non abbiano le loro tendenze perpendicolari alla direzione del piccolo movimento; in tal caso questa forza, o queste forze, non progrederà né si ritirerà affatto. Per questi progressi o ritiri, che sono ciò che chiamo velocità virtuali, non sono altro che la quantità con cui ogni linea di tendenza aumenta o diminuisce sotto il piccolo movimento; e questi aumenti o diminuzioni si trovano disegnando una perpendicolare alla fine della linea di tendenza di una certa forza, che perpendicolare taglierà da quella stessa linea di tendenza, collocata nella posizione vicina dal piccolo movimento, una piccola parte che sarà la misura della velocità virtuale di questa forza.

Bernoulli, Johann, 1725 «*Lettre de Bâle du 26 Janvier 1717*»

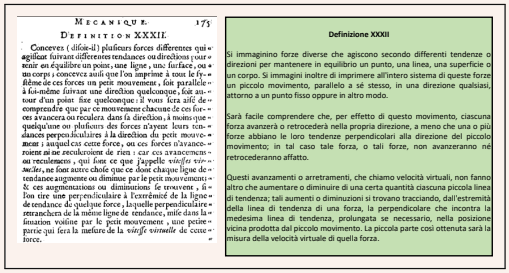


Figura 14.17: Le velocità geometriche di Johann Bernoulli, (Bernoulli, Johann, 1725)

Molte caratteristiche della formulazione di Bernoulli meritano l'enfasi:

- Il principio si applica *qualsiasi* sistema—un punto, linea, superficie o corpo—tenuto in equilibrio da *qualsiasi* configurazione delle forze, applicate direttamente o tramite meccanismi intermedi.
- Il "piccolo movimento" impressionato sul sistema è completamente arbitrario: può essere una traduzione in qualsiasi direzione o una rotazione su qualsiasi punto fisso.
- Le "velocità virtuali" sono quantità geometriche —le proiezioni dei piccoli spostamenti sulle linee di azione delle rispettive forze — non velocità reali nel senso cinetico.

"Energia" di Bernoulli è quello che noi chiamiamo *lavoro virtuale*: il prodotto di una forza e la sua velocità virtuale (cioè, la componente dello spostamento virtuale lungo la linea di azione della forza). 176) può essere indicato nella notazione moderna come:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad \text{(for equilibrium)}$$

Questa formulazione rappresenta il culmine di quasi due millenni di sviluppo, dalle intuizioni intuitive dello pseudo-aristotelico *Mechanica* Attraverso la giordania *gravitas secundum situ*Stevin's *clootcrans*, la "Regola d'oro" di Galileo e il principio di conservazione

COPIA DI REVISIONE

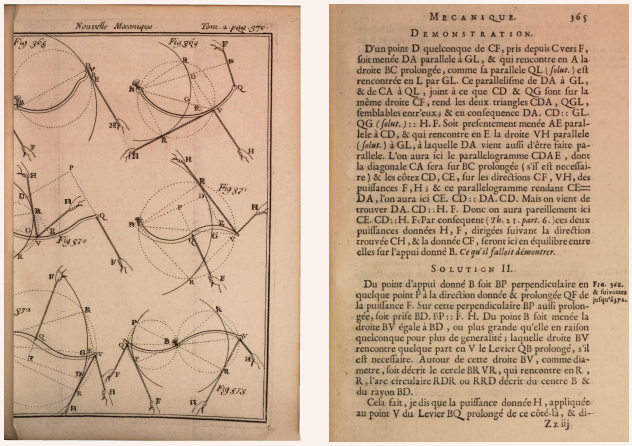
di Descartes, alla dichiarazione analitica di Bernoulli, che si rivelerà il suo posto definitivo in meccanica attraverso la "Signora" di Lagrange *Analitica medica* (1788), dove funge da base per l'intero edificio della meccanica analitica.

14.5.14 Varignon (1654–1722)

F

Nel 1687, anno della pubblicazione della *Principia*, Varignon pubblicato *Nouvelle Mécanique ou Statique* (Varignon, 1725) in cui il principio del parallelogramma delle forze, dedotto da un punto di vista piuttosto aristotelico, viene applicato alla soluzione di una classe di problemi intatta da Newton.

> **Lemma III:** Se il punto senza peso A è spinta uniformemente e allo stesso tempo da due forze [*Impossibilità*] E e F lungo le linee AC e AB [in Fig. 221], che si formano tra loro qualche angolo CAB, e l'azione della forza E è il l'azione della forza F as AC è il AB, [poi] questo punto A seguirà la diagonale AD del parallelogramma BC formato da queste due linee.
>
> Varignon, 1725 Nouvelle mecanique ou statique: dont le projet fut donné en MDCLXXXVII



MECANIQUE. 365

DEMONSTRATION.

D'un point D quelconque de CF, pris depuis C vers F, soit menée DA parallele à GL, & qui rencontre en A la droite BC prolongée, comme fa parallele QL (*folut.*) eſt rencontrée en L par GL. Ce parallelifme de DA à GL, & de CA à QL, joint à ce que CD & QG ſont ſur la même droite CF, rend les deux triangles CDA, QGL, ſemblables entr'eux; & en conſequence DA. CD:: GL. QG (*folut.*):: H. F. Soit preſentement menée AE parallele à CD, & qui rencontre en E la droite VH parallele (*folut.*) à GL, à laquelle DA vient auſſi d'être faite parallele. L'on aura ici le parallelogramme CDAE, dont la diagonale CA ſera ſur BC prolongée (s'il eſt neceſſaire) & les côtez CD, CE, ſur les directions CF, VH, des puiſſances F, H; & ce parallelogramme rendant CE= DA, l'on aura ici CE. CD:: DA. CD. Mais on vient de trouver DA. CD:: H. F. Donc on aura pareillement ici CE. CD:: H. F. Par conſequent (*Th.* 1. *part.* 6.) ces deux puiſſances données H, F, dirigées ſuivant la direction trouvée CH, & la donnée CF, ſeront ici en équilibre entre elles ſur l'appui donné B. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SOLUTION II.

Du point d'appui donné B ſoit BP perpendiculaire en quelque point P à la direction donnée & prolongée QF de la puiſſance F. Sur cette perpendiculaire BP auſſi prolongée, ſoit priſe BD. BP:: F. H. Du point B ſoit menée la droite BV égale à BD, ou plus grande qu'elle en raiſon quelconque pour plus de generalité; laquelle droite BV rencontre quelque part en V le Levier QB prolongé, s'il eſt neceſſaire. Autour de cette droite BV, comme diametre, ſoit décrit le cercle BR VR, qui rencontre en R, R, l'arc circulaire RDR ou RRD décrit du centre B & du rayon BD.

Cela fait, je dis que la puiſſance donnée H, appliquée au point V du Levier BQ prolongé de ce côté-là, & di-

Fig. 366 & ſuivantes juſqu'à 372.

Figure 14.18: Nozioni di equilibrio Varignon, 1725

Mentre siamo qui per affrontare il parallelogramma delle forze, dovremmo menzionare nel passare il teorema del famoso Varignon :

> La somma dei momenti di diverse forze concorrenti su un punto è pari al momento del risultante di quelle forze, o alternativamente, il momento di una forza su un punto equivale alla somma dei momenti dei suoi componenti.
>
> Varignon, 1725 Nouvelle mecanique ou statique: dont le projet fut donné en MDCLXXXVII

COPIA DI REVISIONE

14.5.15 D'Alembert (1717–1783)

F/V

Jean le Rond d'Alembert *Traité de Dynamique* (1743) (d'Alembert, 1743) estendeva il principio delle velocità virtuali dalle statiche alle dinamiche, e nel fare così unificato la scienza della meccanica.

La posizione filosofica di D'Alembert era particolare, cercando di eliminare meccanica di nozioni oscure:

> J'ai, pour ainsi dire, détourné les yeux des Cause motrices, pour n'envisager Uniquement que le mouvement qu'elles produisent; j'ai dirittoment proscrit les force inhérentes au corps en mouvement, êtres obscurs & Métaphysiques, qui ne sont capaces que de répandre les ténèbres sur une Science claire par elle-même.
>
> Per così dire, ho allontanato gli occhi dalle cause commoventi, per considerare solo il moto che producono; ho interamente proscritto le forze inerenti ai corpi in esseri moto——obscure e metafisici– capace solo di gettare le tenebre su una scienza chiara in sé.
>
> d'Alembert, 1743 Traite de dynamique

Questo lo mise in mezzo al *vis viva* polemica che aveva diviso i meccanici continentali da Leibniz.

> Cette domanda ... consiste à savoir, si la forza des Corps en Mouvement est proponelle au produit de la masse par la vitesse, ou au produit de la masse par le quarré de la vitesse ... Malgré les controversie que cette querela a causées, l'inutilité parfaite dont elle est pour la MÉchanique, m'a engagé à n'en faire aucune cita Dans l'Ouvrage que je donne aujourd'hui.
>
> Questa domanda chiede se la forza dei corpi in movimento sia proporzionale alla velocità dei tempi di massa, o a tempi di massa il quadrato della velocità ... Nonostante le dispute che ha causato, la sua completa inutilità per i meccanici mi ha spinto a non menzionarlo nel lavoro che pubblico oggi.
>
> d'Alembert, 1743 Traite de dynamique

Riassumendo le dinamiche come un problema di equilibrio, d'Alembert schierava le dispute sulla "vera misura" della forza.

La sua visione chiave era ingannevole, la seconda legge di Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, può essere riscritto come:

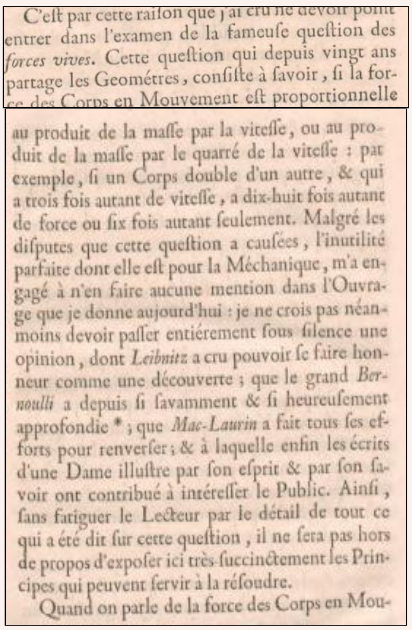
$$\mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

Questa è una dichiarazione di equilibrio tra la forza applicata $\mathbf{F}$ e che d'Alembert chiamò la forza dell'inerzia, $-m\mathbf{a}$. Il corpo accelerante può essere trattato come se fosse in equilibrio statico sotto l'azione combinata delle forze colpite e delle forze inerziali, Fig. 14.19.

Si noti che in questo testo, d'Alembert si riferisce alla "lady distingue dal suo intelletto e apprendimento" è Emilie du Châtelet (1706–1749), i cui scritti — in particolare la sua *Istituzioni di fisique* (1740) e i suoi interventi nel dibattito vis viva—aiutato a portare la polemica ad un pubblico più ampio.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



C'eſt par cette raiſon que j'ai cru ne devoir point entrer dans l'examen de la fameuſe queſtion des *forces vives*. Cette queſtion qui depuis vingt ans partage les Geométres, conſiſte à ſavoir, ſi la force des Corps en Mouvement eſt proportionnelle au produit de la maſſe par la viteſſe, ou au produit de la maſſe par le quarré de la viteſſe : par exemple, ſi un Corps double d'un autre, & qui a trois fois autant de viteſſe, a dix-huit fois autant de force ou ſix fois autant ſeulement. Malgré les diſputes que cette queſtion a cauſées, l'inutilité parfaite dont elle eſt pour la Méchanique, m'a engagé à n'en faire aucune mention dans l'Ouvrage que je donne aujourd'hui : je ne crois pas néanmoins devoir paſſer entiérement ſous ſilence une opinion, dont *Leibnitz* a cru pouvoir ſe faire honneur comme une découverte ; que le grand *Bernoulli* a depuis ſi ſavamment & ſi heureuſement approfondie * ; que *Mac-Laurin* a fait tous ſes efforts pour renverſer ; & à laquelle enfin les écrits d'une Dame illuſtre par ſon eſprit & par ſon ſavoir ont contribué à intéreſſer le Public. Ainſi, ſans fatiguer le Lecteur par le détail de tout ce qui a été dit ſur cette queſtion, il ne ſera pas hors de propos d'expoſer ici très ſuccinctement les Principes qui peuvent ſervir à la réſoudre.

Quand on parle de la force des Corps en Mou-

Per questa ragione non ho voluto affatto entrare nell'esame della celebre questione della vis viva (forze vive). Tale questione, che da vent'anni divide i geometri, consiste nel determinare se la forza dei corpi in movimento sia proporzionale al prodotto della massa per la velocità oppure al prodotto della massa per il quadrato della velocità: per esempio, se un corpo di massa doppia rispetto a un altro e dotato di velocità tripla possieda una forza diciotto volte maggiore o soltanto sei volte maggiore. Nonostante le controversie suscitate da tale questione, la sua completa inutilità per la Meccanica mi ha indotto a non farne alcuna menzione nell'opera che oggi presento. Non credo tuttavia di dover passare interamente sotto silenzio un'opinione della quale Leibniz credette di poter rivendicare l'onore come scoperta; che il grande Bernoulli ha poi investigato con tanta dottrina e tanto successo; che Mac-Laurin si è sforzato in ogni modo di rovesciare; e verso la quale, infine, gli scritti di un'illustre dama, distinta per ingegno e cultura, non hanno mancato di attirare l'interesse del pubblico. Così, senza stancare il lettore con il dettaglio di tutto ciò che è stato detto sulla questione, non sarà fuori luogo esporre qui molto succintamente i principi che possono servire a risolverla.

Figura 14.19: D'Alembert sulla controversia vis viva: una disputa che ritiene inutile, ma brevemente affrontata (d'Alembert, 1743)

Il principio delle velocità virtuali si applica quindi direttamente, per un sistema di particelle, il principio di d'Alembert Stati:

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

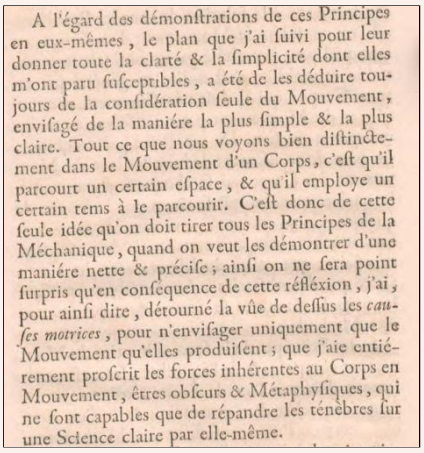
dove $\delta \mathbf{r}_i$ sono spostamenti virtuali compatibili con i vincoli.

Questo è una dinamica ridotta alle statiche. Trattando i termini inerziali come forze, d'Alembert unificato meccanica e dimostra la straordinaria generalità del lavoro virtuale. Ogni problema nella dinamica, non importa quanto complesso il sistema di corpi e vincoli, potrebbe ora essere affrontato attraverso lo stesso quadro variazionale che Bernoulli aveva stabilito per statici. 14.20.

D'Alembert ha avuto poca pazienza per i dibattiti che trattavano "forza" come causa metafisica nascosta o come campo di battaglia meramente terminologica, e dice esplicitamente che "ha fatto allontanare" dalle cause mobili per considerare solo il movimento che producono, e che respinge la lite vis viva come in gran parte inutile alla meccanica, riferendosi a principi chiari e operativi fondati in movimento e calcolo, Fig. 14.20.

Va notato che d'Alembert stesso non ha chiamato questo 'd'Alembert"' Principio"; quella denominazione è venuta più tardi. *Tradizione*, lo presentò come metodo generale per risolvere i problemi del moto distratto, non come principio di nome, e il battesimo fu

COPIA DI REVISIONE



A l'égard des démonſtrations de ces Principes en eux-mêmes, le plan que j'ai ſuivi pour leur donner toute la clarté & la ſimplicité dont elles m'ont paru ſuſceptibles, a été de les déduire toujours de la conſidération ſeule du Mouvement, enviſagé de la maniére la plus ſimple & la plus claire. Tout ce que nous voyons bien diſtinctement dans le Mouvement d'un Corps, c'eſt qu'il parcourt un certain eſpace, & qu'il employe un certain tems à le parcourir. C'eſt donc de cette ſeule idée qu'on doit tirer tous les Principes de la Méchanique, quand on veut les démontrer d'une maniére nette & préciſe; ainſi on ne ſera point ſurpris qu'en conſequence de cette réfléxion, j'ai, pour ainſi dire, détourné la vûe de deſſus les *cauſes motrices*, pour n'enviſager uniquement que le Mouvement qu'elles produiſent; que j'aie entiérement proſcrit les forces inhérentes au Corps en Mouvement, êtres obſcurs & Métaphyſiques, qui ne ſont capables que de répandre les ténèbres ſur une Science claire par elle-même.

Quanto alle dimostrazioni di questi principi in sé stessi, il piano che ho seguito, per conferire loro tutta la chiarezza e la semplicità di cui mi sembravano capaci, è stato sempre quello di dedurli dalla sola considerazione del moto, osservato nella maniera più semplice e più chiara. Tutto ciò che percepiamo distintamente nel moto di un corpo è che esso percorre un certo spazio e impiega un certo tempo per percorrerlo. È dunque da questa sola idea che si devono trarre tutti i principi della Meccanica, quando si voglia dimostrarli in modo netto e preciso; non sorprenderà quindi che, come conseguenza di questa riflessione, io abbia, per così dire, distolto lo sguardo dalle cause motrici per considerare soltanto il moto che esse producono, e che abbia interamente proscritto le forze inerenti a un corpo in movimento, esseri oscuri e metafisici capaci soltanto di diffondere tenebre sopra una scienza che è chiara in sé stessa.

Figura 14.20: D'Alembert in movimento come unica fondazione della meccanica (d'Alembert, 1743)

eseguito dalle generazioni successive che riconoscevano il carattere fondante della sua intuizione.

Su Forza e Parallelogramma

Nel *Traité de Dynamique*, d'Alembert si è rivolto al problema del parallelogramma delle forze che utilizzano un metodo geometrico per analizzare il risultato delle forze simultanee che agiscono su un corpo. AB e AC, rispettivamente, nello stesso periodo. Con la costruzione di un parallelogramma in cui AB e AC rappresentano i lati adiacenti, la diagonale da A rappresenta il percorso risultante a causa dell'effetto combinato delle due forze:

F

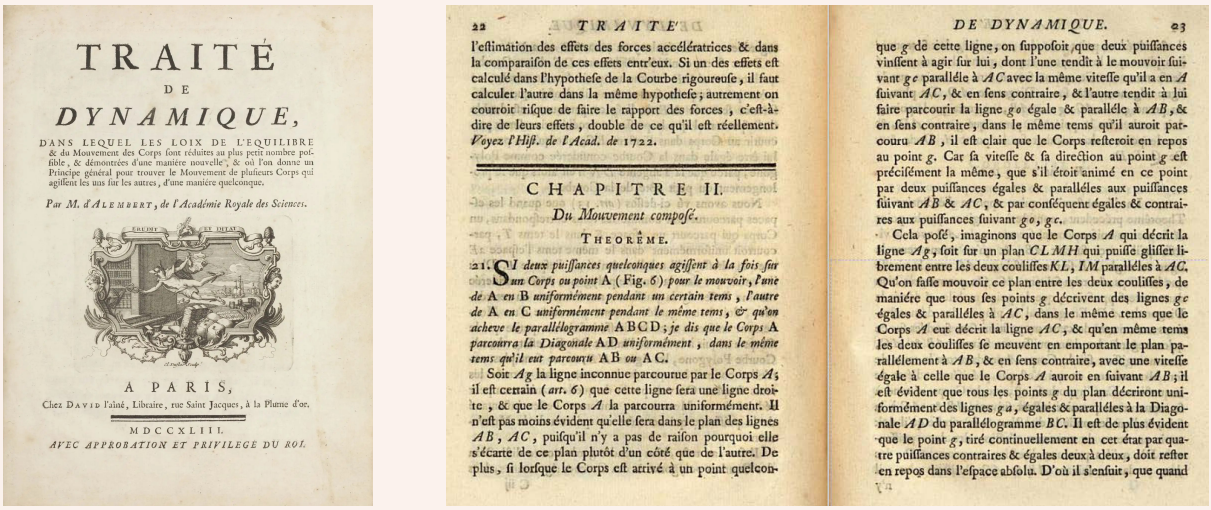
> Teorema 2. Se due poteri arbitrari agiscono allo stesso tempo su un corpo o punto A per muoverlo, uno da A to B in un certo tempo, l'altro da A to C uniformemente durante lo stesso tempo, e se si costruisce il parallelogramma $ABCD$; io dico che il corpo A si muoverà lungo la diagonale AD in modo uniforme nello stesso tempo che si sarebbe spostato lungo AB or AC.
>
> d'Alembert, 1743 Traite de dynamique

In un lavoro di follow-up, d'Alembert ha scritto:

> **Proposizione 1.** Due poteri uguali $\alpha\beta$ e $\alpha\xi$, formando qualsiasi angolo tra loro, produrrà sempre la diagonale $\alpha\delta$ come il risultante.
>
> d'Alembert, 1761 «*Démonstration du principe de la composition des forces*», p. 177

Va notato che d'Alembert utilizza la parola "potere" nella dichiarazione della proposizione,

COPIA DI REVISIONE



TRAITÉ
DE
DYNAMIQUE,
DANS LEQUEL LES LOIX DE L'EQUILIBRE & du Mouvement des Corps sont réduites au plus petit nombre poſſible, & démontrées d'une manière nouvelle, & où l'on donne un Principe général pour trouver le Mouvement de pluſieurs Corps qui agiſſent les uns ſur les autres, d'une manière quelconque.
Par M. D'ALEMBERT, de l'Académie Royale des Sciences.
A PARIS,
Chez DAVID l'aîné, Libraire, rue Saint Jacques, à la Plume d'or.
M. DCC. XLIII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

22 TRAITÉ
l'eſtimation des effets des forces accélératrices & dans la comparaiſon de ces effets entr'eux. Si un des effets eſt calculé dans l'hypotheſe de la Courbe rigoureuſe, il faut calculer l'autre dans la même hypotheſe; autrement on courroit riſque de faire le rapport des forces, c'eſt-à-dire de leurs effets, double de ce qu'il eſt réellement. *Voyez l'Hiſt. de l'Acad. de* 1722.

CHAPITRE II.
Du Mouvement compoſé.
THEOREME.
21. *SI deux puiſſances quelconques agiſſent à la fois ſur un Corps ou point* A (Fig. 6) *pour le mouvoir, l'une de* A *en* B *uniformément pendant un certain tems, l'autre de* A *en* C *uniformément pendant le même tems, & qu'on acheve le parallélogramme* ABCD; *je dis que le Corps* A *parcourra la Diagonale* AD *uniformément, dans le même tems qu'il eut parcouru* AB *ou* AC.
Soit *Ag* la ligne inconnue parcourue par le Corps *A*; il eſt certain (*art.* 6) que cette ligne ſera une ligne droite, & que le Corps *A* la parcourra uniformément. Il n'eſt pas moins évident qu'elle ſera dans le plan des lignes *AB*, *AC*, puiſqu'il n'y a pas de raiſon pourquoi elle s'écarte de ce plan plutôt d'un côté que de l'autre. De plus, ſi lorſque le Corps eſt arrivé à un point quelcon-

DE DYNAMIQUE. 23
que *g* de cette ligne, on ſuppoſoit que deux puiſſances vinſſent à agir ſur lui, dont l'une tendît à le mouvoir ſuivant *ge* parallèle à *AC* avec la même viteſſe qu'il a en *A* ſuivant *AC*, & en ſens contraire, & l'autre tendît à lui faire parcourir la ligne *go* égale & parallèle à *AB*, & en ſens contraire, dans le même tems qu'il auroit parcouru *AB*, il eſt clair que le Corps reſteroit en repos au point *g*. Car ſa viteſſe & ſa direction au point *g* eſt préciſément la même, que s'il étoit animé en ce point par deux puiſſances égales & paralléles aux puiſſances ſuivant *AB* & *AC*, & par conſéquent égales & contraires aux puiſſances ſuivant *go*, *ge*.
Cela poſé, imaginons que le Corps *A* qui décrit la ligne *Ag*, ſoit ſur un plan *CLMH* qui puiſſe gliſſer librement entre les deux couliſſes *KL*, *IM* paralléles à *AC*. Qu'on faſſe mouvoir ce plan entre les deux couliſſes, de maniére que tous ſes points *g* décrivent des lignes *ge* égales & paralléles à *AC*, dans le même tems que le Corps *A* eut décrit la ligne *AC*, & qu'en même tems les deux couliſſes ſe meuvent en emportant le plan parallélement à *AB*, & en ſens contraire, avec une viteſſe égale à celle que le Corps *A* auroit en ſuivant *AB*; il eſt évident que tous les points *g* du plan décriront uniformément des lignes *ga*, égales & paralléles à la Diagonale *AD* du parallélogramme *BC*. Il eſt de plus évident que le point *g*, tiré continuellement en cet état par quatre puiſſances contraires & égales deux à deux, doit reſter en repos dans l'eſpace abſolu. D'où il s'enſuit, que quand

Figura 14.21: D'Alembert sul parallelogramma delle forze (d'Alembert, 1743)

così come nel testo del memoriale, anche se la parola "forza" appare nel titolo; questo mostra la libertà con cui intercambiò entrambi i termini.

D'Alembert tornò a questo argomento ancora una volta. *Nouvelle démonstration du Parallélogramme des Forces*Fico. 14.22, ha scritto:

> Nel memoriale che ho presentato sui principi della Meccanica ho annunciato una nuova prova del Parallelogram delle Forze. È questa la prova che darò qui. È in realtà meno semplice della prova che può essere letta nel volume citato; tuttavia, poiché l'uso che faccio di alcune funzioni potrebbe essere utile per risolvere altri problemi dello stesso tipo, credo che i Geometri non saranno arrabbiati se condivido.
>
> d'Alembert, 1773 «*Nouvelle démonstration du parallélogramme des forces*»

Estensione alla dinamica e al lavoro virtuale

V

La motivazione di D'Alembert era in parte filosofica, cercando di eliminare "forza" come causa metafisica, una nozione che considerava oscura, e di rifusione meccanica in termini puramente geometrici e cinetici:

> J'ai, pour ainsi dire, détourné la vue dessus les cause motrices, pour n'en envisager Uniquement que le Mouvement qu'elles produisent; j'ai dirittoment proscrit les force inhérentes au Corps en Mouvement, êtres obscurs & Métaphysiques, qui ne sont capaces que de répandre les ténèbres sur une Science claire par elle-même.

COPIA DI REVISIONE

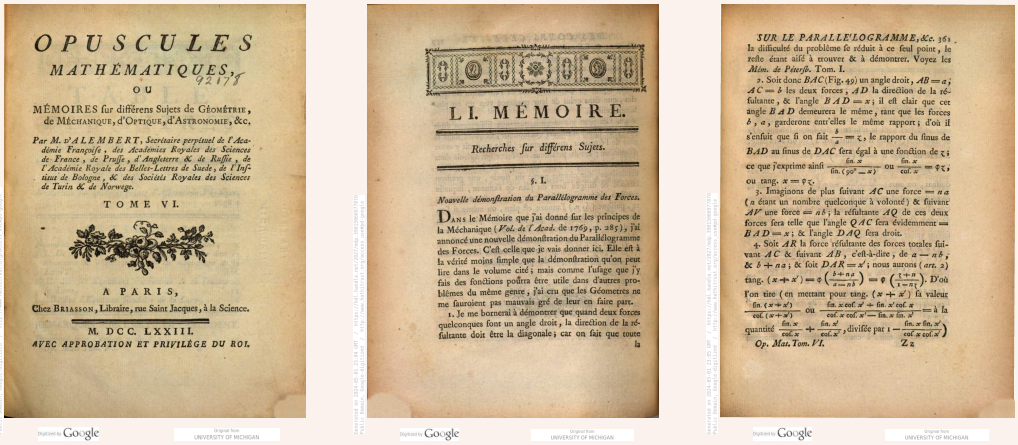


Figura 14.22: Le osservazioni finali di D'Alembert sul parallelogramma delle forze (d'Alembert, 1773)

> Per così dire, ho allontanato gli occhi dalle cause commoventi, per considerare solo il moto che producono; ho interamente proscritto le forze inerenti ai corpi in esseri moto——obscure e metafisici– capace solo di gettare le tenebre su una scienza chiara in sé.
>
> d'Alembert, 1743 Traite de dynamique

Questo lo mise in mezzo al *vis viva* [23] polemica che aveva diviso i meccanici continentali da Leibniz:

> La questione è stata... consisteva in savoir, si la force des Corps en Mouvement est proponelle au produit de la masse par la vitesse, ou au produit de la masse par le quarré de la vitesse ... Malgré les disputes que cette que a causées, l'inutilité parfaite dont elle est pour la Méchanique, m'a engagé à donne.
>
> Questa domanda chiede se la forza dei corpi in movimento sia proporzionale alla velocità dei tempi di massa, o a tempi di massa il quadrato della velocità ... Nonostante le dispute che ha causato, la sua completa inutilità per i meccanici mi ha spinto a non menzionarlo nel lavoro che pubblico oggi.
>
> d'Alembert, 1743 Traite de dynamique

Riassumendo le dinamiche come un problema di equilibrio, d'Alembert schierava le dispute sulla "vera misura" della forza.

La sua visione chiave era ingannevole, la seconda legge di Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, può essere riscritto come:

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Questa è una dichiarazione di equilibrio tra la forza applicata $\mathbf{F}$ e che d'Alembert chiamò la

[23] Leibniz's *vis viva* ('vivere forza"), proporzionale a mv^2 (l'energia cinetica fino ad un fattore costante), non dovrebbe essere confusa con quella di Newton *vis insita* ('innate force"), cioè. inerzia o resistenza ai cambiamenti di stato.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese, potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

forza dell'inerzia, $-m\mathbf{a}$. Il corpo accelerante può essere trattato come se fosse in equilibrio statico sotto l'azione combinata delle forze colpite e delle forze inerziali.

Il principio delle velocità virtuali si applica quindi direttamente, per un sistema di particelle, il principio di d'Alembert Stati:

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - m_i\mathbf{a}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$$

dove $\delta\mathbf{r}_i$ sono spostamenti virtuali compatibili con i vincoli.

Questo è una dinamica ridotta alle statiche. Trattando i termini inerziali delle forze, d'Alembert ha unificato la meccanica e dimostrato la straordinaria generalità del lavoro virtuale. Ogni problema nella dinamica, non importa quanto complesso il sistema di corpi e vincoli, potrebbe ora essere affrontato attraverso lo stesso quadro variazionale che Bernoulli aveva stabilito per statici.

Va notato che d'Alembert stesso non ha chiamato questo 'd'Alembert"' Principio"; quella denominazione è venuta più tardi. *Tradizione*, lo presentò come metodo generale per risolvere i problemi del moto distratto, non come principio di nome, e il battesimo fu eseguito dalle generazioni successive che riconoscevano il carattere fondante della sua intuizione.

14.5.16 Kant (1724-1804)

Questa sezione si concluderà con un fine filosofico. F

Nelle sue "Fondazioni metafisiche di Scienze Naturali" Kant, 2023 ha discusso la composizione dei moti, che si riferisce al parallelogramma delle forze.

In Phoronomy (termine coniato da Kant per riferirsi allo studio dei movimenti dei corpi, senza riguardo alle forze o alla natura dei corpi stessi: la cinematica) Kant esplora l'idea di combinare diversi movimenti di un unico punto per capire come si integrano per formare un moto risultante. Il suo approccio filosofico mira a fornire una base metafisica a questi concetti, articolando come movimenti diversi a un unico punto possono essere compresi come unificato effetti interi piuttosto che produrre meramente.

> **Proposizione** La composizione di due moti di uno e lo stesso punto, può solo essere concepito da uno di loro che viene presentato in spazio assoluto, ma, invece di altro, un moto di una pari velocità nella direzione contraria dello spazio relativo [essere presentato] come identico a quello.
>
> Kant, 2023 Metaphysical foundations of natural science

Non so cosa significhi, ma poi ancora, Immanuel Kant era uno dei grandi filosofi per affrontare la fisica.

COPIA DI REVISIONE

14.5.17 Lagrange (1736–1813)

V

Joseph-Louis Lagrange *Analitica medica*, pubblicato per la prima volta nel 1788 (Lagrange, 1788 PDF), rappresenta il culmine della tradizione del lavoro virtuale, in questo trattato monumentale Lagrange ha elevato il principio delle velocità virtuali alla base della *tutto* meccanica –statica, dinamica, corpi rigidi, fluidi – e gettare l'intero soggetto in forma puramente analitica.

Lagrange come istoriano

Lo stesso Lagrange era acutamente consapevole dello sviluppo storico delle idee che stava sistemando. *Analitica medica* Si apre con un ampio sondaggio storico che traccia l'evoluzione della meccanica dall'antichità fino al suo tempo. Parla di Archimede, Stevin, Galileo, Torricelli, Cartesio, Wallis, Huygens, Bernoullis e d'Alembert, fornendo ciò che rimane uno dei più bei resoconti storici del soggetto scritto da un praticante. Questa coscienza storica–rara tra i matematici-lancia il suo lavoro collega un senso intellettuale di lunga catena.

Il programma analitico

Nella prefazione Lagrange ha reso esplicito il suo intento rivoluzionario:

> Su ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y esporre ne esigente ni costruzioni, ni raisonnemens géométriques ou méchaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche réguliere et uniforme.
>
> Non si trovano diagrammi in questo lavoro, i metodi che vi presento non richiedono né costruzioni né ragionamenti geometrici o meccanici, ma solo operazioni algebriche soggette a una procedura regolare e uniforme.
>
> Lagrange, 1788 PDF Mécanique Analytique

Non era solo un vanto. *Analitica medica* non contiene una sola figura—un risultato notevole per un trattato sulla meccanica, e un testamento alla potenza dei metodi analitici Lagrange si era sviluppato.

Coordinate generalizzate

Una delle innovazioni più consequenziali di Lagrange è stata l'introduzione di *coordinate generalizzate*. Piuttosto che descrivere un sistema meccanico in termini di coordinate cartesiane di ogni particella—che in genere non sono indipendenti a causa di vincoli—Lagrange ha parametrizzato il sistema da un insieme minimo di variabili indipendenti $q_1, q_2, \ldots, q_n$dove n è il numero di gradi di libertà.

COPIA DI REVISIONE

Questa astrazione era rivoluzionaria, un doppio pendolo, una ruota, una filatura, una corda vibrante, tutto poteva essere trattato dallo stesso formalismo, indipendentemente dalla natura fisica delle coordinate. q_j Il principio delle velocità virtuali, espresso in termini di queste coordinate generalizzate, è diventato uno strumento universale applicabile ai sistemi di complessità arbitraria.

Il principio delle Velocità virtuali

La dichiarazione generalizzata del principio di Lagrange recita:

> Si un système checonque de tant de corps ou points que l'on veut, tirés chacun par des puissances quelconques, est en équilibre, & petit qui exprimera sa vitesse virtülle; la somme des puissances, moltiplica chacune par l'espace que le point où elle est appliquée parcourt suivant la direction de cette même puissjouré,
>
> Se qualsiasi sistema di qualsiasi numero di corpi o di punti, ciascuno di essi disegnato da qualsiasi forza, è in equilibrio, e se si dà a questo sistema qualsiasi piccolo movimento, in virtù del quale ogni punto attraversa uno spazio infinitamente piccolo che esprime la sua velocità virtuale; la somma delle forze, moltiplicate per lo spazio che il punto in cui viene applicato attraversa nella direzione di quella stessa forza, sarà sempre uguale a zero.
>
> Lagrange, 1788 Mécanique Analytique, Part I, Section I, §1

Tuttavia, nelle edizioni successive, Lagrange ha espresso riserve circa l'assunzione del principio come auto-evidente:

> Quant à la nature du principe des vitesses virtülles, il faut convenir qu'il n'est pas assiez évident par lui-même pour pouvoir être érigé en principe primitif.
>
> Per quanto riguarda la natura del principio delle velocità virtuali, va riconosciuto che non è abbastanza auto-evidente da essere stabilito come principio primitivo.
>
> Lagrange, 1788 Mécanique Analytique, Part I, Section I, §18

Questo passaggio, aggiunto nella seconda edizione (1811–1815), che Lagrange stava rivedendo al momento della sua morte, riflette la sua visione matura che un principio così potente ha richiesto una dimostrazione da fondazioni più semplici.

Lagrange's Proof tramite Blocchi Pulley

In un documento pubblicato in *Journal de l'École Polytechnique* (Lagrange, 1798), Lagrange ha fornito una prova geniale del principio basato sull'equilibrio dei blocchi di puleggia (Figura 14.23).

L'idea è di immaginare che tutte le forze del sistema siano esercitate da pesi che agiscono attraverso sistemi di pulegge, collegati da una singola stringa inestensibile. P, Q, R, S, T,

COPIA DI REVISIONE

ecc., queste forze sono generate da blocchi di puleggia con vantaggi meccanici proporzionali a P, Q, R, S, T rispettivamente, tutti collegati dalla stessa stringa a un singolo peso.

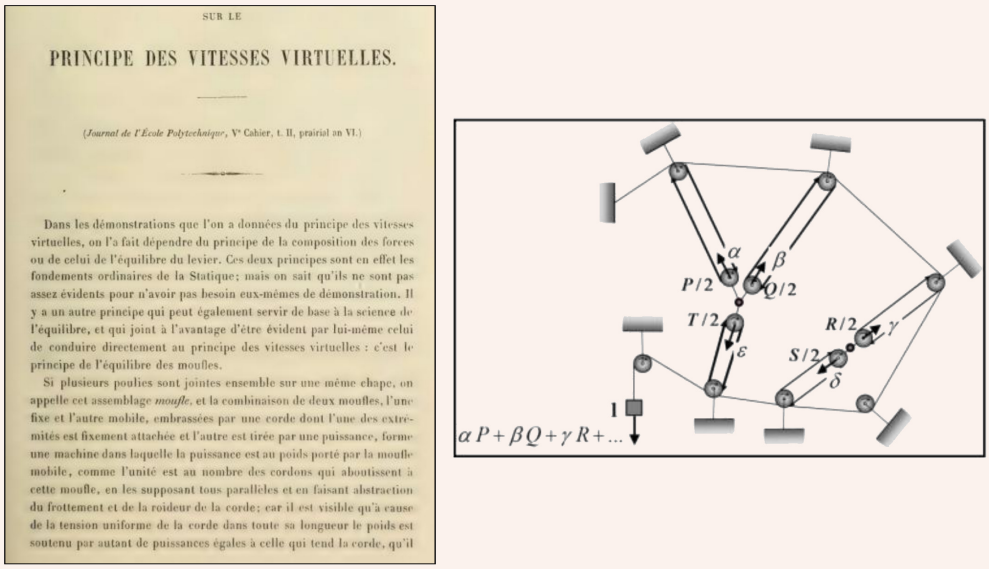
Se i corpi subiscono spostamenti infinitesimali che cambiano le distanze nei sistemi di puleggia per quantità $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$, poi la fine libera della stringa si muove per:

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + S\delta + T\varepsilon + \cdots$$

Per l'equilibrio, questo spostamento deve sparire (altrimenti il peso scenderebbe, violando l'equilibrio).

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + \cdots = 0$$

«che è precisamente l'espressione analitica del principio generale delle velocità virtuali».



SUR LE

PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

(*Journal de l'École Polytechnique*, V^e^ Cahier, t. II, prairial an VI.)

Dans les démonstrations que l'on a données du principe des vitesses virtuelles, on l'a fait dépendre du principe de la composition des forces ou de celui de l'équilibre du levier. Ces deux principes sont en effet les fondements ordinaires de la Statique; mais on sait qu'ils ne sont pas assez évidents pour n'avoir pas besoin eux-mêmes de démonstration. Il y a un autre principe qui peut également servir de base à la science de l'équilibre, et qui joint à l'avantage d'être évident par lui-même celui de conduire directement au principe des vitesses virtuelles : c'est le principe de l'équilibre des moufles.

Si plusieurs poulies sont jointes ensemble sur une même chape, on appelle cet assemblage *moufle*, et la combinaison de deux moufles, l'une fixe et l'autre mobile, embrassées par une corde dont l'une des extrémités est fixement attachée et l'autre est tirée par une puissance, forme une machine dans laquelle la puissance est au poids porté par la moufle mobile, comme l'unité est au nombre des cordons qui aboutissent à cette moufle, en les supposant tous parallèles et en faisant abstraction du frottement et de la roideur de la corde; car il est visible qu'à cause de la tension uniforme de la corde dans toute sa longueur le poids est soutenu par autant de puissances égales à celle qui tend la corde, qu'il

Figura 14.23: La prova di Lagrange del principio di velocità virtuale utilizzando blocchi puleggia (dopo (Salençon, 2018))

Multiplier e forze di contenimento

Forse il contributo più profondo di Lagrange all'apparato meccanico è stato il suo trattamento di vincoli, se il sistema è soggetto a vincoli geometrici espressi come:

$$dL = 0, \quad dM = 0, \quad dN = 0, \quad \ldots$$

allora l'equazione di lavoro virtuale sotto questi vincoli è equivalente a:

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \cdots + \lambda\,dL + \mu\,dM + \nu\,dN + \cdots = 0$$

per *arbitro* variazioni, dove λ, μ, ν sono scalari non definiti —il famoso *Moltiplicatori di lagrange*.

COPIA DI REVISIONE

Lagrange ha poi fatto l'osservazione cruciale che i termini $\lambda\, dL$, $\mu\, dM$, ecc., hanno esattamente la stessa forma matematica dei termini di forza $P\, dp$, $Q\, dq$, ecc. Questo porta ad una profonda interpretazione fisica: i moltiplicatori di Lagrange *sono* Ogni equazione di costrizione geometrica è equivalente a una o più forze che agiscono sul sistema; al contrario, queste forze possono essere sostituite alle equazioni di costrizione geometrica, in modo che i corpi costituenti possano essere considerati completamente liberi. I moltiplicatori rappresentano precisamente le resistenze che i corpi incontrano a causa delle loro connessioni, o le reazioni che devono essere uguali e opposte alle pressioni esercitate dai corpi.

Questa visione... che forze e vincoli sono concetti duali... si basa sul cuore della moderna meccanica strutturale.

Le Equazioni di Lagrange del Movimento

Il successo coronante del *Analitica medica* La combinazione del principio di d'Alembert con il formalismo delle coordinate generalizzate, Lagrange ha dimostrato che il movimento di un sistema con n gradi di libertà è regolato da n equazioni differenziali di secondo ordine:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{14.2}$$

dove T è l'energia cinetica e Q_j sono le forze generalizzate.

Quando le forze sono derivabili da una potenziale energia $V(q_1, \ldots, q_n)$ Cosi' che $Q_j = -\partial V/\partial q_j$, le equazioni prendono la forma elegante:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{14.3}$$

dove $L = T - V$ è il *Lagrangian* del sistema.

Questi sono i *Euler–Equazioni di Lagrange*Ogni problema nella dinamica – dal moto dei pianeti alle vibrazioni dei corpi elastici – si traduce nella scrittura del Lagrangiano e nella risoluzione di queste equazioni. L'intero edificio della meccanica classica, che era stato costruito a partire da due secoli da Galileo, Newton, Bernoullis, Euler e d'Alembert, è stato ridotto ad una procedura unica e uniforme.

14.5.18 Fourier (1768–1830)

Quattro. (Fourier, 1798) il quadro di Lagrange esteso a *vincoli di disuguaglianza*, osservando che "se si considera resistenze come forze... il corpo può essere considerato libero, e la somma dei momenti è nulla per tutti i possibili spostamenti." Questa estensione permette il trattamento del *vincoli unilaterali* come il contatto senza tensione—un corpo che poggia

COPIA DI REVISIONE

su una superficie, per esempio, che può spingere ma non tirare. Il principio di lavoro virtuale diventa un *disuguaglianza*:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \leq 0$$

per tutti gli spostamenti virtuali compatibili con il vincolo, che ha aperto la porta alla moderna teoria delle disuguaglianze variazionali e della meccanica dei problemi di contatto.

14.5.19 Carnot Lazare (1753–1823)

V

Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753–1823) è ricordato principalmente come "l'organisateur de la victoire'- l'ingegnere militare e statista che ha organizzato gli eserciti rivoluzionari francesi. Ma prima della sua carriera politica lo consumava, e ancora dopo la sua caduta dal potere nel 1797, Carnot ha dato contributi fondamentali alla meccanica che colma il divario tra la formulazione analitica di Lagrange e la scienza pratica delle macchine.

Carnot's *Saggio delle macchine in général* fu pubblicato per la prima volta nel 1783 (Carnot, 1783), quando era un capitano oscuro nel Corpo Royal du Génie, attrasse poca attenzione all'epoca. Venti anni dopo, dopo la sua eclissi politica, Carnot pubblicò una versione sostanzialmente riveduta come *Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement* (Carnot, 1803). Queste opere costituiscono il primo trattato veramente teorico sulla scienza generale delle macchine.

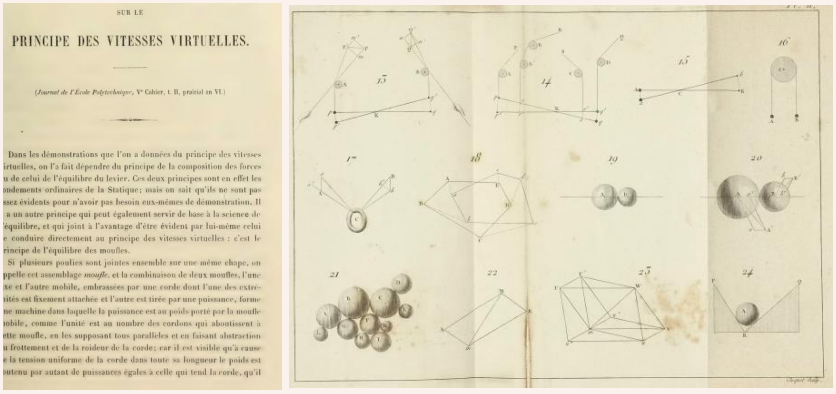
Per un ottimo studio e traduzione inglese di Carnot's *Essa* Vedi Pisano, Coopersmith e Peake, 2021.

L'innovazione centrale di Carnot è stata il concetto di *mouvement géométrique*- movimento geometrico, (Carnot, 1803). Egli definiva questi movimenti che dipendono solo dalla geometria di un sistema meccanico, non dalla sua dinamica: movimenti come "il movimento contrario è sempre possibile". *dislocazioni virtuali compatibili con i vincoli*, con l'ulteriore requisito di reversibilità (Fig. 14.24).

Carnot ha introdotto il termine *momento d'attivazione* per quello che ora chiamiamo *lavoro*, prodotto di forza e spostamento nella direzione della forza. Utilizzando i movimenti geometrici e il momento dell'attività, Carnot ha formulato un principio generalizzato: in qualsiasi sistema di corpi soggetti a vincoli, i movimenti geometrici sono proprio quelli per cui il momento totale dell'attività scompare.

Una caratteristica distintiva della meccanica di Carnot è il suo trattamento di *Corpi di aurora*— corpi duri che subiscono cambiamenti istantanei di velocità all'impatto o quando i vincoli sono improvvisamente imposti. Per tali sistemi, Carnot ha derivato il suo teorema

COPIA DI REVISIONE


SUR LE

PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

(Journal de l'École Polytechnique, V^e Cahier, t. II, prairial an VI.)

Dans les démonstrations que l'on a données du principe des vitesses virtuelles, on l'a fait dépendre du principe de la composition des forces ou de celui de l'équilibre du levier. Ces deux principes sont en effet les fondements ordinaires de la Statique; mais on sait qu'ils ne sont pas assez évidents pour n'avoir pas besoin eux-mêmes de démonstration. Il y a un autre principe qui peut également servir de base à la science de l'équilibre, et qui joint à l'avantage d'être évident par lui-même celui de conduire directement au principe des vitesses virtuelles : c'est le principe de l'équilibre des moufles.

Si plusieurs poulies sont jointes ensemble sur une même chape, on appelle cet assemblage *moufle*, et la combinaison de deux moufles, l'une fixe et l'autre mobile, embrassées par une corde dont l'une des extrémités est fixement attachée et l'autre est tirée par une puissance, forme une machine dans laquelle la puissance est au poids porté par la moufle mobile, comme l'unité est au nombre des cordons qui aboutissent à cette moufle, en les supposant tous parallèles et en faisant abstraction du frottement et de la roideur de la corde; car il est visible qu'à cause de la tension uniforme de la corde dans toute sa longueur le poids est soutenu par autant de puissances égales à celle qui tend la corde, qu'il

Figura 14.24: Carnot's illustrando sistemi di corpi, movimenti geometrici e meccanica d'impatto (Carnot, 1803)

sulla perdita di *vis viva* in impatto inelastico: il *vis viva* perduta uguale al *vis viva* che sarebbe generato dalle "perdite":

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i U_i^2 - \sum_i \frac{1}{2} m_i V_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\mathbf{U}_i - \mathbf{V}_i|^2 \tag{14.4}$$

dove $\mathbf{U}_i$ e $\mathbf{V}_i$ sono le velocità prima e dopo l'impatto. Questo risultato, a volte chiamato teorema di Carnot, mostra che tra tutti i movimenti compatibili con i vincoli, il moto effettivo dopo l'impatto minimizza la perdita di energia cinetica.

Per le forze gradualmente variabili, Carnot ha esteso la sua analisi al principio di continuità : una macchina opera al massimo dell'efficienza quando la trasmissione del moto avviene senza cambiamenti improvvisi di velocità; questa visione ha subito implicazioni pratiche per la progettazione della macchina e profonde implicazioni teoriche che il figlio di Carnot Sadi avrebbe successivamente sfruttato: il concetto di un processo reversibile è un diretto discendente del movimento geometrico di Lazare.[24]

Se Lagrange trasformasse il lavoro virtuale in un ramo di pura analisi, Carnot lo trasformò in uno strumento di ingegneria, il suo concetto di movimento geometrico forniva un'interpretazione fisica dello spostamento virtuale più concreta della definizione puramente analitica di Lagrange, e la sua enfasi sul lavoro come la quantità fondamentale nell'analisi della macchina anticipava l'approccio basato sull'energia che dominava la fisica ottocentesca.

[24]Sadi Carnot (1796–1832) fonda la termodinamica con la sua *Riflessioni sulla puissance motrice du feu* (1824) L'apparato concettuale che ereditò dal padre, in particolare la nozione di processi reversibili, ebbe un ruolo cruciale in quel lavoro.

COPIA DI REVISIONE

14.6 Epiloga

A proposito di un epilogo, un piccolo argano ai nostri colleghi di Fisica e chiudere questo capitolo con le loro definizioni dei quattro tipi di forze.

Gravitazionale La forza è la forza di attrazione tra due masse, è la forza responsabile della forza gravitazionale che gli oggetti con massa esercitano l'uno sull'altro. Secondo la legge di Newton sulla gravitazione universale, la grandezza della forza gravitazionale tra due masse è direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra i loro centri.

Elettromagnetico La forza è la forza che agisce tra le particelle caricate elettricamente, comprende sia le forze elettriche (attrazione o repulsione tra particelle cariche) che le forze magnetiche (interazione tra le cariche in movimento), che impedisce a un libro di cadere attraverso una tabella perché a livello atomico, sia il libro che il tavolo di elettroni caricati negativamente, che consiste di un nucleo (contenendo protoni e neutroni) circondato da elettroni.

Debole nucleare la forza è responsabile di alcuni tipi di decadimento radioattivo e le interazioni che coinvolgono particelle elementari.

Forte nucleare La forza è la forza che lega protoni e neutroni insieme nel nucleo di un atomo. È la forza più forte delle quattro forze fondamentali, ma ha una gamma molto breve, agendo solo su distanze paragonabili alle dimensioni dei nuclei atomici. La forza nucleare è responsabile di tenere insieme i nuclei atomici nonostante la repulsione elettrostatica tra protoni caricati positivamente.

14.7 Conclusioni

Riflettendo sulla nostra attuale comprensione della fisica e della meccanica, è veramente affascinante vedere il grande progresso che l'umanità ha fatto nel comprendere il concetto di forza. Inizialmente intrecciati con l'intervento divino e la filosofia astratta, queste prime idee appaiono ormai lontane dalle nostre discussioni dirette ed empiriche, e il viaggio dalla forza percepitrice come manifestazione della volontà divina per comprenderla attraverso le chiare e precise lenti della fisica moderna segna una significativa evoluzione.

Questa trasformazione, catalizzata dalla rivoluzione scientifica a partire dalla fine del XVI secolo, sottolinea la nostra instancabile ricerca della conoscenza e il profondo spostamento dalle spiegazioni mistiche alla scienza empirica ('bottom up") e teorica ('top-down').

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Concludo quindi con opportunità con la citazione attribuita ad uno dei fondatori della meccanica quantistica e dell'elettrodinamica quantistica, Paul Dirac [25]

> Sembra chiaro che la moda attuale per i dinosauri e l'interesse storico che le persone mostrano nelle religioni primitive derivano dalla stessa causa– un desiderio di capire come le persone primitive di fronte al mondo. Le vecchie religioni erano tentativi di comprendere le forze della natura personificandole.
>
> Dirac, 1963 «*The Evolution of the Physicist's Picture of Nature*»

Sintesi cronologica

[25] https://freethoughtblogs.com/singham/2013/03/24/paul-dirac-on-religion/

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

Tabella 14.1: Sviluppo cronologico della forza e dei principi virtuali.

Anno	Autore	Riferimento	Contributo principale
c. 450 BCE	Empedocle	N/a	"Love" e "strife" come cause opposte del movimento (primitivi primitivi di forza primitiva)
c. 350 BCE	Platone	Plato, 350 BC	Automozione come causa primaria; primo inquadramento metafisico dell'agenzia in movimento
c. 350 BCE	Aristotele	Aristotle, 2000	Leva spiegata con velocità circolari; concetto di "potere"
c. 250 BCE	Archimede	Archimedes, -250	Rigoroso prova della legge sulle leve; nessun principio generale variazionale
c. 100 BCE	Posidonio / Stoics	N/a	Forza come "tensione" attiva; enfasi esplicita spinta/pull; dualità agente/paziente
c. 530	Philoponus	Philoponus, 1993	Critica di Aristotele; impressionato impeto persiste dopo il contatto (proto-inertia)
c. 1020	Avicenna	N/a	*maggio* (inclinazione/impeto) come tendenza impressionata; il moto persiste senza movimento continuo
c. 1120	Al-Baghdadi	N/a	Forza legata al cambiamento di movimento (distinguono l'accelerazione dalla velocità; proto-$F \propto a$)
c. 1250	Jordanus de Nemore	Nemore, 1250	«Grionesi positiva»; spostamenti virtuali impliciti nei sistemi di contenimento
c. 1340	Jean Buridan	Buridan, 1991	Teoria di impulso raffinato; dichiarazione simile a inerzia (la cancellazione persiste a meno che non resista)
c. 1500	Leonardo da Vinci	Vinci, 1881	Manoscritti su macchine semplici; regola di proporzione; sintesi pratica
1586	Simon Stevin	Stevin, 1586	*clootcrans*; impossibilità di moto perpetuo; parallelogramma di forze
1594	Galileo Galilei	Galilei, 1594	"Gained in force, lost in velocity" (trasferimento tra forza e movimento)
1615	Salomon de Caus	Caus, 1615	*Les raisons des force mouvantes*; termine introdotto "travail' (lavoro)
1637	Ren René Cartesio	Descartes, 1898	Slocazioni infinitesimali; costruzione tangente; spazio (non tempo/velocità)
1644	Evangelista Torricelli	Torricelli, 1644	Criterio di gravità: equilibrio in base al C.G. non può scendere
1670	John Wallis	Wallis, 1670	Composizione generalizzata oltre direzioni speciali; decomposizione più ampia della forza
1686	G. W. Leibniz	Leibniz, 1686a	*vis viva* (mv^2) vs momentum (mv): "forza"' collegata al lavoro/energia
1687	Isaac Newton	Newton, 1687	Leggi di movimento; parallelogramma di forze da dinamiche
1717	Johann Bernoulli	Bernoulli, Johann, 1725	Prima dichiarazione generale delle velocità virtuali (lettera a Varignon)
1725	Pierre Varignon	Varignon, 1725	Teorema di Varignon sui momenti; diffusione/organizzazione dei risultati precedenti
1726	Daniel Bernoulli	Bernoulli, Daniel, 1726	Spiegazione statica del parallelogramma di forze; consolidamento della composizione
1743	Jean d'Alembert	d'Alembert, 1743	Estensione alla dinamica tramite forze inerziali; riformalazione dello stile di lavoro virtuale
1783	Carnot di Lazare	Carnot, 1783	«Moti geometrici»; *momento d'attivazioneé*; teoria delle macchine
1786	Immanuel Kant	Kant, 2023	Trattamento filosofico della composizione dei movimenti (assoluto/spazio relativo)
1788	Joseph Lagrange	Lagrange, 1788	Sistematizzazione; moltiplicatori come forze di costrizione; meccanica analitica
1798	Joseph Fourier	Fourier, 1798	Limiti di disuguaglianza (unilaterali); reazioni trattate come forze
1864	James Maxwell	Maxwell, 1864c	Metodo di carico unitario; teorema reciproco
1868	Otto Mohr	Mohr, 1868	Metodo di carico unitario sistemico per cornici

COPIA DI REVISIONE



Caravaggio, La Conversione di San Paolo (1601)

Una forza invisibile colpisce Paolo dal suo cavallo – la causa invisibile, l'effetto innegabile; la forza stessa rimane misteriosa mentre le sue conseguenze sono manifestate.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Interlude III: Dove la Borsa di Studio incontra la Passione

I due capitoli successivi si dipartono da una presentazione strettamente storica o tematica per affrontare due temi per i quali ho un forte interesse personale. 15, dove viene esaminato il sottile incrocio tra strutture e architettura. Capitolo 16 poi esplora un'intersezione diversa: quella tra terremoti e miti.

Rigorosamente, né argomento appartiene pienamente all'ambito di questo libro; tuttavia, riflettono gli interessi personali duraturi che hanno naturalmente versato sopra in questi due capitoli di chiusura.

COPIA DI REVISIONE

Capitolo 15

Architettura & Struttura

Abstract

Questo capitolo esamina il complesso e in evoluzione rapporto tra architettura e ingegneria strutturale –due discipline che un tempo erano unificate nella figura del maestro ma che sono cresciute sempre più distinte dal Settecento. De Architectura—esecuzioni, utie La mia (forza, utilità e bellezza)—riperiamo come questi ideali sono stati trasmessi attraverso i trattati rinascimentali di Alberti e Palladio, adattati ai materiali di età industriale da ingegneri come Eiffel e Maillart, e infine riformulati nel concetto di "arte strutturale" di Billington del XX secolo. Il mio nome–progetto-costruttori che hanno raggiunto l'integrazione della logica strutturale e dell'espressione estetica che rappresenta la più alta vocazione della nostra professione—mentre confrontando verità scomode sullo stato attuale della pratica di ingegneria strutturale. In un'epoca in cui gli strumenti computazionali hanno ridotto molti ingegneri a "tecnici e sostenitori delle idee architettoniche", esaminiamo ciò che distingue la tecnologia creativa "five per cento' che continua a spingere i confini.

15.1 Introduzione 574
15.1.1 Organizzazione del capitolo 575
15.2 La tradizione vitruviana 576
15.2.1 Marcus Vitruvius Pollio: il primo influenzatore architettonico 576
15.2.2 Vitruvio riscoperto durante il Rinascimento 584
15.2.3 Antropometria e questione della scala 591
15.3 Interludio: Architetti e Ingegneri — Arte e Scienza? 604
15.4 I pionieri 606
15.4.1 La Butterss volante: Logica strutturale resa visibile . . . 607
15.4.2 Gustave Eiffel (1832-1923) . . 610
15.4.3 Louis Henri Sullivan (1856-1924) 613
15.4.4 Robert Maillart (1872-1940) . 614
15.4.5 Auguste Perret (1874-1954) . 616
15.4.6 Eduardo Torroja Miret (1899–1961) 617
15.4.7 Pier Luigi Nervi (1891-1979) 620
15.4.8 Riccardo Morandi (1902-1989) 627
15.4.9 Christian Menn (1927-2018) . 629
15.4.10 Fazlur Rahman Khan (1929-1982) 629
15.4.11 I Progettisti confrontati: Designer-Builders e i loro materiali 633
15.5 Morfiogenesi strutturale: figure chiave 635
15.5.1 Catenary 635
15.5.2 Conchiglie e Membrane . . . 638
15.5.3 Strutture reciproche 641

COPIA DI REVISIONE

15.5.4 Ottimizzazione matematica: Maxwell, Michell, Baker e Beghini 645
15.5.5 Coda: Quando architetti e ingegneri sono stati colpiti . 650
15.6 La generazione del computer 653
15.6.1 Gli architetti "Exceptional" . 653
15.6.2 Ingegneri strutturali: Il cinque percenter 656
15.7 Vitruvio rivisitato 666
15.7.1 Ricostruzione di arte strutturale 666
15.7.2 Cos'è l'arte? 667
15.7.3 Architettura strutturale: Manifesto di Llunji 669
15.8 Conclusioni 670

15.1 Introduzione

Il rapporto tra architettura e ingegneria è vecchio come la costruzione stessa[1]Prima della professionalizzazione di queste discipline nel Settecento, una singola figura—il maestro costruttore—concepito, progettato e costruito le grandi strutture dell'antichità e del Medioevo. Le matresse volanti di cattedrali gotiche, le cupole delle chiese bizantine, e i ponti delle strade romane emersero non dalla collaborazione di specialisti ma da individui che possedevano sia la conoscenza costruttiva pratica e sensibilità estetica in misura uguale.

Questa unità cominciò a fratturarsi con l'emergere di meccanica razionale e la fondazione di istituzioni educative specializzate: *École des Ponts et ChaussÉ* (1747), il *Politecnica Ecole* (1794), e le loro controparti in tutta Europa. *InÉnieur*, formato in matematica e meccanica, è diventato diverso da quello *architetto*, formato in composizione, disegno e storia, che era stata una singola vocazione diventava due professioni, ognuna con i suoi valori, metodi e strutture istituzionali.

A differenza degli altri capitoli di questo libro, che seguono una struttura prevalentemente cronologica, questo capitolo adotta un approccio tematico: un trattamento puramente cronologico non solo si rivelerebbe tedioso ma inadeguato catturerebbe le complesse interazioni tra le varie figure e le idee che hanno plasmato il rapporto architettura-struttura. 9[2], sono stati tra i miei preferiti a scrivere, come hanno fornito l'opportunità di esprimere interessi personali e pregiudizi che potrebbero altrimenti rimanere nascosti sotto l'esposizione tecnica che domina il resto di questo lavoro.

La tensione tra queste discipline—e la questione se la loro separazione rappresenta il progresso o la perdita-anima questo capitolo. Da un lato, l'emergere dell'ingegneria strutturale come disciplina scientifica ha permesso realizzazioni senza precedenti: ponti che spaziano dalle distanze che sarebbero sembrate impossibili ai costruttori medievali,

[1]Questo capitolo è nato da molte conversazioni con Patrizia Galdieri, architetto, la cui curiosità circa la il confine tra architettura e ingegneria strutturale ha contribuito a risvegliare il mio.

[2]Le grandi sfide: Catenary, Elastica e la nascita della Meccanica analitica.

COPIA DI REVISIONE

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

torri che si alzano a altezze che sfidavano le regole vitruviane di proporzione, conchiglie di tale disinvoltura che si avvicinavano ai limiti teorici del comportamento materiale.

Le figure esaminate in questo capitolo—da Vitruvio attraverso i maestri del Rinascimento ai grandi costruttori di ingegnere del XIX e XX secolo-rappresentano risposte diverse a questa tensione fondamentale. Alcuni, come Nervi e Torroja, hanno raggiunto una sintesi di padronanza tecnica e visione estetica che rivali qualsiasi puramente 'artistica' ingegneria strutturale' realizzazione.

Questo capitolo non offre soluzioni facili a queste tensioni, ma fornisce il contesto storico e concettuale necessario per il pensieroso ingegnere strutturale per navigarle. La triade vitruvia, la resistenza, l'utilità e la bellezza-rimane come attuale come era due millenni fa, anche come i mezzi per raggiungere questi obiettivi sono stati trasformati oltre il riconoscimento.

15.1.1 Organizzazione del capitolo

Questo capitolo è organizzato in sette sezioni principali, ognuna che affronta un aspetto distinto del rapporto architettura-struttura:

- §15.2: **La tradizione vitruviana** Iniziamo con il testo fondamentale della teoria architettonica occidentale attraverso tre sottosezioni: §15.2.1 esamina Marcus Vitruvius Pollio e il suo trattato completo *De Architectura*, che stabilisce la famosa triade di *esecuzioni*, *utie La mia* (§3.2.4.1) traccia la trasmissione dei principi vitruviani attraverso i trattati rinascimentali di Alberti e Palladio; e §15.2.3 esplora la tradizione antropometrica da Vitruvio attraverso Leonardo a Le Corbusier *Modulo*.
- §15.3: **Interludio— Architetti e ingegneri** Un esame critico su come i ruoli di architetto e ingegnere si divergono nel XVIII secolo, creando le tensioni professionali che persistono oggi, con prospettive di Ada Louise Huxtable, Eduardo Torroja e Le Corbusier sul corretto rapporto tra queste discipline.
- §15.4: **I pionieri** Il cuore del capitolo profila il grande *Il mio nome*– ingegneri che hanno raggiunto l'arte strutturale attraverso l'integrazione della padronanza tecnica e della visione estetica. Dai morsi gotici attraverso la costruzione di ferro di Eiffel, archi di cemento di Maillart, gusci di Torroja, ferrocemento di Nervi, cemento prestressato di Morandi, ponti di Menn e grattacieli tubolari di Khan.
- §15.5: **Morfiogenesi strutturale** La tradizione forma-finanziamento in cui la forma strutturale emerge dalle esigenze di carico, materiale e costruzione piuttosto che arbitraria preferenza estetica—dagli studi catenari attraverso esperimenti a membrana agli approcci di ottimizzazione matematica.
- §15.5.5: **Concorso del XIX secolo tra architetti e ingegneri** Esame storico della rivalità professionale tra architetti e ingegneri durante l'era industriale, tra cui studi di casi della competizione Eiffel Tower, Crystal Palace e Brooklyn Bridge.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

§15.6: **La generazione del computer** Di fronte alla trasformazione della pratica dell'ingegneria strutturale attraverso strumenti computazionali, profilando il "cinque per cento" creativo che trascende il semplice calcolo tecnico— dal World Trade Center di Robertson attraverso i grattacieli ottimizzati dalla topologia di Baker ai sofisticati progetti di ponte di Virlogeux, esaminando il lavoro di "archivi eccezionali" come Candela, Gehry e Calatrava.

§15.7: **Vitruvio Rivisitato** Un esame critico del concetto di "arte strutturale" e della difesa di Billington per il termine più preciso "architettura strutturale", sostenendo che la triade vitruviana rimane il quadro più adeguato per valutare il raggiungimento strutturale nell'era computazionale.

15.2 La tradizione vitruviana

15.2.1 Marcus Vitruvius Pollio: il primo influenzatore architettonico

Nessuna architettura *il tuo amico* ebbe un'influenza così importante e duratura come Marco Vitruvio Pollio (a.k.a. Vitruvius), o più specificamente il suo libro *De Architectura, libri decem*, conosciuto oggi come *Dieci libri sull'architettura* (Vitruvius e Morgan, 1914). Interessante, nel contesto di questo libro è spesso etichettato come architetto romano *e* Scritto durante il regno di Augusto e dedicato all'imperatore, *De Architectura* comprende dieci libri che coprono l'educazione di architetti, materiali da costruzione, costruzioni di templi, edifici pubblici e privati, pavimenti e stucchi, approvvigionamento idrico, astronomia e tempestivi, e macchine civili e militari.

15.2.1.1 Vitruvio sull'educazione

Come molti studenti laureati che conoscono i loro comitati di tesi, Vitruvio esprime gratitudine ai suoi genitori e sostiene di non essere guidato da considerazioni finanziarie.[3]

> Sono quindi molto grato ai miei genitori per l'approvazione di questa legge ateniese e per aver preso cura di me, e di una sorta di arte che non può essere portata alla perfezione senza imparare e una formazione liberale in tutti i rami dell'istruzione. Grazie, quindi, all'attenzione dei miei genitori e all'istruzione impartita dai miei insegnanti, ho ottenuto una vasta gamma di conoscenze e da parte dei miei insegnanti. il piacere che prendo in soggetti letterari e artistici, e nella scrittura di trattati, ho acquisito beni intellettuali i cui principali frutti sono questi pensieri: quella superfluità è inutile, e che non sentire la voglia di nulla è vera ricchezza. Ci può essere qualche gente, tuttavia, che ritiene tutto questo di nessuna conseguenza, e pensare che i saggi sono quelli che hanno un sacco di soldi. Ma da parte mia, Cesare, non sono mai stato ansioso di fare soldi per la mia arte, ma sono andati sul principio che snello mezzi e una buona reputazione sono preferibili alla ricchezza e disrepute.

[3] Nel linguaggio moderno, ha cercato autorità sulla celebrità.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Vitruvius, 1960

Vitruvio ha espresso l'idea che un architetto dovrebbe avere una vasta formazione, e non specializzato in una fase iniziale– un sentimento che risuona con le preoccupazioni moderne circa la formazione tecnica eccessivamente stretta:

> 1. L'architetto dovrebbe essere dotato di conoscenza di molti rami di studio e vario tipo di apprendimento, perché è dal suo il giudizio che tutto il lavoro svolto dalle altre arti è messo a prova. la conoscenza è il figlio della pratica e della teoria. ... 4. ... Un architetto dovrebbe essere un uomo educato in modo da lasciare un ricordo più duraturo nei suoi trattati. In secondo luogo, deve avere una conoscenza del disegno in modo che possa rapidamente fare schizzi per mostrare l'aspetto del lavoro che propone. Geometria, anche, è di molta assistenza nell'architettura, e in particolare ci insegna l'uso della regola e compasses, con cui soprattutto acquisiamo i motivi di prontezza nel fare piani quadrati. 5. Una vasta conoscenza della storia è necessaria... 6. Per quanto riguarda la filosofia, fa un architetto di alta mente e non auto-assumendo, ma piuttosto lo rende cortese, giusto, onesto senza avarizia. ... 8. Anche la musica, l'architetto deve capire in modo che egli può avere conoscenza della teoria canonica e matematica. ... 9. Nei teatri, allo stesso modo, ci sono i vasi di bronzo 10. L'architetto dovrebbe anche avere una conoscenza dello studio di medicina a causa delle domande di climi. Penso che gli uomini non abbiano diritto di professarsi in fretta architetti, senza aver scalato dalla fanciullezza i passi di questi studi e quindi, infermiati dalla conoscenza di molte arti e scienze, avendo raggiunto le alture del santo terreno di architettura.
>
> Vitruvius, 1960

Come molti di noi scienziati, Vitruvio si preoccupava anche delle sue capacità di scrittura, chiedendo l'indulgenza di Cesare se qualcosa è messo in evidenza con troppo poco riguardo al dominio grammaticale.

15.2.1.2 Vitruvius l'Ingegnere

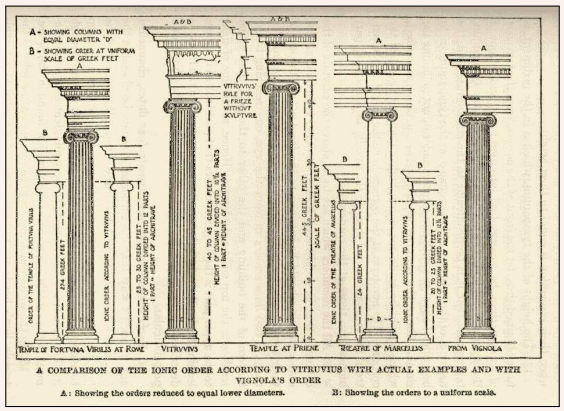
Come ingegnere militare, Vitruvio ha ideato regole semplici per il design strutturale. *De Architectura* (Vitruvius, 1960) È stato infatti il primo insieme codificato registrato di regole per le strutture, costituito da dissertazioni su una vasta gamma di soggetti relativi all'architettura, all'ingegneria, alla sanificazione, all'idraulica pratica, ai vasi acustici, e simili. Gran parte del materiale sembra essere stato prelevato da trattati estinti precedenti da architetti greci. 15.1b. Per tutti gli scopi pratici, può essere considerato come una guida per i progetti di costruzione.

Il contenuto pratico di *De Architectura* Vitruvio discute le proprietà dei materiali da costruzione (lime, sabbia, pietra, legname), il design delle fondamenta, la costruzione delle pareti e le proporzioni appropriate ai diversi tipi di costruzione. Egli descrive gli ordini classici (Doric, Ionic, Corinthian) e la loro corretta applicazione, riguarda la proporzione architettonica al corpo umano—il famoso Vitruviano che Leonardo avrebbe poi illustrato, e che esaminiamo ulteriormente in §15.2.3—e fornisce una contabilità dettagliata di macchine edili, tra cui gru, paranchi e dispositivi di sollevamento dell'acqua.

COPIA DI REVISIONE



(a) Vitruvius presenta *De Architectura* a Cesare Augusto



(b) Vitruvius laws of proportions, (Vitruvius, 1960)

Figura 15.1: Vitruvibile

Ciò che è più saliente in questo libro sono le regole di proporzionalità, una delle quali legge:

> Se la larghezza è di più di quaranta piedi, lasciate che le colonne siano poste all'interno e di fronte alle colonne tra le antae. Dovrebbero avere la stessa altezza delle colonne di fronte a loro, ma il loro spessore dovrebbe essere proporzionalmente ridotto: così, se le colonne di fronte sono in spessore un ottavo della loro altezza, questi dovrebbero essere un decimo; se i primi sono un nono o un ventisimo, questi dovrebbero essere ridotti nella stessa proporzione.
>
> Vitruvius, 1960, p. 4.4.2

Queste regole erano applicabili perché una colonna progettata in questo modo era stata trovata per esperienza soddisfacente—può essere parte di un edificio senza intasamento o schiacciamento. Inoltre, l'esperienza aveva dimostrato che la colonna potrebbe essere costruita a qualsiasi scala, contrariamente all'intuizione "moderna" (Heyman, 2003)Queste regole hanno funzionato per secoli perché i materiali utilizzati per l'antico edificio—pietra e in qualche misura legno–sono molto leggermente sottolineati nelle strutture completate.Potrebbero essere costruiti ponti in pietra di grandi dimensioni, e le cattedrali costruite ad un'altezza di stantuffo; tutto ciò che era necessario era che la forma (di un anello di arco, di un buttres volante) dovrebbe essere corretta, e questo è un requisito geometrico, per essere soddisfatto seguendo le regole di un errore di prova era stato.

L'approccio di Vitruvio—legge di proporzioni—così rimase l'approccio di progettazione predominante per secoli perché *forma* era l'obiettivo più importante. La forza era irrilevante (le pietre sono abbastanza forti), la rigidità non si è mai verificata ai costruttori come un problema, e la stabilità è stata affrontata geometricamente (ad esempio, come modellare un arco per evitare tensioni che portano a crepe che a loro volta si sarebbero rese a fallimento).

COPIA DI REVISIONE

I limiti della proporzionalità: progettazione dei ponti Per gli edifici, le regole proporzionali sono rimaste adeguate, ma il design del ponte ha rivelato i loro limiti prima della sfida teorica di Galileo. Huerta, 2018 ha dimostrato che il problema del design del ponte ad arco è intrinsecamente non proporzionale: per un carico di traffico dato, i ponti più piccoli sono "weaker"—più sensibili all'azione di carichi di passaggio—— di quelli più grandi. Eppure fino al XVIII secolo, le regole conosciute erano proporzionali. *De Re Aedificatoria* (Alberti, 1485) prescrivendo che la larghezza del pier dovrebbe essere un terzo della campata e dello spessore dell'arco un quinto—-rule derivate dal precedente romano e citate durante i trattati architettonici per tre secoli.

L'ingegnere francese Hubert Gautier (1660–1737), nel suo *Traité des ponts* (1716) (Gautier, 1765)—il primo trattato interamente dedicato ai ponti—riconosciuto che le regole proporzionali non sono riuscite per i piccoli archi.*tonificante* L'arco di 6 piedi progettato dalla regola di Alberti di span/15 avrebbe uno spessore inferiore a 6 pollici, manifestamente inadeguato rispetto ai 1,5 piedi che l'esperienza necessaria.

> Il est certe qu'un grand Pont qui porte une grande voiture, est bien moins chargé qu'un Ponceau qui porte la meme voiture
>
> ---
>
> Un grande ponte che trasporta una carrozza pesante è molto meno carico di un piccolo ponte che trasporta la stessa carrozza.
>
> Gautier, 1765 Traité des ponts

La dichiarazione di Gautier richiede chiarimenti: significa che *rapporto* Un grande ponte, essendo più pesante, è dominato dal suo peso auto-peso; il passaggio rappresenta una frazione trascurabile del carico totale. Un piccolo ponte, essendo più leggero, sperimenta la stessa carrozza di una perturbazione proporzionalmente più grande. Ecco perché regole proporzionali (t/s = const.) fallire per piccole campate: la magnitudine assoluta del carico vivo non si scala con la struttura, anche se il carico morto lo fa, il primo riconoscimento esplicito che il progetto del ponte arco è *non proporzionale*.

La soluzione definitiva è venuta da Jean Rodolphe Perronet (1708–1794), fondatore e primo direttore dell'École des Ponts et Chaussées che aveva alcune memorie pubblicate e inedite. *Mémoire sur l'epaisseur que doivent avoir les voussoirs à la clef, dans les differentes voûtes des Ponts* (Memoria sullo spessore dei voussoirs nella chiave, nelle diverse volte dei ponti).[4]. In questo inedito 1748 memoir, Perronet compilava i dati da oltre duecento ponti esistenti e derivava una regola non proporzionale: per archi semicircolari, lo spessore della pietra chiave t (in piedi) dovrebbe essere $t = s/24 + 1 - s/144$dove s Questa regola ha quasi fermato lo spessore prescritto da Alberti-Gautier per grandi ponti, fornendo allo

[4]Non sono stato in grado di individuare una versione pdf di questo documento, il manoscritto originale (Ms. 2202) si tiene presso la *Bibliothèque de l'École des Ponts et Chaussées* a Parigi. I lettori interessati all'ingegneria dei ponti di Perronet possono consultare il suo lavoro pubblicato in seguito (Perronet, 1782–1788) or (Perronet, 1782).

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

stesso tempo uno spessore adeguato per i piccoli. Perronet ha giustificato il suo approccio empiricamente:

> in materia di costruzione, la speculazione da sola non può prevalere sull'esperienza
>
> Perronet, citato in Huerta, 2018 «*Arch Bridge Design in Eighteenth-Century France: The Rule of Perronet*»

La sua regola rimase in uso per oltre un secolo, e l'approccio empirico–comparando progetti proposti contro database di precedenti di successo—anticipa l'ingegneria moderna basata sulle prestazioni.

Per i dettagli analitici, consultare §63.3.2.3

Figura 15.2 illustra l'evoluzione delle regole empiriche per il disegno del ponte di arco dall'antichità fino al XIX secolo, tracciando il rapporto di spessore dell'arco t per la durata s come funzione di span. La fascia orizzontale in alto rappresenta le tipiche proporzioni del ponte romano ($t/s \approx 1/10$ to $1/12$), mentre la regola Alberti-Gautier $t/s = 1/15$–inherited da fonti classiche e codificato nei trattati rinascimentali–rimanteneva la norma regola proporzionale per tre secoli. Il contributo di Gautier del 1717 era il riconoscimento che questa regola proporzionale non è riuscita per piccole campate, dove i carichi di traffico diventano relativamente più significativi; la sua curva ripida per piccoli archi ($s < 40$ piedi) segnò il primo approccio non proporzionale. $t = 0.325 + 0.035s$ (in metri), rappresentava un progresso decisivo: studiando oltre duecento ponti esistenti, dimostrò che gli archi di grandi dimensioni potevano essere costruiti molto più snelli di quanto prescritto da Alberti—provando lo spessore necessario per le campate superiori ai 30 metri. Dopo il 1850, gli ingegneri riconoscevano che le regole che incorporavano la radice quadrata di span meglio catturavano il rapporto non lineare tra dimensione e spessore richiesto, portando a formule come Dupuit's $t = 0.2\sqrt{s}$ e Trautwine's $t = 0.14\sqrt{s}$. La linea tratteggiata $t/s \approx 1/56$ rappresenta il limite pratico inferiore identificato da Heyman, 1982 dalla sua analisi del ponte medievale Teston – una dimostrazione notevole di quanto il design empirico possa spingere la snellezza strutturale prima dell'avvento dell'analisi moderna. La progressiva discesa di queste curve riflette la crescente fiducia degli ingegneri nella riduzione del materiale attraverso l'esperienza accumulata, prefigurando la transizione dalle regole geometriche del pollice all'analisi meccanica basata che alla fine li soppianta.

L'evoluzione delle regole di progettazione del ponte ha quindi previsto la transizione più ampia dal pensiero geometrico a quello meccanico, dove la proporzionalità vitruvia è sufficiente per gli edifici la cui stabilità dipendeva dalla geometria da sola, i ponti hanno chiesto l'attenzione alla magnitudine assoluta delle forze – un cambiamento concettuale che Galileo avrebbe articolato teoricamente e che avrebbe infine trasformato tutta l'ingegneria strutturale.

La sfida di Galileo Questo confortevole regime di proporzionalità persistette per quasi due millenni, fino a quando nuovi materiali e nuove ambizioni richiedevano un approccio

COPIA DI REVISIONE

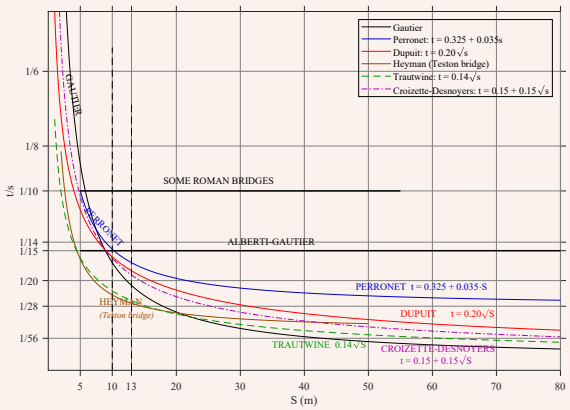


Figura 15.2: Evoluzione delle regole empiriche per il disegno del ponte ad arco (dopo (Huerta, 2018 PDF)).

diverso. Galilei, 1632 PDF che sfidava quelle due nozioni fondamentali: prima, introdusse il concetto di stress, §7.2.2 (in un raggio, Fig. 15.3a) come considerazione progettuale indipendente dalla geometria; e in secondo luogo, ha affermato che esiste un limite alla scalabilità– che una struttura non può essere semplicemente ampliata indefinitamente mantenendo le sue proporzioni[5]Fico. 15.3bCon Galileo, l'era del design puramente geometrico ha cominciato a cedere all'era della meccanica. Le implicazioni complete di questo spostamento, tuttavia, avrebbero impiegato secoli per dispiegarsi, e per gli edifici dei materiali tradizionali, la proporzionalità vitruviana rimase una guida utile ben nell'era moderna.

> Una volta disegnai la forma di un osso, allungato tre volte, e poi ispessito in tale proporzione che potrebbe funzionare nel suo grande animale relativamente come l'osso serve l'animale più piccolo: ecco le immagini; vedete come sproporzionato la forma diventa nell'osso allargato. Da questo si manifesta che se si desidera mantenere in un gigante enorme quelle proporzioni di membri che esistono in un uomo comune, sarebbe necessario trovare materiale molto più duro e più resistente per formare le sue ossa, o altro per consentire la sua robustezza essere proporzionalmente più debole che negli uomini di statura media; altrimenti crescendo a altezza irragionevole, egli avrebbe essere visto schiacciato dal suo proprio peso e caduto.
>
> Galilei, 1632 PDF "Dialogue Concerning the Two Chief World Systems: Ptolemaic and Copernican"

15.2.1.3 Vitruvius l'architetto: la triade duratura

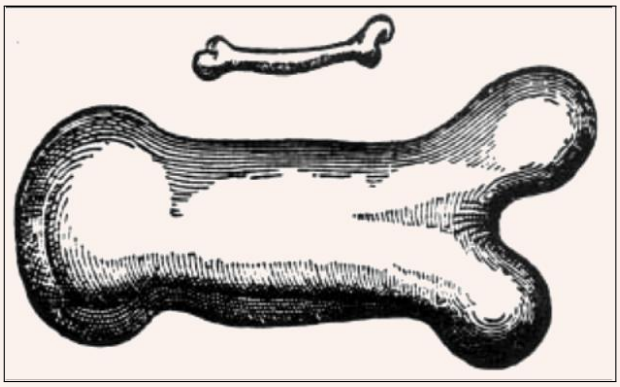
Anche se *De Architectura* conteneva informazioni molto utili su materiali e tecniche antiche, quelle regole pratiche sono state a lungo sormontate dall'emergere di meccanica e di analisi strutturale moderna. L'eredità di Vitruvio è la sua analisi più astratta dell'architettura,

[5] L'autore ha affrontato questo problema in (Saouma e Fava, 2006 PDF).

COPIA DI REVISIONE



(a) Le stringhe sono importanti



(b) Limiti alla scala

Figura 15.3: Galileo sfida Vitruvius (Galilei, 1632)

dove ha definito la perfezione architettonica in termini di tre qualità inseparabili –la sua famosa *Triade Vitruviana*:

Vitruvius introduce la triade duratura dell'architettura: *esecuzioni* (resistenza strutturale), *uti* (adeguatezza funzionale), e *La mia* (appello estetico)—un quadro che anticipa le moderne discussioni di integrità strutturale, di servizio e di espressione architettonica.La costruzione sonora, insiste Vitruvio, deve essere durevole, funzionale e bello; queste qualità non sono indipendenti ma reciprocamente rafforzanti. Il suo trattato dimostra l'unità olistica di ragionamento strutturale, estetica e metodi di costruzione che caratterizzano l'ingegneria romana al suo meglio (Vitruvius, 1960 , Book III, Chap III).

Firmitas Forza[6] (Libri II e III)

Utilitas Utilità[7] (Libri IV e V).

Venustas Bellezza (Libri VI-IX); è di per sé divisa in sei concetti fondamentali in relazione ai gusti sociali (Vitruvius, 1960 , Book I Chap. II):

Proporzione principi: Ordine (*Ordinazione*), Disposizione (*esito di*), Economia (*distributivo*)

Estetica Qualità: Eurythmy (*Eurithmia*), simmetria (*Si tratta di una*), Proprietà (*decorazione*)

Da queste definizioni Vitruvius deriva regole finite che regolano la pianificazione e la perfezione.

Interessante, quei tre precetti, messi insieme, occupano meno di dieci linee in *De Architectura* e non sono evidenziati in qualsiasi introduzione al libro—quasi un ripensamento:

[6] Nel linguaggio moderno: soddisfare i requisiti di resistenza, rigidità e stabilità.
[7] Non dissuadere Nero in seguito su costruire edifici stravaganti senza alcuna utilità reale.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

> Tutti questi devono essere costruiti con il dovuto riferimento *durata, convenienza e bellezza*. La durata sarà assicurata quando le fondamenta sono portate giù al solido terreno e materiali saggiamente e liberalmente selezionati; convenienza, quando la disposizione degli appartamenti è difettoso e non presenta alcun ostacolo all'uso, e quando ogni classe di costruzione è assegnato alla sua esposizione adeguata e appropriata; e la bellezza, quando l'aspetto del lavoro è piacevole e in buon gusto, e quando i suoi membri sono in proporzione dovuta secondo i principi corretti di simmetria.
>
> (Vitruvius, 1960) Libro I Capitolo III

I tre termini riappariscono insieme solo una volta di più—"'Un conto deve ora essere dato dell'eustyle, che è la classe più approvata, ed è disposto su principi sviluppati per la convenienza, la bellezza e la forza'— nel libro III Capitolo III quando si affrontano le proporzioni di intercoloniazioni e di colonne.

Queste regole hanno avuto poco effetto sull'architettura del proprio giorno di Vitruvio, ma sono state adottate come vera dottrina durante il Rinascimento. La triade vitruvia rimane un punto di riferimento per l'educazione architettonica e ingegneristica, ricordando ai praticanti che le strutture devono soddisfare contemporaneamente più criteri. Questa triade—forza, utilità, bellezza— riecherà attraverso tutta la teoria architettonica successiva, da Alberti a Palladio. §15.7.1, anche il concetto del XX secolo di Billington di "arte strutturale", con i suoi tre pilastri di efficienza, economia ed eleganza, è essenzialmente una riforma della articolazione di due millenni prima.

15.2.1.4 Vitruvio sugli atleti contro gli studiosi

Un aspetto meno conosciuto ma delizioso della scrittura di Vitruvio affronta l'ingiustizia degli atleti olimpici gratificanti per i loro *telaio corporeo rafforzato da formazione* mentre trascurano gli studiosi per i *dottrine che hanno posato nei loro libri*Questa denuncia risuonerà sicuramente nella nostra società moderna, dove gli allenatori atletici sono ricompensati con stipendi sproporzionati rispetto a quelli di semplici studiosi mortali:

> Gli antenati dei Greci hanno nominato così grandi onori per i famosi atleti che sono vittoriosi ai giochi olimpici, piti, istimici e nemei, che non sono solo accolti con applauso mentre stanno con palma e corona all'incontro stesso, ma anche di ritorno ai loro diversi stati nel trionfo della vittoria, cavalcano nel loro città e case dei loro padri in carri di quattro cavalli, e godere di entrate fisse per la vita a spese pubbliche. Quando penso a questo, sono stupito che gli stessi onori e ancor più non siano conferiti a quegli autori i cui servizi sconfinati sono eseguiti per tutto il tempo e per tutte le nazioni. Sarebbe stata una pratica tanto più degna di stabilire, perché nel caso degli atleti è solo la loro struttura corporea che si rafforza con la loro formazione, mentre nel caso degli autori è la mente, e non solo la propria ma anche quella dell'uomo in generale, dalle dottrine poste nei loro libri per l'acquisizione della conoscenza e la affilare l'intelletto.
>
> (Vitruvius, 1960)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

15.2.2 Vitruvio riscoperto durante il Rinascimento

Riscoperto nel monastero di San. Gallen nel 1414, *De Architectura* è diventata la base teorica per l'architettura rinascimentale. *De Architectura* è stato "rescoperto' di Poggio Bracciolini, che l'ha trovato nella biblioteca dell'Abbazia di San Gallo, Svizzera[8]–ma, a prescindere da quanto fosse veramente originale, la scoperta fu catalizzatore per rinnovato interesse a Vitruvio. Il tempo era maturo, come corrispondeva ai primi anni del Rinascimento.

Nel Rinascimento Vitruvio ebbe una grande influenza su diversi architetti, tra cui Alberti e Palladio, ma anche Serlio e Vignola, tutti disegnati su Vitruvio, adattando i suoi principi alla pratica contemporanea. 15.1 riassume i contenuti dei tre trattati architettonici più iconici – quelli di Vitruvio, Alberti e Palladio – insieme alle virtù architettoniche sostenute dai rispettivi autori, che oggi rimangono rilevanti come quando sono stati scritti, mezzo millennio o due millenni fa.

Tabella 15.1: Contenuto dei trattati di Vitruvio, Alberti e Palladio

Prenota	Vitruvibile	Alberti	Palladio
Uno	Pianificazione urbana, architettura o ingegneria civile in generale	Lineamenti	Materiali edili e tecniche
Due	Materiali da costruzione	Materiali	Progettazione di case urbane private e ville di campagna
Tre.	Templi e ordini di architettura	Costruzione	Pianificazione della città
Quattro.	Continuazione del Libro III	Lavori pubblici	Progetti di specifici templi romani risalenti all'antichità e solo un design contemporaneo della chiesa
[2pt] **Cinque.**	Edifici civili	Opere di individui	
Sei	Edifici nazionali	Ornamento	
Sette	Pavimenti e intonaco decorativo	Ornamento a edifici sacri	
Otto.	Forniture e acquedotti	Ornamento agli edifici pubblici	
Nove	Scienze che influenzano l'architettura: geometria, misura, astronomia, meridiane	Ornamento a edifici privati	
Dieci.	Uso e costruzione di macchine— motori d'assedio romani, mulini ad acqua, macchine di drenaggio, sollevamento, pneumatico	Restauro di edifici	

[8] Un'affermazione contestata da Krinsky, 1967, che ha dimostrato che c'erano almeno settanta copie in varie biblioteche europee al momento.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

15.2.2.1 Leon Battista Alberti (1404–1472)

Leon Battista Alberti[9] (1404–1472) (Alberti, 1485) autore del primo trattato architettonico completo del Rinascimento, trasformando l'architettura da un mestiere medievale in una disciplina intellettuale umanista. *De Re Aedificatoria* (Sulla Arte dell'Edificio) (Alberti, 1988), completata intorno al 1452 e pubblicata postumo nel 1485, fu il primo lavoro a rivale di Vitruvio in ambito e ambizione. Scritto in latino e modellato su Vitruvio—anche se molto più sistematico e originale—comprende dieci libri che coprono la selezione del sito, materiali da costruzione, metodi di costruzione, edifici sacri e secolari, ornamento, e restauro.[10] Si diffuse nel manoscritto prima della prima edizione stampata del 1485. Interessante, la prima edizione stampata di Vitruvio seguì nel 1486, e le due opere in seguito esercitarono un'influenza reciproca sui lettori rinascimentali.

Fondazione teorica e *Concinnitas* A differenza di Vitruvio, che scrisse come architetto praticante, Alberti si avvicinò all'architettura come teorico e intellettuale che aveva studiato edifici classici direttamente e portato un giudizio critico all'autorità antica. *concinnitas*—la corrispondenza armoniosa di parti a tutto–caldato in proporzioni matematiche e principi universali di proporzione[11] e armoniaQuesto principio di integrazione armoniosa garantisce che nulla possa essere aggiunto, rimosso o alterato senza diminuire il tutto, applicando allo stesso modo la composizione estetica e la coerenza strutturale: un edificio ben progettato deve essere bello, funzionale e sonoro, con queste qualità che derivano dalle stesse relazioni geometriche sottostanti.

Alberti insistette sul fatto che il ruolo dell'architetto sia quello di progettare attraverso disegni e modelli, lasciando l'esecuzione ai costruttori, una distinzione che ha elevato la pratica architettonica ad un'arte liberale. *La vita* (l'astratto quadro geometrico di un disegno) sulla costruzione materiale ha stabilito la separazione concettuale tra il design e l'edificio che caratterizza la moderna pratica professionale. Il trattato ha stabilito l'architettura come arte liberale degna di attenzione scientifica, separando il disegno intellettuale dalla costruzione manuale e e e elevando l'architetto da artigianato a professionista imparato.

Comprensione strutturale e proprietà dei materiali *De Re Aedificatoria* Alberti discute le proprietà dei materiali da costruzione –pietra, mattone, legno, e i loro usi appropriati. Egli analizza la costruzione di pareti, il design delle fondamenta, e il comportamento degli archi, attingendo sia alle fonti antiche che alle sue osservazioni strutturali delle rovine romane. Il suo trattamento di una volta che viola i diversi tipi strutturali e le loro applicazioni appropriate non riescono a trovare armonia.

[9] Ulteriori dettagli sulla vita precoce di Alberti si possono trovare in §6.4.1.

[10] Mentre Vitruvio dedicò i suoi dieci libri all'imperatore Cesare Augusto, Alberto dedicò il suo a papa Nicola V.

[11] Esiste un concetto parallelo nell'estetica giapponese: *shibusa*, la qualità dell'eleganza sobria in cui non rimane nulla di superfluo; il principio—che la perfezione si ottiene quando nulla di più può essere rimosso—si applica ugualmente alla ricerca dell'efficienza dell'ingegnere strutturale e alla ricerca dell'architetto di bellezza.

COPIA DI REVISIONE

Ornamento e necessità Alberti potrebbe essere stato un precursore di Sullivan nel esporre ciò che è un approccio minimalista- l'idea che l'ornamento dovrebbe nascere dalla necessità piuttosto che essere applicato arbitrariamente:

> Il capo e il primo ornamento di tutto è di essere libero da tutte le improprieties. Sarà quindi un giusto e corretto Confronto, se non è né confuso né interrotto, né troppo ramblante né composto di parti inadatte, e se i Membri non sono né troppi né troppo pochi, né troppo piccoli né troppo grandi, né mismatcht né ingiustamente, né come erano separati e divisi dal resto del Corpo: ma ogni cosa così smaltita secondo la natura e la convenienza, e gli usi per cui la struttura è destinata, con tale ordine, dimensione del numero, situazione e forma, che possiamo essere soddisfatti non c'è nulla in tutto Fabrick, ma ciò che è stato contrived per un certo uso o convenienza, e con la più bella compattezza di tutte le parti .... L'intera composizione dei deputati sembra quindi fatta e diretta interamente da necessità e convenienza, in modo che non siate così contenti che vi siano tali o tali parti nell'edificio, in quanto essi sono disposti e disposti in tale situazione, ordine e connessione.
>
> Alberti, 1485

Influenza duratura L'influenza di *De Re Aedificatoria* Fu profondo e duraturo, fondò la fondazione teorica per l'architettura rinascimentale, influenzando Bramante, Raphael e Michelangelo. Tradotto in italiano nel 1550, formò l'educazione architettonica per secoli. L'insistenza di Alberti che l'architettura deve essere fondata in principi razionali – matematici, estetici e strutturali–forniva un ponte cruciale tra l'antichità classica e l'emergere di scienza moderna ingegneristica. *De Re Aedificatoria* è stato il primo trattato "moderno" sull'architettura ed è considerato un ponte tra l'architettura romana e rinascimentale.

15.2.2.2 Andrea Palladio (1508–1580)

Dettagli sulla sua vita precoce si possono trovare in §6.4.3.

I Quattro Libri dell'Architettura I quattro libri affrontano rispettivamente i principi fondamentali, i materiali e le tecniche (Libro I); l'architettura domestica, tra cui le ville e i palazzi del Palladio (Libro II); gli edifici pubblici, le strade e il design urbano (Libro III); e i templi romani antichi (Libro IV). Questa organizzazione si muove dai principi alla pratica alla pratica al precedente, fornendo sia la documentazione teorica di base che i modelli pratici.

Sistemi e Clarity strutturali Sistemi proporzionali del Palladio ha derivato dimensioni delle camere da rapporti armonici analoghi a consonanze musicali, creando sequenze spaziali che progrediscono attraverso proporzioni correlate. Le camere di una villa potrebbero seguire i rapporti di 1:1, 1:$\sqrt{2}$, 2:3, e 3:4, che stabilisce relazioni matematiche percettibili come armonia estetica. Queste proporzioni non solo regolano dimensioni del piano ma anche altezze del soffitto, dimensioni delle finestre e composizioni di facciata, creando edifici unificati da relazioni geometriche ad ogni scala.

Oltre all'estetica, Palladio ha affrontato la chiarezza strutturale Le sue ville impiegano chiare gerarchie strutturali: le pareti portanti definiscono spazi principali, colonne e entablature, articolano la circolazione e le strutture del tetto spaziano tra supporti in schemi

COPIA DI REVISIONE

razionali e leggibili. I suoi progetti di ponte – compreso il famoso progetto non costruito per i materiali Rialto- — dimostrano una sofisticata comprensione di come le forze fluiscono attraverso strutture in legno e pietra.

Principi vitruviani e teoria architettonica Palladio ha sottolineato che nella preparazione del suo libro aveva studiato le opere dei predecessori che avevano scritto sull'architettura, e in più di un'occasione sottolinea l'importanza di Alberti, ma soprattutto i libri moderni pone Vitruvio, che ha scelto *per maestro, e guida* Era probabilmente più familiare con Vitruvio di qualsiasi altro architetto contemporaneo. (Wittkower, 1944 PDF). Nel suo *Quattro Libri*, Palladio riconosce il debito rinascimentale a Vitruvio e propone la sua variante della triade: Utility, Convenienza, Durata e Bellezza (Palladio, 1570 PDF). Sul rapporto di queste qualità, Palladio ha scritto:

> La bellezza deriva da una forma aggraziata e dal rapporto del tutto con le parti, e delle parti tra loro e con il tutto, perché gli edifici devono apparire come corpi completi e ben definiti, di cui un membro si abbina a un altro e tutti i membri sono necessari per ciò che è richiesto.
>
> Palladio, 1570 PDF I quattro libri dell'architettura, pp. I, I, 7

Influenza globale e Legacy architettonica L'influenza del Palladio si estendeva ben oltre l'Italia, mentre Inigo Jones portò il Palladianismo in Inghilterra all'inizio del XVII secolo; Lord Burlington lo rianimava nel diciottesimo; e attraversò l'Atlantico per modellare l'architettura americana dalla Virginia di Jefferson al sud dell'antibellum. Fu il primo architetto ad sistemare il piano di una casa e ad utilizzare costantemente l'antico tempio greco-romano come portico, la sua villa progetta, con i portici sul fronte del tempio, i piani simmetrici e le proporzioni armoniche, definendo un vocabolario che si diffuse ben oltre l'Italia. Il suo uso di sistemi modulari proporzionali ha permesso di trattare coerentemente la forma architettonica, la disposizione strutturale e l'organizzazione spaziale. Nel XVIII secolo dominava l'architettura inglese e in seguito influenzava profondamente l'edificio civico e domestico americano, da Monticello di Thomas Jefferson a innumerevoli cortigiani, piantagioni e edifici istituzionali.

Posizione nella Storia del Pensiero Strutturale Palladio occupa una posizione unica nella storia del ragionamento strutturale, ma non ha formulato una teoria della meccanica o analizzato esplicitamente le forze e le sollecitazioni, il suo lavoro dimostra come la forma architettonica possa incarnare principi razionali compatibili con la logica strutturale. I suoi edifici rivelano una comprensione intuitiva dei percorsi di carico, della simmetria e della chiarezza costruttiva, le qualità che in seguito l'analisi strutturale formalizza matematicamente.

La chiarezza, la razionalità e la sistematizzazione che caratterizzano il design palladico hanno fornito un ponte cruciale tra architettura classica e pensiero strutturale moderno. In questo senso, Palladio rappresenta un flusso parallelo alla meccanica precoce: una tradizione in cui geometria, proporzione e pratica costruttiva anticipavano il successivo trattamento analitico delle strutture. La sua influenza sulla forma architettonica ha fornito

COPIA DI REVISIONE

un quadro stabile all'interno del quale la scienza emergente della meccanica strutturale potrebbe successivamente operare.

15.2.2.3 Il riordino della Triade

Mentre Vitruvio coniò la sequenza latina *fermezza, utilizzazione, venustas*, sia Alberti che Palladio riordinarono i termini in italiano - *Sì.* (utility), *per la vita* (durata), *La mia vita* (bellezza). *La mia* (or *La mia vita*) si presenta l'ultima volta in entrambe le formulazioni implica che la bellezza può essere raggiunta solo con soddisfazione dei primi due requisiti– che la qualità estetica emerge da, piuttosto che essere imposta, l'adeguatezza funzionale e strutturale. §15.7.1.

As Wittkower, 1944 osservato del trattato di Alberti:

> Una delle principali tematiche della prefazione di Alberti è il servizio all'umanità dell'arte dell'architettura. La prefazione sostiene che l'architettura dovrebbe essere "della più grande convenienza per l'Umanità in tutti gli aspetti." Un edificio che non ha altra qualità di questa utilità pubblica e privata sarà un piacere di guardare. Un diverso tipo di bellezza è adatto per ogni edificio in conformità con la differenza di scopo; così Alberti aderì ripetutamente al principio popolare secondario
>
> Wittkower, 1944 «*Principles of Palladio's Architecture*»

In altre parole, ci sono state molte rivisitazioni delle virtù vitruviane (o triade) nel corso dei secoli da parte degli architetti rinascimentali più eminenti per noi per ignorarle a favore di qualsiasi definizione suppostamente nuova. (Wittkower, 1944).

15.2.2.4 Alberti e Palladio come Ingegneri

L'ingegnere strutturale può essere interessato a ciò che essenzialmente è la linea guida di Alberti per la produzione di cemento e successivamente mescolanze in *cemento*:

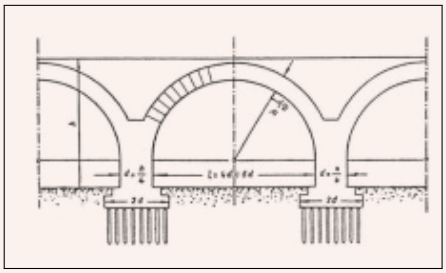
> ...Quello che è fresco scavato fuori dalla cava è migliore di quello che è stato tenuto a lungo; e quello che è stato un tempo cementato con malta non cementerà bene di nuovo una seconda volta. Per quanto riguarda il lime, condannano che quando viene dalla fornace non è in interi grumi, ma in pezzi rotti, e come era in polvere, e dicono che non sarà mai utile. Essi lo convengono che ciò che purifica e cresce bianco nel fuoco, che è leggero e sonoro, e quando lo abbevera, scoppia e butta fuori un forte fumo denso alto nell'aria. Il primo, essendo debole, deve naturalmente richiedere meno sabbia; ma quest'ultimo, essendo forte, richiede di più. Cato dirige, che ad ogni due piedi di lavoro, dovremmo permettere un bushel di calce e due di sabbia: altri prescrivono proporzioni diverse. Vitruvio e Plinio sono per mescolare la sabbia così; vale a dire dare ad ogni bushel di calce tre di sabbia di fossa, o due di fiume o mare-sabbia. Infine, quando la qualità e la natura della vostra pietra richiedono che il vostro mortaio sia più liquido o trattabile (che parleremo più chiaramente sotto) la vostra sabbia deve essere setacciata attraverso un setaccio; ma quando sarà più rigida, allora mescolarla con frammenti di pietra di ghiaia e spezzati. Tutto d'accordo, che se lo mescolate con un terzo di piastrelle rotte o in mattoni martellati, sarà molto più tenace. Tuttavia, mescolarlo come si farà, è necessario mescolarlo circa spesso, fino a quando i pezzi più piccoli sono incorporati; e alcuni, per questo scopo, e che può

COPIA DI REVISIONE

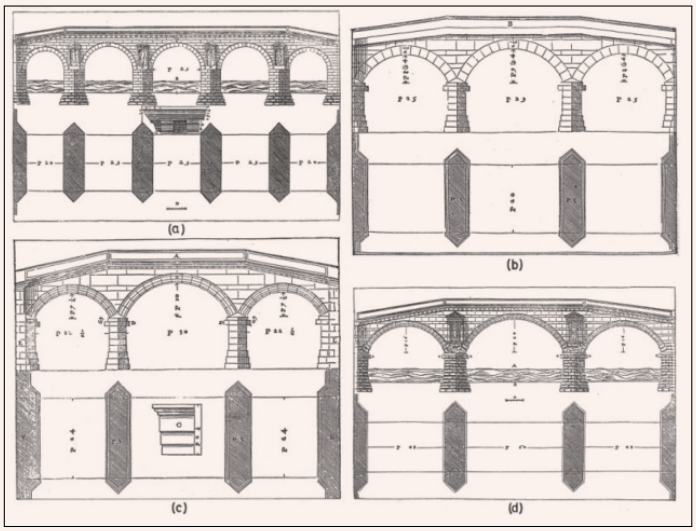
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

> essere ben mescolato insieme, mescolarlo e batterlo un grande mentre in un mortaio. Ma non diremo più qui del Cemento, solo così tanto, che la calce si impadroni meglio di pietra del suo genere, e soprattutto della stessa cava, che con uno sconosciuto.
>
> (Alberti, 1485)

Oltre ai materiali, Alberti ha fornito il primo trattamento sistematico del design del ponte nel Rinascimento. *De re aedificatoria* (Alberti, 1485) dedicando un'attenzione sostanziale ai ponti nei Libri Quattro e Otto, dando precise regole geometriche che influenzerebbero i costruttori di ponti per tre secoli (Huerta, 2018)Per i pier, Alberti prescrisse una larghezza pari ad un terzo della campa—una regola tracciabile alla pratica medievale, apparendo in un manoscritto del 1401 relativo al Ponte di Pietra di Zaragoza (Huerta, 2004)Per lo spessore dell'arco alla corona, non ha specificato più di un quindicesimo della campata: "In un grande ponte non dovrebbero più prendere più di un quindicesimo dell'apertura totale"' Ha anche dato una regola alternativa per gli archi di fronte di almeno un decimo della portata. Queste regole erano sufficientemente precise che una geometria del ponte completo poteva essere ricostruita da soli (Fig. 15.4a).



(a) Alberti's rules for arch bridge design, after Straub, 1952



(b) Ponti descritti da Palladio (1570): (a) Ponte Romano di Rimini; (b) Ponte medievale sul Rerone; (c) Ponte Palladio a Vicenza; (d) disegno per un nuovo ponte (Palladio, 1570)

Figura 15.4: Design del ponte rinascimentale: le regole geometriche di Alberti e gli esempi documentati di Palladio (Huerta, 2018)

Queste regole possono sembrare rozze rispetto alla complessità della progettazione e della costruzione del ponte reale, ma hanno servito come orientamento per il costruttore di padrone che possedeva il giudizio di applicare—e quando necessario, deviare da–allora. Huerta, 2018 osserva, la sezione di Alberti sui ponti occupa un quarto del suo libro

COPIA DI REVISIONE

Sei sui lavori pubblici, trattando ogni aspetto dalla selezione del sito alla costruzione di fondazioni ai materiali, il tutto intrecciato con esempi storici come il ponte di Giulio Cesare sul Danubio e il ponte di Re Menes a Memphis. Le regole erano conservatrici: ponti romani mostravano in genere rapporti di spessore-span tra 1/10 e 1/12, anche se strutture eccezionali raggiunto di gran lunga maggiore arcani. m span) raggiunto 1/17; il ponte romano Alcántara a Toledo (28.8 m) raggiunto 1/16 (Fernández Casado, 1980).

Il Palladio, caratteristicamente, non ha insegnato attraverso regole esplicite ma attraverso esempi misurati – un approccio pedagogico che ha incorporato proporzioni sicure all'interno di precedenti documentati. (Palladio, 1570) presenta quattro ponti con le loro dimensioni (Tabella 15.2): il ponte romano di Rimini, il ponte medievale sul Rerone, il suo ponte a Vicenza, e un progetto non realizzato. La progressione è istruttiva: dove la pratica romana e medievale ha tenuto a rapporti tra 1/10 e 1/12, il lavoro di Palladio ha abbinato il precedente medievale a 1/12, mentre il suo disegno speculativo spinto verso il 1/17——approssimando la snellezza delle strutture romane più audate e anticipando il ponte progressivo che caratterizzante che caratterizzano il ponte settecentesco.

Tabella 15.2: Produzioni di ponte a Palladio (1570), dopo Huerta, 2018

Ponte	Spessore/spaglia di arco
(a) Ponte Romano (Rimini)	1/10
(b) Ponte medievale (Rerone)	1/12
(c) Ponte del Palladio (Vicenza)	1/12
d) Il disegno di Palladio	1/17

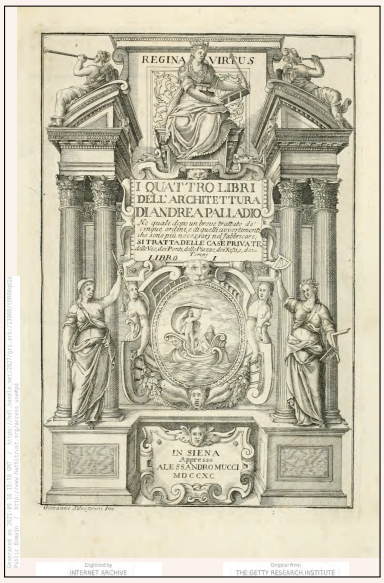
La tradizione Alberti-Palladio di regole proporzionali poggiava su una visione fondamentale: per le strutture murarie, la stabilità dipende dalla geometria piuttosto che dalla dimensione assoluta. Un arco che si trova ad una scala si reggerà su qualsiasi scala, purché siano mantenute le sue proporzioni, essenzialmente corretto per gli edifici, risulterebbe inadeguato per i ponti. Come Hubert Gautier ha riconosciuto per la prima volta nel 1716, i ponti devono sostenere il passaggio di carichi pesanti, e questo problema è intrinsecamente non proporzionale: per un carico dato, i ponti più piccoli sono "weaker'—più sensibili all'azione dei veicoli di passaggio. Un carrello che colpisce poco un grande ponte può sottolineare un piccolo gravemente. Questo riconoscimento avrebbe infine condotto Jean-Rodolphe Perronet, nel suo inedito memoriale del 1748, a proporre regole che quasi ha interrotto lo spessore prescritto da Alberti-Gautier per grandi campate–rule non derivate dalla meccanica teorica (che Perronet giudicava inadeguata alla complessità del problema) ma dallo studio sistematico di oltre duecento «In materia di costruzione», scrive Perronet, «la sola previsione non può prevalere sull'esperienza» (Huerta, 2018).

Ma gli interessi del Palladio si estendevano oltre gli archi murari. Il capitolo 8 del suo terzo libro è intitolato *Dì tre altre invenzioni secondo le quali si ponno fare i ponti di legno senza porre altrimenti pali nel fiume*–concernendo altre invenzioni che ci permettono di costruire

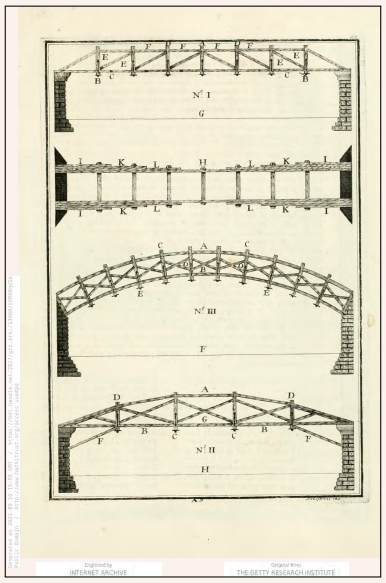
COPIA DI REVISIONE

ponti in legno senza mettere pier nel fiume. 15.5b, questa è stata tra le prime illustrazioni registrate di quella che è venuta a essere conosciuta come una tromba; infatti, una truss è una forma strutturale più sofisticata di un ponte ad arco: richiede non pietre pesanti ma mere componenti in legno, e anche se alcune delle forme mostrate sono non convenzionali dalla moderna comprensione strutturale (Fig. III nella targa originale), altri sono progetti perfettamente adeguati che anticipano gli sviluppi successivi.

Il famoso *Ponte dell'Accademia* a Venezia porta una spiccata somiglianza con il design del ponte arciere del Palladio (Fig. III nel piatto), anche se fu costruito nel 1854 e originariamente fatto di ferro; fu poi demolito e ricostruito in legno nel 1933. Forse solo coincidenza—o forse un testamento dell'influenza duratura dell'immaginazione strutturale del Palladio.



(a) Pagina di copertura



(b) Trusse



(c) *Ponte dell'Accademia* a Venezia

Figura 15.5: Palladio *Quattro libri di architettura* (Palladio, 1570 PDF)

Qui vediamo un esempio in cui l'architetto era l'innovatore della forma strutturale.[12] In seguito, in Italia, sarebbero stati ingegneri strutturali i cui disegni erano capolavori architettonici, come Pier Luigi Nervi *Palazzetto dello Sport*che esamineremo §19.2.12.

15.2.3 Antropometria e questione della scala

Le associazioni del corpo all'architettura e il complesso fenomeno della corporeità sono sempre state presenti nella cultura architettonica, dall'antichità al XX secolo, architetti e teorici hanno cercato di fondare la proporzione architettonica nelle misurazioni e nei

[12]Infatti, ai giorni nostri, gli studenti di architettura nelle università italiane prendono una moltitudine di corsi di analisi strutturale, e non solo un "introduttivo" come nella maggior parte degli altri paesi.

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

rapporti della forma umana– una pratica dettata *antropometria*. L'ipotesi sottostante era che le proporzioni derivate dal corpo umano possedevano un'armonia intrinseca che, quando applicata agli edifici, producessero risultati simili a quelli armoniosi—e che queste proporzioni potevano essere applicate a qualsiasi scala.

15.2.3.1 Vitruvio: Il testo Fondamentale

Vitruvibile ha fatto l'osservazione fondamentale che collega la proporzione umana all'architettura:

> Poiché il corpo umano è così progettato dalla natura che il volto, dal mento alla parte superiore della fronte e le radici più basse dei capelli, è una decima parte dell'altezza intera; la mano aperta dal polso alla punta del dito medio è proprio la stessa; la testa dal mento alla corona è un ottavo, e con il collo e la spalla dalla parte superiore del seno alle radici più basse dei capelli è un sesto; dal centro del seno alla sommità della corona è un quarto. Se prendiamo l'altezza del volto stesso, la distanza dal fondo del mento al lato inferiore delle narici è di un terzo di esso; il naso dal lato inferiore delle narici ad una linea tra le sopracciglia è lo stesso; da lì alle radici più basse dei capelli è anche un terzo, che comprende la fronte. La lunghezza del piede è un sesto dell'altezza del corpo; dell'avambraccio, un quarto; e l'ampiezza del seno è anche un quarto. Anche gli altri membri hanno le loro proporzioni simmetriche, e si è occupato loro che i famosi pittori e scultori dell'antichità raggiunsero un grande e infinito rinnovo.
>
> Allo stesso modo, nei membri di un tempio ci dovrebbe essere la più grande armonia nelle relazioni simmetriche delle diverse parti alla grandezza generale del tutto....
>
> Vitruvius, 1960 The Ten Books on Architecture, Book III, Chapter I

Per Vitruvio, il corpo umano ben formato esposto *Si tratta di una*—una commestibilezza di parti all'intero—che l'architettura dovrebbe emulare. L'ombelico, ha notato, segna il centro di un cerchio che circoscrive gli arti outstretched, mentre una piazza contiene la figura con le braccia estesa orizzontalmente: osservazioni che avrebbero affascinato artisti e architetti rinascimentali.

15.2.3.2 Trasmissione medievale

Uno dei primi tentativi medievali di codificare tali proporzioni è stato di Villard de Honnecourt (fl. c. 1225–1250), il cui portafoglio contiene disegni schematici che sovrappongono figure geometriche su forme umane e animali, Fig. 15.7a (De Honnecourt, 2006) (De Honnecourt, 1858)Questi schizzi, mentre grezzi secondo gli standard successivi, rappresentano uno sforzo per ridurre la forma organica alla geometria costruibile-una preoccupazione pratica per un massone che lavora in un'epoca in cui la conoscenza del design è stata trasmessa attraverso disegni e pratiche di laboratorio piuttosto che trattati stampati.

COPIA DI REVISIONE

15.2.3.3 Il risveglio rinascimentale

Il risveglio rinascimentale degli ideali vitruviani ha portato indagini più rigorose. Leon Battista Alberti (1404–1472), nel suo breve trattato *De Statua*[13] (Alberti e Tiraboschi, 1804), spostato oltre i rapporti proporzionali per sviluppare strumenti per la misura precisa e il trasferimento delle dimensioni corporee. *Esempie* stabilito un sistema di misura dividendo l'altezza umana in sei piedi (*piedi*), ogni piede in dieci pollici (*Unceolae*), e ogni pollice in dieci minim (*minuta*)—una suddivisione decimale che anticipa le riforme metrologiche successive. Più ingegnosamente, la sua or *Il mio sogno*Fico. 15.7b, consisteva in un disco di graduazione circolare con braccio rotante da cui discendeva una linea di plumb. Con esso, qualsiasi punto su un modello potrebbe essere registrato attraverso una combinazione di angolo polare e coordinate verticali, consentendo il trasferimento meccanico dal modello di argilla al blocco di marmo con precisione senza precedenti.

Francesco di Giorgio Martini (1439-1501), architetto e ingegnere al Duca di Urbino, pensiero antropometrico esteso più direttamente all'architettura. *Trattati di architettura, ingegneria e arte militare* (Giorgio Martini, ca. 1480), produsse notevoli disegni che sovrapponevano la figura umana ai piani della chiesa, alle piantagioni della fortezza e ai profili delle colonne; per Francesco la corrispondenza non era semplicemente metaforica: la navata divenne il torso, i transettori delle braccia, l'abside la testa.

Leonardo da Vinci celebrato *Uomo Vitruvico* (c. 1490), Fig. 15.7c, rappresenta la sintesi rinascimentale più raffinata del testo vitruviano.[14] L'innovazione di Leonardo si colloca nella sua risoluzione di un puzzle geometrico implicito in Vitruvio: come può essere inscritta la stessa figura sia in cerchio che in quadrato? Regolando leggermente la posizione degli arti e spostando il centro del cerchio all'ombelico mentre la piazza si basa ai piedi, Leonardo ha dimostrato che entrambe le costruzioni potrebbero coesistere – il cerchio che rappresenta la geometria cosmica o divina, la piazza terrestre e costruttiva.

Queste indagini rinascimentali non erano solo esercizi artistici, ma la convinzione che le proporzioni umane riflettessero un ordine divino o naturale forniva una giustificazione teorica per le regole architettoniche. prescritti rapporti specifici per dimensioni delle camere o spaziatura delle colonne, appellavano implicitamente a questa fondazione antropometrica: edifici proporzionati come il corpo umano possedevano la stessa armonia intrinseca.

15.2.3.4 Il Novecento: Modulor & Charles-Édouard Jeanneret Le Corbusier (1887-1965)

Charles-Édouard Jeanneret nasce nel 1887 a La Chaux-de-Fonds, in Svizzera, città a forma di orologeria e cultura dell'artigianato di precisione. Inizialmente è stato formato come incisore e artista decorativo presso la scuola d'arte locale, dove è venuto sotto l'influenza di Charles L'Eplattenier, che lo ha reindirizzato verso l'architettura e incoraggiava l'osservazione

[13] Tra i suoi altri contributi notevoli figurano *De Pictura* (pubblicato con *De Statua*), 1435, e *De Re Aedificatoria*, 1452— il primo trattato architettonico del Rinascimento.

[14] Contrariamente alla credenza popolare, questo disegno non ha nulla a che fare con il rapporto d'oro; Leonardo stava illustrando le specifiche affermazioni proporzionali di Vitruvio.

COPIA DI REVISIONE

sistematica della struttura e della forma.[15] Nel 1917 si stabilì definitivamente a Parigi e adottò il nome Le Corbusier, segnando una rottura decisiva con la tradizione accademica.

Fu l'architetto più influente del XX secolo e un polemico i cui scritti formarono il discorso architettonico come profondamente come le sue città di costruzione.[16] Il suo manifesto *Verso una nuova architettura* (Le Corbusier, 1931) pubblicato nel 1923, introdusse il concetto provocatorio[17] dell'edificio come una "macchina per vivere"—una formulazione che cristallizzò il funzionalista l'ordine del giorno del movimento moderno e ha chiesto che l'architettura abbraccia la chiarezza razionale dell'ingegneria.

Il libro è un collage di saggi, fotografie e polemiche, che mettono in scena immagini di silos di grano, automobili e liner oceanici con l'architettura del Partenone e romana. Le Corbusier ha sostenuto che gli ingegneri, lavorando dal calcolo e dall'economia, avevano raggiunto un'armonia e bellezza che gli architetti contemporanei, mire nello storico accademico, non potevano corrispondere.

Le Corbusier's "Five Points of a New Architecture" (*Les cinq points d'une architecture nouvelle*) (Corbusier e Jeanneret, 1929), formulato nel 1927, stabilirono i principi fondamentali del design modernista:

1) **Piloti** — colonne in cemento armato che sostituiscono pareti portanti e elevano l'edificio dal terreno, liberando il livello di terra per la circolazione e creando una nuova estetica basata sulla chiarezza strutturale;
2) **Piano libero** —la separazione della struttura da pareti permette un allestimento interno flessibile, con spazi divisi da schermi mobili piuttosto che da partizioni fisse;
3) **Façade libera** —progettando pavimenti oltre i pilastri di sostegno come balconi, la facciata perde la sua funzione strutturale e le finestre possono estendersi a qualsiasi lunghezza senza relazione con le divisioni interne;
4) **Finestre orizzontali** —finestre a betonnellata che forniscono otto volte un'illuminazione più forte rispetto alle aperture verticali equivalenti, creando viste panoramiche e sottolineando la geometria lineare dell'edificio;
5) **Giardino del tetto** —i tetti piatti trasformati in terrazze piantate che restaurano lo spazio verde perduto alla costruzione, fornendo isolamento e aree di vita all'aper-

[15] Prima di adottare lo pseudonimo Le Corbusier, i giovani Jeanneret lavorò nell'atelier di Parigi di Auguste Perret (1908-1910), da cui assorbiva e reagì successivamente contro la dottrina dell'onestà strutturale in cemento armato. §15.4.5.

[16] Nel 1927, lui e suo cugino Pierre Jeanneret presentarono un design innovativo per la competizione di League of Nations Palace a Ginevra, che fu squalificata sulla tecnica che i disegni erano stampati a mano piuttosto che inchiostro in India come le regole di concorrenza richieste. La decisione fu ampiamente vista come pretesto dai membri della giuria conservatrice di escludere un design radicalmente moderno che si ruppe con le nozioni tradizionali di un "palace'.

[17] Le associazioni politiche di Le Corbusier sono state ampiamente discusse dagli studiosi, mentre cercava commissioni da leader autoritari, tra cui Mussolini e brevemente lavorarono con Vichy France (1940-41), la maggior parte degli storici concludeva di essere un tecnocrato opportunistico piuttosto che ideologicamente fascista. Fishman, 1982*Utopie urbane nel Novecento* (1977).

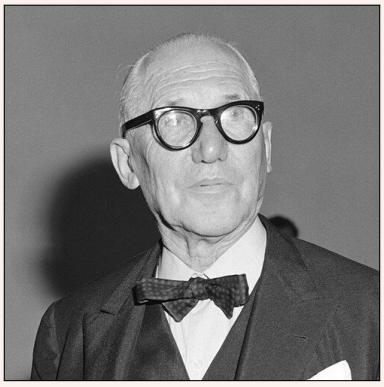
© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

to.Questi principi, esemplificati in Villa Savoye (1929–1931), hanno creato ciò che Le Corbusier ha chiamato "a macchina per vivere in'-architettura che ha abbracciato la logica industriale e materiali moderni per rimodellare fondamentalmente il design spaziale.

Le sue opere costruite, tra cui l'Unità d'abitazione[18] (Cité de l'architecture & du patrimoine, 2015) (Fig. 15.6a), la cappella a Ronchamp (Fig. 15.6c), e gli edifici di Chandigarh—dimostrano l'evoluzione del suo pensiero dal razionalismo purista all'espressionismo scultoreo, ma tutti condividono un impegno per la chiarezza strutturale e l'espressione onesta dei materiali. L'integrazione di Le Corbusier dell'efficienza strutturale e dell'estetica architettonica, la sua insistenza che la bellezza emerge dal design razionale piuttosto che dalla decorazione applicata, e il suo abbraccio di nuovi materiali e metodi di costruzione stabilirono paradigmi che continuano a modellare la pratica architettonica.



(a) Unità d'abitare



(b) Charles-Édouard nel 1964



(c) Cappella Notre-Dame-du-Haut

Figura 15.6: Charles-Édouard Jeanneret Le Corbusier

Il sistema Modulor La tradizione della proporzione architettonica continuò a trasformarsi in un'atmosfera del XX secolo con Le Corbusier *Modulo* (1948, revisionato 1955), Fig. 15.7d (Corbusier, 1954; Corbusier, 1955). Sviluppato durante la seconda guerra mondiale e raffinato negli anni successivi, questo sistema proporzionale è stato un tentativo esplicito di creare una scala universale che collega la fisiologia umana alle dimensioni architettoniche e strutturali.Mentre spesso criticava le sue ipotesi normative e la sua limitata adattabilità, il Modulor rappresentava un serio tentativo di porre a terra la proporzione architettonica in principi misurabili, quasi ingegneristici, piuttosto che le regole estetiche storiche precedenti o arbitrarie, riflettendo l'ambizione duratura di Le Corbusier di conciliare la scala umana con la razionalità industriale.

[18] L'Unità d'Habitation de Marseille (1947-1952), conosciuta anche come il Cité Radieuse, è stata la prima e più famosa realizzazione del suo concetto per le comunità residenziali verticali. L'edificio 337-appartamento su pilotis, con la sua via interna dello shopping, strutture sul tetto e l'applicazione del modulor proporzionale sistema, è diventato il prototipo per quattro ulteriori Unités d'Habitation costruiti a Nantes-Rezéen

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

Le Corbusier lo definiva come segue:

> Il 'Modulor' è una misura basata sulla matematica e sulla scala umana: è costituito da una doppia serie di numeri, la serie rossa e il blu.
>
> Corbusier, 1954 The modulor: a harmonious measure to the human scale universally applicable to architecture and mechanics, p. 60

Il sistema di Le Corbusier ha avuto inizio con una altezza umana standard di 1.83 m (sei piedi), scelto in parte per conciliare misurazioni metriche e imperiali–un'ambizione che perseguì con notevole tenacia. Da questa altezza furono stabiliti i punti chiave: il plesso solare a 1.13 m, la parte superiore del braccio sollevato a 2.26 m (doppia l'altezza del plesso solare) Come scrisse, tutte le misure "originate in una singola fonte, la misura 113, il plesso solare di un uomo alto sei piedi"" (Corbusier, 1954)Queste dimensioni sono state poi elaborate attraverso due serie interlocking Fibonacci-based —la serie "red" e "serie blu"—ogni termine approssimativamente in rapporto d'oro ai suoi vicini.

La serie rossa, basata sull'altezza del plesso solare (1.13 m), generato:

$$\ldots, 27, 43, 70, 113, 183, 296, \ldots \text{ cm}$$

La serie blu, basata sul doppio dell'altezza del plesso solare (2.26 m), prodotto:

$$\ldots, 33, 53, 86, 140, 226, 366, \ldots \text{ cm}$$

Insieme, queste serie hanno fornito una gamma di dimensioni che Le Corbusier ha impiegato nei suoi edifici post-bellici, in particolare l'unitàé d'Habitation a Marsiglia (1947-1952), dove quasi ogni dimensione—larghezza di appartamento, altezze del soffitto, spaziatura di brise-soleil— derivata dai valori Modulor.

Le Corbusier ha esplicitamente posizionato il suo lavoro come una partenza dalla tradizione vitruviana statica:

> Leonardo e i suoi contemporanei–pensando di Vitruvio—-avevano mostrato le proporzioni dell'uomo ponendo il suo corpo, con braccia aperte, all'interno di un cerchio.Questo è l'uomo statico, corrispondente ad un'architettura statica.... [Le Corbusier] Esemplifica il suo sistema da un uomo-con-armato-upraizzato, cioè l'uomo dinamico, corrispondente ad un'architettura dinamica.
>
> Corbusier, 1954 The modulor: a harmonious measure to the human scale universally applicable to architecture and mechanics, p. 75

Dove Vitruvio e Leonardo raffiguravano l'uomo a riposo, le braccia in equilibrio passivo, la figura di Le Corbusier raggiunge verso l'alto— un gesto attivo che stabilisce la dimensione verticale dello spazio abitabile.

Il Modulor ha attirato ammirazione e critica. Albert Einstein, mostrava il sistema a Princeton nel 1946, offrì una valutazione che Le Corbusier avrebbe citato per il resto della sua vita:

COPIA DI REVISIONE

> In una lettera scritta a me la stessa sera, Einstein aveva la gentilezza di dire questo del 'Modulor': *È una scala di proporzioni che rende il male difficile e il bene facile.*
>
> Corbusier, 1954 The modulor: a harmonious measure to the human scale universally applicable to architecture and mechanics, p. 58

Le Corbusier considerava questa una validazione dalla scienza, anche se i critici osservavano che il sistema era calibrato su un corpo maschile idealizzato e produceva spazi che potessero sentirsi angusti per individui più alti.

15.2.3.5 Dalla Proporzione all'Ergonomia

Il Modulor rappresenta l'ultimo tentativo di porre a terra la proporzione architettonica in principi antropometrici. *Bauentwurfslehre* (Dati degli architetti, 1936) (Neufert, 1970) e di Henry Dreyfuss *La misura dell'uomo* (1960) (Dreyfuss, 1960)—-spostato da armonia proporzionale alla funzionalità ergonomica: la preoccupazione non è diventata un ordine cosmico ma pratica, accomunati dalla gamma delle dimensioni del corpo umano nella progettazione di mobili, attrezzature e spazi vuoti.

15.2.3.6 L'Assunzione Nascosta: Indipendenza della Scala

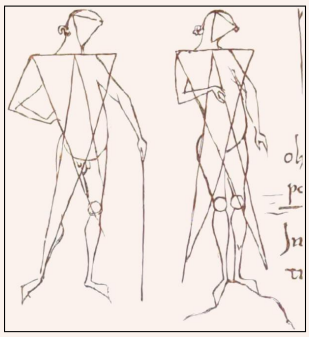
In tutta questa tradizione bimillenaria, da Vitruvio a Le Corbusier, la proporzione antropometrica portava un'implicita ipotesi: che i rapporti derivati dal corpo umano potessero essere applicati in qualsiasi misura. Un tempio potrebbe usare le stesse proporzioni di un piccolo santuario; una cattedrale potrebbe essere semplicemente una grande cappella. §15.2.1, la pietra è così leggermente sottolineata che la geometria, non la forza, governa il design.

Ma questa supposizione ha dei limiti, come dimostra Galileo nella sua *Discorsi* (discusso) §15.2.1), una struttura non può essere semplicemente ridimensionata indefinitamente mantenendo le sue proporzioni. Il rapporto tra area trasversale e volume cambia con scala: raddoppia le dimensioni lineari e la zona aumenta quattro volte mentre il volume (e quindi il peso) aumenta otto volte. Le stringhe aumentano, e alla fine il materiale fallisce. Ecco perché gli elefanti hanno gambe proporzionalmente più spesse dei topi, e perché le cattedrali gotiche, nonostante le loro ambizioni soaring, non possono superare limiti pratici che non possono raggiungere limiti.

La tradizione antropometrica rappresenta quindi un notevole successo intellettuale–ma uno legato alle realtà fisiche che Galileo ha articolato per la prima volta e che l'analisi strutturale moderna ha reso precisa.

COPIA DI REVISIONE

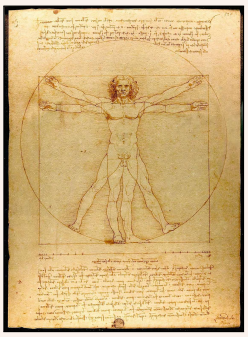
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



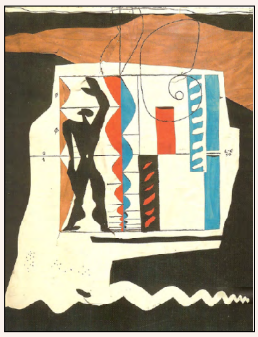
(a) Villard de Honnecourt, ca. 1240 (De Honnecourt, 1858)



(b) Alberti's *Definizione* (Alberti e Tiraboschi, 1804)



(c) Leonardo's *Vitruvian Man*, c. 1490



(d) Le Corbusier's *Modulo* (Corbusier, 1954)

Figura 15.7: Sistemi antropometrici di proporzione: dalla geometria medievale all'umanesimo rinascimentale al modernismo del XX secolo

15.2.3.7 Geometria Operativa: Come i costruttori di Master hanno effettivamente attraversato i loro edifici

La tradizione antropometrica sopra esaminata descrive come gli architetti *pensiero* una questione complementare—come i costruttori di master *applicato* Questi principi sul sito dell'edificio—rivela una pratica altrettanto ricca e sorprendentemente sistematica. (Oikonomou, 2022) ha ricostruito la geometria operativa impiegata dall'antico Egitto attraverso il XVIII secolo, dimostrando che due metodi costruttivi distinti sono stati costantemente utilizzati in diverse culture e millenni.

Il primo metodo, *ad un quadratum*, si basa sulla rotazione di quadrati inscritti all'interno di un cerchio. Un quadrato inscritto in un cerchio, poi ruotato 45°, produce un secondo quadrato il cui lato porta un rapporto di $1 : \sqrt{2}$ al primo—un rapporto irrazionale che tuttavia emerge naturalmente da un'operazione geometrica puramente pratica. *ad un triangulum*, iscrive triangoli equilateri all'interno di un cerchio governante, producendo rapporti di altezza-larghezza regolati da $\sqrt{3}$Queste due operazioni—facilmente eseguite con bussola e corda su qualsiasi scala–generarono le principali relazioni proporzionali trovate nelle strutture storiche dalle piramidi egiziane alle cattedrali gotiche. 15.8 illustra entrambi i metodi applicati al piano di una chiesa triconca bizantina; il cerchio di base ha un diametro di esattamente 20 piedi bizantini[19]; tutti gli elementi strutturali derivano dall'intersezione di due quadrati ruotati incisi all'interno di esso.

[19]Il piede bizantino era un'unità di lunghezza utilizzata in tutto l'Impero bizantino, derivata dal romano - *No.*. Il suo valore è generalmente preso per essere circa 0.312 m (31.2 cm). Nell'analisi architettonica appare spesso come il modulo sottostante da cui sono state generate costruzioni geometriche (quadrati, triangoli, cerchi) che illustrano la coesistenza storica di un'unità di misura razionale con rapporti geometrici come $\sqrt{2}$ or $\sqrt{3}$.

COPIA DI REVISIONE

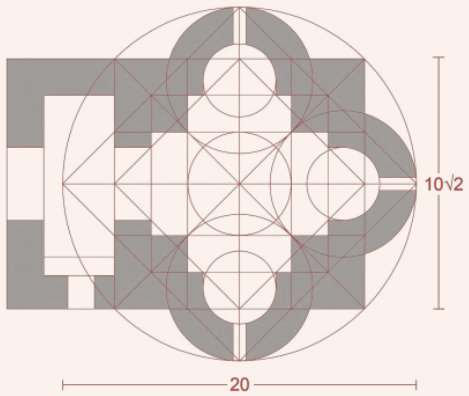


Figura 15.8: Piano di Panagia Koumbelidiki (Kastoria, 10° sec.) con *ad un quadratum* tracciamento (Oikonomou, 2022)

Il ruolo delle triangoli pitagoree Accanto a questi metodi basati su cerchio, i costruttori di padrone si affidarono a una seconda famiglia di strumenti: corde nodate che formano triangoli retti di Pythagorean. Il triangolo 3-4-5, il cui angolo destro non richiede strumenti diversi da tre lunghezze di corda, è stato utilizzato durante l'antichità e il Medioevo per stabilire perpendicolarità e per controllare il tracciamento rettangolare dei perimetri di costruzione. i triangoli 5–12–13, 8–15–17, e 12-35-37 erano altrettanto noti, ogni offrendo diversi rapporti di aspetto adatti a particolari tipi di costruzione. Le corporazioni di Stonemasons trasmettevano questa conoscenza attraverso la pratica piuttosto che il testo, che in parte spiega perché questi metodi costruttivi erano in gran parte invisibili alla tradizione del trattato architettonico–Vitruvio, Alberti e Palladio scrisse circa la proporzione; la conoscenza operativa di come raggiungerla sul terreno era tenuta da coloro che costruirono.

Da circoli a cattedrali I due sistemi...*ad un quadratum* e *ad un triangulum*—non erano concorrenti ma complementi. I costruttori di maestri gotici impiegavano entrambe le sequenze razionali (come 1:2:4:2:1 per larghezze di baia) e irrazionali ($\sqrt{2}$ dalla diagonale del quadrato, $\sqrt{3}$ dal triangolo equilatero) contemporaneamente, accettando che figure modulari e geometriche non potevano essere perfettamente riconciliate; come osservava Giovanni Giacomo dei massoni di Chartres, essi "deliberatamente scelsero di usare entrambi, e poi accettarono la lotta necessaria per riunirli" (James, 1982, p. 98). La sezione di Notre-Dame de Paris (fondata 1163) illustra le *ad un triangulum* metodo chiaramente: un unico triangolo equilatero, che si distingue dalla larghezza totale della navata e delle navate, definisce l'altezza totale dell'interno e, quando diviso per tre, individua la base del triforio, come mostrato in Fig. 15.9 dove un unico triangolo equilatero, posto dalla larghezza interna completa, definisce l'altezza totale; suddivisione da tre individua la base triforium.

Sistemi modulari e standard metrici I metodi geometrici operati in concerto con gli standard metrologici. Antichi templi greci sono stati progettati su griglie modulari espresse

COPIA DI REVISIONE

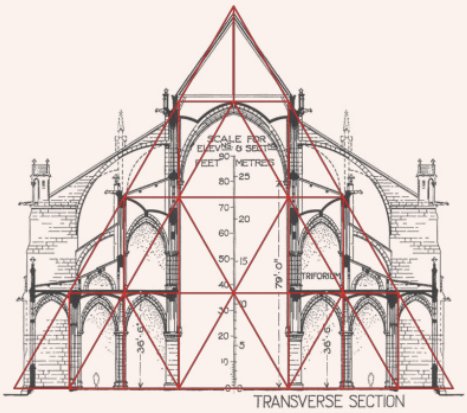


Figura 15.9: Sezione di Notre-Dame de Paris con *ad un triangulum* tracciamento (Oikonomou, 2022)

in piedi attici (30.85 cm); le chiese bizantine usavano il piede bizantino (31.2 cm) o spithami (23,4 cm); cattedrali gotiche impiegavano le *pied de roi*[20] o il braccio locale. Lo stililobate del Partenone poggia su una griglia di 25 × 25 Piedi soffici, mentre la sua navata (sekos) esibisce una proporzione 5:12 corrispondente direttamente al triangolo pitagoreo 5–12-13 (Oikonomou, 2022)Ciò che appare come pura armonia geometrica nell'edificio finito è stato generato dall'interazione di un'unità locale di misura, un triangolo pitagoreo, e una griglia modulare–un sistema pratico come era elegante, come illustrato nella figura. 15.10 dove la proporzione 5:12 del sekos e la sua corrispondenza al triangolo di Pitagoreo 5–12-13, sovrapposti su un 25 × 25 Griglia modulare a piedi mansardati.

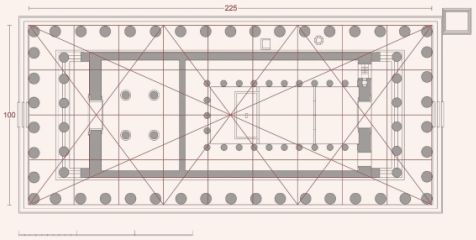


Figura 15.10: Analisi del piano non (Oikonomou, 2022)

Per riferimento, Tabella 15.3 raccoglie le unità principali di lunghezza impiegato in varie culture e periodi, espresso in termini di misura per il confronto.

[20] Il *pied de roi* ('king's foot') era il francese standard unità di lunghezza prima dell'adozione del sistema metrico. Il suo valore era circa 0.32484 m ed era suddiviso in 12 *pouces* (pollici), ciascuno diviso in 12 *I titoli*. Molti architetti francesi e le opere di ingegneria sono state dimensionate utilizzando questo modulo.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 15.3: Unità storiche di misura della lunghezza e del pendio utilizzate nell'architettura e costruzione

Unità	Civiltà / Periodo	Contesto di utilizzo	Equivalente metrico
		Egiziano egiziano	
(Animali)*db*)	Antico Egitto	La suddivisione standard più piccola	18.75 mm
Palm (Polonia)*šsp*)	Antico Egitto	4 cifre; modulo proporzionale di base	75 mm
cubito ordinario (*mh*)	Antico Egitto	6 palme; costruzione quotidiana	450 mm
Cuscino reale ()	Antico Egitto	7 palme; costruzione monumentale	525 mm
Rod (Sottovoce)*h3y*)	Antico Egitto	10 cubiti reali; sondaggi terrestri	5.25 m
Segreto†	Antico Egitto	Piramide pendio: palme per aumento di cubiti reali	dimensione
		Mesopotamian	
Cubit (Cabit))	Babilonia / Sumer	Modulo di lunghezza standard	500 mm
		Mesoamericano	
Tlacxitli	Azteca	Modulo base corporea	≈ 1.00 m
Tlalcuahuit	Azteca	Asta di terra; unità di rilevamento standard	≈ 2.50 m
		greco	
Piede a soffietto	Grecia antica	Griglia di pianificazione del tempio	308.5 mm
		Bizantino	
Piede bizantina	Impero bizantino	Chiesa e costruzione civile	312 mm
Spithami	Impero bizantino	Span (dalla punta al dito)	234 mm
		Italiano — Braccio per città (preunificazione, prima del 1861)	
Braccio (Firenze)	Toscana, 13-18.	Misura architettonica e di stoffa; 2 palma	583 mm
Braccio (Venezia, da seta)	Repubblica di Venezia	Commercio marittimo e seta	639 mm
Braccio (Venezia, da panno)	Repubblica di Venezia	Misura del clo	595 mm
Braccio (Milano)	Ducato / Regno di Lombardia	Costruzione generale e panno	595 mm
Braccio (Roma)	Stati membri	Misura architettonica (*da fabbricare*)	634 mm

Continuare nella pagina successiva

COPIA DI REVISIONE

Libro I: Una breve storia della meccanica e dell'analisi strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 15.3 — *continuato dalla pagina precedente*

Unità	Civiltà / Periodo	Contesto di utilizzo	Equivalente metrico
Braccio (Napoli)	Regno di due sicilie	Misura del cloto; ≈2.67 palma	700 mm
Braccio (Bologna)	Stati Pontifici / Emilia	Misura generale	640 mm
Braccio (Torino / Piemonte)	Regno di Sardegna	Costruzione generale; 2 *Condividi su Twitter*	683 mm
Braccio (Genova)	Repubblica di Genova	Misura commerciale e di costruzione	595 mm
Braccio (Verona)	Lombardia - Italia	Costruzione e stoffa	642 mm
Braccio (Mantua)	Lombardia - Italia	Standard di costruzione locale	467 mm
Braccio (Cremona, da fabbrica)	Lombardia	Produzione e costruzione	483 mm
		Medievale e rinascimentale (altro)	
Pied de roi	Francia, pre-metrica	Piede francese standard; opere architettoniche e ingegneristiche	324.84 mm
		Ottomano	
Arşin	Impero ottomano	Modulo di costruzione; tracing bagno-house	757.7 mm

† Il *seghe* non è una lunghezza ma una misura di pendenza: numero di palme orizzontali per un cubito reale di aumento verticale, equivalente al moderno cotangent dell'angolo di faccia. La Grande Piramide di Giza ha una seda di $5\frac{1}{2}$ (i.e. 5 palme e 2 cifre), corrispondenti ad un angolo di faccia di 51.84.

Nota: i valori del Braccio sono pre-1861 standard tradizionali. il braccio è stato aumentato $\frac{17}{16}$ (6.25%) per legge 2 Luglio 1782; valore precedente (storico) del 583 Qui si cita il valore napoletano. rivisto in su ≈ 0.33% dopo il 1840.

La notevole variazione nella *braccio*, Tabella 15.4 attraverso la preunificazione Italia—da 467 mm a Mantova a 700 mm a Napoli, un rapporto di quasi 3:2—non è stato un incidente imprecisione ma espressione deliberata della sovranità. Ogni Stato italiano gelosamente mantengono i propri standard di pesi e misure, dal momento che il controllo sulla misurazione era inseparabile dal controllo del commercio, della tassazione e dei contratti di costruzione. Standardizzare il *braccio* di conseguenza uno degli atti politici espliciti del Risorgimento: la Legge del 28 luglio 1861, imponendo il sistema metrico in tutto il il nuovo Regno unificato d'Italia, era tanto una dichiarazione di sovranità nazionale come una riforma pratica.*da seta* (639 mm) per la seta commercio e *da Panno* (595 mm) per panno–illustrare un ulteriore strato di complessità: anche all'interno di un unico stato della città, le corporazioni rivali mantennero norme distinte per le diverse materie prime.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 15.4: Il *braccio* in preunificazione Stati italiani

Città	Entità politica	Casa regnante / Autorità	Valore
Firenze Firenze	Granducato di Toscana	Medici; Asburgo-Lorena dopo il 1737	583 mm
Venezia	Repubblica di Venezia	Serenissima (indipendente fino al 1797)	595–639 mm
Milano	Ducato / Regno di Lombardia	Spagnolo, poi Austriaco Asburgo	595 mm
Roma	Stati membri	Santa Sede	634 mm
Napoli	Regno delle Due Sicilie	Monarchia di Borbone	700 mm
Bologna	Stati Pontifici (Legazione di Bologna)	Santa Sede (semi-autonomo)	640 mm
Torino	Regno di Sardegna	Casa di Savoia	683 mm
Genova	Repubblica di Genova	Serenissima (indipendente fino al 1797)	595 mm
Verona	Repubblica di Venezia → Lombardia - Italia	Veneziano, poi austriaco dopo il 1797	642 mm
Mantova	Ducato di Mantova → Lombardia - Italia	Gonzaga, poi Austriaco Asburgo	467 mm
Cremona	Ducato di Milano → Lombardia - Italia	Spagnolo, poi Austriaco Asburgo	483 mm

Nota: Venezia mantenne due braccia distinte contemporaneamente—il *braccio da seta* (639 mm) per il commercio della seta e *braccio da panno* (595 mm) per il panno generale-riflettere la gilda-livello piuttosto che semplicemente a livello statale controllo sugli standard di misura. Tutti i valori sono pre-1861 standard tradizionali; il sistema metrico è stato imposto in tutta l'Italia unificata dalla Legge 28 Luglio 1861.

Proseguimento dall'antichità al periodo ottomano Questa tradizione operativa mostra una notevole continuità. Gli stessi strumenti di base—corde nocitate, bob idraulici, la piazza rotante, e il triangolo inscritto—appare nella costruzione egiziana ca. 2500 BC, la pianificazione della chiesa bizantina del X secolo, e l'architettura domestica ottomana del XVIII secolo (Oikonomou, 2022). costruttori ottomani lavorato a un *A.* griglie (75.77 cm), tracciando perimetri da bagno con triangoli scalati 3-4-5 e determinando layout interni ottagonali attraverso *ad un quadratum* operazioni—la stessa logica geometrica che aveva organizzato chiese triconche bizantine un millennio prima. Quando il carpentiere dall'Albania ha riferito che l'altezza del tetto è stata ottenuta da "una corda semplice, fino a un quarto della larghezza della casa,' stava descrivendo una pratica la cui discendenza si è allungata di nuovo alle arpedonauts della valle del Nile. 15.11 mostra come questo kit di strumenti geometrici è stato applicato a un bagno ottomano nella Grecia settentrionale. *A.* griglia e 3-4-5 triangolo pitagoreo tracciamento. Il perimetro è impostato su un 4×3 *A.* griglia; l'interno ottagonale deriva da un *ad un quadratum* operazione.

Questa geometria operativa è il substrato pratico sotto l'edificio teorico di Vitruvio, Alberti e Palladio. *Cosa?* proporzione per raggiungere; i costruttori di padrone sapevano *come* per raggiungerlo, attraverso un kit di strumenti di operazioni geometriche che non lasciavano alcuna registrazione scritta ma plasmavano ogni struttura importante del mondo occidentale.

COPIA DI REVISIONE

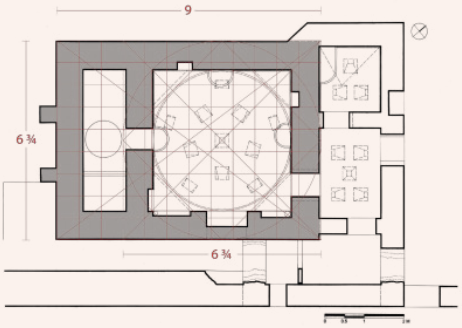


Figura 15.11: Bagno ottomano a Florina (18° c.) Redrawn dopo Oikonomou, 2022

15.3 Interludio: Architetti e Ingegneri — Arte e Scienza?

Trascorre dalle sezioni precedenti che i ruoli di architetto, costruttore, muratore e ingegnere non erano sempre distinti. Fino alla metà del diciassettesimo secolo, queste funzioni risiedevano in una singola figura: il maestro costruttore. I costruttori si affidavano prima alla prova e all'errore—-che è dire, su fallimenti—e poi su regole euristicamente derivate di pollice e leggi di proporzione tramandate attraverso le generazioni.[21]

Questa unità storica è ben catturata dal critico architettonico Ada Louise Huxtable:

> La natura dell'architettura è stata discussa da secoli: sia che si tratti di arte o di struttura, estetica o ingegneria, o, se una combinazione di entrambi, in quale proporzione— è una sfida costante e un argomento di dibattito continuo.
>
> Anche se le domande stesse sono senza tempo, la confusione su di esse è in realtà di origine relativamente recente. A Roma, il ruolo dell'architetto incomprensibilmente ha abbracciato tutte le attività dell'ingegnere. Vitruvio, nel suo lavoro *Sull'architettura*, scritto tra 25 e 23 B.C., ha osservato che le responsabilità dell'architetto includevano la costruzione, la meccanica e—non meno delle arti meccaniche del suo tempo—clock facendo, con una speciale ammonizione che l'edificio deve tenere pari conto della forza (struttura), utilità (funzione), e la grazia (art).
>
> I documenti di ufficio di Villard de Honnecourt, nel 1235, chiariscono che il "mastro costruttore" del periodo medievale era ancora architetto e ingegnere, e dal trattato architettonico definitivo di Leon Battista Alberti del 1451-52, apprendiamo che il Rinascimento non ha portato alcuna divisione del lavoro. L'uomo rinascimentale, infatti, considerava tutta l'arte la sua provincia e tutta l'ingegneria una parte dell'arte.
>
> (Huxtable, 2017, p. 11)

La separazione avvenne nel Settecento, guidata dall'emergere di meccanica razionale e dall'istituzionalizzazione dell'educazione tecnica. *École des Ponts et Chaussées* (1747)

[21] Possiamo meravigliarci oggi di vecchie strutture sopravvissute, ma non dobbiamo mai dimenticare che costituiscono una porzione infinitasimale di quelle costruite, e sono quasi tutti sovra-disegnati da standard moderni.

COPIA DI REVISIONE

e più tardi *École Polytechnique* (1794) crea una nuova figura: la *In questo caso*, formato in matematica e meccanica, distinta dal *architetto* addestrato al *École des Beaux-Arts* In Gran Bretagna, l'auto-designazione di John Smeaton come "ingegnere civile" (1768) e la fondazione dell'istituzione degli ingegneri civili (1818) formalizzarono la stessa divisione. Il sistema universitario tedesco del XIX secolo, sottolineando la pura ricerca insieme all'insegnamento, professionalizzando ulteriormente entrambe le discipline (Graham e Diamond, 2004).

Da quel momento in poi, il potenziale di collisione tra architettura e ingegneria divenne reale. Pier Luigi Nervi, riflettendo sulla propria formazione, descrisse il divario con la caratteristica direttività:

> Quando ho studiato all'eccellente Scuola di Ingegneria Civile di Bologna, la parola architettura si riferisce solo allo studio delle facciate e dei loro dettagli. Non è mai venuto a conoscenza dei nostri professori, o anche a noi, che un ponte, una struttura portante, un piano urbano, potrebbe anche essere opere di architettura.... Strutture in cemento armato o divisione di ferro, nonostante gli esempi già esistenti di grandi ponti, della torre Eiffel, sono stati considerati feats tecnici sviluppati in campi che non avevano nulla da fare.
>
> (Huxtable, 2017, p. 21)

Ironia della sorte, è stato un grande architetto che ha dato molta fiducia al ruolo creativo degli ingegneri. *Vers une architettura* (1923), scrisse, Fig. 15.12a:

> L'Estetica dell'Ingegnere e l'Architettura sono due cose che marciano insieme e ne seguono uno dall'altro: quello che ora è alla sua altezza, l'altro in uno stato infelice di retrocessità.
>
> L'Ingegnere, ispirato alla legge dell'Economia e governato da calcoli matematici, ci mette in accordo con il diritto universale, raggiunge l'armonia.
>
> L'Architetto, con la sua disposizione delle forme, realizza un ordine che è una pura creazione del suo spirito; per forme e forme colpisce i nostri sensi in misura acuta e provoca emozioni plastiche.
>
> (Le Corbusier, 1931)

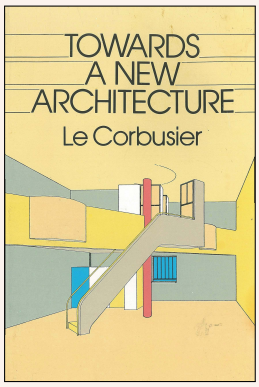
La visione di Le Corbusier *ingénieur-architecte*–capitato nel suo famoso pittogramma (Fig. 15.12b)-non era un invito per gli ingegneri a diventare architetti o viceversa, ma per entrambi riconoscere che grande edificio richiede la sintesi della logica strutturale e dell'arte spaziale.

Questa visione ha trovato un'eco nell'ingegnere spagnolo Eduardo Torroja:

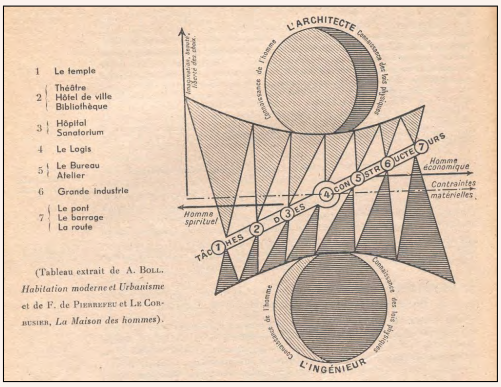
> Il design strutturale si occupa molto di più della scienza e delle tecniche: è anche molto interessato all'arte, al senso comune, al sentimento, all'attitudine e al godimento del compito di creare opportune linee a cui i calcoli scientifici aggiungeranno tocchi di finitura, sostenendo che la struttura è solida e forte secondo i requisiti.
>
> La matematica è semplicemente uno strumento conveniente da cui il designer determina le proporzioni

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Le Corbusier, 1931



(b) Le Corbusier's *ingénieur-architecte* pictogram (Pierrefeu e Corbusier, 1942)

Figura 15.12: Le Corbusier's *ingénieur-architecte* fotogramma (Pierrefeu e Corbusier, 1942).

> fisiche e i dettagli di una struttura pianificata per trasformare le sue idee dalle linee di un progetto all'attualità di una struttura finita.
>
> (Torroja, Polivka e Polivka, 1958)

Come osserva Henry Petroski, gli ingegneri maledicevano gli architetti che concepivano edifici che richiedono straordinarie contorzioni di cemento pesante e acciaio da eseguire; gli architetti guardano giù gli ingegneri che accusano di mancanza di creatività strutturale o la volontà di lasciare che le loro immaginazioni si arrabbiano (Petroski, 1997).

Gli italiani hanno una parola per coloro che trascendono questa divisione: *progetti*– chi concepisce e realizza un progetto intero, unendo design e esecuzione, forma e struttura.I dati esaminati nelle sezioni seguenti – dai maestri anonimi delle cattedrali gotiche a Maillart, Nervi, Candela e Khan—sono tutti, nei loro modi diversi, *Il mio nome*Essi dimostrano che la triade vitruvia non è mai stata un menu da cui scegliere, ma un'unità da raggiungere.

15.4 I pionieri

Mentre si è trattato di un co-ming storico tra architettura e ingegneria, sorge una questione naturale: è proseguito dopo l'emergere dell'ingegneria strutturale come disciplina scientifica?

1. Abbiamo ingegneri moderni i cui disegni portano a belle strutture *per la-* opere che toccherebbero la sensibilità di un architetto?

COPIA DI REVISIONE

2. Abbiamo architetti moderni i cui progetti audaci o innovativi sfidano l'ingegnere strutturale a superarsi?[22]

Questa sezione affronta la prima domanda concentrandosi sui "true ingegneri" che hanno pionierizzato il design prima dell'emergere di computer.

Quando la struttura diventa arte: l'estetica della necessità

Mentre l'architettura è spesso celebrata per la sua espressione visiva, è la struttura sottostante che rende possibile tale espressione. In alcune opere eccezionali, la necessità strutturale stessa diventa la fonte primaria di energia visiva. *is* funzione—rivelante, piuttosto che occultare, come le forze fluiscono nello spazio. L'eleganza di queste strutture non è nell'ornamento ma nella chiarezza e nell'inevitabilità delle loro forme. Quando le sfide ingegneristiche sono soddisfatte con precisione e immaginazione, il risultato può essere profondamente bello: una struttura che è subito razionale ed espressiva.

Questa sezione è dedicata alle strutture iconiche ideate da ingegneri strutturali—design che non solo risolvono sfide tecniche esigenti ma anche affascinano l'occhio e l'immaginazione. In quasi ogni caso, la geometria, le proporzioni e il ritmo di questi disegni nascono direttamente dalle forze che devono resistere e dai carichi che devono portare. (Pedreschi, 2008 PDF).

In precedenza, Le Corbusier ha affrontato la questione che è centrale a questa sezione:

> I nostri ingegneri producono l'architettura, perché impiegano un calcolo matematico che deriva dalla legge naturale, e le loro opere ci danno la sensazione di armonia. L'ingegnere ha quindi la sua estetica, perché deve, nel fare i suoi calcoli, qualificare alcuni dei termini della sua equazione; ed è qui che il gusto interviene. Ora, nel trattare un problema matematico, un uomo lo sta osservando da un punto di vista puramente astratto, e in tale stato, il suo gusto deve seguire un certo e certo percorso.
>
> (Le Corbusier, 1931 PDF)

Gli italiani hanno colto il ruolo dell'ingegnere-architetto con il termine *progetti*– chi realizza un progetto di natura architettonica o tecnica attraverso un processo progettuale: la figura professionale che, con background culturale e un'esperienza tecnica adeguata, concepisce innanzitutto ciò che sarà costruito. *Il mio nome*.

15.4.1 La Butterss volante: Logica strutturale resa visibile

Nato dalla necessità durante il periodo gotico, si è rivolto a una sfida strutturale fondamentale: la spinta laterale generata da volte a coste e tetti in pietra pesanti in vaste cattedrali. Piuttosto che affidarsi esclusivamente a mura di massa per contrastare queste forze, i

[22] Fino a Zaha Hadid (1950-2016), che ha studiato matematica come laureato presso l'Università americana di Beirut e può quindi avere sentito confortevole progettare strutture curvilinee, gli architetti noti erano tutti uomini.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

costruttori hanno concepito un'audace soluzione esterna–arrivati supporti che canalizzano carichi orizzontali verso l'esterno e verso i pilastri lontani.

La risposta pragmatica ai vincoli di ingegneria si è presto evoluta in una caratteristica architettonica di definizione: gli archi snelle e dolorose di matresse volanti non solo liberarono lo spazio interno per finestre in vetro colorato e l'espressione verticale; essi divennero gesti estetici a loro diritto. In essi, la chiarezza strutturale incontrava la grazia scultorea, inaugurando una lunga tradizione dove l'opera dell'ingegnere strutturale poteva anche essere opera d'arte.

Sarebbe infatti impossibile scrivere una panoramica della teoria dell'analisi strutturale senza riferimento alle cattedrali gotiche, che fu l'esito di una sperimentazione strutturale da non ripercorrere fino alla costruzione di ponti a lungo raggio e di edifici in metallo nella seconda metà del XIX secolo. (Mark, 1978).

Nonostante la magnificenza di queste strutture, che si innalzano fino alla gloria di Dio con la luce massima (al contrario delle precedenti chiese romaniche), le cattedrali gotiche offrono meno sfide tecniche di quanto ci si possa aspettare, e sono state ancora progettate da regole di pollice raffinate da generazioni, che è da dire che ci devono essere stati molteplici incidenti mortali lungo la strada.

Molti argomenti di interesse per l'ingegnere strutturale riguardano l'architettura gotica: cupole, volte a coste, archi e altri. Tuttavia, questa sezione si limita alla rilevanza strutturale delle contraffazioni volanti.

Guardando una cattedrale gotica, le matresse volanti si distinguono immediatamente, utilizzate per la prima volta per garantire stabilità alla navata del clero Notre-Dame de Paris (Murray, 1998) poco prima del 1180. Tuttavia, i record superstiti del periodo non raccontano quasi nulla delle tecniche di progettazione impiegate per così marcato un risultato tecnico. Quindi, è giusto escludere l'uso di qualsiasi metodologia scientifica. L'assenza di teoria strutturale elimina anche la possibilità di modellazione quantitativa a piccola scala; i costruttori non avrebbero potuto prevedere con certezza se elementi strutturali validi in edifici più piccoli potessero svolgere in modo affidabile la grande scala di nuova costruzione.

Un'importante eccezione, tuttavia, è la stabilità lorda contro il ribaltamento sotto carichi di peso morto, che non dipende dalla scala. Un modello di panca-top-size potrebbe essere servito per indicare la stabilità lorda di un edificio su larga scala. Questo fatto di comportamento strutturale ha contribuito a compensare alcuni problemi di nuovo, grande-design— anche se probabilmente non è stato afferrato dai costruttori medievali. (Mark, 1978).

Un trattato chiave sull'architettura fu pubblicato nel 1568 a Parigi da Philibert de l'Orme (De l'Orme, 1561). Questa è la prima opera in cui si introduce l'arte della proiezione massonica, contenente un saggio molto completo che descrive *les traicts geometriques qui montrent comme[nt] il guasto coda et coupper les pierres*—i metodi geometrici per tagliare e

COPIA DI REVISIONE

modellare pietre, o più prosaico: l'arte di ottenere da piani e disegni le forme di pietre individuali in forma conveniente per il muratore per costruire un edificio proposto.

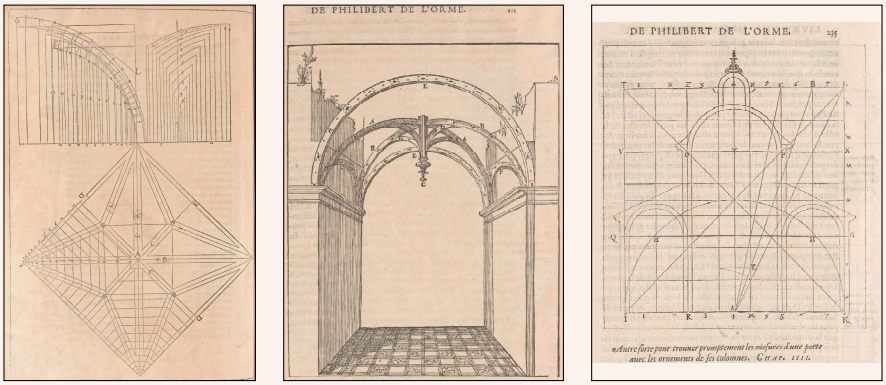


Figura 15.13: Illustrazioni da de l'Orme (De l'Orme, 1561)

Più tardi, nel XIX secolo, Eugène Viollet-le-Duc ha scritto il suo famoso *Dictionnaire Raisonné* (Viollet-le-Duc, 1854).[23] Eppure il suo contributo teorico più significativo è passato attraverso il suo *Discorso sull'architettura* (Viollet-le-Duc, 1875), in cui articola una filosofia completa di chiarezza strutturale e i principi che soggiaceno il design gotico—lavoro che collega la tradizione empirica medievale e la teoria strutturale moderna. (Per il suo ruolo fondamentale nella comprensione dei principi strutturali gotici, vedi §4.3.) Ha anche restaurato—o "massaro" secondo alcuni storici moderni—molti edifici medievali danneggiati durante la Rivoluzione francese.[24]

Un altro trattato monumentale è stato scritto da Willis, 1910, che inizia con la frase:

> La volta a coste del Medioevo . . . differisce interamente dalle volte dei Romani. . . . di un quadro di costole, o archi di pietra, su cui poggiano le vere volte o i veri rivestimenti dell'appartamento. Queste volte sono di solito costruite di un materiale più leggero e con lavorazione più ruvida delle costole su cui poggiano, e tra cui costituiscono, infatti, una sorta di pannello sottile. La costruzione di queste costole non offre difficoltà nel taglio di pietra, ognuno essendo, separatamente considerato, un semplice arco di terra; tuttavia le forme di esso sono state
>
> Willis, 1910 On the construction of the vaults of the Middle Ages

Infine, Mark e Prentke, 1968, in una carta di riferimento, ha cercato ulteriori approfondimenti attraverso analisi dettagliate (usando tecniche di fotoelastica) di diverse chiese gotiche principali. Le sue analisi hanno rivelato che il pinnacolo ha posto in cima ai bordi esterni delle pier-buttresses—le strutture a torre lungo il perimetro di una chiesa

[23] Si tratta di un monumentale dizionario alfabetico integrale di nove volumi di tutti i termini architettonici, con centinaia di illustrazioni molto precise e belle.

[24] Per esempio, si è preso la libertà di aggiungere un pinnacolo alla navata centrale di Notre-Dame de Paris (che recentemente bruciata), anche se non è mai esistito prima del suo intervento.

COPIA DI REVISIONE

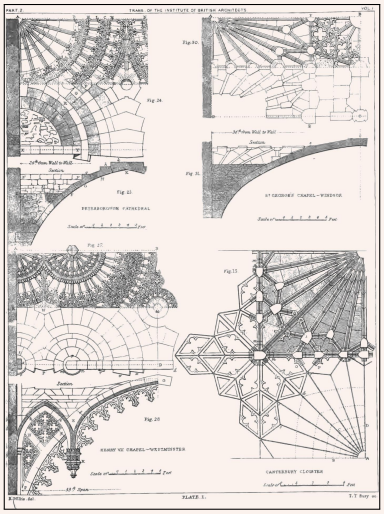


Figura 15.14: Illustrazioni da Willis, 1910

che resiste alla spinta esterna dei morsi volanti—ha annullato mantenere l'integrità della pier-butna-comprimendo la tensione locale

Questo risultato è stato avvincente perché la funzione tecnica del pinnacolo è mascherata dal suo ruolo decorativo sovraccaricante, e perché le considerazioni di stabilità lorda avrebbero posto il pinnacolo all'interno piuttosto che il bordo esterno del pier-buttress.

Il ruolo strutturale del pinnacolo non è stato perso sugli ingegneri che hanno progettato il molto poco profondo Pont Alexandre III a Parigi (Fig. 15.15b), costruito in onore dell'Alleanza franco-russa del 1892.

Per una comprensione più approfondita della scienza dietro le cattedrali gotiche, il lettore dovrebbe consultare Heyman et al., 1992 e Heyman, 1998b.

15.4.2 Gustave Eiffel (1832-1923)

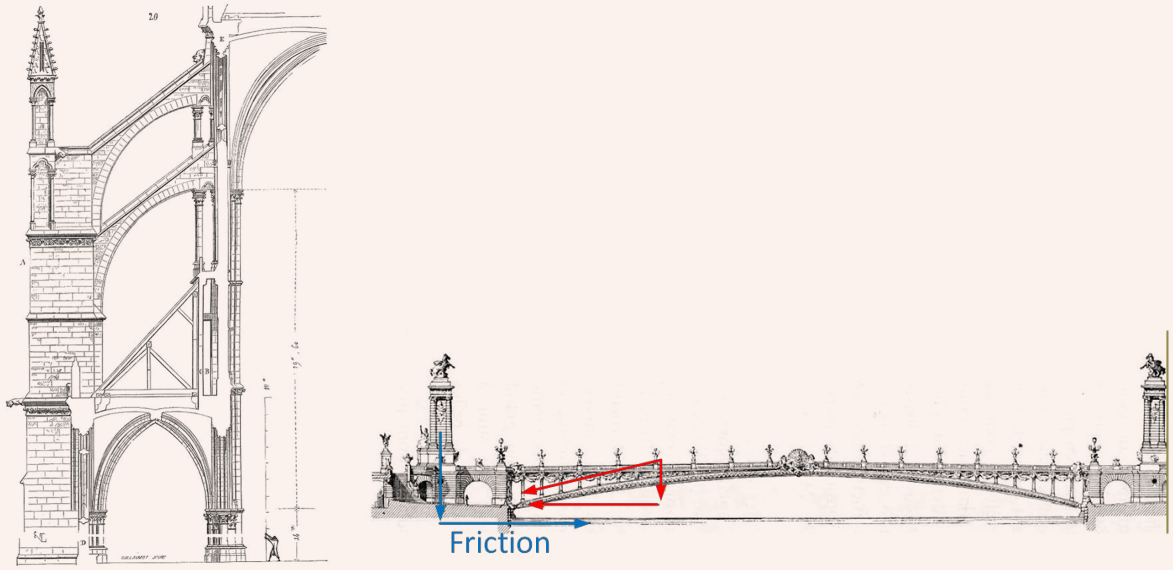
Gustave Eiffel era l'ingegnere francese quintessenza, un prodotto puro del loro elitario *Grandes Écoles*.[25] Probabilmente è l'esempio più notevole di un ingegnere che ha progettato una "struttura" che non serve assolutamente alcun scopo[26] non essere un testamento artistico al francese *Produciamo* nel mastering delle strutture in ferro battuto per l'Esposizione Mondiale del 1889, un progetto Eiffel si documentò in una sontuosa monografia a due volumi pubblicata il decennio successivo (Lemoine, 2002).[27]

[25] Anche se ha sorprendentemente scelto il *École Centrale des Arts et Produces* sopra il più prestigioso *École Polytechnique*.

[26] Con la possibile eccezione di un ristorante al terzo piano.

[27] Eiffel prevalse su un design in competizione di Jules Bourdais, che propose una "Sun Tower" in granito con illuminazione elettrica—un concetto esteticamente e strutturalmente inferiore che sarebbe stato molto più costoso e meno innovativo (Bourdais, 1881). Vedi §15.5.5 per un conto più completo di questo concorso.

COPIA DI REVISIONE



(a) Maschera volante (Viollet-le-Duc, 1854)

(b) Alexandre III bridge, Paris

Figura 15.15: Trasferimento di carico in archi

Sebbene Eiffel fosse responsabile del design finale, quello concettuale originale fu concepito da altri due ingegneri della sua azienda: Maurice Koechlin e Émile Nouguier.

Precedentemente, Eiffel aveva progettato lo scheletro di ferro interno della Statua della Libertà per lo scultore Auguste Bartholdi. Successivamente, ha progettato più viadotti e stazioni ferroviarie in diversi paesi. Figura 15.16b mostra il suo famoso ponte a due anelli, il Ponte Maria Pia.

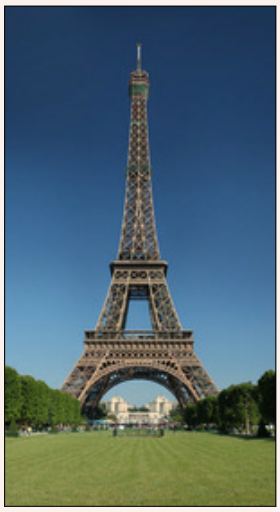
La sagoma affusolata della torre è spesso ammirata puramente come scelta estetica, ma il suo profilo è stato infatti derivato dalla necessità ingegneristica: la forma Eiffel ha plasmato ogni sezione in modo che il risultato della pressione del vento sulla struttura sopra ogni taglio orizzontale rimanga tangente ai bordi della torre, minimizzando le sollecitazioni di piegatura dal carico del vento. (Weidman, 2009).

Come Nervi sarebbe stato coinvolto in un futuro *ferro da stirocemento* per le sue conchiglie, Eiffel era coinvolto nella produzione attraverso *Costruzioni Eiffel Métalliques*E proprio come Morandi avrebbe poi avuto il tipo di ponte "segnatura", Eiffel aveva i suoi ponti a due arcate "segnatura":[28] il ponte Maria Pia (Thrall, Billington e Bréa, 2012), il Viadotto Garabit, il Ponte Dom Luís, il Ponte Rodo-Ferroviária de Viana do Castelo, e altri.

La compagnia di Eiffel, *Compagnie des Établissements Eiffel*, era all'avanguardia delle strutture di ferro prefabbricate (Établissements Eiffel, 19th Century)Questo approccio

[28]Come mostrato nel capitolo 32, l'analisi di archi a due anelli è molto più complessa di quella di archi a tre anelli.

COPIA DI REVISIONE



(a) Arte: la Torre



(b) Ingegneria: il ponte

Figura 15.16: Gustave Eiffel: la torre e il ponte

industrializzato ha permesso una rapida ed economica costruzione di ponti, torri e altre strutture, sottolineando la modularità in diversi modi chiave, un approccio i cui principi fondamentali di assetto strutturale sono stati analizzati in dettaglio (Sundaram e Ananthasuresh, 2009):

Prefabbricazione: I componenti sono stati realizzati in laboratori di alta precisione, poi trasportati al sito per il montaggio, riducendo il tempo di costruzione in loco e garantendo il controllo della qualità.

Componenti standardizzati: Eiffel ha utilizzato componenti in ferro e acciaio standardizzati che potrebbero essere prodotti in massa e riutilizzati in più progetti—economico e scalabile.

Giunti a bullone e rivettati: Ha favorito i collegamenti imbutiti e rivettiti sulle tecniche tradizionali di muratura o saldatura, consentendo un montaggio e smontaggio più facili.

Strutture leggere ma forti: Ha impiegato lattice e truss disegni per ottimizzare l'uso del materiale, rendendo le strutture più leggere mantenendo la forza.

Adaptability: L'approccio modulare ha permesso ai suoi progetti di adattarsi a terreni complessi, come gole e fiumi ripidi, come si vede nel Viadotto Garabit e in altri ponti ferroviari.

Questi principi di modularità rivoluzionarono la costruzione su larga scala e ispirarono le moderne tecniche di prefabbricazione e di progettazione modulare in architettura e ingegneria.

Il coinvolgimento di Eiffel nello scandalo del Canale di Panama temporaneamente ha

COPIA DI REVISIONE

segnato la sua reputazione, anche se in seguito è stato assolto (Charle, 2004). La sua eredità in costruzione metallica rimane ineguagliabile, posando le basi per grattacieli moderni e ponti di lunga durata.

15.4.3 Louis Henri Sullivan (1856-1924)

Nato nel 1856, Sullivan entrò nel MIT all'età di sedici anni. impiegato a Chicago si iscrisse poi a *ÈCole des Beaux-Arts* a Parigi e poi ha trascorso un po 'di tempo a viaggiare a Roma e Firenze.

Lo stile architettonico di Sullivan ha coinvolto volumi massicci in contrasto con l'ornamento intricato. L'ornamento era, per Sullivan, una parte di potenziamento di strutture in acciaio altrimenti dritto in avanti.

Come (uno dei pochi) addestrato sia in ingegneria che in architettura, non è sorprendente che sia stato lui a coniare il famoso aforismo (Sullivan, 1896 PDF) per le strutture (al contrario dell'architettura) di seguito indicate:

> Eppure, al fermo occhio di uno che si trova sulla riva delle cose, guardando soprattutto e con amore su quel lato su cui splende il sole e che ci sentiamo gioiosamente di essere vita, il cuore è sempre raddoppiato dalla bellezza, dalla squisita spontaneità, con la quale la vita cerca e assume le sue forme in un accordo perfettamente rispondente alle sue esigenze. Che si tratti dell'aquila spazzante nel suo volo, o del fiore di mela aperto, del cavallo da lavoro che si staglia, del cigno di blithe, della quercia ramificante, del ruscello che si snoda alla sua base, delle nuvole che si allontanano, su tutta la suora coursing, forma sempre segue funzione, e questa è la legge. È la legge pervadente di tutte le cose organiche e inorganiche, di tutte le cose fisiche e metafisiche, di tutte le cose umane e tutte le cose superumane, di tutte le vere manifestazioni della testa, del cuore, dell'anima, che la vita è riconoscibile nella sua espressione, che *forma mai segue funzione*Questa è la legge. Dove la funzione non cambia, la forma non cambia. Le rocce di granito, le colline sempre covanti, rimangono per età; il fulmine vive, entra in forma, e muore, in un gemellaggio. ... E così,
>
> - quando l'istinto e la sensibilità nativo governano l'esercizio della nostra amata arte;
> - quando la legge conosciuta, la legge rispettata, è quella forma che segue sempre la funzione;
> - quando i nostri architetti cesseranno di strutting e di potattling ammanettati e vainglorosi nell'asilo di una scuola straniera;
> - quando è veramente sentito, accolto allegramente, che questa legge apre il sole arioso dei campi verdi, e ci dà una libertà che la bellezza e la sontuosità stessa della lavorazione della legge stessa come esibita in natura determinino qualsiasi sano, qualsiasi uomo sensibile dal mutare in licenza;
> - quando si manifesta che si parla semplicemente di una lingua straniera con un accento americano evidente, mentre ogni architetto della terra, sotto l'influenza benigna di questa legge, esprime nel modo più semplice, più modesto, più naturale che è in lui dire: che egli potrebbe davvero e sicuramente svilupperebbe la sua caratteristica individualità, e che l'arte architettonica con lui diventerà certamente una forma viva di discorso, una forma naturale di enunciazione, dandogli il tesoro di grande.
> - quando sappiamo e sentiamo che la Natura è nostra amica, non il nostro nemico implacabile, —che un pomeriggio nel paese, un'ora dal mare, una vista aperta piena di un solo giorno,

COPIA DI REVISIONE

> attraverso l'alba, l'alto mezzogiorno, e il crepuscolo, ci consiglierà tanto che è ritmica, profonda ed eterna nella vasta arte dell'architettura, qualcosa di così profondo, così vero, che tutto le formalità strette, le regole dure e veloci, e i legami strangolanti di le scuole non possono soffocarlo in noi,
>
> — allora si può proclamare che siamo sull'alta strada per un'arte naturale e soddisfacente, un'architettura che presto diventerà un'arte raffinata nel vero, il senso migliore della parola, un'arte che vivrà perché sarà del popolo, per il popolo, e per il popolo.
>
> (Sullivan, 1896)

Nota: La formulazione lineare di Sullivan può semplificare il rapporto tra spazio e forma. Come ha osservato il filosofo russo Pavel Florensky:

> «Andremo dunque a cerchio, se cerchiamo di stabilire quale sia la prima cosa: spazialità o cosa.
>
> Florensky, 1996 Beyond Vision: Essays on the Perception of Art

Ciò suggerisce che lo spazio architettonico può influenzare la forma strutturale tanto quanto i requisiti funzionali modellano l'esperienza spaziale, un rapporto reciproco che i più grandi ingegneri strutturali, da Nervi a Torroja, intuitivamente compresi nel loro lavoro.

La seconda parte è molto fiorita Kiplingesque, e chiaramente le sue capacità di scrittura non sono in sintonia con la semplicità che egli sostiene per le strutture. Anche se Sullivan credeva che gli edifici dovessero esprimere la loro funzione, le sue strutture erano enormi[29]. Anche se considerato innovativo in il design di edifici alti, non poteva astenersi dal decorativo in quello che allora era il più grande contributo dell'America all'inizio dell'architettura moderna: sistema strutturale in acciaio.

Sullivan era il mentore del giovane Frank Lloyd Wright, purtroppo, i suoi ultimi vent'anni sono stati caratterizzati da un rapido declino, dalla mancanza di commissioni, dalle difficoltà finanziarie e dall'alcolismo.

15.4.4 Robert Maillart (1872-1940)

Grazie al lavoro di Billington (Billington, Mark e Abel, 1972; Billington, 1979), Maillart è stato "lionizzato" come il quintessenza "artista strutturale'.

Robert Maillart (Fig. 15.17a) è stato un ingegnere svizzero, formatosi al precursore dell'Istituto federale di tecnologia svizzero di Zurigo (ETH), dove ha studiato sotto Wilhelm Ritter (si è laureato in Culmann) e divenne un aderente solido di statici grafici.

Maillart non amava la teoria dell'eccesso e comprendeva la necessità di fare ipotesi e

[29] Il che spiega a whay non ho trovato alcun bisogno di includere una foto di nessuna delle sue strutture.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

di visualizzare il comportamento strutturale.[30] Interessante, approcci simili sono stati presi molto più tardi da altri due eminenti ingegneri svizzeri: Giovanni Lombardi nel suo disegno di dighe, e Christian Menn, che si affidava al calcolo *dopo* completando i progetti preliminari per perfezionarli.

Maillart, che pioniò l'uso di cemento armato, disegnava una serie di archi a tre anelli (come mostrato in §32.1.1.2.3, la loro analisi è abbastanza semplice), guidata da un senso di estetica molto acuto.

La Svizzera ha – e ha ancora – una tradizione di aprire concorsi per selezionare progetti civici, con selezione basata su criteri multipli, non solo costi. A causa della tradizione del paese di affidarsi a un semplice calcolo accoppiato con una buona comprensione («feel») per la risposta strutturale, potrebbero fiorire i disegni originali, che contrastavano con culture che si basavano eccessivamente sull'ispirazione dei precedenti disegni impreziositi dalla matematica, come il tedesco o il francese del tempo-approfondito.

Come nota di fatto, la cosiddetta competizione aperta non è sempre stata così trasparente e giusta come ci si potrebbe aspettare in Svizzera. La sede fu intasata, con conseguente giovane architetto svizzero, Le Corbusier, che si imballò e partì per la Francia dopo che la commissione adotti un «design by Committee» (in gran parte basato sul suo concetto), il suo lavoro non riconosciuto–in particolare giustificato dal fatto che il giovane architetto aveva la temerità di non presentare i suoi disegni in inchiostro indiano. Bolla di CHF.

Da qui, quando il tempo è venuto a costruire un ponte in una parte remota della Svizzera con poco traffico, Maillart ha costruito la sua struttura più iconica: il Ponte Salginatobel, celebrato in tutto il mondo (Fig. 15.17b). Un altro dei disegni di Maillart, il magazzino Magazzini Generali, è discusso nel capitolo 39.3 (basato sulle note di Billington).



(a) Monsieur Maillart



(b) Ponte di Salginatobel

Figura 15.17: Robert Maillart

[30] Oggi, pochi ingegneri hanno questa profonda comprensione del comportamento strutturale, che porta a una sovra-rilievità sui modelli di computer che generano immagini grafiche belle (e convincenti).

COPIA DI REVISIONE

Mentre Eiffel favoriva l'arco a due anelli per ponti in ferro battuto, Maillart trovò la bellezza in quelli in cemento a tre anelli.

15.4.5 Auguste Perret (1874-1954)

Auguste Perret (Bruxelles, 1874 – Parigi, 1954) è stato un architetto e architetto francese costruttore che ha fatto per cemento armato ciò che Maillart aveva fatto per ponte: ha dimostrato che il materiale non deve essere nascosto dietro la pietra rivestimento o intonaco ornamentale, ma potrebbe essere esposto come l'onesta espressione della struttura di un edificio, dove i suoi contemporanei trattavano cemento come uno scheletro utilitaristico da vestire, Perret lo trattava come architettura a forma di, proporzionata e dettagliata con la stessa cura un muratore classico si lavish su pietra tagliata[31].

Perret addestrato al *École des Beaux-Arts* a Parigi ma mai si è diplomato, preferendo il mondo pratico di suo padre azienda di costruzione, Perret Frères, che alla fine ha guidato. identità—scolastica in composizione classica, fondata in costruzione tutto quello che ha costruito, il suo edificio di riferimento 25 bis rue Franklin, Parigi (1903), fu tra le prime strutture a esporre una cornice in cemento armato su una facciata, con infill in ceramica pannelli che leggono onestamente come non strutturale. *Notre-Dame du Pioggia* (1923) rimane il suo capolavoro: una chiesa in cui snello colonne in cemento sostengono una sottile volta di conchiglia, le pareti sciolte interamente in un reticolo di tracce di cemento prefabbricato riempite di vetro colorato da Maurice Denis—La logica gotica rinasce in materiale industriale, Fig. 15.18. Il suo più grande Commissione, la ricostruzione di Le Havre dopo la sua guerra distruzione (1945-1954), applicata questi principi a scala urbana: centro città unificato di cemento, classico in proporzione ma inconfondibilmente moderno, riconosciuto oggi come patrimonio mondiale dell'UNESCO.

Filosofia del design La convinzione di Perret era che la struttura e l'architettura sono inseparabile.

> Celui qui dissimule une partie quelconque de la charpente se prive du seul légitime et plus bel ornement de l'architecture. Celui qui dissimule un poteau commet une faute. Celui qui fait un faux poteau commet un crime.

[31] In retrospettiva, Perret può essere visto come un precursore inconsapevole di ciò che gli Smithsons e Reyner Banham avrebbe più tardi termine *brutalismo*— esposizione deliberata di cemento grezzo (*béton brut*) come superficie rifinita. L'ironia è notevole: Perret è esposto il cemento era sempre raffinato, proporzionato in modo classico, e meticolosamente dettagliato, mentre il brutalismo che ha aiutato a ispirare spesso celebrata la crudezza come un'estetica in sé. *Unità d'abitare* (1952)—il cui cemento armato la superficie ha dato il suo stesso nome al brutalismo... è stato progettato da un uomo che aveva trascorso due anni nell'atelier di Perret assorbendo proprio il lezione opposta: che ha esposto esigenze concrete, non scuse, il più alto mestiere.

COPIA DI REVISIONE



Figura 15.18: Notre Dame Raincy (1923)

> Chi nasconde una parte della struttura si priva dell'unico ornamento legittimo e più bello dell'architettura, che nasconde una colonna commette un difetto, che crea una falsa colonna commette un crimine.
>
> Perret, 1952 Contribution à une théorie de l'architecture

Ha scritto... una dichiarazione che ha scritto... avrebbe potuto essere firmato da Nervi o Torroja. *Art Nouveau* tendenza a dissolvere la struttura in ornamento, e altrettanto respinto il nascente modernismo che ha ridotto gli edifici ad astratto volumi indifferenti al materiale e all'artigianato. Per Perret, la colonna, la il fascio, e la cornice non erano ostacoli alla bellezza, ma la sua fonte, a condizione che fossero proporzionati con rigore ed eseguiti con precisione. Questo lo mise in un lignaggio che correva da Vitruvio attraverso Viollet-le-Duc agli artisti strutturali del XX secolo—un costruttore-teorist che capiva che la triade *fermezza*, *utilizzazione*, *venustas* non era una gerarchia ma un'unità.

La sua influenza sulla generazione successiva era diretta e personale. giovani architetti che hanno attraversato il suo atelier di Parigi è stato Charles...Édouard Jeanneret—poi Le Corbusier—che lavorava lì dal 1908 al 1910 e assorbito, anche come reagiva in seguito, L'insistenza di Perret sull'onestà strutturale.[32] Dove Perret rimase fedele alla colonna e all'angolo giusto, il suo studente sarebbe sciogliere completamente il muro; ma entrambi concordati che la struttura non deve mentire.

15.4.6 Eduardo Torroja Miret (1899–1961)

Eduardo Torroja y Miret (Madrid, 1899-1961) è stato un ingegnere strutturale spagnolo ampiamente considerato come una delle quattro figure più influenti nello sviluppo tecnico ed estetico del cemento armato nella prima metà del XX secolo, insieme a Robert Maillart,

[32] Il rapporto era acrimonious per tutta la vita e di tanto in tanto: Le Corbusier il rivoluzionario e Perret il classicista non si è espresso pubblicamente su quasi tutto, eppure Le impronte di Perret... i piloti, la facciata libera, l'esposto frame— sono visibili durante il primo lavoro di Le Corbusier.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

Eugène Freyssinet, e Pier Luigi Nervi. e forme di cemento sottili le cui opere hanno raggiunto un'integrazione di logica strutturale e di bellezza architettonica raramente sono eguali prima o poi.

Torroja ha studiato presso *Escuela de Ingenieros de Caminos*[33] a Madrid, dove studiò sotto Juan Manuel de Zafra y Esteban, un noto ricercatore nel campo emergente del cemento armato, e sotto José Ribera, che diresse lo studio di Hennebique in Spagna. La tutela di questi due uomini ha svolto un ruolo importante nello sviluppo successivo di Torroja. Dopo essersi diplomato all'Escuela de Ingenieros de Caminos nel 1923, fondò la sua sede tecnica (*Oficina Técnica Eduardo Torroja*) in 1927 (Winchurch, 2007 PDF).

All'inizio si concentrò sulla progettazione e l'analisi di edifici; poi intorno al 1933 completò diversi progetti che incorporano sottili gusci e volte cilindriche. (Winchurch, 2007 PDF). I suoi primi lavori e proseguirono per progettare iconiche strutture in cemento sottile, tra cui il Market Hall di Algeciras (1933), il tetto in cantilevered Zarzuela Hippodrome di Madrid (1935), e la sala sportiva Frontón Recoletos (1935)—condivisa straordinaria comando di costruzione di conchiglie in cemento armato.

Torroja ha partecipato alla progettazione della nuova Zarzuela Hippodrome di Madrid; il suo design (#3) è stato selezionato tra nove finalisti (Fig. 15.19a) Questo *magnum opuscolo* era la sottomissione più strutturalmente ed esteticamente compiuta, impregnata dal cosiddetto *Razionalismo madrileno*.[34] Aveva appena 36 anni.

> Il primo premio è stato assegnato alla soluzione proiettata dagli Architetti C. Arniche e M. Domínguez e l'ingegnere E. Torroja, in cui l'originalità della copertina, una struttura completamente nuova nel suo tempo, e che ancora oggi, a ventisette, mostra la sua originalità espressiva del genio di Torroja, che con questo lavoro ottiene la sua prima vittoria in un concorso.
>
> Torroja, 1962a PDF

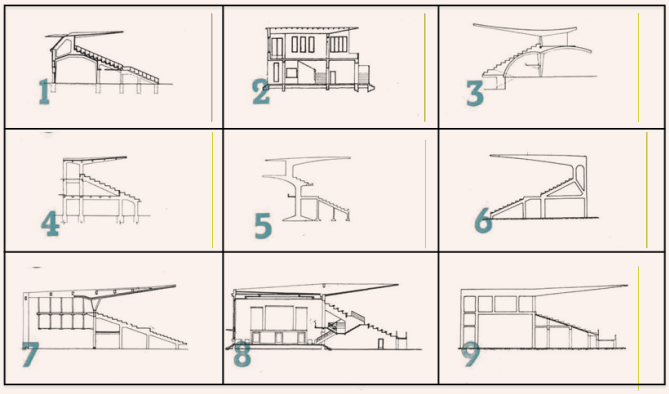
Il tetto di Zarzuela, un guscio iperboloide a 12,8 metri di spessore, a soli 5 centimetri di distanza, rimane un'icona dell'eleganza strutturale, e, oltre cinquant'anni dopo, l'Hippodrome di Zarzuela divenne un monumento storico-artistico della Spagna. Antuña Bernardo, 2003 PDF.

Nel 1936 Torroja ammise che per andare oltre, doveva essere acquisito più conoscenza. Nel 1940 fu nominato direttore del *Laboratorio Centrale di Ensayos de Materiales*, dove ha sottolineato il modello e il test dei materiali, ha fondato l'Instituto Técnico de la Construcción y del Cemento (oggi Instituto Eduardo Torroja) a Madrid, che divenne un centro di ricerca per la tecnologia concreta e l'ingegneria strutturale, ha anche co-fondato *Comité Européen du*

[33] Come se questo non fosse un nome insolito per l'istituzione, in seguito divenne il (fame) *Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos* (Universidad Politécnica de Madrid). Niente di ingegneria civile o strutturale nel titolo.

[34] Il razionalismo madrilenico è caratterizzato da un'architettura che si distingue sia nelle sue forme che negli elementi e nei materiali utilizzati: cemento armato, mattoni a vista, grandi finestre orizzontali e facciate lisce senza ornamenti.

COPIA DI REVISIONE



(a) Inoltramenti (Torroja, 1962a)



(b) Il design di Torroja

Figura 15.19: Torroja, Zarzuela Hippodrome

Béton (CEB), e servito come presidente del *Fédération Internationale de la Précontrainte* (FIP) ha tenuto cattedra presso la Scuola di Ingegneria Civile di Madrid ed è stato professore di visita a Princeton, Harvard e MIT.

Filosofia del design e intuizione strutturale La filosofia progettuale di Torroja ha respinto sia l'imposizione arbitraria di forma che l'applicazione meccanica del calcolo. "Il progettista strutturale"" ha scritto, "deve possedere intuizione creativa e la capacità di vedere il tutto prima delle parti""', ha sostenuto per forme che emergono naturalmente dal flusso delle forze. attraverso la forma-chiusura che trasportava carichi attraverso l'azione della membrana, archi seguendo le linee di spinta, cavi che assumono forme funicolari. Questo approccio, che ha definito "intuizione strutturale", ha richiesto una profonda comprensione di come i materiali si comportano e come le forze trovano i loro percorsi attraverso le strutture.

Come Hardy Cross, Torroja credeva che l'analisi dettagliata dovesse venire solo dopo il disegno preliminare, e che egli considerava i calcoli quasi come un ripensamento, necessario per valutare la fattibilità di un progetto già concepito attraverso l'intuizione.[35]

> Poiché il calcolo delle sollecitazioni in una struttura o in singoli membri strutturali, dopo la realizzazione del disegno generale, è un lavoro più tecnico e specializzato, è un soggetto che va oltre la portata di questo libro, e saranno fatte solo osservazioni generali. Il calcolo delle sollecitazioni può servire solo a controllare e correggere le dimensioni dei membri strutturali come concepiti e proposti dall'intuizione del designer. Il lavoro stesso non nasce mai dal calcolo. di solito viene fatto dopo il disegno generale, per garantire la stabilità e la forza della struttura. Se il calcolo non dimostra la sicurezza necessaria della struttura, il progettista deve modificare il suo lavoro e ripetere i calcoli per l'approvazione finale. Le valutazioni devono controllare non solo la forza, ma anche l'elasticità e la stabilità statica della costruzione, ma anche la forza di una struttura è spesso evidente e non

[35] Allo stesso modo, ho sempre detto agli studenti che dovrebbero avere una risposta approssimativa o "feel" a un problema prima che venga analizzata da un codice degli elementi finito. *Problema di Fermi*.

COPIA DI REVISIONE

> necessita di calcoli, ma non deve significare che in altri casi il controllo accurato può essere omesso senza giustificazione adeguata.
>
> (Torroja, Polivka e Polivka, 1958)

Razón y Ser de los Tipos Estructurals Nei suoi ultimi anni, Torroja si concentrò sulle pubblicazioni. *Razón y Ser de los Tipos Estructurals* (pubblicato in inglese come Filosofia delle Strutture, 1958) (Torroja, 2008 PDF; Torroja, 1962b; Torroja e Miret, 1958) Torroja ha scritto questo libro come un argomento contro coloro che hanno cercato di ridurre le strutture ad una semplice questione di calcolo; per lui, la resistenza era essenziale ma mai la sola o primaria logica per la costruzione. Il libro presenta le sue riflessioni sul processo mentale, sia razionale che emotivo, che un progettista strutturale impiega quando si tratta di un nuovo progetto. *Prima e soprattutto il calcolo c'è l'idea, modellando il materiale in una forma resistente, per adempiere alla sua missione.* Questa affermazione conferma che Torroja credeva davvero che l'analisi strutturale dovesse seguire - non precedente - il progetto concettuale preliminare di una struttura.

Il suo *Filosofia delle strutture* è sia un trattato tecnico che una meditazione sull'arte del design strutturale. (Torroja e Miret, 1958) fornisce una prospettiva sui suoi numerosi successi personali, (Torroja, Polivka e Polivka, 1958) è molto più interessante: in esso riflette sulla professione di ingegneria strutturale e poi descrive in termini semplici (non una singola equazione) il comportamento strutturale di varie strutture come archi, cupole, conchiglie, dighe e altro ancora. Torroja analizza i tipi strutturali—api, archi, capriate, cornici, conchiglie—-non solo come astratti matematici ma come risposte a esigenze di ottimizzazione spaziale fisica e strutturale. e la bellezza architettonica non sono obiettivi concorrenti ma aspetti complementari di buon design: strutture che resiste efficacemente ai carichi tendono anche ad essere eleganti, perché sia l'efficienza che la bellezza nascono dalla chiara espressione dell'azione strutturale.

L'influenza di Torroja si estendeva in tutto il mondo di lingua spagnola e oltre, ispirando gli ingegneri che cercavano di unire virtuosismi tecnici con bellezza formale, i cui gusci, pur esigenti in esecuzione, dimostravano che il cemento armato poteva raggiungere una leggerezza e una grazia che rivaleggiava con la più fine volta gotica.

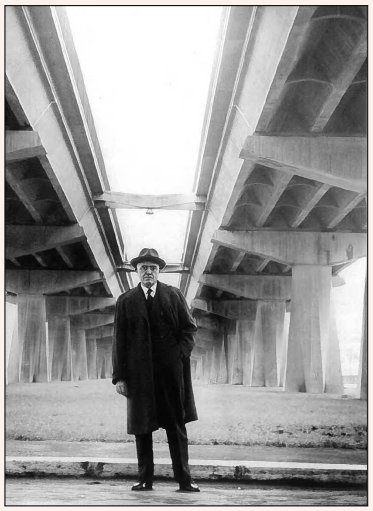
15.4.7 Pier Luigi Nervi (1891-1979)

Pier Luigi Nervi (Sondrio, 1891–Roma, 1979), mostrato in Fig. 15.20, era un ingegnere ed architetto italiano ampiamente considerato, insieme a Robert Maillart, Eugène Freyssinet, ed Eduardo Torroja, come una delle figure più influenti nello sviluppo di una costruzione di cemento armato nel XX secolo. (Nervi, 1956a), istruita e praticata come *ingegnere edile* (' ingegnere di costruzione') presso l'Università di Bologna. Dopo la laurea in ingegneria civile presso l'Università di Bologna nel 1913, Nervi lavorò per il *Società Anonima per Costruzioni Cementizie* prima di stabilire la sua società di contratto nel 1920, fondando la sua propria ditta nel 1923, e più tardi *Società Ingg. Nervi & Bartoli* (1932), attraverso

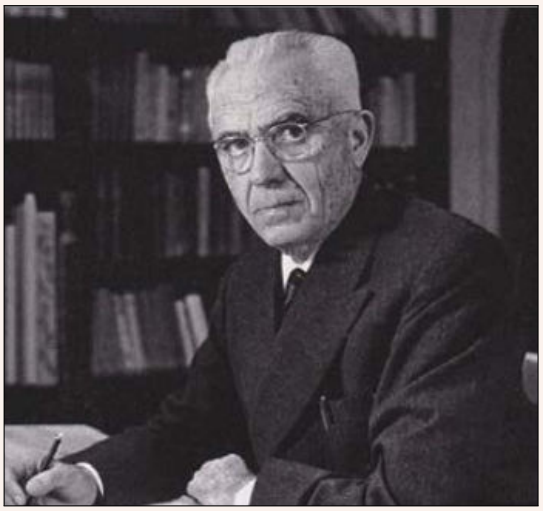
COPIA DI REVISIONE

il quale ha servito sia come designer che costruttore, una combinazione insolita che gli ha permesso di testare e affinare le sue idee innovative direttamente sul posto e gli ha dato l'intuizione e il fascino per realizzare progetti innovativi economici. *progettista per eccellenza*Questa integrazione del design e della costruzione era centrale per la sua filosofia: la forma strutturale, ha insistito, deve emergere dalle realtà dei materiali e fare, non dalla geometria astratta imposta senza riguardo alla costruibilità.

È pratica comune nella cultura italiana precedere il nome di una persona con il suo titolo (*Dottore*, *Avvocato*, *Ragioniere*, *Architetto*, *Ingegnere*, ecc.). Quando la gente si riferiva a Nervi come *Architetto Nervi*, li correggeva sempre: "*No, Ingegnere Nervi*" (Maier, 2007).



(a) (Lori, 2009)



(b) (Nervi, Neri et al., 2014)

Figura 15.20: *L'Ingegnere* Pier Luigi Nervi

Tra le sue opere principali si annoverano lo stadio Berta (Stadio Artemio Franchi) a Firenze (1930-32), i hangar aeronautici di Orvieto e Orbetello (1935-42), le sale espositive di Torino (1947-50), la sede dell'UNESCO a Parigi (con Breuer e Zehrfuss, 1950), la Torre Pirelli di Milano (con Gio Ponti, 1955-59), e i palazzi sportivi per le Olimpiadi di Roma 1960, tra cui i *Palazzetto dello Sport* e (non essere confuso con) *Palazzo dello Sport*Ha insegnato presso la Facoltà di Architettura di Roma dal 1946 al 1961 e consegnato le conferenze Charles Eliot Norton ad Harvard nel 1961-62.

I suoi marchi erano forme di curvatura e archi increspanti, ma i suoi edifici erano fondamentalmente razionali, possedendo un senso di restrizione. Non approvava edifici fiammeggianti le cui strutture erano troppo elaborate per il lavoro a portata di mano; cercò invece di creare edifici ragionevoli e semplici con un'aria di semplicità ed economia. "La bellezza non viene dalla decorazione ma dalla coerenza strutturale', ha detto. (The Baltimore Sun, 1979).

COPIA DI REVISIONE

Innovazioni tecniche e integrazione professionale Nervi ha abilmente combinato tre aspetti della professione: comprensione strutturale del flusso di forze in una struttura, specificando il *isostatico* linee[36] anche per strutture complesse; sviluppo materiale innovativo di *ferro da stirocemento*, che ha svolto un ruolo importante nella costruzione delle sue conchiglie; e tecniche di costruzione per ridurre i costi senza compromettere l'estetica o la sicurezza.

I contributi di Nervi si sono estesi oltre il design per comprendere le innovazioni fondamentali nella tecnologia costruttiva, sviluppando e brevettando *ferro da stirocemento* (ferrocement)—un composito cementizio sottile con strati multipli di maglia fine in acciaio spruzzato con malta cementizia—-che ha permesso la creazione di elementi di spessore minimo con notevole resistenza e plasticità.Questa tecnica, prima impiegata per pareti di magazzino, scafi barca, e poi elementi architettonici di grandi dimensioni, è diventata il segno distintivo dei suoi lavori strutturali post-bellici, consentendo la prefabbricazione di forme complesse curve che potrebbero essere assemblate sul posto.

L'Ingegnere: Linee Isostatiche e Comprensione Strutturale Nel tempo di Nervi, gli ingegneri si affidarono alla solida comprensione della meccanica, completata da test. Non erano ancora disponibili computer, e i calcoli erano (da standard moderni) relativamente elementari.

Il suo sistema *ridimensionamento isostatico*, brevettata nel 1949, allineata coste di cemento lungo le linee dei principali momenti di piegatura, ottimizzando l'uso del materiale, producendo i distintivi modelli a cassettoni visibili in opere come la Fabbrica Gatti Wool e il Palazzetto dello Sport. Nervi attribuisce Aldo Arcangeli, uno degli ingegneri del suo ufficio di progettazione Nervi e Bartoli, che suggeriscono che le costole di una lastra dovrebbero seguire le linee isostatiche dei suoi principali momenti di piegatura. Queste linee dipendono esclusivamente dalle condizioni di carico della struttura, e Nervi si meraviglia di scoprire che limitando il suo compito di interpretare un fenomeno puramente fisico, poteva scoprire nuove forme inaspettate ed espressive. Le costole di lastre poste lungo le linee isostatiche dei momenti sono splendidamente curvate nel piano (Nervi, 1956b).

Le linee isostatiche (da non confondere con le linee di contorno) possono essere facilmente costruite attraverso il seguente algoritmo:

procedure ISOSTATICO ▷ Linee isostatice del trama
  Inizializzare $\Gamma, h, L, nLines, frac, vect, i$ ▷ Inizializzare le costanti
  for $Line \leftarrow 0$ to $nLines$ **do** ▷ Loop sul numero di linee
    $x_0 = -L/2 + Line \times L/frac;\ y_0 = 0.99 \times h/2$ ▷ Inizializzare il primo punto
    $x(1) = x_0; y(1) = y_0$ ▷ Inizialmente array
    $Inside \leftarrow$ `true`
    $k = 1$ ▷ Inizialmente per linea

[36] Linee isostatiche definire le indicazioni di un valore principale di un tenore di ordine 2 (come ad esempio σ_{ij} or M_{ij}) per visualizzare la sua traiettoria in travi, piastre o altri elementi.

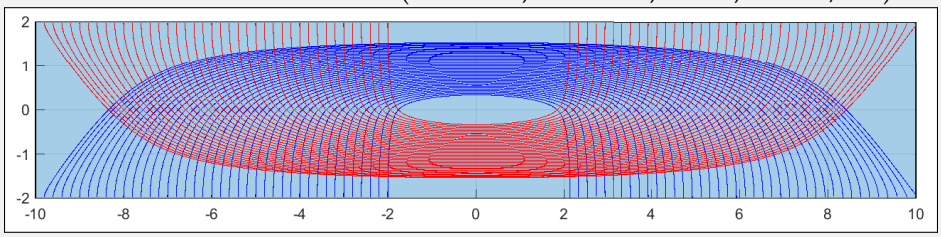
COPIA DI REVISIONE

```
        while Inside = True do
            Compute σxx; σyy; τxy                    ▷ Componenti per tensori
            T = Tensor(σxx τxy)                      ▷ Impostare lo stress / tenore di movimento
            [Vect, D] = eig(Tensor)                  ▷ Computo normalizzare/ordinavectors ordinati
            V(:) = Vect(:, i)                        ▷ vettore estratto (1 ° o 2 ° autovettore (C o T)
            k = k + 1                                ▷ Contatore di incentivo per Linea
            x(k) = x(k − 1) + vect × V(1)            ▷ determinare il punto successivo
            y(k) = y(k − 1) + vect × V(2)            ▷ di un arco di lunghezza=vetto
            if x, y, outside Γ then                  ▷ Controlla che rimaniamo in superficie
                Inside ← false
            end if
        end while
        Plot(x,y)                                    ▷ Traccia questa linea
    end for
end procedure
```

dove

Γ	Volume del corpo ($h \times L$)
h	Altezza
L	Lunghezza
NLines	Numero di linee isostatice
Frattanto	numero grande per evitare di iniziare a $x = \pm L/2$
)	Lunghezza dell'arco incredibile della linea isostatica
i	compressione ($i = 1$) o tensione ($i = 2$)

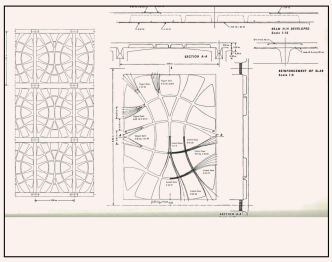
Utilizzo di questo algoritmo (MATLAB codice elencato in §I.2.10) si può facilmente tracciare le linee isostatice di un fascio sotto carico uniforme (nlines=40, delta=100, i=1&2, vect=$h/100$).

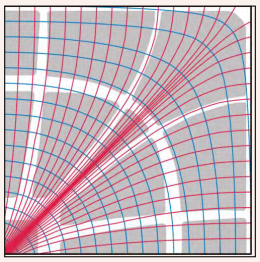


In Fig. 15.21b, le linee rosse rappresentano gli isostatici corrispondenti ai massimi momenti di curvatura principali, e le linee blu rappresentano le seconde corrispondenti ai minimi momenti di curvatura principali (Halpern, Billington e Adriaenssens, 2013)In questo caso, entrambe le coppie di linee sono state generate dai nodi di partenza lungo tutti e quattro i confini. Le concentrazioni di linee indicano la convergenza delle principali direzioni di momento di flessione. Il profilo grigio e bianco mostra un piano approssimativo del pavimento di fabbrica di lana Gatti per illustrare la correlazione tra la colonna teorica isostatica e il modello costine costruito. (Vitalis, 2021).

Come la maggior parte degli italiani della sua generazione, e in assenza del metodo degli elementi finiti ancora da sviluppare, Nervi ha sempre considerato la sperimentazione il metodo migliore per applicare o testare i limiti della teoria quando la teoria si è dimostrata

COPIA DI REVISIONE


(a) Lastra da pavimento con costole isostatiche (Nervi, 1956b)

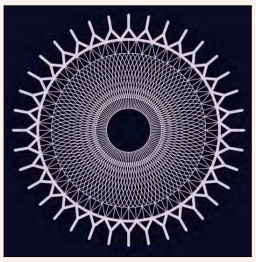


(b) Linee isostatiche della fabbrica di lana Gatti (Halpern, Billington e Adriaenssens, 2013)

Figura 15.21: Esempi di linee isostatiche

inadeguata a sostenere i suoi progetti innovativi.[37] Lavorare con modelli di test su piccola scala è stato costante nel suo lavoro di progettazione; li ha usati per "test' e "tweak" le sue assunzioni non provate. 15.23a mostra un test modello del hangar di Orvieto (Fig. 15.24b). Nervi impiegava costantemente modelli di ridotte dimensioni, testati in condizioni di laboratorio, per verificare il comportamento strutturale prima della costruzione-una pratica che completava la sua analisi teorica con validazione empirica. e teoria matematica.

Vale la pena menzionare che alcuni hanno visto nel lavoro di Nervi la scienza in fiorente di *architettura biomimetica*, notando una forte somiglianza tra le linee isostatiche e la venazione naturale di foglie o la ramificazione di alberi *Victoria Amazon* (Vitalis, 2021) (Fig. 15.22).


(a) *Palazzetto dello Sport* dome

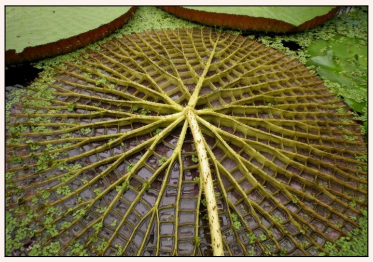

(b) *Victoria Amazon*

Figura 15.22: Nervi e architettura biomimetica

Lo scienziato materiale: innovazione del ferrocemento Il nome di Nervi è fortemente associato con *ferro da stirocemento*, che pionierì[38] come materiale per la costruzione di un guscio, non è altro che malta cementizia Portland rinforzata da strati strettamente

[37] Molti dei test di Nervi sono stati eseguiti presso (l'ora disfunto) ISMES (*Istituto Sperimentale Modelli e Strutture*), che ha pionierizzato i test per le dighe (soprattutto) e le strutture innovative.

[38] In realtà, il ferrocemento era stato inventato da due francesi: Joseph Monier e Joseph-Louis Lambot (che costruirono una barca con il sistema nel 1848), precursore del cemento armato poi "inventato" di François Hennebique.

COPIA DI REVISIONE

distanziati di reti o mesh in fibra continua (come ad esempio "filo di pollo"), come mostrato nella figura. 15.23b.

In questo modo, il cemento armato si è staccato non solo dalla forma di scheletro lineare, ma anche dalla geometria rigida della sua forma. Il cemento versato era senza soluzione di continuità, la sua forma completamente indipendente. Nervi ha usato questi elementi molto sottili, appositamente sagomati estremamente economico come elementi finiti, come la forma, o come la forma persa.

Vediamo così come il genio di Nervi combina materiali, forme, costruzioni ed espressioni architettoniche economicamente.—ribei seguendo linee di stress principale, gusci sagomati da azione a membrana, cantilevers arazzo come momenti di diminuzione—dimostrati come l'innovazione tecnologica potrebbe guidare l'espressione architettonica.

Il costruttore: grandi opere e innovazione di costruzione Dopo la seconda guerra mondiale, l'Italia intraprese una vasta ricostruzione: il cemento era poco costoso, la scarsità di acciaio, il lavoro abbondante e storicamente qualificato. Questa combinazione, insieme alla creatività e all'ingegnosità di alcune figure principali, ha portato ad alcune delle strutture più iconiche del XX secolo. (Desideri et al., 2013 PDF).

I suoi primi stadi comunali a Firenze (1930-1932), mostrati in Figs. 15.24c e 15.24d, ha dimostrato il potenziale del cemento armato per i cantilevers drammatici e la forma espressiva, ma il lavoro maturo di Nervi ha raggiunto il suo carattere distintivo attraverso lo sviluppo di ferrocement e prefabbricato elementi a coste che potrebbero essere realizzati in massa e assemblati in loco, queste tecniche hanno permesso la costruzione di superfici curve complesse con notevole economia.

Le sale espositive di Torino (1948-1950), sede dell'UNESCO a Parigi (1953-1958, con Breuer e Zehrfuss), la Torre Pirelli a Milano (1956-1958, con Ponti), il Palazzetto dello Sport e il Palazzo dello Sport per le Olimpiadi di Roma del 1960, e la sala del pubblico in Vaticano (1971) dimostrano la gamma e il virtuosismo di Nervi.[39]

Nervi ha sostenuto la sinergia di costruzione modulare, cemento armato e eleganza strutturaleHa sostenuto che gli ingegneri, liberati da preconcetti stilistici, potevano raggiungere una "vero strutturale" che era intrinsecamente bella – non attraverso la decorazione applicata, ma attraverso la chiara espressione di come le forze fluiscono attraverso il materiale. Il lavoro di Nervi ha dimostrato che l'economia, l'efficienza strutturale e la bellezza non erano obiettivi concorrenti ma alleati naturali quando il design procede da un onesto impegno con materiali e forze.

Filosofia del design e scrittura teoretica Gli scritti teorici di Nervi sono significativi come i suoi lavori costruiti. *Scienza o arte del costruire? Caratteristiche e possibilità del cemento*

[39] L'autore, mentre frequentava il liceo di Roma, aveva la fortuna di competere in partite di pallamano all'interno del Palazzetto dello Sport. In piedi su quella corte, sotto la cupola a coste di Nervi, non si poteva fare a meno di sentire la struttura come una presenza vivente- le costole che irradiavano sopra la testa come la volta di qualche cattedrale futuristica, la luce filtrante attraverso il perimetro smaltato, l'intera prova spaziale in qualche modo monumentale l'esperienza di movimento ha lasciato un'intima.

COPIA DI REVISIONE

armato (1945) (Nervi, Neri et al., 2014), poneva una questione fondamentale sulla natura del design strutturale, cercando di conciliare la divisione storica tra gli approcci tecnico-scientifici e intuitivi-artistici all'edificio.Ripubblicato nel 1997 su iniziativa dell'architetto Aldo Rossi, che lo ha definito "uno dei pochi libri che ho sempre raccomandato ai miei studenti", il lavoro ha sostenuto per un equilibrio razionale ma sensibile tra proporzionalità, calcolo, osservazione sperimentale e sensibilità estetica.

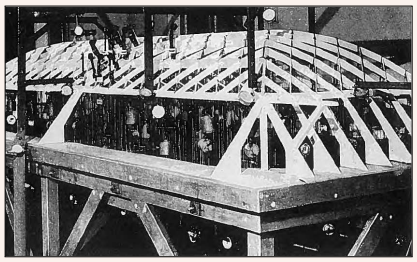
Le sue lezioni norton del 1961 ad Harvard, in seguito pubblicate come *Estetica e tecnologia nell'edilizia* (Nervi, 2018), ampliando queste idee, dimostrando attraverso i propri progetti come prefabbricato e calco-in-place cemento potrebbe soddisfare la sua tripla domanda di economia, correttezza tecnica e soddisfazione estetica. Per quanto riguarda il ruolo dell'intuizione contro il calcolo nel concepimento strutturale, Nervi scrisse nel 1931 che i risultati numerici ottenuti attraverso formule "possono essere considerati solo come parametri guida, da interpretare e valutare con sentimento e intuito, le uniche facoltà di valutare che si possano valutare che si possano valutare con la scalare. (Nervi, 2018, p. 16)Ha inoltre insistito sul fatto che il compito del progettista strutturale è di "inventare" una struttura che prima–prefiguring come forma nello spazio—— e solo allora per calcolare. Questa convinzione che il concepimento intuitivo deve precedere i punti di verifica matematica Nervi a fianco di Torroja nella tradizione di ingegneri-artisti che hanno visto l'analisi come uno strumento per la raffinatezza piuttosto che la generazione di forma strutturale.

> . . . Vorrei richiamare l'attenzione di architetti, ingegneri, critici e tutti i seguaci del meraviglioso campo dell'architettura – una realtà oggettiva troppo spesso trascurata, e più spesso negata attraverso un'idealizzazione formale e culturale ingannevole del fatto architettonico: materiali, statici, la tecnologia della costruzione, l'efficienza economica e le esigenze funzionali, sono il vocabolario del discorso architettonico.
>
> È impossibile elevare tale discorso al livello di poesia (architettura) o anche correggere la prosa (buona costruzione) senza una perfetta comprensione di questo vocabolario, e delle regole di grammatica e sintassi (tecnica) con cui devono essere composte.
>
> (Nervi, 1963)

In termini di calcoli, purtroppo non molto sopravvive; tuttavia, il suo lavoro è ampiamente illustrato da molti autori (Nervi, 1956b; Greco, 2008; Nervi, 2018; Lori, 2009; Nervi, 1963; Chiorino e Olmo, 2010), e i suoi archivi sono suddivisi tra il museo MAXXI di Roma e l'Università di Parma (CSAC, *Centro Studi e Archivio della Comunicazione*).

Alcune delle strutture più iconiche di Nervi sono mostrate in Fig. 15.24. I suoi libri *Strutture* (1956) e *Estetica e tecnologia nell'edilizia* (1965) articola una filosofia in cui la bellezza emerge naturalmente dall'espressione onesta della logica strutturale e del processo costruttivo.

COPIA DI REVISIONE

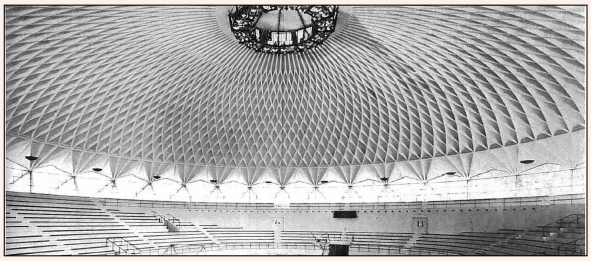


(a) Test di modello di hangar di Orvieto (Lori, 2009)

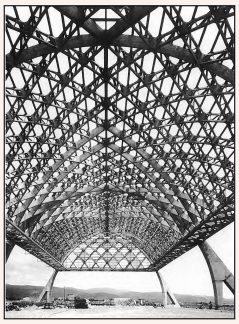


(b) Ferrovie

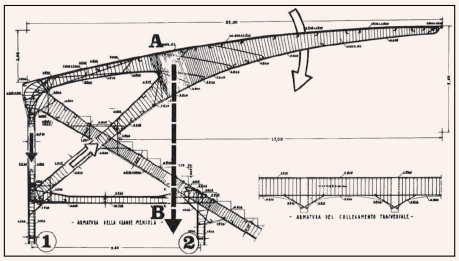
Figura 15.23: Nervi: ingegnere strutturale e materiale



(a) Dentro *Palazzetto dello Sport* (Nervi, 1963)



(b) Orvieto hangar (Lori, 2009)



(c) Stadio di Firenze (Nervi, 2018)



(d) Stadio di Firenze (Nervi, 2018)

Figura 15.24: Le strutture iconiche di Nervi

15.4.8 Riccardo Morandi (1902-1989)

In seguito alla seconda guerra mondiale, l'Italia si è trasformata in una frenesia di ricostruzione, unita alla creatività storica e al senso estetico degli italiani, questo sforzo ha prodotto alcune strutture iconiche, soprattutto se non solo in cemento, poiché era molto più economico dell'acciaio, e il lavoro relativamente poco costoso era abbondante.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Riccardo Morandi è conosciuto soprattutto per l'uso innovativo di cemento armato e preforato, oltre a ponti in acciaio inox.

Possibile ispirato al ponte Bixby Creek (Fig. 15.25a), Morandi ha progettato il Paul Sauer Bridge in Sud Africa (Fig. 15.25b). Entrambi sono considerati strutture iconiche nei rispettivi paesi.

Più tardi, Morandi ha abbracciato il design delle strutture a supporto di cavi, e il suo nome è fortemente associato a tre ponti di design quasi identico: il General Rafael Urdaneta Bridge in Venezuela, il Viadotto Polcevera che attraversa la città di Genova, e il Wadi el Kuf Bridge in Libia. Questi ponti possono essere stati "esteticamente" gradevoli (non tutti d'accordo), ma non hanno avuto ridondanza e hanno richiesto manutenzione diligente per evitare la corrosione dei cavi. Il ponte di Genova (in realtà un viadotto) è crollato nell'agosto 2018, causando 43 morti. Ironia della sorte, il viadotto sostitutivo è stato progettato da Renzo Piano, un noto architetto genovese che ha co-disegnato il Pompidou Center.

Un'altra struttura ben nota (anche se forse non "iconica") di Morandi è la coppia di hangar Alitalia all'aeroporto di Fiumicino di Roma, visibile a tutti i viaggiatori. Ogni hangar è costituito da 19 cavi catenari prestressati che sostengono il tetto. Ad ogni fine, un fascio di cemento preforato supporta questi cavi. (Morandi e Piccarreta, 1972 PDF). Questo hangar ha una grande somiglianza con il tetto catenario dell'aeroporto di Dulles concepito da Eero Saarinen (vedi capitolo 39.1). Incidentalmente, Morandi era un ingegnere e Saarinen un architetto.



(a) Bixby Creek Bridge (Panhorst, 1932)



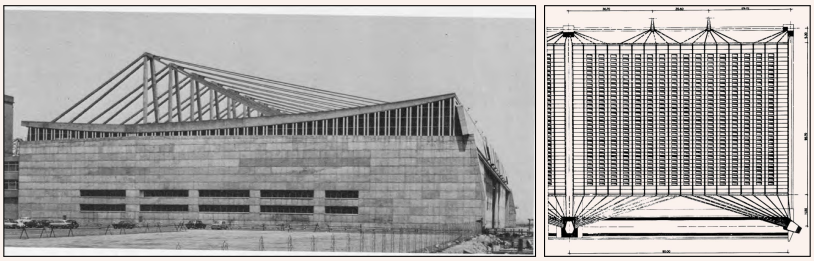
(b) Paul Sauer Bridge (Morandi, 1953)



(c) Generale Rafael Urdaneta Bridge (1958)



(d) Viadotto Polcevera, Genoa (Morandi, 1963)



(e) Alitalia hangar, Fiumicino (Morandi, 1962)

Figura 15.25: Riccardo Morandi

COPIA DI REVISIONE

15.4.9 Christian Menn (1927-2018)

Attraverso Maillart abbiamo già visto come un ingegnere svizzero possa coniugare con efficacia l'efficienza strutturale con l'estetica, seguito da due compatrioti di rilievo: Christian Menn e Othmar Ammann.[40]

Menn è indubbiamente il più eminente ingegnere ponte della metà del XX secolo, che ha impiegato oltre cinquant'anni innovazione, immaginazione, ingegneria strutturale sonora "gut-feeling,"" e la sensibilità più importantemente estetica. (Brühwiler, 2010 PDF).

La padronanza di Menn dell'analisi strutturale (ponte in cemento armato) è esposta nel suo libro (Menn, 1990). In esso, Menn implica che un ponte adeguatamente progettato che rappresenta l'economia, i costi del ciclo di vita e i costi di costruzione saranno *de facto* estetica.[41] Uno studio interessante del suo famoso Ponte Sunniberg (Fig. 15.26) è data da Honigmann e Billington, 2003 PDF.

Menn discute il ruolo dell'estetica in (Menn, 1996 PDF):

> I ponti devono soddisfare requisiti funzionali e vincoli specifici come la sdoganamento e il programma di costruzione, oltre a questi requisiti, i più importanti obiettivi di progettazione sono: sicurezza strutturale, la funzionalità, l'economia e l'eleganza.
>
> La definizione di criteri di sicurezza e di servizio strutturale è specificata negli standard di progettazione, che riflettono l'attuale stato dell'arte degli aspetti tecnici del design del ponte. La sicurezza e la facilità di servizio sono raggiunti dagli ingegneri che lavorano principalmente come artigiani, cioè attraverso l'applicazione logica di principi ben definiti. Il costo di un determinato ponte può essere stimato in base all'esperienza e agli studi di concetti alternativi.
>
> . . .
>
> Gli aspetti estetici del design dei ponti sono più importanti di quelli comunemente ammessi. Le strutture ingegneristiche di solito producono un impatto significativo sugli ambienti naturali e umani. Gli utenti dei ponti producono anche effetti nuovi e solitamente spiacevoli sull'ambiente, come il rumore e i gas di scarico.
>
> (Menn, 1996 PDF)

15.4.10 Fazlur Rahman Khan (1929-1982)

Fazlur Rahman Khan (1929-1982), nato a Dhaka (all'epoca in India, ora Bangladesh), è stato un ingegnere ed architetto britannico, che era probabilmente, dopo Nervi, il più grande ingegnere strutturale della seconda metà del XX secolo. Nella seconda metà del XX secolo, sviluppa sistemi strutturali innovativi, tra cui il tubo incorniciato, il tubo troncato e il tubo in bundle, che ha permesso altezze di costruzione senza precedenti con maggiore efficienza materiale e flessibilità architettonica, ha reso gli edifici supertall economicamente fattibile,

[40] Othmar Ammann ha progettato il George Washington Bridge (il ponte di George Washington)§39.4), il Ponte Verrazano-Narrows, e il Ponte di Bayonne.

[41] Per Vitruvius, se *esecuzioni* e *uti* i requisiti sono soddisfatti, quindi *La mia* seguirà.

COPIA DI REVISIONE



https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=85195985

Figura 15.26: Ponte Sunniberg di Menn

rimangono fondamentali per la costruzione ad alta velocità oggi, ha trasformato la logica strutturale dei grattacieli, e ha reso possibile gli edifici supertall che definiscono i skylines urbani contemporanei (Fig. 15.27).

Dopo aver ricevuto il Bachelor of Civil Engineering presso l'Ahsanullah Engineering College (oggi Bangladesh University of Engineering and Technology) di Dhaka, nel 1952 si recò negli Stati Uniti su una borsa di studio Fulbright. All'Università dell'Illinois di Urbana-Champaign, conseguì due master (in ingegneria strutturale e meccanica teorica e applicata) e un Ph.D. Dopo un breve ritorno in Pakistan come ingegnere esecutivo per l'Autorità per lo Sviluppo di Karachi, Khan si è unito all'ufficio di Chicago di Skidmore, Owings & Merrill (SOM) nel 1955, dove trascorreva tutta la sua carriera, diventando partner nel 1966 e un naturalizzato statunitense. Chicago, città natale del grattacielo, ha tradizionalmente rivaleggiato con New York per la costruzione di edifici alti e ha fornito l'ambiente ideale per le innovazioni di Khan.

Le sue opere principali includono il John Hancock Center di 100 piani (1969) e la 110 piani Sears Tower (ora Willis Tower, 1973)—quest'ultimo che detiene il titolo di edificio più alto del mondo per oltre due decenni. Khan è stato eletto all'Accademia Nazionale di Ingegneria nel 1973, ha ricevuto dottorati onorari dalla Northwestern University, Lehigh University e ETH Zürich, e è stato nominato *Ingegneria News-Record*'s Uomo dell'anno nel 1972.

Il premio per l'altezza e l'innovazione tubolare Quando Khan iniziò la sua carriera in SOM alla fine degli anni '50, le opzioni disponibili per i progettisti di edifici alti erano sorprendentemente limitate.–rimanendo i momenti di ribaltamento e le travi indotte da vento e terremoti.Il telaio in acciaio rigido convenzionale—in cui colonne distanziate in tutto il piano portano sia la gravità che i carichi laterali—-aveva dominato costruzione grattacielo dalla fine del XIX secolo. La costruzione di strutture rigide tradizionali, con connessioni di resistenza al momento tra colonne e travi, diventa sempre più inefficiente in

COPIA DI REVISIONE

quanto gli edifici crescono più alti: le dimensioni dei membri si escalano rapidamente e le colonne interne proliferano. Tuttavia, poiché gli edifici sono più alti, la quantità di acciaio necessaria per resistere alle forze eoliche è aumentata sproporzionatamente, creando ciò che Khan ha definito il "premium per l'altezza." Il suo famoso diagramma del 1969 ha illustrato come i requisiti di acciaio per la bracing del vento sono aumentati drammaticamente con l'altezza di costruzione sotto il inquadramento convenzionale, rendendo gli edifici supertall proibitivamente - costoso.

La rivoluzionaria visione di Khan era quella di riconoscere che il telaio rigido non era l'unico sistema strutturale adatto per edifici alti e riconcettualmente l'intero perimetro dell'edificio come tubo strutturale—un cantilever cavo che sorgeva dal terreno, con colonne esterne strettamente distanziate collegate da travi di spadri profondi che formano un tubo rigido che resiste Spostando gli elementi di sollevamento del carico laterale primario al perimetro dell'edificio, concepì la struttura come un tubo cavo tridimensionale in grado di essere scavato dalla fondazione–analogo, come ha poi notato, al bambù che crebbe nel suo natio Bangladesh. Questo concetto tubolare, implementato per la prima volta nel DeWitt-Chestnut Apartments di Chicago (1963-66) e successivamente realizzato nel DeWitt-Chestnut Apartment Building (1963) e nel Brunswick Building (1965), utilizzato colonne perimetrali strettamente distanziate collegate da travi a spadriglia profonda per creare un rigido esterno "skin" che fungesse simultaneamente da struttura, braciatura del vento e espressione architettonica, mentre liberando l'interno per piani flessibili e notevolmente migliorata efficienza strutturale. Concentrando la resistenza laterale nel perimetro, il tubo libera spazi interni dalla foresta di colonne richieste da inquadramento convenzionale.

Sistemi strutturali e lavori principali Khan ha sviluppato diverse varianti del concetto di tubo per affrontare diverse altezze e requisiti funzionali e relazioni sistematiche tra altezza edile e sistema strutturale ottimale—da telai rigidi per edifici a bassa velocità attraverso pareti di taglio, cornici intrecciate e varie configurazioni di tubi per altezze crescenti.Questo concetto "premium per altezza" ha fornito ai progettisti una guida razionale per la selezione di sistemi strutturali basati sull'efficienza piuttosto che sul precedente. *tubo telaio*, esemplificati dall'edificio DeWitt-Chestnut e successivamente le torri del World Trade Center di New York (engineered by Leslie Robertson utilizzando i principi di Khan), si sono dimostrate efficienti per edifici fino a circa 60 storie.

Per il centro di 100 piani John Hancock (1965-69), Khan ha introdotto il *tubo trussed* (o tubo rinforzato), in cui i membri di frenatura diagonale— l'iconico esterno dell'edificio X-braces—sfiora il tubo contro lama di taglio e riduce drasticamente i requisiti dell'acciaio. kg di acciaio per metro quadrato, rispetto al 206 kg/m^2 per l'Empire State Building e 275 kg/m^2 per One Chase Manhattan Plaza. Per la Torre dei Sears, Khan ha inventato il *tubo in bundle*, costituito da nove tubi quadrati di varie altezze raggruppati, che hanno fornito una rigidità eccezionale, consentendo al profilo dell'edificio di tornare come esso rose—provendo che "le torri efficienti non dovevano più essere box-like; le unità tubo-potere potrebbero

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

prendere su varie forme e potrebbero essere raggruppate in diversi tipi di raggruppamenti." La 110-story Sears Tower (1973, ora Willis Tower), che impiegano nove tubi super di altezza.

Khan ha anche pionieri dei sistemi compositi in acciaio-concrete e l'uso di cemento leggero nella costruzione ad alta velocità, ed è stato tra i primi ad impiegare computer per l'analisi strutturale e la verifica del design.

La seguente citazione cattura il suo approccio sistematico:

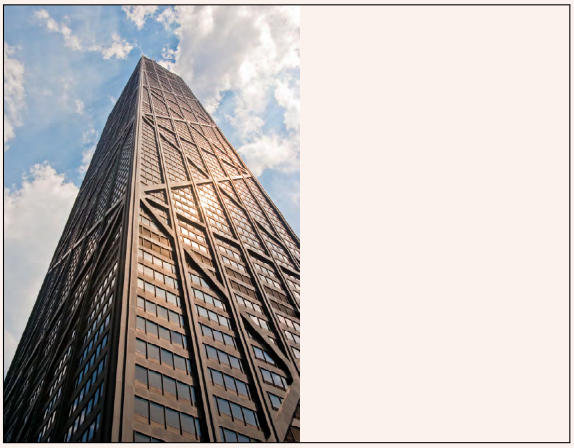
> Tuttavia, la costruzione di edifici ad alto livello può essere economicamente attraente solo se gli ingegneri strutturali possono avere una comprensione completa dei comportamenti strutturali di vari sistemi da un lato e il senso pratico dei problemi di costruzione dall'altro.
>
> . . .
>
> Una struttura che utilizza la minor quantità di acciaio può portare ad un edificio finito molto costoso perché non è stata data alcuna considerazione a uno dei fattori non strutturali che interessano l'edificio finito. D'altra parte, una struttura che è progettata solo per adattarsi all'estetica 'Visioni' dell'architetto e le esigenze di tutti gli altri scambi è destinata a contribuire all'inferiorità e al costo eccessivo della maggior parte dell'edificio finito.
>
> a Strutture inconnesse
> b Strutture semirigide
> c Strutture incorniciate
> d Strutture con travi a tracolla
> e Strutture con cornice interagente e travi a tracolla
> f Strutture di tipo Rigid-box
>
> i Colonne esterne ravvicinate
> ii diagonali ravvicinate come pareti esterne
> iii Colonna di ottimale-diagonale-spandrel per pareti esterne
>
> (Khan, 1965)

Filosofia del design e collaborazione Oltre alle sue innovazioni tecniche, Khan si distingue per il suo approccio al rapporto tra ingegneria e architettura. La sua celebre partnership con l'architetto Bruce Graham alla SOM ha esemplificato la sua convinzione che la struttura debba essere il principio organizzativo del design architettonico, non solo un quadro nascosto. Khan ha posseduto ciò che Graham ha descritto come "una comprensione intuitiva del comportamento strutturale"— ha detto una volta, "Quando il design, mi ha messo nel posto di un intero edificio, sentendo ogni parte.

La sua integrazione della logica strutturale con la pianificazione architettonica—il tubo ha permesso interni senza colonne e piastre flessibili del pavimento–esemplificò la collaborazione tra ingegnere e architetto che produce i migliori edifici alti. Khan era anche un pioniere nell'analisi strutturale assistita dal computer, riconoscendo presto il potenziale di calcolo digitale per analizzare i sistemi complessi e altamente indeterminati di edifici alti.

COPIA DI REVISIONE

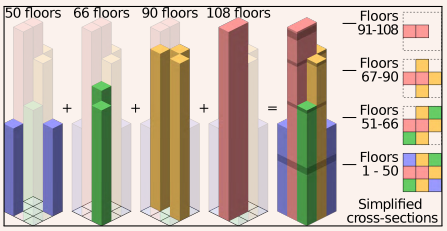
Khan morì improvvisamente nel 1982 all'età di 52 anni mentre lavorava al progetto Hajj Terminal in Arabia Saudita, tagliando breve una carriera di straordinaria creatività, ma i suoi sistemi strutturali continuano a plasmare skyline in tutto il mondo, dalle Torri di Petronas a Kuala Lumpur al Burj Khalifa a Dubai—quest'ultimo che rappresenta, come osservava un commentatore, "l'espressione ultima della sua filosofia di design audace e leggero'. Khan Lifetime Achievement Medal in suo onore, ci sono voluti quasi cinquant'anni per il suo documento di riferimento sugli edifici ad alta velocità da aggiornare da Baker, Skidmore et al., 2013 per le torri supertali del XXI secolo.



(a) X-bracing esterno del John Hancock Building



(b) Torre di Willis



(c) Moduli Willis Tower

Figura 15.27: Gli edifici iconici di Khan

15.4.11 I Progettisti confrontati: Designer-Builders e i loro materiali

Gli ingegneri profilati in questo capitolo condividono una caratteristica distintiva: non erano solo progettisti ma anche *costruttori*–imprenditori che possedevano o controllavano aziende edili, consentendo loro di sperimentare nuove tecniche e materiali in modi che raramente potevano consultare gli ingegneri, che si integravano nel design e nella costruzione, incarnati nel termine italiano *progetti*, era centrale per i loro successi.

COPIA DI REVISIONE

15.4.11.1 Eiffel e metallo

La compagnia di Gustave Eiffel, *Compagnie des Établissements Eiffel*, specializzata in prefabbricati in ferro e acciaio, i componenti di fabbrica di alta precisione, poi trasportati e assemblati sul sito—un approccio industrializzato che ha permesso una costruzione rapida ed economica di ponti, torri e edifici. La Torre Eiffel stessa è stata prefabbricata fuori sede e assemblata con notevole velocità.

15.4.11.2 Nervi e Ferrocement

Pier Luigi Nervi ha fondato *Nervi & Bartoli* Nel 1932, attraverso il quale sviluppa e applica il ferrocement come materiale costruttivo pratico, il suo controllo sia sul design che sull'esecuzione gli permette di innovare senza contare su appaltatori esterni, assicurando che le sue idee per sottili conchiglie e strutture a costine possano essere pienamente realizzate.

15.4.11.3 Roebling e cavi

John Roebling (1806–1869), anche se non discusso a lungo in questo capitolo, merita di menzionare come il pioniere dei ponti sospensioni a filo-ropo. *John A. Roebling's Sons Company*, sia ponti progettati che fabbricati i cavi di filo utilizzati in loro – un'integrazione verticale che ha permesso Roebling di mantenere il controllo rigoroso sulla qualità materiale. Il ponte di Brooklyn (1883), completato dopo la morte di Roebling da suo figlio Washington, ha dimostrato il potenziale di cavi di filo-rope per strutture di sospensione a lungo raggio e ha stabilito il paradigma per il design moderno ponte sospeso.

15.4.11.4 Filetti comuni

Diversi modelli emergono da questi confronti:

Azienda come laboratorio. Ogni ingegnere ha usato la sua azienda come piattaforma per sperimentare e spingere i confini di ciò che potrebbe essere raggiunto con il suo materiale scelto—Eiffel con ferro e acciaio, Nervi con ferrocement, Roebling con corda di filo.

Partecipazione diretta alla costruzione. Tutti e tre erano profondamente coinvolti nel processo di costruzione reale, che ha dato loro conoscenza intima di come i loro disegni sarebbero stati costruiti e ha permesso loro di mantenere il controllo di qualità.

Integrazione del design e dell'ingegneria. La capacità di progettare e costruire sotto la stessa azienda ha permesso a questi ingegneri di fondere perfettamente gli aspetti estetici e funzionali, con conseguente struttura che risultasse sia visivamente sorprendente che strutturalmente sana.

Magistralità dei materiali. Ognuno di essi divenne il principale praticante del suo

COPIA DI REVISIONE

materiale strutturale scelto, sviluppando tecniche e applicazioni che altri in seguito adottarono e raffinate.

Questo modello del costruttore-imprenditore, pur sempre meno comune, data la separazione del design e della costruzione nella pratica moderna, rimane il modello per realizzare l'integrazione di struttura e architettura che caratterizza le più grandi opere di ingegneria strutturale.

15.5 Morfiogenesi strutturale: figure chiave

Nelle pagine che seguono, incontrerete le figure chiave che hanno contribuito a stabilire ciò che potrebbe essere chiamato *morfogenesi strutturale*: l'idea che la forma strutturale possa essere generata da vincoli piuttosto che da soli gusti. Qui, la morfogenesi (letteralmente, "la forma') significa il processo con cui la geometria emerge dalle esigenze di carico, condizioni di supporto, limiti materiali, stabilità e costruttività. Questi ingegneri e architetti hanno imparato a "lasciare la struttura parlare,' se attraverso modelli di catena sospesa e funicolari, esperimenti di membrana e shellnet, forme di tensione- *scoperto* come configurazioni di equilibrio in cui forze, materiali e geometria si stabiliscono in una coerente—— e spesso elegante—tutto.

Gli ingegneri e gli architetti sono più comodi con strutture che possono essere matematicamente descritte: un fascio diritto, un arco (circolare, parabolico o catenario), o un guscio definito da superfici quadriche.[42] Non solo queste forme sono "pleasing", ma fanno anche la ricerca di una soluzione matematica trattabile.

Ma possiamo cercare una superficie altrettanto piacevole che risponda a due criteri: a) estetica e (b) solidità strutturale?

Questa sezione discute la ricerca di forme di ricerca di tale forma-finanziamento da parte di ingegneri notevoli. Boller e D'Acunto, 2021; Boller e Schwartz, 2020 hanno recentemente affrontato questa questione esaminando i lavori di Frei Otto, Isler e Musmeci (Tabella 15.5).

15.5.1 Catenary

Storicamente, il primo problema della "form-finding" era la ricerca della forma—l'equazione matematica che descrive—un cavo sospeso tra due punti. Anche se in ultima analisi è stata trovata un'equazione matematica, la storia degli studi catenari alla fine del XVII secolo è un affascinante per il lettore moderno.

[42] Come cono, cilindro, ellissoide, cono ellittico, cilindro ellittico, iperboloide ellittico, paraboloide ellittico, cilindro iperbolico, paraboloide iperbolico, paraboloide, sfera e sferoide.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 15.5: Cercatori di moduli

Catenary		
Huygens	Tensione	Filo di sospensione
Poleni	Compressione	St. La Cupola di Pietro
Gaudí	Compressione	Sagrada Familia
Saarin	Compressione	St. Louis Arch
Membrana		
Isler	Compressione	Tetti di conchiglia
Musmeci	Compressione	Ponte di Basento
Frei Otto	Tensione	Stadio di Monaco

È una storia di competitività (di tre figure tortuose), ego (Leibniz che vuole dimostrare la supremazia del calcolo "suo"), comunicazioni segrete (uso esteso dei cifrari), corrispondenza privata (tra Leibniz e Huygens), gelosia (tra i fratelli Jakob e Johann Bernoulli), pressione editoriale (da parte del direttore del *Atto Eruditorum*[43]), e molto altro.

Inoltre, era una "affare di famiglia", poiché tutti i protagonisti sono in qualche modo connessi: Huygens era il mentore di Leibniz, che era il consigliere di Jakob Bernoulli, che era il fratello di Johann Bernoulli, che era il padre di Daniel Bernoulli e consigliere di Euler.

Per i dettagli analitici, consultare §30.3.3

15.5.1.1 Poleni (1683–1761)

Il primo esempio conosciuto di formazione-finanziamento *applicazione* fu di Giovanni Poleni, che fu chiesto di indagare su cracking a St. La cupola di Pietro a Roma (§4.4.3(Fig. 15.28a).

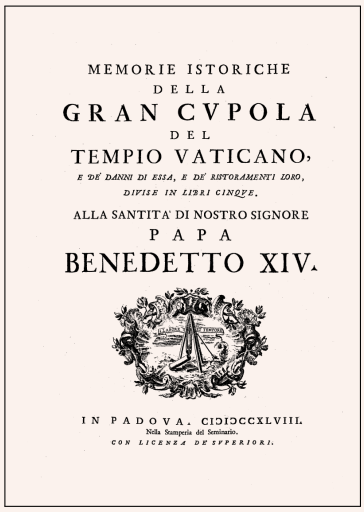
In seguito ad un'indagine iniziale da parte dei cosiddetti "tre matematici", Poleni fu incaricato di presentare un rapporto. In essa, egli ha valutato la stabilità della cupola, tagliandola in cinquanta tagli e confrontando la forma di ogni fetta con quella di un catenario invertito—-è noto che un cavo appeso porta una tensione pura (Poleni, 1748 PDF) (Fig. 15.28b).

15.5.1.2 Antoni Gaudí (1852-1926)

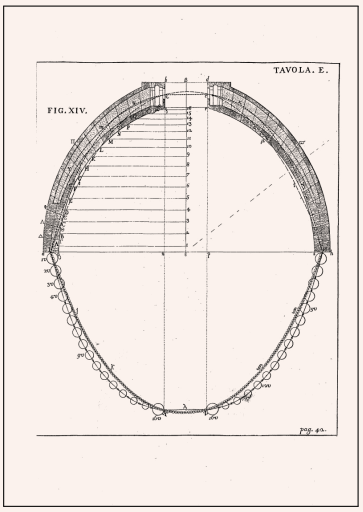
L'esempio più saliente del design strutturale basato su modelli di scaling up doveva aspettare alcuni secoli, fino a quando Gaudí non ha progettato *Sagrada Familia* a Barcellona nei primi anni del 1900, come già noto, invertendo un catenario (la forma assunta da un cavo flessibile sotto il suo peso) produce un *perfetto* arco sotto compressione pura (Huerta, 2006).

[43] La rivista scientifica di primo piano in Europa all'epoca.

COPIA DI REVISIONE


MEMORIE ISTORICHE
DELLA
GRAN CVPOLA
DEL
TEMPIO VATICANO,
E DE' DANNI DI ESSA, E DE' RISTORAMENTI LORO,
DIVISE IN LIBRI CINQVE.
ALLA SANTITA' DI NOSTRO SIGNORE
PAPA
BENEDETTO XIV.
IN PADOVA. CIↃIↃCCXLVIII.
Nella Stamperia del Seminario.
CON LICENZA DE' SVPERIORI.

(a) Rapporto di Poleni



(b) Il confronto di Poleni di una fetta di cupola con un catenario

Figura 15.28: L'indagine di Poleni su St. La cupola di Peter si sta spaccando (Poleni, 1748)

> La linea retta appartiene agli uomini, quella curva a Dio.
>
> Attribuito a Antoni Gaudí (citata in tutto il mondo, nessuna fonte primaria verificata)

Gaudí si imbarcò in forme di formatura per la cattedrale costruendo un modello di scala *catenoidi* (conchiglie ottenute ruotando una curva catenaria su un asse), come mostrato in Fig. 15.29aQuesto era infatti un sostituto molto intelligente per un problema altrimenti complesso.Notiamo che, mentre molti avevano esplorato la forma di un unico catenario, Gaudí potrebbe essere stato il primo a esplorare un insieme di catenari dove alcuni sono attaccati ad altri. Figura 15.29b mostra un modello in gesso della cattedrale dove la navata a punta alta è caratteristica di un catenario.

15.5.1.3 Eero Saarinen (1910–1961)

Eero Saarinen è stato un architetto che si è avvalso dell'assistenza di ingegneri strutturali per progettare strutture di riferimento, coniugando la sua sensibilità formale architettonica con i requisiti scientifici e tecnici necessari per realizzare con successo opere innovative e originali. (Rega, 2013). Ha progettato due strutture di riferimento negli Stati Uniti, entrambi ispirati al catenario: (a) Dulles Airport (analizzato nel capitolo 39.1); e (b) l'Arco di gateway di St. Louis.

La visione formale dell'architetto è stata resa possibile dalle severe regole della matematica e della meccanica, secondo cui la forma ottimale di un arco volto a trasferire il proprio peso al terreno senza stress di trazione è rappresentata dal catenario di equilibrio invertito.

COPIA DI REVISIONE



(a) Modello catenoide di Gaudí per la Sagrada Família (Dragicevic e Jansen, 2012)



(b) Modello in acciaio

Figura 15.29: La Sagrada Familia di Gaudí

Consapevole dei suoi limiti nell'analisi strutturale, Saarinen cercò l'aiuto di Hannskarl Bandel per ottenere la forma finale dell'arco. Quando Saarinen cercò di dimostrare la sua forma desiderata con una catena sospesa nelle sue mani, non riuscì a raggiungere l'effetto "sorprendente" leggermente allungato, che voleva.[44] Quando si valuta la resistenza dell'arco di 630 piedi al vento, Bandel ha determinato che doveva aggiungere più peso ai primi 300 piedi dell'arco per abbassare il centro di gravità, che richiedeva 25.980 tonnellate di cemento.

L'arco è alto 625 piedi da 600 piedi di larghezza alla sua base. La sezione trasversale è un triangolo equilatero, e la zona trasversale diminuisce linearmente con altezza. I lati corrispondenti diminuiscono da 54 piedi alla base a 17 piedi in alto (Fig. 15.30a). I calcoli delle dimensioni dell'arco sono lontani da semplici[45] (MATLAB codice è elencato in Appendix I.1.2), e in effetti è stata questa notevole interazione tra un architetto e un ingegnere strutturale che ha reso possibile questo.

15.5.2 Conchiglie e Membrane

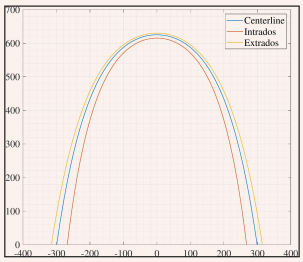
Mentre Gaudí e Saarinen sperimentarono curve catenarie per determinare la forma perfetta di un tetto o di un arco, Frei Otto, Isler e Musmeci sperimentarono superfici, la prima in tensione, le altre in compressione.

[44] Esame ravvicinato della Fig. 15.28b sembra mostrare perline di dimensioni variabili nel lavoro di Poleni per St. La cassaforte di Peter.

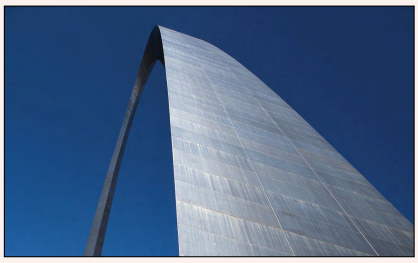
[45] Le calcoli, che coinvolgono funzioni iperboliche, erano state portate al sesto posto decimale, senza il beneficio di calcolatori e computer moderni.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Dimensioni



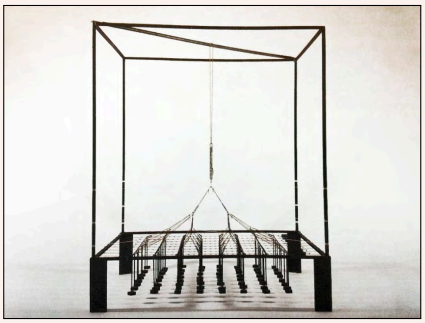
(b) L'Arco

Figura 15.30: Arco di gateway di Saarinen

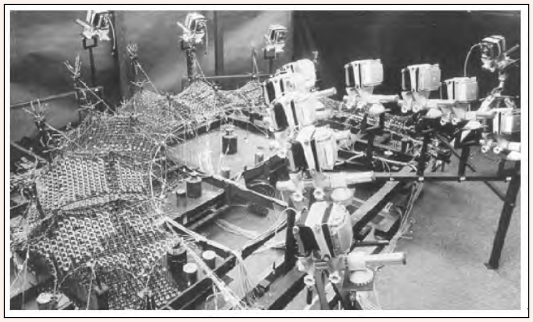
15.5.2.1 Frei Paul Otto (1925-2015)

Frei Paul Otto è stato un versatile architetto tedesco *e* ingegnere strutturale. Ha lavorato su forme di raffinazione per superfici a membrana trasla (Rasch e Otto, 1996), costruzione ramificata (primariamente in compressione) (Ap e Faia, 2018) (Fig. 15.31a), e l'analisi delle membrane pendenti (tensione) (Otto, Trostel e Schleyer, 1973) (Fig. 15.31b).

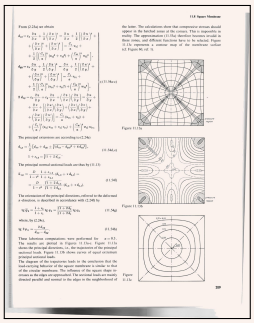
Otto non era solo un abile sperimentatore e architetto, ma era altrettanto a suo agio con la complessa meccanica e matematica associata all'analisi analitica delle strutture a membrana traslabile (Fig. 15.31c).



(a) Studio struttura a ramificazione



(b) Test di modello dello stadio di Monaco



(c) Analisi della membrana trasile (Otto, Trostel e Schleyer, 1973)

Figura 15.31: Frei Otto

15.5.2.2 Heinz Isler (1926-2009)

Questo approccio è stato seguito dall'ingegnere svizzero Heinz Isler (Chilton e Isler, 2000), che ha progettato *naturale* Nel suo metodo "free Hang membrane" Isler ha creato forme di tessuto ammorbidito liberamente appeso; quindi, per aumentare la rigidità della shell, ha piegato i bordi in base alla sua esperienza. (Brew, 2007)Isler ha anche usato calcoli

COPIA DI REVISIONE

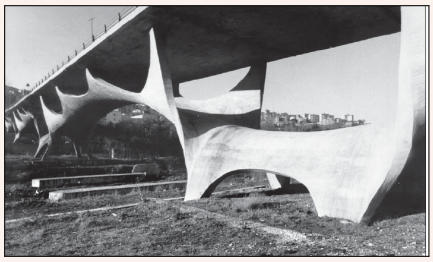
semplici, basandosi sull'ipotesi che non vi sia alcun momento di piegatura, per stimare l'entità delle forze – anche se un'azione flessorale trascurabile esiste vicino ai supporti.



(a) Modello di Gaudí (source)



(b) Conchiglia naturale isolorante



(c) Ponte di Musmeci (source)

Figura 15.32: Esempi moderni di formazione-finanziamento attraverso modelli fisici

15.5.2.3 Sergio Musmeci (1926-1981)

Sergio Musmeci è stato un ingegnere poliedrico che, più della maggior parte, ha esplorato la reciproca dipendenza tra struttura e forma architettonica nel suo modo unico, sia come sperimentatore che ha capito il flusso di forza[46] e quindi derivato da esso. Egli ha considerato che la forma (non stress) dovrebbe essere l'ignoto primario.

La struttura più associata a Sergio Musmeci è il famoso ponte sul fiume Basento (Fig. 15.33a–15.33b). È supportato da un'unica superficie di torsione continua le cui dita inesperte si alternano a prop up del ponte o della luce al suolo, generando quattro campate di circa settanta metri ciascuno. m di lunghezza ed è composto da un mazzo di cemento armato sostenuto da un guscio doppio curvatura continuo dello stesso materiale. Il guscio, che forma quattro campate uguali di 69.2 m ciascuno, ha uno spessore di 0.30 m ed è caratterizzato da costole più profonde a entrambi i confini laterali; porta il ponte con 16 coppie di supporti posti a intervalli uguali di 17.30 m lungo l'asse longitudinale e 12.00 m trasversalmente. La scocca RC è rinforzata da due griglie di ϕ16 barre di acciaio mm, con una spaziatura uniforme di 0.2 m, situato all'interno e agli extradosi con copertura in cemento pari, le due costole più profonde su entrambi i lati della conchiglia sono dotate di ulteriore rinforzo (Marmo et al., 2019 PDF).

Musmeci ha effettuato prove sperimentali estese (Fig. 15.33c) sia per la formazione *e* analisi dello stress.[47] Questo era necessario per il complesso che ne esegue il rinforzo (Fig. 15.33d). Va aggiunto che ha completato la sua modellazione di scala con l'applicazione delle equazioni Laplace e metodi di differenza finiti.

Come l'Ippodromo Zarzuela di Madrid, il ponte è stato dichiarato un "monumento di interesse culturale" dal Ministero del Patrimonio e della Cultura italiano.

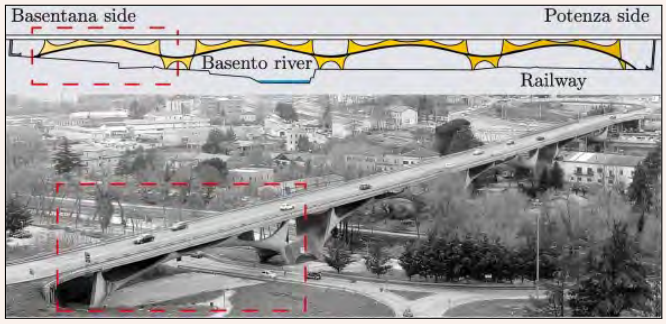
[46] Per strutture molto più complesse di quelle di Nervi.
[47] Il modello micro-concrete è stato testato presso ISMES, Bergamo.

COPIA DI REVISIONE

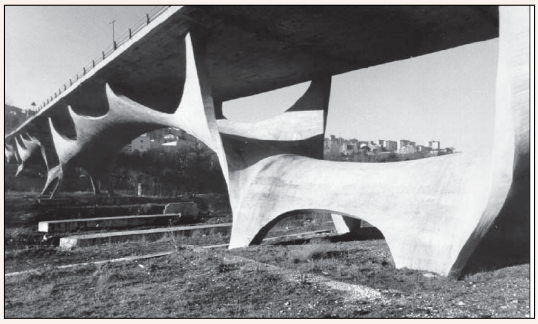
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

> Secondo Musmeci, la forma di una struttura non è semplicemente l'esito dei calcoli; è anche un veicolo per comunicare, a livello espressivo, la nozione che tutto ciò che è essenziale per il comportamento strutturale [. . .] dovrebbe anche far parte della forma visibile, che fa parte del messaggio.
>
> (Brodini, 2013)

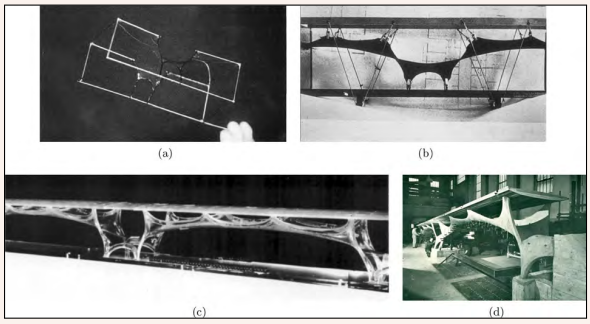
Il ponte, più di molte altre strutture, ha la sua forma e funzionalità in armonia, ma il suo valore architettonico/estetico è discutibile, ma è una singolare combinazione che vale la pena studiare.



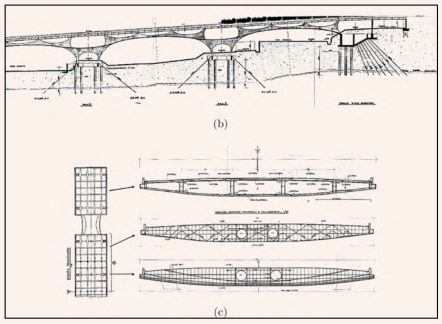
(a) Ponte completo (Marmo et al., 2019)



(b) Dettagli del ponte (Desideri et al., 2013)



(c) Model tests: (a) soap, (b) neoprene, (c) plexiglass, (d) micro-concrete (Marmo et al., 2019)



(d) Rinforzo (Marmo et al., 2019)

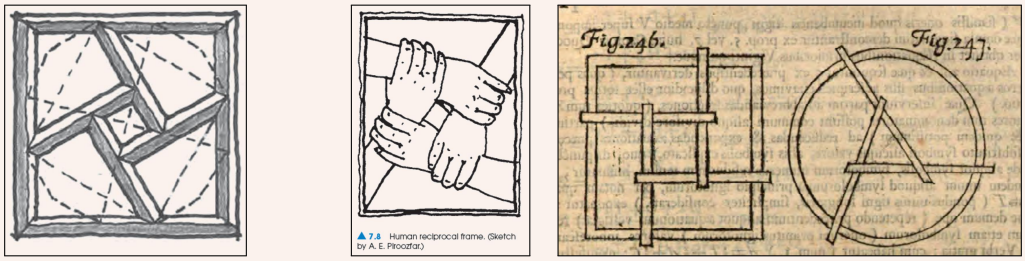
Figura 15.33: Ponte di Musmeci sul fiume Basento

15.5.3 Strutture reciproche

Il principio di reciprocità si basa sull'uso di elementi portanti che, appoggiandosi l'un l'altro lungo le loro campate e mai alle estremità, compongono una configurazione spaziale senza una chiara gerarchia strutturale (Pugnale e Sassone, 2014)In altre parole, tutti i membri della struttura dipendono l'uno dall'altro per il reciproco sostegno, e nessuna sottostruttura è stabile fino a quando l'intera struttura non è completa. Infine, la rimozione di un singolo elemento strutturale rende ogni parte della struttura mobile rispetto ad ogni altra parte.

COPIA DI REVISIONE

La struttura iconica di una struttura reciproca è mostrata in Fig. 15.34.



(a) (Larsen, 2007) (b) Wallis, 1695

Figura 15.34: Strutture reciproche: concetti illustrativi

15.5.3.1 Sviluppo storico

L'esempio più antico conosciuto è dato da Villard de Honnecourt (De Honnecourt, 2006) (De Honnecourt, 1858) circa 1240. Figura 15.35a mostra il suo disegno di una struttura reciproca, con testo di accompagnamento che descrive il problema: *Ensi poe's ovrer a one tor u a one maison de bas, si sunt trop cor*–tradotto in modo ostile come "come lavorare su una torre o una casa se le travi sono troppo brevi.'

Questo schema fu poi considerato da Leonardo da Vinci in due dei suoi codici.[48] Nel suo Codex Madrid I (Da Vinci, 1490), troviamo uno schizzo simile (Fig. 15.35b). Nel suo Codice Atlantico (Da Vinci, 1505), vediamo una variazione più complessa su quel tema (Fig. 15.35c).

Naturalmente, né de Honnecourt né Leonardo hanno fornito una soluzione analitica al complesso problema della struttura reciproca, che doveva aspettare che si trattasse di una soluzione analitica. Wallis, 1695, la cui analisi matematica delle forze nella struttura reciproca è forse il primo esempio registrato di un'analisi strutturale completa di una struttura non-triviale.[49]

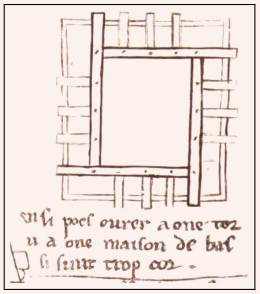
Wallis ha così presentato il primo calcolo strutturale in cui tutti questi elementi sono stati combinati (Houlsby, 2014):

- Presentazione di un disegno chiaro della struttura, in cui le articolazioni sono etichettate;
- Sfruttamento di una simmetria quattro volte per semplificare l'analisi successiva;

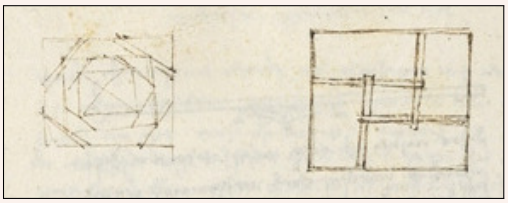
[48] Il codice era l'antenato storico del libro moderno con contenuti scritti a mano. Un codex, molto simile al libro moderno, è legato da impilare pagine e fissare un insieme di bordi—una forma analoga alla moderna libreria. Il codex ha sostituito i rotoli precedenti di papiro e tavolette di cera, offrendo diversi vantaggi: potrebbe essere aperto subito a qualsiasi punto del testo, abilitato la scrittura su entrambi i lati del testo, e potrebbe riferire i numeri a lungo. *il mio libro*.

[49] Come già detto, John Wallis è colui che ha introdotto il simbolo dell'infinito ∞ in 1655.

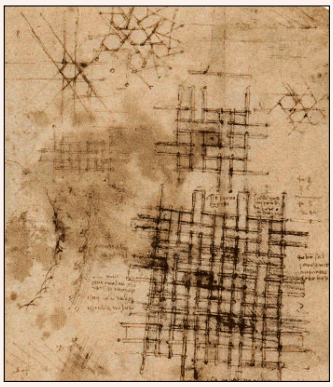
Libro I: Una breve storia della meccanica e dell'analisi strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE



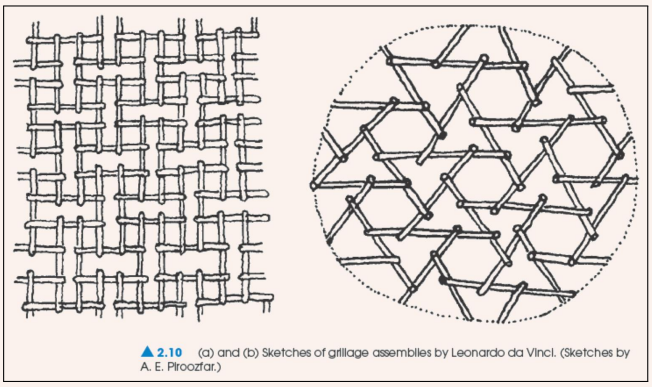
(a) De Honnecourt, 2006 - Un taccuino. E XLIII



(b) Da Vinci, 1490 Madrid Codex, Folio 49



(c) Da Vinci, 1505, Codex Atlanticus, Folio 899v



(d) Lo schizzo di Leonardo spiega (Larsen, 2007)

Figura 15.35: Esempi primitivi di strutture reciproche

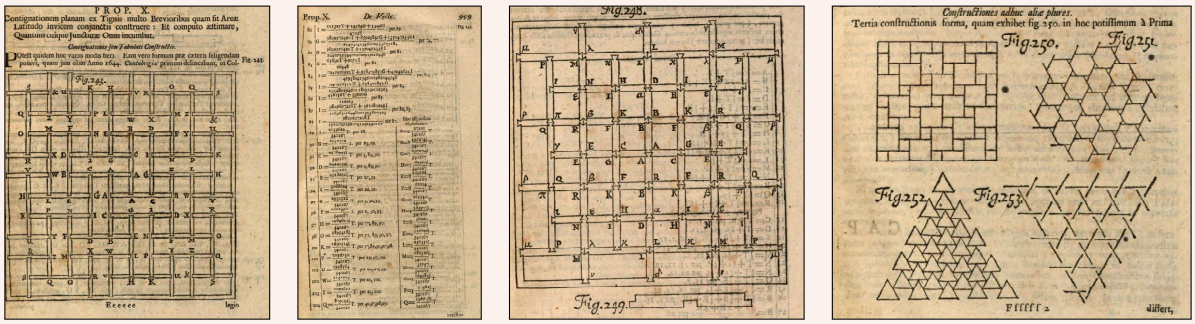
- Un'analisi basata sull'applicazione sistematica di un semplice principio (equilibrio del movimento di ogni fascio) a tutti i membri della struttura, con conseguente 25 equazioni lineari simultanee;
- Una eliminazione sistematica tra le equazioni da risolvere per le 25 variabili;
- Dal risultato ottenuto, l'estrazione di importanti conclusioni strutturali su carichi sui membri salienti nella struttura.

Una nota su John Wallis (1616–1703): è stato un ecclesiastico e matematico inglese che gli è stato dato un credito parziale per lo sviluppo del calcolo infinitesimale. ∞ per rappresentare il concetto di infinito. $1/\infty$ era un contemporaneo di Newton e uno dei più grandi intellettuali del rinascimento precoce della matematica.

15.5.3.2 Rivivalanza moderna

Ormai il termine «cornici reciproche» sembra aver sostituito «strutture reciproche», e il loro studio sembra essere stato rianimato da Olga Popovic attraverso la sua tesi di

COPIA DI REVISIONE



(a) Formulazione dei problemi (b) Risolvere 25 equazioni con 25 sconosciuti (c) Percorso di carico (d) Variazioni su un tema

Figura 15.36: Analisi delle strutture reciproche Wallis, 1695

laurea (Popovic, 1996), libro seminale (Larsen, 2007), e numerose altre pubblicazioni (Popovic Larsen, 2014).

Figura 15.37 si concentra su quello che è probabilmente il più noto telaio reciproco in Giappone, *Salone dell'esposizione di Seiwa* è difficile credere che siano state eseguite analisi strutturali dettagliate; piuttosto, un giudizio puramente "ingegneria" dell'architetto e un'eccellente maestria sembrano aver prevalso.

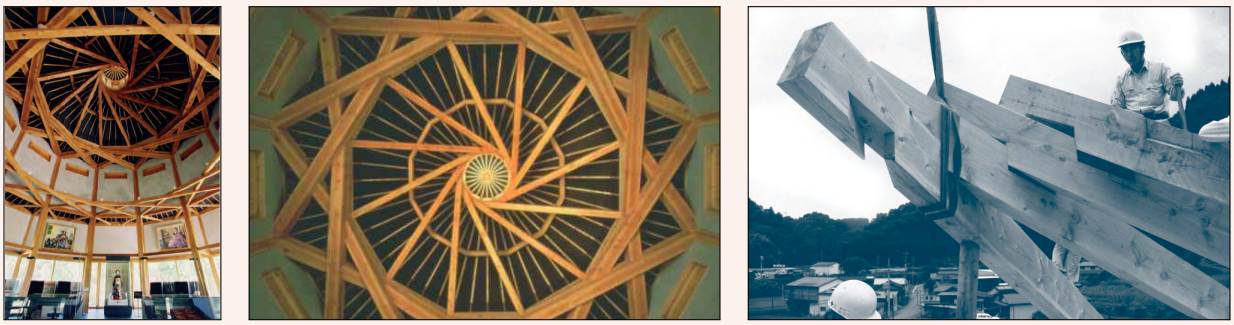


Figura 15.37: Salone dell'Esposizione di Seiwa (Giappone) (Popovic, 1996)

Come architetto, Popovic non si occupa di calcoli, e in effetti sembra che ci siano pochi casi del genere. (Schrama, 2021). La sua unica concessione alla meccanica è la definizione parametrica di un modulo di telaio reciproco (Fig. 15.38):

- Numero di travi (n)
- Radio attraverso i supporti esterni (r_o)
- Radius attraverso i punti di intersezione del fascio (r_i)
- Rialzo verticale dai supporti esterni ai punti di intersezione del fascio (H)
- Sculacciatura verticale delle linee centrali delle travi nei loro punti di intersezione (h_2)

COPIA DI REVISIONE

- Lunghezza delle travi sul pendio (L)

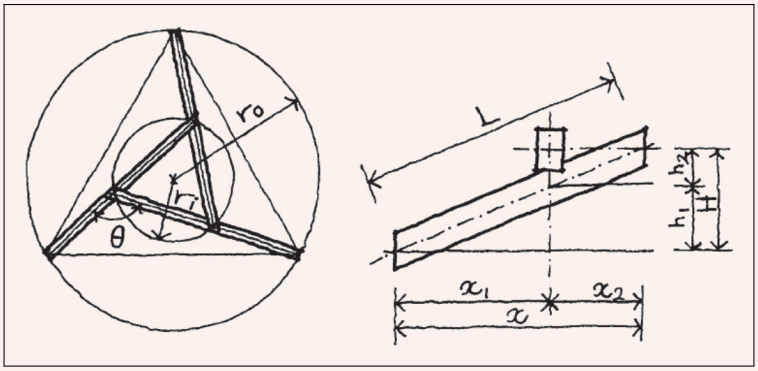


Figura 15.38: Parametrizzazione di un modulo di telaio reciproco (Popovic, 1996)

15.5.4 Ottimizzazione matematica: Maxwell, Michell, Baker e Beghini

In questa sezione si traccia l'evoluzione delle linee guida di design chiave dai principi di base all'applicazione moderna. Maxwell, 1864c, che non ha affrontato direttamente le considerazioni di progettazione. Michell, 1904 La carta di riferimento (considerata la prima carta che affronta l'ottimizzazione strutturale), e infine l'applicazione moderna di questi principi di Baker e Beghini.

15.5.4.1 Maxwell (1831-1879)

considerando che il documento seminale di Maxwell (Maxwell, 1864c) gettato le basi per il metodo di lavoro virtuale, era il suo successivo giornale (Maxwell, 1864b) che è stato più efficace per la professione (vedi §15.5.4.2).

Sommaturizzare ciò che ha scritto:

1. In qualsiasi sistema di punti in equilibrio in un piano sotto l'azione di repulsioni e attrazioni, la somma dei prodotti di ogni attrazione moltiplicata per la distanza dei punti tra i quali agisce è uguale alla somma dei prodotti delle repulsioni moltiplicate ciascuno per la distanza dei punti tra i quali agisce.
2. Moltiplicare ogni carico per l'altezza del punto a cui agisce, e ogni tensione per la lunghezza del pezzo su cui agisce, e aggiungere tutti questi prodotti insieme.
3. Quindi moltiplicare le pressioni verticali sui supporti del telaio ciascuno per l'altezza a cui agisce, e ogni pressione per la lunghezza del pezzo su cui agisce, e aggiungere i prodotti insieme.

COPIA DI REVISIONE

Semplicemente mettere: *la somma dei percorsi di carico di tensione di una struttura meno la somma dei percorsi di compressione è pari ad un valore legato alle forze esterne applicate*:

$$\sum F_T L_T - \sum F_C L_C = \sum \vec{P}_i \cdot \vec{\Delta}_i \tag{15.1}$$

Maxwell continua a dire:

> L'importanza di questo teorema all'ingegnere deriva dalla circostanza che la forza di un pezzo è in generale proporzionale alla sua sezione, in modo che se la forza di ogni pezzo è proporzionale allo stress che deve sopportare, il suo peso sarà proporzionale al prodotto dello stress moltiplicato per la lunghezza del pezzo.
>
> (Maxwell, 1864c)

15.5.4.2 Michell (1870-1959)

Mentre per tutti gli scopi pratici Maxwell ha derivato (indiretto) il principio del lavoro virtuale, non ha previsto l'applicazione della sua derivazione al disegno ottimale delle strutture.[50]

Questo è stato fatto da Michell, 1904, che ha seguito il lavoro di Maxwell (Eq. 15.1). Egli ha determinato il layout ottimale di una tregua per un singolo carico caso quando il valore assoluto dello stress assiale in qualsiasi barra non doveva superare un determinato limite. La sua soluzione e la condizione di progettazione hanno ricevuto notevole attenzione durante il XX secolo.[51]

> Un telaio raggiunge quindi il limite di economia di materiale possibile in qualsiasi struttura sotto le stesse forze applicate, se lo spazio occupato da esso può essere sottoposto a una piccola deformazione, tale che le tensioni in tutte le barre del telaio sono aumentate di frazioni uguali delle loro lunghezze, non meno del cambio frazionario di qualsiasi elemento dello spazio. Se lo spazio sottoposto alla deformazione si estende all'infinito in tutte le direzioni, il volume di tutto il telaio è mostrato un minimo rispettoso.
>
> La condizione $e = \varepsilon$ La deformazione da applicare è quindi una dilatazione uniforme o contrazione (secondo la struttura in tensione o compressione) di uno spazio che racchiude il telaio e si estende a qualsiasi limite finito o a infinito a piacere.
>
> I più semplici cornici minimi [capriate] di questa classe speciale sono:
>
> I Cravatte e montanti sottoposti a un unico paio di forze uguali e opposte.

[50] Per analogia, Eshelby, 1970 definito un certo numero di contorno integrale che sono percorso-indipendenti in virtù del teorema di conservazione dell'energia senza assegnare alcuna interpretazione fisica ('solo per la bellezza della matematica e della meccanica"' come lo erano). Rice, 1968, che l'ha trovato corrisponde al tasso di rilascio di energia di una crepa e così ha definito l'integrale di contorno che è venuto a portare il suo nome.

[51] Il problema più complesso di un layout ottimale di una truss per carichi alternativi sembrava ricevere meno attenzione.

COPIA DI REVISIONE

II Cornici triangolari e tetraedrali sotto forze applicate agli angoli della figura, e agendo lungo linee che intersecano all'interno della figura.

III Catenari in generale, i punti di applicazione delle forze applicate, così come le forze stesse, sono stati dati.

In tutti questi casi il volume minimo della cornice è

$$V_m = \frac{\sum l[f]}{P} = \frac{\partial W}{\varepsilon P} = \frac{\sum \varepsilon F r \cos\theta}{\varepsilon P} = \frac{\sum F r \cos\theta}{P}$$

dove F è una delle forze applicate, r la distanza del suo punto di applicazione R da un punto arbitrario O, θ l'angolo tra RO e la direzione di Fe P è lo stress ammissibile nel materiale.

...

Un telaio (è ottimale se) raggiunge il limite di economia di materiale possibile in qualsiasi struttura-struttura sotto le stesse forze applicate, se lo spazio occupato da esso può essere sottoposto ad una deformazione adeguata piccola, tale che le tensioni in tutte le barre del telaio sono aumentate da frazioni uguali delle loro lunghezze, non meno del cambio frazionario di lunghezza di qualsiasi elemento dello spazio.

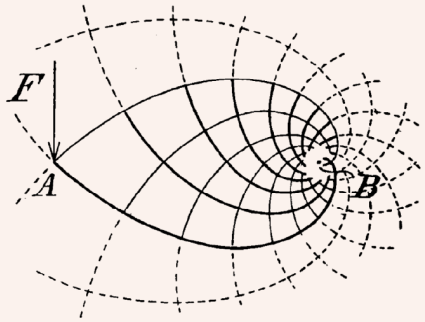
(Michell, 1904)

Michell continua a dire che una classe più generale di cornici soddisfa le condizioni $e = \varepsilon$ consiste di quelle le cui barre, sia prima che dopo la deformazione, formano curve di *sistemi ortogonali*. Questo è proprio dove Michell si collega con il secondo giornale di Maxwell, 1864b.

Michell ha dato i disegni ottimali di alcune strutture (trusse), mostrate in Fig. 15.39.

1. (Fig. 1.) A single force F applied at A, and acting at right angles to the line AB, is balanced by an equal and opposite force and a couple, of moment F × AB, applied at B.

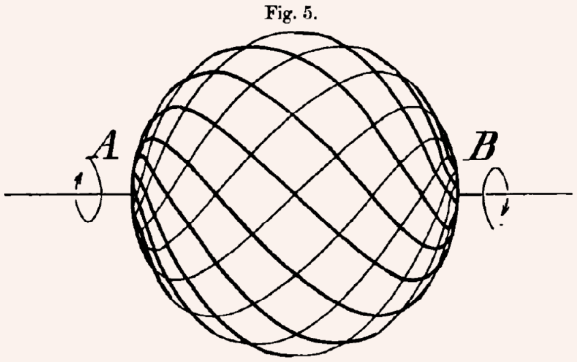
Fig. 1.



The minimum frame is formed of two similar equiangular spirals having their origin at B and intersecting orthogonally at A, together with all the other spirals orthogonal to these and enclosed between them.

4. (Fig. 5.) Equal and opposite couples applied at points A, B on the straight line AB.

Fig. 5.



The minimum frame consists of the series of rhumb-lines inclined at 45° to the meridians of the sphere having its poles at A and B.

Figura 15.39: Design ottimale (Michell, 1904)

Si può ragionevolmente affermare che, attraverso il suo giornale, Michell era il "padre" di *ottimizzazione strutturale*.

COPIA DI REVISIONE

Questo ha dato origine a cosiddetti *Strutture Michell*—uno che sono progettati in modo ottimale secondo questi principi (come la tromba in Fig. 15.40).

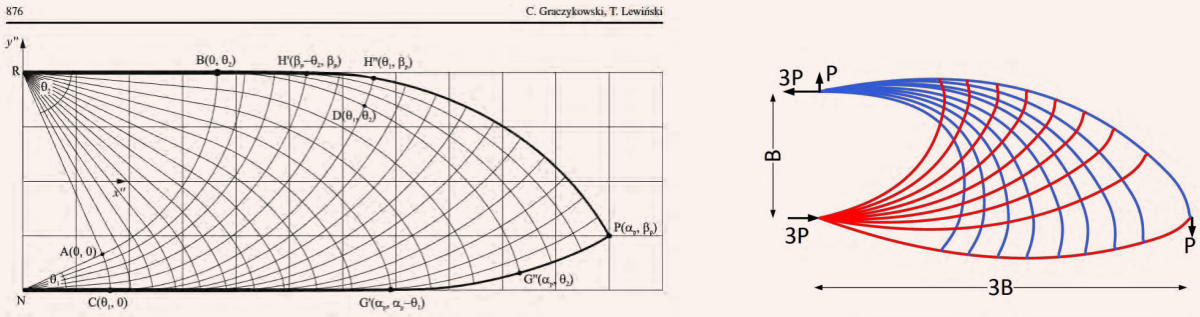


Figura 15.40: Michell trus

15.5.4.3 Baker e Beghini

Il lavoro di Michell sembra essere stato sfruttato da Baker, 1992 per la progettazione energetica dei sistemi laterali, che è stata ulteriormente ampliata Beghini et al., 2014, che collega l'architettura e l'ingegneria attraverso l'ottimizzazione strutturale della topologia (Fig. 15.41).

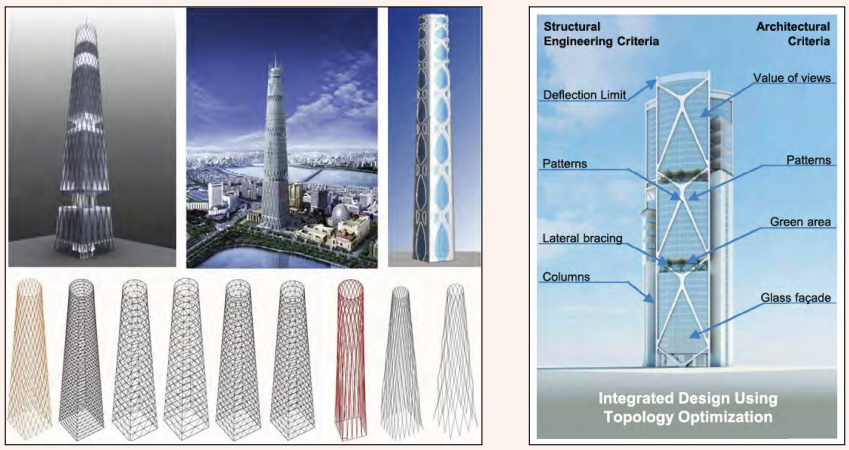


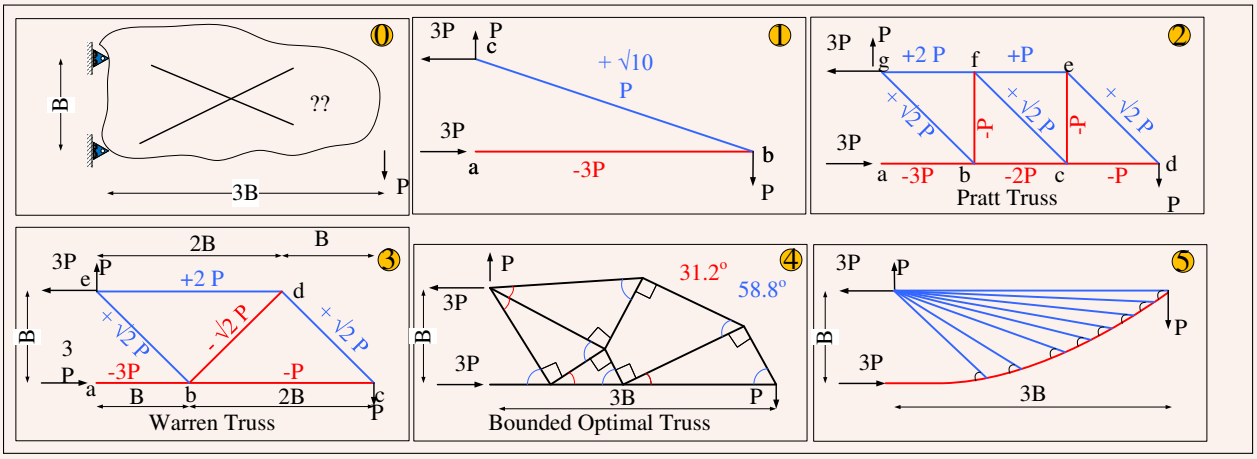
Figura 15.41: Ottimizzazione della topologia strutturale (Beghini et al., 2014)

Esempio: progetto di una capriata

Adattato da «Structural Innovation: Combining Classic Theories with New Technologies» by Baker et al., 2015.

Cerchiamo di progettare una truss supportata a due nodi e portare un carico verticale ad un altro, ignorando il peso di sé.

COPIA DI REVISIONE



A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
		Length L/B	Force F/P		FL/BP		A-B	A+B	Deflection
			+ve	-ve	A +ve	B -ve			Δ/(σB/E)
Two bar Truss									
1	a-b	3.000		3.000		9.0	-9.0	9.0	
2	b-c	3.162	3.162		10.0		10.0	10.0	
Sum		**6.162**			**10.0**	**9.0**	**1.0**	**19.0**	**19.0**
Warren Truss									
1	a-b	1.000		3.000		3.0	-3.0	3.0	
2	b-c	2.000		1.000		2.0	-2.0	2.0	
3	c-d	1.414	1.414		2.0		2.0	2.0	
4	d-e	2.000	2.000		4.0	0.0	4.0	4.0	
5	b-e	1.414	1.414		2.0	0.0	2.0	2.0	
6	b-d	1.414		1.414		2.0	-2.0	2.0	
Sum		**9.243**			**8.0**	**7.0**	**1.0**	**15.0**	**15.0**

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
		Length L/B	Force F/P		FL/BP		A-B	A+B	Deflection
			+ve	-ve	A +ve	B -ve			Δ/(σB/E)
Pratt Truss									
1	a-b	1.000		3.000		3.0	-3.0	3.0	
2	b-c	1.000		2.000		2.0	-2.0	2.0	
3	c-d	1.000		1.000		1.0	-1.0	1.0	
4	d-e	1.414	1.414		2.0		2.0	2.0	
5	e-f	1.000	1.000		1.0		1.0	1.0	
6	f-g	1.000	2.000		2.0		2.0	2.0	
7	b-g	1.414	1.414		2.0		2.0	2.0	
8	c-f	1.414	1.414		2.0		2.0	2.0	
9	b-f	1.000		1.000		1.0	-1.0	1.0	
10	c-e	1.000		1.000		1.0	-1.0	1.0	
Sum		**11.243**			**9.0**	**8.0**	**1.0**	**17.0**	**17.0**

I dettagli dell'analisi (diritto avanti ma lungo) non sono mostrati qui; tuttavia, i risultati sono riassunti qui sotto per diverse configurazioni di truss.

Colonna Sono proporzionale al volume totale del materiale (supponendo lo stesso stress ammissibile in tensione e compressione). La deflettorazione (J) è proporzionale al volume del materiale (I).

	Percorsi di carico				Sfittamento
	Carico di trazione $A = \frac{\sum F_T L_T}{PB}$	Caricamento a compressione $B = \frac{\sum F_C L_C}{PB}$	$A - B$	$A + B$	$\frac{\Delta}{\frac{\sigma B}{E}}$
①	10	9	1.	19	19
②	9↘	8↘	1. →	17↘	17↘
③	8↘	7↘	1. →	15↘	15↘
④	7.7↘	6.7↘	1. →	14.47↘	14.47↘
⑤	8.52	7.52	1.	16.04	16.04

COPIA DI REVISIONE

Graczykowski e Lewiński, 2010 ha analizzato questa tregua e ottenuto la configurazione indicata in ⑤.

15.5.5 Coda: Quando architetti e ingegneri sono stati colpiti

Il XIX secolo fu un periodo di rapida industrializzazione e di progresso tecnologico, e questo periodo vide una tensione significativa, la concorrenza e anche unanimità tra *architetti* e *ingegneri*. Questi due gruppi professionali spesso si sono trovati a quote sul ruolo di *estetica* contro *funzionalità patrimonio artistico* di architettura classica contro *potenziale innovativo* Questa tensione ha assunto forme diverse nel corso del secolo: a volte come un concorso testa a testa tra due rivali chiamati in competizione per la stessa commissione, a volte come una soluzione già realizzata dall'ingegnere che incontra la resistenza dell'edificio dopo il fatto. Tre episodi illustrano la gamma di questo conflitto—la competizione Eiffel-Bourdais torre a Parigi, la ricezione del Crystal Palace di Paxton a Londra, e la critica di Roebton *Romanticismo* e *storicismo* dei primi anni del XIX secolo al *modernismo industriale* che ha definito la sua seconda metà.

15.5.5.1 Caso Uno: Bourdais contro Eiffel (Parigi, 1889)

La competizione tra Jules Bourdais (1835-1915), architetto di formazione classica e Gustave Eiffel (1832-1923), ingegnere innovativo (vedi §15.4.2 per un resoconto più completo della sua carriera), per il design della torre monumentale per la Fiera del 1889 a Parigi, incapsula i temi di questo capitolo, un concorso tra tradizione e modernità, tra gli ideali classici di *École des Beaux-Arts* e i principi di ingegneria razionale *Ecole Centrale*.

Due laureati dell'École Centrale Entrambi gli uomini hanno condiviso una fondazione educativa comune al *École Centrale des Arts et Produces*Fondata nel 1829, la scuola è stata progettata per produrre ingegneri per la rapida industrializzazione dell'economia francese, concentrandosi su ingegneria pratica e applicazioni industriali piuttosto che gli studi classici dell'architettura. Il suo curriculum ha sottolineato matematica, meccanica, fisica e chimica—formazione degli studenti per risolvere complessi problemi del mondo reale utilizzando principi scientifici.

I loro sentieri si divergono dopo la laurea. Bourdais ha proseguito i suoi studi presso *École des Beaux-Arts*, il centro dell'architettura classica in Francia, che ha sottolineato simmetria, proporzione e riferimenti storici all'antica Grecia e Roma, è diventato un campione di architettura classica, progettando edifici come *Palazzo del Trocadéro*, che incarnava gli ideali Beaux-Arts di monumentalità e decorazione elaborata.

Eiffel, invece, ha perseguito una carriera nell'ingegneria, sviluppando competenze in ferro battuto e tecniche costruttive prefabbricate. Il suo lavoro su ponti e viadotti—come il Garabit Viaduct— ha dimostrato la sua padronanza delle dinamiche strutturali e resistenza al vento.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Le proposte di compensazione Per l'Esposizione del 1889, Bourdais propose una monumentale struttura in pietra sotto forma di una gigantesca colonna—la "Torre del Sole" (*Tour Soleil*)-reminiscente dei monumenti trionfali romani (Bourdais, 1881). Il design era grande, pesante e decorato, aderendo a ideali estetici classici di simmetria e permanenza. Era da rivestire in granito e coronato da illuminazione elettrica che illuminava tutta Parigi.

Il design di Eiffel, sviluppato con gli ingegneri Maurice Koechlin e Émile Nouguier e l'architetto Stephen Sauvestre, era radicalmente diverso: una torre in lattice di ferro di 300 metri realizzata in prefabbricati parti in ferro (Lemoine, 2002). Era moderno, elegante e una celebrazione della tecnologia industriale. Il quadro in ferro esposto simboleggiava la razionalità e l'onestà dell'ingegneria moderna.

Il risultato Il governo francese ha infine scelto il design di Eiffel, riconoscendo l'importanza simbolica dell'ingegneria moderna per una nazione che cerca di dimostrare la sua soggezione industriale. La decisione non era senza polemiche: molti critici, soprattutto artisti e intellettuali, inizialmente si opposero al design di Eiffel. Un gruppo di prominenti parigini, tra cui lo scrittore Guy de Maupassant, firmarono una petizione che richiamava la struttura ferro proposta una "strosità" e un "disonore" parigino.

La proposta di Bourdais ricevette il sostegno dei tradizionalisti nella comunità architettonica francese, ma la sua torre muraria sarebbe stata molto più costosa, più lenta da costruire e meno strutturalmente innovativa. La Torre Eiffel, completata nel tempo e sotto il budget, divenne il simbolo dell'Esposizione— e alla fine di Parigi stessa.

15.5.5.2 Caso due: Paxton e il Palazzo di Cristallo (Londra, 1851)

A differenza del concorso Bourdais-Eiffel, il conflitto di Joseph Paxton non era contro un singolo rivale ma contro l'ampio stabilimento architettonico. Paxton, un giardiniere e un designer di serra, formando piuttosto che un architetto accademico, propose un'enorme struttura prefabbricata di ferro e vetro per la Grande Mostra del 1851—un tipo di edificio dettagliato derivato direttamente dalla sua esperienza di progettazione di grandi conservatori, radicalmente diverso da qualsiasi cosa la professione architettonica contemporanea. (Berlyn e Fowler, 1851).

Il suo design ha affrontato la resistenza da *Royal Institute of British Architects (RIBA)* e da architetti di spicco del giorno. *Decimus Burton*, che inizialmente aveva sostenuto Paxton ma proveniva da un addestramento classico, e *A.W.N. Pugin*, il campione leader del Rivival gotico, entrambi rappresentavano valori architettonici tradizionali in contrasto con l'uso radicale di Paxton di materiali industriali. La critica si concentrava meno su qualsiasi design alternativo concorrente e più su un'ampia inquietudine: che un edificio assemblato da componenti in ferro e vetro di produzione di massa, piuttosto che muratura artigianale secondo il precedente storico, non poteva essere chiamato affatto architettura.

Nonostante questa resistenza, il Crystal Palace è stato costruito in meno di sei mesi – un'impresa senza precedenti di costruzione prefabbricata— e divenne, come la Torre Eiffel avrebbe decenni più tardi, il simbolo duraturo della mostra è stato costruito a casa.

COPIA DI REVISIONE

15.5.5.3 Caso tre: Roebling e il ponte di Brooklyn (New York, 1869–1883)

Il Brooklyn Bridge di John Roebling affrontò un simile schema di opposizione istituzionale piuttosto che testa a testa. Il progetto di Roebling—un ponte sospeso di una portata senza precedenti, utilizzando il cavo di acciaio della sua invenzione—rimossa critiche da figure tra cui *Richard Upjohn*, un architetto di spicco della rinascita gotica, e *Federico Legge Olmsted*, l'architetto paesaggista e urbanista dietro Central Park, entrambi oggetto dell'estetica industriale dei cavi esposti e della lavorazione dell'acciaio che si introducono sul carattere visivo della città (McCullough, 1972)Roebling ha documentato i progressi del progetto stesso nei suoi rapporti annuali ai direttori della compagnia di bridge (Roebling, 1877 PDF).

Come per Paxton, l'obiezione era meno un design in competizione che un più ampio disagio istituzionale con l'ingegneria estetica che dispiegava quelli architettonici in importanti strutture civiche. Roebling non viveva per vedere il ponte completato— è morto da complicazioni dopo un incidente di indagine prima che la costruzione iniziasse, e suo figlio Washington Roebling, lui stesso incapace di mal di decompressione durante il progetto, ha superato il suo completamento in gran parte attraverso il lavoro di sua moglie, Emily Roebling.

15.5.5.4 La storia

In tutti e tre gli episodi, il modello è lo stesso: una soluzione di ingegnere, prefabbricata, industriale e strutturalmente audace, incontra la resistenza di un istituto architettonico che difende le tradizioni estetiche e materiali ereditate – e in ogni caso, la struttura dell'ingegnere alla fine diventa il simbolo duraturo della sua città e della sua età. *La mia* che Vitruvio aveva chiesto *esecuzioni* e *uti*.

L'eredità classica di Bourdais continuò in Francia, e il suo approccio trovò eco nel movimento della città Bella e il classicismo Beaux-Arts che dominava l'architettura civica americana negli anni '30. Ma la torre, il palazzo, e il ponte avevano annunciato, nella loro città e nel loro decennio, l'arrivo di una nuova era: una in cui la *progetti-* l'ingegnere che progetta e costruisce, che lascia parlare la struttura, – avrebbe sempre più plasmato l'ambiente costruito.

Il concorso ci riporta così al tema centrale di questo capitolo: la questione se la forma debba seguire la funzione, se la bellezza può emergere dalla necessità strutturale, e se l'ingegnere può raggiungere ciò che una volta si pensava l'esclusiva provincia dell'architetto, la risposta, scritta in ferro contro tre skyline, era sì.

COPIA DI REVISIONE

15.6 La generazione del computer

L'emergere del metodo degli elementi finiti ha permesso agli architetti, e a volte agli ingegneri, di esplorare forme sempre più impegnative e spingere la busta ai limiti di ciò che si sarebbe osato intraprendere senza supporto computazionale. Gli architetti hanno iniziato ad esplorare forme strutturali impossibili da concepire senza analisi del computer, mentre gli ingegneri hanno progettato edifici molto alti in grado di resistere a carichi eolici estremi (Burj Khalifa), ponti di lunga durata che rappresentano gli effetti secondari come le vibrazioni (come le strutture di funzionamento).

15.6.1 Gli architetti "Exceptional"

Anche se non è abbastanza *Il mio nome* Nel senso tradizionale, alcuni architetti sfidano gli ingegneri strutturali per analizzare e progettare correttamente le loro geometrie complesse, le quali sono strutture che nascono nelle menti creative degli architetti e tradotte in realtà attraverso l'esperienza di ingegneri strutturali che lavorano ai confini della possibilità computazionale.

Mi concentrerò solo su due esempi notevoli, mentre il lavoro di un terzo (Saarinen) è stato precedentemente affrontato.

15.6.1.1 Félix Candela (1910-1997)

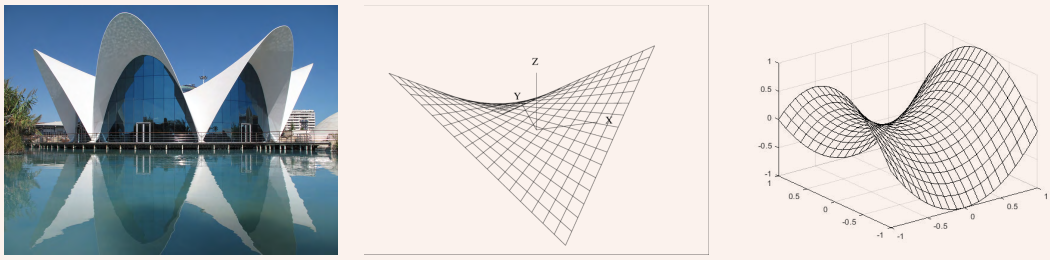
Félix Candela Outeriño (Madrid, 1910 – Rhoigh, North Carolina, 1997) è nato in Spagna e ha studiato architettura presso la Escuela Técnica Superior de Arquitectura di Madrid, laureandosi nel 1935. Tuttavia, dopo la sua partecipazione alla guerra civile spagnola come ingegnere per il lato repubblicano e un breve tirocinio in un campo di concentramento francese, si è emigrato in Messico nel 1939, dove avrebbe trascorso la carriera internazionale.

Come Nervi, Candela concepiva edifici oliticamente, funzionando simultaneamente come architetto, ingegnere e imprenditore, pionieristico dell'uso di iperbolico-paraboloide (HP) gusci, una forma strutturale particolarmente efficiente grazie alla sua doppia curvatura che permette di portare carichi principalmente attraverso l'azione della membrana piuttosto che piegarsi. (Espion, 2016)—è stato preceduto da Fernand Aimond (Aimond, 1936) in Francia e Giorgio Baroni (Currà e Russo, 2018) Tuttavia, la forma HP rimase relativamente sconosciuta nella pratica architettonica fino a quando l'innovativo lavoro di Candela negli anni '50 lo portò all'attenzione internazionale.

L'esempio più iconico delle conchiglie HP di Candela è senza dubbio il Restaurante Los Manantiales di Xochimilco, Messico, completato nel 1957. Il design è stato un successo che ha ispirato numerose strutture simili in tutto il mondo. L'efficiente sistema strutturale, con i suoi caratteristici bordi a strapiombo, si traduce in una struttura di conchiglie notevolmente snelle con uno spessore di soli 40 mm di larghezza 30 m internamente. Al suo centro,

COPIA DI REVISIONE

la shell raggiunge un'altezza di 5.8 m, mentre i bordi si alzano a 9.9 m. I supporti sono collegati da barre di tensione sotto la costruzione del pavimento, progettate per resistere alla spinta orizzontale generata alla base del guscio. Candela stesso considerava questa struttura leggera ed elegante per essere il suo lavoro più significativo - una testimonianza del matrimonio di efficienza strutturale e poesia architettonica che caratterizzava il suo approccio al design delle conchiglie.



(a) Ristorante Los Manantiales in Xochimilco

(b) Fornito da linee rette

(c) Bounded da parabola

Figura 15.42: Le conchiglie iperboliche-paraboloide di Félix Candela

15.6.1.2 Frank Gehry (1929–2025)

Frank Owen Gehry (Toronto, 1929–2025) non è un ingegnere ma un architetto, e in quanto tale non appartiene correttamente in questo pantheon di grandi ingegneri. Tuttavia, il suo lavoro ha così profondamente sfidato la professione di ingegneria strutturale - che ha i confini di ciò che è computazionalmente e costruttivamente possibile - che deve essere fatta un'eccezione.

Gehry può essere visto come entrambi architetto *e* scultore. Mentre le stravaganze architettoniche di Calatrava erano generalmente composte da linee rette e curve semplici, Gehry è ossessionato da superfici curve complesse di tale raffinatezza geometrica che anche la loro rappresentazione superficiale digitale è stata oggetto di dissertazioni di dottorato (Shelden, 2002)I suoi edifici sfidano le categorie strutturali convenzionali, che richiedono approcci completamente nuovi all'analisi, alla fabbricazione e alla costruzione.

Mentre la maggior parte degli architetti oggi si affida regolarmente a software esistenti (come SAP2000, RISA o programmi simili) che gli ingegneri strutturali possono utilizzare per analizzare e progettare i loro edifici, il lavoro di Gehry ha dimostrato così geometricamente complesso che il software strutturale convenzionale era insufficiente. originariamente sviluppato da Dassault Systèmes per l'analisi delle superfici curve degli aeromobili (Gehry, Lloyd e Shelden, 2020)Questo adattamento di strumenti computazionali aerospaziali al design architettonico ha reso la pratica di Gehry sinonimo di tecnologia di calcolo all'avanguardia e processi di produzione CAD/CAM, cambiando fondamentalmente come complesse geometrie architettoniche potrebbero essere realizzate.

COPIA DI REVISIONE

La struttura più iconica di Gehry è il Museo Guggenheim di Bilbao, completato nel 1997.[52] Le sue curve in titanio-clad, in Fig. 15.43a, esemplificare l'uso di strumenti computazionali specializzati sia per l'analisi strutturale che per l'analisi strutturale. Gli enormi spazi interni cavernosi dell'edificio, resi possibili solo attraverso una sofisticata modellazione di computer, forniscono un'impostazione appropriata per opere d'arte contemporanee altrettanto curvi, come quella di Richard Serra (uno dei miei scultori minimalist preferiti) massicce sculture in acciaio (Fig. 15.43b).



(a) Museo Guggenheim di Bilbao (b) "Band" di Richard Serra

Figura 15.43: La scultura di Frank Gehry Bilbao Guggenheim e Richard Serra

15.6.1.3 Santiago Calatrava (1951–)

Santiago Calatrava Valls (Benimàmet, Valencia, 1951–) studiò per la prima volta l'architettura presso l'Università Politecnica di Valencia, laureandosi nel 1974, e perseguì l'ingegneria civile presso l'ETH di Zurigo, dove completò il dottorato nel 1981. La sua architettura è caratteristica, eclettica, esuberante e immediatamente riconoscibile, una fusione di logica di ingegneria strutturale con ambizione scultorea. Una valutazione critica del suo lavoro precoce è fornita da (McQuaid, 1993 PDF).

Anche se Calatrava è architetto e ingegnere strutturale, l'ho inserito in questa sezione architettonica perché il suo impatto più grande è stato visivo e formale piuttosto che attraverso contributi fondamentali alla scienza dell'ingegneria strutturale (come esemplificati da figure come Fazlur Khan).

Le sue strutture spaziano dal relativamente semplice e austero, come il Ponte Alamillo in Siviglia[53] o la stazione ferroviaria Stadelhofen a Zurigo, alla flamboyant e alla scultura,

[52] Bilbao era una città industriale economicamente depressa nella regione basca del nord della Spagna, e il museo Guggenheim rappresentava un coraggioso (e, in definitiva, riuscito) tentativo di far rivivere la città economicamente e culturalmente attraverso il turismo architettonico—una strategia ora nota come l'«effetto del Bilbao».

[53] Di particolare interesse per gli studenti di ingegneria strutturale è il libro di Pollalis, 1999, che descrive ogni passo della progettazione e della costruzione del ponte Alamillo, spiegando le intenzioni architettoniche

COPIA DI REVISIONE

come il Ponte Margaret Hunt Hill a Dallas o la stazione TGV dell'aeroporto Saint-Exupéry a Lione, mentre le opere più semplici riecheggiano il principio di Sullivan che la forma segue la funzione, Calatrava non si sforza di essere minimalista e non cerca le forme strutturali ottimali perseguite da ingegneri come Maillart o Nervi.Per lui, la struttura serve a doppio ruolo sia come soluzione ingegneristica che come affermazione artistica, spesso privilegiando il dramma visivo sull'efficienza strutturale.

Questo approccio ha generato sia acclama che critica, il lavoro di Calatrava è stato spesso colpito da ritardi, sovraccarichi di costi e contenziosi (Daley, 2013)L'esempio più noto è la Città delle Arti e delle Scienze nella sua nativa Valencia, la più grande collezione del mondo del suo lavoro, tra cui una sala per le performance, ponti, un planetario, un teatro dell'opera, un museo di scienza, un passerella coperto e un acri di piscine riflettenti. $405 milioni, il complesso, alla fine, costa quasi tre volte quella cifra e ha portato a molteplici cause legali, illustrando la tensione tra ambizione architettonica e pragmatismo ingegneristico che caratterizza gran parte del suo lavoro.



(a) Alamillo Bridge, Seville

(b) Stazione TGV Aeroporto di Lyon Saint-Exupéry

Figura 15.44: Calatrava: eleganza strutturale nel ponte Alamillo contro la stazione TGV di Lyon Saint-Exupéry visivamente ingombrante.

15.6.2 Ingegneri strutturali: Il cinque percenter

Comincerò a citare dall'introduzione provocatoria di un libro eccellente di (Llunji, 2022), che offre una valutazione sobria dello stato attuale di ingegneria strutturale:

> Ci sono più ingegneri del mondo che architetti. Più di cinque milioni. Tuttavia, oggi, nell'ingegneria strutturale ci sono forse solo 10 veri designer del mondo - non più di questo. Tutti gli altri sono tecnici e sostenitori di idee architettoniche; soddisfacenti dei desideri dell'architetto, di solito servitori,

di Calatrava, che comprendono importanti calcoli ingegneristici e dettagli tecnici, e che contiene anche dati geometrici che permettono agli ingegneri di modellare la struttura, come si è detto in §G.

COPIA DI REVISIONE

> molto raramente partner e mai leader. Suona duro, ma è vero. Nel nostro attuale mondo digitale post-industriale, l'ingegneria civile non si trova più all'avanguardia dello sviluppo sociale. Gli ingegneri, nella loro ricerca dell'«automatizzazione» dell'analisi strutturale e del design, stanno diventando noiosi, perdendo la loro «sofistica» e alcune della loro creatività, e trasformandosi in supporto puramente tecnico per gli architetti, con minore input creativo nel design finale. Da qualche parte lungo il percorso gli ingegneri strutturali sono diventati "soggetti" della tecnologia piuttosto che essere all'avanguardia delle innovazioni tecnologiche. Secondo i recenti rapporti, c'è un consenso che "l'automazione sta diminuendo il prestigio e l'autorità della comunità ingegneristica, e il coordinamento digitale sta cambiando il modo in cui l'industria opera". La maggior parte di noi che lavorano nell'industria dell'ingegneria strutturale è consapevole che la nostra branca è stata colpita da un terremoto di cambiamenti, che può rendere il ruolo degli ingegneri irrilevanti e che è una grande preoccupazione tra la pratica degli ingegneri strutturali in tutto il mondo. ... Ci sono molte voci nell'industria edile che minimizzano il ruolo di un ingegnere. Ora che quasi ogni fase di progettazione strutturale è automatizzata, ci sono coloro che pensano che il design strutturale non può nemmeno essere fatto da ingegneri strutturali affatto. Se un computer (programma) può farlo, l'operatore potrebbe essere un tecnico con la conoscenza elementare delle strutture. Tuttavia, questa espansione dell'ingegneria digitale può essere "a doppia-edgeda la spada' perché il risultato inusuale di strumenti di costruzione di strumenti di costruzione di strumenti di costruzione. ... Forse 95% dei progetti che abbiamo realizzato fino a questo punto, saranno il lavoro di tecnici o di automazione, lasciando il compiti di ingegneria strutturale veramente insoliti, i restanti 5%, come definizione di ingegneria strutturale Altri, a cui appartiene questo autore, vedi il futuro attraverso la lente di "architetto strutturale" dove l'ingegnere strutturale del futuro sarà più architettonicamente attrezzato e l'architetto del futuro sarà più strutturalmente - Incline.
>
> (Llunji, 2022)

Questa valutazione stante risuona profondamente con la realtà della pratica contemporanea. La trasformazione dell'ingegneria strutturale da una disciplina creativa, esemplificata da figure come Nervi, Torroja e Khan, in gran parte di routine, rappresenta un cambiamento fondamentale nell'identità della professione. Il concetto di "cinque per cento" cattura una verità scomoda: quella vera creatività strutturale, il tipo che spinge i confini e crea nuovi paradigmi, sta diventando sempre più raro da un mondo standardizzato.

Non posso concordare di più con la dichiarazione di Llunji nella misura in cui identifica l'emarginazione degli ingegneri strutturali all'interno del processo di progettazione architettonica, dove sono diventati effettivamente collaboratori o, più spesso, consulenti tecnici sottoservienti piuttosto che partner creativi coequali.I grandi costruttori di ingegnere del passato – da Eiffel a Calatrava – sarebbero sgomentiti a vedere la loro professione ridotta al controllo del codice e alla verifica del carico.

Tuttavia, gli ingegneri strutturali non sono limitati a edifici e ponti, e la salvezza della professione può risiedere proprio in domini completamente decoupled dall'architettura.Gli ingegneri rimangono criticamente necessari per eseguire analisi sofisticate di strutture che gli architetti non toccano mai: dighe, piattaforme offshore, contenzioni nucleari, strutture aerospaziali, dispositivi di ingegneria biomedica e innumerevoli applicazioni industriali.

Questi settori richiedono ingegneri che restino autentici progettisti, capaci di affrontare problemi senza precedenti mediante sofisticazione computazionale e giudizio tecnico ben

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

oltre l'analisi ordinaria degli edifici. Che si tratti della risposta sismica di una diga ad arco in calcestruzzo, della fatica di una piattaforma offshore soggetta alle onde o dell'integrità del contenimento di un reattore nucleare, essi operano alle frontiere della conoscenza strutturale, dove il software standardizzato non basta e diventa essenziale una soluzione creativa dei problemi. In questi ambiti specialistici la professione, nella sua forma più autentica, sopravvive e prospera oltre l'ombra dell'architettura o della pratica strutturale ordinaria[54].

Llunji, 2022 's valutazione di bleak tuttavia offre la speranza a questo prezioso 5% Anche se molti ingegneri in tutto il mondo potrebbero qualificarsi per questa categoria d'elite, mi limiterò ad esaminare due delle figure contemporanee più importanti: un progettista di bridge e un ingegnere di grattacielo il cui lavoro esemplifica la continua pertinenza della creatività strutturale nella nostra epoca computazionale.

Interessante, in entrambi i casi, la ricerca della forma "ideale" rimane quintessenziale, una ricerca che, in senso profondo, ci riporta all'epoca pre-galilea quando la forma geometrica era l'aspetto più impegnativo del design strutturale. L'arte si è posta nel raggiungimento della stabilità e della bellezza attraverso la geometria pura, solo quando Galileo ha cominciato ad analizzare il rapporto tra dimensione, peso e forza materiale che forma e forza sono diventate inestricabilmente legate. Gli ingegneri strutturali più creativi di oggi sono diventati un cerchio pieno, utilizzando il potere computazionale non solo per controllare l'adeguatezza, ma per scoprire nuove forme che esprimono il flusso di forze con eleganza ed efficienza senza precedenti.

15.6.2.1 Edifici ad alto rumore

A cavallo del XXI secolo, si è svolta una rinnovata competizione tra le principali città del mondo per l'edificio più alto, con Chicago e New York che hanno guidato la carica mentre sono emersi nuovi contendenti come Dubai. Questa corsa per gli ingegneri strutturali di altezza ha spinto gli ingegneri in quel prezioso territorio "cinque per cento', dove i metodi di progettazione convenzionali hanno dimostrato inadeguato e creativo problem-solving è diventato essenziale.

Il seguente passaggio (Seabrook, 2001) La ricerca di un sistema di ricerca e sviluppo, che si basa su un'analisi più approfondita dei sistemi strutturali impiegati nei grattacieli di New York nel corso del secolo scorso, è stata scritta dalla prospettiva di un giornalista

[54] L'autore ha fornito consulenza tecnica a gruppi di cittadini, fra cui C-10, impegnati a valutare la sicurezza della centrale nucleare di Seabrook nel New Hampshire, le cui strutture di contenimento in calcestruzzo invecchiato presentano problemi ingegneristici senza precedenti (NRC-ML19312B609, 2019). Il caso esemplifica quel «cinque per cento» di lavoro che richiede analisi strutturale creativa: i codici esistenti non descrivono adeguatamente i complessi meccanismi di degrado, i programmi standard non modellano i processi termo-meccanico-chimici accoppiati e l'analisi deve integrare decenni di ricerca sulla durabilità del calcestruzzo, la meccanica della frattura e la valutazione probabilistica. Problemi simili, nei quali è in gioco la sicurezza pubblica e gli approcci convenzionali risultano insufficienti, rappresentano il nucleo dell'ingegneria strutturale che nessuna automazione può sostituire.

COPIA DI REVISIONE

scientifico impegnato a praticare gli ingegneri strutturali, che traccia l'evoluzione della muratura portante e della costruzione di ghisa, attraverso i grattacieli strutturali di prima costruzione, ai sistemi tubolari e basati sul nucleo che caratterizzano il design moderno ad alta velocità.

> Negli ultimi centoventi anni, tre grandi tipi di strutture sono state impiegate in edifici alti a New York City. Il primo tipo è stato utilizzato negli edifici in ghisa degli anni ottanta e novanta, in cui il "gravity load" — il peso dell'edificio— è stato trasportato principalmente dalle pareti esterne. Questo tipo di struttura crea spazi di fabbrica e di magazzino (e, ora, edifici residenziali) che sono relativamente liberi La seconda generazione di edifici alti, che comprende il Metropolitan Life Building (1909), il Woolworth Building (1913), e l'Empire State Building (1931), sono strutture incorniciate, in cui uno scheletro di colonne e travi in acciaio saldato o rivettato, spesso racchiusi in cemento, attraversa l'intero edificio. Questo tipo di costruzione rende una struttura estremamente forte, ma non così attraente spazio al piano. Gli interni sono pieni di colonne e pareti pesanti, portanti, e, come si sposta verso il centro di questi edifici, più cripto come si sentono. Charlie Thornton, della ditta di ingegneria strutturale di Thornton-Tomasetti Engineers, un designer leader delle strutture di alti-resine moderne, mi ha detto recentemente: "Un edificio come l'Empire State Building è un edificio molto sovradisegnato e sovracostruito. Quegli ingegneri non capivano i carichi come li capivamo, usavano regole di scorrimento per risolverli, mentre noi abbiamo computer, e così hanno litigato sul lato della cautela. La maggior parte delle alte sorti erette dagli anni Sessanta usano un terzo tipo di struttura, una sintesi dei migliori aspetti dei due precedenti tipi di struttura. Le strutture perimetrali di questi edifici assomigliano a tubi. All'interno, un nucleo vuoto massiccio in acciaio e/o cemento contiene molti dei servizi: ascensori, scale e bagni. Poiché le colonne nucleo e perimetrali portano così tanto del carico, i progettisti potrebbero eliminare le colonne interne, con il risultato che c'è più spazio aperto per i inquilini. E, perché le strutture della struttura richiedono che i ferri da stiro saldano o rivettano i travi alle colonne di supporto sul sito, che è sia costoso e pericoloso, riducendo la portata del telaio significa che più della struttura può essere fabbricata fuori sito, rendendo l'edificio più sicuro e più conveniente per erigere. Infine, i miglioramenti della metallurgia aumentarono la forza dell'acciaio strutturale in questi edifici, consentendo agli ingegneri di ridurre o eliminare l'uso del cemento nel sostenere la struttura. Il cemento armato, anche se è più resistente al fuoco dell'acciaio, è disordinato e costoso da lavorare, soprattutto a Manhattan, dove il traffico e le costrizioni spaziali a siti rendono difficile portare nelle flotte quotidiane di miscelatori di cemento necessari per un grande lavoro. I pavimenti in gran parte degli edifici ad alta velocità eretti dal momento che gli anni Sessanta sono molto più leggeri del peso rispetto ai piani degli edifici più vecchi. In un tipico piano di ufficio ad alta velocità, tre o quattro pollici di cemento copre un ponte di acciaio ondulato, il cui peso è supportato da I-becchi o, nel caso delle Torri Gemelle, da lunghe 'trusse"—le strisce leggere di acciaio che sono intrecciate attraverso il web
>
> (Seabrook, 2001)

15.6.2.1.1 Leslie Robertson (1928–2021) Leslie Earl Robertson, l'ingegnere strutturale del record per le Twin Towers (World Trade Center), incarnava il percorso non convenzionale che spesso caratterizza il "cinque per cento". Il suo insolito background – che si estrae dalle superiori a sedici, servendosi come tecnico dell'elettronica della Marina, poi guadagnando una laurea in scienze all'UC Berkeley prima di passare dall'ingegneria elettrica a quella strutturale – dimostrava che il talento creativo dell'ingegneria emerge da quartieri inaspettati.

Quando Robertson scappò di soldi a Seattle nel 1958 e prese un lavoro presso lo studio

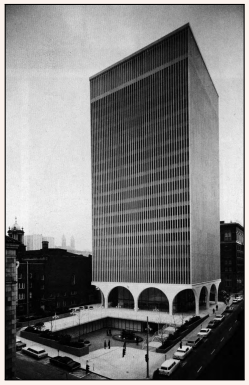
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

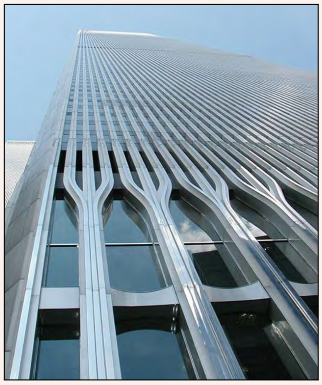
di ingegneria strutturale poi chiamato Worthington-Skilling, iniziò quello che sarebbe diventato un leggendario processo di auto-educazione. Lavorando notti e fine settimana, si insegnò concetti fondamentali come la deflezione del pendio e il metodo Hardy Cross, sviluppando la profonda intuizione strutturale che nessun programma informatico poteva fornire.[55]

Cinque anni dopo, l'azienda entrò in una competizione per costruire gli edifici più alti mai costruiti: le due torri del World Trade Center. Nonostante non avesse progettato nulla di più alto del venti pianista IBM Building di Seattle, l'azienda ebbe un vantaggio cruciale: l'architetto Minoru Yamasaki, che li aveva selezionati per quel progetto, era anche l'architetto del World Trade Center.

Durante la riunione di presentazione cruciale, John Skilling ha fatto il suo campo utilizzando solo un pad di disegno, un cavalletto e marcatori—nessuna presentazione di PowerPoint o animazioni di computer elaborate.[56] La semplicità era profonda: Yamasaki, che soffriva di acrofobia, voleva elementi strutturali intorno al perimetro dell'edificio per aiutare gli occupanti a sentirsi sicuri a grandi altezze. La soluzione di Skilling era una struttura pura del tubo che ha portato il concetto tubolare di Khan più che mai prima del tentativo.



(a) IBM Building a Seattle



(b) Centro commerciale mondiale "tridents"



(c) Centro finanziario mondiale di Shanghai

Figura 15.45: Yamasaki e Robertson: dal prototipo di Seattle all'influenza globale

All'età di trentacinque anni, Robertson si trasferì a New York per supervisionare la costruzione di quello che sarebbe diventato il più alto edificio del mondo. Le sfide ingegne-

[55] Infatti, quando tali calcoli manuali vengono eseguiti per strutture sempre più complesse, si sviluppa una comprensione del comportamento strutturale che non può essere raggiunto attraverso simulazioni di computer ripetute. *metodo di carico di prova* rispetto a coloro che si affidavano esclusivamente ai modelli informatici, l'autore ha sostenuto il ritorno a una comprensione così fondamentale nelle valutazioni di sicurezza nucleare, dove i modelli computazionali devono essere convalidati dalla sentenza di ingegneria sviluppata attraverso l'analisi dei primi principi.

[56] Un contrasto rinfrescante alle presentazioni di oggi in materia di tecnologia!

COPIA DI REVISIONE

ristiche lo spinsero in un territorio non sfruttato: determinare le soglie di percezione umana per il movimento orizzontale (Chen e Robertson, 1972), lo sviluppo di ammortizzatori viscoelastici per controllare oscillazioni indotte dal vento (Mahmoodi et al., 1987), e la creazione di sistemi strutturali che non erano mai stati testati in tale scala.

I tragici eventi dell'11 settembre 2001, hanno sottoposto il progetto di Robertson al test finale involontario, l'analisi strutturale del crollo delle torri, in particolare nei documenti seminali di Eagar e Musso, 2001 e Bažant e Zhou, 2002 — ha rilevato che, mentre gli edifici sono sopravvissuti agli impatti degli aerei, le temperature sostenute superiori a 800°C dai fuochi risultanti hanno compromesso la forza di resa dell'acciaio, portando al crollo progressivo.

La carriera successiva di Robertson includeva altre strutture iconiche supertall come il Shanghai World Financial Center e la Bank of China Tower di Hong Kong, presentando ogni singolare sfida che richiedeva soluzioni creative oltre la pratica convenzionale. (Robertson, 2017) Cronache una carriera speso risolvere problemi che non erano mai stati risolti prima.

Struttura Rivelata: I tour di camminata pandemica La pandemica COVID-19, che ha svuotato le strade delle grandi città del mondo nel 2020, ha inaspettatamente illuminato il rapporto tra architettura e ingegneria in modo nuovo. *Il New York Times*, ha iniziato una serie di tour virtuali a piedi attraverso New York City durante il blocco, accompagnato da architetti, storici e – insignificante per questo capitolo– ingegneri strutturali. Come ha osservato Kimmelman, "Over gli anni, architetti non sono stati gli unici a descrivere skyline di New York— l'immagine firma dell'ultimo secolo americano— attraverso l'etere urbano. *La mia* non attraverso l'ornamento applicato ma attraverso l'espressione eloquente di *esecuzioni*.

In un tour degno di nota dei grattacieli di Manhattan, Kimmelman ha percorso due volte la stessa strada: prima con l'architetto Annabelle Selldorf, poi con l'ingegnere strutturale Guy Nordenson della Princeton University. I due professionisti, che vedono gli stessi edifici—il Seagram Building, Black Rock (CBS Building), l'AT&T Building, e 432 Park Avenue—offered complementari ma distinte interpretazioni di questi punti di riferimento. Dove Selldorf ha sottolineato l'esperienza spaziale e l'intenzione architettonica, Nordenson ha rivelato l'ingegno strutturale nascosto all'interno: l'innovativa combinazione di cornici intrecciate e telai di momento al Seagram Building, il massiccio pendulum si abbaglia all'interno della matita-thin 432 Park Avenue che ammorbidisce oscillazioni a vento-in-fuso, Edil-fell *Il mio nome* e ricorda l'insistenza di Vitruvio che l'architetto (nel suo giorno, sinonimo di costruttore e ingegnere) deve padroneggiare molteplici discipline per raggiungere l'eccellenza.

Questi tour paralleli hanno dimostrato, in microcosmo, i modi complementari ma distinti che architetti e ingegneri percepiscono l'ambiente costruito—e l'impoverimento che si traduce quando una prospettiva è assente. *esecuzioni*: il flusso di forze attraverso colonne e nuclei, la danza della tensione e della compressione che mantiene una torre in piedi contro vento e gravità. *uti* e *La mia*Quando queste prospettive convergono – come hanno fatto

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

nelle grandi opere di Nervi, Torroja e Khan- – il risultato è l'architettura strutturale che soddisfa la triade Vitruviana completa. Kimmelman ha raccolto queste passeggiate in seguito *La città intima: camminare New York* (2022), un libro che ha scompigliato "la storia, i piani, le leggi, le imprese di ingegneria strutturale, i punti salienti architettonici e le realtà quotidiane' che costituiscono la vita urbana (Kimmelman, 2020 PDF). Per l'ingegnere strutturale, questi tour offrono un modello di impegno pubblico che rivela, piuttosto che nasconde, il contributo essenziale della disciplina all'ambiente costruito—dimostrando che *esecuzioni*, adeguatamente espresso, può diventare una fonte di *La mia*.

Tra gli ingegneri contemporanei il cui lavoro Nordenson ha evidenziato durante il suo tour è stato William Baker di Skidmore, Owings & Merrill—il molto fermo che aveva progettato diversi punti di riferimento della città media che hanno passato. I risultati di Baker rappresentano forse l'esempio più chiaro di ciò che il "cinque per cento" può realizzare quando la sofisticazione computazionale è sposata con intuizione strutturale profonda.

15.6.2.1.2 William Baker (1953–) Se si dovesse identificare l'ingegnere strutturale contemporaneo più importante e creativo, qualcuno che ha imparato gli strumenti computazionali moderni, avanzando oltre i principi di Fazlur Khan, sarebbe William Frazier Baker, un partner del leggendario Skidmore, Owings & Merrill Baker rappresenta l'evoluzione del 'cinque per cento': un ingegnere che utilizza il potere computazionale non come sostituto della creatività, ma come strumento per ottenere un'espressione strutturale precedentemente impossibile.

Il design di grattacieli super-tall come Burj Khalifa di Baker, 828 metri a Dubai, esemplifica questo nuovo paradigma. Mentre i carichi verticali possono essere gestiti con cemento ultra-alta resistenza, la sfida di governo sta nelle forze laterali, effetti vento e sismici che creano un complesso comportamento dinamico tridimensionale che richiede un'analisi sofisticata molto al di là della pratica standard.

Il progetto Burj Khalifa, progettato dall'architetto Adrian Smith e progettato da Baker (entrambi in SOM), illustra la continua tensione tra visione architettonica e realtà ingegneristica. Mentre l'architetto può prendere il riflettore pubblico, il concetto strutturale, il sistema di nucleo matrattato, la geometria a risposta del vento, il complesso scheletro interno, rappresenta la pura creatività ingegneristica del "cinque per cento'.

I contributi teorici di Baker, documentati (Baker, Skidmore et al., 2013 PDF), estendere l'eredità di Khan nell'era computazionale:

> Forse il parametro strutturale più importante in un edificio alto è la messa in massa architettonica, o la forma, dell'edificio. Non solo definisce la complessità della torre, di solito ha una significativa influenza sulle forze eoliche sull'edificio. I flussi del vento intorno ad un edificio alto sono spesso instabili. Come il vento passa, il flusso si separa dal lato della torre, creando una serie di vortici che causano differenziali di pressione attraverso l'edificio. Anche se gli effetti di trascinamento del vento su una torre sono importanti, queste forze non sono generalmente la preoccupazione di controllo. Sono le forze del vento causato dal vortice spargimento, in concomitanza con le armoniche naturali

COPIA DI REVISIONE

della torre, che possono portare a forze molto grandi che sono perpendicolari alla direzione del vento. A causa della velocità degli eventi eolici comunemente presenti e della normale gamma di larghezza di costruzione, ci saranno alcuni eventi eolici in cui il vortice spargimento corrisponde alle armoniche naturali della torre.

(Baker, Skidmore et al., 2013)

L'eredità di Baker non si trova solo negli edifici che ha progettato, ma nel dimostrare che anche nella nostra età automatizzata, il matrimonio di comprensione ingegneristica e visione creativa rimane insostituibile. (Baker e McRobie, 2025) *Geometria ed Equilibrio: Meccanica strutturale del XXI secolo* codifica questa filosofia, dimostrando come i principi fondamentali della geometria e dell'equilibrio possano guidare gli ingegneri verso soluzioni innovative che l'analisi computazionale da sola non può scoprire.

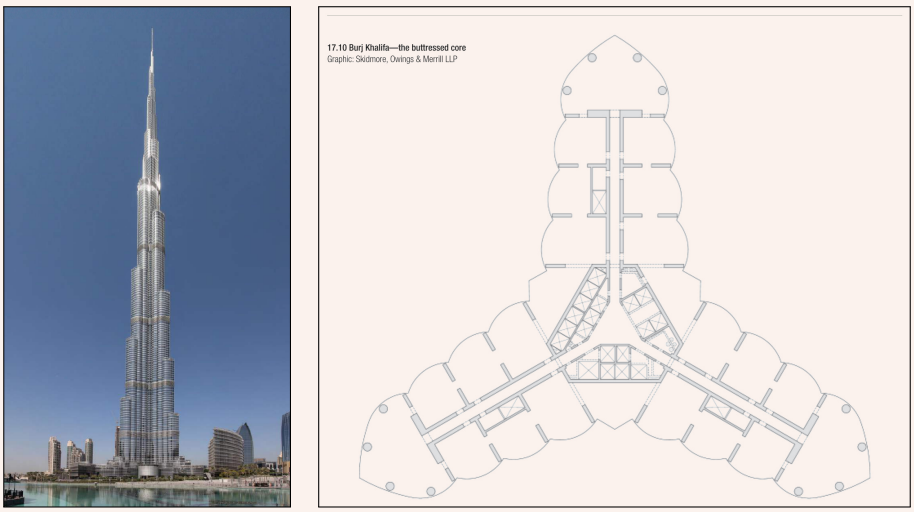


Figura 15.46: Baker e il Burj Khalifa: sofisticazione computazionale al servizio dell'ambizione architettonica (Baker, Skidmore et al., 2013)

Oltre ai progetti individuali, il team di Baker di SOM ha lanciato l'ottimizzazione strutturale della topologia come strumento di progettazione, colmando il divario tra efficienza ingegneristica e espressione architettonica. (Beghini et al., 2014), rappresenta un nuovo paradigma:

Uno dei temi prevalenti che affrontano l'industria edile nel mondo di oggi è l'equilibrio tra ingegneria e architettura: tradizionalmente, l'obiettivo dell'architetto si è concentrato più sull'estetica, o "forma" di una struttura, mentre l'obiettivo dell'ingegnere è stato focalizzato sulla stabilità e sull'efficienza, o sulla sua "funzionalità"; in questo lavoro si parla dell'importanza di una stretta collaborazione tra queste discipline, e si propone un approccio alternativo per generare nuove idee strutturali integrate.

(Beghini et al., 2014)

COPIA DI REVISIONE

Questo lavoro, contestualizzato e illustrato in §15.5.4.3, dimostra come il "cinque per cento" usi strumenti computazionali per non sostituire la creatività, ma per scoprire nuove forme che esprimono la logica strutturale con chiarezza ed eleganza senza precedenti. L'eredità di Baker non si trova solo negli edifici che ha progettato, ma per dimostrare che anche nella nostra età automatizzata, il matrimonio di comprensione ingegneristica e visione creativa rimane insostituibile.

15.6.2.2 Ponti: Michel Virlogeux (1946–)

Michel Virlogeux rappresenta l'epitome dell'eccellenza ingegneristica francese, un prodotto del sistema educativo d'élite della nazione: École Polytechnique e École Nationale des Ponts et Chaussées, affiancato da un dottorato in ingegneria strutturale. Dopo aver stabilito la sua reputazione a SETRA (l'agenzia governativa responsabile degli studi tecnici di strade e strade), si è trasferito a consulenza indipendente, dove la sua visione creativa potrebbe fiorire senza burocratiche.

Virlogeux esemplifica il "cinque per cento" attraverso il suo disegno di oltre 100 ponti, in particolare il Ponte Normandia e il Viadotto di Millau (Fig. 15.47). I suoi ponti in acciaio raggiungere l'eccellenza estetica non attraverso la decorazione applicata, ma riducendo il design alla sua essenza strutturale – una filosofia che riecheggia i grandi ingegneri-artisti del passato. Tuttavia, l'apparente semplicità di queste strutture maschera una straordinaria complessità analitica: le nonlinearità geometriche causate da grandi deformazioni dei cavi, interazioni del vento dinamico e meccanismi di ridistribuzione del carico intricati che richiedono un'analisi computazionale sofisticata ben oltre la pratica standard.

La complessità progettuale dei ponti a più piani è illustrata dalla valutazione tecnica di Virlogeux:

> La soluzione migliore, e la più elegante, è quella di distribuire rigidità tra i diversi componenti strutturali (il ponte, pier e piloni) al fine di bilanciare gli effetti di flessione prodotti da carichi vivi asimmetrici e limitare le deflettori.
>
> - Una piattaforma con elevata rigidità per resistere a momenti di flessione indotti da carichi vivi, che si applica solo per ponti con attacco cavo di piccole e medie campate.
> - Piloni con elevata rigidità di piegatura, ad esempio con la forma di V invertita longitudinalmente, con un trasferimento di forze di piegatura nei pilastri sottostanti per limitare la rotazione a livello del ponte. In queste condizioni è possibile avere un mazzo molto sottile e flessibile.
> - Distribuire rigidità tra tutti i membri strutturali, mazzo e torri.
>
> Come detto sopra, il design strutturale deve consentire variazioni di lunghezza prodotte nel ponte dall'installazione di tendini prestressanti di continuità nelle campate dopo che sono stati chiusi, calcestruzzo strisciante e restringimento che si sviluppano dopo la chiusura delle campate e variazioni di temperatura.
>
> (Virlogeux, 2001)

Il Millau Viaduct, completato nel 2004, è forse il ponte più elegante mai costruito: una

COPIA DI REVISIONE

struttura simmetrica con sei campate da 342 metri e due campate di 240 metri, che si eleva a 245 metri sopra la Tarn Valley. Il progetto ha richiesto innovazioni nella modellazione computazionale, nella metodologia costruttiva e nella scienza dei materiali che hanno spinto i confini di ciò che era considerato fattibile. (Virlogeux et al., 2005)♪ (Bergsjö e Pettersson, 2016) fornisce lettura essenziale per gli studenti di analisi del ponte con posa via cavo, completando il trattamento più accessibile di Virlogeux (Virlogeux, 2001).

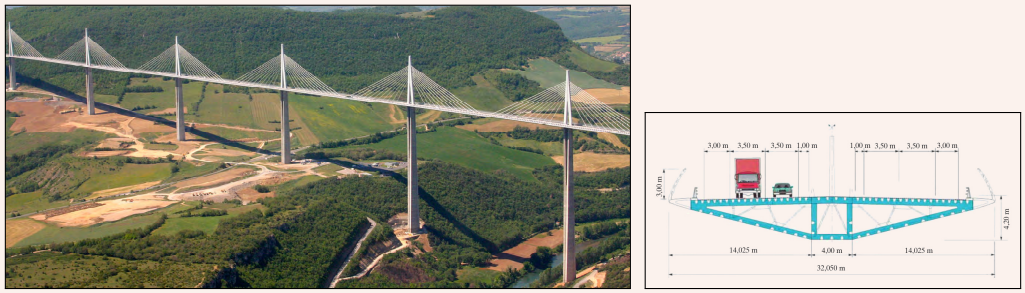


Figura 15.47: Virlogeux e il Viadotto di Millau: poesia strutturale su scala senza precedenti (Virlogeux et al., 2005)

L'approccio di Virlogeux al design rivela il giudizio sofisticato che distingue il "cinque per cento" dai praticanti di routine. Acuto consapevole del delicato equilibrio tra efficienza strutturale ed eccellenza estetica, una tensione che ripercorre a Vitruvio, ha affrontato questo dilemma direttamente nel progetto Millau. 15.48 Virlogeux ha respinto tutte e quattro le alternative come esteticamente inaccettabile, scegliendo invece la soluzione più elegante visibile nel viadotto completato. Questa decisione richiedeva maggiore rigidità del ponte e un'analisi più sofisticata, dimostrando che a volte l'efficienza e l'economia devono cedere, per quanto breve tempo, alla ricerca della bellezza strutturale.

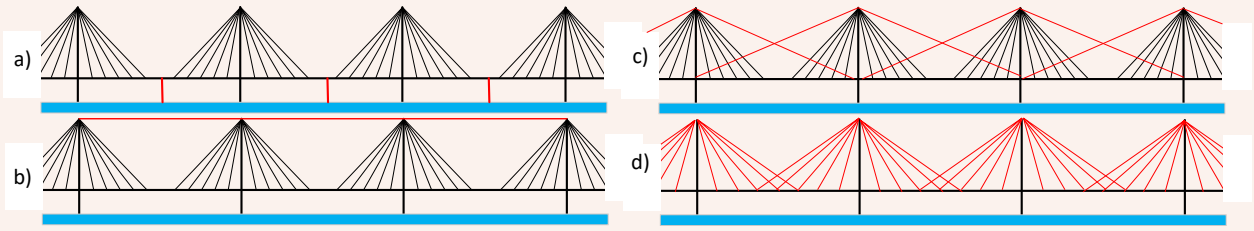


Figura 15.48: Sistemi strutturali alternativi per ponti a più posti, tutti respinti da Virlogeux per motivi estetici (Virlogeux et al., 2005)

Questa volontà di scegliere la bellezza sopra pura ottimizzazione distingue Virlogeux dal 95% A differenza di Maillart, il cui genio si è posto nel raggiungimento simultaneamente dell'ottimizzazione della struttura, dell'economia e della bellezza, Virlogeux ha riconosciuto che in certi contesti – soprattutto in termini di grandi punti di riferimento infrastrutturali – la ricerca dell'eccellenza estetica giustifica la sofisticazione strutturale aggiuntiva. I suoi

COPIA DI REVISIONE

ponti sono monumenti non solo alla capacità di ingegneria, ma alla continua rilevanza del giudizio estetico in una professione sempre più automatizzata.

15.7 Vitruvio rivisitato

Il trattato di Vitruvio (X secolo a.C.) fu riscoperto durante il Rinascimento, e i suoi principi per i requisiti strutturali furono confermati e perfezionati da generazioni successive di ingegneri dell'architetto, che non furono in particolare contestati fino a quando non furono contestati i principi fondamentali per i requisiti strutturali. Billington, 1983b coniata il termine *arte strutturale* e lo definiva in modo notevole ricordando i suoi illustri predecessori: Vitruvio, Alberti e Palladio.

Questa sezione metterà in discussione la nozione stessa di arte strutturale e cercherà di decostruirla, non di diminuire i risultati di grandi costruttori di ingegnere, ma di chiarire il quadro concettuale attraverso il quale comprendiamo il loro lavoro.

15.7.1 Ricostruzione di arte strutturale

A seguito della pubblicazione di quello che considero il miglior libro di testo sulle strutture di shell mai scritto, *Strutture in calcestruzzo sottile Shell*,[57] Billington, 1965 ha sviluppato un profondo interesse per l'estetica strutturale, che si è evoluto attraverso numerosi rapporti interni a Princeton (Billington e Mark, 1970; Billington, Mark e Abel, 1972; Billington, 1984a; Billington, 1979; Billington, 1983a; Billington, 1984b) prima di culminare nel suo lavoro di riferimento (Billington, 1983b).

In questo libro seminale, *La Torre e il Ponte*, Billington ha identificato una tradizione estetica nell'ingegneria strutturale moderna che ha sostenuto era indipendente dall'architettura - una tradizione che ha definito *arte strutturale*. L'opera cattura i suoi pensieri sull'intersezione dell'ingegneria strutturale, dell'architettura e dell'arte, proponendo che un progetto strutturale raggiunga lo status di *arte strutturale* quando raggiunge l'eccellenza in tre aree: *efficienza, economia ed eleganza*. Il libro riesamina le principali strutture selezionate da Thomas Telford, John Roebling, Gustave Eiffel, Benjamin Baker (che rappresenta l'età d'oro tardo XIX secolo di strutture di ferro), e Maillart, Nervi, e altri dall'era concreta dei primi del XX secolo.

Le esigenze di Billington per l'arte strutturale sono, in sostanza, una riforma dei principi enunciati nel I secolo a.C. (Tabella 15.6), con una differenza cruciale, i suoi predecessori consideravano queste virtù essenziali per *tutto* strutture degne, mentre Billington si riserva

[57] A partire dalle relazioni di base familiari a tutti gli studenti e sostenute da eccellenti illustrazioni, Billington deriva l'equazione differenziale parziale di ottavo ordine che governa il comportamento delle conchiglie.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

il diritto di qualificare l'arte strutturale solo per quelle strutture che soddisfano i suoi criteri specifici.

Tabella 15.6: Vittime architettoniche da Vitruvio a Billington

Vitruvibile ~ 20 ACE	**Alberti** 1452	**Palladio**[58] 1570	**Billington** 1983
	Tutte le strutture		*Artìcolo*
Forza (in inglese)*Firmitas*)	Utilità (*Comodità*)	Utilità	Efficienza
Utilità (*Utilitas*)	Durata (*Perpetuità*)	Convenienza	Economia
Bellezza (Belgio)*Venustas*)	Bellezza (Belgio)*Bellezza*)	Durata & Bellezza	Eleganza

Questo influente lavoro catalizzò numerose tesi e documenti successivi da parte degli studenti che analizzarono le opere di "artisti strutturali" utilizzando un modello ben consolidato: descrivere la struttura, collocarla in contesto storico, valutare la sua bellezza ed eleganza, e eseguire calcoli per confermare ipotesi di progettazione.

Innumerevoli pubblicazioni hanno da allora sostenuto il termine, ma pochi lo hanno messo in discussione criticamente.Dopotutto, Billington era una figura tortuosa che colpì il divario tra architettura e strutture.

15.7.2 Cos'è l'arte?

Ma che cosa, precisamente, è l'arte? Io direi che lo scopo singolare dell'arte è quello di instillare negli esseri umani *una comunicazione infettiva delle emozioni*— una manifestazione profondamente personale e disinteressato di sentimenti interiori; le sette forme d'arte tradizionali sono: pittura, scultura, architettura, musica e danza, letteratura, teatro e cinema; per definizione, nessuno serve uno scopo utilitario. L'architettura appare in questa lista solo per il piacere estetico derivato dalla bella costruzione. 15.49a) e Casa Malaparte[59] a Capri (Fig. 15.49b) (Iacovou, 2024) sono capolavori architettonici che funzionano come pura espressione artistica, ma la loro concezione strutturale ha poco peso sul loro merito artistico.

L'arte è sempre *espressione* e non può servire come aggettivo applicato agli oggetti funzionali (anche se 'artistico" potrebbe essere appropriato), non possiamo parlare di 'pen-art' semplicemente perché una penna stilografica di Montegrappa è bella (Fig. 15.50a) o evoca emozioni. Nonostante la sua bellezza e l'artigianato, rimane fondamentalmente uno strumento funzionale – una bella penna, certamente, ma non arte.

[58]La formulazione propria di Palladio comprende in realtà quattro termini—Utilità, convenienza, durata e bellezza— più della divisione tripartita utilizzata da Vitruvio, Alberti e Billington; gli ultimi due sono combinati qui per preservare l'allineamento delle file attraverso la tabella.

[59]Progettato da Adalberto Libera, con sostanziale riprogettazione e autorevolezza diretta di Curzio Malaparte.

COPIA DI REVISIONE



(a) Villa Rotonda (Palladio)



(b) Casa Malaparte, Capri

Figura 15.49: Architettura come arte pura: forma liberata dall'espressione strutturale

Analogamente, esiste un ponte per trasportarci dal punto A al punto B. Può essere – e dovrebbe essere – una bella costruzione, ma non dobbiamo chiamarlo arte. Quando Maillart ha progettato il suo Ponte Salginatobel, il suo obiettivo non era quello di creare arte strutturale ma di costruire un ponte funzionale che sarebbe anche bello e con grazia integrato con i suoi dintorni (Fig. 15.50b).



(a) Penne da Fontana di Montegrappa



(b) Ponte di Salginatobel di Maillart

Figura 15.50: Funzione e bellezza: la penna e il ponte

Dopo aver sfidato l'attribuzione di "arte strutturale" a molte strutture così etichettate da Billington, la domanda rimane: esiste davvero una cosa come l'arte strutturale? La risposta è sì, ma gli esempi sono straordinariamente rari. Per qualificarsi, lo scopo ultimo di una struttura deve essere esclusivamente la bellezza visiva e la comunicazione emotiva, richiedendo le competenze di un ingegnere strutturale per la sua realizzazione. 15.51a), l'Arco Gateway a St. Louis (Fig. 15.51b), o il Globo della Scienza e dell'Innovazione dell'Esposizione Svizzera 2002 (Fig. 15.51c).

E' sottolineata che quando Maillart o Nervi hanno concepito i loro ponti e stadi, l'arte non era certo il loro obiettivo primario: progettare infrastrutture funzionali che si sono rivelate

COPIA DI REVISIONE



(a) Torre Eiffel (b) Gateway Arch, St. Louis (c) Expo 2002

Figura 15.51: Autentica arte strutturale: struttura come pura espressione

per raggiungere la bellezza attraverso la semplicità strutturale ed eleganza.[60] Questa bellezza rappresenta un valore aggiunto enorme, ma emerge dalla ricerca della logica strutturale, non dall'espressione artistica.

Questo solleva una domanda fondamentale: perché coniugare un nuovo termine quando Vitruvio articolava i principi essenziali 2000 anni fa? *Firmitas*, *Utilitas*, *Venustas* che tutte le strutture degne devono soddisfare tre condizioni: forza, utilità e bellezza. Spesso si è interpretato nel suggerire che se i primi due requisiti sono soddisfatti, il terzo segue automaticamente. 15.6). Per Vitruvio, queste condizioni definivano la stessa struttura degna; per Billington, il loro compimento crea "arte strutturale'.

Per questo respingo il termine *arte strutturale* a favore di *architettura strutturale*— una designazione più modesta e precisa.

15.7.3 Architettura strutturale: Manifesto di Llunji

Mentre Billington è *La Torre e il Ponte* ha raggiunto un'influenza diffusa, un manifesto meno noto recentemente pubblicato dall'ingegnere strutturale Montenegrin Miloš Lunji merita di essere uguale, se non maggiore, l'attenzione (Llunji, 2022).

Questo testo essenziale decostruire sistematicamente il concetto di arte strutturale, mette in evidenza i suoi limiti, critica coloro che l'hanno abbracciato ciecamente e sostiene di rivedere il termine *architettura strutturale*—in origine coniata da Nervi (Nervi, 1963). Non posso essere d'accordo con l'analisi di Llunji.

Ho già segnalato la sobria valutazione di Llunji della professione di ingegneria strutturale in §15.6.2. Le sue raccomandazioni forniscono una conclusione adeguata a questa sezione controversa:

[60] Uno dei miei ricordi più cari della scuola secondaria coinvolge un professore di matematica che, quando abbiamo lottato per indovinare l'equazione di una curva di rosa, ci ha detto: "La curva è semplice e bella, dovrebbe avere un'equazione altrettanto semplice e bella" ($r = a\cos(n\theta)$).

COPIA DI REVISIONE

> Se accettiamo che la nostra professione sia in crisi, e se vogliamo renderla ancora attraente, dovremmo introdurre drastici cambiamenti all'educazione degli studenti di ingegneria, che attualmente lascia molto a desiderare. Le generazioni più giovani preferirebbero l'architettura sull'ingegneria perché non identificano più la pratica dell'ingegneria civile con creatività e innovazione.
>
> (Llunji, 2022)

Se parliamo di arte strutturale o di architettura strutturale, probabilmente affrontiamo lo stesso territorio emotivo ed estetico, ma trovo quest'ultimo termine più preciso e intellettuale onesto. Alla fine, assegnamo a parole i significati più comodi ai nostri scopi, e come ci ricorda la Giulietta di Shakespeare:

> Che si chiama rosa?
> Con qualsiasi altro nome puzzava di dolce.
>
> Romeo e Giulietta, Atto 2, Scena 2

La grandezza di Maillart, Nervi, Torroja e dei loro contemporanei non sta nell'aver creato "arte", ma nell'aver dimostrato che strutture funzionali, concepite con profonda comprensione dei materiali e delle forze, possono realizzare una bellezza che rivali qualsiasi creazione artistica, ricordando che la più alta vocazione dell'ingegneria strutturale non è imitare l'arte, ma scoprire la poesia intrinseca nella logica della costruzione stessa.

15.8 Conclusioni

Questo viaggio attraverso l'intersezione dell'ingegneria e dell'architettura, dall'antica Roma all'era digitale, rivela una professione in trasformazione, e abbiamo tracciato l'evoluzione dei principi fondamentali di Vitruvio attraverso i grandi costruttori di ingegnere dell'epoca industriale ai professionisti computazionali di oggi, testimoniando sia i risultati straordinari che le tendenze inquietanti.

Gli ingegneri e gli architetti di questo capitolo rappresentano ciò che Llunji chiama il "cinque per cento" - quei rari praticanti che trascendono il calcolo di routine per raggiungere una vera e propria creatività strutturale. Dalla razionale eleganza di Eiffel alla poesia strutturale di Nervi, dalle innovazioni tubolari di Khan alla sofisticazione computazionale di Baker, queste figure dimostrano che il grande design strutturale emerge non dagli algoritmi software ma dal matrimonio della padronanza tecnica con visione creativa.

La democratizzazione degli strumenti computazionali ha paradossalmente diminuito il ruolo degli ingegneri strutturali, riducendo molti a "tecnici e sostenitori delle idee architettoniche" piuttosto che a partner creativi nel processo di progettazione. Mentre l'IA può servire come strumento potente per l'ingegnere creativo, accelerando i calcoli,

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

esplorando alternative di progettazione e manipolando analisi ripetitive, minaccia anche di erodere ulteriormente l'impegno intellettuale che distingue la vera ingegneria dal semplice calcolo.

Il pericolo non è in sé, ma in sovra-rispetto ad esso. Proprio come la disponibilità di software di elementi finiti ha prodotto ingegneri che possono eseguire analisi complesse senza comprendere la fisica sottostante, l'IA rischia di creare professionisti che possono generare progetti senza comprendere i principi fondamentali che governano il comportamento strutturale. Il saggio ingegnere utilizzerà l'IA come Nervi utilizzato il suo apparato di prova o Baker utilizza l'ottimizzazione della topologia: come strumento per verificare e affinare idee concepite attraverso la comprensione, mai come un giudizio sostituto.

Il cammino avanti non è quello di rifiutare la tecnologia, ma di riscoprire i principi fondamentali: geometria, equilibrio, comportamento materiale[61]L'ingegnere che capisce perché un arco catenario opera, che può visualizzare lo stress scorrere attraverso un fascio, che afferra il rapporto tra forma e forza, sempre posizionerà qualcosa insostituibile: la capacità di distinguere tra plausibile e ottimale, tra calcolo e intuizione. *Fiducia ma verifica* deve diventare la parola d'ordine dell'età dell'intelligenza artificiale—abbracciare il potere dello strumento mantenendo l'indipendenza intellettuale per mettere in discussione la sua uscita.

Per l'aspirante ingegnere strutturale o architetto che cerca di unire quel prezioso cinque per cento, i seguenti testi forniscono una base essenziale:

1. *The Ten Books on Architecture*, Vitruvius, 1960 — I principi fondamentali che rimangono validi dopo due millenni
2. *De re aedificatoria; Catoria Libri Decem Leo*, Alberti, 1485 — Sintesi rinascimentale della teoria classica e applicazione pratica
3. *I quattro libri dell'architettura*, Palladio, 1570 — Sistemi proporzionali e architettura della struttura
4. «The tall office building artistically considered», Sullivan, 1896 — La fondazione filosofica dell'espressione strutturale moderna
5. *Philosophy of structures*, Torroja, Polivka e Polivka, 1958 — Intuito strutturale contro calcolo meccanico
6. *Structures*, Nervi, 1956b — L'integrazione dell'ingegneria e della visione artistica
7. «Design of high-rise buildings», Khan, 1965 — Approccio sistemico ai sistemi strutturali ad alta velocità
8. *Towards a new architecture*, Le Corbusier, 1931 — Principi modernisti e loro implicazioni strutturali
9. *The Tower and the Bridge*, Billington, 1983b — La dichiarazione canonica dell'estetica strutturale

[61]O come ripetute innumerevoli volte nei tre libri seguenti: equilibrio, compatibilità, modello costitutivo.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

10. *Towards A New Engineering-: Reflections of a practitioner*, Llunji, 2022 — Una critica e un cammino necessari verso il rinnovamento

La seguente tabella racconta le principali figure discusse, rivelando l'evoluzione dall'intuizione sperimentale attraverso il rigore matematico alla sofisticazione computazionale:

Tabella 15.7: Evoluzione degli approcci di progettazione strutturale

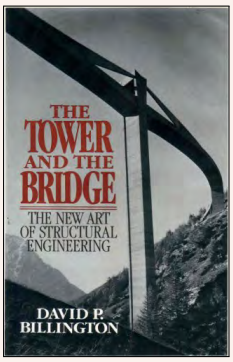
Nome	Anni	Paese (Practice)	Architetto o Ingegnere	Primario Innovazione
Metodi empirici & Intuizione strutturale				
Eiffel	1832–1923	Francia	Ingegnere	Costruzione di ferro raso
Gaudí	1852–1926	Spagna	Architetto	Geometria catartica
Maillart	1872–1940	Svizzera	Ingegnere	Arco di cemento a tre punte
Perret	1874–1954	Francia	Architetto	Architettura di struttura in cemento
Nervi	1891–1979	Italia	Ingegnere	Conchiglie di ferro
Morandi	1902–1989	Italia	Ingegnere	Prestressed cemento
Saarin	1910–1961	US	Architetto	Forme di calcestruzzo espressivo
Candela	1910–1997	Messico	Architetto	Conchiglie paraboloide iperboliche
Forma fisica-findo				
Otto	1925–2015	Germania	Architetto	Strutture di tensione
Isler	1926–2009	Svizzera	Ingegnere	Metodo di membrana di sospensione
Musmeci	1926–1981	Italia	Ingegnere	Ponti di cemento sperimentale
Khan	1929–1982	US	Ingegnere	Sistemi di costruzione tubolari
Menn	1927–2018	Svizzera	Ingegnere	Ponti di cemento preforti
Design computazionale				
Robertson	1928–2021	US	Ingegnere	Sistemi di costruzione super-container
Gehry	1929–2025	US	Architetto	Realizzazione digitale
Calatra	1951–	Spagna	Arch./Eng.	Ingegneria scultorea
Virlogeux	1946–	Francia	Ingegnere	Ponti complessi con cavi
Baker	1953–	US	Ingegnere	Ottimizzazione della topologia

Il viaggio intellettuale da Billington a Llunji (Figura 15.52) riflette la nostra comprensione in evoluzione di ciò che significa praticare l'ingegneria strutturale come disciplina creativa; mentre Billington ha celebrato i risultati estetici di grandi ingegneri, Llunji ci sfida a verificare se la professione ha perso la strada nella ricerca di efficienza computazionale sull'eccellenza creativa.

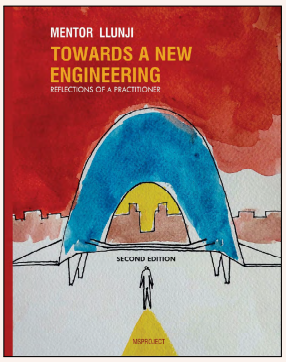
Il percorso in avanti non richiede né abbandonare la tecnologia né ritirarsi nella nostalgia, ma piuttosto coltivare ciò che Baker chiama "geometria ed equilibrio"—le intuizioni fondamentali che permettono agli ingegneri di utilizzare strumenti computazionali come strumenti di scoperta piuttosto che sostituti di pensiero.

La scelta di affrontare ogni nuova generazione di ingegneri strutturali rimane la stessa che si confronta con Eiffel e Torroja: sarete contenti di servire come "tecnician e supporter di idee architettoniche" o aspiriate ad unire il cinque per cento che utilizzano la logica

COPIA DI REVISIONE



(a) La Torre e il Ponte (Billington, 1983b)



(b) Verso una nuova ingegneria (Llunji, 2022)

Figura 15.52: Da celebrazione alla critica: prospettive in evoluzione sulla creatività strutturale

strutturale per creare nuove forme di bellezza? La risposta non è nella sofisticazione del vostro software, ma nella profondità della vostra comprensione di come materiali e forze cospirano per creare la struttura.



Caravaggio, Marta e Maria Maddalena (1598)

La vita attiva e contemplativa nel dialogo: la struttura serve l'architettura come Martha serve a Maria, chiamate distinte, reciproca dipendenza, ognuna essenziale per tutto.

COPIA DI REVISIONE

Capitolo 16

Terrae Motus: Miti, Credenze e Rappresentanze dei Terremoti

Abstract

Questo capitolo esamina il terremoto come un catalizzatore persistente per l'immaginazione umana attraverso culture e periodi storici. A partire dal primo mitologico quadri—in cui gli eventi sismici sono stati attribuiti agli animali sotterranei, cosmici squilibrio, o le lotte dei giganti imprigionati— traccia il progressivo elaborazione dell'interpretazione del terremoto attraverso le strutture formali della religione, le indagini razionali della filosofia, e le risorse espressive della letteratura, architettura, arte, musica e cinema. Un modello coerente emerge: ovunque i terremoti si verificano con sufficiente frequenza per entrare nella memoria culturale, generano esplicativi che assegnano l'agenzia, incorporano l'evento all'interno di un morale o cosmico l'ordine e la domanda di risposta comunitaria. Il capitolo sostiene che questa interpretazione riflesso... l'insistenza che lo scuotere della terra significa *qualcosa... non sostituiti ma progressivamente trasformati dall'avanzata della conoscenza naturale: dalla teoria pneumatica di Aristotele attraverso la crisi dell'illuminismo di Lisbona a l'elegia secolare della letteratura e dell'arte del Novecento. Il terremoto, questo il capitolo suggerisce, è tra i più produttivi di tutti i fenomeni naturali per studio di come le società umane si trovano ad affrontare i limiti dell'ordine, della stabilità e comprensione.*

16.1 Introduzione 675
16.2 Mitologia 676
16.2.1 Giappone 677
16.2.2 Pacifico Nord-Ovest 679
16.2.3 Americas 681
16.2.4 Altre tradizioni 681
16.2.5 Sintesi: Mito come memoria sismica 682
16.3 Religione 683
16.3.1 La Bibbia 683
16.3.2 Grecia 687
16.3.3 India 693
16.3.4 Islam 696
16.3.5 Mesoamerica 698
16.3.6 Shinto 701
16.3.7 Sintesi: Religione e significato della catastrofe sismica . . 703
16.4 Filosofia 709
16.4.1 Aristotele 709
16.4.2 Il tempo di 710
16.4.3 Lucrezio e Plinio 710
16.4.4 Il terremoto di Lisbona come evento filosofico 711
16.4.5 Ricostruzione 713
16.5 Letteratura 715
16.5.1 Terremoti in Letteratura . . . 715

COPIA DI REVISIONE

16.5.2 Il terremoto di Lisbona del 1755 e il dibattito di illuminazione . . . 715
16.5.3 Il terremoto di Messina del 1908 . . . 717
16.5.4 Sintesi: Letteratura e memoria culturale dei Terremoti . 719
16.6 Architettura . . . 719
16.6.1 Pirro Ligorio . . . 719
16.6.2 Gibellina . . . 720
16.7 Artìcolo . . . 724
16.7.1 Tracce di Rock Art e Fault . . 724
16.7.2 Pittura . . . 725
16.7.3 Collezione Kozak . . . 726
16.7.4 Collezione Amelio . . . 727
16.8 Musica . . . 729
16.9 Fotografia . . . 730
16.10 Conclusioni . . . 731
16.11 Epilogue: Da Namazu a Roswell . . 732

16.1 Introduzione

Come qualche altro capitolo[1] di questo libro, questo capitolo affronta un altro tema tematico relativo a un importante stressatore[2] delle strutture: terremoti, e più precisamente il loro rapporto con il subconscio umano, e in altre parole, esamina come i terremoti hanno plasmato la nostra immaginazione collettiva e influenzato la mitologia, la religione, la filosofia e le arti.

Prima di procedere, è utile chiarire tre domini strettamente correlati ma distinti attraverso i quali gli esseri umani hanno tentato di interpretare fenomeni naturali: mitologia, religione e filosofia. Questi domini non sono rigidamente separati; come diverrà evidente, i confini tra loro sono spesso porosi, e l'influenza dei terremoti sul pensiero umano raramente cade ordinatamente in una sola categoria.

Mitologia Nel contesto dei terremoti, i miti spesso attribuiscono il tremolio della terra alle azioni di animali, deità o poteri sotterranei. La mitologia viene trattata prima in questo capitolo, in quanto rappresenta il primo e più universale strato di interpretazione umana.

Religione fornisce un quadro più strutturato di credenze e pratiche in cui i terremoti possono essere interpretati come manifestazioni di volontà divina, punizione, avvertimento, o prova morale all'interno di un ordine teologico più ampio. Crocialmente, le tradizioni religiose sono spesso radicate in, o hanno assorbito, precedenti narrazioni mitologiche — il confine tra i due è storicamente fluido piuttosto che fisso.

FilosofiaDall'antichità in poi, i filosofi hanno tentato di comprendere i terremoti come processi naturali governati dai principi sottostanti, muovendo così l'interpretazione dalla

[1] La genesi di questo interesse del mio è sorto quando ho visitato la città devastata dal terremoto di Gibellina (§16.6.2), e riflessa su come la società ha letteralmente "coperto su."

[2] Nel contesto dell'analisi strutturale, *stressatore* Esso comprende carichi esterni (come gravità, vento, terremoto, effetti termici, o spostamenti imposti) e gli effetti ambientali o di dipendenza dal tempo (per esempio gradienti di temperatura, restringimento o strisciamento). In breve, uno stressatore è qualsiasi causa fisica in grado di generare forze interne, stress o tensioni all'interno di un sistema strutturale.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

narrazione mitica verso l'indagine sistematica — una traiettoria che ha portato alla sessologia moderna.

Data l'insolita ampiezza del soggetto di questo capitolo —spanning domini che si trovano ben al di fuori della portata tipica di un testo di ingegneria strutturale—Fig. 16.1 fornisce una mappa tematica per orientare il lettore prima che la copertura dettagliata inizi.

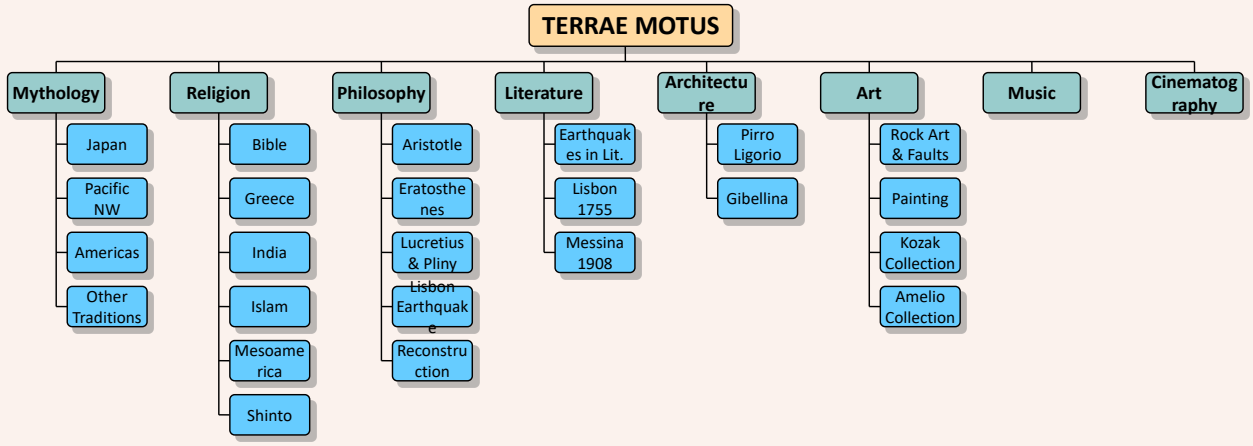


Figura 16.1: Struttura tematica del capitolo

16.2 Mitologia

A Paul Dirac famoso scritto

> È comprensibile perché le persone primitive, che erano così tanto più esposte alle forze sopraffatti della natura di quanto siamo oggi, avrebbero dovuto personificarle nella paura e nel tremore, ma oggi, quando comprendiamo così tanti processi naturali, non abbiamo bisogno di tali soluzioni.
>
> Dirac, 1963 «*The Evolution of the Physicist's Picture of Nature*»

Molto prima dell'emergere di religioni organizzate o spiegazioni filosofiche, le società umane hanno tentato di *comprendere i terremoti attraverso la mitologia*Questi miti non sono stati incorporati in sistemi teologici formali, ma appartenevano invece a tradizioni orali che interpretavano i fenomeni naturali attraverso narrazioni simboliche. In tali resoconti, i terremoti sono stati spesso attribuiti ai movimenti di animali o esseri soprannaturali credevano di sostenere o abitare la Terra. Queste spiegazioni riflettono i primi tentativi di imporre significato e causalità su eventi che apparivano improvvisi, violenti e incomprensibili.

La ubiquità delle narrazioni mitologiche del terremoto in culture molto separate è di per sé notevole. Dal Giappone e dall'Asia centrale al Nord-Ovest del Pacifico e Mesoamerica,

COPIA DI REVISIONE

società senza contatto con l'un l'altro sono arrivate a strutture simili esplicazioni: una vasta creatura si muove sotto la terra; un guardiano soprannaturale la decadenza arbitraria; le forze cosmiche opposte cadono temporaneamente fuori dall'equilibrio.

16.2.1 Giappone

La tradizione Namazu

In Giappone, la spiegazione prevalente——anche se non l'unica—folklorica per i terremoti è centrato sull'esistenza di un gigantesco pesce gatto sotterraneo (*Namazu*). La credenza si sviluppò gradualmente nel corso di diversi secoli dalle tradizioni popolari native giapponesi, influenzate in parte dalle idee cosmologiche cinesi. Secondo questo, il gigante Namazu viveva in acque sotterranee sotto il Santuario di Kashima nella provincia di Hitachi (oggi Prefettura di Ibaraki). *kaname-ishi* ('pietra di fondazione" o "pivot stone"') si credeva di incolpare la creatura e impedirne il movimento (Fig. 16.2c).

La sola pietra, tuttavia, era ritenuta insufficiente per frenare il Namazu. Il sistema dipendeva dalla divinità di Kashima (*Takemikazuchi-no-kami*), un dio associato al tuono e al potere marziale, premendo giù sulla pietra per mantenere immobile il pesce gatto (Fig. 16.2c). Ogni anno durante il decimo mese lunare—il cosiddetto , o "mese senza dèi'—Kashima si credeva lasciare il suo posto e viaggiare a Ise per partecipare alla riunione annuale delle principali divinità giapponesi al Grande Santuario. Se Kashima trascurasse il suo dovere, o se Ebisu non riuscisse a frenare la creatura durante l'assenza del dio, il Namazu avrebbe combattuto sotto la terra, causando terremoti (Fig. 16.2b). Si ritiene che la gravità della trebbia corrisponda direttamente alla grandezza dei movimenti dei pesci gatto.

Le dimensioni culturali e sociali della tradizione Namazu si cristallizzarono drammaticamente seguendo la grande Il terremoto di Ansei Edo del 1855, che ha generato un notevole corpus di stampe di blocchi di legno noto come *Namazu-e* ('i foto di pesce gatto', 'Fico. 16.2a–16.2e), (Smits, 2006). Queste stampe raffigurano il pesce gatto in una vasta gamma di ruoli narrativi e satirici: dilagando attraverso la città mentre la divinità di Kashima è assente (Fig. 16.2b), essere sottomesso o punito dal dio al suo ritorno (Fig. 16.2c), e in un registro più ambivalente, presiede su scene di ridistribuzione economica in cui i comunisti trarre profitto dalla distruzione di beni accumulati dai mercanti ricchi (Fig. 16.2a e 16.2d) (Smits, 2006). Quest'ultimo tema— il Namazu come agente di *Yonaoshi* ('World rectification')—riflette una corrente popolare in cui il terremoto, per tutto il suo terrore, è stato anche percepito come una forza di livellamento che ha interrotto le gerarchie sociali intrecciate (Fig. 16.2e).

L'origine precisa del legame tra Namazu e terremoti rimane incerta. È possibile che l'idea più ampia di un pesce gigante che sostiene la terra sia stata trasmessa dalla Cina attraverso le tradizioni buddiste. Alcuni templi cinesi raffigurano il Bodhisattva Guanyin in piedi su un grande pesce simile al Namazu giapponese. Mentre il pensiero cinese ha certamente

COPIA DI REVISIONE



(a) Persone di Edo aggredire il Namazu per aver causato il terremoto del 1855



(b) Namazu si dilania mentre la città brucia



(c) La divinità di Kashima sottopone il pesce gatto che causa il terremoto



(d) Catfish come una divinità popolare che porta il cambiamento sociale favorevole



(e) Kashima o Ebisu con la pietra di fondazione

Figura 16.2: Esempi di *Namazu-e* stampe raffiguranti il pesce gatto gigante responsabile dei terremoti (Miyata e Takada, 1995)

influenzato la cosmologia giapponese, l'associazione specifica e persistente tra un pesce gigantesco e terremoti sembra essersi sviluppata in Giappone. (Ludwin e Smits, 2007)La scelta di un pesce gatto è di per sé suggestiva: la creatura è a basso-gonfiamento, in gran parte invisibile, e capace di movimento improvviso potente—un simbolo apt per le forze nascoste del mondo sotterraneo.

Interessante, ci sono alcune prove etno-sistemiche che suggeriscono che i pesci gatto e altri pesci che mettono sotto l'alimentazione mostrano un comportamento insolito nelle ore o nei giorni precedenti terremoti, possibilmente in risposta ai cambiamenti nella chimica delle acque sotterranee, campi elettromagnetici, o micro-sisteici precursori. (Ludwin e Smits, 2007).

COPIA DI REVISIONE

Spiegazioni cosmologiche: Yin, Yang e Quadri Competing

Accanto alla tradizione Namazu, una spiegazione più filosofica dei terremoti circolata in Giappone, radicata nella filosofia naturale cinese. *Ansei Kenmonroku* (Records of Things Seen and Heard in the Ansei Era, c. 1854) interpreta i terremoti attraverso la teoria cosmologica di Yin (in inglese)*in*) e Yang (*yō*): l'acqua (puramente Yin) domina normalmente il regno sotterraneo e sopprime il fuoco (puramente Yang), ma i terremoti si verificano quando questo equilibrio viene interrotto e il fuoco sotterraneo temporaneamente supera l'acqua. L'analogia ai fenomeni vulcanici e geotermici colpisce, e può riflettere un'intuizione—comunque pre-scientifico—che il calore è implicato nello scuotere della terra.

Significativamente, alcuni fogli di larghi stampati dopo il terremoto del 1855 Ansei impiegavano entrambi i quadri contemporaneamente, descrivendo esplicitamente la spiegazione del pesce gatto come una teoria "non sofisticata". Questa coesistenza della mitologia popolare e della cosmologia filosofica come parallela—e talvolta in competizione—-esplicativa illustra che le culture pre-scientifiche non erano uniformemente credulose: dibattevano, classificavano, e a volte esplicitamente respinto i conti concorrenti di causalità naturale.

Le stampe Namazu-e e la rettifica del mondo

Il terremoto di Ansei-Edo del 1855, stimato in magnitudo 7.0–7.1, colpì Edo (Tokyo moderno) il secondo giorno del decimo mese di Ansei 2, causando incendi devastanti e tra 4.000 e 10.000 morti (Miyata e Takada, 1995; Smits, 2006; Abe, 2000). Entro due giorni, le stampanti hanno iniziato a produrre il *Namazu-e* fogli larghi che costituiscono uno dei corpi più notevoli di immagini di disastro popolari nella storia pre-moderna.

La distribuzione geografica dei danni ha dato all'evento una particolare risonanza politica: la distruzione è caduta sproporzionatamente sulle residenze samurai e i sostenitori del Tokugawa *Bakufu*, la cui autorità era già indebolita dall'apertura forzata del Giappone al commercio estero dopo le visite del Commodore Perry del 1853-54, mentre alcuni distretti più comuni fuggirono relativamente incolti Smits, 2006. Artisti sfruttato questo asimmetria attraverso il concetto di *Yonaoshi* ('World rectification"): il Namazu apparve non solo come distruttore ma come agente di livellamento, presiedendo la ridistribuzione della ricchezza dall'élite agli artigiani e ai mercanti che avrebbero tratto profitto dalla ricostruzione. *Namazu-e* non solo illustrazioni di un evento sismico ma ricchi documenti culturali che riflettono le tensioni sociali e politiche del tardo periodo Edo (Wakamizu, 2003) (vedi Fig. 16.2).

16.2.2 Pacifico Nord-Ovest

Lungo la costa cascadica, terremoti e tsunami sono stati interpretati attraverso la mitologia narrazioni che coinvolgono potenti esseri soprannaturali i cui movimenti si credevano di scuotere la terra e mandare grandi onde sulla riva. Cascadia Subduction Zone—una delle

COPIA DI REVISIONE

ambientazioni tettoniche più sismiche e tsunamigene nel mondo— tali narrazioni possono codificare ricordi culturali di eventi geologici autenticamente catastrofici, tra cui il grande terremoto e tsunami del gennaio 1700 e gli eventi precedenti nel record dell'oloceo.

Thunderbird e Whale

Il tema del terremoto più noto nella regione comporta una lotta tra il Thunderbird, uno spirito potente del cielo associato a tuoni e tempeste, e la Whale, una creatura delle profondità dell'oceano. Secondo molte tradizioni, i loro incontri violenti hanno causato il terreno a tremare e il mare a sovraccarico – un'accoppiamento che corrisponde esattamente al motivo co-seismo tsunami firma di una grande cascata Subduction Zone rupture Fig. 16.3b. La persistenza e la gamma geografica di queste storie, unita al loro legame coerente di terra che agita con l'inondazione costiera, ha portato alcuni ricercatori a sostenere che il ciclo Thunderbird–Whale preserva la memoria genuina dei terremoti megathrust preistorici (Ludwin e Smits, 2007).

Spiriti del paesaggio e Memoria geologica

Altre tradizioni della regione del Puget Sound associano terremoti e trasformazioni paesaggistiche improvvise con esseri serpenti soprannaturali che popolano particolari caratteristiche geografiche. Un esempio notevole è il "spirit boulder' vicino a Fauntleroy a West Seattle, tradizionalmente legato da popoli indigeni locali ad un'entità soprannaturale conosciuta come *A'Yahos*, descritto in termini che corrispondono strettamente agli effetti fisici dei terremoti o grandi frane: improvviso agitazione violenta, la trasformazione del terreno familiare, e il rilascio di forze distruttive dall'interno della terra. Il serpente a doppia testa associato a disturbi della terra è diffuso in tutte le culture del Pacifico del Nord-Ovest, che appare in numerosi contesti cerimoniali tra cui *Sxwayxwey* maschera dei popoli della costa Salish. Questa figura può essere intesa come codifica simbolica della dualità tettonica: una forza simultaneamente sotterranea e surficial, che collega l'interno nascosto della terra al paesaggio visibile sopra, Fig. 16.3a.

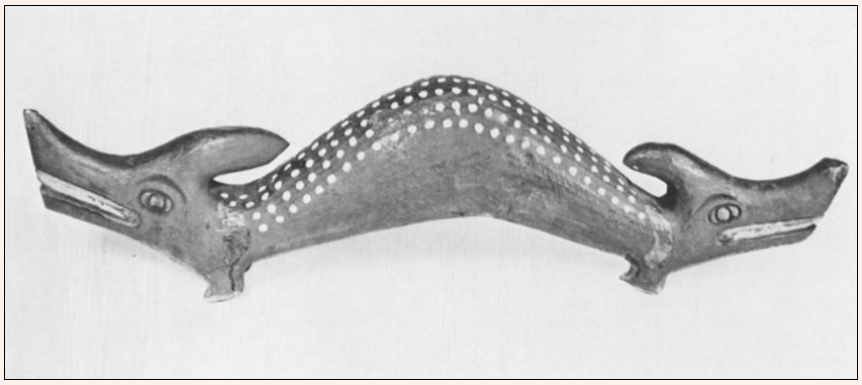
Le tradizioni del Pacifico nord-ovest sono di particolare interesse per i moderni sismologi perché il record geologico della regione è insolitamente ben limitato. Il terremoto del 1700 Cascadia è documentato in stratigrafia geologica— foreste fantasma, strati di sabbia tsunami, paludi costiere sospesi—e in documenti storici giapponesi di uno tsunami orfano. convergenza di prove orali geologiche, storiche e indigene per un singolo evento catastrofico ha dato nuova credibilità all'ipotesi che queste narrazioni preservano la memoria genuina dell'evento del 1700 e forse delle prime rotture di Cascadia (Ludwin e Smits, 2007), sollevando domande profonde sulla capacità della tradizione orale di servire come deposito di informazioni geologiche attraverso i tempi di secoli o Millennio.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Maschera Sxwayxwey della Columbia Britannica continentale.



(b) Una rappresentazione cerimoniale di Quileute.

Figura 16.3: Oggetti cerimoniali della costa nord-occidentale del Pacifico che rappresentano la sismica spiriti.

16.2.3 Americas

Attraverso la Mesoamerica e la costa del Pacifico, una regione sismica intensa e vulcanica attività lungo il bordo orientale del Pacific Ring of Fire—earthquake mitologia sviluppato in stretta corrispondenza geografica con i pericoli geologici sperimentati da i popoli che abitavano questi paesaggi.

Mesoamerica e i codici

Nel Messico centrale e settentrionale, i manoscritti pittorici noti come codici raffigurano terremoti e in alcuni casi registrano il numero di eventi e le loro date, suggerendo che gli eventi sismici sono stati integrati in sistemi storici, calendrici e divinatori. *Ollin* ('movement"' o "earthquake") ha tenuto un posto prominente nel calendario rituale di 260 giorni, il *tonalepohualli*E l'attuale era cosmica, il Quinto Sole, era chiamato *Noui Ollin* ('Four Movement"'), profetizzato per terminare in un terremoto catastrofico.*Piedra del Sol*), uno degli oggetti più iconici della civiltà precolombiana, pone il *Ollin* glifo al centro della sua composizione – una dichiarazione visiva della centralità cosmica del terremoto che va ben oltre la semplice spiegazione popolare, che rappresenta invece un sofisticato impegno filosofico con la ricorrenza e l'imprevedibilità degli eventi sismici.

16.2.4 Altre tradizioni

Mentre le sezioni precedenti si sono concentrate sulle tradizioni regionali ben documentate, la mitologia terremotata è un fenomeno genuinamente globale, e una serie di tradizioni aggiuntive meritano una breve considerazione.

COPIA DI REVISIONE

In Scandinavia, come sopra riportato, la mitologia norrena attribuiva terremoti alle convulsioni di Loki, il dio aggressore, che era condannato a mentire sotto la terra con un serpente che si arruffava il veleno sul suo volto. Il suo dolore—temporaneamente alleviata quando sua moglie Sigyn prese il veleno in una ciotola, e si ripropose con particolare violenza quando si voltò a svuotarlo—-cande la conseguenza divina-a-a-a-a-a il terreno sopra a tremare a tremare il terreno per tradimento.

In India, il *Shatapatha Brahmana* e altri testi primitivi descrivono la terra come poggiante sul retro di un grande cinghiale (*Varaha*), un avatar di Vishnu, mentre la tradizione popolare in varie regioni attribuiva terremoti ai movimenti di un grande elefante o del mondo-turtle sul cui dorso la terra era equilibrata. Le tradizioni sud-est asiatico così hanno partecipato alla largamente diffusa ''il motivo sostenuto-da-animale' sopra discusso. *karma* e il tempo cosmico: alcuni eventi sismici sono stati associati alle transizioni tra età cosmica (*Yugas*), prestando loro un significato escatlogico analogo all'Azteco *Noui Ollin*.

In Medio Oriente, i testi antichi mesopotamiani di Sumer e Babilonia registrano eventi terremoti e li attribuiscono alla rabbia di divinità specifiche, in particolare del dio della tempesta. Alcuni studiosi hanno sostenuto che la distruzione di città antiche lungo il sistema di difetti del Mar Morto Trasformare — una struttura sesticamente attiva che attraversa il Levante— è riflessa in resoconti biblici di distruzione divinamente ordinata, compresa la caduta di Jericho e la distruzione di regione sirra

16.2.5 Sintesi: Mito come memoria sismica

Le tradizioni esaminate in questo capitolo rivelano un modello globale coerente: le culture umane situate nelle regioni sesticamente attive sviluppano quadri mitologici che codificano, spiegano e danno un significato morale e sociale all'esperienza dei terremoti. Questi quadri differiscono nelle loro immagini specifiche –animali custodi, forze serpentine, squilibrio cosmico, punizione divina – ma condividono una logica strutturale comune.

Alcune tradizioni del Pacifico nord-ovest che collegano il terreno scuotendo l'inondazione costiera corrispondono esattamente alla firma co-semica dello tsunami di eventi megathrust Cascadia. Il raggruppamento geografico dei casi di arte rocciosa legata al terremoto sui difetti attivi in Baja California e nella California meridionale suggerisce che le posizioni di immagini simiologiche sono in alcuni casi determinati da fenomeni sismici osservati.

Lo studio della mitologia terremotata non è quindi solo un esercizio di storia culturale, ma illumina il profondo bisogno umano di avere senso di catastrofe, dimostrando anche che il confine tra narrazione mitologica e osservazione empirica è spesso più permeabile di quanto possa apparire.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

16.3 Religione

L'interpretazione religiosa dei terremoti differisce da quella mitologica in grado di elaborazione istituzionale piuttosto che in natura. Dove mitologia offre narrazione spiegazioni radicate nella tradizione orale e l'immaginario simbolico, la religione incorpora quelle spiegazioni all'interno di strutture formali di dottrina, liturgia e testo sacro—donare il terremoto un posto fisso all'interno di un ordine teologico più ampio e generando prescritti risposte comuni alla catastrofe sismica, ma come introduzione a questo capitolo osservato, il confine tra i due domini è storicamente fluido piuttosto che fisso: narrazioni mitologiche sono spesso assorbite in sistemi religiosi, trasformate in il processo ma mai interamente infamato. Le tradizioni intervistate in questa sezione illustrare quella dinamica con particolare chiarezza.

Tra le tradizioni esaminate sotto—Giudeo–cristiano, greco, indù, buddista, islamico, Mesoamericano, e giapponese... emerge un modello coerente. eventi geologici; sono sempre anche comunicazioni, sia di presenza divina, rabbia divina, squilibrio cosmico, imminenza escatologica. La specifica teologia il contenuto di questa comunicazione varia enormemente dalla tradizione alla tradizione, ma riflesso interpretativo stesso—l'insistenza che lo scuotemento della terra significa qualcosa, che è rivolto all'umanità e richiede una risposta—appare per essere universale. È proprio questo riflesso che la tradizione filosofica, esaminata §16.4, sarà sottoposto al suo primo esame critico sostenuto.

16.3.1 La Bibbia

All'interno della tradizione giudeo-cristiana, Dio si manifesta spesso attraverso la natura fenomeni. Terremoti, tempeste, fuoco e inondazioni sono quindi interpretate non semplicemente come eventi geologici o meteorologici ma come espressioni visibili della presenza divina, potere e volontà. Questo quadro interpretativo è continuo con, ma distinto, tradizioni mitologiche sopra sorpassate: dove il mito assegna l'agenzia sismica a sotterranea creature o forze cosmiche, la religione biblica incorpora il terremoto all'interno di una teologia narrazione di patto, giudizio e redenzione, in cui il tremore della terra è inseparabile dalla condizione morale dell'umanità. Il terremoto biblico serve, a seconda del contesto, come teofania, come strumento di intervento miracoloso, o come codificato memoria di vera catastrofe geologica assorbita nella narrazione sacra.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Teophane e Presenza Divina

Un esempio sorprendente di terremoto come teofania[3] si verifica durante il rivelazione sul Monte Sinai:

> Tutto il monte Sinai era coperto di fumo perché il Signore era sceso su di esso in il fumo si è riversato nel cielo come il fumo di una fornace, e tutta la montagna scosse violentemente. (Esodo 19:18)
>
> 1611 The Holy Bible, Containing the Old and New Testaments



Figura 16.4: *Israele al Monte Sinai* (1703) di Jan Luyken. L'incisione illustra la teophania sismica come un totale sconvolgimento ambientale, dove il frastagliato, instabile la resa delle vette suggerisce lo "stupido violento" della terra in risposta la presenza divina.

Il terremoto qui non sta da solo, ma fa parte di un complesso più ampio di vulcani e fenomeni atmosferici—fuoco, fumo, tenebra—attraverso il quale la presenza divina è manifestato (Figura 16.4). Una simile convergenza sismica e segni atmosferici appaiono nel *Libro dei Giudici*:

[3]Dal greco *la tua vita* ($\theta\varepsilon o\varphi\alpha\nu\varepsilon\iota\alpha$), composto da *theos* ($\theta\varepsilon o\varsigma$), "god',' e *phainein* ($\varphi\alpha\iota\nu\varepsilon\iota\nu$), "a comparire' o "a "Il termine indica una manifestazione diretta e percettibile del divino all'interno l'ordine creato—distinta da *epifania* (*Epifania*, $\varepsilon\pi\iota\varphi\alpha\nu\varepsilon\iota\alpha$), che più in generale designa un aspetto divino o un arrivo, e da *apocalisse* (*Apokalýp.*, $\alpha\pi o\kappa\alpha\lambda\upsilon\psi\iota\varsigma$), significa una rivelazione o rivelazione della conoscenza nascosta. Nella tradizione ebraica, la teofania al Sinai appartiene ad un genere letterario ben definito in cui vulcanico, sismico, e fenomeni atmosferici collettivamente segnalano l'approccio di - *Si'.* (il Tetragramma, traslitterato - *Oh, mio Dio.ē-wā- No.ē*), il Dio d'Israele. Il classico trattamento scientifico rimane Jeremias, 1965.

COPIA DI REVISIONE

> La terra tremò, e i cieli caddero, le nuvole caddero anche l'acqua; montagne fuse da prima SIGNORE.[a]
>
> 1611 The Holy Bible, Containing the Old and New Testaments

[a]Giudici 5:4. I francesi traduzione, altrettanto evocativa, legge: *La terra trembla, les cieux , les nuées déversèrent de l'eau, les montagnes s'affaisèrent devant Le Seigneur's* (Louis Segond, 1910). Il verbo ebraico ha reso "melted"' () porta il senso di scorrere o di dissolvere, suggerendo liquefazione o destabilizzazione del paesaggio prima del divino approccio... un dettaglio di potenziale interesse sismico.

In entrambi i passaggi, lo scuotere della terra funziona come riconoscimento cosmico del divino arrivo—il paesaggio stesso risponde alla presenza di Dio.

Terremoto come intervento miracoloso

Il Nuovo Testamento contiene diversi episodi in cui terremoti accompagnano momenti di decisivo significato religioso. Al momento di Cristo morte, Matteo riporta che "la terra scosse, le rocce si sciolgono, e sono state aperte le tombe (Matteo 27:51-53)—un passaggio particolarmente assente dagli altri Vangeli, e uno in cui l'evento sismico serve come una ratifica cosmica della Analogamente, il racconto della risurrezione in Matteo 28:2 riporta che "ci era un grande terremoto, perché un angelo del Signore scese dal cielo».

Un episodio più intimo di intervento sismico miracoloso si verifica in Atti 16:19 - 40, quando Paul e Silas sono imprigionati a Philippi e continuare a pregare e cantare inni nonostante le loro catene (Fig. 16.5). La loro perseveranza è ricompensata drammaticamente:

> Improvvisamente c'è stato un grande terremoto, in modo che le fondamenta della casa di prigione erano scosse; e subito tutte le porte furono aperte e tutte le catene erano infavore. (At 16:26)
>
> 1611 The Holy Bible, Containing the Old and New Testaments

Qui il terremoto non funziona né come teofania né come giudizio, ma come liberazione –un'espressione sismica della solidarietà divina con i fedeli perseguitati. il modello è coerente con la teologia biblica più ampia in cui la catastrofe naturale, piuttosto che essere arbitrari, è sempre purposivo: serve, punisce, consegna, o rivela.

Eventi geologici in Biblica Narrativa

Alcune narrazioni bibliche sembrano corrispondere a eventi geologici identificabili, sollevando la questione di quanto antica memoria religiosa possa preservare le tracce di vera sismica catastrofe. L'attraversamento del fiume Giordano e il successivo distruzione delle mura di Gerico sono tra i più frequentemente esempi discussi. Entrambi gli eventi si verificano lungo lo sciopero principale–slip Jordan Valley colpa, una delle strutture più sisticamente attive nella Levant. Un forte terremoto avrebbe potuto indurre il crollo del quasi banche alluvionali verticali del fiume—composto da soffice marl e argilla alluvionale

COPIA DI REVISIONE



Figura 16.5: Stoning dell'apostolo Filippo a Hierapolis, Phrygia (Jan Luyken, 1685).

particolarmente sensibile alla destabilizzazione sismica—bloccante temporaneamente il flusso a monte e permettendo al fiume di scolo a valle di drenare sufficientemente per l'attraversamento. presta questa ipotesi peso insolito è la precisione geografica del racconto biblico se stesso: Giosuè 3:16 specificatamente nomina la città di *Adam.* (identificato con moderno Damiya) come la posizione in cui le acque "piled up"—precisamente il sito dove i collassi delle banche indotte dal terremoto sono stati storicamente documentati su più occasioni, tra cui nel 1267, 1546, 1906, e più recentemente nel 1927, quando una magnitudine 6.2 il terremoto ha bloccato il fiume per oltre venti ore. La ricorrenza Questo fenomeno nella stessa posizione geografica conferisce una notevole plausibilità ad una lettura sismica della narrazione di Giosuè. Ulteriori danni sismici possono allora aver contribuito al crollo delle mura di Gerico (Fig. 16.6). La distruzione di Gerico era già catalogato come evento sismico in una cronaca terremotata del XV secolo, e scavi archeologici a Tell es-Sultan hanno rivelato strati di distruzione coerenti con danni al terremoto (Nur e Burgess, 2008).

La distruzione di Sodoma e Gomorrah è stato simile legato ad un grande terremoto lungo lo stesso sistema di guasto, eventualmente accompagnato da espulsione esplosiva di gas naturale e bitume—entrambi ampiamente documentato lungo la colpa strutture del Mar Morto Trasforma- così come vulcanico La relazione è già stata osservata nella sezione precedente sulla Tradizioni mitologiche mediorientali (§16.2.4).

Un'ipotesi più speculativa ma ampiamente discussa collega l'Esodo narrazione narrativa con la catastrofe eruzione di Santorini (Il vento)), uno degli eventi vulcanici più potenti del mondo antico, datato a circa il XVII o XVI secolo B). L'ipotesi, sviluppata in varie forme da studiosi, tra cui Nur e Burgess, 2008 proposte che l'intensa attività sismica e vulcanica associata a questa eruzione può avere ha innescato una cascata di disturbi ambientali in tutto il Mediterraneo orientale somigliando alle peste bibliche—compresa l'oscurità

COPIA DI REVISIONE



Figura 16.6: La battaglia di Gerico (c. 1560) di Virgil Solis (Kozac Collection)).

prolungata associata con nubi di cenere vulcanica—e che i disturbi sismici possono aver contribuito al temporaneo alterazione dei livelli d'acqua descritti nella narrazione di attraversamento di Esodo. trattamento della stessa ipotesi, Jacobovici e Cameron, 2006 punti a un'iscrizione geroglifica nel museo di Ismailiya e sostiene che il "Mar Rosso' del racconto biblico può riferirsi ad un bacino d'acqua dolce poco profondo, Lago El-Bala, che si asciugarono dopo la costruzione del Suez Canale nel XIX secolo, e il cui livello d'acqua potrebbe essere stato suscettibile di rapidi cambiamenti sesticamente indotti.

Se queste interpretazioni geologiche sono in definitiva corrette, esse illustrano un fenomeno più ampio e ben consolidato: comunità che abitano sesticamente attive paesaggi codificano la loro esperienza di eventi catastrofici all'interno di narrazioni che sono contemporaneamente storico, teologico e mitologico. Il confine tra questi le categorie, come ha osservato l'Introduzione a questo capitolo, sono raramente fissate. La Bibbia partecipa alla stessa dinamica fondamentale identificata attraverso il mitologico tradizioni sopra—l'impulso umano per rendere la terrificante imprevedibilità la terra significativa all'interno di un quadro narrativo più ampio.

16.3.2 Grecia

Tra i greci antichi, l'interpretazione dei terremoti occupata una posizione subito mitologica, religiosa e– come la sezione seguente sarà mostra—incipiente filosofico. I confini tra questi domini erano, in greco mondo, particolarmente fluido: la stessa divinità potrebbe essere invocata in un contesto cult, narrata in versi mitologici, e sottoposti a critiche razionali all'interno di una singola generazione pensatori: è quindi impossibile trattare la risposta religiosa greca ai terremoti in completo isolamento dalle tradizioni mitologiche già sopra esaminate; piuttosto, i due devono essere compresi come strati successivi di una tradizione interpretativa continua.

COPIA DI REVISIONE

Poseidon Enosichthon: Il pianeta Terra-Shaker

L'attribuzione dei terremoti a Poseidon non era solo convenienza mitologica ma una questione di culto religioso attivo. Poseidon bore, tra il suo molti epiteti, il titolo *Enosichthon* ($\varepsilon\nu o\sigma\iota\chi\theta\omega\nu$E... *Il mio nome* ($\varepsilon\nu\nu o\sigma\iota\gamma\alpha\iota o\varsigma$), "chi scuote il 'Questi epiteti appaiono già in Homer e Esiodo. attestante l'antichità dell'associazione. *Iliade*, il movimento di Poseidon attraverso il paesaggio è descritto in termini che non lascia ambiguità sul suo carattere sismico:

> Si impadroniva di lui, e le alte foreste e le montagne tremavano sotto il I piedi immortali di Poseidon mentre si muoveva.*Iliade*, XIII.18)
>
> Homer, 1924 The Iliad

Anche se Poseidon è ricordato nel successivo ordine olimpico principalmente come il dio del mare, strati più antichi della tradizione suggeriscono un ruolo più arcaico e più ampio. l'identità è diventata principalmente marittima, sembra essere stato associato con la terra con il mondo minerale sotto la crosta, e con le forze nascoste capaci di violente disordini di surficial. In questa concezione più antica, terremoti e tempeste allo stesso modo era manifestazione della sua rabbia, la graduale restringimento del suo dominio al mare, mentre il terremoto ha mantenuto il suo nome, riflette il carattere stratificato di religione greca tradizione: nuove strutture teologiche sono state poste su quelle più vecchie senza del tutto li stornando.

I terremoti in Grecia non sono stati spiegati semplicemente con riferimento a Poseidon ma ha risposto attraverso la pratica religiosa. sono stati offerti per placare il dio dopo grandi eventi sismici, e i suoi santuari erano spesso situato in zone costiere e geologicamente attive. Il collegamento tra sismica l'instabilità e la presenza divina furono così istituzionalizzati nel culto, non solo narrati nel mito.

Enceladus e il Gigantomachy

La tradizione Poseidone, in cui il movimento attivo di un dio provoca la terra scuotere, coesistere nel pensiero religioso greco con un strutturalmente diverso racconto radicato nella mitologia del Gigantomachy— grande guerra primordiale tra gli dei olimpici e i giganti della terra. questa tradizione, i terremoti non sono causati dal passaggio di un dio ma dal lotte imprigionate di un nemico cosmico sconfitto.

Enceladus ($E\gamma\kappa\varepsilon\lambda\alpha\delta o\varsigma$) il più potente dei giganti e l'avversario tradizionale di Athena nel Gigantomachy, fu colpito dalla lancia della dea e sepolto sotto l'isola della Sicilia—-o, nella più precisa tradizione di Virgilio e di Statio, sotto il Monte Etna i fuochi vulcanici dell'Etna erano che si trattenne per essere il respiro di Enceladus; i suoi tremori il risultato della sua svolta il mito più celebre è il lato ferito sotto la montagna. Espressioni latine:

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

> Fama est Enceladum semustum fulmine corpus
> mole hac, ingentemque insuper Aetnam
> impositam ruptis flammam exspirare caminis,
> et fessum quotiens mutet latus, intremere omnem
> murmure Trinacriam et caelum subtexere fumo.
>
> Il racconto è detto che Enceladus, il suo corpo fulmine-scars,
> si trova in prigione sotto tutta questa massa, e su di lui
> gigantesco Etna emette il fuoco dai suoi forni di scoppio;
> e quando si sposta terribilmente il suo lato,
> tutta la Sicilia trema e geme, e il cielo è velato in fumo.
>
> Vergilius Maro, 2008 The Aeneid

La logica teologica della tradizione Enceladus differisce in un rispetto cruciale da quello di Poseidone. Dove Poseidone è una divinità sovrana la cui rabbia o il movimento produce effetti sismici come sottoprodotto del suo potere, Enceladus è un prigioniero—un rappresentante delle forze terrestri primordiali (nato da Gaia e il sangue di Urano) che l'ordine olimpico ha sconfitto e soppresso. La sua esistenza continua sotto la terra è un segno non di potere divino, ma della vittoria divina: il terremoto è l'ultima convulsione di una sconfitta ordine pre-cosmico, prova che gli olimpici sono sottomessi ma non completamente estingueva la violenza insita nella terra stessa. Questa lettura della il terremoto come la persistenza della forza primordiale soppressa sotto un l'ordine cosmico imposto non ha parallelo nella tradizione Poseidone, e esso anticipa, in forma mitologica, la logica strutturale della defettura del serpente narrazioni esaminate in §16.3.2.



(a) Enceladus buried in the sea, carrying Sicily and Mount Etna on his belly

(b) Gilt-bronze Enceladus, by Gaspar Mercy, Versailles

Figura 16.7: Il mito di Enceladus

La persistenza culturale di Enceladus è senza parallelità tra i sismici i dati rilevati in questo capitolo, il suo nome non è semplicemente sopravvissuto a allusione o metafora poetica: è entrata nella lingua greca come ordinario Sostantivo comune per il terremo-

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

to...*egkelados* ($E\gamma\kappa\varepsilon\lambda\alpha\delta o\varsigma$)–e rimane così in greco moderno fino a questo giorno.[4] Non è una sopravvivenza nel modo di un luogo nome o costellazione: è la mitologia che diventa la lingua. Ogni Presidente. — Onorevole collega, non posso fare a meno di esprimere il mio appoggio. un nemico cosmico sconfitto imprigionato sotto la Sicilia – l'interpretazione sismica embedded così profondamente nella cultura che ha superato la teologia, il culto, l'impero, e la civiltà che l'ha prodotto, perseverante come vivere vocabolario tra più di due e mezzo millenni. L'osservazione attribuito a Dirac nell'epigrafe a §16.2–che la comprensione moderna dei processi naturali ha reso interpretazione mitologica obsoleto—meets il suo più appuntito controprosempio non in alcun argomento teologico ma in un dizionario: il parola greca moderna per il terremoto è un mito.

Quella figura rimase potente oltre il mondo antico anche in altri registri. A Versailles, Louis La sistematica distribuzione di XIV degli dei olimpici come emblemi della supremazia reale includeva una fontana monumentale di Enceladus... *Bosquet de l'Encélade*, progettato c. 1675 e eseguito in bronzo dorato da Gaspar Misericordia di Cambrai (Fig. 16.7b). La fontana raffigura il gigante mezzo-buried sotto le rocce della Sicilia, acqua che erutta dalla sua bocca in luogo di fuoco vulcanico—una trasposizione visiva dell'immagine Virgilio in il vocabolario idraulico del giardino formale. La scelta non è stata incidentale: la sottomissione di Enceladus prima che il Re Sole specchi, in barocco registrate, la stessa logica cosmica che lo seppelliva sotto Etna.

Geografia sacra e paesaggio sismico

Una caratteristica ricorrente della pratica religiosa greca è la deliberata assedio dei santuari in luoghi dove la terra ha esposto comportamento insolito o incasinato: sorgenti termali, emissioni gassose, fissure di terra e zone di attività sismica persistente. luoghi non sono stati compresi semplicemente come geologicamente interessante ma come *enargeis*–siti in cui il divino era insolitamente vicino al superficie del mondo.

L'esempio più celebre è il santuario di Apollo at Delphi, Fig. 16.8. È ora ben stabilito che il Delphic oracolo era situato direttamente sopra una colpa sismica attiva, e che il profetico ispirazione del *Pitaia* può essere stato materialmente assistito da inalazione di vapori di idrocarburi—chiefly etilene—risalire attraverso le fessure nei calcare sottostante (Broad, 2006; De Boer e Sanders, 2005). Il luogo sacro così doveva parte della sua autorità religiosa alle condizioni geologiche che i Greci interpretato come segni di prossimità divina. Che Apollo avrebbe dovuto scegliere questa frattura, terra che emetteva il vapore come sede della profezia era, all'interno dell'immaginazione religiosa greca, del tutto coerente: il dio ha parlato per l'instabilità della terra stessa. degno di notare che questa lettura geologica dell'autorità di Delphi— la naturalizzazione di quello che i Greci sperimentarono come divino—anticipa il progetto filosofico di separare naturale dalla causazione soprannaturale, assorbita in §16.4.

Questo modello di siti sacri posizionati sopra le strutture sismiche si estende oltre Delphi e

[4] L'etimologia collega il nome al il verbo *e la suaô* ($E\gamma\kappa\varepsilon\lambda\varepsilon\dot{\upsilon}\omega$), "sper sollecitare" o "per suonare la

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE



Figura 16.8: Tholos di Delphi, un tempio circolare costruito tra il 380 e il 360 a.C. all'interno del Santuario di Athena Pronaia a Delphi, Grecia.

è stato identificato in diversi altri principali santuari dell'Anatolia e dell'Egeo Mondo greco (Piccardi, 2007). La convergenza del significato religioso e l'attività geologica in questi siti non era quasi certamente coincidente: comunità che ripetutamente sperimentato disturbi sismici in una particolare posizione sarebbe naturalmente interpretare quel disturbo come prova della presenza divina, e in tempo formalizzare l'interpretazione attraverso la costruzione di un santuario. La geografia sacra della Il mondo greco era, in questo senso, in parte scritto dalla terra stessa.

Il terremoto di AD 60 e la trasformazione del sacro Indignazione

Il terremoto di AD 60 fornisce uno dei più esempi istruttivi di come un vero evento geologico si sia assorbito e successivamente trasformata, narrazione religiosa. La crisi sismica di questo periodo ha interessato un ampio arco di Anatolia occidentale, e i suoi effetti sono tracciabili in entrambi il record fisico e nelle tradizioni religiose di due siti principali: Hierapolis e Colossae. In entrambi i casi, che cosa la documentazione geologica suggerisce che una rottura di terreno catastrofica fu successivamente narrata come un intervento divino miracoloso (Piccardi, 2007). Entrambi i siti illustrano così stessa dinamica sottostante: evento geologico assorbito in memoria religiosa, trasformato ma Non cancellata.

At **Hierapolis**, c'è forte archeologico e geologico prova per il posizionamento deliberato del principale distretto sacro direttamente sopra un traccia di guasto attivo, che sembra estendersi dal tempio di Apollo molto prima dell'arrivo dei coloni greci, il sito aveva è stato considerato come un luogo di comunicazione con gli inferi— probabilmente a causa delle emissioni gassose localizzate e dell'attività idrotermale associata con la zona di difetti. Queste forze sotterranee, interpretate all'interno della religione greca immaginazione come

carica"...-un etimologia che conserva il carattere marziale del Gigante anche come il nome è passato dalla mitologia in discorso comune.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

il respiro delle divinità cromatiche, il sito il suo carattere sacro molto prima di esso acquisì il suo ellenistico e successivamente cristiano associazioni.

L'apostolo Filippo si dice che sia arrivato a Hierapolis intorno a te AD 70-80. Il suo arrivo è incorniciato nella tradizione da due straordinari fenomeni: l'apparizione di un drago accompagnato da un violento terremoto e fulmine, e l'apertura improvvisa di un grande abisso nel mezzo della città, che inghiottito settemila uomini insieme con la serpente-dea Echidna. Ora vi è una prova convincente che questa narrazione preserva la memoria del AD 60 terremoti, che sembra aver aperto una lunga rottura di superficie lungo la traccia della strada principale attraverso la città—precisamente la "abys" della tradizione. La figura del serpente qui partecipa alla più ampia grammatica simbolica discussa di seguito (§16.3.2).

At **Colossae**, un processo parallelo di codifica religiosa è la tradizione riporta che i pagani hanno tentato di distruggere il cristiano locale santuario distogliendo un corso d'acqua per immergerlo. Invocato dal sacerdote Archippus, L'Arcangelo Michele appariva e, colpendo la roccia con il suo staff, aprì un fissure nella terra che ha incanalato le acque lontano dal santuario, Fig. 16.9. Il nuovo insediamento che è cresciuto intorno a questo fessura ha preso il suo nome... ($\chi\omega\nu\alpha\iota$, "divertimento")— direttamente dalla caratteristica geologica. questa fissura miracolosa era infatti una rottura di colpa associata con AD 60 il terremoto, e che la riorganizzazione del drenaggio descritto nella tradizione riflette un vero cambiamento di paesaggio sesticamente indotto (Piccardi, 2007). The theological la trasformazione è tuttavia completa: che cosa la geologia ha prodotto, narrazione religiosa attribuito all'intervento angelico.

Serpenti, Draghi e la lingua simbolica del potere sismico

L'apparizione di serpenti e draghi sia nelle tradizioni di Hierapolis che Colossae non è incidentale, come discusso in §16.2.4 e §16.2.3, la figura del serpente costituisce uno dei simboli più diffusi e persistenti veicoli per forze sismiche e cromatiche in tutte le culture. tradizione, questa associazione è particolarmente riccamente sviluppata. ucciso da Apollo a Delphi, l'Echidna di Hierapolis, e il drago schiacciato dall'Arcangelo Michele a Colossae tutti partecipano a un simbolico comune grammatica: una potente forza serpente sotterranea, associata all'instabilità geologica e gli ordini religiosi più anziani, sono superati da una nuova autorità divina o apostolica.

Questo modello–serpente sconfitto da Dio o da santo sopra un sesticamente attivo sito—suggest che la cristianizzazione di Anatolia non ha semplicemente spostato i più vecchi Interpretazione religiosa greca dei terremoti ma l'ha assorbita e ritraslata. drago di Hierapolis e il Python di Delphi appartengono alla stessa famiglia simbolica; il la differenza sta nel fatto che si tratti di Apollo o dell'Apostolo Filippo che sta trionfando sopra l'abisso. In entrambi i casi, la narrazione religiosa codifica l'incontro di una comunità con una terra instabile e pericolosa, e risolve che l'incontro attraverso l'affermazione della potenza divina sulla forza cromatica. La stessa grammatica simbolica riapparerà nella Figura indù di

COPIA DI REVISIONE



Figura 16.9: icona russa del XVIII secolo raffigurante il Miracolo dell'Arcangelo Michele a Chonae.

Shesha (§16.3.3) e la naga buddista Mucalinda (Belgio)§16.3.3), confermando la portata interculturale del serpente come metafora sismica.

16.3.3 India

Il subcontinente indiano, situato alla convergenza della tettonica indiana ed eurasiatica placche, è una delle regioni sismicamente più attive del mondo. Non sorprende quindi imprendibile che entrambe le grandi tradizioni religiose che hanno avuto origine lì...-Hinduismo e buddismo—sviluppato sofisticati quadri teologici per interpretare il trematura della terra, quadri che portano il confronto con quelli della biblica e Le tradizioni greche sopravvissute, pur rimanendo distintivamente radicate nella loro propria Locali cosmologici.

Induismo

La tradizione cosmologica indù offre uno dei resoconti più elaborati di la relazione tra fenomeni sismici e ordine divino. Come notato nel precedente sezione sulla mitologia (§16.2.4), la terra è stata concepita in diversi tradizioni come poggiare su un grande elefante, in piedi su una tortura mondiale, i cui movimenti producevano terremoti. Il *Shatapatha*

COPIA DI REVISIONE

Brahmana offre un più teologico conto sviluppato, descrivendo la terra come sostenuto da *Varaha*, il avatar di cinghiale di Vishnu, che l'ha salvata dalle acque primordiali l'inizio del tempo cosmico. In questo quadro, l'instabilità sismica non è semplicemente una fenomeno fisico ma teologico: riflette il continuo sforzo del divino il potere di mantenere l'ordine contro la minaccia sempre attuale di dissoluzione cosmica.

Questa dimensione escatologica è più pienamente articolata nella dottrina della *Yugas*, le quattro epoche cosmiche successive descritte nella *Puranas* e la *Mahabharata*. Ogni l'età è caratterizzata da un progressivo deterioramento dell'ordine morale e fisico, e la transizione tra le età è segnata da eventi naturali catastrofici—fuochi, incendi, e tra loro terremoti. L'età attuale, l'età *Kali Yuga*, is inteso come un periodo di massimo disordine, in cui i disturbi sismici sono tra i segni di avvicinarsi alla dissoluzione cosmica (*La mia vita è stata molto più facile.*). Il parallela strutturale con l'Azteco *Noui Ollin* e la sua profezia del terremoto terminale, annotata in §16.2.3 e sviluppato ulteriormente in §16.3.5, colpisce: attraverso tradizioni ampiamente separate, le figure del terremoto come strumento di conclusione escatologica.

La figura del serpente centrale della cosmologia sismica indù è *Shesha* (anche chiamato *Ananta*, l'Infinito), la grande naga cosmica Le cui bobine Vishnu si ripiegano nell'intervallo tra i cicli mondiali. Shesha è compresa per sostenere la terra stessa, ed è il suo agitare—il suo imbecille, in alcuni account—che fa tremare il terreno. L'immagine codifica così all'interno di un singolo figura mitologica sia la forma serpentina incontrata in questo capitolo come una metafora sismica interculturale (vedi §16.3.2) e la logica cosmologica di una terra perpetuo sospesa sopra la dissoluzione. Fig. 16.10a mostra Vishnu che si ripiega sul serpente cosmico Shesha, Tempio di Dashavatara, Deogarh, Madhya Pradesh, India, c. 500 CE (Gupta) periodo). Le bobine di Shesha sotto la terra sono comprese per causare terremoti quando il serpente mescola. *in situ*.

In questo contesto, gli eventi sismici individuali potrebbero essere interpretati attraverso la lente of *karma*- la legge morale della causa e dell'effetto... come conseguenze. trasgressione umana collettiva. Questo riflesso interpretativo, antico in origine, persiste con notevole vitalità nel periodo moderno. Quando un terremoto catastrofico ha colpito il Bihar regione dell'India nordorientale il 15 gennaio 1934, uccidendo circa 20.000 persone, Mahatma Gandhi pubblico ha dichiarato la punizione divina per il peccato di intattabilità—esclusione sistematica delle comunità di casti inferiori da parte di una piena social e religiosa partecipazione. La dichiarazione ha provocato un rimprovero immediato e celebrato da Rabindranath Tagore[5], che ha sostenuto che attribuire una catastrofe naturale ad una il peccato sociale era moralmente irresponsabile e intellettualmente regressivo, indegno di un leader della statura di Gandhi (Paranjape, 2011). Lo scambio è storicamente significativo ben oltre il suo contesto immediato: riecheggia, in un moderno registro indiano, lo stesso confronto tra interpretazioni teologiche e razionali della catastrofe terrena

[5]Rabindranath Tagore (1861–1941), Il poeta, filosofo e compositore Bengali, nel 1913 ha ricevuto il Premio Nobel per la Letteratura — il primo scrittore non europeo a riceverlo — e autore degli inno nazionali sia dell'India che del Bangladesh.

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

che aveva convulso il pensiero europeo quasi due secoli prima nel dopomath del terremoto di Lisbona del 1755 (§16.5.2).[6]

Lo scambio è un ritorno acuto al dismissario fiducioso espresso da Dirac pagina 676 nell'epigrafe a §16.2,[7] che ha assunto che il moderno comprensione dei processi naturali aveva reso l'interpretazione teologica della natura Il terremoto di Bihar del 1934 suggerisce il contrario.

Buddismo

La tradizione buddista offre un resoconto distinto ma complementare terremoti, uno radicato meno nell'escatologia cosmologica che nella biografia Buddha Lui stesso. *Pali Canon*, il primo corpo sopravvissuto di scrittura buddista, record che i terremoti hanno accompagnato ogni degli otto grandi momenti dell'esistenza terrena del Buddha: la sua concezione, la sua nascita, la sua rinuncia alla vita mondana, il suo compimento di illuminazione sotto il Bodhi albero, il suo primo sermone a Sarnath, il suo annuncio la sua morte imminente, il suo passaggio in finale *Il mio nome*, e la distribuzione delle sue reliquie. In questo quadro, il terremoto non è uno strumento di punizione divina ma di ratifica cosmica—la terra stessa che testimonia eventi di suprema importanza spirituale, tanto quanto la terra scosse alla crocifissione e la risurrezione nel Vangelo di Matteo (§16.3.1).

Uno degli embodimenti più visivi arrestati di questa teologia sismica è l'episodio of *Mucalinda*, il re naga che sorge da sotto la terra per proteggere il Buddha meditante da una tempesta con il suo cappuccio diffuso. L'immagine si concentra in una singola composizione i motivi centrali del capitolo: il serpente come potere sotterraneo, la terra come sede della forza trasformativa, e il rapporto tra quella forza e il massimo raggiungimento spirituale. Fig. 16.10b spettacoli Il Buddha riparato dal re naga Mucalinda, regione di Angkor, Cambogia, 12 ° secolo CE (Khmer, tardo stile Bayon) Il serpente sorge sotto la terra proteggere il Buddha meditante, incarnando la concezione buddista del potere sotterraneo come sia pericoloso e, quando giustamente capito, protettivo.

Il *Anguttara Nikaya* enumera le cause di terremoti in modo particolarmente sistematico, distinguendo tra eventi sismici causati per vento e acqua che agiscono sulla terra, quelli causati dal potere spirituale di grande asceti, e quelli che accompagnano gli eventi di vita di un Buddha. la classificazione è di notevole interesse: rappresenta un tentativo iniziale di distinguere tra cause naturali, umane e trascendente di fenomeni sismici, anticipando

[6] Il terremoto di Lisbona del 1755 (§16.5.2) ha provocato un dibattito strutturalmente identico nell'Europa Illuminismo, con Voltaire e Rousseau occupare ruoli analoghi a quelli di Tagore e Gandhi rispettivamente, e con Leibniz's dottrina della *ottimismo*–che questo è il il migliore di tutti i mondi possibili'—come la posizione teologica sotto attacco. tra i due episodi, separati da due secoli e due continenti ancora identici nella loro logica di fondo, è discusso ulteriormente in §16.5.2.

[7] "Ora, quando comprendiamo così tanti processi naturali, non abbiamo bisogno di tali soluzioni». (Dirac, 1963). Il terremoto di Bihar 1934 suggerisce che l'impulso di interpretare la catastrofe naturale in termini teologici è piuttosto più durevole di quanto implica la osservazione di Dirac.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) *Anantashayana Vishnu*: Vishnu che si ripiega sul serpente cosmico Shesha.



(b) Buddha riparato dal re di naga Mucalinda.

Figura 16.10: I serpenti cosmici come forze stabilizzanti e protettive in indù e buddisti iconografia.

in la sua struttura—se non nel suo contenuto—il successivo sforzo filosofico per separare naturale da causalità soprannaturale che viene esaminato in §16.4.

Come il buddismo si diffuse dal subcontinente indiano in Asia centrale, Cina, Tibet e Il Giappone, la sua teologia sismica è stata assorbita e modificata dal cosmologico In Giappone, come indicato nel §16.2.1, Le idee buddiste su un grande pesce che sostiene la terra sembrano aver contribuito a lo sviluppo della *Namazu* tradizione, illustrando la permeabilità di confini religiosi quando le tradizioni si incontrano tra loro attraverso geografici e culturali In Tibet, i terremoti sono stati incorporati nel *Vajrayana* struttura della cosmologia tantrica, dove potrebbero segnala l'attività di potenti spiriti sotterranei (*Nagas*) che richiedono la propiziazione rituale. *Naga-* un serpente associato acqua, il mondo sotterraneo e il disturbo sismico—ci si unisce al lungo catalogo di serpente figure incontrate in questo capitolo come veicoli simbolici per le forze nascoste della terra (vedi anche §16.3.2).

16.3.4 Islam

All'interno della tradizione islamica, i terremoti occupano una posizione di notevole peso teologico, che appare nel Corano sia come segni di potere divino operante nel mondo attuale e come arrogatori della convulsione escatologica che inaugurerà l'Ultimo Giorno. Questo doppio carattere... segno divino contemporaneo e come finale cosmico–da la teologia islamica del sismico eventi una gamma e intensità che invita il confronto sia con la biblica che con l'Indù tradizioni sopra descritte (§16.3.1, §16.3.3), rimanendo radicata nella sua sede teologica distintiva.

COPIA DI REVISIONE

Surah 99: Al-Zalzalah

Il trattamento più concentrato e teologicamente esplicito dei terremoti nel Corano Surah 99, 1, lett. a), del regolamento (CEE) n. *Al-Zalzalah* ('Il terremoto').[8] È uno dei più corti capitoli del Corano, costituiti da soli otto versetti, ma è tra i più Il capitolo si apre con una visione della convulsione sismica cosmica:



Figura 16.11: Rendering calligrafico di Surah 99:1–8 (*Al-Zalzalah*)

Bismi llāhi r-raḥmāni rḥīm
In nome di Allah, il Più Grazioso, il Più Misericordioso.

1. *Idhā zulzilati l-arḍU zilzĀhimè.ā*
   Quando la terra è scossa con il suo terremoto finale,
2. extitWa-akhrajati l-arḍu athqālahā
   E la terra fa sorgere i suoi fardelli,
3. *Wa-qāla l-insānu mā lahā*
   E l'uomo dice: "Che cosa sta succedendo?"
4. *Idm ḥarrangiarsi a unĀRAā*
   Quel giorno riferirà la sua notizia,
5. *Bi-anna rabbaka awḥā lahā*
   Perché il tuo Signore l'ha ispirata.
6. *Idhin yawma'iṣduru nĀsu ashtātan li-yuraw aṁĀlahum*
   Quel Giorno il popolo partirà in gruppi sparsi per essere mostrato le loro azioni.
7. *Fa-manṁal di testaāla dharratin kayran yarah*

[8] Il titolo arabo *Al-Zalzalah* deriva dal radice quadrilifante *z-l-z-l*, trasmettere violento, ripetitivo trematura—an formazione onomatopoeica il cui suono molto accentua il fenomeno che descrive. radice cede il verbo *La mia vita è stata* e il sostantivo *Zio!*, entrambi utilizzati nel Corano per indicare convulsione sismica o escatologica.

COPIA DI REVISIONE

Quindi chiunque faccia il peso di un atomo di bene lo vedrà,
8. *Wa-man yoṁal di testaāla dharratin sharran yarah*
E chiunque faccia il peso di un atomo del male lo vedrà.

Abdel Haleem, 2004 The Qur'an: A New Translation
Surat (99:1–8) — al-Zalzalah (The Earthquake)

Il terremoto non è solo un evento fisico ma lo strumento del cosmico divulgazione: la terra stessa, convulsa alle sue fondamenta, libera i segreti che ha e tutte le azioni umane sono rese visibili alla luce del giudizio divino. parallela strutturale con la dottrina indù *La mia vita è stata molto più facile.* e la profezia azteca di *Noui Ollin* è sorprendente a questo proposito: attraverso le tradizioni ampiamente separate nello spazio e nel tempo, le figure del terremoto come meccanismo di conclusione escatologica e di calcolo morale (vedi §16.3.7).

Terremoti come segni divini

Oltre la loro funzione escatologica, i terremoti appaiono nel Corano e nel *e)* letteratura—i rapporti raccolti delle parole e delle azioni del Profeta[9]—as *Ayat* ('signs's')[10]) di potere divino e di presenza operativa all'interno in questa capacità funzionano analogamente ai terremoti teophanici della tradizione biblica (§16.3.1): non sono eventi naturali arbitrari ma le comunicazioni purposive da Dio all'umanità. Il Profeta Maometto è riportato in diversi *e)* di avere i terremoti interpretati come ammonizioni divine, e la giurisprudenza islamica ha esteso questo principio sistematicamente: i terremoti sono tra i mezzi con cui Dio attira i attenzione dell'umanità alla sua condizione morale.

Questa lettura ha generato una risposta liturgica specifica, dopo un terremoto importante, divenne consuetudine in molte comunità musulmane per eseguire *salato al-khusuf*,[11] una preghiera speciale di supplica e penitence–analogo nella sua logica alle risposte sacrificali agli eventi sismici antica pratica religiosa greca (§16.3.2), e alle offerte votive in Giappone dopo i principali terremoti (§16.2.1).

16.3.5 Mesoamerica

L'interpretazione religiosa dei terremoti in Mesoamerica differisce da quelli sopramenzionati in un rispetto fondamentale: da nessuna parte nel mondo antico fu catastrofe sismica

[9]Il *e)* («report» o «narrativo») costituiscono, accanto al Corano, le principali fonti normative di diritto e teologia islamica. le collezioni più autorevoli sono *Sahihayn* ('le due raccolte sonore') di al-Bukhari e ibn musulmano Al-Hajjaj.

[10]Arabo *āyāt*, plurale di *āya*, denotare sia il i singoli versetti del Corano e i segni del potere divino visibili nel creato ordine. Il termine è cognato con l'ebraico *ot*, "sign,"' riflettendo il comune Radice semitica - *No.*.

[11]Arabo *ṣalāt al-khusūf*, letteralmente "la preghiera dell'eclisse" estesa dall'analogia giurista (*Qiyas*) per coprire terremoti e altri straordinari naturali la preghiera è composta da due unità () con una recita estesa, eseguito in congregazione, e concluso da un sermone di ammonizione ().

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

così completamente e sistematicamente integrata nella formalità struttura del pensiero religioso. Nell'Azteco la tradizione, il terremoto era non solo segno di disaprezza divina o di manifestazione teophanica del potere divino; era il destino cosmologico del mondo stesso, incorporato al centro stesso calendario rituale e codificato negli oggetti più sacri della civiltà.

Il quinto sole e Nahui Ollin

cosmologia azteca che il mondo attuale era il quinto in un successione di epoche cosmiche, ciascuna presieduta da un sole diverso e ciascuna terminata da una catastrofe diversa: inondazione, vento, pioggia di fuoco, e l'oscurità aveva distrutto i quattro L'età attuale, il Quinto Sole, è stato chiamato *Noui Ollin* ('Four Movement"" o 'Quattro Terremoto"") e era profetizzato non per inondazione o per fuoco, ma per catastrofe terremoto.[12] Questa profezia non era un elemento periferica del pensiero religioso azteco ma la sua centro cosmologico: il mondo attuale viveva sotto una frase sismica permanente, e funzione di rituale–compreso il sacrificio umano—era in parte a deferire che la convulsione terminale nutre il sole e mantiene l'ordine cosmico.

Il *Ollin* glyph era posto al centro del *Piedra del Sol* (la cosiddetta "Aztec Sun Stone"), una degli oggetti più iconici della civiltà precolombiana, ora nel Museo Nacional de Antropología a Città del Messico. La sua posizione centrale è una dichiarazione visiva del primato cosmologico del terremoto: tutto il tempo, tutto rituale, tutta la storia si irradia verso l'esterno dal destino sismico del mondo.

> Il Nahui Ollin, Four-Earthquake, sarà il nome di questo sole che ora esiste. [. . .] Ci saranno terremoti, ci sarà la fame, e poi la nostra fine verrà.*Anales de Cuauhtitlan*)
>
> León-Portilla, 1963 Aztec Thought and Culture: A Study of the Ancient Nahuatl Mind

Rituale risposta e il differimento della catastrofe

L'integrazione della profezia terremotata nella pratica religiosa azteca aveva profondo conseguenze rituali. Se il terremoto terminale potrebbe essere differito dal mantenimento cosmico ordine, poi fallimento rituale-impieto, trascurare il sacrificio, trasgressione morale–potrebbe Ogni terremoto reale era quindi potenzialmente un assaggio del convulsione finale, un richiamo alla fragilità dell'attuale età del mondo e della necessità di manutenzione rituale, che ha dato agli eventi sismici un'urgenza nell'Azteco immaginazione religiosa che andava ben oltre ogni cosa nella biblica o islamica tradizioni: un terremoto non era solo un avvertimento divino ma una potenziale prova per la fine del mondo.

[12] Il Nahuatl termine *Ollin* denota il movimento, e per estensione terremoto; è il diciassettesimo dei venti segni del giorno *tonalepohualli*, il calendario rituale di 260 giorni. Il prefisso numerale (quattro') identifica la specifica posizione calendrica della giorno in cui è stata creata l'attuale eta' mondiale e su cui è destinata a finire.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Il segno del giorno *Ollin* nel calendario rituale era di conseguenza trattate con particolare gravità. Persone nate su una *Ollin* giorno in giorno si ritiene che sia segnato da una relazione speciale con le forze sismiche, e *Ollin* il giorno stesso era considerato propizia per alcuni rituali e inauspicienti per gli altri. Il calendrico e la geologia non erano quindi semplicemente analogamente correlati ma strutturalmente fuso: il tempo stesso è stato organizzato intorno al ritmo sismico catastrofe.

Proseguimento con la Tradizione Mitologica

Come indicato nella §16.2.3 *Ollin* il glyph e il concetto di *Noui Ollin* non appaiono solo in contesti religiosi aztechi, ma nei codici di diverse culture mesoamericane, suggerendo che l'integrazione dei fenomeni sismici in Il pensiero cosmologico e calendrico era una tradizione regionale di notevole antichità Il sistema religioso azteco rappresenta quindi un'innovazione azteca. l'espressione più sviluppata di un più ampio impegno mesoamericano con terremoti che si estendeva dalla registrazione calendrica attraverso narrazione mitologica a formale dottrina teologica e pratica rituale.

A questo proposito il caso Mesoamericano si trova all'estremo fine di uno spettro che corre attraverso tutte le tradizioni intervistate in questo capitolo. Dove la tradizione biblica interpreta i terremoti come interventi divini occasionali all'interno di un'altra stalla creato ordine, e dove la tradizione islamica li incorpora all'interno di un'escatologia che rimane futuro e contingente, la tradizione azteca ha reso il terremoto terminale premessa strutturale dell'intero sistema cosmologico e rituale. Il mondo non ha semplicemente rischiare di finire nel terremoto; era costitutivamente destinato a farlo, e l'intero la vita religiosa è stata organizzata in risposta a questa certezza.



Figura 16.12: Il *Piedra del Sol* (Aztec Sun Stone), con *Ollin* glyph al suo centro.

COPIA DI REVISIONE

16.3.6 Shinto

Il rapporto tra terremoti e pensiero religioso in Giappone is insolitamente ben documentato, che spazia quasi un millennio di testuali, artistici e rituali come discusso in §16.2.1, la tradizione mitologica popolare centrato sul gigantesco pesce gatto sotterraneo *Namazu* a condizione che spiegazione popolare dominante per gli eventi sismici nel Giappone premoderno. Ciò che richiede enfasi qui è il grado in cui questa tradizione mitologica è stata assorbita nel formale strutture di Shinto pratica religiosa—ilustrante con particolare chiarezza il confine fluido tra mitologia e religione identificato nell'Introduzione a questo capitolo.

Kashima e la teologia del restrittivo

Il nucleo teologico della tradizione terremotata di Shinto è la figura *Takemikazuchi-no-kami*, incisa al Kashima Santuario in oggi Prefettura Ibaraki e il suo ruolo di divino restrittore del *Namazu*. All'interno della pratica Shinto, il la narrazione mitologica divenne la base di un rapporto rituale attivo tra comunità e la sua divinità protettiva: il calendario del santuario includeva cerimonie esplicitamente diretto a mantenere il divin contenimento dei pesci gatto, e pellegrini viaggiarono a Kashima per cercare protezione contro i terremoti (Fig. 16.13). La parte superiore di questa illustrazione mostra la pietra nel Santuario di Kashima mentre sotto il dio Takemikazuchi sta pinning il pesce gatto gigante Ōnamazu con la sua spada. Ōnamazu si dice che vive sotto le isole del Giappone e quando aggravata è la causa dei suoi molti terremoti. Takemikazuchi frena il pesce gatto attraverso l'uso della pietra chiave. La minaccia di catastrofe sismica così richiesto manutenzione rituale continua—strutturalmente analogo al deferral sacrificale Azteco del terremoto terminale (§16.3.5).

Il , il decimo mese lunare durante il quale Kashima viaggiò alla grande assemblea delle divinità a Ise, è stato considerato come un periodo di una maggiore vulnerabilità sismica, compensata da una preghiera intensificata, da offerte e Riti di purificazione. Il calendario rituale è stato così organizzato in parte intorno al ritmo rischio sismico.

Terremoto, purificazione e rinnovamento

Il *Namazu-e* stampe del 1855, discusse in §16.2.1 come documenti popolari, meritano la riconsiderazione qui come religiosi. Molti erano esplicitamente talismanici in funzione: visualizzazione di un'immagine di Takemikazuchi sottodurlo al pesce gatto era inteso conferire protezione contro ulteriori catastrofi sismiche, posizionando le stampe quadrancamente all'interno la sfera devozionale domestica della pratica Shinto (Fig. 16.14). *Namazu* come essere di straordinaria e terribile potenza, era - *Oh, mio Dio.*[13]- No. una creatura

[13]Il termine - *Oh, mio Dio.* denota le presenze sacre o poteri che animano fenomeni naturali all'interno della visione del mondo Shinto—qualsiasi cosa possedere un'insolita forza che ispira il timore, sia benevolo o terribile, come descritto dello studioso Motoori Norinaga (1730–1801).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Figura 16.13: Il Santuario di Kashima (Prefettura di Ibaraki), sede di *Takemikazuchi-no-kami* e il sito principale di Shinto sismica rituale di protezione nel Giappone premoderno.

da sopprimere, ma una forza da propiziare e incorporata in l'economia religiosa della comunità.

Questo trova la sua più profonda espressione nel concetto di *Yonaoshi* (''World rectification''). Nell'ambito della struttura Shinto, della corruzione sociale e del rituale trascurare si accumulano come forme di inquinamento (*kegare*); catastrofe eventi—tra cui terremoti—potrebbe essere inteso come purificazioni violente, dolorose ma necessari restauri di equilibrio (Smits, 2006). Questa teologia della catastrofe il rinnovamento trova paralleli strutturali tra le tradizioni esaminate in questo capitolo: giudizio biblico e redenzione (§16.3.1), Indù *La mia vita è stata molto più facile.* (§16.3.3), e la visione azteca di successive esecuzioni mondiali (§16.3.5). Tradizioni, il terremoto è raramente semplicemente distruttivo: è anche il preludio violento di un mondo reso nuovo.

Shinto, buddismo e sismico sincretismo

Nessun conto della tradizione terremotata di Shinto sarebbe completo senza riconoscere l'influenza del Buddhismo. In Giappone, Shinto e Buddismo coesistevano per più di un millennio nella fusione sincretica conosciuta come *Scontro di spugnaūgō*[14]e la l'interpretazione dei terremoti non era eccezione. quadri–compresa la dottrina *mappaō* (i giorni più recenti del dharma,' analogo a quello Indù *Kali Yuga* discusso in §16.3.3– prontamente assimilato alle ansie sismiche di Shinto, producendo una risposta religiosa a strati che si è disegnata simultaneamente su entrambe le tradizioni. rappresenta il culmine di un

[14]Letteralmente "l'amalgama di kami e buddhas", questo sincretismo dominava i religiosi giapponesi vita dal periodo Nara (710–794 AD) fino alla separazione forzata della due tradizioni del Meiji governo nel 1868.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Figura 16.14: A talismanic *Namazu-e* stampa raffigurante *Takemikazuchi-no-kami* sottomettere il pesce gatto.

lungo processo di sintesi culturale, in cui gli indigeni mitologico, cosmologico cinese, e le strutture escatologiche buddiste erano progressivamente integrato in una coerente interpretazione religiosa della catastrofe sismica.

16.3.7 Sintesi: Religione e significato della catastrofe sismica

Le tradizioni esaminate in questa sezione rivelano un modello di notevole consistenza in tutte le culture e i periodi storici ampiamente separati. i terremoti sono incorporati all'interno di un quadro teologico che realizza tre cose contemporaneamente: assegna significato all'evento sismico (non è casuale ma purposivo); individua quel significato all'interno di un ordine morale (il terremoto comunica qualcosa su il rapporto tra l'umanità e il divino); e genera una prescritta comunità risposta (sacrificio, preghiera, purificazione, manutenzione rituale). significa, il quadro morale specifico, e la risposta rituale specifica differiscono enormemente dalla tradizione alla tradizione—ma la struttura tripartita stessa è universale.

Tre temi di taglio incrociato meritano particolare enfasi. Il pensiero escatlogico. L'Indù *La mia vita è stata molto più facile.*, l'ultimo giorno islamico, l'Azteco *Noui Ollin*, e il buddista *mappaō* tutto il luogo il terremoto a o vicino all'evento terminale della storia cosmica— una convergenza strutturale che si estende attraverso tradizioni senza contatto storico tra di loro, e che parla a un comune risposta cognitiva all'esperienza della catastrofe sismica già osservata nella sintesi mitologica (§16.2.5).

La seconda è la persistenza dell'interpretazione morale dei terremoti attraverso periodi storici. L'attribuzione riflessiva degli eventi sismici alla punizione divina per trasgressione umana—documentata nella Bibbia, nella pratica di culto greco, in indù *karma* teologia, nell'Islam *e)* la tradizione, e nell'Azteco sistema rituale—non si sciolse con l'avvento della

COPIA DI REVISIONE

modernità. del terremoto di Bihar del 1934 come punizione per il peccato di intattabilità dimostra che questo riflesso teologico mantenne la sua presa ben nel XX secolo, provocando gli stessi contro-argomenti razionalisti di Tagore che Voltaire aveva livellato contro letture provvidenziali del terremoto di Lisbona quasi due secoli prima (§16.5.2). I due episodi sono separati da due secoli e due continenti ma identico nella loro logica sottostante: lo stesso confronto tra teologi e teologici interpretazioni razionali di catastrofe, svolte in diversi registri culturali.

Il terzo tema è la sistematica individuazione dei luoghi sacri sopra geologicamente attivi strutture—documentate a Delphi, Hierapolis, Colossae, e il Santuario di Kashima, e suggestivo di una tendenza più ampia ad interpretare zone di instabilità sismica come zone di accresciuta presenza divina. In questo senso, l'interpretazione religiosa dei terremoti non è solo una risposta agli eventi sismici dopo il fatto; forma la geografia sacra del paesaggio stesso, inscrivendo il significato teologico nel terreno stesso su cui le comunità costruiscono i loro santuari, ciò che inizia come il terrore diventa, attraverso mediazione di opere di narrazione religiosa, prove di presenza divina e di potere—e infine, come mostra la prossima sezione, l'occasione per la prima sfida filosofica a quella lettura.

È proprio questa completa teologizzazione dell'esperienza sismica—l'insistenza che il terremoto *significa* qualcosa, che si rivolge all'umanità, che non richiede solo la resistenza, ma l'interpretazione e la risposta –che il filosofico la tradizione sarà sottoposta al suo primo esame critico sostenuto in §16.4.

L'universalità del modello documentato in questa sezione invita un più profondo domanda: non solo *che* interpretazioni teologiche del terremoto la catastrofe ha persistito in culture e secoli, ma *perché* loro hanno dimostrato così notevolmente durevole—sorprendendo l'ascesa della filosofia naturale, l'Illuminismo e la sismatologia moderna. La risposta era già articolato con caratteristica precisione di Spinoza tre secoli fa e mezzo fa:

> Gli uomini non sarebbero mai superstiziosi, se potessero governare tutti i loro circostanze per regole stabilite, o se sono sempre stati favoriti dalla fortuna: ma essere spesso cacciati in strati dove le regole sono inutili, e essere spesso tenuto fluttuante pietosamente tra speranza e paura da chap: regione della fiducia di favori avidi della fortuna, sono di conseguenza, per la maggior parte, molto incline alla credulità. Superstizione, allora, è generata, conservata e favorita dalla paura.
>
> Spinoza, 1670 Tractatus Theologico-Politicus

Il terremoto, di tutti i fenomeni naturali, istanzia perfettamente il condizione Spinoza descrive: colpisce senza preavviso, sfida la previsione, e sopraffa ogni regola con cui gli esseri umani governano normalmente che dovrebbe generare superstizione e che la superstizione non è quindi una curiosità di ignoranza premoderna ma una conseguenza strutturale dell'evento stesso, è proprio questo riconoscere che la tradizione filosofica, esaminata nella sezione seguente, cercherà di rispondere non con il mito o rituale, ma con la ragione.

Le sette tradizioni sopra esaminate, e gli otto motivi ricorrenti che condividono, possono

COPIA DI REVISIONE

essere impostare schematicamente nelle due tabelle che seguono. Tabella 16.1 riassume, per ogni tradizione, il ruolo teologico primario assegnato al terremoto, l'agente divino o cosmico ha ritenuto responsabile, la presenza o l'assenza di un escatolo dimensione, la risposta rituale prescritta e le principali fonti testuali. Tabella 16.2 mappa gli otto motivi interculturali più significativi contro i tradizioni in cui sono attestati, identificando sia le loro specifiche manifestazioni che il loro significato analitico.

Due modelli che i tavoli rendono visibile meritano un breve commento qui. **serpente o drago come agente sismico**–attestati in cinque tradizioni che spaziano India, Giappone, Grecia e Mesoamerica— è infatti il singolo più diffuso motivo in tutto il capitolo, più universale anche delle letture escatologiche con che la Sintesi apre, la sua assenza dalle tradizioni bibliche e islamiche non è incidentale: sono proprio le due tradizioni con la teologia più sviluppata di agenzia divina diretta, in cui non è necessaria alcuna creatura chthonic intermedia la trematura della terra. La presenza o l'assenza del serpente funziona così come marcatore diagnostico per la struttura teologica sottostante di ogni tradizione.

In secondo luogo, la colonna di **assenze** in Tabella 16.2 è come analiticamente significativo come la colonna delle presenze. Buddismo solo, tra tutte le tradizioni intervistato, rifiuta costantemente la lettura morale dei terremoti come punizione—la il terremoto nel quadro buddista è la ratifica cosmica, non la ritribuzione. Grecia La sola mancanza di una dimensione escatologica sviluppata, che non è una mancanza di spazio nei confronti di prove ma caratteristiche strutturali delle tradizioni stesse, e impediscono conclusione superficialemente attraente che tutte le risposte religiose ai terremoti sono essenzialmente lo stesso.

Tabella 16.1: Tradizioni religiose e il terremoto: un riassunto comparativo.

Tradizione	Ruolo primario del terremoto	Agente / locus	Escatologica?	Risposta rituale	Fonti chiave
La Bibbia (Giudeo-cristiano)	Teofania; strumento di liberazione miracolosa o di giudizio; codificato memoria geologica	- *Si'.* / Dio direttamente	Le immagini paral— seismiche in Apocalisse implica eventi terminali	Preghiera; offerta votiva; penitenza comunitaria	Esodo 19:18; Atti 16:26; Matt. 27–28; Nur e Burgess, 2008

Continuare nella pagina successiva

COPIA DI REVISIONE

Tabella 16.1 *(Seguito)*

Tradizione	Ruolo primario del terremoto	Agente / locus	Escatologica?	Risposta rituale	Fonti chiave
Grecia (Religione ellenica)	Teofania della rabbia divina (*Enosichthon*); zone di disfunzione come loci di presenza sacra e profezia; persistenza della forza primordiale sconfitta (Enceladus) imprigionato sotto la terra	Poseidone *Enosichthon*; Enceladus e i giganti chtonici; forze geologiche sotterranee	Nessuna identificazione	sacrificio animale a Poseidone; deliberata ordinazione di santuari sopra tracce di guasto attivo	*Iliade* XIII.18; Vergilius Maro, 2008 The Aeneid; Piccardi, 2007; Broad, 2006
Induismo	Instabilità cosmica; conseguenza karmica della trasgressione collettiva; segno di avvicinamento *La mia vita è stata molto più facile.*	Shesha / Vishnu; collettivo *karma*	Si'...*La mia vita è stata molto più facile.*, dissoluzione terminale del cosmo	Propittazione rituale; interpretazione attraverso la teologia del karma	*Shatapatha Brahmana*; *Puranas*; Gandhi–Scambio di Trogore (1934) (Paranjape, 2011)
Buddismo	La ratifica cosmica degli eventi di vita del Buddha; lo schema a tripla causazione che distingue le cause naturali, umane e trascendente	Terra come cosmo reattivo; *Nagas*	- Parziale...*mappaō* dottrina; aumento sismico vicino alla fine dell'età del dharma	Propittazione rituale *Nagas*; pellegrinaggio	*Pali Canon*; *Anguttara Nikaya*
Islam	segno divino (*Ayat*) di ammonizione morale nel presente; strumento di divulgazione cosmica nell'ultimo giorno	Tuttiāh direttamente; Corano come autorità canonica	Sì—Surah 99 pone il terremoto all'inaugurazione dell'Ultimo Giorno	*SalāT al-khusūf* (Preghiera speciale congregazionale di penitenza)	Surah 99 (*Al-Zalzalah*); *aveaīth* collezioni

Continuare nella pagina successiva

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese, potrebbero verificarsi errori.

Tabella 16.1 *(Seguito)*

Tradizione	Ruolo primario del terremoto	Agente / locus	Escatologica?	Risposta rituale	Fonti chiave
Mesoamerica (Aztec)	destino cosmologico dell'attuale eta' mondiale; ogni terremoto reale prova per la convulsione terminale	*Ollin* forza; struttura del calendario cosmico	Sì—costituente; il mondo è destinato a finire per terremoto (*Noui Ollin*)	sacrificio umano; manutenzione del calendario rituale per deferire il terremoto terminale	*Anales de Cuauhtitlan*; *Piedra del Sol*; León-Portilla, 1963
Shinto (Giappone)	L'aggressione di Namazu richiede il contenimento divino; purificazione catastrofica (*Yonaoshi*) e rettificazione mondiale	Namazu (pesce gatto gigante); Take-mikazuchi come restritore	- Parzia-le...*mappaō* assorbito tramite il sincretismo buddista	cerimonie di santuario di Kashima; *Namazu-e* talismani; riti di purificazione	*Namazu-e* stampe (1855); Smits, 2006; Kashima, i registri del santuario

Tabella 16.2: Ricorrere motivi interculturali nell'interpretazione religiosa di terremoti. ✓ = motivo attestato; × = motivo assente o marginale.

Motif	*La Bibbia*	*Grecia*	*Induismo*	*Buddismo*	*Islam*	*Mesoamerica*	*Shinto*	Significato
Serpente / drago come agente sismico	×	✓	✓	✓	×	✓	✓	Il motivo più diffuso. Il corpo serpente mappa su tracce di guasto e terreno la rottura; la sua sconfitta da un dio o da un santo codifica l'imposizione dell'ordine divino sopra Forza di chtonica. Assente dalle due tradizioni con la teologia più sviluppata di agenzia divina diretta (Bible; Islam).
Terremoto come termine escatlogico	✓	×	✓	✓	✓	✓	✓	Presente in ogni tradizione con una escatologia sviluppata. Il terremoto rappresenta come meccanismo di chiusura cosmica—l'espressione fisica di un finale simultaneamente la sola Grecia manca di questa dimensione.

Continuare nella pagina successiva

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese, potrebbero verificarsi errori.

Tabella 16.2 *(Seguito)*

Motif	La Bibbia	Grecia	Induismo	Buddismo	Islam	Mesoamerica	Shinto	Significato
Siti sacri sited sopra difetti geologici	✓	✓	×	×	×	✓	✓	Comunità che sperimentano ripetutamente disturbi sismici in un luogo interpretato instabilità come prossimità divina. Geologia a forma di geografia sacra: il terrore è diventato il prova della presenza divina.
Terremoto come punizione morale / conseguenza karmica	✓	✓	✓	×	✓	×	✓	La lettura più storicamente durevole— che si affaccia nella modernità (Gandhi, 1934). Il Buddhismo solo lo rifiuta costantemente: il terremoto è la ratifica cosmica, non Provoca il ributtante razionalista identico in ogni epoca.
Risposta rituale comune	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	Universale in tutte le tradizioni. Il terremoto richiede non solo la resistenza ma attiva rituale comunitario. La forma varia enormemente (preghiera al sacrificio) ma la struttura logica-guadagna come comunicazione purposiva che richiede una risposta— è identico.
Catastrofe come purificazione e rinnovamento	✓	×	✓	×	×	✓	✓	Il terremoto come generativo e distruttivo—violento preludio a un mondo fatto Converte il terrore in teleologia: la catastrofe serve uno scopo più grande di se stesso. Non è certo assente dalle strutture greche e islamiche.
Memoria codificata di eventi geologici reali	✓	✓	×	×	×	×	✓	Alcune narrazioni religiose sono risposte dimostrabili a specifiche geologiche eventi (Il guasto della valle di Giardan crolla codificato nel Joshua e Jericho narrazioni; le AD 60 terremoto anatolico assorbito nel tradizioni di Hierapolis e Colossae; il carattere vulcanico e sismico di Etna mitologizzata come le convulsioni imprigionate di Enceladus; il 1855 Il terremoto di Ansei Edo cristallizzato nel *Namazu-e* corpus). L'evento fisico è assorbito nella narrazione religiosa–trasformata ma Non cancellata.

Continuare nella pagina successiva

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 16.2 *(Seguito)*

Motif	La Bibbia	Grecia	Induismo	Buddismo	Islam	Mesoamerica	Shinto	Significato
Animali di sostegno il cui movimento provoca terremoti	×	×	✓	✓	×	×	✓	Distinto dal motivo del serpente: l'animale cosmico che sorregge la terra, il cui movimento involontaria provoca instabilità sismica. Attestata indipendentemente attraverso tradizioni come geograficamente separate come India e Giappone (elefante cosmico) / tartaruga; Shesha; Namazu).

16.4 Filosofia

I filosofi hanno a lungo speculato sulle cause dei terremoti. le prime spiegazioni sono attribuite a Thales of Miletus, che credeva che la terra galleggiava sull'acqua; i disturbi in questo mezzo sottostante erano quindi pensato in grado di produrre tremori. Altro pre-socratico filosofi elaborati ulteriormente: Anaximenes ha proposto che aria compressa intrappolato sotto la superficie ha causato il terreno a crepa e si scaglia, mentre Anaximander e Diogene di Apollonia cercarono spiegazioni radicate nella interazione dei quattro elementi fondamentali—terra, acqua, aria e fuoco (De Boer e Sanders, 2005). Questi primi tentativi, comunque speculativi, ha stabilito l'abitudine intellettuale di cercare fisico piuttosto che puramente cause mitologiche per fenomeni sismici —la prima sfida sostenuta al riflesso interpretativo documentato attraverso le tradizioni religiose di §16.3.

16.4.1 Aristotele

Tra le più influenti teorie antiche c'era la spiegazione pneumatica proposto da Aristotele. Secondo questo punto di vista, i terremoti sono stati prodotti da venti sotterranei intrappolati all'interno di cavità sotto la superficie della terra. Mentre questi venti lottarono per fuggire, provocarono il terreno per scuotere o frattura. La teoria di Aristotele si è rivelata notevolmente persistente e rimase quadro intellettuale dominante per interpretare i terremoti per molti secoli.

Spiegazioni cosmologiche comparabili sviluppate in modo indipendente in altri culture. Nell'antica Cina, i terremoti sono stati talvolta attribuiti a disturbi nell'equilibrio delle forze cosmiche espresse attraverso l'interazione dei cinque agenti fondamentali (*Gogyo*) associato a Yin e Yang (Guidoboni e Poirier, 2004). Anche se incorniciato in modo diverso, queste

COPIA DI REVISIONE

idee condivise con la filosofia greca il tentativo di interpretare i terremoti come risultato di processi naturali di fondo piuttosto che cause puramente mitologiche.

16.4.2 Il tempo di

Un contributo significativo ma spesso trascurato al filosofico e la comprensione geografica dei terremoti è stata fatta da Eratostene di Cirene (c. 276–194 B)), celebrato il polimath bibliotecario di Alessandria soprattutto per la sua misura notevolmente accurata della circonferenza terrestre. Nel suo *Geografica*, Eratostene intraprese ciò che può essere considerato prima mappatura geografica sistematica dell'attività sismica nel mondo antico. Piuttosto che trattare i terremoti come eventi isolati o casuali, ha cercato di individuare le regioni in cui si sono verificate con maggiore frequenza e si riferiscono alla loro distribuzione a più ampie caratteristiche fisiche del paesaggio.

Eratostene osservava che l'attività sismica era concentrata lungo la costa zone e nelle vicinanze delle regioni vulcaniche—una correlazione di durata significato che non avrebbe ricevuto una spiegazione fisica rigorosa fino a quando epoca moderna. Ha notato il carattere sismico delle catene dell'isola del Mediterraneo e attribuito l'instabilità di alcune coste all'azione di canali d'acqua sotterranei che collegano il mare alle cavità sotterranee. Quando questi collegamenti nascosti sono stati interrotti, la terra sovrastante è stata responsabile sottosopra o scuotere. Questa teoria idraulica dei terremoti, anche se alla fine non corretto, rappresentava un tentativo autentico di integrare i fenomeni sismici in un geografia fisica coerente della Terra.

Il significato del contributo di Eratostene è meno nella correttezza di qualsiasi meccanismo specifico che nel suo approccio metodologico: catalogazione zone sismiche e relative a caratteristiche geografiche e geologiche, anticipato il moderno riconoscimento che il terremoto non è uniformemente distribuito ma è governato da proprietà strutturali della crosta terrestre. il lavoro rappresenta quindi un importante momento di transizione tra mitologico interpretazione e sistematica indagine naturale, (Dragoni, 2005).

16.4.3 Lucrezio e Plinio

Un trattamento filosofico particolarmente importante appare nell'opera poeta romano e filosofo Lucrezio (Lucretius, 1995). La sua poesia epica *De Rerum Natura* (*Sulla natura delle cose*), scritto nel primo secolo B), cercava di spiegare i fenomeni naturali attraverso Epicurean filosofia. In Libro VI, Lucrezio discute i terremoti e li attribuisce movimenti di aria intrappolati all'interno delle cavità della terra. Quando questi sotterranei i venti si accumulano e cercano uno sbocco, producono vibrazioni che scuotono la terra o anche la causa di dividersi aperto. Questa interpretazione riflette tentativo più ampio di comprendere il mondo naturale attraverso meccanismi fisici piuttosto che l'intervento divino.

Gli autori antichi spesso elaborarono questa teoria pneumatica. rispetto alla terra a una

COPIA DI REVISIONE

spugna le cui cavità interne permettono ai venti di circolano attraverso passaggi sotterranei, quando l'aria accumulata supera i capacità di queste cavità, la pressione risultante produce suoni di rombo, terra tremante, e occasionalmente fissure attraverso cui il vento sfugge. Tali spiegazioni sono state riecheggiate da autori e poeti più tardi classici, tra cui Sallust e Lucan, che descrissero i terremoti come conseguenza delle forze muoversi all'interno degli spazi nascosti della terra.

Un'altra importante fonte antica è Plinio il Vecchio *Naturalis Historia* (AD 77-78), un'opera enciclopedica che ha esaminato numerosi fenomeni naturali, compresi i terremoti (Pliny the Elder, 1906). Plinio osservato che gli shock sismici si sono verificati più frequentemente in alcune regioni, in particolare In materia di trasporti marittimi, anche se le regioni montane non sono esenti da un'esenzione, ha anche osservato che modelli stagionali, suggerendo che i terremoti si sono verificati più frequentemente in autunno e primavera—un'osservazione più tardi ripetuta da Kant. Plinio più avanti ha registrato che gli animali si comportavano spesso in modi insoliti prima dei terremoti, uno dei primi riferimenti documentati a quello che sarebbe poi diventato un ricorrente tema in lore terremoto.

16.4.4 Il terremoto di Lisbona come evento filosofico

La discussione filosofica dei terremoti è stata trasformata dalla catastrofe terremoto che ha colpito Lisbona su 1 Novembre 1755... Tutti i Santi Giorno. Il disastro ha ucciso decine di migliaia di persone adoratori in chiese di raccolta e incendi e tsunami scatenati che ha devastato la città per giorni, Fig. 16.15a. Non ha semplicemente distrutto un capitale; ha convulso la vita intellettuale dell'Europa. Pochi eventi naturali nella storia registrata hanno ha innescato così concentrato e consequenziale un dibattito filosofico, e non altro terremoto ha servito simultaneamente come punto di infiammabilità per la teologia, morale filosofia, scienza naturale e immaginazione letteraria. L'evento sarà riscontri nella sezione seguente sulla letteratura (§16.5.2), dove vengono esaminate le sue riverberazioni letterarie dettaglio; la preoccupazione qui è con le sue dimensioni filosofiche.

Il terremoto ha colpito all'altezza dell'illuminismo europeo, ad un quando l'opinione educata è stata dismessa per considerare il mondo naturale come razionalmente ordinato e alla fine benigno. Esposto, con brutale immediatezza, la questione teologica che essa pone non era nuova: come l'indagine sulle tradizioni religiose in §16.3 la mia voce attribuzione riflessiva della catastrofe sismica alla punizione divina risposte strutturate dalla Bibbia all'Islam *e)* e la Dottrina indù di *karma*. Quello che era nuovo era il pubblico: istruito Gli europei dotati degli strumenti concettuali della filosofia razionalista e di recente impaziente con risposte tradizionali. Lo stesso confronto tra interpretazioni teologiche e razionali del terremoto che aveva strutturato Gandhi–Scambio di Troia dopo il terremoto di Bihar del 1934 (§16.3.3) è stato qui giocato per la prima volta al centro della vita intellettuale europea.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

16.4.4.1 Voltaire e Rousseau come Interlocutori filosofici

Voltaire reagito con una velocità e intensità emotiva insolita anche per lui. *PoÈ' un'idea.ésastre de Lisbonane* (1756) (Voltaire [Arouet, 2009), ha respinto la filosofia ottimista più strettamente associata Leibniz—la dottrina si è sviluppata sistematicamente nel *Il mio nomeéodiée* (Leibniz, 1710) che questo mondo costituisce il meglio di tutti i mondi possibili, e che ogni male apparente è in ultima analisi, riconciliabile con un design più ampio e benevolo. la posizione è discussa ulteriormente §16.5.2 nel contesto del dimensione letteraria del dibattito di Lisbona; ciò che conta è la sua filosofia L'ottimismo di Leibniz rappresentava la teodicità dominante della Illuminazione: sistematica, razionale e apparentemente coerente con l'ordine l'universo che la scienza newtoniana aveva rivelato. Voltaire *PoÈme* attaccata come moralmente indifendibile di fronte ad innocenti la sofferenza, e così facendo costretto la domanda di male naturale di nuovo al centro di attenzione filosofica.

Jean-Jacques Rousseau ha risposto in un festeggiato lettera di agosto 1756 (Rousseau, 1967) che ha spostato i termini il dibattito in una direzione filosoficamente consequenziale. che la scala della distruzione di Lisbona non poteva essere attribuita alla natura da sola: gran parte della sofferenza era la conseguenza del modo in cui la società umana aveva organizzato se stesso. Se gli abitanti di Lisbona avessero vissuto in più piccolo, più dispersi la catastrofe sarebbe stata molto meno mortale. concentrazione di popolazione in strutture urbane dense, molte delle quali scarsamente costruito, che ha trasformato un evento geologico in una catastrofe umana del primo ordine. Il terremoto, in questa lettura, non era una confutazione dell'ordine divino ma una rivelazione del disordine umano: un'esposizione delle vulnerabilità che l'uomo la società crea per sé.

Questo argomento rappresenta forse la prima affermazione sistematica di ciò che La scienza del disastro contemporaneo chiama *costruzione sociale vulnerabilità*: il riconoscimento che la distruttività di qualsiasi pericolo naturale è inseparabile dall'ambiente costruito e dalle disposizioni sociali attraverso le quali una comunità lo affronta (Blaikie et al., 1994; Wisner et al., 2004). Rousseau's intuito... che il terremoto non ha fatto uccidere decine di migliaia di persone; la città di Lisbona ha... forza analitica nei giorni nostri, e anticipa da due secoli il quadro attraverso il quale i moderni ingegneri e ricercatori disastri valutano la sismica rischio.

16.4.4.2 Kant

Immanuel Kant si avvicina il terremoto di Lisbona da un diversa direzione filosofica, producendo tre saggi scientifici sulla il soggetto nei mesi immediatamente successivi al disastro. fatalismo teologico e interpretazioni basate su pura probabilità, Kant ha sostenuto che la catastrofe dovrebbe essere compresa come conseguenza esatta della stalla leggi naturali. La natura, in questo senso, opera secondo principi regolari Le catastrofi non confutano l'esistenza di forze arbitrarie. ordine naturale; invece rivelano i processi dinamici attraverso i quali La Terra si evolve.

Kant ha sottolineato che il mondo naturale non può essere interpretato esclusivamente da

COPIA DI REVISIONE

un la Terra segue la sua regolarità ed economia, e le trasformazioni geologiche si verificano secondo leggi che possono produrre sia cambiamento graduale e improvviso disordine. L'universo stesso è in continuo la trasformazione e le transizioni all'interno della natura non sono sempre pacifiche. tali modifiche si verificano ancora all'interno di un quadro ordinato governato dalle leggi naturali.

Da questa prospettiva, il terremoto di Lisbona non diventa un evento senza senso ma una manifestazione dinamica dei processi che plasmano la Terra. Naturale Le catastrofi devono quindi essere comprese come parte dell'evoluzione più ampia di l'accettazione del cambiamento all'interno del corpo della natura dà il disastro una dimensione filosofica diversa: piuttosto che il puro caos, la catastrofe rappresenta una possibile espressione delle trasformazioni lecite che la struttura Il mondo naturale, in questo senso la risposta di Kant a Lisbona segna un decisivo momento nella storia della filosofia naturale: il punto in cui il terremoto cessa di essere principalmente un problema teologico e diventa invece un scientifico Le dimensioni letterarie del dibattito di Lisbona—Voltaire's *Candide*, La novella di Kleist, e il corpo della letteratura che hanno generato, sono esaminati in §16.5.2.

Così, dalla speculazione greca iniziale attraverso il crogiolo di illuminazione Lisbona, i terremoti servirono come un catalizzatore persistente per la filosofia riflessione, forzare i pensatori a confrontarsi con domande fondamentali circa struttura del mondo naturale, i limiti della provvidenza divina, e Il posto dell'umanità all'interno di un universo a volte violento e imprevedibile. fu Kant che per la prima volta articolava la risposta che i successivi due secoli di la scienza della terra avrebbe controindicato: il terremoto non significa nulla tranne che cosa le leggi della natura richiedono.

16.4.5 Ricostruzione

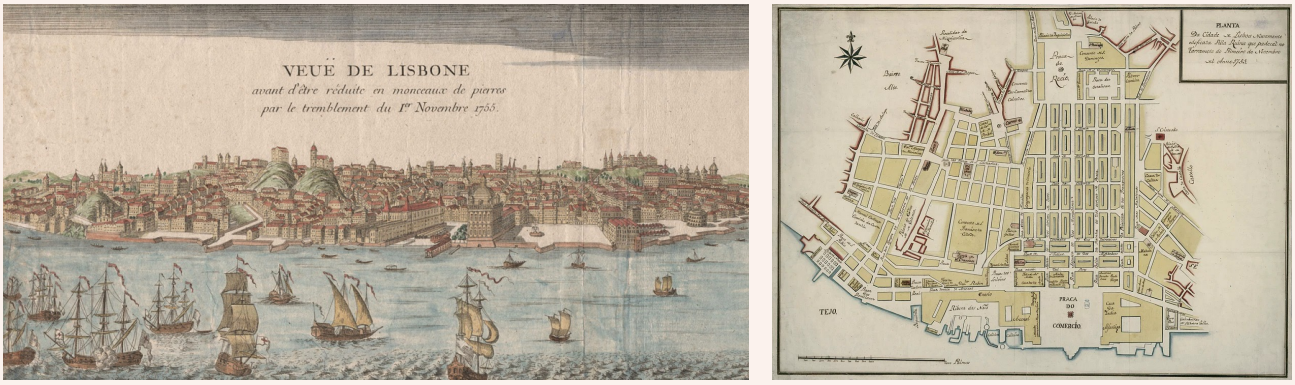
Il disastro ebbe anche una immediata conseguenza materiale di un significato duraturo. ricostruzione del quartiere Baixa La questione filosofica di come l'umanità dovrebbe rispondere alla catastrofe ha risposto, nel caso di Pombal, in mattoni e pietra. Eppure il risultato architettonico non può essere separato dalle condizioni politiche che hanno reso possibile. La risposta di Pombal era, fin dall'inizio, un esercizio in quello che potrebbe essere chiamato autoritarismo illuminato: i looters erano i chaoters del corpo pubblico, i mezzi di costruzione di Londra erano *Dissertação* di Manuel da Maia—-aveva stabilito i principi di pianificazione per la nuova Baixa; entro due anni, una radicale riconfigurazione giuridica della proprietà immobiliare aveva trasferito la terra dalle autorità aristocratiche ed ecclesiastiche alla classe mercantile emergente, progettando efficacemente un terremoto politico per accompagnare quello fisico (Brand e Nicholson, 2013).

Le innovazioni tecniche incorporate nel piano non erano meno consequenziali, ma la nuova Baixa è stata posta su una razionalità ortogonale, Fig. 16.15b—un ordine cartesiano imposto alle macerie della città medievale—con dimensioni standardizzate del blocco, altezze di costruzione uniformi, e una chiara gerarchia di strade denominate per le corporazioni che li avrebbero occupati. *Gaiola* L'indagine sul sistema——diagonale ha

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

frenato le gabbie interne di legno che siedono indipendentemente all'interno di mura perimetrali, la prima tipologia costruttiva volutamente resistente al sismico nella storia europea. Le strade sono state ampliate in modo che anche il crollo simultaneo di edifici su entrambi i lati avrebbe lasciato un corridoio di evacuazione tra loro.



(a) Lisbona (b) ricostruzione del quartiere Baixa

Figura 16.15: Lisbonane, prima e dopo

Brand e Nicholson, 2013 studio comparativo di Lisbona e post-terrato Christchurch conclude che il successo della ricostruzione Pombaline poggiava su tre pilastri interdipendenti: la completa demolizione della devastata Baixa, il redarpeggio obbligatorio dei confini della proprietà, e una visione urbanistica saldamente fondata nella migliore pratica internazionale (Brand e Nicholson, 2013)Ciascuno di questi richiedeva la sovrastituzione dei diritti individuali di proprietà in nome della resilienza collettiva—una subordinazione di interesse privato alla necessità pubblica che era possibile solo perché Pombal ha tenuto, ed era disposto ad usare, il potere esecutivo concentrato. La lezione tracciata non è che l'autoritarismo è auspicabile in sé, ma che la ricostruzione post-disastro della qualità duratura ha storicamente richiesto un'unità di autorità decisionale, una chiarezza di visione tecnica decisiva e di processo, una velocità decisiva, e di velocità decisiva, una[15]. Nella Lisbona di Pombal, la risposta filosofica alla catastrofe non è stata semplicemente espressa in mattoni e pietra: è stata applicata con decreto.

[15]Questo modello non è sempre stato trapiantato con successo. La ricostruzione del dopoguerra Beirut *Solido* è un controcampo cautelare: il centro storico è stato raso, il suo tessuto sociale è sciolto, e il risultato ampiamente condannato come un simulacro di parco tema-sanitario della città che ha sostituito.

COPIA DI REVISIONE

16.5 Letteratura

16.5.1 Terremoti in Letteratura

I Terremoti hanno lasciato il loro segno anche sulla letteratura, dove appaiono sia come riferimenti storici e come potenti dispositivi drammatici o simbolici. l'Illuminismo trasformò il terremoto in un veicolo per la filosofia dibattito, gli eventi sismici erano già entrati nell'immaginazione letteraria come marcatori di memoria collettiva. Un esempio precoce è il terremoto di Dover Straits 6 Aprile 1580, che sembra essere stato il più grande terremoto registrato in le cronache storiche dell'Inghilterra, delle Fiandre e della Francia settentrionale. era sufficientemente memorabile che entrasse nella coscienza culturale della periodo, e circa undici anni dopo, Shakespeare incorporato un riferimento di passaggio ad esso *Romeo e Giulietta*. In Atto I, Scene III, l'infermiera ricorda:

> È dal terremoto ormai undici anni.
>
> Atto I, Scena III Shakespeare, 1597 Romeo and Juliet

Anche se breve, questo commento funziona come un ancoraggio cronologico, suggerendo che il terremoto rimase vivo nella memoria collettiva quando Shakespeare composto il gioco—un piccolo ma dire illustrazione di come gli eventi sismici si trovano in tempo culturale.

Alla fine del Settecento, le catastrofi naturali erano sempre più numerose. impiegato nella letteratura come dispositivi drammatici nella morale e nella filosofia narrazioni. Il terremoto di Lisbona del 1755 in particolare ha colpito profondamente il clima intellettuale dell'Europa e ispirato un corpo di opere letterarie che trasformato il terremoto in un veicolo simbolico per esplorare temi di giustizia divina, sofferenza umana, fragilità della civiltà. esempi includono la tragedia *Die Lissabonner* (1758) di Christian Gottlieb LieberkËhm... (Lieberkühn, 1758), il romanticismo poetico *Les Incas* (1777) di Jean-FrançO Marmontel (Marmontel, 1777)e Heinrich Il mio amico celebre romanzo *Das Erdbeben in Cile* (scritto a c. 1806, pubblicato 1810) (Kleist, 1810). In tutti questi opere, il terremoto non è solo un fenomeno fisico ma una narrazione catalizzatore che espone tensioni morali, contraddizioni sociali e filosofiche domande sul destino, la provvidenza e la natura della società umana.

16.5.2 Il terremoto di Lisbona del 1755 e il dibattito di illuminazione

Le dimensioni filosofiche del terremoto di Lisbona sono state esaminate §16.4.4: La risposta naturalista di Kant, Rousseau lettura proto-sociologica della vulnerabilità, e l'assalto di Voltaire Leibnizian ottimismo come posizione filosofica. Che cosa la sezione presente esamina la risposta letteraria parallela —i modi in cui lo stesso evento generarono non solo argomenti, ma poesie, satiri e romanzi che portarono la sua domande a un pubblico molto

COPIA DI REVISIONE

più ampio e ha dato loro una permanenza che filosofica la prosa da sola non poteva essere protetta. Le due dimensioni sono inseparabili: Voltaire era contemporaneamente il filosofo di Lisbona e la sua più grande voce letteraria, e la distinzione tra la sua filosofia la rabbia e la sua rabbia poetica è, in pratica, difficile da disegnare.

Voltaire

La Voltaire *PoÈ' un'idea.ésastre de Lisbonane* (1756) ha dato il terremoto la sua voce letteraria più famosa. La poesia non è un'opera filosofica argomento ma di rabbia filosofica: esige sapere come qualsiasi teoria l'ottimismo può sopravvivere alla vista dei bambini schiacciati sotto le macerie Lisbon.

> Direz-vous, en voyant cet amas de Vittim :
> "Dieu s'est vengé, leur mort est le prix de leurs crimes" ?
> Quel crimine, quelle faute ont commis ces enfants
> Il diritto di soggiorno e di soggiorno ?
>
> Voltaire [Arouet, 2009 *«Poème sur le désastre de Lisbonne, ou Examen de cet axiome : Tout est bien»*

Il passaggio può essere reso come: *"Dirai che, vedendo questo mucchio di vittime: "Dio è vendicato; la loro morte è il prezzo dei loro crimini" reato, che colpa ha fatto commettere questi bambini, schiacciati e sanguinanti sulla loro Il seno della madre?* L'accusa non è diretta solo alla teologia ottimismo ma in ogni quadro interpretativo–religioso o filosofico—che tenta di razionalizzare la sofferenza inflitta alla il terremoto, a Voltaire mani, diventa un confutazione: una prova per catastrofe che il mondo non è ordinato per l'uomo beneficio, e che i sistemi intellettuali costruiti su quella premessa sono moralmente indifendibile.

Tre anni dopo, in *Candide, ou l'Ottimisme* (1759) (Voltaire [Arouet, 1759), Voltaire restituito a Lisbona in un registro molto diverso. Il romanzo–probabilmente il più letto satira filosofica nel canone occidentale—porta la sua naïve eroe attraverso le rovine della città, dove testimonia il terremoto e la sua iniquità, incluso un auto-da-fé condotta dall'Inquisizione per prevenire il futuro eventi sismici. La giustapposizione è volutamente grottesca: teologia ufficiale rispondere alla catastrofe geologica con omicidio giudiziario. Nella figura Dr. Pangloss, che mantiene attraverso ogni disastro che "Tutto è per il meglio nel migliore dei mondi possibili," Voltaire creato uno dei grandi emblemi della letteratura l'auto-inganno filosofico—una figura il cui ottimismo allegro diventa, in il volto di Lisbona, una forma di cecità morale.

Kleist

Heinrich von Kleist's La storia di un romanzo *Das Erdbeben in Cile* ('Il terremoto in Cile', scritto c. 1806, pubblicato 1810) (Kleist, 1810) è il più trattamento letterario formalmente compiuto di un terremoto in Europa letteratura, e quella che più direttamente coinvolge le questioni filosofiche posato da Lisbona—-anche se la sua impostazione è Santiago al

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

momento del terremoto catastrofico del 1647. Il suo due protagonisti, JeróNimo e Josépha, sono sul punto di esecuzione per trasgredire i codici morali della città quando il terremoto distrugge la prigione e il pontefice allo stesso modo, liberandoli in un mondo trasformato.

Ciò che segue nella novella è tra le esplorazioni più sottili di catastrofe e illusione nella letteratura tedesca. Il terremoto crea, brevemente, una sorta di Eden sociale: le gerarchie normali sono sospese, gli sconosciuti aiutano uno un altro, e i sopravvissuti sperimentano una solidarietà transitoria che taglia attraverso le rigide stratificazioni della società coloniale. Kleist appare, per un momento, per scrivere una narrazione *Yonaoshi*—'world «riformazioni» in senso giapponese §16.2.1—in che il terremoto funziona come un sociale violento ma in definitiva redentivo - Piu' di livello.

Ma questa illusione è frantumata dalla caratteristica violenza Kleistiana. i sopravvissuti si riuniscono in una chiesa per un sermone di ringraziamento, e il predicatore, ristabilire l'ordine teologico che il terremoto aveva sospeso, identifica la catastrofe come punizione divina per la stessa morale trasgressioni di cui JeróNimo e Josépha era stato accusato. La congregazione, la sua le paure teologiche regnarono, si accenderono la coppia e li uccidero no. Ordine-sociale, teologico, violento—rivaluta se stesso sul momentaneo apertura creata dalla catastrofe. Il terremoto non riscatta; essa semplicemente fornisce l'occasione per una brutalità più sistematica.

Kleist's novella così drammatizza, a livello di narrazione, lo stesso confronto tra teologi e razionali interpretazioni del terremoto che Voltaire e Rousseau aveva condotto come argomento filosofico (§16.4.4). Il terremoto è letto dal predicatore come giudizio divino; dalla comunità momentanea dei sopravvissuti come liberazione; e Kleist's narrazione ironica come rivelazione della violenza latente in ogni ordine sociale. Nessuna di queste letture è confermata; tutte sono esposti come imposizioni interpretative su un evento geologico che è, in indifferente al significato umano. In questo senso, *Das Erdbeben in Cile* può essere letto come il compimento letterario della traiettoria filosofica che corre da Voltaire attraverso Kant (§16.4.4): il terremoto come occasione per spogliare disperdersi di storie consolatorie e affrontare il mondo come è.

16.5.3 Il terremoto di Messina del 1908

Se il terremoto di Lisbona era il catalizzatore della filosofia dell'illuminismo, Sisma di Messina 28 Dicembre 1908 era la grande catastrofe sismica di la moderna immaginazione letteraria europea— anche se la sua risposta letteraria era elegiaco e patriottico nel carattere piuttosto che filosofico a Lisbona Il terremoto e lo tsunami associato, che colpisce entrambe le coste Lo stretto di Messina nelle prime ore del mattino, ucciso un stimato 80.000 a 120.000 persone e distrutto due città quasi interamente, rendendolo l'evento sismico più mortale nella storia europea.

La scala del disastro provocò una risposta immediata dall'italiano mondo letterario. Giovanni Verga, il grande siciliano romanziere realista, scrisse dei sopravvissuti "firm sulle rovine dei loro "infelice città" – invocando il linguaggio di resistenza e di identità che sarebbe

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

diventato centrale per la memoria culturale dell'evento. Luigi Capuana, un fondatore *Verifiche* movimento, descrisse la distruzione con caratteristica direttività: il terremoto aveva richiedeva solo un minuto per estinguere ciò che aveva preso le generazioni per costruire. Queste risposte, raccolte nella pubblicazione *Scilla e Cariddi* (Barzilai, 1909) prodotto dall'Associazione Italiana La stampa periodica in aiuto degli orfani di terremoto, illustra come la Messina La catastrofe è stata assorbita in un discorso di solidarietà nazionale e lutto collettivo—un processo strutturalmente analogo al sociale e letture politiche codificate nel giapponese *Namazu-e* stampe discusse in §16.2.1.

Tuttavia, la risposta letteraria più duratura al terremoto di Messina è arrivata da uno scrittore che l'ha sperimentato da bambino. Il poeta Salvatore Quasi.–che riceverebbe il Premio Nobel Letteratura nel 1959—-spostato a Messina con la sua famiglia nell'immediato dopo la catastrofe, come suo padre era stato pubblicato lì come una ferrovia ufficiale per assistere nello sforzo di soccorso. *A mio Padre*, scritto decenni dopo, Quasimodo ha ricordato la scena con una precisione immaginaria che preserva l'esperienza della catastrofe la distanza degli anni:

Dove sull'acque viola era Messina,	Dove Messina lasciò viola sulle acque,
tra fili spezzati e macerie	tra i fili e le macerie,
tu vai lungo binario e scambi	si cammina lungo le rotaie e gli interruttori
col tuo berretto di gallo isolano.	nel berretto del tuo uccello-di-camminare.
Il terremoto ribolle da due giorni,	Per due giorni, il terremoto fa bollire,
è il momento	E' l'uragano Dicembre
e mare avvelenato.	e un mare avvelenato.

La terra impareggiabile, Quasimodo, 1958 «*Al padre*»

L'immagine di Messina che giace "violetto sulle acque" cattura con testi economia che le indagini di ingegneria registrano nelle statistiche di danno: un'intera città dissolto in rovina ai margini del mare, che il terremoto dovrebbe "boil" per tre giorni codifica, nella compressione del poeta, l'esperienza di doposhocks che estende la distruzione oltre l'evento iniziale —un dettaglio di interesse sismico e letterario.

Il contrasto con Lisbona è istruttivo. Messina ha generato elegie e nazionali solidarietà dove Lisbona aveva generato filosofia e crisi teologica. la differenza non riflette solo la distanza culturale tra il 1755 e il 1908 ma un significativo cambiamento nel quadro intellettuale all'interno del quale sismi sono state interpretate: dai primi del Novecento, la causa naturale della il terremoto non era più in grave disputa, e la questione del divino il giudizio era stato revocato dal centro del discorso istruito. rimaneva... e ciò che la letteratura di Messina riflette... era l'uomo esperienza di catastrofe: dolore, solidarietà, memoria e lavoro ricostruzione. In questo passaggio dalla teologia all'esperienziale, risposta letteraria al terremoto rispecchia la più ampia traiettoria intellettuale tracciato in tutto questo capitolo, dalla mitologia attraverso la religione e filosofia alla profanazione laica con forze naturali che caratterizzano la epoca moderna.

COPIA DI REVISIONE

16.5.4 Sintesi: Letteratura e memoria culturale dei Terremoti

Le tradizioni letterarie esaminate in questa sezione rivelano quanto sia sempre grande eventi sismici hanno servito come catalizzanti per la cultura e l'intellettuale e come la natura di quella resa è cambiata nel tempo. Shakespeare's breve allusione al terremoto del 1580 funzioni come marcatore mnemonico, prova che gli eventi sismici si trovano in memoria collettiva e diventare punti di riferimento per il tempo culturale. La letteratura di Lisbona svolge una funzione diversa e più ambiziosa: trasforma una catastrofe geologica in un argomento, schierando il terremoto come prova in una disputa filosofica sulla struttura del mondo e dell'umanità luogo all'interno di esso— una controversia la cui infrastruttura filosofica è stata stabilita Kant, Voltaire e Rousseau, come esaminato in §16.4.4, e la cui espressione letteraria è qui esaminata. La letteratura di Messina, il contrasto, è post-filosofico: piange, commemora, e porta testimone, ma non chiede più se il terremoto significa qualcosa nel senso teologico.

Questo traiettorio— da marcatore mnemonico, attraverso catalizzatore filosofico, a elegia laica–riflette l'arco più ampio tracciato in questo capitolo: graduale spostamento di mitologico, religioso e provvidenziale interpretazioni dei terremoti per quadro radicati in indagine naturale e esperienza umana. Dirac affermazione sicura, citata l'apertura del §16.2, che la comprensione moderna del naturale i processi hanno reso l'interpretazione teologica di disastro obsoleto, reperti la sua prova più persuasiva non in alcun argomento filosofico ma in la storia letteraria stessa: nella distanza tra La Voltaire *PoÈme*–che non poteva descrivere Lisbona senza affrontare Dio—e Quasimodo's poesia, in cui Dio è del tutto assente, e il terremoto bolli per tre giorni in un mare avvelenato.

16.6 Architettura

16.6.1 Pirro Ligorio

Un'altra importante pietra miliare nella storia intellettuale precoce dei terremoti è opera di Pirro Ligorio, che ha scritto *Libro di diversi terremoti* nel 1570. Questo trattato raccoglie e valuta criticamente le teorie contemporanee circa i fenomeni sismici, e rappresenta uno dei primi tentativi sistematici nel mondo occidentale per sottoporre terremoti ad analisi razionali piuttosto che interpretazione teologica –piattarlo quadrangolarmente all'interno della tradizione esaminata In questo capitolo, il lavoro contiene anche ciò che si ritiene sia primo disegno per una struttura resistente al terremoto in architettura occidentale storia, un dettaglio che Ligorio è una figura transitoria tra la tradizione filosofica sopra citato e la tradizione ingegneristica esaminata nei capitoli successivi di questo lavoro. Il manoscritto

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

è stato riscoperto e pubblicato in un moderno studioso edizione di Emanuela Guidoboni (Ligorio, 2005) in 2005.[16]

16.6.2 Gibellina

Il 15 gennaio 1968, un devastante terremoto di magnitudo 6.4 ha colpito la città di Belice Valley in Sicilia occidentale, uccidere quasi 400 persone e lasciare circa 100.000 senzatetto, tra le città completamente distrutte c'era Gibellina, una piccola comunità agricola di circa 6.000 abitanti Fig. 16.16aLa distruzione era totale: interi blocchi crollati, il tessuto stradale medievale è stato cancellato, e i sopravvissuti sono fuggiti per rendere le città della tenda del cambiamento nella campagna circostante, Fig. 16.16bQuello che è seguito è stato uno degli sforzi di ricostruzione più protratti e politicamente caricati nella storia italiana. Lo stato italiano ha risposto lentamente e caoticamente; l'alloggio di emergenza non è stato consegnato per anni, e la popolazione sfollata ha langurato in caserme temporanee – alcuni per oltre un decennio. Il terremoto è diventato un simbolo della trascuratezza del sud Italia da Roma, e la valle di Belice una parola per fallimento istituzionale e il divario tra il prospero nord e l'impoverito. *Mezzogiorno*. Scrittori, intellettuali e sindacalisti si sono radunati intorno ai sopravvissuti, e la ricostruzione delle città di Belice alla fine si è legata a dibattiti più ampi sulla pianificazione urbana, l'identità culturale, e la politica di disastro nel dopoguerra Italia (Musolino, 2017).

In questo contesto distratto l'artista Alberto Burri (1915-1995) concepisce una delle risposte più straordinarie alla distruzione nella storia dell'arte terrestre, già tra i più celebri artisti del dopoguerra italiani, riconosciuti a livello internazionale per la sua *Sacchi* (paintings fatto da sacchi di frusta cuciti), le sue plastiche bruciate, e soprattutto la sua *Cretini* — tele rivestite in miscele a base di caolino che, asciugate e distrutte, producevano web di crepe che ricordano in modo eccezionalmente la terra patinata, fango essiccato, o — inevitabilmente – terra a fratture terremotate. Il salto dalla tela al paesaggio era concettualmente audace ma visivamente coerente: a Gibellina, Burri ha semplicemente continuato quello che aveva sempre fatto, ma a scala civile (Forty, 2013).

Tra il 1984 e il 1989, e poi completato postumo nel 2015, Burri diresse l'incarnazione dell'intero campo di macerie della vecchia Gibellina sotto un manto continuo di cemento bianco (Forty, 2013)Fico. 16.16cIl processo non era una di cancellazione ma di fossilizzazione: il cemento seguiva la griglia di strada preesistente, conservando i contorni di strade, cortili e impronte di casa come una serie di nastri bianchi sollevati separati da fessure navigabili.Queste fessure — deliberatamente "cracked" in superficie — eco sia le rotture

[16] Un'ulteriore notevole istanza l'indagine del terremoto precoce è attribuita all'Anthemius di Tradizioni (c. 474–c. 558), uno dei architetti principali della Hagia Sophia Chi, chi ha riferito costruito un dispositivo meccanico utilizzando vapore per simulare sismico vibrazioni sotto la casa di un vicino— secondo le fonti, un legale avversario— rendendo questo forse il primo caso registrato di artificiale simulazione del terremoto (Dragoni, 2005; Downey, 1946). Che l'architetto di uno degli edifici più testati sisticamente nella storia dovrebbe anche essere accreditato con la prima simulazione del terremoto è una coincidenza degno preservando.

COPIA DI REVISIONE

sismiche che hanno causato la devastazione dei quarti e il caratteristico trattamento di superficie ingrandita di tela. m, copre circa 80.000 metri quadrati, ed è leggibile come una forma coerente dalla fotografia aerea e satellitare, tra le più grandi installazioni terrestri mai creato.

Ho visitato il *Cretto* nel 2008 e fu colpito dalla sua inquietudine.[17] Camminando attraverso i suoi stretti corridoi bianchi — in alcuni luoghi appena abbastanza largo per due persone a passare — si passa attraverso quello che è essenzialmente una tomba comunitaria. Le pareti si alzano al petto o all'altezza della spalla, racchiudendo il walker in un labirinto di assoluta bianchezza. Non c'è suono, poca ombra, e nessun riferimento visivo oltre il cemento stesso e il cielo sopra. L'esperienza è simultaneamente architettonica e funeraria, astratto e intensamente specifico: sotto i piedi della città intera. *Cretto* non rappresenta la perdita; *is* perdita, dato forma materiale (Forty, 2013).



(a) Gibellina prima





(b) Gibellina distrutta



(c) Creto di Burri

Figura 16.16: Gibellina distrutta e tombata in cemento

Il destino dei sopravvissuti esigeva più di un monumento. Venti chilometri di distanza, su un sito piatto sulla pianura sottostante, un insediamento sostitutivo—Gibellina Nuova— – doveva essere costruito da zero, Fig. 16.17a. Il sindaco della nuova città, Ludovico Corrao, era un avvocato, politico e appassionato patrono delle arti che ha visto nel disastro

[17] È stata proprio questa visita a Gibellina che ha suscitato il mio interesse a scrivere questo capitolo, come si è osservato nell'Introduzione.

Libro I: Una breve storia della meccanica e dell'analisi strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

un'improbabile opportunità: la possibilità di costruire una città che sarebbe, dalle sue fondamenta, un'opera d'arte totale (Badami, 2012)Corrao ha invitato una straordinaria costellazione di architetti, artisti e designer italiani e internazionali a contribuire alla nuova città, trasformando quello che potrebbe essere stato un esercizio di routine nell'edilizia sociale in uno degli esperimenti più ambiziosi nella fusione dell'urbanismo e dell'arte contemporanea tentati ovunque nel XX secolo. Franco Purini, Pietro Consagra, Ludovico Quaroni, Vittorio Gregotti, Alessandro Mendini, e Mimmo Paladino (Venezia, 1989). L'armatura civica che lega questi contributi insieme è stata fornita da Franco Purini e Laura Thermes' *Sistema delle Piazze* (1990), Fig. 16.17b—una sequenza di tre piazze pubbliche interconnesse racchiuse da un portico di due piani tufa, pavimentato in marmo e pietra lavica, e filettato da un piccolo canale che alimenta una serie di fontane, progettato per servire come cerniera sociale tra i quartieri residenziali e l'ambientazione monumentale per le opere d'arte distribuite in tutta la città.



(a) Pietro Consagra *Porta del Belice*





(b) Franco Purini, Laura Thermes, *Sistema delle Piazze*



(c) Pietro Consagra *Serpente*



(d) Pietro Consagra *Teatro Frontale*

Figura 16.17: Gibellina Nuova

Interessante, e con precisione, Fig. 16.17c mostra una scultura, attribuita a Pietro Consagra, uno degli artisti siciliani che hanno contribuito maggiormente ampiamente al progetto museo all'aperto di Corrao, presenta un sinuoso forma tubolare in metallo patinato la cui morfologia avvolgimento invita — sia per design che per logica di forma astratta trovarsi il proprio risonanza — confronto con le figure serpentine discusse durante tutto questo capitolo come veicoli interculturali per la forza sismica e cromatica. Consagra, astrazione del dopoguerra, avrebbe probabilmente resistito ad una lettura esplicitamente

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

mitologica (era un marxista ardente); ma la convergenza di una scultura serpentina in una città ricostruita dopo la catastrofe il terremoto, in una regione la cui violenza geologica è codificata nella sotto il *Cretto*, è difficile da respingere come puramente fortuito.

Teatro Frontale di Pietro Consagra, Fig. 16.17d, (fino al 1984, mai completato) è forse il monumento più emblematico dell'utopia non realizzata di Gibellina Nuova: concepita dallo scultore come una "scultura vivente" piuttosto che un teatro convenzionale, la sua fila di archi concreti increspanti — la barra ancora esposta al cielo siciliano — è come un'elegia involonaria alle ambizioni della ricostruzione post-terra.

Tuttavia l'esperimento non era senza profonde e istruttive fallimenti[18]Per tutta la sua ambizione culturale, Gibellina Nuova è stata vissuta da molti dei suoi abitanti – e soprattutto dagli anziani – come profondamente alienante (Musolino, 2017). La vecchia Gibellina era stata una densa e labirintica cittadina collinare del genere comune in tutta la Sicilia: strade larghe appena due metri, case impilate l'una contro l'altra, vicini separati da un muro o da una scala condivisa, vita pubblica condotta in piazze scalate alla conversazione piuttosto che allo spettacolo. Il nuovo paese, al contrario, si è diffuso su una piana piana pianeggiante in un layout disperso, a bassa densità, con ampi viali, bopericoli monumentali, rota (Badami, 2012)Gli edifici erano suggestivi come oggetti individuali ma non riuscirono a generare la custodia spaziale e l'intimità sociale che avevano strutturato la vita quotidiana nella città originale. I residenti più anziani si trovarono incapaci di orientarsi, incapaci di camminare verso i vicini, incapaci di riprodurre le abitudini e i rituali di una vita. Molti parlavano della nuova città come luogo di esilio piuttosto che di ritorno. La comunità aveva dato l'architettura, ma non la città che avevano perso.

Gibellina è così il più in arresto visivo, e forse il più istruttivo, caso studio nell'intersezione di sismologia, architettura e urbanismo. *Cretto* Gibellina Nuova è una lezione di cautela nel divario tra visione architettonica e vita sociale, insieme costituiscono la meditazione più concentrata sul terremoto e l'ambiente costruito da trovare ovunque nel mondo.

[18]Il destino di Matera *Sassi* offre un contropunto istruttivo alla doppia tragedia di Gibellina, evacuata dal decreto governativo negli anni '50 terreno di povertà e insalubrità — Carlo Levi's *Cristo si è fermato Ad Eboli* (1945) aveva fatto delle abitazioni delle caverne una parola per il sud La miseria italiana — l'antico insediamento trogloditario non è stato demolito ma una legge del 1986 ha permesso la rioccupazione, il riconoscimento dell'UNESCO seguito nel 1993, e *Sassi* sono oggi un fiorente, se pesantemente quartiere turistico, urbano ancora una volta. Dove Gibellina è stata cancellata e ri-inventato, Matera fu svuotato e riscattato: il tessuto originale sopravvisse, e con essa la possibilità di ritorno.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

16.7 Artìcolo

16.7.1 Tracce di Rock Art e Fault

Due esempi interessanti collegano immagini terremotate direttamente alle strutture geologiche attive, e insieme illustrano la gamma di prove disponibili per questo tipo di argomento—da osservazione geologica a interpretazione culturale.

Nella Sierra de San Francisco a Baja California, il sito conosciuto come *La mia vita Serpiente* (Cave del Serpente) conserva un murale circa otto metri di lunghezza raffigurante un grande corno serpente circondato da quasi cinquanta esseri umani e figure animali, Fig. 16.18. Notare la disposizione visiva dondolante delle figure umane e animali intorno al serpente centrale a corna, suggestivo del movimento laterale dinamico attraverso il pannello. La composizione non è statica: la disposizione delle figure crea un'immagine a



Figura 16.18: Cueva de la Serpiente mural, Sierra de San Francisco, Baja California.

dondolo ritmo, come se il serpente stesse tessindo dinamicamente attraverso il pannello, raccogliendo il mondo umano e animale nel suo movimento. Immediatamente di fronte alla grotta, la arroyo fa una brusca deflezione verso est prima di riprendere il suo verso nord corso—un'anomalia di drenaggio coerente con un trend est-ovest sciopero... colpa del dislip compensare il canale di flusso. la coincidenza dell'immaginario e della geologia non prova, ovviamente, la causalità; ma solleva la domanda se le persone che hanno scelto questo sito e dipinto questo muro comprese, secondo i loro termini, che il terreno qui si muoveva in modo diverso da terra altrove.

Un secondo esempio è *Grotta dipinta di Chumash* in Santa Ynez Monti a nord di Santa Barbara, Fig. 16.19, situato in prossimità dell'attiva Arroyo Parida colpa. I pittografi trovati al sito—complesso forme interbloccanti, schemi radianti e figure la cui geometria suggerisce mozione piuttosto che ripose—sono stati interpretati da alcuni ricercatori come possibili risposte culturali all'attività sismica sentita, anche se questa interpretazione rimane dibattuta tra gli archeologi, molti che invece si riferiscono all'immaginario all'esperienza visionaria sciamanica.

Le due interpretazioni non devono essere reciprocamente esclusive. quadro in cui terremoti e stati visionari sono entrambi compresi come manifestazioni di potere sotterraneo,

COPIA DI REVISIONE

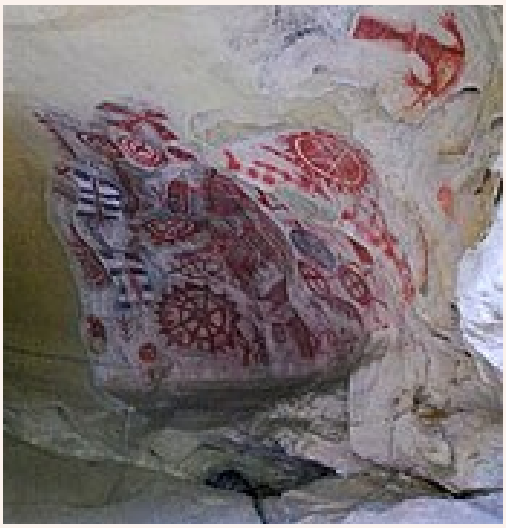


Figura 16.19: Pictografi a Chumash Painted Cave, Santa Ynez Mountains, California.

si distinguono poco tra le due esperienze, ciò che si può dire con maggiore fiducia è che il sito era improbabile che fosse stato selezionato arbitrariamente. il paesaggio tectonticamente attivo suggerisce che l'impostazione stessa possedeva un riconosciuto significato, anche se questa conoscenza è stata espressa attraverso simbolico concetti cosmologici molto diversi da quelli utilizzati nella geoscienza moderna.

Assieme ad altri esempi discussi in questo capitolo, un modello più ampio i paesaggi che si producono di terremoti spesso danno origine al serpente mitologie, un collegamento che forse è non difficile da capire. Il serpente è una creatura dinamica e sotterranea capace di apparizione improvvisa e forza distruttiva, e si muove nel sinuoso, moda laterale che ricorda il movimento di rottura di di difetti o la propagazione di onde sismiche attraverso terra non consolidata. Dal serpente arrapato di Baja La California al doppio testato *Si'.* del Pacifico Northwest, la figura appare ripetutamente come metafora interculturale per forze reali, ricorrenti, e altrimenti difficile da spiegare.

Oltre il serpente stesso, terremoto americano mitologia frequentemente colloca eventi sismici all'interno di narrazioni cosmologiche di distruzione ciclica e di rinnovamento. Azteca tradizione di successive eta' mondiali, ognuna terminata dalla catastrofe, trova in parallelo narrativo impressionante Mesoamericano tradizioni. Simili le idee appaiono altrove nel mondo; il concetto giapponese di *Yonaoshi* (''World rectification"') fornisce uno di questi esempio e sarà discusso nella sezione seguente.

16.7.2 Pittura

I terremoti hanno trovato espressione nelle arti visive, dove i pittori hanno tentato di rappresentare sia la violenza fisica dell'evento che l'uomo risposta alla catastrofe. Le rappresentazioni artistiche oscillano tra due tradizioni: la *peinture de genere*, che si concentra

COPIA DI REVISIONE

sulla vita quotidiana di fronte al disastro, e *la sua vita*, che eleva l'evento a un livello storico e simbolico più ampio.

Nel corso del XIX secolo, un esempio notevole è l'opera di Léopold Robert, che dipinse scene ispirate al dopomath di un terremoto in Napoli intorno al 1830. L'enfasi non è solo sulla distruzione stessa ma sul dramma umano che si svolge nel paesaggio urbano devastato–respinto architettura, popolazioni sfollate e difficoltà emotiva-riflettendo il più ampio fascino romantico con la catastrofe e il sublime, Fig. 16.20a.

In America Latina, Fernando Botero ha affrontato il tema esplicitamente in *Terremoto in Popayán*, ispirato al terremoto distruttivo del 1983 che ha colpito la storica città colombiana. L'interpretazione di Botero si trasforma la catastrofe in una potente narrazione visiva, combinando il suo distintivo figure volumetrici con scene di devastazione urbana, Fig. 16.20b.

Le discussioni di studio hanno sottolineato il duplice ruolo della catastrofe, sia evento storico e soggetto estetico. Sylvie Wuhrmann ha tracciato evoluzione delle immagini terremotate da scene di genere a pittura di storia, da Jean-Pierre Saint-Ours a Léopold Robert Wuhrmann, 1994Michel Ribon ha esplorato l'«estetica della catastrofe», sostenendo che i disastri tali come i terremoti occupano un posto significativo nella storia dell'arte rappresentazione perché affrontano gli artisti con i limiti dell'ordine, stabilità e controllo umano Ribon, 1999.



(a) Léopold Robert, *Napolitaine pleurant sur les ruines de sa maison après un tremblement de terre* (c. 1830)

(b) Fernando Botero, *Terremoto en Popayán* (1999)

Figura 16.20: Due risposte pittoriche alla catastrofe sismica

16.7.3 Collezione Kozak

Di grande interesse è la collezione privata di Jan Kozák (Kozak, Moreira e Oldroyd, 2005), geoscienziato ceco presso l'Istituto Geofisico dell'Accademia ceca delle Scienze, che oltre quattro decenni ha riunito uno della più grande serie di raffigurazioni prefotografiche del

COPIA DI REVISIONE

mondo disastri: più di 2.300 articoli che coprono terremoti, vulcani eruzioni e tsunami. Un sottoinsieme di 875 diapositive è stato donato al Centro di ricerca di ingegneria del terremoto presso l'Università della California, Berkeley, digitalizzato dal personale della biblioteca NISEE-PEER, e reso disponibile online; questo portale non è più accessibile pubblicamente.

La collezione comprende innumerevoli rappresentazioni del 1755 Lisbona terremoto (Keller, 1998; Kozak, Moreira e Oldroyd, 2005), il terremoto di Napoli del 1830 (rendered by Léopold Robert), e numerosi *Namazu-e* (Giacomoni, 2005). La sua forma più accessibile è il volume co-autore con geofisico Vladimír Cermák (Kozák e Cermák, 2010), che si basa sulla collezione per fornire riproduzioni di pagine complete di incisioni rare, mappe antiche e schizzi, ognuno accompagnato da testo sul fondo geofisico e storico dell'evento e della provenienza dell'immagine. includono quelli a Basilea (1356), Costantinopoli (1762), e San Francisco (1868 e 1906), insieme alle eruzioni vulcaniche e agli tsunami che spaziano il XIV al XIX secolo. L'opera pontifica i storia della scienza e della storia dell'arte, documentando come pre-moderno società osservate, registrate e interpretate catastrofe sismica prima dell'avvento della fotografia.

16.7.4 Collezione Amelio

Il terremoto era anche soggetto di un privato importante e unico collezione di arte moderna (*Terra di Motus*) (Fondazione Amelio, 1987). Dopo il terremoto che ha colpito Irpinia e Basilicata su 23 Novembre 1980, il croupier napoletano dell'arte contemporanea Lucio Amelio (1931-1994) — convinto che solo la forza dell'arte potrebbe portare a rebirth — invitato artisti di fama internazionale a contribuire opere che rispondono alla catastrofe. La Fondazione Amelio è stata formalmente stabilito nel novembre 1982 per dare il progetto di base istituzionale, e la collezione è cresciuta per abbracciare oltre 70 dipinti e sculture di oltre 50 artisti italiani e internazionali, tra cui Giuseppe Beuys, Andy Warhol, Keith Haring, Robert Mapplethorpe, Cy Twombly, Gerhard Richter, Anselm Kiefer, Christian Boltanski, Mimmo Paladino, e Nino Longobardi.

Tre opere illustrano la gamma di risposte artistiche suscitate da Amelio. Tra i più celebri è Warhol's *Il mio destino*, Fig. 16.21a, una reinterpretazione Pop Art della prima pagina del giornale napoletano *Il Mattino* pubblicato nei giorni immediatamente dopo il terremoto. Joseph Beuys contribuì *Terremoto a Palazzo* (1981), an installazione assemblata da strumenti artigianali recuperati personalmente da villaggi distrutti dal terremoto... un tavolo da sarto, un ciabattere sgabello, rack di un barile—decontestualizzato e sparsi con i frammenti di vetro, vasi di argilla cuneo tra parete e mobili, e un unico uovo equilibrata in equilibrio precario, evocando la fragilità e lo spostamento a sinistra per catastrofe. Robert Mapplethorpe ha risposto con un pentattico di cinque grandi formati stampe di gelatina d'argento (*Denis Speight con Thorns*, *Jack con Corona*, *Teschio e ossa di croce*, *Jill Chapman*, *Dennis Vista con i fiori*, 1983), organizzato intorno ai simboli della Passione di Cristo; il pannello centrale raffigura un plinto teschio-e-crossa al ingresso alla chiesa barocca di

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Andy Warhol: *Il mio destino*



(b) Anselm Kiefer *Et la terre tremble encore, d'avoir vu la fuite des géants*



(c) Robert Mapplethorpe: Pentattico Terrae Motus

Figura 16.21: Contributi selezionati (Warhol, Mapplethorpe e Kiefer) alla Collezione Amelio

Santa Maria delle Anime del Purgatorio ad Arco a Napoli, fotografato durante il soggiorno napoletano dell'artista, Fig. 16.21c[19]. Anselm Kiefer[20] *Et la terre tremble encore, d'avoir vu la fuite des Géants* traduce la battaglia di Waterloo in una metafora del sismico catastrofe: il cotto applicato direttamente alla tela apre una grande ferita attraverso la superficie dipinta, attraversata da segni neri e poetica vagante iscrizioni, fusione di pittura con il materiale della terra, Fig. 16.21b.

La collezione è stata esposta per la prima volta in un monastero riabilitato a Napoli nel 1984, poi mostrato al Grand Palais di Parigi nel 1987, che ha dato il progetto riconoscimento internazionale. Amelio ha lasciato la collezione alla Stato italiano; dal novembre 1992 è stato esposto permanentemente nel Grande Galleria della Reggia di Caserta settecentesca[21],

[19] Non ingrandire troppo questo è Mapplethorp dopotutto!

[20] Per un altro dipinto di Kiefer, fare riferimento alla pagina 728.

[21] La posizione permanente del *Terra di Motus* collezione alla Reggia di Caserta non è stato accidentale ma il risultato di un deliberato e decisione emotivamente caricata da Amelio stesso. Prima della sua morte 1994, Amelio ha fatto due visite all'allora vescovo di Caserta, Raffaele Nogaro, accompagnato in prima occasione dal sovrintendente Gian Marco Jacobitti, e una sola volta, chiese a Nogaro di firmare un documento che gli chiedeva di firmare un documento impegno personale, come autorità morale pubblica, a garantire la permanente installazione della collezione alla Reggia. Il motivo per cui Amelio ha dato Napoli, disse al vescovo, aveva già rubato tutto da lui senza gratitudine, e la sua decisione di lasciare la collezione per Caserta non è stata guidata da rancour o da un desiderio di vendetta ma da un profondo disillusione con la sua città natale, che non aveva mai adeguatamente riconosciuto il suo contributo culturale nonostante il fatto che aveva trascorso decenni trasformare la sua galleria in Piazza dei Martiri in un centro arte contemporanea

COPIA DI REVISIONE

dove le opere sono mostrate in rotazione all'interno del Royal Apartments, ponendo l'energia dell'arte contemporanea in dialogo diretto con la grandiosità barocca del Palazzo Bourbon.

16.8 Musica

Anche i disastri naturali, compresi i terremoti, hanno trovato espressione Una delle prime testimonianze è Antoine Brumel (c. 1460–c. 1520), che compose il celebre *Missa Et ecce terrae motus* ('Ecco, la terra si è detta '), spesso come la "S messa di Earthquake". Il titolo deriva dal racconto del Vangelo descrivendo il terremoto che ha accompagnato la morte di Cristo; l'opera è notevole per la sua texture polifonica a dodici voci, una delle più ambizioso del Rinascimento (Cumming, 2001).

Johann Sebastian Bach ritrae in modo espressivo lo stesso terremoto in entrambi il *Passione secondo San. John John.* (1724) e *Passione secondo San. Matteo*[22] (1729), traduciamo il violento tremling di la terra in forma orchestrale e corale attraverso la tensione armonica e orchestrazione drammatica.

Joseph Haydn conclude contemporaneamente il suo *Sette Ultimi Parole di Cristo su la Croce* (versione orchestrale, 1785) con un movimento esplicitamente intitolato *Il Terremoto*, evocando il terremoto del Vangelo con una dinamica improvvisa forza (Webster, 2001).

Il ruolo dei terremoti nella drammaturgia musicale durante il regno di Louis XIV è stato esaminato da La Gole (La Gorce, 1996), chi documenti come compositori e scenografi hanno implementato effetti musicali per trasmettere distruzione sismica al pubblico di corte.

internazionale. Mons. Nogaro, raccontando questi incontri in una lettera aperta dell'agosto 2009 scritta come ha concluso la sua pastorale tenure, descrisse Amelio come portare dentro di sé un profondo e irrisolto il dolore per questa mancanza di riconoscimento. Amelio è morto su 2 Luglio 1994, e la collezione è stata formalmente installata alla Reggia più tardi quell'anno in conformemente alla sua bequest testamentaria, che legalmente vincolato collezione al palazzo Vanvitelli. La materia non si è riposata: nel anni dopo la morte di Amelio, ripetuti tentativi sono stati fatti da membri di la famiglia Amelio e gli operatori culturali napoletani per rimuovere *Terra di Motus* da Caserta e trasferirlo in un edificio a Napoli. Nogaro si oppone pubblicamente a questi tentativi, riaffermando sia la forza giuridica di la bequest testamentaria e ciò che ha chiamato il debito culturale e morale la gratitudine che la città di Caserta doveva alla donazione. illustra una tensione che attraversa tutta la storia della collezione: anche se il terremoto che lo ha ispirato ha colpito L'entroterra campano e Amelio era lui stesso napoletano, la collezione non si è concluso il suo viaggio a Napoli ma in un palazzo reale borbonico trenta chilometri a nord, proprio perché il suo creatore sentiva che Napoli l'aveva fallito.

[22] Il mio preferito

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

16.9 Fotografia

I Terremoti hanno trovato la rappresentazione nel cinema documentario, dove il film è combinazione di testimonianza visiva, interviste sopravvissute e filmati d'archivio può comunicare aspetti di catastrofe che rimangono astratti nella scienza Infatti, uno dei primi film documentari noti di qualsiasi disastro naturale *Il disastro di Messina* (1909), prodotto dalla Cines, azienda italiana, nel dopomath del terremoto del 1908 — il più mortale della storia registrata europea. i recensori lodarono proprio per mostrare sopravvissuti piuttosto che rovine, riconoscere che il potere distintivo del cinema è in grado di documentare la sofferenza umana piuttosto che la distruzione fisica da sola.

La memoria culturale del terremoto del 1908 è di per sé diventata una soggetto documentario: John Dickie's *Messina: Città senza memoria?* (2008) esamina come la distruzione totale dell'architettura della città il patrimonio lo ha lasciato senza la visibile identità storica che la maggior parte italiana le città possiedono, un'assenza ancora si sentiva un secolo più tardi.

Più recentemente, il regista iraniano Kianoush Ayari ha documentato il 2003 Bam terremoto, uno degli eventi sismici più distruttivi dell'Iran moderno Il suo film ha ricevuto il riconoscimento internazionale, tra cui i Rom Premio per il documentario, e si presenta come un record storico e un riflessione sul trauma collettivo e sulla resilienza.

Coda

Un contributo più recente e filosoficamente ambizioso al documentario l'impegno con la catastrofe sismica e l'ambiente costruito è *Architettone* (Kossakovsky, 2024), scritta e diretta dal regista russo Viktor Kossakovsky. Il film è quasi senza parole meditazione su pietra e cemento come i materiali fondamentali della civiltà, strutturato attorno ad un progetto paesaggistico dell'architetto italiano Michele De Lucchi e girato con straordinaria cinematografia droni.

L'itinerario di Kossakovsky si muove tra siti di costruzione antica e moderno distruzione in modo che parli direttamente alle preoccupazioni di questo capitolo: le rovine del tempio di Baalbek in Libano (pg. 48)-compreso il megalito enigmatico incompiuto, il cosiddetto *Pietra della donna incinta*, tagliato dalla cava ma mai commosso, una cicatrice nel paesaggio che solleva le stesse domande insoddisfacenti sull'ambizione umana e il tempo geologico come quello di Burri *Cretto*- le macerie delle città in Turchia devastate dal terremoto catastrofico del 2023 febbraio, la distruzione della guerra in Ucraina, e, in modo cruciale per questo capitolo, Gibellina Nuova stesso, filmato dall'alto come l'aria aperta museo di scultura tardomodernista che Corrao costruito da le rovine della città collinare originale. Il film si intitola anche sull'elemento bellezza di semplici archi murari e forme a volta (cfr. Capitolo 32 e 31), la cui logica strutturale — risoluzione della forza attraverso la geometria pura (cf. Capitolo 8)- il direttore non presenta semplicemente come

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

tecnico realizzazione ma come una sorta di saggezza civilistica che cemento e acciaio la costruzione è in gran parte abbandonata.

L'argomento sottostante *Architettone*, articolato da De Lucchi in il dialogo rado del film, è che la distruttività dei terremoti, della guerra, e l'estrazione industriale è inseparabile da una domanda più profonda su come e perché costruiamo: "Quando progettiamo qualcosa"' osserva, "noi progettiamo "La questione, che è anche in un altro registro, domanda posta da ogni tradizione esaminata in questo capitolo—dati *Architettone* una pretesa di essere tra i più ricercati cinematici meditazioni sul rapporto tra catastrofe e l'ambiente costruito. Per una storia di analisi strutturale –una disciplina nata dall'uomo insistenza per capire perché le cose stanno e perché cadono — il film fornisce una meditazione artistica finale particolarmente adatta. anche dopo che i meccanici di stabilità e collasso sono stati compresi, il le rovine continuano a richiedere l'interpretazione.

16.10 Conclusioni

Gli otto domini intervistati in questo capitolo—mitologia, religione, filosofia, letteratura, architettura, arte, musica e cinema—costituiscono un'estensione meditazione su una sola domanda: cosa significa quando il terreno sotto la nostra I piedi si rivelano inaffidabili?

Le prime risposte assegnano l'agenzia: un pesce gatto mescola, un serpente si sposta, un la religione elabora questo riflesso in struttura formale, incorporando il terremoto all'interno di un ordine morale e esigente risposta comunitaria. Temi filosofici che si rifanno all'esame critico—a processo che culmina nel dibattito di Lisbona, dove la rabbia di Voltaire, la la proto-sociologia della vulnerabilità, e il naturalismo di Kant insieme segnano il transizione decisiva: il terremoto cessa di essere principalmente un teologo problema e diventa scientifica. Letteratura e arte registrano questo transizione con particolare sensibilità: la distanza tra Voltaire *Poème*–che non poteva descrivere Lisbona senza affrontare Dio– L'elegia di Quasimodo per Messina, in cui Dio è del tutto assente, è la distanza che due secoli di indagine naturale avevano viaggiato.

Ciò che unisce questi domini non è solo un soggetto condiviso ma un soggetto condiviso Ogni cultura che ha vissuto con i terremoti ha dovuto rispondere la stessa domanda, e ogni risposta esegue lo stesso lavoro fondamentale: trasforma il terrore in senso. La narrazione mitologica, la teologia quadro, l'argomentazione filosofica, il memoriale architettonico che sigilli un'intera città in cemento—questi non sono sostituzioni successive di una altri strati successivi di una risposta umana continua alla scoperta che la terra non è la fondazione stabile che noi lo richiediamo essere.

Dirac's dismissario sicuro, citato all'apertura di §16.2, ha ritenuto che la comprensione moderna avesse reso interpretazioni mitologiche e teologiche della catastrofe obsolete. la prova di questo capitolo suggerisce il contrario. ha spostato il pesce gatto, il serpente, e il

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

gigante imprigionato, ma non ha eliminando il riflesso interpretativo stesso–l'insistenza che uno straordinario l'evento non deve possedere solo una causa fisica ma un agente, un'intenzione, e un significato. Quel riflesso invece si è migrato verso altri domini in cui l'osservazione rimane frammentaria e la spiegazione incerta. espressioni moderne si trovano non sotto la terra, ma nel cielo.

16.11 Epilogue: Da Namazu a Roswell

I miti esaminati in questo capitolo non sono semplicemente ignoranza. nasce dall'incontro tra un'esperienza innegabile e un invisibile la terra si muoveva, e dove il meccanismo non poteva essere osservato, l'immaginazione ha fornito un agente: in Edo Giappone, un pesce gatto gigante incolpato sotto un pietra sacra (§16.2.1); altrove un serpente, un imprigionato gigante, una divinità offesa, o un potere cosmico temporaneamente rilasciato da la conoscenza scientifica alla fine ha spostato questi agenti particolari, ma non ha eliminato l'impulso umano che li aveva creati.

Nel mondo tecnologico moderno, quell'impulso non è scomparso; è migrato verso altri domini in cui l'osservazione rimane frammentaria e spiegazione incerta, generando lungo il modo la propria letteratura, arte, e cinema, come il terremoto ha fatto nelle sezioni sopra. espressioni cospicue—e quella la cui lineage mitologica è più facile da traccia—è la convinzione persistente che luci e oggetti inspiegabili segnalati nel cielo sono le prove di un'intelligenza visitante.

Il parallelo con Namazu è più vicino di quanto appare prima. Namazu non ha richiesto unico credente, solo un nome, un santuario, e una tradizione di stampe di legno blocco, a diventare un apparecchio dell'immaginazione popolare (§16.2.1). An presunto incidente vicino Roswell, Nuovo Messico, nel luglio 1947 richiesto poco più diventare la leggenda fondatrice della moderna ufologia popolare. Decenni di ufficiale dichiarazioni, indagini e documenti declassati hanno fatto notevolmente come la tradizione Namazu, che sopravvisse ad ogni fallimento di Kashima o Ebisu per spiegare un particolare terremoto, la leggenda di Roswell sopravvive alle spiegazioni che gli vengono offerte... perché, come mito, non è mai stato costruito per essere falsificato, è stato costruito per tenere un posto nell'immaginazione che l'osservazione da sola non poteva riempire.

Il vocabolario si è evoluto, ma la domanda sottostante non lo ha fatto. fenomeno a lungo discusso sotto la designazione *volo non identificato oggetto*, o UFO, è ora indagato sotto la designazione ufficiale più ampia *fenomeno anomalo non identificato*, o UAP. Nell'uso scientifico ufficiale, un UAP è un'osservazione che non può ancora essere identificata come un aereo o un noto fenomeno naturale; la designazione descrive lo stato attuale del la conoscenza dell'osservatore piuttosto che l'origine del fenomeno stesso (NASA Unidentified Anomalous Phenomena Independent Study Team, 2023). *Unidentificati* non significa che *inspiegabile*e ancora meno significa *extraterrestri*.

COPIA DI REVISIONE

La distinzione è facilmente oscurata quando un'osservazione sembra violare aspettative fisiche ordinarie. Un oggetto può sembrare muoversi senza inerzia, a accelerare oltre la capacità di aeromobili noti, o sparire ma una apparente violazione della fisica può non essere originata oggetto ma nelle condizioni di osservazione: distanza incerta o scala, prospettiva forzata, parallax, movimento della piattaforma del sensore, atmosferica condizioni, artefatti strumentali o videocompressione, errori di stima velocità, o l'assenza dei metadati necessari per ricostruire l'evento. studio indipendente ha rilevato che l'analisi di molti rapporti UAP è ostacolata da sensori scarsamente calibrati, assenza di misurazioni multiple, sensore mancante metadati e dati di base inadeguati. La registrazione "GoFast" ha mostrato che l'impressione di un movimento straordinario potrebbe deriva in gran parte dalla velocità dell'aeromobile osservante e dal parallasse effetto di parallasse (NASA Unidentified Anomalous Phenomena Independent Study Team, 2023); lo stesso caso è stato poi riesaminato più approfonditamente dettaglio dell'Ufficio di Risoluzione Anomalia di All-domain (All-domain Anomaly Resolution Office, 2024; All-domain Anomaly Resolution Office, 2025). Questo è, su una scala molto più piccola, il stessa transizione il terremoto di Lisbona forzato sull'Europa settecentesca (§16.4.4): un evento letto per la prima volta per il suo significato è invece sottoposte a ricostruzione, misura e strumentazione. In tali casi, il mistero è autentico, ma la sua fonte può essere l'insufficienza delle prove piuttosto che l'insufficienza della legge fisica.

Nessuno di questo dimostra che la vita non esiste altrove nell'universo, né richiede che ogni osservazione insolita venga respinta come banale. La scienza inizia con anomalie e progressi prendendole sul serio. richiede anche che la spiegazione rimanga proporzionale alle prove. non ha trovato alcuna prova scientifica conclusiva che i rapporti UAP esistenti hanno origine extraterrestre (NASA Unidentified Anomalous Phenomena Independent Study Team, 2023). L'incapacità di identificare un evento è quindi l'inizio di un'indagine, non la conclusione che un l'intelligenza extraterrestre si è rivelata.

Il fenomeno stesso non deve essere mitico per la narrazione costruita intorno per diventare mitologia. Carl Jung ha fatto questo argomento alla fine degli anni '50, descrivendo piattini volanti come un mito moderno di cose viste in i cieli (Jung, 1959)—anni prima che Roswell si fosse indurito in leggenda popolare e decenni prima che UAP divenne un acronimo ufficiale. Antico mitologia popolata le regioni inaccessibili sotto la terra con potenti esseri i cui movimenti spiegavano il tremore del suolo; il moderno narrativa popola le inaccessibili raggi del cielo con tecnicamente esseri superiori le cui intenzioni spiegano luci ambigue, immagini e tracce. Il suo vocabolario non è più teologico ma tecnologico: sostituisci la sonda spaziale carri celesti, la propulsione avanzata sostituisce il potere divino e il governo la segretezza sostituisce i consigli nascosti degli dei. La struttura sottostante rimane lo stesso. Un evento inspiegabile viene assegnato un agente; l'agente è dotato di intelligenza e di scopo; e l'assenza di prove decisive è incorporato nella narrazione piuttosto che contato contro di esso.

La scienza non ci richiede di estinguere la meraviglia; ci richiede di disciplinare La lezione duratura delle tradizioni esaminate in questo capitolo è quindi non che l'umanità

COPIA DI REVISIONE

una volta credeva in cose stolte e ora le ha sfuggite. che la distanza tra osservazione e spiegazione è sempre terreno fertile per il mito. Il pesce gatto che una volta dormiva sotto il santuario di Kashima ha, nel immaginazione popolare, dato il modo ai visitatori da oltre Roswell; l'impulso che si trova ora l'altro, in entrambi i casi, il primo obbligo la ragione è la stessa: conservare il mistero senza convertirlo prematuramente in agenzia.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



La Caduta dei Giganti

La caduta dei giganti[a], 1532–1535. Fresco, Sala dei Giganti, Palazzo Te, Mantova.

[a] Niente a che fare con i terremoti ☹

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Riferimenti del Libro I: Storia

ABAQUS User's Manual (1978). Hibbitt, Karlsson e Sorensen. Providence, RI.

Abdel Haleem, M. A. S. (2004). *The Qur'an: A New Translation*. Oxford World's Classics. Oxford: Oxford University Press.

Abe, Y. (2000). «Namazu-e no ue no Amaterasu». In: *Shiso*. Amaterasu above the catfish picture prints. Tokyo, pp. 25–52.

Accademia del Cimento (1667). *Saggi di naturali esperienze fatte nell'Accademia del Cimento*. Original Italian edition; English translation by W.E. Knowles Middleton, *The First Scientific Society*, 1971. Florence: Giunti.

Ackerman, J. S. (1949). «*ARS Sine Scientia Nihil EST*. Gothic Theory of Architecture at the Cathedral of Milan». In: *The Art Bulletin* 31.2, pp. 84–111.

Administration, F. H. (1969). *Silver Bridge Collapse Report*. Rapp. tecn. FHWA-RD-69-1. Investigation into the failure of the Silver Bridge, Point Pleasant, West Virginia. U.S. Department of Transportation.

Aimond, F. (1936). «Étude statique des voiles minces en paraboloide hyperbolique travaillant sans flexion». In: *Publications, International Association for Bridge and Structural Engineering (IABSE)* 4.

Al-Bīrūnī, A. R. (1910). *The Chronology of Ancient Nations*. Trad. da C. E. Sachau. An English version of the Arabic text of the Athār-ul-bākiya of Albīrūnī. London: W. H. Allen.

Alassi, S. (mar. 2019). *Jacob Bernoulli's Role in the History of Elasticity: From a Discussion with a Craftsman to the Discovery of the Elasticity Rules*. Presentation at the History of Mathematics Seminar, Mathematical Institute, University of Oxford.

– (2020). «From the Mechanics of Jacob Bernoulli to Digital History of Science. Infrastructure, Tools, and Methods». Tesi di dott. University of Basel.

Alberti, L. B. (1485). *De re aedificatoria; Catoria Libri Decem Leo*. Nicolaus Laurentii, Alamanus.

– (1988). *On the Art of Building in Ten Books*. Trad. da J. Rykwert e N. Leach. MIT Press.

Alberti, L. B. e G. Tiraboschi (1804). *Della pittura e della statua di Leonbatista Alberti*. Vol. 34. Società tip. de'Classici italiani.

Alexander, K. D., R. Mark e J. F. Abel (1977). «The structural behavior of medieval ribbed vaulting». In: *Journal of the society of architectural historians* 36.4, pp. 241–251.

Alexandria, H. of (1851). *The Pneumatics of Hero of Alexandria*. Trad. da B. Woodcroft. From the original Greek. London: Taylor Walton e Maberly.

COPIA DI REVISIONE

All-domain Anomaly Resolution Office (mag. 2024). *Effect of Forced Perspective and Parallax View on UAP Observations*. Information Paper. U.S. Department of Defense.
– (6 feb. 2025). *Case: "Go Fast": Case Resolution*. Case Resolution Report. U.S. Department of Defense.
Andrade, E. N. D. C. (1950). «Wilkins Lecture-Robert Hooke». In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series B-Biological Sciences* 137.887, pp. 153–187.
Anonymous (ago. 1724). «Celebre catenariae problema geometris denuo propositum, iis praesertim qui ex Soc. Reg. sunt, quae Parisiis florent & Londini; Parisiis ad collectores actorum erud. transmissum». In: *Acta Eruditorum* 43. Unsigned item (author not stated)., p. 366.
Antuña Bernardo, J. (2003). «Las estructuras de edificación de Eduardo Torroja Miret». Tesi di dott. *Universidad Politécnica de Madrid; Escuela Técnica Superior de Arquitectura*.
Ap, L. e N. G. Faia (2018). «Form Finding Techniques of Branched Construction Developed by Frei Otto». In: *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 59.1, pp. 60–67.
Archimedes (-250). *De Planorum Æquilibriis (On the Equilibrium of Planes)*. c. 250 BCE. English translation in *The Works of Archimedes*, ed. T. L. Heath, Cambridge University Press, 1897.
Archimedes e T. L. Heath (1897). *The Works of Archimedes*. Cambridge University Press.
Argyris, J. H. e S. Kelsey (1960). *Energy theorems and structural analysis*. Vol. 60. Springer.
Aristotle (2000). *Mechanica*. A cura di M. J. T. Lewis. Translated and introduced by Michael J. T. Lewis. Traditional attribution to Aristotle; authorship disputed. Oxford: Oxford University Press.
Arnold, D. (2003). *The Encyclopedia of Ancient Egyptian Architecture*. Princeton University Press.
Babbage, C. (1864). *Passages from the Life of a Philosopher*. London: Longman, Green, Longman, Roberts, e Green.
Backus, J. (1957). *The FORTRAN Automatic Coding System*. Rapp. tecn. New York: IBM.
Bacon, F. (2000). *Novum Organum*. Cambridge University Press.
Badami, A. (2012). «L'investimento in arte e cultura per fondare una città e generare una comunità a Gibellina. Intervista a Ludovico Corrao». In: *Archivio di Studi Urbani e Regionali* 105, pp. 66–86.
Bag, A. (2003). «Aryabhata's Contributions to Mathematics and Astronomy». In: *Indian Journal of History of Science* 38.2, pp. 123–135.
Baker, W. F. (1992). «Energy-based design of lateral systems». In: *Structural Engineering International* 2.2, pp. 99–102.
Baker, W. F. e A. McRobie, cur. (2025). *The Geometry of Equilibrium: James Clerk Maxwell and 21st-Century Structural Mechanics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, p. 322.
Baker, W. F., O. Skidmore et al. (2013). «Structural possibilities». In: *The tall buildings reference book*. Routledge, pp. 229–240.

COPIA DI REVISIONE

Baker, W. F. et al. (2015). «Structural Innovation: Combining Classic Theories with New Technologies». In: *Engineering Journal American Institute of Steel Construction* 52.3, pp. 203–217.

Balasubramaniam, R. (2000). «The Corrosion Resistance of the Iron Pillar of Delhi». In: *Current Science* 79.4, pp. 45–54.

Banū Mūsā ibn Shākir (850). *The Book of Ingenious Devices*. Arabic. Original Arabic manuscript, Baghdad. English translation in Donald R. Hill (ed. and trans.), *The Book of Ingenious Devices*, Dordrecht: Reidel, 1979. Baghdad: House of Wisdom.

Bardini, G. e G. M. Gianella (2014). «On the Evolution of the Idea of Curvature, from Newton to Gauss' Theorema Egregium». In: *Applied Mathematical Sciences* 8.167, pp. 8361–8376.

Barnes, J. (1984). *The Complete Works of Aristotle, Volume One: The Revised Oxford Translation*. Vol. 1. Princeton University Press.

Barrallo, J., S. Sanchez-Beitia e P. Onati (2005). «Mathematical Models of Gothic Structures». en. In: *Renaissance Banff: Mathemetics, Music, Art, Culture*, p. 8.

Bartholomew, A. (1840). *Specifications for Practical Architecture: Preceded by an Essay on the Decline of Excellence in the Structure and in the Science of Modern English Buildings: with the Proposal of Remedies for Those Defects*. J. Williams.

Bartlett, C. (2014). «The design of the Great Pyramid of Khufu». In: *Nexus Network Journal* 16.2, pp. 299–311.

Barzilai, S., cur. (1909). *Scilla e Cariddi: Pubblicazione dell'Associazione della Stampa Periodica Italiana a beneficio del Patronato Regina Elena per gli orfani del terremoto*. Contributions by Giovanni Verga, Luigi Capuana, Arthur Conan Doyle, Benedetto Croce, Antonio Fogazzaro and others. Published in aid of earthquake orphans following the Messina disaster of 28 December 1908. Roma: Tipografia Roma di E. Armani & W. Stein, p. 159.

Bažant, Ž. (1976). «Instability, Ductility and Size Effect in Strain Softening Concrete». In: *Journal of Engng. Mech., ASCE* 102.2, pp. 331–344.

– (1984). «Size Effect in Blunt Fracture: Concrete, Rock, Metal». In: *J. of Engineering Mechanics, ASCE* 110.4, pp. 518–535.

Bažant, Z. P. e Y. Zhou (2002). «Why did the world trade center collapse?—Simple analysis». In: *Journal of Engineering Mechanics* 128.1, pp. 2–6.

Beeckman, I. (1939). *Journal tenu par Isaac Beeckman de 1604 à 1634*. A cura di C. de Waard. 4 vols., 1939–1953. La Haye: Martinus Nijhoff.

Beghini, L. et al. (2014). «Connecting architecture and engineering through structural topology». In: *Engineering Structures* 59, pp. 716–726.

Behnia, M. A. (2021). «Sustainability and hydraulic design in ancient Persian qanats». In: *Journal of Hydraulic Engineering* 147.3.

Bendixen, A. (1914). *Die Methode der Alpha-Gleichungen zur Berechnung von Rahmenkonstruktionen*. Tedesco. [The Method of Alpha-Equations for the Analysis of Frame Structures]. Germany.

Benedetti, G. B. (1585). *Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber*. Original Latin text. Turin: Heirs of Melchior Sessa.

COPIA DI REVISIONE

Benouville, L. (1891). *Note sur l'effondrement de la voûte du chœur de la cathédrale de Beauvais (1284)*. Unpublished manuscript / report. Referenced in 19th-century architectural structural studies.

Benvenuto, E. (1991a). *An Introduction to the History of Structural Mechanics; Part I: Statics and Resistance of Solids*. Springer-Verlag.

– (1991b). *An introduction to the History of Structural Mechanics; Part II: Vaulted structures and Elastic Systems*. Springler-Verlag.

Bergsjö, C. e M. Pettersson (2016). *A Simulation of the Millau Viaduct*. Rapp. tecn. KTH, Royal Institute of Technology in Stockholm.

Berlyn, P. e C. Fowler (1851). *The Crystal Palace: Its Architectural History and Constructive Marvels*. London: James Gilbert.

Bernoulli, J. (dic. 1694). «Responsio ad Objectiones Clarissimi Hugenii de Curvatura Laminae Elasticae». In: *Acta Eruditorum*. Bernoulli's published reply to Christiaan Huygens's critique of the elastica, pp. 580–584.

– (1744). *Varia Posthuma*. A cura di N. I. Bernoulli. Posthumous mathematical works edited by Nicolaus (I) Bernoulli. Basel: H.A. Gosse & Soc.

Bernoulli, Daniel (1726). «1726. em Examen principiorum mechanicae et demonstrationes geometricae de compositione et resolutione virium. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 1, 126-142». In: *Die Werke* 3, pp. 119–135.

– (1738). *Hydrodynamica, sive de Viribus et Motibus Fluidorum Commentarii. Opus academicum ab auctore, dum Petropoli ageret, congestum*. Latin. With engraved title vignette and 12 folding plates. Argentorati: Sumptibus Johannis Reinholdi Dulseckeri, p. 304.

– (1744). «Methodus universalis determinandae curvaturae fili a potentiis quamcunque legem inter se observantibus extensi una cum solutione problematum quorundam novorum eo pertinentium». In: *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 3. Originally written in 1728; published in the 1744 Bologna edition, pp. 57–84.

– (1845). «The 26th letter to Euler». In: *Correspondance Mathématique et Physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle*. A cura di P. H. Fuss. Vol. 2. Letter originally dated October 1742. St. Petersburg: Imperial Academy of Sciences, p. 499.

Bernoulli, Jakob (1677–1705). *Meditationes*. Manuscript. Scientific diary manuscript, 367 pages, 287 entries. Available digitally at Bernoulli-Euler Online (BEOL). Basel University Library.

– (giu. 1690a). «Additamentum ad Specimen alterum calculi differentialis in dimetienda spirali logarithmica, loxodromis naturarum, & areis triangulorum sphaericorum». In: *Acta Eruditorum*. Contains the famous elastica challenge problem concerning the bending of elastic beams, presented in cipher, pp. 288–290.

– (mag. 1690b). «Problema funicularium (challenge on the curve of a hanging thread)». In: *Acta Eruditorum*. Short challenge notice; see also a follow-up item in the same year on p. 360., pp. 218–220.

– (1691). *Dialogue with a Craftsman. Didactic exchange preceding the elastica challenge*. In *Acta Eruditorum*, Leipzig. Often cited as an introductory "dialogue" attached to Bernoulli's

COPIA DI REVISIONE

early announcements on the elastica (1691–1694). No separate standalone edition is known.

Bernoulli, Jakob (1692). *Quadratura curvae, e cujus evolutione describitur inflexae laminae curvatura*. BirkhauserMed. CLXX; Ref. UB: L Ia 3. Die Werke von Jakob Bernoulli.

– (giu. 1694). «Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus». In: *Acta Eruditorum*. Includes Bernoulli's solution of the elastica and the "Golden Theorem"; reprinted in *Opera* (1744), pp. 576–600., pp. 262–276.

– (1744a). «Jacobi Bernoulli Basileensis Opera, vol 1». In: *Geneve: Cramer-Philibert*.

– (1744b). *Jacobi Bernoulli, Basileensis, Opera*. Latin e French. A cura di G. Cramer. 2 voll. Posthumous collected works, excluding *Ars Conjectandi*. Contains *Varia posthuma* and biography by J.J. Battier (1705). Geneva: sumptibus hæredum Cramer & fratrum Philibert.

– (1855). «Letter to G. W. Leibniz, December 1687». In: *Die Mathematischen Werke von Jakob Bernoulli*. A cura di C. I. Gerhardt. Vol. 3. Originally written in 1687; first published in this 1855 edition. Leipzig: B. G. Teubner, pp. 1–5.

Bernoulli, Johann (giu. 1696). «Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur». In: *Acta Eruditorum* 15. Announcement of the brachistochrone (curve of fastest descent) problem, pp. 269–271.

Bernoulli, Johann (1691a). *Integral Calculus. Lectiones mathematicae de methodo integralium, aliisque; conseriptae in usum Ill. Marchionis Hopitalii, cure auctor Parisiis ageret annis*. In Opera III.

– (1691b). «Letter to Leibniz». In: *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*. A cura di Spiess, Otto. Vol. 1. Basel: Birkhäuser.

– (giu. 1691c). «Solutio problematis funicularii». In: *Acta Eruditorum*, pp. 274–276.

– (giu. 1697a). «Curvatura radii in diaphanis non uniformibus: Solutio problematis brachistochrona». In: *Acta Eruditorum*. Solution to the brachistochrone problem, showing the curve of fastest descent is a cycloid, pp. 269–271.

– (gen. 1697b). *Programma [extending the brachistochrone challenge]*. Extension of the brachistochrone challenge deadline to Easter 1697. Groningen.

– (1713). *Opera Omnia*. Collected works including contributions to calculus and mechanics. Lausanne e Geneva: Apud Marcum-Michaelem Bousquet & socios.

– (1725). «Lettre de Bâle du 26 Janvier 1717». In: *Nouvelle Mécanique ou Statique*. A cura di P. Varignon. Vol. 2. Contains Johann Bernoulli's 1717 letter on virtual velocities. Paris: Claude Jombert. Cap. Section IX, pp. 174–176.

Billington, D. (1965). *Thin Shell Concrete Structures*. Princeton University: McGraw-Hill, Inc.

Billington, D. (1979). *Robert Maillart's Bridges; The art of Engineering*. Princeton University Press.

– (1983a). *Structural Studies*. Rapp. tecn. Department of Civil Engineering, Princeton University.

– (1983b). *The Tower and the Bridge*. Princepton University Press.

COPIA DI REVISIONE

Billington, D. (1984a). *Structures and the Urban Environment*. Rapp. tecn. Lecture notes, CE 262. Department of Civil Engineering, Princeton University.
– (1984b). *Structures and the Urban Environment*. Rapp. tecn. Catalogue and Commentary on the slides. Department of Civil Engineering, Princeton University.
Billington, D. e R. Mark, cur. (1970). *Civil Engineering–history, Heritage, and the Humanities: Background Papers from the First National Conference on Civil Engineering–History, Heritage and the Humanities*. Department of Civil Engineering, Princeton University.
Billington, D., R. Mark e J. Abel, cur. (1972). *The Maillart Papers: From the Second National Conference on Civil Engineering: History, Heritage and the Humanities: Commemorating the Hundredth Anniversary of the Birth of Robert Maillart*. Department of Civil Engineering, Princeton University.
Blaikie, P. et al. (1994). *At Risk: Natural Hazards, People's Vulnerability and Disasters*. London: Routledge.
Blasjo, V. (2017). *Transcendental curves in the Leibnizian calculus*. Academic Press.
Boller, G. e P. D'Acunto (2021). «Structural design via form finding: Comparing Frei Otto, Heinz Isler and Sergio Musmeci». In: *History of Construction Cultures*, pp. 431–438.
Boller, G. e J. Schwartz (2020). «Modelling the form. Heinz Isler, Frei Otto and their approaches to form-finding». In: *Proceedings of Seventh Conf. Constr. Hist. Soc.,(3-5 April 2020, Cambridge, UK)*, pp. 565–76.
Bony, J. (1983). *French Gothic Architecture of the Twelfth and Thirteenth Centuries*.
Bos, H. J. M. (1974). «Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus». In: *Archive for history of exact sciences* 14.1, pp. 1–90.
Bourdais, J. (1881). *Projet de phare monumental pour Paris, élévation*. Original drawing, Musée d'Orsay, Paris.
Boyer, C. B. e U. C. Merzbach (2011). *A history of mathematics*. John Wiley & Sons.
Brackenridge, J. B. (1992). *The critical role of curvature in Newton's developing dynamics*.
Brand, D. e H. Nicholson (2013). «Learning from Lisbon: Contemporary cities in the aftermath of natural disasters». In: *Approaches to Disaster Management-Examining the Implications of Hazards, Emergencies and Disasters*. IntechOpen.
Branner, R. (1962). *Le Maitre de la cathédrale de Beauvais*. Vol. II, pp. 77–92.
– (1997). «The Collapse of the Tower and Choir at Beauvais Cathedral». In: *The Engineering of Medieval Cathedrals*. A cura di R. Mark e P. Mellars. Ashgate, pp. 141–158.
Bravais, A. (1850). «Mémoire sur les systèmes formés par des points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace». In: *Journal de l'École Polytechnique* 19, pp. 1–128.
– (1866). *Etudes cristallographiques*. Gauthier-Villars.
Brew, J. S. (2007). «Computational Analysis of Heinz Isler's Shell Structures». In: *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium*. Venice, Italy, pp. 1–8.
Broad, W. J. (2006). *The Oracle: Ancient Delphi and the Science Behind Its Lost Secrets*. Penguin Books.

COPIA DI REVISIONE

Brodini, A. (2013). «Le coperture a grande luce nell'opera di Sergio Musmeci». In: *La concezione strutturale: ingegneria e architettura in Italia negli anni cinquanta e sessanta*. A cura di P. Desideri et al. U. Allemandi, pp. 253–262.
Brownbridge, A. (1986). *Ancient Chinese Bridge Architecture*. Asian Historical Press.
Brühwiler, E. (2010). «Eminent Structural Engineer: Christian Menn—Bridge Designer and Builder». In: *Structural Engineering International* 20.4, pp. 470–472.
Bukowski, J. (2008). «Christiaan Huygens and the Problem of the Hanging Chain». In: *The College Mathematics Journal* 39.1, pp. 2–11.
Buridan, J. (1971). *John Buridan: Quaestiones super libros De caelo et mundo*. A cura di J. Hubert. Latin text. Paris: Vrin.
– (1991). *John Buridan: Questions on the Eight Books of Aristotle's Physics*. A cura di M. Clagett. Latin text with English translation. Madison: University of Wisconsin Press.
Bush, V. (1931). «The Differential Analyzer. A New Machine for Solving Differential Equations». In: *Journal of the American Society of Mechanical Engineers* 53, pp. 107–116.
Butzer, K. W. (1976). «Early Hydraulic Civilization in Egypt: A Study in Cultural Ecology». In: *University of Chicago Press* 11, pp. 123–145.
Cannone, M. e S. Friedlander (2003). «Navier: blow-up and collapse». In: *Notices of the AMS* 50.1, pp. 7–13.
Capecchi, D., G. Ruta e P. Trovalusci (2010). «From classical to Voigt's molecular models in elasticity». In: *Archive for history of exact sciences* 64.5, pp. 525–559.
Carnot, L. (1783). *Essai sur les machines en général*. First edition. Published anonymously as "par un officier du Corps Royal du Génie." Second edition with author's name: Dijon: Defay; Paris: Nyon, 1786. Dijon: [s.n.]
– (1803). *Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement*. Substantially revised and expanded version of the *Essai sur les machines en général* (1783). Paris: Deterville.
Castigliano, A. (1879). *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*. Vol. 1. AF Negro.
Cauchy, A. L. (1822). «Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques». In: *Bulletin de la Société Philomatique de Paris*, pp. 9–13.
– (1823). «Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques». In: *Exercices de Mathématiques*. Vol. 2. Paris: De Bure Frères, pp. 42–56.
– (1827). *Exercices de mathématiques*. Vol. 2. Contains key papers on elasticity theory. Paris: De Bure Frères.
– (1828). «Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique ou non élastique». In: *Exercises de Mathematiques*. Vol. 3. De Bure Frères, pp. 160–187.
– (1829). «Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle». In: *Exercices de Mathématiques*. Vol. 4. Paris: De Bure Frères, pp. 129–139.
– (1841). *Oeuvres Complètes de Cauchy*. Gauthier-Villars.

COPIA DI REVISIONE

Caus, S. de (1615). *Les Raisons des Forces Mouvantes avec Diverses Machines tant Utilles que Plaisantes*. Treatise on hydraulics and mechanics; introduced the term "Travail" (work) for force times displacement. Second edition Paris, 1624. Frankfurt: Jan Norton.
Charle, C. (2004). «Le scandale de Panama: Une affaire d'État à la fin du XIXe siècle». In: *Revue Historique* 312.4, pp. 847–872.
Charlton, T. M. (1982). *A History of Theory of Structures in the Nineteenth Century*. Cambridge: Cambridge University Press.
Châtelet, É. du (1740). *Institutions de Physique*. Paris: Prault.
Chen, P. W. e L. E. Robertson (1972). «Human perception thresholds of horizontal motion». In: *Journal of the structural division* 98.8, pp. 1681–1695.
Child, J. (1920). *The Early Manuscripts of Leibniz*. Translations of various latin manuscripts of Leibniz. Chicago, London: The Open Court Publishing Company, p. 238.
Chilton, J. e H. Isler (2000). *The architecture of Heinz isler*. Thomas Telford.
Ching, F. D. (2011). *A visual dictionary of architecture*. John Wiley & Sons.
Chiorino, C. e C. M. Olmo (2010). *Pier Luigi Nervi: l'architecture comme défi*. Silvana Editoriale.
Cité de l'architecture & du patrimoine (apr. 2015). *La Cité radieuse: 1945-1952, Marseille, Le Corbusier*. Francese. Rapp. tecn. Museum educational resource produced for the Éduthèque platform. Paris: Cité de l'architecture & du patrimoine, p. 12.
Clagett, M. (1964). «Nicole Oresme and Medieval scientific thought». In: *Proceedings of the American Philosophical Society* 108.4, pp. 298–309.
– (1995). *Ancient Egyptian Science: A Source Book. Volume Two: Calendars, Clocks, and Astronomy*. American Philosophical Society.
– (1999). *Ancient Egyptian Science, Vol. 3: Ancient Egyptian Mathematics*. Philadelphia: American Philosophical Society.
Clapeyron, B.-P.-E. (1834). «Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur». In: *Journal de l'École Polytechnique* 14.23. Work completed 1833; published 1834, pp. 153–190.
Clapeyron, B. (1857). «Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés». In: *Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences* 45, pp. 1076–1080.
Clark, E. e R. Stephenson (1850). *The Britannia and Conway Tubular Bridges: With General Inquiries on Beams and on the Properties of Materials Used in Construction*. Vol. 2. London: Day, Son e John Weale.
Clausius, R. (1850). «Ueber die bewegende Kraft der Wärme und die Gesetze, welche sich daraus für die Wärmelehre selbst ableiten lassen». In: *Annalen der Physik* 155.3, pp. 368–397.
– (1854). «Über eine veränderte Form des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie». In: *Annalen der Physik* 169.12, pp. 481–506.
– (1879). *The Mechanical Theory of Heat*. Trad. da T. A. Hirst. 2nd. Translation of *Die mechanische Wärmetheorie*. London: Macmillan.
Clebsch, A. (1862a). *Theorie der elasticität fester körper*. BG Teubner.
– (1862b). *Theorie der Elasticität fester Körper*. Posthumously edited by Gustav Kirchhoff. Leipzig: B.G. Teubner.

COPIA DI REVISIONE

Clebsch, A. (1866). *Théorie de l'élasticité des corps solides*. A cura di B. de Saint-Venant. Traduit de l'allemand et annoté avec des additions par M. Barré de Saint-Venant. Paris: Mallet-Bachelier.
Clough, R. W. (1960). «The finite element method in plane stress analysis». In: *Proceedings of 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, Pittsburgh Pa., Sept. 8 and 9, 1960*.
– (1962). *The stress distribution of Norfork Dam*. Rapp. tecn. California Univ Berkeley Institute of Engineering Research.
– (2004). «Early history of the finite element method from the view point of a pioneer». In: *International journal for numerical methods in engineering* 60.1, pp. 283–287.
Clough, R. W. e E. L. Wilson (1999). «Early finite element research at Berkeley». In: *Fifth US National Conference on Computational Mechanics*, pp. 1–35.
Clough, R. e J Penzien (1975). *of Structures*. McGraw-Hill.
Clough, R. e E. Wilson (1962). «Stress analysis of a gravity dam by the finite element method». In: *Proc. Symposium on the Use of Computers in Civil Engineering*. Laboratorio Nacional de Engenliaria Civil, Lisbon, Portugal.
Coe, M. D. (2005). *The Maya*. Thames & Hudson.
Cohen, I. B. (2002). «Newton's concepts of force and mass, with notes on the Laws of Motion». In: *The Cambridge Companion to Newton*. A cura di I. Cohen e G. Smith.
– (2013). *Introduction to Newton's "Principia"*. Harvard University Press.
Coleman, B. D. e W. Noll (1963). «The Thermodynamics of Elastic Materials with Heat Conduction and Viscosity». In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 13.1, pp. 167–178.
Como, M. (2013). *Statics of historic masonry constructions*. Vol. 1. Springer.
Coolidge, J. L. (1952). «The unsatisfactory story of curvature». In: *The American Mathematical Monthly* 59.6, pp. 375–379.
Copernicus, N. (1995). *On the Revolutions of the Heavenly Spheres*. Prometheus Books.
Corazzi, R. (2012). «La curva "lossodromica" e la spina pesce». In: *DISEGNARECON*, pp. 85–92.
Corbusier, L. (1954). *The modulor: a harmonious measure to the human scale universally applicable to architecture and mechanics*. Vol. 1. Harvard University Press.
– (1955). *Le Modulor 2*. Paris: Éditions de l'Architecture d'Aujourd'hui.
Corbusier, L. e P. Jeanneret (1929). «Les cinq points d'une architecture nouvelle». Francese. In: *Œuvres complètes 1910–1929*. A cura di W. Boesiger. First delivered as a lecture at the Weissenhof Siedlung, Stuttgart, in 1927; reprinted in later editions of the Œuvre complète. Erlenbach-Zurich: Les Éditions d'Architecture.
Corporation, S. R. (1951). *UNIVAC I System Description*. Rapp. tecn. New York: Sperry Rand.
Coulomb, C (1773a). «Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture». In: *Mémoires de Mathématique et de Physique, présentés à l'Académie Royale des Sciences*. Foundational work on earth pressure and slope stability, pp. 343–382.

COPIA DI REVISIONE

Coulomb, C. (1773b). «*Essai sur une application de maximis & minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture*». In: *mémoires de l'académie Royale des Sciences* 7, pp. 343–382.
– (1773c). «Mémoires de mathématique et de physique». In: *Academie Royale des Sciences* 7.
Courant, R (1943). «Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations». In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 49, pp. 1–23.
Cross, H. (1932). «Analysis of continuous frames by distributing fixed-end moments». In: *Transactions of the American Society of Civil Engineers* 96.1. *Includes all subsequent discussions*, pp. 1–78.
– (1936). *Analysis of flow in networks of conduits or conductors*. Rapp. tecn. University of Illinois at Urbana Champaign, College of Engineering . . .
Cross, H. e N. D. Morgan (1932). *Continuous frames of reinforced concrete*. J. Wiley & Sons, Incorporated.
Crotti, F. (1888). *La Teoria dell'Elasticità ne' suoi Principi Fondamentali e nelle sue Applicazioni Pratiche alle Costruzioni*. Milan: Ulrico Hoepli.
Crowe, M. J. (1994). *A history of vector analysis: The evolution of the idea of a vectorial system*. Courier Corporation.
Culmann, K. (1866). *Die Graphische Statik*. Meyer e Zeller, Zürich.
Cumming, J. E. (2001). «Brumel, Antoine». In: *The New Grove Dictionary of Music and Musicians*. A cura di S. Sadie. 2ª ed. Vol. 4. London: Macmillan, pp. 485–490.
Curatola, G. e G. Scarcia (2003). *Persepolis: The Great Stairway*. Getty Publications.
Currà, E. e M. Russo (2018). «Reinforced concrete in Italy through the works of two generations of engineers: Mario and Giorgio Baroni». In: *6th International Congress on Construction History (6ICCH 2018):"Building Knowledge, Constructing Histories*, pp. 9–13.
Da Vinci, L. (1490). *Códice de Madrid I*. Biblioteca Nacional de España.
– (1505). *Codex Atlanticus*. Pinacota Ambrosania, Milan.
d'Alembert, J. l. R. (1743). *Traite de dynamique*. First edition. Collation: [4], xxvi, [2], 186, [2]. With 4 folding engraved plates. Paris: David l'aine.
D'Alembert, J. l. R. (1747). «Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration». In: *Histoire de l'Académie royale des sciences et belles lettres de Berlin* 3, pp. 214–219.
Daley, S. (2013). «A Star Architect Leaves Some Clients Fuming». In: *The New York Times*.
Daniels, P. T. e W. Bright, cur. (1996). *The World's Writing Systems*. New York: Oxford University Press.
Davis, M. (2018). *The universal computer: The road from Leibniz to Turing*. AK Peters/CRC Press.
De Belidor, B. (1729). *Architecture hydraulique ou l'Art de conduire, d'élever et de ménager les eaux pour les différens besoins de la vie*. C. Jombert.
De Boer, J. Z. e D. T. Sanders (2005). *Earthquakes in Human History: The Far-Reaching Effects of Seismic Disruptions*. Princeton University Press.

COPIA DI REVISIONE

De Honnecourt, V. (1858). *Album de Villard de Honnecourt, architecte du XIIIe siècle: manuscrit publié en fac-simile, annoté, précédé de considérations sur la renaissance de l'art français au XIXe siècle et suivi d'un glossaire*. Imprimerie Imperiale.
– (2006). *The Medieval Sketchbook of Villard de Honnecourt*. A cura di T. Bowie. Reprints the 1959 Indiana University Press edition (introduction and captions by Theodore Bowie), using plates from R. Willis's 1859 English facsimile, which in turn reproduces the engraved plates of the 1858 Lassus & Darcel edition (De Honnecourt, 1858). Dover Publications.
De l'Orme, P. (1561). *Nouvelles inventions pour bien bastir et a petits fraiz*. Francese. Illustrated treatise presenting geometric and constructive rules for economical building, including proportional design methods. Paris: Federic Morel.
Deakin, R. (2007). «Catenary Curve». In: Technical paper on the mathematical derivation of the catenary.
DeJong, M. J. (2009). «Seismic assessment strategies for masonry structures». Tesi di dott. Massachusetts Institute of Technology.
Descartes, R. (1637a). *Discours de la méthode*. Originally published with *La Géométrie*, *La Dioptrique*, and *Les Météores*. Leiden: Jan Maire.
– (1897a). *Oeuvres de Descartes*. A cura di C. Adam e P. Tannery. 11 vols., 1897–1913. Paris: Léopold Cerf; later Vrin/CNRS reprints.
Descartes, R. (1898). *Oeuvres de Descartes*. Vol. 2: *Correspondance, mars 1638 – decembre 1639*. A cura di C. Adam e P. Tannery. Paris: Leopold Cerf.
Descartes, R. (1927). *Selections*. C. Scribner's sons.
Descartes, R. (1637b). *La Géométrie*. Leiden: Jean Maire.
– (1644). *Principia Philosophiae*. English title: Principles of Philosophy. Part II contains the laws of motion and conservation principles. Amsterdam: Ludovicus Elzevirius.
– (1897b). *Correspondance de René Descartes*. A cura di C. Adam e P. Tannery. Vol. 2. Œuvres de Descartes. Letter to Marin Mersenne, 11 October 1638, pp. 542–544. Paris: Léopold Cerf.
Desideri, P. et al. (2013). *La concezione strutturale: ingegneria e architettura in Italia negli anni cinquanta e sessanta*. U. Allemandi.
Devlin, K. (2011). *The Man of Numbers: Fibonacci's Arithmetic Revolution*. New York: Walker & Company, p. 192.
Diderot, D. e J. l. R. d'Alembert (1751). *Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*. First volume published 1751; final volume 1772. Paris: Briasson, David e Le Breton, Durand.
Dirac, P. A. M. (1963). «The Evolution of the Physicist's Picture of Nature». In: *Scientific American* 208.5. Based on a 1958 lecture; includes Dirac's comments on religion and primitive explanations of nature, pp. 45–53.
Downey, G. (1946). «Byzantine Architects, their Training and Methods». In: *Byzantion* 18, pp. 99–118.
Dragicevic, P. e Y. Jansen (2012). *List of Physical Visualizations*. Last accessed 2022-03-30.

COPIA DI REVISIONE

Dragoni, M. (2005). *Terrae motus. La sismologia da Eratostene allo tsunami di Sumatra*. Frontiere. Torino: UTET Libreria. 394 pp.
Drake, S. (1970). *The Genesis of Fluid Mechanics 1640–1780*. Vol. 6. Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences. New York: Springer-Verlag.
– (1976). «A further reappraisal of impetus theory: Buridan, Benedetti, and Galileo». In: *Studies in History and Philosophy of Science Part A* 7.4, pp. 319–336.
Dreyfuss, H. (1960). *The Measure of Man: Human Factors in Design*. New York: Whitney Library of Design.
Dugas, R. (1988). *A history of mechanics*. Courier Corporation.
Dugas, R. (1955). *A History of Mechanics*. Dover Publications.
Duhem, P. (1891). *Hysteresis dans les phénomènes capillaires. Application de la thermodynamique à la mécanique des fluides*. Paris: Gauthier-Villars.
– (1893). *Introduction à la mécanique chimique*. Paris: Carré.
– (1911). *Traité d'énergétique ou de thermodynamique générale*. Vol. 2. Paris: Gauthier-Villars.
d'Alembert, J (1761). «Démonstration du principe de la composition des forces». In: *Opuscules mathématiques* 1, pp. 169–179.
– (1773). «Nouvelle démonstration du parallélogramme des forces». In: *Opuscules mathématiques* 6, pp. 360–370.
D'Ayala, D. e E Tomasoni (2008). «The structural behaviour of masonry vaults: Limit state analysis with finite friction». In: *Structural Analysis of Historic Construction: Preserving Safety and Significance, Two Volume Set*. CRC Press, pp. 67–82.
Eagar, T. W. e C. Musso (2001). «Why did the World Trade Center collapse? Science, engineering, and speculation». In: *Jom* 53.12, pp. 8–11.
Eckert, J. P. e J. W. Mauchly (1946). *Description of the ENIAC and the ENIAC Project*. Rapp. tecn. Philadelphia: University of Pennsylvania.
Einstein, A. (1935). «Emmy Noether». In: *The New York Times*. Obituary letter to the editor.
– (1954). *Ideas and Opinions*. Originally compiled from Mein Weltbild (1934), translated by Sonja Bargmann. Includes essay "On the 300th Anniversary of Galileo's Death." New York: Crown Publishers.
Elizalde, R. R. (2025). «Beauvais Cathedral: The Ambition, Collapse and Legacy of Gothic Engineering». In: *Heritage* 8.6, p. 203.
Engesser, F. (1889). «Über den Satz vom Minimum der Ergänzungsarbeit». In: *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure* 33, pp. 927–928.
Eshelby, J. (1970). «Energy Relations and the Energy-Momentum Tensor in Continuum Mechanics». In: *Inelastic Behavior of Solids*. A cura di M. Kanninen et al. New York, N.Y.: McGraw-Hill, pp. 77–115.
Espion, B. (2016). «Pioneering hypar thin shell concrete roofs in the 1930s». In: *Beton-und Stahlbetonbau* 111.3, pp. 159–165.
Établissements Eiffel, C. des (19th Century). *Historical Works and Projects of the Eiffel Company*. French. Founded by Gustave Eiffel in 1866, famous for the Eiffel Tower and other engineering achievements.
Euclid e T. L. Heath (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Dover Publications.

COPIA DI REVISIONE

Euler, L. (1728). «*Solutio problematis de invenienda curva, quam format lamina utcunque elastica in singulis punctis a potentiis quibuscunque sollicitata*». In: *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 3, pp. 64–77.
– (1732). «*Solutio problematis de invenienda curva, quam format lamina utcunque elastica in singulis punctis a potentiis quibuscunque sollicitata*». In: *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, pp. 70–84.
– (1741). «Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis». In: *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 8, pp. 128–140.
– (1744a). «Additamentum I: De curvis elasticis». In: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*. A cura di C. Carathéodory. Vol. 24. Leonhardi Euleri Opera Omnia, Series I. Reprint of the 1744 Lausanne and Geneva edition with editorial notes. Basel: Birkhäuser, pp. 231–308.
– (1744b). *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*. Euler's definitive formulation of the elastica, building on the earlier work of Jakob Bernoulli and Daniel Bernoulli. Lausanne e Geneva: Marcum-Michaelem Bousquet & Socios, pp. 245–297.
– (1748). *Introductio in analysin infinitorum*. 2 volumes. Enestrom Index E101–E102. Lausanne: Marcum-Michaelem Bousquet.
– (1757a). «Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides». In: *Opera Omnia*. Vol. 12. Series 2. Basel: Orell Füssli, pp. 92–132.
– (1757b). *Principes généraux du mouvement des fluides*. Vol. 11. Presented 1755; published 1757, pp. 274–315.
– (1759). «Sur la force des colonnes». In: *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin* 13. Enestrom number E238. Original French version of Euler's classic column buckling paper., pp. 252–282.
– (1760). «De motu rectilineo tremulo linearum». In: *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* 6. Reprinted in *Opera Omnia*, Series II, Volume 10, pp. 315–347, pp. 208–242.
– (1771). « *Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flesibilium quam elasticorum*». In: *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, pp. 381–413.
– (1780). «De formulis differentialibus, quas frustra hactenus quaesivit geometria flexionum et tensionum». In: *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*. Reprinted in *Opera Omnia*, Series II, Volume 10, pp. 559–586, pp. 36–61.
– (1862). «De oscillationibus annulorum elasticorum». In: *Opera Postuma*, pp. 129–131.
Evans, J. (1998). *The History and Practice of Ancient Astronomy*. Oxford University Press.
Felippa, C. A. (2001). «A historical outline of matrix structural analysis: a play in three acts». In: *Computers & Structures* 79.14, pp. 1313–1324.
Fernández Casado, C. (1980). *Historia del puente en España: Puentes romanos*. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.
Ferrers, N. M., cur. (1871). *Mathematical Papers of George Green*. London: Macmillan.
Fishman, R. (1982). *Urban Utopias in the Twentieth Century: Ebenezer Howard, Frank Lloyd Wright, Le Corbusier*. MIT press.

COPIA DI REVISIONE

Fletcher, R. (2004). *The cross and the crescent: the dramatic story of the earliest encounters between Christians and Muslims*. Penguin UK.
Florensky, P. (1996). *Beyond Vision: Essays on the Perception of Art*. Trad. da W. Salmond. London: Reaktion Books.
Fondazione Amelio (1987). *Terrae Motus: Naples, Tremblement de Terre*. italian, french. Exhibition catalogue, Grand Palais, Paris, 28 March – 11 May 1987. Naples: Guida, p. 302.
Forty, A. (2013). «Happy Ghost of a Possible City: Il Cretto, Gibellina». In: *AA Files* 66, pp. 101–108.
Foundation, P. S. (2001). *Python Language Reference, Version 2.0*. Python 2.0 release documentation.
Fourier, J.-B. J. (1822). *Théorie analytique de la chaleur*. Paris: Firmin Didot.
Fourier, J. (1798). «Mémoire sur la Statique, Contenant la Démonstration du Principe des Vitesses Virtuelles». In: *Journal de l'École Polytechnique* 5. Reprinted in *Œuvres de Fourier*, ed. G. Darboux, Gauthier-Villars, Paris, 1888–1890, pp. 20–60.
Fraser, C. G. (1991). «Mathematical technique and physical conception in Euler's investigation of the elastica». In: *Centaurus* 34.3, pp. 211–246.
Freedberg, D. (2003). *The eye of the lynx: Galileo, his friends, and the beginnings of modern natural history*. University of Chicago Press.
Galerkin, B. G. (1915). «Series solution of some problems of elastic equilibrium of rods and plates». In: *Vestnik inzhenerov i tekhnikov* 19.7, pp. 897–908.
Galilei, G. (1594). *Le mecaniche*. A cura di A. Favaro. Vol. 2. Edizione Nazionale; cite "Della vite", p. 185 for the "quanto si guadagna di forza ..." passage. Firenze: Barbera.
– (1623). *Il Saggiatore*. The Assayer. Rome: Giacomo Mascardi.
– (1632). *"Dialogue Concerning the Two Chief World Systems: Ptolemaic and Copernican"*. Originally published by Elzevir, The Neterlands, 1638. Translation by Stillman Drake and Foreword by Albert Einstein. University of California press.
– (1638). *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno à due nuove scienze*. English translation: *Dialogues Concerning Two New Sciences*. Leiden: Elzevir.
Galilei, G. e S. Drake (1990). «Discoveries and opinions of Galileo: including The starry messenger (1610), Letter to the Grand Duchess Christina (1615), and excerpts from Letters on sunspots (1613), The assayer (1623)». In: *New York: Anchor Books*.
Gallagher, R. (1964). *A Correlation Study of Methods of Matrix Structural Analysis*. AGARDograph 69. Report to the 14th Meeting, Structures and Materials Panel, AGARD, NATO. Oxford: Pergamon Press.
– (1975). *Finite Element Analysis Fundamentals*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.
Gauthey, E.-M. (1813). *Œuvres de M. Gauthey: Traité de la construction des ponts*. Vol. 2. Firmin Didot.
Gautier, H. (1765). *Traité des ponts*. Vol. 1. Veuve Duchesne.
Gehry, F., M. Lloyd e D. Shelden (2020). «Empowering design: Gehry partners, Gehry technologies and architect-led industry change». In: *Architectural Design* 90.2, pp. 14–23.

COPIA DI REVISIONE

George, A. R. (1993). *House Most High: The Temples of Ancient Mesopotamia*. Winona Lake, IN: Eisenbrauns.
Germain, S. (1821). *Recherches sur la Théorie des Surfaces Élastiques*. Paris: Courcier.
Giacomoni, P., cur. (2005). *La Terra Trema*. Kozach Collection. Rovereto: Museo Arte Moderna e Contemporanea.
Gillings, R. J. (2019). «Mathematics in the Time of the Pharaohs». In: *Mathematics*. Chapman e Hall/CRC, pp. 9–17.
Giorgio Martini, F. di (ca. 1480). *Trattati di architettura, ingegneria e arte militare*. Manuscript treatise on architecture, engineering, and military art, written ca. 1478–1490.
Girard, A. (1634). «Notes et annotations (sur les cordes pendantes)». French. In: *Les Oeuvres mathématiques*. Marginal annotation by Girard in Stevin's posthumous work. Leiden: Bonaventure & Abraham Elzevier.
Girard, P.-S. (1798). *Traité analytique de la résistance des solides*. One of the earliest systematic treatments of structural mechanics, providing illustrative diagrams of Galileo's and Mariotte's theories. Paris: Imprimerie de la République.
Gleick, J. (2016). *Time Travel: A History*. Pantheon.
Goldberg, J. E. (1934). «Wind stresses by slope deflection and converging approximations». In: *transactions of the American Society of Civil Engineers* 99.1, pp. 962–975.
Goodman, R. E. (1999). *Karl Terzaghi: The Engineer as Artist*. Contains a detailed account of the Terzaghi–Fillunger dispute and its historical context. Reston, VA: ASCE Press.
Goss, V. G. A. (2009). «The history of the planar elastica: insights into mechanics and scientific method». In: *Science & Education* 18.8, pp. 1057–1082.
Graczykowski, C. e T. Lewiński (2010). «Michell cantilevers constructed within a half strip. Tabulation of selected benchmark results». In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 42.6, pp. 869–877.
Graham, A. (1978). *The Mohist Canon*. Cambridge University Press.
Graham, H. D. e N. Diamond (2004). *The rise of American research universities: Elites and challengers in the postwar era*. JHU Press.
Grant, E. (1977). *Physical science in the middle ages*. Cambridge University Press.
Grattan-Guinness, I. (1990). *Convolutions in French Mathematics, 1800–1840*. 3 voll. Excellent on the French school. Basel: Birkhäuser.
Gravesande, W. J. (1722). *Essai d'une nouvelle theorie sur le choc des corps, fondee sur l'experience*. Also issued in the *Journal litteraire de La Haye*, tome XII, pp. 1–54 (1722). La Haye: T. Johnson.
Greco, C. (2008). *Pier Luigi Nervi: dai primi brevetti al palazzo delle esposizioni di Torino 1917-1948*. Quart Verlag.
Green, G. (1828). *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*. Reprinted in *Mathematical Papers of George Green*, edited by N. M. Ferrers, London: Macmillan, 1871. Nottingham: T. Wheelhouse.
– (1837). «On the Reflection and Refraction of Light at the Common Surface of Two Non-Crystallized Media». In: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 7, pp. 1–24.

COPIA DI REVISIONE

Green, G. (1839a). «On the Laws of Reflection and Refraction of Light at the Common Surface of Two Non-Crystallized Media». In: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 7, pp. 1–24.
– (1839b). «On the Reflection and Refraction of Light at the Common Surface of Two Non-Crystallized Media». In: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 7, pp. 1–24.
– (1842). «On the Propagation of Light in Crystallized Media». In: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 7, pp. 121–140.
Guidoboni, E. e J.-P. Poirier (2004). *Quand la Terre Tremblait*. Paris: Odile Jacob.
Hall, A. R. (1951). *Robert Hooke and horology*.
Halpern, A., D. Billington e S. Adriaenssens (2013). «The ribbed floor slab systems of Pier Luigi Nervi». In: *Proceedings of IASS Annual Symposia*. International Association for Shell e Spatial Structures (IASS), pp. 1–7.
Hardy, A. (2007). *The Indian Temple: Architecture and Engineering*. Oxford University Press.
Harvey, W. (1628). *Exercitatio Anatomica de Motu Cordis et Sanguinis in Animalibus*. An Anatomical Exercise on the Motion of the Heart and Blood in Living Beings. Frankfurt: Guilielmi Fitzeri.
Hassan Fangary, A. A. (2010). «Graphics analysis of gothic vaults». M.S. Thesis. Universitat Politècnica de Catalunya.
Haytham, I. al (1989). *The Optics of Ibn al-Haytham: Books I–III on Direct Vision*. Trad. da A. I. Sabra. Vol. 40. Studies of the Warburg Institute. London: Warburg Institute.
Herodotus (1921). *The Persian Wars*. Trad. da A. D. Godley. Vol. 2. Loeb Classical Library 118. Book IV.87–88 (Darius' bridge over the Bosporus, built by Mandrocles of Samos). Cambridge, MA: Harvard University Press.
Heyman, J. (1998a). *Structural analysis; A historical approach*. Cambridge University Press.
Heyman, J. (1966). «The stone skeleton». In: *International Journal of Solids and Structures* 2.2, pp. 249–279.
– (1967). «Beauvais cathedral». In: *Transactions of the Newcomen Society* 40.1, pp. 15–35.
– (1982). *The Masonry Arch*. Ellis Horwood Series in Engineering Science. Chichester: Ellis Horwood.
– (1997). *The Stone Skeleton: Structural Engineering of Masonry Architecture*. en. Cambridge University Press.
– (1998b). *Structural Analysis; A Historical Approach*. Cambridge University Press.
– (2003). «Truesdell and the History of the Theory of Structures». In: *Essays on the History of Mechanics*. Springer, pp. 9–20.
Heyman, J. e G Poleni (1988). «Poleni's problem.» In: *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 84.4, pp. 737–759.
Heyman, J. et al. (1992). «How to design a cathedral: some fragments of the history of structural engineering.» In: *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Civil Engineering*. Thomas Telford-ICE Virtual Library, pp. 24–29.
Hill, D. R. (2019). *Islamic science and engineering*. Edinburgh University Press.
Hodge, A. T. (1992). *Roman Aqueducts and Water Supply*. Duckworth.

COPIA DI REVISIONE

Hogendijk, I (1994). «Pure mathematics in Islamic civilization». In: *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences* 1, pp. 70–79.
Homer (1924). *The Iliad*. Trad. da A. T. Murray. Vol. 170. Loeb Classical Library. 2 vols. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
Hon, G. e Y. Zik (2009). «Kepler's optical part of astronomy (1604): Introducing the ecliptic instrument». In: *Perspectives on Science* 17.3, pp. 307–345.
Honigmann, C. e D. P. Billington (2003). «Conceptual design for the Sunniberg Bridge». In: *Journal of Bridge Engineering* 8.3, pp. 122–130.
Hooke, R. (1665). *Micrographia: or Some Physiological Descriptions of Minute Bodies Made by Magnifying Glasses with Observations and Inquiries Thereupon*. Royal Society of London. London: Jo. Martyn e Ja. Allestry.
– (1676). *A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments*. Imprint dated 1676; actually published October 1675. London: John Martyn.
– (1678). *Lectures de Potentia Restitutiva, or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies*. London: John Martyn.
– (1705). *The Posthumous Works of Robert Hooke*. A cura di R. Waller. The decipherment of the arch anagram appears in Waller's prefatory "Life of Dr. Robert Hooke". London: Sam. Smith e Benj. Walford.
Houlsby, G. T. (2014). «John Wallis and the numerical analysis of structures». In: *Nexus Network Journal* 16.1, pp. 207–217.
structural engineering, n. (n.d.). Earliest evidence recorded by OED: 1859. Oxford English Dictionary.
structural engineer, n. (n.d.). Earliest evidence recorded by OED: 1867. Oxford English Dictionary.
Hrennikoff, A. (1941). «Solution of Problems of Elasticity by the Framework Method». In: *Journal of Applied Mechanics* 8, pp. 169–175.
Huerta, S. (2004). *Arcos, bóvedas y cúpulas: Geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica*. Madrid: Instituto Juan de Herrera.
– (2006). «Structural Design in the Work of Gaudí». In: *Architectural Science Review* 49.4, pp. 324–339.
– (2009). «The Debate about the Structural Behaviour of Gothic Vaults: From Viollet-le-Duc to Heyman». In: *Proceedings of the Third International Congress on Construction History*.
– (2018). «Arch Bridge Design in Eighteenth-Century France: The Rule of Perronet». In: *Building Knowledge, Constructing Histories*. A cura di I. Wouters et al. Proceedings of the 6th International Congress on Construction History (6ICCH), Brussels, Belgium, July 9–13, 2018. London: CRC Press/Balkema, pp. 773–780.
Huff, D. (2005). «From Median to Achaemenian palace architecture». In: *Iranica Antiqua* 40, pp. 371–395.
Huxtable, A. L. (2017). *Pier Luigi Nervi*. Pickle Partners Publishing.
Huygens, C (1673). «1673 Horologium oscillatorium». In: *Sive de Motu Pendulorum ad Horologia Aptato Demonstrationes Geometrical (Paris: AF Muguet)*.

COPIA DI REVISIONE

Huygens, C. (16 nov. 1691). *Lettre à G.W. Leibniz*. Francese. A cura di J. B. Jr. In *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens*, vol. 10: *Correspondance 1691–1695*. Letter. La Haye.
– (24 ago. 1694). *Lettre à G.W. Leibniz*. Francese. A cura di J. B. Jr. In *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens*, vol. 10: *Correspondance 1691–1695*. Letter. La Haye.
– (1888a). «Letter to Gottfried Wilhelm Leibniz, 1 September 1691». In: *Oeuvres Complêtes de Christiaan Huygens*. A cura di D. B. de Haan et al. Vol. 10. Letter dated 1 September 1691. The Hague: Martinus Nijhoff, pp. 127–134.
– (1888b). *Oeuvres completes de Christiaan Huygens, vol. 1*. Correspondance 1638-1656. Société Hollandaise des Sciences; Martinus Nijhoff, pp. 35–40.
– (1986). *The Pendulum Clock or Geometrical Demonstrations*. Iowa State University Press.
Iacovou, P. (2024). «The construction of Casa Malaparte as living images». In: *Journal of Architecture/ Architectural History (Taylor & Francis)*.
Inwood, S. (2002). *The Man Who Knew Too Much: The Strange and Inventive Life of Robert Hooke, 1635–1703*. London: Macmillan.
Irons, B. M. (1966). «Engineering Applications of Numerical Integration in Stiffness Methods». In: *AIAA Journal* 4.11, pp. 2035–2037.
Istituto Geografico De Agostini, cur. (1956). *Leonardo da Vinci*. Memorial edition arising from the 1938 Leonardo Exposition in Milan. New York: Reynal & Company. 518 pp.
Jacobovici, S. e J. Cameron (2006). *The Exodus Decoded*. History Channel documentary.
Jakob Bernoulli (n. d.).
James, J. (1982). *Chartres: The Masons Who Built a Legend*. London: Routledge & Kegan Paul.
Jammer, M. (1957). *Concepts of Force*. Reprinted by Dover Books on Physics. Harvard University Press.
Jeremias, J. (1965). *Theophanie: Die Geschichte einer alttestamentlichen Gattung*. Tedesco. Neukirchen-Vluyn: Neukirchener Verlag, p. 181.
Jones, B., A. Sereni e M. Ricci (2010). «Building Brunelleschi's Dome: A Practical Methodology Verified by Experiment». In: *Journal of the Society of Architectural Historians* 69.1, pp. 39–61.
Jung, C. G. (1959). *Flying Saucers: A Modern Myth of Things Seen in the Skies*. Trad. da R. F. C. Hull. London: Routledge & Kegan Paul.
Kant, I. (2023). *Metaphysical foundations of natural science*. Newcomb Livraria Press.
Kaplan, R. (2000). *The Nothing That Is: A Natural History of Zero*. Oxford University Press.
Kästner, A. G. (1786). *Anfangsgründe der Mathematik: Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv*. 4. Auflage. Göttingen: Keyser.
Keller, S. (1998). «Sections and Views: Visual Representation in Eighteenth-Century Earthquake Studies». In: *British Journal for the History of Science* 31, pp. 129–159.
Kennedy, E. S. (1971). «Al-Biruni's Masudic canon». In: *Al-Abhath* 24.1-4, pp. 59–81.
Kepler, J. (1609). *Astronomia nova: Aitiologia, seu physica coelestis*. Prague: Typographia Jonae Rosini.
– (1855). *Joannis Kepleri Astronomi Opera Omnia*. A cura di H. Zimmer. Francofurti.
Khan, F. R. (1965). «Design of high-rise buildings». In: *ASCE Symposium on Steel, Chicago*.

COPIA DI REVISIONE

Khāzinī, A. al-Rahman al (2001). *The Balance of Wisdom*. A cura di A. S. Hamdan. Originally written in 1121 CE. Cairo: Dar al-Fikr al-Arabi.
Kim, R. D. Y. (2016). «Analysis of architectural geometries affecting stress distributions of gothic flying buttresses». Thesis. Kansas State University.
Kimmelman, M. (29 apr. 2020). *https://www.nytimes.com/2020/04/29/arts/design/new-york-virtual-tour-virus.htmlThe Hidden Feats That Built New York's Towering Skyscrapers*. Critic's Notebook. Published Apr. 29, 2020; updated May 4, 2020.
King, R. (2010). *Brunelleschi's Dome: The story of the great cathedral in florence*. Random House.
Kinney, J. (1957). *Indeterminate Structural Analysis*. Out of Print. Addison-Wesley.
Kirchhoff, G. (1859). «Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe». In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 40, pp. 51–88.
Kleinert, A. (dic. 2015). «Leonhardi Euleri Opera Omnia: Editing the works and correspondence of Leonhard Euler». In: *Prace Komisji Historii Nauki PAU* IVX, pp. 13–35.
Kleist, H. v. (1810). «Das Erdbeben in Chili». In: *Erzählungen*. Vol. 1. Written c. 1806; first published 1807 under the title *Jeronimo und Josephe*. Berlin: Realschulbuchhandlung, pp. 1–62.
Kossakovsky, V. (2024). *Architecton*.
Kozák, J. e V. Cermák (2010). *The Illustrated History of Natural Disasters*. Dordrecht: Springer, p. 231.
Kozak, J., V. Moreira e D. Oldroyd (2005). *Iconography of the 1755 Lisbon Earthquake*. Prague: Academia.
Kramer, S. N. (1963). *The Sumerians: Their History, Culture, and Character*. Chicago: University of Chicago Press.
Krinsky, C. H. (1967). «Seventy-eight Vitruvius manuscripts». In: *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes* 30.1, pp. 36–70.
Kron, G. (1944). «Tensorial Analysis and Equivalent Circuits of Elastic Structures». In: *Journal of the Franklin Institute* 238.6, pp. 399–442.
Kurrer, K.-E. (2003). «The development of the deformation method». In: *Essays on the History of Mechanics*. Springer, pp. 57–87.
Kurrer, K. (2008). *The History of the Theory of Structures*. Ernst & Sohn.
La Gorce, J. d. (1996). «Tempêtes et Tremblements de Terre dans l'Opéra Français sous le Règne de Louis XIV». In: *Le Mouvement en Musique à l'Epoque Baroque*. A cura di H. Lacombe. Metz: Editions Serpenoise, pp. 171–188.
Lagrange, J.-L. (1788). *Mécanique Analytique*. Foundational work reformulating mechanics using variational principles. Paris: Veuve Desaint.
– (1798). «Sur le principe des vitesses virtuelles». In: *Journal de l'École polytechnique* 2.5. Prairial an VI (May–Jun 1798)., pp. 115–118.
Lamé, G e B Clapeyron (1831). «Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes». In: *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie Royale des Sciences* 4, pp. 463–562.

COPIA DI REVISIONE

Lamé, G. (1852). *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*. Paris: Bachelier.
Lamé, G. e B. P. E. Clapeyron (1833). «Mémoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide». In: *Annales de chimie et de physique* 47, pp. 250–256.
Larsen, O. P. (2007). *Reciprocal frame architecture*. Routledge.
Le Corbusier (1931). *Towards a new architecture*. Republished in 2013. Courier Corporation.
Lehner, M. (1997). *The Complete Pyramids: Solving the Ancient Mysteries*. Thames & Hudson.
Leibniz, G. W. (1684). «Demonstratio generalis corporum solidorum resistentiam in flexu determinandi». In: *Acta Eruditorum*. Leibniz addresses the bending resistance of solid bodies, comparing inextensional and extensional theories., pp. 334–336.
– (mar. 1686a). «Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii». Latino. In: *Acta Eruditorum*. English title: A Brief Demonstration of a Notable Error of Descartes and Others Concerning a Natural Law, pp. 161–163.
– (1686b). «De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum». In: *Acta Eruditorum* 1686.VI, pp. 292–300.
– (1690). «Ad ea, quae vir clarissimus JB, mense Majo nupero in his Actis publicavit, responsio». In: *Acta eruditorum*, pp. 358–360.
– (giu. 1691a). «De linea in quam flexile se pondere proprio curvat, ejusque usu insigni adinveniendas quotcunque medias proportionales & logarithmos». In: *Acta Eruditorum*, pp. 277–281.
– (1691b). *Description of the Stepped Reckoner*. Contemporary account of Leibniz's calculating machine.
– (24 lug. 1691c). «Letter to Christiaan Huygens». In: *Sämtliche Schriften und Briefe*. Vol. III, 5. Akademie-Ausgabe. Letter discussing Johann Bernoulli's catenary solution and the quadrature of the hyperbola. Berlin: Akademie Verlag.
– (2 mar. 1691d). «Letter to Huygens». In: *Sämtliche Schriften und Briefe*. A cura di Preussische Akademie der Wissenschaften. Vol. 5. Reihe III: Mathematischer, naturwissenschaftlicher und technischer Briefwechsel. Akademie-Ausgabe III, 5. Berlin: Akademie Verlag, pp. 58–64.
– (giu. 1691e). «On the curve formed by a heavy flexible cord». In: *Acta Eruditorum*. Discusses plans to study the bending of beams and bows in future correspondence.
– (1710). *Essais de Théodicée sur la bonté de Dieu, la liberté de l'homme et l'origine du mal*. The only major philosophical work published by Leibniz in his lifetime. *Printing and the Mind of Man*, no. 177. Amsterdam: Isaac Troyel.
– (1858). «Historia et origo calculi differentialis (1714)». In: *Leibniz GW Mathematische Schriften. In* 7, pp. 392–410.
– (1901). «Letter to Christiaan Huygens, October 13, 1690». In: *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens*. A cura di Société Hollandaise des Sciences. Vol. 9. The Hague: Martinus Nijhoff.
– (1923). *Samtliche Schriften und Briefe. Philosophische Schriften. Vols. 1-3*.
– (1969). *Philosophical Papers and Letters*. D. Reidel.

COPIA DI REVISIONE

Leibniz, G. W. e L. E. Loemker (1956). *Philosophical Papers and Letters*. A cura di L. E. Loemker. Chicago: University of Chicago Press.
Lemoine, B. (2002). *The Eiffel Tower*. New York: Princeton Architectural Press.
León-Portilla, M. (1963). *Aztec Thought and Culture: A Study of the Ancient Nahuatl Mind*. Translated from the Spanish by Jack Emory Davis. Norman: University of Oklahoma Press.
Levien, R. (2008). «The elastica: a mathematical history». In: *Electrical Engineering and Computer Sciences University of California at Berkeley*. Text reproduced with author's permission.
Levy, S. (1953). «Structural analysis and influence coefficients for delta wings». In: *Journal of the Aeronautical Sciences* 20.7, pp. 449–454.
Lieberkühn, C. G. (1758). *Die Lissabonner: ein bürgerliches Trauerspiel*. Bound with *Die Insel der Pucklichten, ein Lustspiel*. First edition. [Halle]: Carl Gottfried Meyer.
Ligorio, P. (2005). *Libro di diversi terremoti*. A cura di E. Guidoboni. Edizione Nazionale delle Opere di Pirro Ligorio, Libri delle antichità, Torino 28. Critical edition of the manuscript (Archivio di Stato di Torino, cod. Ja.II.15), written 1570–71 during the Ferrara earthquake sequence. Introduction in Italian and English. Roma: De Luca Editori d'Arte.
Livio, M. (2008). *The golden ratio: The story of phi, the world's most astonishing number*. Crown.
Llunji, M. (2022). *Towards A New Engineering-: Reflections of a practitioner*. Msproject.
Londe, P. (1987). «The Malpasset dam failure». In: *Engineering Geology* 24.1-4, pp. 295–329.
López, G. (2006). «Poleni's Manuscripts about the Dome of Saint Peter's». In: *Proceedings of the Second International Congress on Construction History* 2.
Lori, T. (2009). *Pier Luigi Nervi*. Motta Architectura.
Love, A. E. H. (1927). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. 4ª ed. Contains extensive historical notes. Cambridge: Cambridge University Press.
Lovelace, A. (1843). «Notes by the Translator». In: *Sketch of the Analytical Engine Invented by Charles Babbage*. A cura di L. F. Menabrea. London: Richard e John Edward Taylor.
Lucretius, T. C. (1995). *De Rerum Natura*. Trad. da A. M. Esolen. Baltimore: Johns Hopkins University Press.
Ludwin, R. S. e G. Smits (2007). «Folklore and Earthquakes: Native American Oral Traditions from Cascadia Compared with Written Traditions from Japan». In: *Myth and Geology*. A cura di L. Piccardi e W. B. Masse. London: Geological Society, pp. 67–94.
MacDonald, W. L. (1982). *The Architecture of the Roman Empire, Volume II: An Urban Appraisal*. Yale University Press.
Mahmoodi, P et al. (1987). «Performance of viscoelastic dampers in world trade center towers». In: *Dynamics of structures*. ASCE, pp. 632–644.
Maier, G. (2007). Private Communication.
Maney, G. A. (1915). «Secondary Stresses and Other Problems in Rigid Frames: A New Method of Solution». In: *Studies in Engineering*. University of Minnesota.
Maor, E. (2001). *The Universal History of Numbers: From Prehistory to the Invention of the Computer*.

COPIA DI REVISIONE

Mark, R. (1978). «Structural experimentation in Gothic architecture: Large-scale experimentation brought Gothic cathedrals to a level of technical elegance unsurpassed until the last century». In: *American Scientist* 66.5, pp. 542–550.
Mark, R., J. F. Abel e K. O'Neill (1973). «Photoelastic and finite-element analysis of a quadripartite vault». In: *Experimental Mechanics* 13.8, pp. 322–329.
Mark, R. e R. A. Prentke (1968). «Model analysis of Gothic structure». In: *The Journal of the Society of Architectural Historians* 27.1, pp. 44–48.
Markowsky, G. (1992). «Misconceptions about the golden ratio». In: *The College Mathematics Journal* 23.1, pp. 2–19.
Marmo, F. et al. (2019). «On the form of the Musmeci's bridge over the Basento river». In: *Engineering Structures* 191, pp. 658–673.
Marmontel, J.-F. (1777). *Les Incas, ou La destruction de l'empire du Pérou*. 2 voll. 2 vols. First edition. Paris: Lacombe.
Marshack, A. (1972). *The Roots of Civilization: The Cognitive Beginnings of Man's First Art, Symbol and Notation*. New York: McGraw-Hill.
MATLAB User's Guide (1984). The MathWorks. Natick, MA.
Maxwell, J. (1864a). «On Reciprocal Figures and Diagrams of Forces». In: *Philosophical Magazine* 27, pp. 250–261.
– (1864b). «On reciprocal figures and diagrams of forces». In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 27.182, pp. 250–261.
– (1864c). «On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames». In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 27.182, pp. 294–299.
– (1890). *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell...* Vol. 2. University Press.
McCullough, D. (1972). *The Great Bridge: The Epic Story of the Building of the Brooklyn Bridge*. New York: Simon & Schuster.
McDonough, J. K. (2016). «Leibniz and the Foundations of Physics: The Later years». In: *Philosophical Review* 125.1, pp. 1–34.
McQuaid, M. (1993). *Santiago Calatrava : structure and expression*. New York, N.Y: Museum of Modern Art.
Menn, C. (1990). *Prestressed concrete bridges*. Springer Science & Business Media.
– (1996). «The place of aesthetics in bridge design». In: *Structural engineering international* 6.2, pp. 93–95.
Menninger, K. (2013). *Number words and number symbols: A cultural history of numbers*. Courier Corporation.
Michell, A. G. M. (1904). «LVIII. The limits of economy of material in frame-structures». In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 8.47, pp. 589–597.
Michell, G. (1989). *The Stepwells of India*. Mapin Publishing.
Mieroop, M. Van de (2024). *A history of the ancient Near East ca. 3000-323 BC*. John Wiley & Sons.
Miller, D. M. (2017). «The Parallelogram Rule from Pseudo-Aristotle to Newton». In: *Archive for History of Exact Sciences* 71.2, pp. 157–191.

COPIA DI REVISIONE

Miller, G. A. (1916). *Historical introduction to mathematical literature*. Macmillan.
Miyata, N. e M. Takada, cur. (1995). *Namazu-e: Jishin to Nihon Bunka*. Tokyo: Satofuni Shuppan.
Mohr, C. O. (1868). «Beiträge zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen». Tedesco. In: *Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover* 14. [Contributions to the Theory of Timber and Iron Constructions], pp. 20–52, 397–400.
– (1874). *Lehrbuch der Mechanik*. F. Vieweg.
– (1882a). «Über die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszustandes eines Körperelementes und über die Anwendung derselben in der Festigkeitslehre». Tedesco. In: *Der Civilingenieur* 28.2, pp. 113–156.
– (1882b). «Ueber die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszustandes eines Körperelementes und über die Anwendung derselben in der Festigkeitslehre». In: *Der Civilingenieur* 28, pp. 113–156, 193–235.
Mohr, O. (1892). «Die Berechnung der Fachwerke mit starren Knotenverbindungen». Tedesco. In: *Der Civilingenieur* 38. [The Calculation of Trusses with Rigid Joint Connections], pp. 577–594.
Moody, E. A. (1951). «Galileo and Avempace: The Dynamics of the Leaning Tower Experiment (I)». In: *Journal of the History of Ideas*, pp. 163–193.
Moorey, P. R. S. (1999). *Ancient Mesopotamian materials and industries: the archaeological evidence*. Eisenbrauns.
Morandi, R. e F. Piccarreta (1972). «Roof structure of the new hangars by the International Fiumicino Airport (Rome): design, model tests». In: *IABSE congress report*. International Association for Bridge e Structural Engineering.
Moseley, H. (1843). *The Mechanical Principles of Engineering and Architecture*. John Weale.
Mozi (2013). *The Mozi: A Complete Translation*. Trad. da I. Johnston. Originally compiled in the 5th century BCE. Hong Kong: The Chinese University Press.
Müller-Breslau, H. F. B. (1886). *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen, ausgehend von dem Gesetze der virtuellen Verschiebungen und den Lehrsätzen über die Formänderungsarbeit*. Tedesco. [The Newer Methods of Strength of Materials and Statics of Building Structures, Based on the Law of Virtual Displacements and the Theorems on Strain Energy]. Leipzig: Baumgärtner.
– (1887). *Die graphische Statik der Baukonstruktionen*. Tedesco. 1ª ed. Vol. 1. [Graphical Statics of Building Structures]. Systematic treatment of influence lines. Leipzig: Baumgärtner.
Murray, S. (1989). *Beauvais Cathedral: architecture of transcendence*. Princeton University Press.
– (1998). «Notre-Dame of Paris and the anticipation of Gothic». In: *The Art Bulletin* 80.2, pp. 229–253.
Musolino, M. (2017). «L'arte traumatica. Gibellina e la risemantizzazione delle sue rovine». In: *Meridiana* 88, pp. 157–178.
Musschenbroek, P. van (1739). *Elementa Physicae Conscripta in usus Academicos*. Latin. Includes early experimental studies on the tensile strength of materials. Lugduni Batavorum: Petrum vander Eyk.

COPIA DI REVISIONE

Napier, J. (1614). *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*. Edinburgh: Andrew Hart.
NASA (1968). *NASTRAN User's Manual*. Rapp. tecn. Washington, D.C.: National Aeronautics e Space Administration.
NASA Unidentified Anomalous Phenomena Independent Study Team (set. 2023). *Unidentified Anomalous Phenomena Independent Study Team Report*. Rapp. tecn. Washington, DC: National Aeronautics e Space Administration.
National Institute of Standards and Technology (NIST) (set. 2005). *Final Report on the Collapse of the World Trade Center Towers: Federal Building and Fire Safety Investigation of the World Trade Center Disaster*. NCSTAR 1. Gaithersburg, MD: National Institute of Standards e Technology.
Naveh, J. (1987). *Early History of the Alphabet: An Introduction to West Semitic Epigraphy and Palaeography*. 2nd. Jerusalem: Magnes Press.
Navier, C (1821). «Sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques». In: *Bulletin de la Société Philomatique de Paris*, pp. 177–181.
– (1823). *Rapport à Monsieur le Ministre de l'Intérieur sur le projet d'un pont suspendu à établir au port des Champs-Élysées*. Report on the proposed suspension bridge at the Champs-Élysées, highlighting the intersection of engineering, mathematics, and architectural aesthetics. Paris: Imprimerie Royale.
– (1826). *Résumé des leçons données à l'École royale des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines*. First edition. Second edition published in 2 volumes, 1833-1838. Paris: Carilian-Gœury.
– (1827a). «Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques». In: *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France* 7, pp. 375–393.
– (1827b). «Mémoire sur les lois du mouvement des fluides». In: *Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France* 6. Lu à l'Académie royale des Sciences le 18 mars 1822, pp. 389–440.
– (1830). *Rapport à Monsieur Becquey, Conseiller d'état, directeur général des ponts et chaussées et des mines; et Mémoire sur les ponts suspendus*. 2ª ed. Augmentée d'une notice sur le pont des Invalides. Paris: Carilian-Gœury.
– (1833). *Résumé des Leçons Données sur L Application de la mécanique a L'etablissement des constructions et des machines*. 2nd edition.
– (1864). *Résumé des leçons données a l'École des ponts et chaussées [. . .]. Troisième édition avec des notes et des appendices, par M. Barré de Saint-Venant*.
Needham, J. (1959). *Science and Civilization in China*. Cambridge University Press.
Nelli, G. B. e A. Ceccherelli (1753). *Discorsi di architettura del senatore Giovan Batista Nelli con la vita del medesimo dedicata all'illustriss. signore Bindo Simone Peruzzi e due ragionamenti sopra le cupole di Alessandro Cecchini architetto*. per gli eredi Paperini.
Nemore, J. de (1250). *Liber de Ratione Ponderis*. 13th century. Critical edition by E. A. Moody and M. Clagett in *The Medieval Science of Weights*, University of Wisconsin Press, 1952.
Nervi, P. (2018). *Aesthetics and Technology in Building: The Twenty-first-century Edition*. Translated from the Italian by Robert Einaudi. University of Illinois Press.

COPIA DI REVISIONE

Nervi, P. L. (1956a). *Structures*. F. W. Dodge Corporation.
– (1956b). *Structures*. Translated from the Italian *Costruire correttamente* by Giuseppina and Mario Salvadori. F.W. Dodge Corporation.
– (1963). *Buildings, projects, structures, 1953-1963*. Praeger.
Nervi, P. L., G. Neri et al. (2014). *Scienza o arte del costruire? Caratteristiche e possibilità del cemento armato*. CittàStudi Edizioni.
Neufert, E. (1970). *Architects' Data*. Trad. da R. Herz. First English translation of *Bauentwurfslehre* (1936). London: Lockwood.
Neugebauer, O. (1969). *The exact sciences in antiquity*. Vol. 9. Courier Corporation.
– (2012). *A history of ancient mathematical astronomy*. Vol. 1. Springer Science & Business Media.
Newmark, N. M. (1959). «A method of computation for structural dynamics». In: *Journal of the engineering mechanics division* 85.3, pp. 67–94.
Newton, I. (1680). *Index Chemicus*. The Chimistry of Isaac Newton Project, Indiana University Digital Library Program.
– (1687). *Mathematical principles of natural philosophy*. English & Latin Version.
– (1704). *Opticks: or, A Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of Light*. First edition. London: Sam. Smith e Benj. Walford.
– (1717). *Opticks, or, a treatise of the reflections, refractions, inflections & colours of light*. Dover Publications, 1952.
– (1736). *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum, cum ejusdem applicatione ad curvarum geometriam*. Trad. da J. Colson. Originally written in 1671. London: Henry Woodfall.
– (1960). «Letter to Henry Oldenburg, 24 October 1676». In: *The Correspondence of Isaac Newton*. A cura di H. W. Turnbull. Vol. 2. 1676–1687. Cambridge: Cambridge University Press. Cap. 187, pp. 110–161.
Nikolinakou, M. A. e A. J. Tallon (2006). «New Research in Early Gothic Flying Buttresses». en. In: *Proc. Second Intern. Congress Construction History, Cambridge*, pp. 2347–2361.
Nikolinakou, M.-K., A. J. Tallon e J. A. Ochsendorf (2005). «Structure and form of early Gothic flying buttresses». In: *Revue Européenne de Génie Civil* 9.9-10, pp. 1191–1217.
Noether, E. (1918). «Invariante Variationsprobleme». In: *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, pp. 235–257.
Noll, W. (1958). «A Mathematical Theory of the Mechanical Behavior of Continuous Media». In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 2.1, pp. 197–226.
NRC-ML19312B609 (2019). *Official Transcript of Proceedings; NextEra Energy Seabrook, LLC Seabrook Station, Unit 1; Docket Number: 50-443-LA-2;ASLBP Number:17-953-02-LA-BD01*. Newburyport, Massachusetts.
Nur, A. e D. Burgess (2008). *Apocalypse: earthquakes, archaeology, and the wrath of God*. Princeton University Press.
Oates, J. (1990). *Babylon*. See Chapter 2 for building materials and construction practice. London: Thames e Hudson.
Ochsendorf, J. A. (2002). «Collapse of masonry structures». Thesis. University of Cambridge.

COPIA DI REVISIONE

Oikonomou, A. (2022). «The Use of Geometrical Tracing, Module and Proportions in Design and Construction, from Antiquity to the 18th Century». In: *International Journal of Architectural Heritage* 16.10, pp. 1567–1587.
Oldfather, W., C. Ellis e D. M. Brown (1933). «Leonhard Euler's elastic curves». In: *Isis* 20.1. Translation of *De curvis elasticis*, Additamentum I to *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, pp. 72–160.
Oppenheim, A. L. (1977). *Ancient Mesopotamia: Portrait of a Dead Civilization*. University of Chicago Press.
Oresme, N. (1351). *De configurationibus qualitatum et motuum*.
Otto, F., R. Trostel e F. K. Schleyer (1973). *Tensile structures; design, structure, and calculati on of buildings of cables, nets, and membranes*. MIT Press.
Oughtred, W. (1632). *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrument*. London: Augustine Mathewes.
Our history (2026). Institutional history: origin in 1908; name adopted in 1922. The Institution of Structural Engineers.
Palladio, A. (1570). *I quattro libri dell'architettura*. Domenico di Franceschi.
Palomo, M. (2017). «Describing Reality: Bernoulli's Challenge of the Catenary Curve and its Mathematical Description by Leibniz and Huygens». In: *Leibniz and the Dialogue Between Sciences, Philosophy and Engineering, 1646–2016. New Historical and Epistemological Insights*, p. 334.
Panofsky, E. (1945). «An Explanation of Stornaloco's Formula». In: *The Art Bulletin* 27.1, pp. 61–64.
Paranjape, M. R. (2011). «'Natural Supernaturalism?'The Tagore–Gandhi Debate on the Bihar Earthquake». In: *The Journal of Hindu Studies* 4.2, pp. 176–204.
Pardies, I. G. (1710). *La statique ou la science des forces mouvantes*. S. Mabre-Cramoisy.
Parent, A. (1713). *Essais et recherches de mathématique et de physique, dans lesquels on traite de l'utilité des différentes sciences, et principalement de la mécanique, par rapport aux arts et métiers*. 3 volumes. Paris: Jean Anisson.
Parkinson, R. B. (1999). *Cracking Codes: The Rosetta Stone and Decipherment*. Berkeley: University of California Press.
Pascal, B. (1645). *La Machine Arithmetique*. Pamphlet describing Pascal's mechanical calculator. Paris.
Pearson, K (ago. 1905). «On the Stability of Masonry Dams». In: *Engineering*, p. 171.
Pearson, K. et al. (1907). *An experimental study of the stress in Masonry Dams*. Rapp. tecn. Technical Series, V. Drapers Company Research Memoirs (Technical Series).
Pedreschi, R. (2008). «Form, force and structure: a brief history». In: *Architectural Design* 78.2, pp. 12–19.
Peiffer, J. (2006). «Jacob Bernoulli, teacher and rival of his brother Johann». In: *Journal Électronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique [electronic only]* 2.1b, Article–1.
Perga, A. of (1896). *Treatise on Conic Sections*. Trad. da T. L. Heath. Greek text with English translation. Cambridge: Cambridge University Press.

COPIA DI REVISIONE

Peripatetic School (circa 4th century BCE). *Mechanical Problems*. Traditionally attributed to Aristotle, though likely compiled by later members of the Peripatetic school. Problem 3 possibly reflects the thought of Archytas of Tarentum.

Perret, A. (1952). *Contribution à une théorie de l'architecture*. Paris: Cercle d'études architecturales.

Perronet, J.-R. (1782). *La construcción de puentes en el siglo XVIII*. Spanish translation. Reverte.

– (1782–1788). *Description des projets et de la construction des ponts de Neuilly, de Mantes, d'Orléans et autres*. 2 vols. with 67 engraved plates. Available at https://archive.org/details/chepfl-lipr-axd-20-01. Paris: Imprimerie Royale.

Petroski, H. (1997). «Engineering: Santiago Calatrava». In: *American Scientist* 85.2, pp. 114–118.

Philoponus, J. (1993). *Philoponus: On Aristotle Physics 4.1–5*. A cura di R. Sorabji e C. Wildberg. Trad. da C. Wildberg. Ancient Commentators on Aristotle. London: Duckworth.

Piccardi, L. (2007). «The AD60 Denizli Basin Earthquake and the Apparition of Archangel Michael at Colossae». In: *Myth and Geology*. A cura di L. Piccardi e W. B. Masse. London: Geological Society, pp. 95–105.

Picon, A. (1988). «Navier and the introduction of suspension bridges in France». In: *Construction History* 4, pp. 21–34.

Pierrefeu, F. de e L. Corbusier (1942). *La maison des hommes*. Plon.

Piola, G. (1833). «La meccanica de' corpi naturalmente estesi trattata col calcolo delle variazioni». In: *Opuscoli Matematici e Fisici di Diversi Autori* 1, pp. 201–236.

Pisano, R., J. Coopersmith e M. Peake (2021). *Essay on Machines in General (1786)*. Vol. 47. Springer.

Pizzigoni, A. (2015). «Brunelleschi's Bricks». In: *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 56.2, pp. 137–148.

Plato (350 BC). *Laws*. Composed ca. 350 BCE. Online editio. Tufts University: Perseus Digital Library.

Pliny the Elder (1906). *Naturalis Historia*. A cura di K. Mayhoff. Leipzig: Teubner.

Poincaré, H. (1905). *Science and hypothesis*. London: Walter Scott Publishing CO., LTD.

Poisson, S. D. (1829). «Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques». In: *Mémoires de l'Académie des Sciences* 8, pp. 357–570.

Poisson, S. D. (1831). «Mémoire sur la propagation du mouvement dans les milieux élastiques». In: *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* 10, pp. 549–605.

Poleni, G. (1748). *Memorie Istoriche Della Gran Cvpola Del Tempio Vaticano, E De'Danni Di Essa, E De'Ristoramenti Loro, Divise In Libri Cinqve*. Nella Stamperia del seminario.

Pollalis, S. N. (1999). *What is a bridge? the making of Calatrava's bridge in Seville*. MIT Press.

Pope, T. (1811). *A Treatise on Bridge Architecture: In which the Superior Advantages of the Flying Pendent Lever Bridge are Fully Proved; with an Historical Account and Description of Different Bridges Erected in Various Parts of the World, from an Early Period, Down to the Present Time*. Alexander Niven.

Popovic, O. (1996). «Reciprocal frame structures». Tesi di dott. University of Nottingham.

COPIA DI REVISIONE

Popovic Larsen, O. (2014). «Reciprocal frame (RF) structures: real and exploratory». In: *Nexus Network Journal* 16.1, pp. 119–134.
Povoledo, E. (2023). «A High-Maintenance Relationship for 637 Years, but Milan's Duomo Is Still Adored». In: *The New York Times*.
Powell, G. (2008). «Structural analysis: Are we relying too much on computers? Part 1: The problem». In: *Structure Magazine*, pp. 50–52.
Przemieniecki, J. (1968). *Theory of Matrix Structural Analysis*. Reprinted by Courrier (formerly Dover). New York: McGraw-Hill.
Pugnale, A. e M. Sassone (2014). «Structural reciprocity: critical overview and promising research/design issues». In: *Nexus Network Journal* 16.1, pp. 9–35.
Quasimodo, S. (1958). «Al padre». In: *La terra impareggiabile*. Written for the 90th birthday of Gaetano Quasimodo and the 50th anniversary of the Messina earthquake of 28 December 1908. English title: *To My Father*. Milano: Mondadori.
Rankine, W. (1858). *A Manual of Applied Mechanics*. Charles Griffin e Company.
Rankine, W. J. M. (1862). *A Manual of Civil Engineering*. London: Charles Griffin.
Rasch, B. e F. Otto (1996). *Finding Form: Towards an Architecture of the Minimal*.
Reddy, J. N. (2017). *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. John Wiley & Sons.
Rega, G. (2013). «Mechanics and Architecture: Nervi's Creative Knowledge Versus The Unsolved Contemporary Complexity». In: *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 54.2-3, pp. 243–252.
Renn, J., P. Damerow e P. McLaughlin (2002). «Aristotle, Archimedes, Euclid, and the origin of mechanics: The perspective of historical epistemology». In: *Symposium Arquimedes, edited by José Luis Montesinos Sirera*, pp. 43–59.
Ribon, M. (1999). *Esthetique de la Catastrophe*. Editions Kime.
Rice, J. (1968). «A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks». In: *J. Applied Mechanics* 35, pp. 379–386.
Richards, E. G. (1998). *Mapping Time: The Calendar and Its History*. Oxford University Press.
Richardson, L. (feb. 1911). «The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam». In: *Philosophical Transactions of the Royal Society, Series A.* 210, pp. 307–357.
Ritz, W. (1909). «Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik.» In: *Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York*.
Robertson, L. E. (2017). *The Structure of Design: An Engineer's Extraordinary Life in Architecture*. The Monacelli Press, LLC.
Robins, G. e C. Shute (1987). *The Rhind Mathematical Papyrus: An Ancient Egyptian Text*. Transcription, translation, and commentary on EA 10057–10058. London: British Museum Press.
Robson, E. (2001). «Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A reassessment of Plimpton 322». In: *Historia Mathematica* 28.3, pp. 167–206.

COPIA DI REVISIONE

Robson, E. (2002). «Words and Pictures: New Light on Plimpton 322». In: *American Mathematical Monthly* 109.2, pp. 105–120.
Roebling, W. A. (1877). *Report of the Chief Engineer of the New York and Brooklyn Bridge*. Annual report to the directors of the New York Bridge Company.
Rousseau, J.-J. (1967). «Lettre à M. de Voltaire [sur la Providence]». In: *Correspondance complète de Jean-Jacques Rousseau*. A cura di R. A. Leigh. Vol. 4. Written 18 August 1756. Also known as *Lettre sur la Providence*. Genève: Institut et Musée Voltaire, pp. 37–50.
Sader, H. (2019). *The Phoenicians: A History*. Princeton: Princeton University Press.
Saint-Venant, A. J. C. B. d. (1855a). «Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion, ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément». In: *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut Impérial de France* 14. Presented 1853; published 1855, pp. 233–560.
– (1864). «Mémoire sur l'établissement des équations des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état». In: *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 70, pp. 473–480.
Saint-Venant, A. J. C. B. d. (1855b). *Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion, ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément*. Vol. 14, pp. 233–560.
Saint-Venant, B. de (1855c). «Mémoire sur la flexion des prismes rectangulaires». French. In: *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France* 14. Reprinted in *Mémoires de Mécanique*, Paris: Gauthier-Villars, 1883, pp. 233–560.
Salençon, J. (2018). «The Emergence of the Principle of Virtual Velocities». In: *Virtual Work Approach to Mechanical Modeling*. London: ISTE Press – Elsevier. Cap. 1, pp. 1–18.
Salencon, J. (mar. 2017). *Equilibrium and Forces: from Aristotle to Lagrange*.
Saliklis, E. e J. Parker (2014). «The Maney-Goldberg Method: An Iterative Method Lost in the Mists of Time». In: *Proceedings of the IASS-SLTE 2014 Symposium "Shells, Membranes and Spatial Structures: Footprints"*. A cura di R. Brasil e R. Pauletti. IASS. Brasilia, Brazil.
Saouma, V. E. e C. Barton (apr. 1994). «Fractals, Fractures and Size Effects in Concrete». In: *Journal of Engineering Mechanics of the American Society of Civil Engineers* 120.4, pp. 835–854.
Saouma, V. E. e G. Fava (2006). «On Fractals and Size Effects». In: *International Journal of Fracture* 137, pp. 231–249.
Saouma, V. E., D. Natekar e E. Hansen (2003). «Cohesive Stresses and Size Effects in Elasto-Plastic and Quasi-Brittle Materials». In: *International Journal of Fracture* 119, pp. 287–298.
Saouma, V. E. e L. Perotti (2004). *Constitutive Model for Alkali Aggregate Reaction*. Rapp. tecn. Bienne, Switzerland: Report No. 2, Submitted to the Swiss Federal Agency of Water e Geology.
Saxony, A. of (1988). *Quaestiones super libros Physicorum Aristotelis*. A cura di A. Maier. Critical Latin edition. Stuttgart: Franz Steiner Verlag.

COPIA DI REVISIONE

Schmaltz, T. M. (2003). «Cartesian causation: body–body interaction, motion, and eternal truths». In: *Studies in History and Philosophy of Science Part A* 34.4, pp. 737–762.
Schmandt-Besserat, D. (1992). *Before Writing, Vol. I: From Counting to Cuneiform*. Austin: University of Texas Press.
Schrama, W. (2021). «A Structural Analysis of Timber Reciprocal Frames». In: *TU Delft, Civil Engineering*. Bachelor Thesis.
Seabrook, J. (nov. 2001). «The Tower Builder». In: *New Yorker* 36.
Sebregondi, G. C. e R. Schofield (2016). «First Principles: Gabriele Stornaloco and Milan Cathedral». In: *Architectural history* 59, pp. 63–122.
Seidel, P. L. (1873). *Ueber ein verfahren, die gleichungen, auf welche die methode der kleinsten quadrate führt, sowie lineäre gleichungen überhaupt, durch successive annäherung aufzulösen*. Vol. 11. Verlag d. Akad.
Serlio, S. (1996). *Sebastiano Serlio on Architecture, Volume I*. A cura di V. H. Veen e P. Hicks. Yale University Press.
Serrano, I. M. e B. D. Suceavă (2017). «A Medieval Mystery: Nicole Oresme's Concept of Curvitas». In: *The Best Writing on Mathematics 2016*. Princeton University Press, pp. 238–248.
Shakespeare, W. (1597). *Romeo and Juliet*. First published in 1597; numerous modern editions available.
Sharer, R. J. e L. P. Traxler (2006). *The Ancient Maya*. 6th. Stanford University Press.
Shelby, L. (1972). «The Geometrical Knowledge of Mediaeval Master Masons». In: *Speculum* 47.3, pp. 395–421.
Shelden, D. R. (2002). «Digital surface representation and the constructibility of Gehry's architecture». Tesi di dott. Massachusetts Institute of Technology.
Shukla, D. (1993). *Vaastu Shastra: Principles of Ancient Architecture*. Institute of Indology.
Smith, M. E. (1996). *The Aztecs*. Blackwell Publishing.
Smits, G. (2006). «Shaking Up Japan: Edo Society and the 1855 Catfish Picture Prints». In: *Journal of Social History* 39.4, pp. 1045–1078.
Southwell, R. V. (1935). «Stress-calculation in frameworks by the method of" systematic relaxation of constraints"—I and II». In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences* 151.872, pp. 56–95.
Spinoza, B. d. (1670). *Tractatus Theologico-Politicus*. Published under the pseudonym "Operibus Posthumis"; quoted from the translation of R. H. M. Elwes (1883), Preface. Hamburg: Henricum Künraht.
Stevin, S. (1586). *De Beghinselen der Weeghconst*. English translation: *The Principal Works of Simon Stevin*, ed. E. J. Dijksterhuis, C. V. Swets & Zeitlinger, Amsterdam, 1955. Leiden: Christoffel Plantijn.
– (1955–1966). *The Principal Works of Simon Stevin*. A cura di D. J. Struik. Vol. 5 volumes. Mathematics, Engineering, Navigation, Fortification, Optics, Architecture, Music. Amsterdam: C. V. Swets & Zeitlinger.
– (1987). *Les oeuvres mathématiques. Augmentées par Albert Girard*. chez Bonaventure & Abraham Elsevier, imprimeurs ordinaires de l'Université.

COPIA DI REVISIONE

Strang, G. e G. J. Fix (1973). «An analysis of the finite element method(Book- An analysis of the finite element method.)» In: *Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, Inc., 1973. 318 p.*
Straub, H. (1952). *A History of Civil Engineering*. London: Leonard Hill.
Sugimoto, K. (2008). «Earthquake-Resistant Design in Japanese Pagodas: A Historical Perspective». In: *Journal of Japanese Architecture* 12.3, pp. 45–67.
Sullivan, L. (mar. 1896). «The tall office building artistically considered». In: *Lippincott's Monthly Magazine*.
Sundaram, M. e G. K. Ananthasuresh (2009). *Gustave Eiffel and his Optimal Structures*. Vol. 14. 9. Indian Academy of Sciences, pp. 846–855.
Swanson, J. A. (1971). *ANSYS Engineering Analysis System*. Rapp. tecn. Pittsburgh: Swanson Analysis Systems.
Szabó, I. (1977). *Geschichte der mechanischen Principien*. In German; comprehensive history. Basel: Birkhäuser.
Thacker, B. et al. (2004). *Concepts of Model Verification and Validation*. Rapp. tecn. LA-14167. Los Alamos National Laboratory.
The Baltimore Sun (1979). «Pier Luigi Nervi, famed architect, dies in Italy». In: *Proquest Historical Newspapers*.
The Economist (lug. 2025). «How the Gulf's rulers want to harness the power of science». In: *The Economist* 449.9311. Accessed: 2025-01-12, pp. 20–23.
The Holy Bible, Containing the Old and New Testaments (1611). Authorized King James Version. London: Robert Barker, Printer to the King.
Thomson, W. (1848). «On an Absolute Thermometric Scale Founded on Carnot's Theory of the Motive Power of Heat». In: *Philosophical Magazine* 33, pp. 313–317.
– (1851). «On the Dynamical Theory of Heat, with Numerical Results Deduced from Mr Joule's Equivalent of a Thermal Unit, and M. Regnault's Observations on Steam». In: *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* 20, pp. 261–288.
Thomson, W. L. K. (1855). «On the Thermoelastic, Thermomagnetic, and Pyroelectric Properties of Matter». In: *Philosophical Magazine* 5, pp. 4–27.
Thrall, A., D. Billington e K. Bréa (2012). «The Maria Pia Bridge: A major work of structural art». In: *Engineering structures* 40, pp. 479–486.
Timoshenko, S. P. (1953). *History of Strength of Materials*. New York, U.S.A: McGraw-Hill.
Timoshenko, S. e J. Goodier (1970). *Theory of Elasticity*. McGraw Hill.
Timoshenko, S. P. e J. M. Gere (1976). *Mechanics of Materials (Strength of Materials)*. 3ª ed. New York: McGraw-Hill.
Todhunter, I. e K. Pearson (1893). *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials*. Two volumes, Edited and completed by Pearson, K. Cambridge University Press.
Toomer, G. J. (1998). *Ptolemy's almagest*. Princeton University Press.
Torricelli, E. (1644). *Opera geometrica*. Latino. Contains *De sphaera et solidis sphaeralibus*, *De motu gravium naturaliter descendentium et proiectorum*, and *De dimensione parabolae*. Florence: Amadoro Massa & Lorenzo de Landis.

COPIA DI REVISIONE

Torroja, E. (1962a). «Hipódromo de la Zarzuela». In: *Informes de la Construcción* 14.137, pp. 19–38.
– (1962b). *The Structures of Architecture*. University of California Press.
– (2008). «Razón y ser de los tipos estructurales». In.
Torroja, E. e E. T. Miret (1958). *The structures of Eduardo Torroja: an autobiography of engineering accomplishment*. FW Dodge Corporation.
Torroja, E., J.-J. Polivka e M. Polivka (1958). *Philosophy of structures*. Univ of California Press.
Truesdell, C (1960). *The Rational Mechanics of Flexible Or Elastic Bodies 1638-1788: Introduction to Vol. X and XI of Leonhardi Euleri Opera Omnia*. This is the the definitive print source for Euler's works. Publication began in 1911, growing to scores of volumes comprising nearly all of Euler's works. Birkhäuser e the Euler Commission of Switzerland.
Truesdell, C. (1968). *Essays in the History of Mechanics*. Springer.
– (1976). «History of classical mechanics». In: *Naturwissenschaften* 63.2, pp. 53–62.
Truesdell, C. e W. Noll (1965). «The Non-Linear Field Theories of Mechanics». In: *Handbuch der Physik*. A cura di S. Flügge. Vol. III/3. Berlin: Springer.
Turnbull, S. (2003). *Japanese Castles 1540-1640*. Osprey Publishing.
Turner, M. J. et al. (1956). «Stiffness and deflection analysis of complex structures». In: *journal of the Aeronautical Sciences* 23.9, pp. 805–823.
Turner, M. (1959). *The direct stiffness method of structural analysis*. Rapp. tecn. Technische Hockschule, Aachen, Germany.
Van Musschenbroek, P. (1729). *Physicae experimentales, et geometricae, de magnete, tuborum capillarium vitreorumque speculorum attractione, magnitudine terrae, cohaerentia corporum firmorum dissertationes: ut et ephemerides meteorologicae Ultrajectinae*. apud Samuelem Luchtmans.
Varignon, P. (1725). *Nouvelle mecanique ou statique: dont le projet fut donné en MDCLXXXVII*. Vol. 2. chez Claude Jombert.
Vashy, A. (1892). «Sur les Lois de Similitude en Physique». In: *Annales Télégraphiques* 19, pp. 25–28.
Venezia, F. (1989). «Base: A Museum: Homage to Gibellina Vecchia, 1985: Gibellina Nuova, Sicily». In: *Perspecta* 25, pp. 202–215.
Vergilius Maro, P. (2008). *The Aeneid*. Trad. da C. Day Lewis. Con introd. di J. Griffin. Oxford World's Classics. Translation first published: London, Hogarth Press, 1952. Oxford: Oxford University Press.
Vesalius, A. (1998–2009). *On the Fabric of the Human Body: A Translation of De Humani Corporis Fabrica Libri Septem*. Trad. da W. F. Richardson e J. B. Carman. Vol. 5 volumes. English translation of the 1543 edition. San Francisco: Norman Publishing.
Vignola, G. B. da (1969). *Canon of the Five Orders of Architecture*. Dover Publications.
Vinci, L. da (1881). *Les Manuscrits de Léonard de Vinci*. Manuscripts A–M, c. 1490–1519. Paris: Institut de France.
– (1938). *The Notebooks of Leonardo da Vinci*. New York: Reynal & Hitchcock.

COPIA DI REVISIONE

Viola, E., L. Panzacchi e F. Tornabene (2004). «Structural Analysis of Historical Masonry Arches». en. In: *Restoration, International Conference of Restoration, Recycling and Rejuvenation Technology for Engineering and Architecture Application*. Cesena, Italy, pp. 7–11.
Viollet-le-Duc, E.-E. (1854). *Dictionnaire raisonné de l'architecture française du XIe au XVIe siècle*. Vol. 1. Bance.
– (1875). *Discourses on Architecture*. Translated from the French by Benjamin Bucknall. Boston: Ticknor e Company.
Virlogeux, M. (2001). «Bridges with multiple cable-stayed spans». In: *Structural Engineering International* 11.1, pp. 61–82.
Virlogeux, M. et al. (2005). «Millau Viaduct, France». In: *Structural Engineering International* 15.1, pp. 4–7.
Vitalis, L. (set. 2021). *Pier Luigi Nervi, l'architecture biomimétique avant la lettre ?* Rapport de recherche hal-03359251. MAP – Modèles et simulations pour l'Architecture et le Patrimoine.
Vitruvius (1960). *The Ten Books on Architecture*. Dover.
Vitruvius e M. H. Morgan (1914). *The Ten Books on Architecture*. Harvard University Press.
Voigt, W. (1898). *Die fundamentalen Eigenschaften der Krystalle. 243 pp*.
Voigt, W. (1910). *Lehrbuch der Kristallphysik*. Leipzig: Teubner.
Voltaire [Arouet, F.-M. (1759). *Candide, ou l'Optimisme, traduit de l'allemand de Mr. le Docteur Ralph*. Published without author's name or place of publication. First edition; priority of the Cramer Geneva printing (299 pp.) established by Gagnebin (1952) and confirmed by Wade and Barber. *Printing and the Mind of Man*, no. 204. [Genève]: [Gabriel Cramer], p. 299.
– (2009). «Poème sur le désastre de Lisbonne, ou Examen de cet axiome : Tout est bien». In: *Œuvres complètes de Voltaire*. A cura di D. Adams e H. T. Mason. Vol. 45A. Written December 1755; first authorised edition Geneva: Cramer, 1756. 180 lines. Oxford: Voltaire Foundation, pp. 315–360.
Wagner, D. L. (1983). *The Seven Liberal Arts in the Middle Ages*. Collection of essays covering each of the seven liberal arts and their historical development. Bloomington: Indiana University Press.
Wakamizu, S. (2003). *Namazu wa Odoru*. Tokyo: Bungeisha.
Wallis, J. (1670). *Mechanica, sive de Motu Tractatus Geometricus*. London: Guliemi Godbid.
– (1695). *Opera mathematica*. Oxford University Press.
Wassell, S. R. (2008). «Andrea Palladio (1508-1580)». In: *Nexus Network Journal* 10, pp. 213–226.
Webster, J. (2001). «Haydn's *Seven Last Words*: An Introduction». In: *The New Grove Dictionary of Music and Musicians*. A cura di S. Sadie. 2ª ed. Vol. 11. London: Macmillan, pp. 171–173.
Weidman, P. (2009). «Modified shape of the Eiffel Tower determined for an atmospheric boundary-layer wind profile». In: *Physics of Fluids* 21.6, p. 067102.
Westfall, R. S. (1980). *Never at Rest: A Biography of Isaac Newton*. Cambridge: Cambridge University Press.

COPIA DI REVISIONE

Whiteside, D. T. (1969). *The Mathematical Papers of Isaac Newton. Volume V: 1683–1684*. Editor and commentary by Derek T. Whiteside. Cambridge: Cambridge University Press.
Wilkes, M. V. (1951). «The EDSAC». In: *Journal of the British Institution of Radio Engineers* 11, pp. 327–331.
Willis, R. (1842). «On the Construction of the Vaults of the Middle Ages». In: *Transactions of the Royal Institute of British Architects, I*.
– (1910). *On the construction of the vaults of the Middle Ages*. Royal Institute of British Architects.
Wilson, E. L. (1969). *SAP: A General Structural Analysis Program*. Rapp. tecn. Berkeley: University of California, Berkeley.
Wilson, E. (1960). «Matrix Analysis of Nonlinear Structures». In: *Proceedings of 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, Pittsburgh Pa.*
Wilson, E. e R. Clough (1962). «Dynamic Response by Step-by-Step Matrix Analysis». In: *Proc. Symposium on the Use of Computers in Civil Engineering*. Laboratorio Nacional de Engenliaria Civil, Lisbon, Portugal.
Winchurch, M. E. (2007). *The Art of Thin Shell Design: A Comparison of Eduardo Torroja and Pier Luigi Nervi*. Undergraduate Thesis in the Department of Civil and Environmental Engineering.
Winkler, E. (1875). *Theorie der Brücken. Aeussere Kräfte gerader Träger*. Tedesco. 2ª ed. Vorträge über Brückenbau 1. [Theory of Bridges: External Forces on Straight Beams]. Wien: Carl Gerold's Sohn.
Wisner, B. et al. (2004). *At Risk: Natural Hazards, People's Vulnerability and Disasters*. 2ª ed. London: Routledge.
Wittkower, R. (1944). «Principles of Palladio's Architecture». In: *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes* 7.1, pp. 102–122.
Wolfe, M. I. e R. Mark (1976). «The collapse of the vaults of Beauvais Cathedral in 1284». In: *Speculum* 51.3, pp. 462–476.
Wolfram, S. (1988). *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*. Redwood City, CA: Addison-Wesley.
Wuhrmann, S. (1994). «Le Tremblement de Terre entre Peinture de Genre et Peinture d'Histoire». In: *Art + Architecture en Suisse* 45.4, pp. 330–339.
Wulff, H. E. (1968). «The Qanats of Iran». In: *Scientific American* 218.4, pp. 94–105.
Young, T. (1807). *A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts*. Vol. 1. Lecture XXXIX, p. 463. London: Joseph Johnson.
Zammattio, C. (1980). *Leonardo the Scientist*. McGraw-Hill.
Zienkiewicz, O. (1967). *The Finite Element in Structural and Continuum Mechanics*. First. McGraw-Hill, London.
Zienkiewicz, O. e Y. K. Cheung (1964). «Buttress Dams on Complex Rock Foundations». In: *Water Power* 16, p. 193.
– (1965). «Stresses in Buttress Dams». In: *Water Power* 17, p. 69.
Zienkiewicz, O. e R. Taylor (2000). *The finite element method: Solid mechanics*. Vol. 2. Butterworth-heinemann.

COPIA DI REVISIONE

Zixuan, C., C. Jixun e Z. Zhigang (2018). «Curvature and Its Application in Huygens Isochronous Pendulum». In: *2018 IEEE International Conference of Safety Produce Informatization (IICSPI)*. IEEE, pp. 661–666.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Indice tematico — Parte I: Storia

Libro di diversi terremoti, 710

, 45, 668
Pont des Invalides, 187
Sostanze *esecuzioni*, 573
Sostanze *fermezza, utilizzazione, venustas*, 574

a partire da*a partire da*, 14
A., 594
A.*Principia Philosophiae (Descartes)*, 146, 245
abacus, 487
ABAQUS, 481
Abbasid Caliphate, 85
AcadéLe scienze, 183
Academia Scientiarum Imperialis Petropolitana, 173
Academy (Plato), 103, 104
AcadéLe scienze, 92, 148
Accademia dei Lincei, 91, 142
Academia del Cimento, 91
acceleration, 162
Achaemenid period, 33
action at a distance, 147
Acuto, 77
ad quadratum, 589
ad triangulum, 69, 113, 589
ad un quadratum, 113
ad un quadratum, 69, 594
Additamentum ad Problema Funicolare, 307
Additamentum I: De curvis elasticis, 384
ADINA, 481
aeolipile, 109
aeroelastic analysis, 462
aircraft structures, 461
Al-Azhar, 110
Al-Baghdaadi, 517
Al-Biruni, 111
al-Bukhari, 688
Al-Hakim bi-Amr Allah, 110
Al-Khazin, 111
Al-Khwarizmi, 86
Kitāb al-mukhtaṣar, 15
Al-Ma'mun, 85
Al-Mayl, 517
Alberti, Leon Battista, 105, 114, 575, 584
  definitor, 584
Alexander the Great, 103
Alexandria, 104–106, 108
Alhazen, 110
Altissimum planetam tergeminum observavi, 142
American Society of Mechanical Engineers (ASME), 419
Ammann, Othmar, 619
anagram, 152, 205
Anagrams and ciphers, 142, 152, 154, 160, 206
Analisi dimensionale, 145
Analisi strutturale; approccio storico, 10
Analitica medica, 548
analitico
  meccanica, 183

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese, potrebbero verificarsi errori.

Analizzazioni e risultati, 71
analysis, 177
Ananta, 684
anatomical
observation, 89
anatomical revolution, 90
Andreas Vesalius, 89
Anfangsgründe der Mathematik, 279
Anguttara Nikaya, 686
anisotropy, 414
Ansei Edo earthquake, 668
Ansei Kenmonroku, 668
Anthemius of Tralles, 710
anthropometry, 582, 586
anthropomorphic, 503
Apollo, 681, 682
Apollonius (son of Apollonius of Perga), 107
Apollonius of Perga, 107
applied mechanics, 418
Arab-Islamic
iwan, 35
muqarnas, 35
qanāt, 35
Arab-Islamist
Al-Khwarizmi, 36
Córdoba, 35
Omar Khayyam, 36
Arcetri, 144
arch, 107
Etruscan, 41
Persia, 33
Roman, 41
Archimedes, 106, 112, 512
Archimedes Palimpsest, 106
Archimedis, 37
Archippus, 682
Architect
Candela, 644
Gehry, 645
Otto, 630
Saarinen, 628
architect-engineer, 416
architecte, 417
architects
Paladio, 43
Phidias, 17
Vitruvius, 42
Architettone, 720
Archive for Rational Mechanics and Analysis, 419
Archytas, 37
arcitect
Gaudi, 627
Argyris, John, 461
Aristotelian
grip, 87
meccanica, 158
Aristotle, 87, 103, 110, 510
Arroyo Parida fault, 714
artificial intelligence, 661
asse neutro, 183
assembly by superposition, 466
astronomical
observation, 88
astronomy, 88
Aswan, 110
Athena, 679
Atto Eruditorum, 248, 292, 301, 381
Automatizzato*Automatizzazione*, 109
axiom, 104
axiomatic field theory, 421
Aztec
world-ages, 715

Baalbeck, 47
Baalbek, 720
Babbage, 491
Babylonians, 14, 15
Bach, J.S., 719
Bacon, Francis, 87, 135
Bacon, Roger, 110
Baghdadi, 517
Baixa, Lisbon, 703
Baja California, 714

COPIA DI REVISIONE

Baker, William, 653
balance, 111
    laws, 387, 406, 421, 425
Bandel, Hannskarl, 628
Banu Musa, 86
Basel, 166, 173
    mathematical school, 168
Basra, 109
Bayt al-Hikma, 85
beam
    bending, 198
    cantilever, 140
    cantilevered, 237
    deflection, 177
    equation, 425
Beeckman, Thomas, 236
Beghini, Alessandro, 654
Belice Valley, 710
Bellarmine, Robert, 142
Belopoeee, 109
bending, 192
    moment, 290, 342
    unsymmetrical sections, 193
Benedetti, 521
Benouville, Léon, 63
Benvenuto, Edoardo, 512
Berkeley, 495
Bernoulli
    Daniel, 170, 290, 367, 545
    Family, 166
    Jakob, 167, 258, 274, 290, 342, 367, 382
    Johann, 169, 273, 290, 336, 376, 538, 546
Bibliotheque nationale de France, 112
Bihar earthquake, 1934, 685
Billington, David P., 657
BIM, 498
biomechanics, 481
biomimetic architecture, 615
blood circulation, 90
Bodhi tree, 685
Bossut, Charles, 253
Botero, 716
boundary value problem, 335, 420
Boyle, Robert, 92
brachistochrone, 170, 326
Brahe, Tycho, 88, 159
bridge
    Alamillo, 646
    Alcantara, 41
    Alexandre III, 601
    Anji, 44
    Bosphorus, 35
    Brooklyn, 625
    Darius, 33
    dell'Accademia, 582, 583
    du Gard, 129
    Hellespont, 35
    invalides, 187
    Königsberg, 177
    Menai, 185
    Millau, 655
    Morandi, 619
    Navier, 184
    Neuilly (de), 133
    Pont des Invalides, 187
    Pont du Gard, 41
    Ponte Maria Pia, 602
    Salginatobel, 606
    Shushtar, 33
    Sunniberg, 620
    Tacoma Narrows, 172
    Telford, 187
    Vieille-Brioud, 134
    xerxes, 33
Brumel, A., 719
Bruneleschi, 74, 76
Bruno, Giordano, 530
brutalism, 607
Bubnov–Galerkin method, 469
buckling, 177
Buddha, 685
Buddhism, 685
bundled tube, 620

COPIA DI REVISIONE

Buonarroti, Michelangelo, 72
buoyancy, 106, 112
Buridan, Jean, 518
Burj Khalifa, 654
Burri, Alberto, 710
Buyid dynasty, 109
Byzantine Empire, 111

cable-stayed bridge, 655
Cairo, 110
Calatrava, Santiago, 646
calculus, 177, 290
  invention, 160
  variations, 174, 178, 290
Cambridge tripos, 390
Candela, Félix, 644
capacità di pensiero, 39
capcity-demand, 244
Capuana, L., 708
Caravaggio, M., 98, 265, 386, 426, 485, 563, 664
Carnot's theorem (impact), 560
Carnot, Lazare, 559
Cartesian coordinates, 146
Cascadia suduction, 670
Castiglian, Alberto, 178
Castigliano, Alberto, 433, 462
  theorems, 433
catenaria, 295
catenary, 170, 290, 626
  Bernoulli, Jakob, 300
  Galileo, 296
  Huygens, 297
  Leonardo, 296
  Stevin, 297
catenoid, 628
catfish, 667
cathedral
  Beauvais, 60
    1284 collapse, 61
    1573 collapse, 64
    astronomical clock, 60
  dimensions, 50
  Duomo of Milan, 67
  Gothic, 48
  notable, 50
  Santa Maria del Fiore, 76
  St Peter, 72
CATIA software, 645
Catoptrica, 109
Cauchy
  stress tensor, 408
Cauchy, Augustin-Louis, 190, 334, 387, 397
  equations of motion, 407
  stress principle, 408
  stress tensor, 398
  tetrahedron, 399
  theorem, 399
Celebre catenariae problema, 384
center of gravity, 102, 104, 106, 112
  Torricelli's principle, 539
chain model, 73
Champollion, Jean-François, 20
Chartres, 112
du Châtelet, Emilie, 551
chevet, 52
China
  Hampi, 45
  Khajuraho, 45
Chumash Painted Cave, 714
chymistry, 161
du Châtelet, Émilie, 204
Cicero, 105
cipher, 205
Citazione:*La catena*, 299
civil engineer, 418
Clapeyron, Benoît, 431
classical orders, 126
classification
  Greek, 39
Clausius, 406, 409
Clausius-Duhem inequality, 409
Clebsch, Rudolf Friedrich Alfred, 257, 438
clootcrans, 525, 548

COPIA DI REVISIONE

Clough, Ray W., 464, 473
Codex, 117
  Madrid, 240, 241
Cogito, ergo sum, 146
Coleman, Bernard, 406, 414
Collegium Experimentale sive curiosum, 168
column
  buckling, 198, 290
Comité Européen du Béton, 610
Commentariincia a scuola Petropolitanae, 174
Compagnie des Établissements Eiffel, 603
computation, advent of, 457
computational
  mechanician, 419
  methods, 457
conchoid, 78
concinnitas, 576
concrete, 580
Condoglia marble, 68
conic sections, 107
Conon of Samos, 105
Consagra, P., 712
Consagra, Pietro, 711
conservation
  laws, 406
  mass, 387, 406, 407
  of motion, 146
constitutive
  relations, 387, 401, 425
  theory, 411, 421
constraints
  inequality, 559
  unilateral, 559
continuity equation, 407
continuum mechanics, 191, 203, 290, 388, 416
  general formulation, 388
  mathematical foundations, 387
  modern, 419
  synthesis, 424
coordinate
  system
    zodiac, 14
  transformation, 466
Copernicus, Nicolaus, 88, 136
Corpo*Corpo dei Ponts et ChaussÉ*, 182, 187
Corrao, L., 720
Corrao, Ludovico, 711
Coulomb, Charles-Augustin de, 179, 250, 395, 398, 480
Courant, Richard, 469
Cramer, Gabriel, 382
creep, 421
Cretto, Grande, 711
Cross, Hardy, 441
crystal lattices, 414
Cueva de la Serpiente, 714
Culmann, Carl, 606
Culmann, Karl, 194
cuneiform, 12, 13, 18
  Yale Babylonian Collection 7289, 12, 13
Curator of Experiments, 150
Curie family, 166
curva trascendentale, 295
curvatura, 294
Curvatura Laminae Elastica, 169, 383
Curvatura radii in diaphanis non uniformibus, 384
curvature, 267, 292, 334
  Bernoulli, Jakob, 274
  Bernoulli, Johann, 273
  Kästner, 279
  Leibniz, 272
  Newton, 269
  Oresme, 268
cycloid, 291

d'Alembert, Jean le Rond, 188, 335
  principle, 551, 554
da Vinci, Leonardo, 114, 234, 240, 296, 521, 584
  Architect, 119
  Engineer, 118
  notebooks, 116

COPIA DI REVISIONE

Vitruvian Man, 585
dams
finite element analysis, 474
stress analysis, 458
Darcy, Henry, 480
De Architectura, 43, 108, 569
De Beghinselen der Weeghconst, 138
De Honnecourt, V., 83
De Humani Corporis Fabrica, 89, 90
De linea in quam flexile se pondere proprio curvat, 383
De Lucchi, M., 720
De motu corporum in gyrum, 159
De motu gravium naturaliter discendentium et proiectorum, 141, 539
De Planorum Aequilibriis (Archimede), 512
De ratione ponderis, 518
De Re Aedificatoria, 114, 575
De Revolutionibus Orbium Coelestium, 137, 142
deductive reasoning, 104
deformation, 411
consistent, 435
della Porta, Giovanni Battista, 109
Della Scienza Meccanica, 141
delta wing problem, 462
density measurement, 111
Descartes, René, 88, 146, 292, 296, 513, 532
detrusion, 254
di giro in giro, 76
Dialogo per i due sistemi mondiali principali, 235
Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, tolemaico e copernicano, 142
Die Graphische Statik, 194
Die neueren Metodologia per il Festigkeitslehre, 434
differential
equations, 294
differenziale
calcolo, 171
diffusion, 479
dimensional analysis, 145
Dioptra, 109
Diplom-Ingenieur, 418
Dirac, P., 666, 680, 685, 709, 721
Dirac, Paul, 562
Discorsi (Galileo), 527
Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica & i movimenti locali, 140, 144
Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica & i movimenti locali, 383
Discours de la méthode, 146
Discourses and Mathematical Demonstrations Relating to Two New Sciences, 235
displacement
method, 437, 462
dissipation inequality, 410
Domanda di adesioneègles de massimizza e minimis à che non si puòèmes de statique relatifs à l'architettura, 179
dome, 107
Arab-Islamic, 35
Dositheus of Pelusium, 105
Dreyfuss, Henry, 588
Dugas, René, 201
Duhem, Pierre, 406, 409
Durer
Melencolia, 23
dynamic, 141, 149
analysis, 475
temporal discretization, 459

e la sua vita, 143
E' un'esperienza*Le cose si fanno*, 528
earth pressure, 195
earthquake, 14
mythology, 715
earthquake-resistant design
earliest Western, 710

COPIA DI REVISIONE

Ebisu, 668
Echidna, 682, 683
Egypt, 26
  hypostyle hall, 27
  Imhotep, 27
  Karnak temple, 27
  mastaba, 27
Egyptians, 14, 18
Eiffel, Gustave, 602
Einstein, Albert
  on the Modulor, 588
elastic
  body, 418
  curve, 177
  energy, 325
  hypothesis, 366
  resistance, 361
elastician, 419
élasticité, 418
elasticity, 195, 201, 300, 416
  continuum theory, 387
  molecular theory, 387
  paradigm shift, 388
  theory, 197, 200, 418
elasticità, 183
elastico, 168, 171, 267, 299
*elastico*Specie di ninina, 347, 348
electrical conduction, 479
Elementa Physicae, 237
Elementa super dimostraem ponderum, 518
Gli elementi, 16, 104, 291
elephant, cosmic, 684
Elixir of Life, 161
ellipse, 107
elliptic
  functions, 350
  integrals, 300, 347
Elzevir, 94, 144
Empedocles, 509
empirical
  design, 113
  method, 136
empirico moderno, 88
Enceladus, 679
Encyclopédie, 94, 188
energy
  balance, 387, 406, 409
  Bernoulli's usage, 548
  methods, 421, 425
  minimization, 335
  principles, 388
engineer, 417
  etymology, 21
engineering
  education, 214, 406
  practical, 195
Enlightenment, 94, 170
Enlil, 506
entropy production, 409
Sull'Equilibrio dei Piani, 37
equilibrium, 111, 177
  condition, 139
  equations, 400
Erasmus program, 174
Eratosthenes, 105
Ergonomics, 588
Escher, M., 289
Esecuzione delle domandeègles de massimizza e minimis à chi è in grado dièmes de statique relatifs à l'architettura, 250
Estetica e tecnologia nell'edilizia, 612
Euclid, 86, 104, 112, 291
Euclid of Megara, 104
Eudemus of Pergamum, 106
Euler, Leonhard, 157, 173, 177, 259, 290, 332, 365
  Genuina principia, 377
  Methodus inveniendi, 335, 382
Euler-Bernoulli beam theory, 366
Euler-Lagrange equation, 318, 336, 559
Evolute/involute, 281
Evoluzione describitur, 277
Exercitatio Anatomica de Motu Cordis et Sanguinis in Animalibus, 90

COPIA DI REVISIONE

experimental
mechanics, 141
extra, 54

fatigue, 421
fault
strike-slip, 714
Fermat's principle, 327
Fermat, Pierre de, 292
ferro da stirocemento, 613
ferrocement, 613
Festigkeitslehre, 418
Festival di Basilea, 314
field theory, 420
filament, 236
Filosofia Naturalis Principia Mathematica, 87, 151, 159, 162, 282, 543
finite difference method, 457
mesh discretization, 459
finite element, 354, 421, 468
generalization, 479
first principles, 388
five percent, 647
five points of a new architecture, 585
flexibility
matrix, 447
method, 197, 435, 466, 467
flexile del continuum del pendio di Ut, sic stabit contiguum rigidum inversum, 74, 153
flexural
rigidity, 352, 368
fluid mechanics, 479
Flusso, 160, 164, 293
flying buttresses, 53, 59, 112
folio, 117
force, 106, 162, 177, 502
centrifugal, 149
equilibrium, 138
flow, 610
impressed, 519, 522, 544
innate, 516, 543
method, 435, 462, 466
parallelogram, 522, 523, 544, 552, 555
parallelogram of, 138
path, 107
polygon, 194, 420
system, 138
transmission, 110
versus stiffness method, 478
form
finding, 626
follows function, 599, 647
Fourier, Joseph, 395, 480, 559
fourth-order differential equation, 335
fracture mechanics, 421
frame-indifference, 421
free body diagram, 244
French school, 388
achievements, 424
friction, 511
fulcrum, 250
functional, 321, 335
functionalism, 585
fundamental theorem, 160, 210
Funicolare, 299
funicular polygon, 194
Fédération Internationale de la Précontrainte, 610
Föppl, August, 421

gaiola, 704
galenic theory, 90
Galerkin method, 468
finite element interpretation, 469
Galerkin, Boris, 468
Galilei, Galileo, 90, 139, 140, 234, 296, 380, 397, 527
Gallagher, Richard H., 477
Gandhi, M.K., 685
Gaudi, Antoni, 627
Gauss, Carl Friedrich, 460
Gauss–Seidel iteration, 460
Gautier, Hubert, 127
Gehry, Frank, 645
generalized coordinates, 556

COPIA DI REVISIONE

Genuina principia doctrinae de statu aequilibri, 384
geomechanics, 481
Geometria deutsch, 67
geometric motion (Carnot), 560
geometry, 36, 67, 104, 266
  angles, 14
  operative, 589
  seked, 28, 31
  triangles, 14
Germain, Sophie, 204
Gesamtkunstwerk, 69
Gibellina, 710, 720
di Giorgio Martini, Francesco, 584
Girard, Albert, 249
Goldberg, Joseph Ely, 443
Golden
  rule of mechanics, 528
  theorem, 274, 275
graphical
  methods, 58, 126
  statics, 606
gravita, 511, 522
gravitas secundum situm, 518, 548
gravity
  specific, 112
Greece
  Archimedis, 37
  Parthenon, 38
  Peripatetic school, 37
  Phidias, 38
  trabeated, 38
Greeks, 15, 21
Green, George, 191, 387, 413
Gregotti, Vittorio, 711
Gualandrino, 78
Guggenheim Museum Bilbao, 646
Guidoboni, Emanuela, 710

Hagia Sophia, 710
Hamilton's principle, 332
Hamilton, William, 505
hand calculation, 457
hanging basket, 234
harmony, 576
Harun al-Rashid, 85
Harvey, William, 90
Haydn, J., 719
heaviness, 511
heliocentrism, 88, 142
Hennebique, François, 616
Hero of Alexandria, 109
Hesiod, 678
Heyman, Jacques, 57, 62
Hieron II, 105
Hipparchis, 28
Historia et Origo Calculi Differentialis, 292
history
  big picture
    historically, 8
    thematically, 7
  coverage approach, 7
  why, 6
Homer, 678
de Honnecourt, Villard, 67, 69, 112, 113, 584, 633
Hooke's law
  generalized, 414, 420
Hooke, Robert, 92, 150, 417, 480
Horologium Oscillatorium, 148
house arrest, 143
Hrennikoff, Alexander, 469
Hungary, 112
Huygens' Principle, 149
Huygens, Christiaan, 147, 148, 163, 282, 290, 297, 376, 534
hydraulic systems, 109
hydrodynamics, 172
hydrostatics, 106, 111
hyperbola, 107
hyperelasticity, 389, 413
  significance, 425

I Ching, 15
IBM 701, 474
IBM 704, 474

COPIA DI REVISIONE

Ibn al-Haytham, 110
Ibn-Sinna, 517
Il mio nome, 505
il plagio, 160
il principio di d'Alembert, 188
Imhotep, 26
impetus, 516
incifrazione latina, 152
inclination, 516
inclined plane, 138, 529
incorporeal, 516
indeterminate structures, 425
India
    Iron Pillar of Delhi, 45
    stepwells, 45
Indice Chemicus, 161
Indice Librorum Prohibitorum, 142
inductive reasoning, 136
inertia, 511
Infinito
    ∞, 633
influence lines, 197, 445
ingénieur
    17th-18th century, 417
    militaire, 417
    ponts et chaussées, 417
inquisizione, 143
Institution of Civil Engineers, 418
Instituto Eduardo Torroja, 610
integro-differential equation, 366
intellectual history, 84
internal energy, 409
Intradosaggio, 54
Introductio in analisin infinitorum, 175, 293
Irons, Bruce M., 481
Islamic Golden Age, 86
Isler, Heinz, 630
ISMES, 615
isoparametric elements, 481
isoperimetric problem, 331, 335
isostatic lines, 613
isotropic materials, 414
isotropy, 414
Istituzioni di fisique, 551
iterative methods, 460

Jacobovici, S., 677
Jacquier, François, 72
Japan
    Himeji, 45
    shinbashira, 45
Japanese aesthetics, 576
Jerónimo, 707
John Hancock Center, 620
Johnson, K., 501
Jordanus de Nemore, 518
Joséphe, 707
Jung, C. G., 723

Kali Yuga, 684
kaname-ishi, 668
Kant, I., 703, 707
karma, 507, 685
Kashima Shrine, 691
Kepler, 159
    Johannes, 29, 89, 530
    laws, 89
Kepler, Johannes, 110
Khan, Fazlur, 620
Khayyam, Omar, 111
Kimmelman, Michael, 652
kinematics, 202
Kirchhoff, Gustav, 334, 480
Kitab Mizan al-Hikma, 111
Kleist, H. von, 705, 707
Koechlin, Maurice, 642
Kossakovsky, V., 720
Kozac Collection, 677
Kron, Gabriel, 461
Kästner, Abraham, 279

l'Hôpital, Guillaume de, 328
L'intestato*L'infermità*, 299
la conoscenza è il potere., 88

COPIA DI REVISIONE

La Costruzione La plus avantageuse des digues, 253
La forza delle colonne*La forza delle colonne*, 384
La Hire, Philippe de, 417
La mia vita, 146
La Science des Ingénieurs, 417
La vita è un'esperienza*Genuina principia*, 290
laboratorio di ricerca, 114
Lagrange
  Joseph-Louis, 189, 295, 335, 395, 396, 555
  multipliers, 557
Lagrangian, 559
Lambot, Joseph-Louis, 616
lamina, 339
Lamé constants, 414, 425
Lamé, Gabriel, 395, 403
land art, 711
Laon, 112
lateral load resistance, 621
LaTeX, 498
lattice analogy, 469
Le Corbusier, 585
  Modulor, 586
    red and blue series, 587
Le Meccaniche, 90
Leçons données à l'École royale des ponts et chaussées sur l'applicazione de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines, 183
League of Nations, 606
least action principle, 330
left-handedness, 115
legge inversa-quare di attrazione, 160
Le leggi, 509
Lehrbuch der Mechanik, 196
Leibniz, G., 163, 165, 272, 290, 292, 376, 541
Leibniz, G.W., 685, 702
Letter to a craftsman, 311
lever, 102, 103, 109
  law of, 106
Lever law
  Archimedes, 512
Liber Abaci, 15
Libera, Adalberto, 658
Lieberkuhn, C.G., 705
light
  Huygens' Principle, 149
lightness, 511
Ligorio, Pirro, 710
limit analysis, 421
line of thrust, 51
Llunji, Miloš, 660
load
  distribution, 107, 116
loads
  moving, 445
local details, 66
Longitudinal Challenge, 148, 151
Love, Augustus Edward Hough, 418
loxodrome, 77
Lucasian Professore, 158
lunar eclipse, 108
Lyceum, 103

Macedon, 103
MacNeal, Richard H., 475
Madrilenian rationalism, 609
Mahabharata, 684
Maillart, Robert, 606
major disputes, 212
Manderla, Heinrich, 438
Un manuale di meccanica applicata, 195
manutenzione, 148
Marcellus, 105
Mariotte, Edme, 397
Marmontel, J.-F., 705
mastaba, 27
master mason, 112
material
  behavior, 111, 203, 411

COPIA DI REVISIONE

failure, 201
frame indifference, 412
strength, 140
symmetry, 387, 411, 414, 421
Mathematica, 496
mathematical
modeling, 137
notation, 177, 294
physics, 388
mathematicians
Aryabhata, 16
classical
Al-Biruni, 14
Al-Khwarizmi, 15
Archimedes, 16
Aristarchus, 14
Brahmagupta, 13, 15
Euclid, 16, 17
Euler, 16
Fibonacci, 15
Hipparchus, 14
Leibniz, 15
Ptolemy, 14
Sacrobosco, 14
Thales of Miletus, 14
Descartes, 146
Euler, 173
Fathers Boscovich, 72
Huygens, 147
Jones, W., 16
Lambert, J.H., 16
Le Seur, 72
Leibniz, 163
Lindemann, F., 16
Madhava, 16
Newton, I., 16
mathematics, 87
Euler's identity, 16
Fibonacci numbers, 17
Golden Ratio, 12, 16, 17, 38
Leibniz–Gregory series, 16
mechanics, 37
Pythagorean triples, 13
quadrature of the circle, 16
Rhind Papyrus, 16
superior highly composite number, 13
mathematization, 181, 189, 214
MATLAB, 496
matrix
historical development, 447
partitioning, 466
structural analysis, 460
Maxwell's reciprocal theorem, 199
Maxwell, James Clerk, 198, 432, 462, 480, 636
Mayan
Chichen Itza, 25
Tikal, 25
measurement
braccia, 69
byzantine foot, 590
cubit, 28, 31
earth circumference, 86
historical units, 593
seked, 28
Système international d'unités, 15
Tlacxitl, 31
Meaux, 112
méscano
razione, 418
méscano- Analitica
Analitica, 189, 335, 396, 555
méscano- Cosa?*Appliqueée*, 418
Mechanica, sive motus scientia analitice exposita, 174
mechanical
advantage, 102, 109
engineer, 418
Mechanical advantage, 528
mechanician, 417
mechanics
general, 417
human body, 116
impact, 110

COPIA DI REVISIONE

lever, 37, 44
materials, 416
rational, 168
solid, 419
solids, 416
theoretical, 195
mechanistic worldview, 147
Medici, 142
Meditazioni CLXX, 383
Meiji government, 693
membrane structures, 630
Mencke, Otto, 307
Mendini, Alessandro, 711
Menelaus of Alexandria, 112
Menn, Christian, 619, 646
Mersenne, Marin, 245, 534
Merv, 111
mesh refinement, 481
Mesoamerica
aztec, 25
cosmological narratives, 715
Mesopotamia, 12
Etemenanki, 25
Ziggurats, 24
Messina disaster, 720
Messina: Città senza memoria?, 720
Metodo inveniendi lineas curves, 174, 337, 384
Metodo universale determinandae curvatura fili, 384
Metodologia Fluxionum et Serierum Infinitarum, 160, 269
Metrica, 109
Mezzogiorno, 710
Michael, Archangel, 682
Michell
Anthony, 637
structures, 639
truss, 637
Micrografia, 92
middle third rule, 255
Mignot, Jean, 71
military engineering schools, 95
Millau Viaduct, 655
mirror writing, 115
Missa Et ecce terrae motus, 719
misura
pied de roi, 591
Mo Jing, 102
modular construction, 616
Mohist, 44
Mohr's
circle, 197, 401
theorems, 432
unit load method, 197
Mohr, Otto, 196, 401, 432, 462
Mohr-Coulomb criterion, 197
molecular theory, 388
moment, 106
activity (Carnot), 560
curvature relationship, 367
distribution, 441, 488
three-moment equation, 425
momentum
balance, 387, 406, 407
balance (angular), 408
conservation, 146
Monge, Gaspard, 395
Monier, Joseph, 616
monoclinic symmetry, 414
morphogenesis, 626
Moseley, Henry, 197
motion, 177, 511
impetus, 502
pendulum, 148, 283
Mozi, 102
Mucalinda, 686
Muhammad, Prophet, 688
multiphysics analysis, 481
Museion (Alexandria), 106, 109
Muslim ibn al-Hajjaj, 688
Musmeci, Sergio, 631
van Musschenbroek, Peter, 93, 237

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Mémoire sur les lois du mouvement des corps solids, 183
Müller-Breslau
  Heinrich, 434
  principle, 446

nagas, 686
Nahui Ollin, 684
Namazu, 667
NASTRAN, 479
natural philosopher, 416, 417
natural philosophy, 87, 508
Naucrates, 106
Navier, Claude Louis, 182, 387, 402, 430
  bridge, 184
Nero, 108
Nervi, Pier Luigi, 612
Neufert, Ernst, 588
Neugebauer, Otto, 108
neutral axis, 241
Newmark's method, 476
Newmark, Nathan M., 476
Newton
  Isaac, 92, 157, 162, 269, 543
  laws, 162
  mechanics, 389
  third law, 161
Nht, 505
Nile River, 110
Noether, Emmy, 205
Noll, Walter, 412, 414, 419
nonlinear analysis, 475
Nordenson, Guy, 652
Norfork Dam, 474
Norinaga, Motoori, 692
Nouguier, Émile, 642
Nouvelle Mécanique ou Statique, 546, 548
Organo di Novum, 135
Nullius in verba, 92, 93
number systems
  binary, 12, 15
  decimal, 12, 13, 15
  duodecimal, 12–15
  Hindu-Arabic numerals, 15
  sexagesimal, 12–15
number theory, 177
Nur, A., 677

objectivity principle, 387, 411, 412
observation, 110
Opera geometrica, 539
Opera Omnia, 170
operator
  variation, 354
optimization, 333, 366
opuscolo specatum, 76
Oresme, 87, 268, 520
orthotropic materials, 414
Ottimizzazione, 92
Otto, Frei, 630

Pacific Northwest
  earthquake mythology, 715
Padua, 141
Paladino, Mimmo, 711
Palazzetto dello Sport, 612
Palazzo dello Sport, 612
Pali Canon, 685
Palladio, 105
Palladio, Andrea, 125, 578, 585
Pamphylia, 106
pandemic
  architecture during, 652
Pangloss, 706
Pannini, G.P., 227
papyrus
  Moscow, 19, 28
  Rhind, 19, 28
parabola, 107
parallelogram of velocities, 104
Parent, Antoine, 250, 397
parinirvana, 685
partial differential equation, 479
Pascal, Blaise, 149
Passione secondo San. John John., 719
Passione secondo San. Matteo, 719

COPIA DI REVISIONE

Paul III, 143
Paul, Saint, 675
Pearson, Karl, 458
pendolo cicloidale, 148
pendulum, 148
    motion, 283
Perga, 106
Pergamum, 106
Peripatetic school, 37, 103, 503
perpetual motion, 113
Perret, A., 607
Persia
    Persepolis, 33, 35
    qanat, 33
Petrarca, 39
phenomenological approach, 388
Phidias (astronomer), 105
Philip, Apostle, 682
Philoponus, 515
philosopher's stone, 161
Phoenicians, 12, 20
Phoronomy, 555
photoelasticity, 615
Sperimentazione di fisioterapia, 384
physical model, 73
Picardy, 112
Pietra della donna incinta, 720
pietramasonry, 67
pinnacle, 51, 55
planetary motion, 89
plastic limit analysis, 57
plasticity, 421
Plato, 509
Pliny the Elder, 108
Plotinus, 514
pneumatic devices, 109
Pneumatica, 109
Poisson's ratio, 387
    experimental refutation, 424
Poisson, Siméon, 181
Poisson, Siméon, 334, 395, 402
Poleni, 72
polymath, 386
    Al-Biruni, 14
    Eratosthenes, 105
    Galileo, 144
    Hooke, 92
    Leibniz, 163
    Mersenne, 147
Pombal, Marquis of, 703
Ponte dell'Accademia, 582
Poseidon, 678
Posidonius, 513
Positional gravity, 518
postulate, 104
potential energy, 340
potential-based formulation, 388
pralaya, 684
Prandtl, Ludwig, 421
prefabrication, 616
Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement (Nota di trasporto), 559
I principi meccanici di ingegneria e architettura, 197
principle
    continuity, 561
    virtual work, 434, 502, 528, 530, 548
    virtual work Torricelli, 540
Problematica funicolare, 383
Problema novum, 383
Problemi meccanici, 37, 103, 109, 503, 512
progetti, 624
progettista, 599
proportion, 576
    geometric tracing, 589
    systems, 578
Provando e riprovando, 91
Przemieniecki, J. S., 478
Ptolemy, 86
pulley, 103, 109
Puranas, 684
Purini, Franco, 711
pyramid

COPIA DI REVISIONE

Giza, 27
saqqara, 27
Templo Mayor, 26
Pythagorean triangle, 594
Python, 497

quadpartite, 51
Quadratura Curvae, e cujus evolutione describitur inflexae laminae curvatura, 315
quadrivizio, 39
quantity of matter, 518
Quaroni, Ludovico, 711
Quasimodo, S., 708, 709
I Quattro Libri dell'Architettura, 43, 125, 578

Racconto storico della vita di Galileo, 141
raddrizzamento e bussola, 291
radius of curvature, 342
Ramberg–Osgood equation, 475
Rankine, William, 134, 195
Raphael
School of Athens, 11
Rapporti et Mémoire sur les Ponts Suspendus, 185
rational mechanics, 418
Rayleigh, Lord (John William Strutt), 468
Rayleigh–Ritz method, 468
Raz.śu y ser de los tipos estructurales, 609
reciprocal
diagrams, 198
theorem, 432
Reckoner passo, 164
Reformation, 143
Regola dell'architetturaRegola dell'architettura, 126
Reims, 112
reinforced concrete, 616
reinterment, 144
Renaissance
architectural treatises, 575
Responsio ad Dn. Hugenium, 383
reversible process, 561
revolution
anatomical, 90
Richardson
extrapolation, 459
method, 459
Richardson, Lewis Fry, 458
rigid body, 110
Ritter, Wilhelm, 606
Ritz, Walther, 468
Robertson, Leslie, 650
Romanesque, 49
Rome, 144
Colosseum, 41
Pantheon, 41
Roriczer, Matthias, 67
rose, 661
rotational motion, 149
Rousseau, J.-J., 685, 702, 707
Royal Society, 92
résistance des matériaux, 418

Saarinen, Eero, 628
Saggi di naturali esperienze ingrassare nell'Accademia del Cimento, 92
Saggi nella storia della teoria delle strutture: In onore di Jacques Heyman, 10
Saggio delle macchine in général (Nota di trasporto), 559
Sagrada Famiglia, 75
Sagrada Familia, 627
Sagredo, 142
Saint-Venant's principle, 193
Saint-Venant, Adhémar, 192, 256, 257, 395, 404
Salginatobel bridge, 606
Salviati, 142
San Pietroburgo, 173
Sanjar, Sultan, 111
Santa Maria del Fiore, 74
Santa Ynez Mountains, 714
SAP (Structural Analysis Program), 474
Sarnath, 685
scaling

COPIA DI REVISIONE

laws, 140
proportion, 43
scholastic method, 88
school of Athens, 38
science, 87
scientific
method, 139
revolution, 87
scientifico
progresso, 101
scientists
classical
Archimedes, 37
Aryabhata, 45
Mozi, 44
Shastra, 45
Zhang Heng, 44
Imhotep, 26
scienza e religione (separazione), 88
Scienza o arte del costruire?, 612
Scolastica medievale, 88
screw, 109, 529
Sears Tower (Willis Tower), 620
Segnalazioni*La mia*, 573
Seidel, Philipp Ludwig von, 460
seismic activity
cultural responses to, 715
Seljuk Empire, 111
Seneca, 108
Serlio, Sebastiano, 126
serpent
as seismic metaphor, 715
horned, Baja California, 714
Serra, Richard, 646
Seven Bridges of Königsberg, 177
sexpartite, 51
Shaddai, 506
Shakespeare, 661
Shakespeare, W., 705, 709
Shatapatha Brahmana, 684
shell structures, 609
hyperbolic, 609
hyperbolic paraboloid, 644
Shesha, 684
shibusa, 576
Sicily, 710
Sidereus Nuncius, 142
Sierra de San Francisco, 714
Silas, 675
simple machines, 109, 530
Simplicio, 142
sisiutl, 715
Sistema Thayer, 215
size effect, 146
Skidmore, Owings & Merrill, 621, 653
slide rule, 488
slope-deflection method, 439
Smaismrmilmepoetaleumibunenugttauiras, 142
Snell's law, 330
Società reale, 158
solidity, 246
Risultato della catenari, 383
Soluzione problematica, 383
Soluzioni di problemi*Solutio problematis de invenienda curva*, 384
Southwell, Richard Vynne, 444
Spettacolo mutale differenziali, 383
Spettrimoniale alterato calculi differenziali in dimetienda spirali logaritmica, loxodromis naturarum, & areis triangulorum sphaericorum, 312
sphere and cylinder, 106
spina di pesce, 76
Spinoza, B., 694
springs, 154
stability, 172, 177, 195
floating bodies, 106
theory, 421
statically indeterminate structures, 430
statics, 102, 106, 138, 202, 522
Archimedis, 37
graphical, 194
Stevin, Simon, 109, 138, 297, 523

COPIA DI REVISIONE

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

stiffness
global matrix, 467
matrix, 447, 466
method, 437, 438, 467
Stoicism, 515
Stokes, George Gabriel, 418, 480
Storia
resistenza
di materiali, 9
resistenza dei materiali, 201
ingegneria strutturale, 10
Storia- Cosa?*meccanica*, 10, 201, 202
Storia della forza dei materiali, 201
Storia della Teoria dell'Estrattiva*Storia della Teoria dell'Estrattiva*, 200
Storia della Teoria delle Strutture, 10
straightedge and compass, 291
strain, 201, 203, 236
displacement relations, 401
energy, 331, 339, 387
strength, 234
of materials, 116, 195, 201, 418
stress, 201, 203, 240
concentration, 193
concept of, 397
pre-history, 397
principal, 191, 197, 400, 408
resultants, 377
tensor, 191, 387, 398
Cauchy, 420
importance, 425
symmetry, 400, 408
transformation, 197
structural
analysis, 388, 424
analyst, 419
architecture, 660
art, 657
behavior, 113
clarity, 578
elegance, 616
experimentation, 599
expression, 616
failures, 187
forms, 616
intuition, 610
morphogenesis, 626
necessity, 643
optimization, 178, 611, 638
stability, 201
theory, 424
structural engineering
etymology, 429
studia humanitatis, 39
substructuring, 461
successive over-relaxation (SOR), 460
Sulla Calcolo dell'Equilibrio e della Stiffness dei Cornici, 432
symmetry
condition, 408
group, 414
sympathy, 513, 514
Syracuse, 105
system integration, 66

Tagore, R., 685
Takemikazuchi-no-kami, 692
Takemikazuchi-no-kami, 668
tall building design, 620
tangent, 292
tangente, 291
Technische Hochschulen, 418
telescopio telescopio, 141
Ten Books on Architecture, 42
tension, 306
Teorema Egregium, 280
ThéOrie des macchine simples, 179
Theorie der Elasticitä marcire Köperiodo, 257, 438
thermal conduction, 479
Thermes, Laura, 711
thermodynamics
consistency, 389, 411
first law, 409
laws, 406

COPIA DI REVISIONE

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

restrictions, 387, 421
restrictions on constitutive relations, 414
second law, 409
thin concrete forms, 609
Thomson, Lord Kelvin, 406, 409, 418
three moment equation, 431
three-hinged arch, 606
thrust line, 107
Tibet, 686
time integration
finite difference, 459
timekeeping
calendar, 13
Republican, 15
time, 14, 15
Timoshenko, Stephen, 201, 419
Todhunter, Isaac, 200, 458
topology optimization, 639
Torre di Pisa, 139
La Torre e il Ponte, 657
Torricelli, Evangelista, 538
Torroja, Eduardo, 609
torsion, 192, 253
Torsione, 180
tortoise, cosmic, 684
tracery, 112
traction vector, 398, 408
Traduzione:, 71
Traité de Dynamique, 188, 504, 549
Traite des ponts, 127
Traité de l'équilibre des liqueurs, 150
transverse isotropy, 414
Trattaé des ponts, 183
Trattatus de Configurationibus qualitatum et motuum, 268
tribologia, 180
triclinic symmetry, 414
triforium, 52
triviale, 39
Truesdell, Clifford, 202, 406, 419
Trump, Donald, 142
truss
analysis, 194
trust but verify, 662
von Tschirnhaus, Ehrenfried Walther, 301
tubular structure, 620
Turner, M. Jonathan, 464
Tutte le opere d'arte*Tutte le opere d'arte*, 126
tychonic system, 88

U.S. Army Corps of Engineers, 474
Ungers, Oswald Mathias, 711
Unitàé d'abitare, 588
university transformation, 88
untouchability, 685
urban planning, 41
Urbano VIII (Polo), 142
Ut tensio, sic vis, 248
Utente:*uti*, 573

Vaastu Shastra, 45
Vajrayana, 686
Varaha, 684
variational
calculus, 366
formulation, 171
methods, 165, 332
principles, 331, 340, 389, 421
Varignon
Pierre, 260, 504, 546, 548
theorem, 548
Vaucelles, 112
vault, 107
ribbed, 55
vector, 194, 524
mechanics, 138
vectorial, 230, 450
Vela, la vela, 299
Veneranda Fabbrica del Duomo di Milano, 67
Verga, G., 708
Vermeer, J., 456
Verrocchio, Andrea, 114
Vers une Architettura, 585

COPIA DI REVISIONE

Vesica Piscis, 77
Victoria Amazon, 615
Vignola, Giacomo Barozzi da, 126
Viollet-le-Duc, Eugène, 49, 57, 74, 600
Virlogeux, Michel, 655
virtual work, 139
virtuosismo, 515
vis insita, 543
vis viva polemica, 542
vis viva, 164, 165, 334, 542, 543, 549, 553, 560
viscoelasticity, 421
Vishnu, 684
Vitruvian triad, 573
Vitruvius, 8, 42, 69, 108, 567, 583
Voigt, Woldemar, 414
Voltaire, 685, 702, 706, 707, 709
vortex theory, 147
voussoir, 51
Vérité, Auguste-Lucien, 60

Wallis, John, 538, 541
Warhol, A., 717
water-powered saw, 112
wedge, 103, 109
weight
    specific, 111
weighted residuals, 468
West Point, 215
wheel and axle, 109
Williot-Mohr diagram, 197
Wilson, Edward L., 474
Winkler, Emil, 446
Witelo, 110
wooden architecture, 45
work
    Carnot's moment of activity, 560
World Trade Center, 650
Wright,Frank Lloyd, 606
Wright-Patterson Conference (1965), 477
writing
    abjad, 20
    acrophonic principle, 20
    alphabet, 12, 20
    Arabic alphabet, 21
    Brahmic scripts, 21
    Chinese characters, 18
    clay tokens, 17
    Demotic, 19
    Epic of Gilgamesh, 18
    Hammurabi, 18
    Hebrew alphabet, 21
    Hieratic, 18
    hieroglyphs, 12, 18
    Ishango bone, 17
    Latin alphabet, 21
    Lebombo bone, 17
    Phoenician alphabet, 20
    phono-semantic compounds, 18
    Proto-Sinaitic, 20
    Rosetta Stone, 20
    tally sticks, 17
    vowels, 21
wrought iron construction, 602

yin-yang, 669
yonaoshi, 715
Yonaoshi, 668, 670
Young, Thomas, 157, 254
yugas, 684

Zarzuela Hippodrome, 609
Zienkiewicz, Olgierd C., 480
ZZZO:+, div , ∞, 269

COPIA DI REVISIONE

Libri II–IV

Libro II

Introduzione: fondamenti e metodi analitici

Libro III

Intermedio: metodi numerici

Libro IV

Avanzato: non linearità e altri argomenti

Le appendici seguono il Libro IV

COPIA DI REVISIONE

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Indice: Libri II–IV (Analisi)

Indice: Libri II–IV (Analisi) **793**

Elenco delle figure: Libri II–IV (Analisi) **830**

Elenco delle tabelle: Libri II–IV (Analisi) **848**

Elenco degli esempi: Libri II–IV (Analisi) **853**

Elenco dei punti chiave: Libri II–IV (Analisi) **860**

17 Introduzione **863**
17.1 Il grande quadro . . . 863
17.1.1 Architettura . . . 864
17.1.2 Ingegneria strutturale . . . 865
17.1.2.1 Struttura strutturale . . . 865
17.1.2.2 Analisi . . . 867
17.1.2.3 Valutazione della sicurezza . . . 868
17.1.3 Disciplina integrata nell'analisi strutturale . . . 868
17.2 Elementi: forze interne primarie . . . 869
17.3 Elementi di trasferimento del carico . . . 869
17.4 Tipologie di struttura . . . 870
17.5 Trasformazione degli strumenti di ingegneria . . . 875
17.6 Corsi di ingegneria strutturale . . . 876

18 Carico **878**
18.1 Introduzione . . . 879
18.2 Classificazione dei carichi . . . 879
18.2.1 Verticale . . . 879
18.2.2 Sedia . . . 880
18.2.2.1 Vento vento . . . 880
18.2.2.2 Sismica . . . 884
18.2.3 Idrostatica e terra . . . 886
18.2.3.1 Ex 18.1: Caricamento idrostatico . . . 886
18.2.4 Carico d'impatto . . . 887
18.2.5 Secondario . . . 888
18.2.6 Termotermico . . . 889

COPIA DI REVISIONE

18.2.6.1 Ex 18.2: Espansione termica/tensione . . . 890
18.3 Considerazioni . . . 891
18.3.1 Carico proiettato . . . 891
18.3.2 Posizionamento del carico . . . 891
18.3.3 Combinazioni di carico . . . 892
18.3.4 Percorso di carico . . . 893
18.3.5 Aree di tributo . . . 898
18.3.5.1 Ex 18.3: Aree di tributo . . . 899
18.3.6 Ricorso strutturale . . . 899

19 Reazioni **902**
19.1 Introduzione . . . 903
19.1.1 Tipi di supporti . . . 903
19.1.2 Equilibrio . . . 904
19.1.3 Equazioni delle condizioni . . . 906
19.1.4 Determinazione statica . . . 906
19.1.5 Instabilità geometrica . . . 907
19.1.6 Gratuiti diagrammi del corpo . . . 908
19.2 Esempi . . . 909
19.2.1 Ex 19.1: Carico idrostatico . . . 909
19.2.2 Ex 19.2: Trasferimento di carico . . . 910
19.2.3 Ex 19.3: Semplicemente supportato . . . 910
19.2.4 Ex 19.4: Carico parabolico . . . 911
19.2.5 Ex 19.5: Tre raggi di larghezza . . . 912
19.2.6 Ex 19.6: Telaio a tre cerniere . . . 913
19.2.7 Ex 19.7: Supporti incline . . . 915
19.2.8 Ex 19.8: Struttura di rettifica . . . 916
19.2.9 Ex 19.9: equilibrio aereo . . . 917
19.2.10 Ex 19.10: Barriera Jumbo . . . 918
19.2.11 Ex 19.11: Rankine: Equilibrio di un corpo galleggiante (prove idrostatiche) . . . 921
19.2.12 Ex 19.12: Palazzetto dello sport; nervi . . . 923

20 Trusse **927**
20.1 Introduzione . . . 927
20.1.1 Assunzioni . . . 928
20.1.2 Convegno di firma . . . 929
20.1.3 Determinazione e stabilità . . . 929
20.2 Metodi di analisi . . . 931
20.2.1 Metodo di articolazioni . . . 931
20.2.1.1 Ex 20.1: Analisi della capriata: metodo dei nodi . . . 932
20.2.1.2 Ex 20.2: Capriata tridimensionale . . . 935
20.3 Metodo delle sezioni . . . 938

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

20.3.1 Metodo delle sezioni . . . 938
20.3.2 Ex 20.3: Metodo delle sezioni . . . 940
20.4 Giunta/mamma . . . 940
20.4.1 Ex 20.4: Capriata semplice: metodo dei nodi/matrice . . . 942
20.4.2 Ex 20.5: Capriata complessa: metodo dei nodi/matrice . . . 944

21 Forze interne negli elementi inflessi **948**
21.1 Introduzione . . . 949
21.1.1 Avviamento di ingegneria: dalle sollecitazioni alle forze interne . . . 949
21.1.2 Forze interne per travi rettilinee/curve da 2d/3d . . . 950
21.1.3 Perché è importante . . . 952
21.1.4 Convenzioni di cartello di progettazione . . . 953
21.2 Carico, taglio, relazioni di momento . . . 954
21.2.1 Forma differenziale . . . 954
21.2.2 Forma integrale . . . 955
21.3 Esempi . . . 956
21.3.1 Ex 21.1: Fascio con carico inclinato . . . 957
21.3.2 Ex 21.2: Telaio incline . . . 958
21.3.3 Ex 21.3: Telaio con carico idrostatico . . . 961
21.3.4 Ex 21.4: Carico lineare e variabile . . . 963
21.3.5 Ex 21.5: Telaio; esempio tetto inclinato . . . 964
21.3.6 Ex 21.6: Telaio reciproco . . . 965
21.3.7 Ex 21.7: Telaio 3D . . . 969

22 Differenze; Curva elastica **973**
22.1 Introduzione . . . 973
22.2 Equazione differenziale . . . 974
22.2.1 Ex 22.1: Doppia integrazione . . . 975
22.2.2 Ex 22.2: Sfilettatura massima . . . 976
22.2.3 Ex 22.3: Forma sci ottimale . . . 977
22.2.4 Ex 22.4: Trave galleggiante . . . 978
22.3 Curvatura . . . 981
22.3.1 Ex 22.5: Ruota per bicicletta . . . 983
22.3.2 Ex 22.6: Rigidezza di una molla elicoidale . . . 988
22.3.3 Relazione curvatura-deformazione . . . 990
22.3.3.1 Ex 22.7: Interruttore bimetallico . . . 991
22.3.4 Metodo di area curvatura (zona di movimento) . . . 992
22.3.4.1 Convegno di firma . . . 993
22.3.4.2 Teorema della prima curvatura . . . 993
22.3.4.3 Teorema della seconda curvatura . . . 994
22.3.4.3.1 Ex 22.8: Area di curvatura, trave a sbalzo . . . 995
22.3.4.3.2 Ex 22.9: Curvatura del momento, raggio semplicemente sostenuto . . . 995

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

22.3.4.4 Sfilettatura massima . . . 996
22.3.4.4.1 Ex 22.10: Sfilettatura massima . . . 997
22.3.4.5 Rapporto di curvatura della temperatura . . . 998
22.3.4.5.1 Ex 22.11: Telaio sottoposto a carico della temperatura 998
22.3.4.6 Ex 22.12: Lunghezza plastica . . . 1001
22.3.4.7 Travi elastiche/peso coniugato . . . 1002
22.3.4.7.1 Ex 22.13: Trave di carico; carico del punto . . . 1003
22.3.4.7.2 Ex 22.14: Trave coniugate; variabile I . . . 1004

23 Guarnizione e Torsione **1007**
23.1 Deformazione della tosapa (trasverso) . . . 1007
23.1.1 Guarnizione, elemento infinitesimale . . . 1008
23.1.1.1 Ex 23.1: Trave a sbalzo scaricata . . . 1008
23.1.2 Distribuzione delle cesoie; $\tau(y)$ . . . 1009
23.1.3 Coefficiente di taglio . . . 1010
23.1.4 Fattore di taglio . . . 1010
23.1.5 Deformazione a taglio v_s, Timoshenko . . . 1012
23.2 Deformazioni torsionali . . . 1012
23.2.1 S^t Torsione venosa o uniforme . . . 1013
23.2.2 Vlasov o torsione non uniforme . . . 1014
23.2.2.1 Ex 23.2: Torsione non uniforme di una sezione I . . . 1020

24 Lavoro virtuale complementare **1024**
24.1 Introduzione . . . 1025
24.2 Derivazione semplificata del principio di lavoro virtuale complementare . . . 1025
24.2.1 Ritiro . . . 1025
24.2.2 f_{ij}, f_{ji} Teorema Reciproco di Maxwell-Betti . . . 1028
24.2.3 Lavoro virtuale esterno $\delta\overline{W}^*$ . . . 1029
24.2.4 Lavoro virtuale interno $\delta\overline{U}^*$ . . . 1029
24.3 Esempi . . . 1031
24.3.1 Ex 24.1: Signora . . . 1031
24.3.2 Ex 24.2: Cornice; deflettori . . . 1032
24.3.3 Ex 24.3: Cornice, rotazione . . . 1033
24.3.4 Ex 24.4: Staffa flessibile . . . 1034
24.3.5 Ex 24.5: Trave a sbalzo sostenuta da cavo . . . 1036
24.3.6 Ex 24.6: Deformazione torsionale e flessorale . . . 1037
24.3.7 Ex 24.7: Deformazioni flexurali e cesoie in un fascio . . . 1039
24.3.8 Ex 24.8: Effetti termici in un raggio . . . 1040
24.3.9 Ex 24.9: Condotta . . . 1041
24.3.10 Ex 24.10: Capriata semplice . . . 1042
24.3.11 Ex 24.11: Capriata complessa . . . 1043
24.3.12 Ex 24.12: Capriata con controfreccia iniziale . . . 1044
24.3.13 Ex 24.13: Capriata con tensioni secondarie . . . 1045

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

24.3.14Ex 24.14: Anello circolare 1047
24.3.15Ex 24.15: Primavera 1049

25 Metodo di flessibilità **1053**
25.1 Introduzione 1054
25.2 Il metodo di forza/flessibilità 1059
25.2.1 Esempi 1061
25.2.1.1 Ex 25.1: Asciugamano con asta di cravatta 1061
25.2.1.2 Ex 25.2: Analisi struttura in acciaio 1062
25.2.1.3 Ex 25.3: Capriata con una forza ridondante 1066
25.2.1.4 Ex 25.4: Capriata con due forze ridondanti 1068
25.2.1.5 Ex 25.5: Capriata con carico termico 1071
25.2.1.6 Ex 25.6: Trave a molla 1072
25.2.1.7 Ex 25.7: Posto della regina 1074
25.2.1.8 Ex 25.8: Matrice di flessibilità: trave curva 1077
25.3 Equazioni di tre momenti 1080
25.3.1 Ex 25.9: Trave continua 1083
25.3.2 Ex 25.10: Trave continua 1084

26 Forze in termini di spostamenti **1087**
26.1 Introduzione 1087
26.1.1 Convegno di firma 1088
26.1.2 Metodi di analisi 1088
26.2 Deformazioni assiali 1089
26.3 Flessibili 1090
26.3.1 Equazione differenziale 1091
26.3.2 Forze di estremità nodale per ceppi iniziali 1094
26.3.3 Forze equivalenti nodali per elementi flessografici 1095
26.3.3.1 Cariche distribuite uniformemente 1095
26.3.3.2 Carico concentrato 1096

27 Metodo di rigidezza manuale **1098**
27.1 Introduzione 1098
27.2 Metodo delle deformazioni angolari: soluzione diretta 1099
27.2.1 Esempi 1101
27.2.1.1 Ex 27.1: Trave a sbalzo 1101
27.2.1.2 Ex 27.2: Trave continua 1102
27.2.1.3 Ex 27.3: Trave a due posti 1103
27.2.1.4 Ex 27.4: Trave a due larghi, deflettore iniziale 1104
27.2.1.5 Ex 27.5: Telaio 1106
27.2.1.6 Ex 27.6: Scatola di chiusura 1108
27.3 Distribuzione dei momenti 1109
27.3.1 Introduzione 1110
27.3.1.1 Ex 27.7: Trave continua 1113

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

27.4 Slope deflection; distribuzione del momento; Gauss-Seidel 1115
27.4.1 Ex 27.8: Distribuzione/scarico di slittamento/ Gauss-Seidel 1115

28 Linee di influenza **1117**
28.1 Introduzione 1117
28.2 Procedura 1118
28.2.1 Ex 28.1: Linee di influenza per un raggio semplicemente supportato 1118
28.2.2 Ex 28.2: Fascio con sostegni e sporgenze 1121
28.3 Müller-Breslau Principio 1121
28.3.1 Ritiro 1121
28.3.1.1 Ex 28.3: Müller-Breslau; Linea di influenza della cinghia . . 1122
28.3.1.2 Ex 28.4: Müller-Breslau; Linea di influenza del momento . . 1123

29 Analisi elastica di secondo ordine **1124**
29.1 Introduzione 1125
29.2 Grandi spostamenti, stabile 1125
29.2.1 Ex 29.1: Instabilità geometrica 1125
29.2.2 Ex 29.2: Impatto di carico assiale sulla deformazione flessorale . . . 1127
29.2.3 Ex 29.3: Grande freccia di una trave a sbalzo 1129
29.3 Piccoli spostamenti, instabile 1133
29.3.1 Barre rigide discrete 1133
29.3.1.1 Sistema a barre singolo 1133
29.3.1.1.1 Ex 29.4: Fibbia di due colonne rigide a cerniera . 1135
29.3.2 Sistemi continui 1137
29.3.2.1 Carico di indurimento Euler 1137
29.3.2.1.1 Ex 29.5: Fibbia di colonna a cerniera 1139
29.3.2.1.2 Ex 29.6: Fibbia di colonna fissa 1140
29.3.2.1.3 Ex 29.7: Fibbia di colonna fissa 1142
29.3.2.1.4 Ex 29.8: Colonna con supporti elastici 1143
29.3.2.1.5 Ex 29.9: Contrattamento 1145
29.3.2.1.6 Ex 29.10: Torre dell'acqua 1146
29.3.2.2 Analogia con vibrazione libera 1149
29.3.2.3 Fattori di lunghezza effettivi K 1150
29.3.2.4 Colonne inelastici 1153

30 Strutture del cavo **1155**
30.1 Introduzione 1155
30.2 Carico concentrato 1156
30.2.1 Ex 30.1: Cavo funicolare 1157
30.2.2 Ex 30.2: Cavo funicolare incline 1159
30.2.3 Ex 30.3: Gondola bicavo 1160
30.3 Cariche distribuite; 1160
30.3.1 Equazione dell'equilibrio 1161
30.3.2 qdx; carico laterale; parabola 1162

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

30.3.2.1 Geometria 1162
30.3.2.2 Forze interne 1167
30.3.2.3 elastico elastico 1167
30.3.2.4 Equivalente rigidità assiale 1169
30.3.2.5 Caso speciale: corda orizzontale 1172
30.3.2.5.1 Ex 30.4: Geometria del cavo incline 1172
30.3.2.5.2 Ex 30.5: Forze di cavi incline 1173
30.3.2.5.3 Ex 30.6: Torre strallata 1175
30.3.2.5.4 Ex 30.7: Ponte sospeso 1176
30.3.2.5.5 Ex 30.8: Cavo inesteso; temperatura 1178
30.3.2.5.6 Ex 30.9: Cavo estensibile: freccia 1178
30.3.2.5.7 Ex 30.10: Cavo esteso; termico 1179
30.3.2.5.8 Ex 30.11: Cavo estensibile: precompressione . . . 1179
30.3.3 $q$ds; catenaria 1180
30.3.3.1 Geometria 1180
30.3.3.2 Forze 1182
30.3.3.3 Corda incline catastale 1182
30.3.3.3.1 Ex 30.12: Freccia in un cavo inclinato 1184
30.3.3.3.2 Ex 30.13: Supporto cavi per autobus 1184
30.3.4 Confronto tra le soluzioni a base di parabola e catenaria 1187
30.3.4.1 Ex 30.14: Catenaria e parabola 1188

31 Analisi di Masonry Arches (Voussoir) 1190
31.1 Introduzione 1190
31.2 Alcune note storiche 1191
31.2.1 De la Hire; 1640-1718 1191
31.2.2 Belidor; 1698-1761 1192
31.2.3 Coppia: 1670-1744 1196
31.2.4 Danyzy; 1698-1777 1197
31.2.5 Coulomb; 1736-1806 1198
31.2.6 Moseley; 1801-1872 1199
31.2.7 Soluzioni elastiche 1200
31.2.7.1 Castigliano; 1847-1884 1200
31.2.7.2 Winkler; 1835-1888 1200
31.2.8 Pippard; 1891-1969 1202
31.2.8.1 Ex 31.1: Carico di guasto del voussoir; metodo di pippard . 1204
31.3 Generalizzazione del metodo di pippard; smars 1208
31.4 Algoritmo 1213
31.5 Osservazioni finali 1215
31.5.1 Jacques Heyman; 1925 1215
31.5.2 Linea di trazione 1216
31.5.3 Linea di trazione e pippard 1217

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

32 Arci e ardesia curvata **1220**
32.1 Arco circolare . . . 1222
32.1.1 Tre archi circolari a cerniera . . . 1222
32.1.1.1 Il teorema di Eddy . . . 1223
32.1.1.2 Esempi . . . 1223
32.1.1.2.1 Ex 32.1: Arco a tre cerniere; carico del punto; analitico . . . 1223
32.1.1.2.2 Ex 32.2: Tre arco a cerniera; carico del punto . . . 1225
32.1.1.2.3 Ex 32.3: Tre arco a cerniera; carico uniforme . . . 1226
32.1.2 Due archi circolari a cerniera . . . 1229
32.1.3 Arco circolare senza cerniera . . . 1229
32.1.3.1 Ex 32.4: Arco circolare senza cerniera . . . 1230
32.1.4 Soluzione generalizzata . . . 1237
32.1.4.1 Ritiro . . . 1237
32.1.4.1.1 Centro di gravità . . . 1237
32.1.4.1.2 Ritiro . . . 1239
32.1.4.1.3 Verifica . . . 1243
32.1.5 Soluzioni basate sulla Mathematica . . . 1244
32.2 Forma ottimale di un arco . . . 1244
32.2.1 Ex 32.5: Arco perfetto . . . 1245
32.3 Arco di Parabolico . . . 1245
32.3.1 Esempi . . . 1246
32.3.1.1 Ex 32.6: Arco parabolico a tre cerniere . . . 1246
32.3.1.2 Ex 32.7: Due arco a sezione trasversale variabile incernierata . . . 1246
32.3.2 Arco fisso con carico simmetrico . . . 1250
32.3.2.1 Ex 32.8: Arco parabolico senza cerniera . . . 1252
32.3.3 Effetti di regolamento e temperatura della Fondazione . . . 1255
32.3.3.1 Ex 32.9: Carico termico su arco parabolico . . . 1258
32.4 Travi curvate . . . 1258
32.4.1 Trave ad arco . . . 1258
32.4.1.1 Ex 32.10: Trave ad arco . . . 1259
32.4.2 Elicoidale . . . 1261
32.4.2.1 Geometria . . . 1261
32.4.2.2 Equilibrio . . . 1263
32.4.2.2.1 Ex 32.11: Arco elicoidale; carico a punti . . . 1264

33 Progettazione di un arco indeterminato staticamente **1267**
33.1 Ex 33.1: Progettazione di un arco staticamente indeterminato . . . 1267
33.2 Ex 33.2: Cambiamento di temperatura in un arco . . . 1274

34 Piatti **1278**
34.1 Teoria di piatti spessi: reissner-mindlin . . . 1279
34.1.1 Relazioni con i paesi in via di sviluppo . . . 1279
34.1.2 Relazioni costitutive . . . 1281

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

34.1.3 Equilibrio 1282
34.2 Teoria delle piastre sottili: Kirchhoff 1283
34.2.0.1 Ex 34.1: Idealizzazione di piastra sottile e spessa 1284
34.2.1 Relazioni fondamentali 1284
34.2.2 Equazione differenziale 1285
34.2.3 Tensioni 1286
34.2.3.1 Ex 34.2: Calcolo delle tensioni dai momenti risultanti della piastra 1287
34.2.3.2 Ex 34.3: Piastra quadrata semplicemente appoggiata sotto pressione uniforme 1288
34.2.3.3 Ex 34.4: Sensibilità della freccia della piastra allo spessore . 1289
34.2.4 Piastre circolari 1289
34.2.4.1 Ex 34.5: Piastra circolare incastrata sotto pressione uniforme 1293
34.2.5 Formulazione variazionale 1294
34.3 Riepilogo 1295

35 Conchiglie **1297**
35.1 Teoria generale 1298
35.1.1 Definizioni 1298
35.1.2 Assunzioni 1300
35.1.3 Relazioni di spostamento della forza 1302
35.1.3.1 Equilibrio 1304
35.1.3.2 Sistema completo delle equazioni di equilibrio 1310
35.1.3.3 Compatibilità 1310
35.1.3.4 Riepilogo 1314
35.1.3.5 Tensioni-deformazioni-risultanti 1315
35.1.3.5.1 Tensioni-deformazioni 1315
35.1.3.5.2 Tensioni-risultanti 1316
35.1.3.6 Espressioni finali (forza in termini di spostamenti) 1317
35.1.4 Semplificazioni 1317
35.1.4.1 Gusci ribassati 1319
35.1.4.1.1 Ipotesi 1319
35.1.4.1.2 Applicazione delle ipotesi 1319
35.1.4.1.3 Equazione della trave profonda 1321
35.1.4.1.4 Equazione della piastra 1322
35.1.4.1.5 Equazione dei gusci ribassati 1323
35.1.4.2 Teoria membranale 1323
35.1.4.2.1 Ipotesi 1323
35.1.4.2.2 Teoria 1324
35.1.4.2.3 Classificazione 1324
35.1.4.2.4 Specializzazione 1325
35.2 Analisi di un singolo barile (copertura cilindrica circolare) 1327

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

35.2.1 Introduzione . . . 1327
35.2.2 Teoria membranale . . . 1329
35.2.2.1 Risultanti delle tensioni . . . 1329
35.2.2.1.1 Errori . . . 1333
35.2.2.1.2 Correzione . . . 1334
35.2.2.2 Spostamenti . . . 1335
35.2.3 Teoria dei gusci ribassati . . . 1338
35.2.3.1 Equazioni di equilibrio . . . 1338
35.2.3.2 Formulazione . . . 1339
35.2.3.2.1 Soluzione particolare per carico uniforme . . . 1342
35.2.3.2.2 Confronto: membrana *vs.* guscio ribassato . . . 1343
35.2.3.2.3 Ex 35.1: Confronto tra teoria membranale e guscio ribassato . . . 1346
35.2.3.3 Soluzione generale . . . 1346
35.2.3.3.1 Spostamento w . . . 1347
35.2.3.3.2 M_ϕ . . . 1349
35.2.3.3.3 Altri termini: procedura . . . 1350
35.3 Gusci staticamente indeterminati . . . 1353
35.3.1 Trave di bordo . . . 1353
35.3.1.1 Travi di bordo verticali . . . 1355
35.3.1.2 Travi di bordo orizzontali . . . 1357
35.3.2 Trave di bordo precompressa . . . 1357
35.3.2.1 Ex 35.2: Progettazione di un guscio cilindrico . . . 1359
35.3.3 Codice MATLAB®ed esempio numerico . . . 1370

36 Dinamica **1372**
36.1 Fondazioni filosofiche . . . 1373
36.2 Quando è un'analisi dinamica . . . 1374
36.3 Principi fondamentali . . . 1375
36.3.1 Principio di d'Alembert e Equilibrio Dinamico . . . 1375
36.3.2 L'Oscillatore monodegretario di libertà . . . 1375
36.3.3 Frequenza naturale e periodo . . . 1376
36.3.3.1 Ex 36.1: Calcolo di ω_n, T_n e f_n per un sistema SDOF . . . 1377
36.3.4 Damping e il rapporto di smorzamento . . . 1377
36.4 Vibrazione gratuita . . . 1379
36.4.1 Vibrazione libera non smorzata . . . 1379
36.4.2 Vibrazione libera smorzata . . . 1380
36.4.3 Decreto logaritmico . . . 1380
36.4.3.1 Ex 36.2: Stima dello smorzamento mediante decremento logaritmico . . . 1381
36.5 Vibrazione forzata: eccitazione armonica . . . 1382
36.5.1 Risposta armonica non smorzata . . . 1382
36.5.2 Risposta armonica smorzata . . . 1383

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

36.5.2.1 Ex 36.3: Risposta armonica: amplificazione e fase 1384
36.6 Risposta al carico arbitrale 1385
36.6.1 Risposta Impulsa e impulso dell'unità 1385
36.6.1.1 Ex 36.4: Risposta dell'unità di impulso di un sistema SDOF umido 1385
36.6.2 Il Duhamel Integral 1386
36.6.2.1 Ex 36.5: Caricamento passo improvvisa: l'amplificazione dinamica fattore 2 1387
36.6.2.2 Ex 36.6: Carico impulsivo rettangolare e spettro d'urto . . . 1388
36.6.3 Analisi e risposta alla frequenza di Fourier 1390
36.6.3.1 Ex 36.7: Risposta di frequenza a una macchina periodica forza con due armoniche 1390
36.7 Supporto eccitazione e risposta del terremoto 1392
36.7.1 Equazione di movimento per l'eccitazione della base 1392
36.7.2 Spettacolo di risposta 1393
36.7.2.1 Ex 36.8: Progettazione sismica di un telaio a singolo piano utilizzando uno spettro di risposta 1394
36.8 Sistemi multi-disciplinari 1395
36.8.1 Equazioni di movimento 1395
36.8.2 Vibrazione libera senza smorzamento: Modalità naturali 1396
36.8.3 Analisi dei metodi 1396
36.8.4 Partecipazione modulare alla risposta del terremoto 1397
36.8.4.1 Ex 36.9: Analisi modulare di un edificio a cesoia 3DOF sotto carico sismico 1398
36.9 Sistemi continui 1400
36.9.1 Vibrazione assiale di bar 1400
36.9.2 Vibrazione trasversale delle fasci 1401
36.9.2.1 Ex 36.10: Frequenza naturale di un ponte pedonale in acciaio e controllo della risonanza pedonale 1401
36.10 Dinamica non lineare 1403
36.10.1 Fonti di non linearità 1403
36.10.2 Isteresi e dissipazione energetica 1403
36.10.2.1 Ex 36.11: Smorzamento viscoso equivalente da un ciclo isteretico bilineare 1404
36.10.3 Dutility e Progettazione delle Capacità 1406
36.10.3.1 Ex 36.12: Domanda di duttilità e riduzione della forza per una telaio in cemento armato 1406
36.11 Considerazioni pratiche 1407
36.11.1 Smorzamento nelle strutture reali 1407
36.11.2 Interazione della struttura 1408
36.11.3 Ammortizzatori di massa sintonizzati 1408

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

36.11.4 Ex 36.13: Progettazione di un ammortizzatore di massa sintonizzato per un edificio alto . . . 1408
36.11.5 Isolamento di base . . . 1410
36.11.6 Ex 36.14: Progettazione di un edificio ospedaliero isolato alla base . . . 1410
36.12 Osservazioni di chiusura . . . 1412
36.12.1 La cautela di un medico sui metodi dello spettro di risposta . . . 1412
36.12.2 Nota di chiusura: limiti della teoria lineare . . . 1412

37 Elementi di progettazione strutturale 1413
37.1 Introduzione . . . 1414
37.1.1 Analisi e progettazione; un processo iterativo . . . 1414
37.1.2 Sicurezza . . . 1415
37.2 Progettazione alle tensioni ammissibili (ASD) . . . 1416
37.2.1 Ex 37.1: ASD: elemento inflesso . . . 1417
37.3 Progettazione del fattore di carico e resistenza (LRFD) . . . 1417
37.4 Esempi di codici di progettazione basati su gleba . . . 1420
37.4.1 Applicazione: resistenza plastica delle sezioni del fascio R/C . . . 1421
37.4.1.1 Ex 37.2: Resistenza ultima: verifica . . . 1426
37.4.1.2 Ex 37.3: Resistenza ultima: progetto I . . . 1426
37.4.1.3 Ex 37.4: Resistenza ultima: progetto II . . . 1427
37.4.1.4 Ex 37.5: Analisi esatta . . . 1428
37.4.2 Applicazione: resistenza plastica delle colonne R/C . . . 1430
37.4.2.1 Ex 37.6: Colonna R/C, *c* conosciuto . . . 1434
37.4.2.2 Ex 37.7: Colonna R/C, *e* conosciuto . . . 1436
37.4.3 Calcestruzzo precompresso . . . 1439
37.4.3.1 Ex 37.8: Caso di studio: ponte in legno . . . 1439
37.5 Ingegneria basata sulle prestazioni (PBE) . . . 1443

38 Soluzioni di Fermi (Analisi approssimative) 1445
38.1 Forze interne . . . 1446
38.1.1 Forme definite & Punti di inflessione . . . 1446
38.1.2 Momenti di vapore in termini di rigidità di sostegno . . . 1449
38.1.3 Metodi di analisi . . . 1451
38.1.3.1 Carico verticale . . . 1451
38.1.3.2 Carico orizzontale . . . 1454
38.1.3.2.1 Metodo del portale . . . 1454
38.1.3.2.1.1 Ex 38.1: Metodo del portale; edificio a basso aumento . . . 1457
38.1.3.2.1.2 Ex 38.2: Soluzione Matlab . . . 1467
38.1.3.2.2 Metodo a mensola . . . 1468
38.1.3.2.2.1 Ex 38.3: Metodo a mensola: edificio multi-piano . . . 1469
38.2 Ricorso strutturale . . . 1470

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

38.2.1 Sottosistema di albero 1470
38.2.1.1 Ex 38.4: Sottosistema di albero 1471
38.2.2 Muro di taglio 1472
38.2.2.1 Ex 38.5: Cesoia in cemento 1472
38.2.3 Muro di taglio intagliato 1474
38.2.3.1 Ex 38.6: Muro di taglio intagliato 1475
38.2.4 Deflettori laterali 1476
38.2.4.1 Corto parete 1477
38.2.4.2 Tallaggio parete 1477
38.2.4.3 Mura e lintel 1478
38.2.4.4 Cornici 1479
38.2.4.4.1 Ex 38.7: Sfilettatura approssimativa trasversale . 1480

39 Progetti preliminari **1485**
39.1 Ex 39.1: Aeroporto di Dulles 1485
39.2 Ex 39.2: Torre Eiffel 1492
39.3 Ex 39.3: Magazzini Generali 1500
39.4 Ex 39.4: Ponte George Washington 1504
39.5 Ex 39.5: Progettazione di un arco a due punte 1511
39.6 Ex 39.6: Cambiamento di temperatura in un arco 1519
39.7 Ex 39.7: Arco di Parabolico con variazione del secant *I* 1522

40 Introduzione al metodo diretto della rigidezza **1526**
40.1 Perché l'analisi strutturale matrice? 1526
40.2 Idealizzazione strutturale 1528
40.3 Convegno di firma 1530
40.4 Sistemi di coordinamento 1530
40.5 Flessibilità *vs.* Stiffa 1531
40.6 Gradi di libertà 1532
40.7 Statistiche *vs.* Indeterminanza cinematica 1534
40.8 Analisi strutturale/meccanica; problema del valore limite 1535

41 Matrici di rigidezza dell'elemento $\mathbf{k}^{(e)}$ **1537**
41.1 Definizione del termine di stiffamento 1537
41.2 Elemento di truss 1539
41.3 Signora: Euler-Bernoulli 1539
41.4 Elemento telaio 2D (elemento trave-colonna) 1540
41.5 Elemento di griglia 1540
41.6 Elemento di trave 3D 1541
41.7 Trave di Timoshenko 1543
41.7.1 Deformazione aggiuntiva 1543
41.7.2 Modifica della matrice di rigidità dell'elemento 1545
41.8 Torsione di Vlasov 1546

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

42 Metodo della rigidezza: strutture ortogonali **1549**
42.1 Introduzione . . . 1550
42.2 Teoria . . . 1550
42.2.1 Flessibilità rivisitata . . . 1550
42.2.2 Metodo di rigidità diretto . . . 1551
42.2.3 Dall'elemento alla struttura . . . 1552
42.3 Esempi . . . 1553
42.3.1 Ex 42.1: Trave ortogonale . . . 1553
42.3.2 Ex 42.2: Cornice ortogonale . . . 1555
42.3.3 Ex 42.3: Griglia . . . 1562
42.3.4 Ex 42.4: Cornice ibrida . . . 1566
42.3.5 Ex 42.5: Griglia ibrida . . . 1570

43 Matrici di trasformazione **1575**
43.1 Introduzione . . . 1575
43.2 Alcune teorie . . . 1577
43.2.1 $[\mathbf{k}^e]$ $[\mathbf{K}^e]$ relazione . . . 1577
43.2.2 Direzione cose . . . 1577
43.3 Matrici di trasformazione per elementi quadro . . . 1580
43.3.1 2 casi . . . 1580
43.3.1.1 Telaio 2D . . . 1580
43.3.1.2 Griglia . . . 1581
43.3.1.3 Vlasov raggio . . . 1582
43.3.1.4 2D trus . . . 1583
43.3.2 Telaio 3D . . . 1583
43.3.3 Rotture euleriane . . . 1584
43.3.4 Torsione dell'asse degli elementi . . . 1586
43.3.5 Trucchi 3D . . . 1588

44 Metodo diretto della rigidezza **1590**
44.1 Obiettivi . . . 1590
44.2 Teoria . . . 1591
44.3 Divulgazione . . . 1593
44.3.1 Non vincolato contro livelli di libertà limitati . . . 1593
44.3.2 Dischilazione strutturale . . . 1594
44.4 Realizzazione computer . . . 1595
44.4.1 Condizioni di alloggio, `[id]` Matrice . . . 1595
44.4.2 **LM** vettore . . . 1596
44.4.3 Montaggio della matrice di rigidità globale . . . 1597
44.4.4 Procedura passo dopo passo . . . 1598
44.5 Esempi . . . 1599
44.5.1 Ex 44.1: Telaio . . . 1600
44.5.1.1 Pregiudiziale . . . 1600

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

44.5.2 Ex 44.3: Travatura reticolare 1610

45 Proprietà matematiche della matrice di rigidezza e problemi computazionali 1615
45.1 Matrici poco condizionate 1616
45.1.1 Valori di esercizio 1616
45.1.1.1 Interpretazione fisica degli autovalori 1619
45.1.2 Numero di condizioni 1621
45.1.3 Matrici di rigidità condizionate da plutonio 1622
45.1.3.1 Ex 45.1: Ill-condizionata 1624
45.2 Considerazioni numeriche 1625
45.2.1 Inversione contro la decomposizione 1625
45.2.2 Numerazione nodale 1626

46 Argomenti speciali 1629
46.1 Condensazione/sostruzione 1630
46.2 Equazioni di statici e cinematici 1631
46.2.1 Matrice statica $\mathcal{B}$ 1631
46.2.1.1 Ritiro 1631
46.2.1.2 Determinato staticamente 1631
46.2.1.2.1 Ex 46.1: Matrice statica a trombo determinato statico 1632
46.2.1.2.2 Ex 46.2: Matrice statica del fascio 1633
46.2.1.3 Staticamente indeterminato 1634
46.2.1.3.1 Ex 46.3: Matrice statica di una travatura reticolare staticamente indeterminata 1634
46.2.1.4 Identificazione delle forze ridondanti 1636
46.2.1.4.1 Ex 46.4: Selezione delle forze ridondanti 1636
46.2.1.5 Instabilità fisica 1638
46.2.2 Matrice di cinematica $\mathcal{A}$ 1639
46.2.2.1 Ex 46.5: Matrice di cinema: esempio truss 1640
46.2.3 Relazione tra matrici statica e cinematica 1640
46.2.3.1 Determinato staticamente 1640
46.2.3.2 Staticamente indeterminato 1641
46.3 relazioni cinematiche attraverso inverso della matrice statica 1642
46.4 Relazioni di flessibilità 1643
46.4.1 Dalla rigidità alla flessibilità 1643
46.4.1.1 Ex 46.6: Matrice di flessibilità 1644
46.4.2 Dalla flessibilità alla rigidità 1644
46.4.2.1 Ex 46.7: Flessibilità alla rigidità 1646
46.4.2.2 Ex 46.8: Matrice di stiffness di un elemento curvato 1647
46.4.3 Dualità tra flessibilità e rigidità 1649
46.5 Congruente approccio di trasformazione **K** 1649
46.5.1 Ex 46.9: Trasformazione congruente 1651
46.5.2 Ex 46.10: Congruente trasformazione di un telaio 1652

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

46.6 Elementi speciali 1655
46.6.1 Rigido offset; 1655
46.6.2 Travi semirigidi 1657
46.6.3 Sezione trasversale variabile 1663
46.7 Fonti di derivazione laterale in telai del momento 1665

47 Calcolo delle variazioni in meccanica: il quadro di Euler–Lagrange 1679
47.1 Introduzione 1680
47.2 Euler 1680
47.2.1 Pregiudiziale 1680
47.2.2 Forma differenziale di $\delta\Pi$ 1682
47.2.3 Equazione Euler 1683
47.2.4 $\delta\Pi$ 1684
47.2.5 Osservazioni 1685
47.2.6 Condizioni di bovino 1685
47.2.6.1 Ex 47.1: Euler: assiale 1687
47.2.6.2 Ex 47.2: Euler: flessore 1688
47.3 Principio di energia potenziale totale 1689
47.4 Hamilton 1693
47.4.1 Dinamica; Euler/Lagrange 1693
47.4.1.1 Sistema discreto 1693
47.4.1.2 Sistema di contenimento 1695
47.4.2 Ex 47.3: Hamilton 1697
47.5 Principio generale di variazione Hu-Washizu 1700
47.6 diagrammi "Pseudo-Tonti' 1704
47.6.1 Il principio di D'Alembert 1704
47.6.2 Equazioni di Hamilton 1704
47.6.3 Equazioni di Lagrange 1705

48 Principi variazionali ed energetici nell'analisi strutturale 1709
48.1 Introduzione 1710
48.1.1 Termodinamica 1710
48.1.2 Relazioni di base 1711
48.1.3 Definizioni 1712
48.1.4 Condizioni generali 1712
48.1.5 Espressioni virtuali 1714
48.1.6 Osservazioni 1714
48.1.6.1 Lavoro interno contro energia da sforzo 1714
48.1.6.2 indipendenza del percorso di lavoro esterno 1715
48.1.7 Applicazioni a elementi 1D 1716
48.1.7.1 Energia complementare, elastico lineare U^* 1716
48.1.7.2 Energia, elastico lineare U 1717
48.1.7.3 Energia virtuale di sforzo complementare δU^* 1717

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

48.1.7.4 Energia virtuale δU . . . 1719
48.1.8 Sintesi della vw e del cvw . . . 1720
48.2 Approcci . . . 1722
48.3 Lavoro virtuale . . . 1723
48.3.1 Principio del lavoro virtuale complementare (PCVW) . . . 1723
48.3.1.1 Ritiro . . . 1723
48.3.1.2 Ex 48.1: PCVW, trave a sbalzo rastremata . . . 1726
48.3.2 Ex 48.2: Arco semicerchio a tre cerniere . . . 1727
48.3.3 Principio del lavoro virtuale (PVW) . . . 1728
48.3.3.1 Ritiro . . . 1728
48.3.3.2 Ex 48.3: PVW, trave a sbalzo rastremata . . . 1730
48.4 Principi di potenziale energia . . . 1732
48.4.1 Principio di energia potenziale totale (PTPE) . . . 1732
48.4.1.1 Ritiro . . . 1732
48.4.1.2 Ex 48.4: PTPE, primavera e massa . . . 1734
48.4.1.3 Ex 48.5: PTPE; trave a morsetto con varialble I . . . 1735
48.4.2 Principio di energia potenziale complementare totale (PTCPE) . . . 1736
48.5 Teoremi di Castigliano . . . 1736
48.5.1 Primo teorema . . . 1736
48.5.1.1 Ex 48.6: Tronchi elastici non lineari . . . 1737
48.5.2 Secondo teorema . . . 1739
48.5.2.1 Ex 48.7: Castigliano 2; trave a sbalzo . . . 1740
48.5.2.2 Ex 48.8: Castigliano 2; deflettore di un fascio uniformemente caricato utilizzando il secondo teorema di castigliano . . . 1740
48.5.2.3 Ex 48.9: Castigliano 2, truss non lineare . . . 1741
48.5.2.4 Ex 48.10: Castigliano 2, inflessione della molla . . . 1742
48.6 Metodo Rayleigh-Ritz . . . 1742
48.6.1 Ritiro . . . 1742
48.6.1.1 Ex 48.11: Rayleigh Ritz carica uniformemente semplicemente il fascio supportato . . . 1743
48.6.1.2 Ex 48.12: Metodi variabili . . . 1745
48.7 Sintesi . . . 1752

49 Funzioni di interpolazione **1756**
49.1 Introduzione . . . 1756
49.1.1 Caratteristiche delle funzioni di forma . . . 1756
49.1.2 Il triangolo di Pascal . . . 1757
49.1.3 Sistemi di coordinamento . . . 1759
49.1.3.1 Carte . . . 1759
49.1.3.2 Naturale . . . 1759
49.1.3.3 Triangolare . . . 1760
49.1.4 Proseguimento . . . 1764
49.2 Funzioni di forma . . . 1764

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

49.2.1 Formulazione diretta . . . 1764
49.2.1.1 Elemento di truss; lineare . . . 1764
49.2.1.2 Generalizzazione . . . 1765
49.2.1.3 Elemento di triangolo costante . . . 1766
49.2.1.4 Elemento bilineare rettangolare . . . 1767
49.2.1.5 Elemento trilineare a mattone . . . 1769
49.2.2 Funzioni di interpolazione lagrangiana . . . 1770
49.2.2.1 Quadrilaterali . . . 1770
49.2.2.2 Triangoli . . . 1771
49.2.2.3 Elemento di truss; quadratico . . . 1772
49.2.2.4 Signora . . . 1773
49.2.3 Funzioni di interpolazione ermiziana . . . 1776
49.2.3.1 Funzioni di forma del fascio rivisitate . . . 1777
49.2.3.2 Elementi quadrilaterali . . . 1778
49.2.3.2.1 Quadrolatero di Linar (q4) . . . 1778
49.2.3.2.2 Quadratici quadrilateri . . . 1779
49.2.3.2.2.1 Elemento di serenità (q8) . . . 1780
49.2.3.2.2.2 Elemento lagrangiano (q9) . . . 1780
49.2.3.3 Elemento variabile (gerarchico) . . . 1784
49.2.3.4 Elemento triangolare (t6) . . . 1786

50 Formulazione degli elementi finiti lineari 1788
50.1 Introduzione . . . 1788
50.2 Elemento finito . . . 1789
50.2.1 Introduzione . . . 1789
50.2.2 Relazioni di spostamento . . . 1789
50.2.2.1 Membri assiali . . . 1790
50.2.2.2 Membri della Flexural . . . 1790
50.2.3 Slocamento virtuale e ceppi . . . 1790
50.2.4 Elemento rigidità matrice formulazione . . . 1791
50.2.5 Recupero delle tensioni . . . 1792
50.3 Applicazione . . . 1793
50.3.1 Elemento di truss . . . 1793
50.3.2 Elemento flessibile . . . 1793
50.4 Requisiti generali di elementi . . . 1794
50.5 Errore di discretizzazione e tasso di convergenza . . . 1796
50.6 Carattere limitato inferiore delle soluzioni basate su energia minima potenziale . . . 1797
50.7 Equilibrio e compatibilità nella soluzione . . . 1798

51 Elementi isoparametrici 1800
51.1 Introduzione . . . 1801
51.2 Formulazione degli elementi . . . 1803
51.2.1 Elemento bar . . . 1803

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

51.2.2 Quadrilatero (q4); formulazione dettagliata 1804
51.2.3 Elementi triangolari 1808
51.2.3.1 Triangolo T3 1808
51.2.3.2 Triangolo T6 1810
51.2.4 Ex 51.1: Operatori giacobini 1811
51.3 Integrazione numerica 1812
51.3.1 Newton-Cotes 1813
51.3.2 Quadratura Gauss-legendre 1815
51.3.2.1 Polinomio Leggero 1817
51.3.2.2 Quadratura Gauss-Legendre per $n = 2$ 1817
51.3.3 Regioni rettangolari e prismi 1818
51.3.4 Regioni triangolari 1818
51.4 Recupero delle tensioni; tensioni nodali 1818
51.5 Carico equivalente nodale 1821
51.5.1 Carico gravitazionale 1822
51.5.2 Carico di trazione 1823
51.5.3 Deformazioni/tensioni iniziali; carico termico 1824
51.5.4 Ordine di integrazione 1825
51.5.4.1 Integrazione completa 1825
51.5.4.2 Integrazione ridotta 1826
51.5.4.3 Integrazione ridotta selettiva 1827
51.6 Parassita/incompatibile elementi 1828
51.6.1 Q4, il problema 1828
51.6.2 Q6, la soluzione 1829
51.6.3 Qm6, ulteriori miglioramenti 1829
51.7 Rotazionale d.o.f. 1830

52 Metodi dei residui pesati **1832**
52.1 Introduzione 1833
52.2 Formulazione generale 1833
52.2.1 Operatori differenziali 1833
52.2.1.1 Ex 52.1: Controllare la simmetria e la definizione positiva di un membro assiale 1D 1834
52.2.2 Formulazione residua 1834
52.3 Metodi residui ponderati 1836
52.3.1 Metodo di collocazione punto 1837
52.3.2 Metodo di collocazione sottodominio 1837
52.3.3 Metodo di minimo-quares 1837
52.3.4 Metodo di Galerkin 1837
52.3.4.1 Ex 52.2: Vibrazione di stringa 1838
52.4 Applicazioni del metodo Galerkin a problemi di elasticità 3D 1840
52.4.1 Derivazione della forma debole 1840
52.4.2 Discretizzazione 1842

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

52.4.2.1 Ex 52.3: Matrice di stiffness di un elemento del fascio . . . 1843
52.4.2.2 Ex 52.4: Trasferimento termico . . . 1846

53 Dinamica II **1849**
53.1 Introduzione . . . 1850
53.2 Idealizzazione per l'analisi dinamica . . . 1851
53.2.1 Assilico *vs* Stiffamento flessibile . . . 1851
53.2.2 Modelli . . . 1852
53.2.2.1 Ex 53.1: Simulazione Monte Carlo di una risposta elastica lineare al carico laterale . . . 1855
53.3 Formulazione dei problemi . . . 1856
53.3.1 Formulazione Variazione . . . 1856
53.3.2 Rappresentanza di massa . . . 1858
53.3.3 Smorzamento . . . 1859
53.3.3.1 Ex 53.2: Calibrazione dei coefficienti di smorzamento Rayleigh per un edificio . . . 1861
53.3.3.2 Ex 53.3: Baseline analitica: vibrazione libera dalle condizioni iniziali generali . . . 1862
53.3.4 Tecnica numerica: metodi Euler . . . 1863
53.3.4.1 Ex 53.4: Metodo di Euler . . . 1864
53.4 Dischio di tempo . . . 1866
53.4.1 Implicita . . . 1866
53.4.1.1 Metodo di Newmark . . . 1866
53.4.1.1.1 Ritiro . . . 1866
53.4.1.1.2 Nuovo β metodo implicito . . . 1867
53.4.1.2 Metodo Hilber-hughes-taylor . . . 1869
53.4.2 Integrazione temporale esplicita . . . 1871
53.4.2.1 Sistemi lineari . . . 1871
53.4.2.2 Sistemi non lineari . . . 1874
53.5 Metodi numerici per l'analisi dinamica . . . 1874
53.5.1 Metodo delle differenze centrali . . . 1875
53.5.2 Ex 53.5: Passo temporale di stabilità per le differenze centrali . . . 1875
53.5.3 Metodo Newmark-Beta . . . 1876
53.5.4 Sovrapposizione modale e integrazione diretta . . . 1876
53.6 Sistemi continui . . . 1877
53.6.1 Vibrazione assiale delle barre . . . 1877
53.6.1.1 Ex 53.6: Velocità d'onda e frequenze naturali assiali di una lega-rod in acciaio . . . 1878
53.6.2 Vibrazione trasversale delle travi . . . 1879
53.7 Dinamica non lineare . . . 1880
53.7.1 Fonti di non linearità . . . 1880
53.7.2 Duttilità e progettazione secondo la capacità . . . 1880
53.8 Considerazioni pratiche . . . 1881

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

53.8.1 Smorzamento nelle strutture reali 1881
53.8.2 Interazione terreno-struttura 1881
53.8.3 Smorzatori a massa accordata 1881
53.8.4 Isolamento alla base 1882
53.9 Sintesi 1882

54 Introduzione **1885**
54.1 Introduzione 1886
54.1.1 Fonti di non linearità 1886
54.1.2 Perché un'analisi non lineare 1888
54.2 Tipi di analisi strutturali non lineari 1888
54.3 Carico/spostamento di tipo eccezionale 1891
54.4 Sicurezza 1891
54.4.1 Terminologia 1891
54.4.2 Sicurezza & carichi 1892
54.5 Codici di progettazione 1893
54.5.1 Introduzione 1893
54.5.2 Evoluzione: antichità 1895
54.5.2.1 Mesopotamia; hamurabi 1895
54.5.2.2 Romana; vitruvio 1896
54.5.3 Tempi moderni 1896
54.5.3.1 Progettazione dello stress, ASD 1898
54.5.3.2 Resistenza al carico e progettazione dei fattori, LRFD 1898
54.5.3.3 Ingegneria del terremoto 1899
54.5.4 Sintesi 1900

55 Plasticità I; Fibre & Continuum (per l'analisi degli elementi finiti) **1902**
55.1 Introduzione 1903
55.2 Condizioni di resa in plastica 1903
55.2.1 Modelli indipendenti a pressione idrostatica 1904
55.2.2 Modelli a carico della pressione idrostatica 1906
55.3 Osservazioni del laboratorio 1908
55.3.1 Metalli 1908
55.3.2 Concretamente 1909
55.4 Insufficienza microscopica 1909
55.4.1 Obbligazioni chimiche 1909
55.4.2 Insufficienza duttile e fragile 1910
55.4.3 Dislocazione 1910
55.5 Fondamenti di plasticità 1911
55.5.1 Introduzione 1911
55.5.2 Modulo elastico tangente 1912
55.5.2.1 Derivazione generalizzata 1913

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

55.5.2.1.1 Funzione di snervamento; modello isotropica indurimento . . . 1913
55.5.2.1.2 Regola di flusso . . . 1913
55.5.2.1.2.1 Condizioni Kuhn-Tucker . . . 1914
55.5.2.1.3 Condizione della consistenza . . . 1915
55.5.2.1.4 Modulo tangente . . . 1915
55.5.2.2 Modulo tangente; ingegneria . . . 1916
55.5.2.3 Ex 55.1: Modulo tangente . . . 1917

56 Plasticità II; Sezioni: 1921
56.1 Introduzione . . . 1922
56.2 Quadro teorico: ipotesi e risultati chiave . . . 1922
56.3 Momento-curvatura; $M - \Phi$ . . . 1924
56.3.1 Dal momento della curvatura relazione . . . 1925
56.3.1.1 Ex 56.1: Analisi sezionale non lineare; analisi analitica . . . 1926
56.3.2 Dalla relazione tensione–deformazione . . . 1928
56.3.2.1 Ex 56.2: Layered; acciaio . . . 1929
56.3.2.2 Ex 56.3: Strati; cemento/ACI . . . 1934
56.4 Curvatura del momento, generalizzazione . . . 1936
56.4.1 Approccio analitico . . . 1936
56.4.1.1 Ex 56.4: Curvatura del momento di una sezione I R/C . . . 1938
56.4.1.2 Schema di interazione $M - N$ . . . 1943
56.4.2 Approccio numerico . . . 1943

57 Plasticità III; Struttura: Linee di Rendimento 1948
57.1 Introduzione . . . 1949
57.2 Elementi lineari (camere, cornici) . . . 1951
57.2.1 Approccio cinematico: limite superiore . . . 1951
57.2.1.1 Ex 57.1: Trave fissa; carico centrale . . . 1954
57.2.1.2 Ex 57.2: Trave fissa; carico compensato . . . 1954
57.2.1.3 Ex 57.3: Trave continua . . . 1954
57.2.1.4 Ex 57.4: Cornice ortogonale . . . 1955
57.2.1.5 Ex 57.5: Telaio incline . . . 1955
57.2.2 Statici; limite inferiore . . . 1957
57.2.2.1 Ex 57.6: Profilato cantiliver I . . . 1960
57.2.2.2 Ex 57.7: Cantiliver Propped II . . . 1960
57.2.2.3 Ex 57.8: Trave fissa . . . 1961
57.2.2.4 Ex 57.9: Telaio incline . . . 1962
57.3 Elementi planari (slab) . . . 1966
57.3.1 Statici: limite inferiore . . . 1967
57.3.1.1 Ex 57.10: Lastra quadrata . . . 1968
57.3.2 Kinematics: il limite superiore . . . 1968
57.3.2.1 Ex 57.11: Lastra rettangolare . . . 1970

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese, potrebbero verificarsi errori.

57.4 Analisi del pushover . . . 1971
57.5 Analogie tra analisi a più basso limite e . . . 1972
57.5.1 Analisi del pushover . . . 1972
57.5.2 Plasticità concentrata . . . 1976

58 Meccanica di danno **1979**
58.1 PROPOSTA SENZA DISPONIBILE ChatGPT . . . 1979
58.1.1 Motivazione e fondazioni fisiche (~1.5 pagine) . . . 1979
58.2 Quadro termodinamico (~2 pagine) . . . 1979
58.3 Danni isotropici Scalari: il modello Mazars (~4 pagine) . . . 1980
58.4 Tensione - asimmetria di compressione e l'effetto unilaterale (~2 pagine) . . . 1980
58.5 Danni - accoppiamento di plastica (~2 pagine) . . . 1980
58.6 Regolamentazione e mesh oggettività (~3 pagine) . . . 1980
58.7 Applicazione a elementi di trave e colonne (~3 pagine) . . . 1981
58.8 Identificazione del parametro e guida pratica (~1.5 pagine) . . . 1981
58.9 Note bibliche e lettura ulteriore (~0,5 pagine) . . . 1981

59 Analisi non lineare; Materiale **1982**
59.1 Rilevamento della radice numerica . . . 1983
59.1.1 Metodi di Newton . . . 1983
59.1.1.1 Introduzione . . . 1983
59.1.1.2 Serie Taylor e linearizzazione . . . 1984
59.1.1.2.1 Ex 59.1: Metodo di Newton, scalare . . . 1986
59.1.1.3 Convergenza e stima degli errori . . . 1988
59.1.1.4 Osservazioni finali . . . 1989
59.1.1.4.1 Ex 59.2: Metodo di Newton; vettore . . . 1989
59.1.2 Metodo di secant . . . 1990
59.1.3 Esplicito . . . 1991
59.2 Relazioni con la meccanica strutturale; implicita . . . 1992
59.3 Metodi di integrazione . . . 1993
59.3.1 Controllo del carico . . . 1995
59.3.1.1 Metodo di rigidità Newton-raphson/tangent . . . 1995
59.3.1.2 Nuovo e nuovo . . . 1998
59.3.1.3 Metodo di Newton secante . . . 1999
59.3.1.4 Criteri di convergenza . . . 2000
59.3.1.5 Tavola sinottica . . . 2001
59.3.2 Controllo di spostamento . . . 2003

60 Analisi non lineare; Geometrica **2007**
60.1 Matrice di rigidità geometrica . . . 2008
60.1.1 Ritiro . . . 2008
60.1.1.1 Forma di bagnatura . . . 2008
60.1.1.2 Deformazione . . . 2008
60.1.1.3 Energia da deformazione interna . . . 2009

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

60.1.1.4 $\mathbf{K}_g$ . . . 2010
60.1.2 Instabilità elastica; analisi biforcazione . . . 2011
60.1.2.1 Ex 60.1: Arresto della colonna . . . 2012
60.1.2.2 Ex 60.2: Guaina per telaio; soluzione Matlab . . . 2014
60.1.2.3 Ex 60.3: Fissaggio telaio; soluzione Mathematica . . . 2016
60.1.2.4 Ex 60.4: Impatto di carico assiale sulla deformazione flessorale 2017
60.2 Analisi esplicita . . . 2020
60.2.1 Ex 60.5: Grande deflettore del fascio di cantilever . . . 2022
60.3 $P-\Delta$ rivisitato . . . 2026
60.3.1 Ex 60.6: Carico di chiusura senza $\mathbf{K}_{geom}$ . . . 2026

61 Non lineare; Formulazione degli elementi 2030
61.1 Introduzione . . . 2031
61.2 Elemento di truss . . . 2031
61.2.1 Sistema di coordinamento per elemento truss 2D . . . 2033
61.2.2 Determinazione dello stato . . . 2034
61.3 formulazioni di elementi in schiuma-colonna . . . 2034
61.3.1 Elemento di trave 2D a base di stiffness . . . 2035
61.3.1.1 Sistema di coordinamento in elementi a trave 2D basati sulla rigidità . . . 2037
61.3.1.2 Determinazione dello stato . . . 2038
61.3.1.3 Errore di "Hidden' . . . 2042
61.3.1.4 Analisi non lineare utilizzando il metodo basato sulla rigidità 2042
61.4 Sezione di livello/fibra . . . 2046
61.4.1 Metodo di flessibilità elemento 2D trave-colonna . . . 2050
61.4.1.1 Sistema coordinato in elemento a trave 2D basato sulla flessibilità 2053
61.4.1.2 Determinazione dello stato . . . 2055
61.4.1.2.1 Senza iterazione a livello di elemento . . . 2055
61.4.1.2.2 Con il loop di iterazione Newton-Raphson nel livello degli elementi . . . 2058
61.4.1.3 Analisi non lineare utilizzando il metodo basato sulla flessibilità 2063
61.4.1.3.1 Senza iterazione a livello di elemento . . . 2064
61.4.1.3.2 Con il loop di iterazione newton-raphson nel livello degli elementi . . . 2067
61.4.2 Stiffa *vs.* elementi basati sulla flessibilità . . . 2071
61.5 Formulazione di elementi 2D a lunghezza zero . . . 2075
61.5.1 Sistema di coordinamento in elemento 2D a lunghezza zero . . . 2075
61.5.2 Determinazione dello stato di elementi . . . 2076
61.6 Elemento di sezione zero-lunghezza . . . 2079
61.6.1 Matrice di afflizione . . . 2079
61.6.2 Sistema coordinato . . . 2080
61.6.3 Determinazione dello stato di elementi . . . 2081
61.7 Integrazione numerica . . . 2083

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

61.8 Forza di base 2083

62 Modelli costitutivi per la plasticità distribuita e lussata 2085
62.1 Introduzione 2086
62.1.1 Termoplasticità lineare 2086
62.1.2 Modelli euristici 2087
62.2 Plasticità distribuita 2089
62.2.1 Modelli in acciaio 2089
62.2.1.1 Introduzione 2089
62.2.1.2 Modello bilineare con indurimento isotropico 2089
62.2.1.2.1 Relazione tensione–deformazione 2089
62.2.1.2.2 Determinazione del modello bilineare 2091
62.2.1.3 Modello Menegotto-pinto 2091
62.2.2 Modelli concreti 2099
62.2.2.1 Effetto della confinamento 2099
62.2.2.2 Modello modificato di Kent e Park 2100
62.2.2.2.1 Relazione tensione–deformazione 2100
62.2.2.2.2 Determinazione per il modello di kent e park modificato 2108
62.2.3 Modello di danno anisotropico con danni effettivi e recupero della rigidità 2111
62.2.3.1 Modello costitutivo 2111
62.2.3.2 formulazione multifibra non assiale 2113
62.2.3.3 Determinazione del modello di danno anisotropico 2114
62.2.3.3.1 Caricamento della tensione: 2114
62.2.3.3.2 Caricamento a compressione: 2115
62.2.3.4 Modello di danno anisotropico con ceppi permanenti 2121
62.2.3.4.1 Schema numerico uniassiale 2121
62.2.4 Aderenza–scorrimento 2124
62.2.5 Elemento di sezione zero 2126
62.3 Plasticità lussuosa 2129
62.3.1 Lunghezza plastica 2129
62.3.1.1 Possibili posizioni di cerniere in plastica 2130
62.3.1.2 Deformazione da curvatura ($\Delta(\phi)$) 2130
62.3.1.3 Rinforzato momento efficace del cemento di inerzia e curvatura 2132
62.3.1.4 Deformazione in termini di lunghezza della cerniera plastica 2133
62.3.1.4.1 Calcets rinforzato 2133
62.3.1.4.2 Acciaio inossidabile 2137
62.3.1.5 Ex 62.1: Cerniera di plastica in una colonna d'acciaio 2139
62.3.2 Modello di guasto della cinghia (materiale stato limite) 2139
62.3.2.1 Introduzione 2139
62.3.2.2 Modello di stato limite 2140
62.3.3 I modelli isterici di Ibarra che incorporano dissipazione dell'energia 2144

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

62.3.3.1 Modelli di Hysteresi . . . 2149
62.3.3.1.1 Modello orientato al picco . . . 2150
62.3.3.1.2 Modello di Pining . . . 2151
62.3.3.2 Modalità di degrado della resistenza . . . 2156
62.3.3.2.1 Modalità di degradazione della forza di base . . . 2159
62.3.3.2.2 Modalità di degrado della forza post-capping . . . 2160
62.3.3.2.3 Scarico della modalità di degrado della rigidità . . . 2161
62.3.3.2.4 Modalità di degrado della rigidità accelerata . . . 2163
62.3.3.3 Sintesi . . . 2164
62.3.4 Il modello di Ghannoum . . . 2165
62.3.4.1 Curva della spina dorsale . . . 2165
62.3.4.2 Comportamento ciclabile . . . 2165

63 Scienza e Arte della modellazione degli elementi finiti 2169
63.1 Introduzione . . . 2170
63.1.1 Verifica della mesh/analysis dell'elemento finito . . . 2173
63.1.2 Concetti di verifica e validazione del modello . . . 2173
63.2 Mesh . . . 2175
63.2.1 Elementi Macro . . . 2176
63.2.1.1 Ex 63.1: Modelli a colonna . . . 2180
63.2.1.2 Ex 63.2: Modellazione di fascio . . . 2181
63.2.2 Sezione trasversale . . . 2181
63.2.3 "Pick and stick" . . . 2182
63.2.4 Conclusioni . . . 2182
63.3 Determinazioni dei parametri di deteriorazione . . . 2183
63.3.1 Calibrazione . . . 2184
63.3.1.1 Identificazione dei parametri . . . 2184
63.3.2 Database dei parametri di modellazione . . . 2184
63.3.2.1 Pari/Bibbia . . . 2184
63.3.2.1.1 Proprietà della colonna . . . 2186
63.3.2.1.2 Riassunto delle capacità flessografiche . . . 2188
63.3.2.1.3 Esempio . . . 2188
63.3.2.2 Stanford/Lignos . . . 2189
63.3.2.3 UTSA/Ghannoum . . . 2190
63.3.2.4 Elemento finito di continuum/Dolati . . . 2190
63.3.2.5 ACI-437-A . . . 2191

Intermezzo: Dall'analisi in avanti all'identificazione del parametro 2191

64 Dati e Dobbt: Analisi di incertezze e sensibilità 2195
64.1 Introduzione . . . 2196
64.2 Qualità dei dati e fonti di dominio . . . 2196
64.3 incertezza Quantificazione e analisi . . . 2197
64.3.1 Caratterizzazione dell'incertezza di Input . . . 2198

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

64.3.1.1 Tipi di incertezze . . . 2198
64.3.1.2 Rappresentanza matematica . . . 2198
64.3.2 Dipendenza e campionamento correlato . . . 2199
64.3.2.1 Covarianza e Correlazione . . . 2199
64.3.2.1.0.1 Ex 64.1: Matrice di correlazione . . . 2199
64.3.2.2 Covarianza spaziale . . . 2200
64.3.2.3 Covarianza temporanea . . . 2200
64.3.2.4 Generando campioni correlati . . . 2201
64.3.3 Propagazione dell'incertezza . . . 2201
64.3.3.1 Simulazione Monte Carlo (MCS) . . . 2202
64.3.3.2 Ipercubo latino Sampling (LHS) . . . 2202
64.3.3.2.0.1 Ex 64.2: Latin Hypercube: esempio lavorato con due variabili . . . 2205
64.3.3.3 Alternative approssimative e surrogate a Sampling diretto . . . 2206
64.3.3.3.1 Metodo di stima del punto (PEM) . . . 2206
64.3.3.3.1.1 Ex 64.3: Esempio di metodo di stima del punto . . . 2208
64.3.3.3.2 Uno alla volta (Serie Taylor stima di differenza finita TSFD) . . . 2208
64.3.3.3.2.1 Ex 64.4: Metodo di differenza finito della serie Taylor Esempio . . . 2209
64.3.3.3.3 Espansione di caos polinomiale (PCE) . . . 2210
64.3.3.3.3.1 Ex 64.5: Espansione di caos polinomiale . . . 2211
64.3.4 Interpretazione dell'incertezza di uscita . . . 2212
64.4 Analisi della sensibilità . . . 2212
64.4.1 Metodo di Morris . . . 2213
64.4.1.1 Ex 64.6: Metodo di Morris . . . 2217
64.4.2 Indici di sensibilità basati sulla variazione del sobol . . . 2218
64.4.2.1 Indici di primo ordine . . . 2218
64.4.2.2 Indici di interazione e effetto totale . . . 2219
64.4.2.3 Interpretazione . . . 2219
64.4.2.4 Computazione e costo . . . 2219
64.4.2.5 Relazione con la proiezione di Morris . . . 2220
64.4.3 Confronto dei metodi di propaganda e sensibilità . . . 2220
64.4.4 Determinazione delle variabili casuali importanti . . . 2220
64.4.4.1 Ex 64.7: Metodo Morris; identificazione di variabili importanti . . . 2221
64.4.5 Diagrammi di Tornado . . . 2225
64.5 Dall'analisi della sensibilità all'identificazione del parametro . . . 2225

65 Decisioni: Metodi di identificazione del parametro 2228
65.1 Identificazione del parametro come problema inverso . . . 2229
65.2 Applicazioni e Quadro delle decisioni . . . 2230
65.2.1 Dall'analisi della sensibilità all'identificazione del parametro . . . 2231
65.2.2 Quadro di decisione: quale metodo quando? . . . 2231

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

65.3 Qualità dei dati e robustezza . . . 2231
65.3.1 Fonti di contaminazione dei dati . . . 2231
65.3.2 Stima coerente del consenso: RANSAC . . . 2232
65.3.2.1 Algoritmo . . . 2232
65.4 Il Levenberg...Marquardt Algorithm . . . 2236
65.4.1 Modelli e selezione dei modelli . . . 2236
65.4.2 Pesato non lineare Piazze di latta . . . 2236
65.4.3 Levenberg–Marquardt Aggiornamento Passo e Intuizione Algoritmo 2237
65.4.4 Ex 65.1: Fissare un modello iperbolico non lineare . . . 2237
65.4.5 Scala, bobine e regolarizzazione . . . 2240
65.4.6 Identità . . . 2240
65.4.6.1 Ravvicinamento dell'incertezza locale . . . 2241
65.4.7 Modello di discrepanza . . . 2242
65.5 Identificazione del Parametro Bayesian . . . 2242
65.5.1 Identificazione del parametro Bayesian: Setup . . . 2243
65.5.2 Valutazione MAP e Stime Point . . . 2243
65.5.3 Sampling posterior e MCMC per parametri . . . 2244
65.5.4 Ex 65.2: Risalto Bayesiano con una Baside Quadratica e Metropolis–Hastings Sampling . . . 2244
65.5.5 Esempio di lavoro: Inferenza baieana per i parametri di degradazione 2245
65.5.6 Quando usare l'identificazione baiesca . . . 2246
65.6 Il Levenberg - Marquardt Algorithm in pratica . . . 2246
65.6.1 Pratica di minimo-quares . . . 2248
65.6.1.1 MATLAB Parameter Identification Program: Descrizione . . . 2249
65.7 Flussi ibridi di lavoro e migliori pratiche . . . 2257
65.7.1 Calibrazione e convalida . . . 2257
65.7.2 Applicazioni strutturali . . . 2257
65.7.3 Quadro di decisione del flusso di lavoro . . . 2257
65.8 Ponte a Performance Basato su Terremoto Ingegneria . . . 2258

66 Intermezzo **2262**
66.1 Limitazioni di progettazione del fattore di carico e resistenza (LRFD) . . . 2262
66.2 Perché passare a Performance-Based Earthquake Engineering (PBEE)? . . . 2263
66.3 I quattro componenti di PBEE . . . 2264
66.4 Struttura del Libro . . . 2265

67 Analisi dei rischi **2266**
67.1 Introduzione . . . 2267
67.2 Rapporto di ricorrenza . . . 2268
67.3 Modello di adattamento . . . 2270
67.3.1 Fondamenti . . . 2270
67.3.2 Boore, Joyner e Fumel (1997) . . . 2271
67.3.3 Valutazione parametrica . . . 2272

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

67.4 Analisi dei rischi sismici . . . 2274
67.5 Analisi dei rischi sismici . . . 2275
67.6 Tempo di acquisizione . . . 2277
67.7 Curve di rischio sismiche . . . 2277
67.8 Cartine di rischio sismica . . . 2279
67.9 Deaggregazione del rischio sismico . . . 2280
67.10 Spettri di risposta target . . . 2281
67.11 Simulazione di movimento a terra stocastica . . . 2285
67.11.1 Rezaeian e Der Kiureghian (r-d) modal . . . 2286
67.11.2 Yamamoto e Baker (y-b) modello . . . 2287
67.12 Funzioni di eccitazione del tempo di Endurance . . . 2289
67.12.1 Prima generazione di ETEF . . . 2290
67.12.2 Seconda generazione di ETEF . . . 2291
67.12.3 Terza generazione di ETEF . . . 2292
67.12.4 Quarta generazione di ETEF . . . 2292
67.12.5 Quinta generazione di ETEF . . . 2294
67.13 Ex 67.1: Analisi dei rischi sismici . . . 2295

68 Analisi Sismica dei rischi II 2300
68.1 Introduzione . . . 2301
68.2 Tasso annuale di Eccedenza . . . 2302
68.3 Curva di pericolo . . . 2303
68.4 Analisi del rischio sismico di ingegneria (ESRA) . . . 2304
68.4.1 Ex 68.1: Calcolo del periodo di ritorno . . . 2305
68.5 Analisi dei rischi sismici probabilistici (PSHA) come SHA + ESRA . . . 2305

69 Analisi strutturale 2309
69.1 Introduzione . . . 2310
69.2 Definizioni di base . . . 2311
69.3 Capacità e domanda . . . 2312
69.3.1 Relazioni con la capacità di domanda . . . 2312
69.3.2 Metodi di stima della domanda . . . 2313
69.3.3 Principi di progettazione della capacità . . . 2314
69.4 Metodi di analisi sismica . . . 2315
69.4.1 Analisi push-over (POA) . . . 2315
69.4.1.1 Ex 69.1: Esempio di curva della domanda . . . 2319
69.4.1.2 Ex 69.2: Analisi push-over; Esempio pratico . . . 2322
69.4.2 Analisi dinamica incredibile (IDA) . . . 2352
69.4.3 Analisi a strisce multiple (MSA) . . . 2354
69.4.4 Analisi del cloud (CLA) . . . 2357
69.4.5 Analisi del tempo di resistenza (ETA) . . . 2358
69.4.6 Sintesi . . . 2360
69.5 Cosa c'è di più . . . 2362

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

70 Analisi dei danni **2364**
70.1 Introduzione . . . 2365
70.2 Stati di limite . . . 2366
70.2.1 Gerarchia degli Stati Limiti . . . 2367
70.2.2 Quadro di valutazione . . . 2367
70.2.3 Attuazione nel quadro PBEE . . . 2368
70.2.4 Calibrazione e convalida . . . 2368
70.2.5 Considerazioni multi-oggettive . . . 2368
70.2.6 Connessione agli indici di danno . . . 2369
70.3 Indici di danno . . . 2369
70.3.1 Indici di danno e criteri di prestazione . . . 2369
70.3.2 Trasmissione alla valutazione dei danni probabilistici . . . 2371
70.3.3 Rappresentanza probabilistica del danno . . . 2371
70.3.4 Parametri di domanda metrica e ingegneria (EDP) . . . 2372
70.3.5 chap: regione della fiducia in Valutazione dei danni . . . 2373
70.3.6 metriche di danno quantitativo . . . 2373
70.4 Prestazioni . . . 2375
70.4.1 Struttura di ingegneria basata sulle prestazioni . . . 2375
70.4.2 Livelli di prestazione e criteri di accettazione . . . 2377
70.4.3 Integrazione di Stati Limiti, Indici Damagine e Livelli Prestazioni . . . 2378
70.5 Trasmissione a Curve di Fragilità e Valutazione del rischio . . . 2380

71 Analisi della perdita **2382**

72 Valutazione del rischio probabilistico (⊇ PBEE)[23] **2385**
72.1 Nuovi parametri: Ingegneria del terremoto basata sulle prestazioni (PBEE) 2386
72.1.1 Limitazioni di carico e resistenza del fattore di progettazione (LRFD) 2386
72.1.2 Parte I: Obiettivi di performance espliciti . . . 2387
72.1.2.1 Metodo . . . 2387
72.1.2.2 Limitazioni di PBEE-1 . . . 2387
72.1.2.3 Progettazione vs. Analisi . . . 2389
72.1.3 Parte II: Quantificazione diretta delle conseguenze funzionali ed economiche: . . . 2389
72.1.3.1 Introduzione . . . 2389
72.1.3.2 Quadro generale . . . 2390
72.1.3.3 Differenze tra PBEE 1 e PBE E 2 . . . 2392
72.1.4 Procedura per l'attuazione del PBEE . . . 2394
72.2 Da risposta a danno: Curve di fragilità . . . 2395
72.2.1 Fondamenti e definizioni . . . 2396
72.2.2 Sviluppo di curve di fragilità . . . 2396
72.2.3 Rappresentanze matematiche . . . 2397
72.2.4 Funzione continua *vs.* Matrice discreta . . . 2398
72.3 Ruolo nel quadro PBEE . . . 2400

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

72.4 Ex 72.1: Esempio completo PBEE . . . 2401
72.5 Migliatoni storici e documenti fondativi . . . 2406

APPENDICI

Parte 1: Materiali di riferimento fondamentali

A Unità **2409**
A.1 Unità SI . . . 2409
A.2 Prefissi metrici e moltiplicatori . . . 2410
A.3 Unità & fattori di conversione . . . 2410
A.4 Riassunto della forza, della lunghezza, del lavoro e dello stress in varie unità metriche . . . 2411
A.5 Conversione di quantità fisiche da unità metriche a imperiali . . . 2411

B Carichi e progettazione basata su dati empirici **2412**
B.1 Carico morto . . . 2413
B.2 Carico del vento . . . 2413
B.2.1 Ex B.1: Carico del vento . . . 2415
B.3 Terremoti . . . 2416
B.3.1 Ex B.2: Caricamento del terremoto su una cornice . . . 2425
B.3.2 Ex B.3: Carico di terremoto su un edificio alto . . . 2426
B.4 Caricamenti del ponte . . . 2427
B.5 Combinazioni di carico . . . 2428
B.6 Riduzione del carico vivo . . . 2429
B.6.1 Ex B.4: Riduzione del carico vivo I . . . 2430
B.6.2 Ex B.5: Riduzione del carico vivo II . . . 2430
B.7 Posizionamento del carico . . . 2431

C Equazioni differenziali lineari omogenee **2432**
C.1 Riassunto delle equazioni differenziali di governo . . . 2432
C.2 Soluzioni . . . 2433
C.3 Stabilità i: $\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0$ . . . 2434
C.4 Stabilità ii; $\frac{d^4y}{dx^4} + k^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ . . . 2435
C.5 Fondo elastico in fascio; $\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^4y = 0$ . . . 2436

D Archi elastici; Analisi avanzate **2438**
D.1 Introduzione . . . 2439
D.2 Arco circolare a tre punte . . . 2439
D.2.1 Procedura di analisi . . . 2440
D.2.2 Carico di punto . . . 2441
D.2.3 Peso auto . . . 2447
D.2.4 Carico distribuito uniformemente . . . 2451

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

D.2.4.1 Sfittamento 2453
D.2.5 Arco circolare a tre punte: validazione 2454
D.2.6 Conclusioni 2455
D.3 Due - arco circolare a cerniera 2456
D.3.1 Procedura di analisi 2456
D.3.2 Carico di punto 2457
D.3.3 Peso auto 2467
D.3.4 Carico distribuito uniformemente 2475
D.3.5 Arco circolare a due punte: validazione 2479
D.3.6 Conclusioni 2482
D.4 Arco circolare senza cerniera 2482
D.4.1 Procedura di analisi 2482
D.4.2 Carico di punto 2483
D.4.3 Peso auto 2496
D.4.4 Carico distribuito uniformemente 2504
D.4.5 Arco circolare senza cerniera: validazione 2509
D.4.6 Conclusioni 2511
D.5 Conclusioni 2511

Parte 2: Tabelle di analisi e progettazione strutturale

E Tabelle di analisi delle conchiglie cilindriche 2514

F Progettazione di Barrel Shell Tetti 2527

G Set di dati del ponte di Alamillo 2556

H Identicon: hashing visivo 2561
H.1 Introduzione agli identicon 2562
H.2 Algoritmi di generazione degli identicon 2562
H.3 Implementazioni degli identicon di GitHub e Stack Exchange 2564
H.4 La nostra applicazione MATLAB 2565
H.5 Segmenti principali del codice 2567
H.6 Utilizzo del programma 2568
H.7 Vantaggi e applicazioni 2569
H.8 Conclusioni 2570

Parte 3: Implementazioni del codice

I MATLAB®, Mathematica Codici 2571
I.1 Parte I: Metodi di analisi fondamentali e computazionali 2573
I.1.1 Statici matrice di una truppa B 2573
I.1.2 Forma dell'arco di St louis 2575
I.1.3 Arbitro tre arco circolare a cerniera; mathematica 2577
I.1.4 Collasso di archi murari 2588

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

I.1.5 Principali . . . 2588
I.1.6 Grande deflettore di un fascio . . . 2599
I.2 Parte II: Progettazione e analisi strutturali . . . 2604
I.2.1 Progettazione di conchiglie cilindriche . . . 2604
I.2.2 Analisi approssimativa del telaio; metodo cantilever . . . 2616
I.2.3 Torsione non uniforme . . . 2628
I.2.4 Cornice ortogonale . . . 2630
I.2.5 Cornice ortogonale ibrida . . . 2634
I.2.6 Telaio; filo duro . . . 2637
I.2.7 Metodo di rigidità diretta; telaio . . . 2641
I.2.8 Codice principale . . . 2641
I.2.9 Matrice di stiffness dei membri non prismatici . . . 2653
I.2.10 Linee isostatiche . . . 2659
I.2.11 Design evolutivo . . . 2665
I.2.12 Principali . . . 2665
I.2.13 Schema di interazione colonna . . . 2671
I.2.14 Metodi variabili; mathematica . . . 2674
I.2.15 Simulazione Monte Carlo della risposta elastica lineare di un edificio al carico laterale . . . 2685
I.2.16 Elementi isoparametrici . . . 2687
I.3 Parte III: Modellazione dei materiali e comportamento costitutivo . . . 2698
I.3.1 Plastica fondamentale . . . 2698
I.3.2 Modelli costitutivi . . . 2702
I.3.3 Modello bilineare . . . 2703
I.3.4 Indurimento . . . 2707
I.3.5 Isteresi . . . 2710
I.3.6 Modificato giuffre monegotto pinto . . . 2729
I.3.7 Parco di kent modificato . . . 2734
I.3.8 Ibarra . . . 2739
I.3.8.1 Isteresi . . . 2739
I.3.8.2 Pizzico di isteresi . . . 2758
I.3.9 Portata di stato limite . . . 2780
I.4 Parte IV: Metodi e Identificazione dei parametri Data-Driven . . . 2801
I.4.1 Programma di identificazione del parametro . . . 2801
I.4.2 Programma principale e Orchestrazione di base . . . 2802
I.4.3 Integrazione di dati I/O e Spreadsheet . . . 2811
I.4.4 Ottimizzazione del flusso di lavoro e funzioni ausiliarie . . . 2823
I.5 Parte V: Fondazioni numeriche e statistiche . . . 2836
I.5.1 Levenberg-Marquardt . . . 2836
I.5.2 Tecniche numeriche . . . 2837
I.5.3 Filtri FFT e butterworth . . . 2837
I.5.4 Decomposizione del valore singolare . . . 2840

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

I.5.5 Precondizioni . . . 2842
I.5.6 Consenso di campionamento casuale (RANSAC) . . . 2844
I.5.7 Ipercubo latino . . . 2848
I.5.8 Regressione baieana con una base quadratica . . . 2853
I.5.9 Markov catena Monte Carlo Simulazione . . . 2860
I.6 Parte VI: Ottimizzazione e montaggio del parametro . . . 2862
I.6.1 Levenberg-Marquardt . . . 2862
I.6.2 Attuazione doganale . . . 2862
I.6.3 Utilizzo della funzione integrata . . . 2865
I.7 Parte VII: Affidabilità sismica e incertezza . . . 2867
I.7.1 Analisi dei rischi sismici . . . 2867
I.7.2 Ingegneria basata sulle prestazioni . . . 2870
I.8 Parte VIII: Utilità . . . 2875
I.8.1 Identico . . . 2875

J Esempi di MathCad **2881**

Parte 4: Metodi numerici e statistici

K Filtro a record sismico (Fast Fourrier Transforms) **3047**
K.1 Come Preparare il Tuo Nome . . . 3049

L Recensione di Algebra lineare **3053**
L.1 Su matrici . . . 3054
L.1.1 Definizioni . . . 3054
L.1.2 Operazioni di matrice elementare . . . 3055
L.1.3 Determinanti . . . 3056
L.1.4 Inversione . . . 3057
L.2 Soluzioni di equazioni lineari . . . 3058
L.2.1 Strategie . . . 3058
L.2.2 Decomposizione . . . 3059
L.2.2.1 Eliminazione di Gauss . . . 3059
L.2.2.2 Gauss-Jordan eliminazione . . . 3059
L.2.2.3 **LU** Decomposizione . . . 3060
L.2.2.4 La decomposizione di Cholesky . . . 3062
L.2.2.5 Decomposizione del valore singolare . . . 3063
L.2.2.6 Decomposizione QR . . . 3065
L.2.3 Metodi indiretti . . . 3065
L.2.3.1 Seidel di Gauss . . . 3065
L.3 Caratteristiche della matrice e miglioramenti computazionali . . . 3066
L.3.1 Singolarità e rango . . . 3066
L.3.2 Valori e autovettori . . . 3067
L.3.3 Numero di condizioni . . . 3068
L.3.4 Pre condizionamento . . . 3068

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

L.3.4.1 Precondizionamento a sinistra . . . 3069
L.3.4.2 Precondizione giusta . . . 3070
L.4 Esempi . . . 3071
L.4.1 Ex L.1: Eliminazione di Gauss . . . 3072
L.4.2 Ex L.2: Espulsione di Gauss-jordan . . . 3072
L.4.3 Ex L.3: **lu** Decomposizione . . . 3073
L.4.4 Ex L.4: La decomposizione di Cholesky . . . 3074
L.4.5 Ex L.5: Gauss-seidel . . . 3075
L.4.6 Ex L.6: Gauss-Seidel . . . 3076
L.4.7 Ex L.7: Decomposizione del valore singolare . . . 3077
L.4.8 Ex L.8: Precondizioni . . . 3078

M Probabilità e Statistica **3081**
M.1 Introduzione alla probabilità e alle statistiche . . . 3081
M.2 Concetti fondamentali di probabilità . . . 3082
M.2.1 Determinazione *vs.* probabilità . . . 3082
M.2.2 Definizione . . . 3083
M.2.3 Probabilità condizionale . . . 3083
M.2.4 Tipi di variabili casuali . . . 3084
M.3 Strumenti statistici per l'analisi delle probabilità . . . 3085
M.3.1 Funzione di distribuzione cumulativa . . . 3086
M.3.2 Intervallo di fiducia . . . 3086
M.4 Misure statistiche . . . 3087
M.4.1 Momenti e misure di tendenza centrale . . . 3087
M.4.2 Rapporti tra variabili . . . 3090
M.5 Distribuzioni . . . 3091
M.5.1 Distribuzioni Univariate . . . 3091
M.5.1.1 Confronto . . . 3093
M.5.2 Distribuzioni di bivariato . . . 3095

N Indice di affidabilità **3098**

Parte 5: Teoria avanzata e ottimizzazione

O Meccanica di corpi deformabili, un Primer **3104**
O.1 Introduzione . . . 3105
O.1.1 Notazione . . . 3105
O.1.2 Tenori . . . 3107
O.1.2.1 Operazioni . . . 3108
O.1.2.2 Rotazione degli assi . . . 3109
O.1.2.3 Trasformazione dei tensori . . . 3110
O.1.2.4 Valori principali dei tensori simmetrici del secondo ordine . . . 3111
O.1.3 Interpretazione fisica degli invarianti dello stress . . . 3112
O.2 Campi vettoriali; meccanica di corpi deformabili . . . 3114

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

O.2.1 Forze . . . 3114
O.2.2 Tensore di stress del Cauchy . . . 3114
O.2.2.1 Tensori di stress idrostatico e deviatori . . . 3116
O.2.2.2 Rappresentanza geometrica degli stati di stress . . . 3117
O.2.3 Kinematics . . . 3117
O.2.3.1 Posizione e spostamento . . . 3117
O.2.3.2 Strains . . . 3118
O.3 Le leggi fondamentali della meccanica continuum . . . 3120
O.3.1 Le leggi sulla conservazione . . . 3121
O.3.2 Flussi . . . 3121
O.3.3 Conservazione della massa; equazione di continuità . . . 3122
O.3.4 Conservazione del moto; equazione del movimento . . . 3123
O.3.5 Conservazione dell'energia; primo principio della termodinamica . 3125
O.4 Equazioni costitutive . . . 3127
O.4.1 3D generale . . . 3128
O.4.2 caso isotropica trasversale . . . 3129
O.4.3 Casi 2D speciali . . . 3129
O.5 Osservazioni fenomenologiche . . . 3130
O.5.1 Test di carico, spostamento e controllo delle tensioni . . . 3131
O.5.2 Pre/post-peak risposta materiale di acciaio e cemento . . . 3132
O.6 Localizzazione della deformazione . . . 3133
O.6.1 Prove sperimentali . . . 3133
O.6.1.1 σ- diagramma di cod, modello di Hillerborg . . . 3133
O.7 Condizioni di bovino . . . 3137
O.8 Schema Tonti . . . 3137
O.9 Concetto di forza interna . . . 3139

P Omaggio a Westergaard **3140**
P.1 Crack punta campo di stress . . . 3141
P.1.1 Funzione di stringa aerodinamica . . . 3141
P.1.2 Soluzione . . . 3143
P.2 Interazione della struttura fluida . . . 3148

Q Regione Fiducia e Metodi Levenberg-Marquardt **3162**
Q.1 Regione della fiducia . . . 3163
Q.2 Algoritmo . . . 3167
Q.3 Formulazione in MATLAB® . . . 3167
Q.4 Visualizzazione in tempo reale . . . 3170

R Calcolo vettoriale: elementi introduttivi **3172**
R.1 Definizioni di base . . . 3173
R.1.1 Sfida estranea a una scalare . . . 3173
R.1.1.1 Ex R.1: Tangente a una curva . . . 3174
R.1.2 Divergenza . . . 3175

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

R.1.2.1 Vettore . . . 3175
R.1.2.1.1 Ex R.2: Divergenza di un vettore . . . 3177
R.1.2.2 Destinazione del secondo ordine . . . 3177
R.1.3 Gradiente . . . 3177
R.1.3.1 Campo Scalare . . . 3177
R.1.3.1.1 Ex R.3: Gradiente di un campo scalare I . . . 3178
R.1.3.1.2 Ex R.4: Gradiente di un campo scalare ii . . . 3178
R.1.3.2 Campo vettoriale . . . 3180
R.1.3.2.1 Ex R.5: Gradiente di un campo vettoriale . . . 3180
R.2 Teoremi integrativi . . . 3181
R.2.1 Integral di un vettore . . . 3181
R.2.2 Linea integrale . . . 3181
R.2.3 Integrazione per parti . . . 3182
R.2.4 Gauss; teorema divergenza . . . 3182
R.2.4.1 Ex R.6: interpretazione fisica del teorema divergente . . . 3183
R.2.5 Teorema di Stoke . . . 3184
R.2.6 Verde; teorema di gradiente . . . 3184
Riferimenti dei Libri II–IV e delle appendici **3185**

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Elenco delle figure: Libri II–IV (Analisi)

17.1 Analisi strutturale; il quadro generale . . . 864
17.2 Tipi di forze in elementi strutturali (1d) . . . 870
17.3 Aspetti fondamentali dei sistemi di cavi . . . 870
17.4 Aspetti di base degli archi . . . 871
17.5 Tipi di capriate . . . 872
17.6 Variazioni nelle configurazioni di post e travi . . . 872
17.7 Tipi di fascio diversi . . . 873
17.8 Forme di base di cornici . . . 874
17.9 Esempi di strutture supportate dall'aria . . . 874
17.10 Forme di base delle conchiglie . . . 875
17.11 Sequenza dei corsi di ingegneria strutturale . . . 877

18.1 Mappa della neve degli stati uniti . . . 880
18.2 Airfoil, equazione di Bernoulli. . . . 881
18.3 Mappa del vento degli stati uniti . . . 882
18.4 Effetto del carico eolico sulle strutture . . . 883
18.5 Mappa sismica degli stati uniti . . . 884
18.6 Carico terrestre e idrostatico su strutture . . . 887
18.7 Carico proiettato . . . 891
18.8 Posizionamento del carico per massimizzare i momenti . . . 892
18.9 Trasferimento di carico negli edifici R/C . . . 895
18.10 Azioni in una o due modalità nelle lastre . . . 895
18.11 Meccanismi di trasferimento del carico nelle cattedrali gotiche e archi poco profondi . . . 897
18.12 Concetto di aree tributarie per il carico dei membri strutturali . . . 898
18.13 Vita di carico di una struttura, (Lin e Stotesbury, 1981) . . . 900

19.1 Esempi di confini delle reazioni . . . 904
19.2 Equilibrio di momenti, da leonardo (Da Vinci, 1490)a Calder . . . 906
19.3 Inclinea le reazioni di supporto del rullo . . . 907
19.4 Grado di indeterminanza statica . . . 907
19.5 Le reazioni sono concomitanti . . . 908

COPIA DI REVISIONE

19.6 Gratuiti diagrammi corporei di un fascio sottoposto a carichi diversi 909

20.1 Trucchi staticamente indeterminati 930
20.2 Relazione tra forze e lunghezze 931
20.3 Presentare le forze con frecce 932
20.4 Metodo congiunto/matrix, diagrammi corpo libero articolari 941
20.5 Complessivamente determinata trus 942

21.1 Stress interni 949
21.2 Forze interne in travi rettilinee e curve 951
21.3 Forze interne 953
21.4 Portata e momento firma convenzioni per il design 953
21.5 Convenzioni di cartello di progettazione 953
21.6 Schema corpo libero di un segmento del fascio infinitesimale 954
21.7 Variazioni di carico, taglio e momenti 956

22.1 Curvatura e ceppi 981
22.2 Convegno di segnale per il metodo dell'area della curvatura per curve opposte del fascio 993
22.3 Metodi di area curvatura 993
22.4 Sflessione massima utilizzando il metodo della zona di momento 997
22.5 Travi a ponte 1003

23.1 Deformazione pura della tosapa 1008
23.2 Elemento infinitesimale sottoposto a stress della tosapa 1008
23.3 Stress e coefficiente di taglio 1010
23.4 Rapporti di rotazione della tortura 1013
23.5 Perché si verifica la guerra 1015
23.6 Torsione non uniforme (adattato da (McGuire e Winter, 1968)) 1016
23.7 Ho un fascio sottoposto a torsione 1018

24.1 Forze virtuali e reali in una struttura arbitraria 1026
24.2 Teorema reciproco Maxwell-betti 1029

25.1 Struttura del cavo staticamente indeterminata 3 1055
25.2 Trave di cantilever 1057
25.3 Problema illustrativo per il metodo di flessibilità 1058
25.4 Illustrazione del metodo di flessibilità con due sconosciuti 1060
25.5 Esempi di strutture ispirate a regine-post 1076
25.6 Equazione di tre momenti, derivazione 1081
25.7 Equazione di tre momenti, termini di carico 1083

26.1 Convegno di segnale per il metodo di rigidità 1088
26.2 Formulazione di problemi flessibili per i termini di rigidità 1090

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

27.1 Esempio illustrativo per il metodo di deflettore del pendio 1099
27.2 Concetti chiave della distribuzione del momento 1110

28.1 Müller-Breslau Principio 1122

29.1 Stabilità di una barra rigida 1134
29.2 Stabilità di una barra rigida con imperfezione iniziale 1135
29.3 Colonna di fascio semplicemente supportata; segmento differenziale; effetto della forza assiale p 1137
29.4 Sistema dinamico a due dof 1149
29.5 Efficace lunghezza per travi e cornici 1151
29.6 Colonne lunghezze efficaci in un multi-bay cornici a più piani 1151
29.7 Grafico di allineamento per connessioni semi-flessibili (American Institute of Steel Construction, 2016) 1152
29.8 Inelastica buckling 1154
29.9 Curva della colonna di Euler e ssrc 1154

30.1 Verifica della teoria dei cavi 1158
30.2 Geometria del cavo # 1 1161
30.3 Geometria del cavo # 2 1163
30.4 Geometria di un cavo inclinato sottoposto a carico trasversale orizzontale uniforme 1169
30.5 Durezza del cavo 1170
30.6 Coordinate di riferimento alternative catanarie 1181
30.7 Catenario con corda inclinata, (Cella, 1999) 1183
30.8 Confronto tra soluzioni a catenaria e parabolica 1188

31.1 Che cosa è un voussoir 1191
31.2 Arch analizza per de la rental 1192
31.3 Radici quadratiche e cubice di grandi numeri de Belidor, B. F., 1757 1193
31.4 La tavola di Belidor per dimensionare il supporto verticale (*pied-droit*) di archi secondo de La Hire; de Belidor, B. F., 1757 1193
31.5 Analisi di archi (de Belidor, B. F., 1729) 1195
31.6 I criteri di fallimento di Belidor (Brandonisio e De Luca, 2020) 1195
31.7 Analisi di archi (Couplet, 1729) 1197
31.8 Modelli di liste Danyzy, 1732 1197
31.9 Analisi di voussoirs senza frizione da Coulomb, 1773 1199
31.10 Il principio di Moseley meno resistenza (Moseley, 1869) 1200
31.11 Ponte di Charles Mosca voussoir (turin) analizzato da (Castigliano, 1879) 1201
31.12 Analisi elastica di Winkler degli archi (Winkler, 1880) 1201
31.13 Apparecchi sperimentali utilizzati da Pippard, Tranter e Chitty, 1936 per indagare la stabilità di archi voussoir. 1202
31.14 Insufficienza graduale di un voussoir Pippard, Tranter e Chitty, 1936 1203

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

31.15 Voussoirs analizza da Pippard e Baker, 1943 1204
31.16 Flusso di forze attraverso i blocchi in un arco 1209
31.17 Determinazione dell'insieme delle forze all'origine 1211
31.18 MATLAB®sequenza generata di cerniere in un voussoir 1212
31.19 Meccanismi di colata; spinte d'abutmento (Nobile e Bartolomeo, 2014) . 1216
31.20 Poligono funicolare invertito e corrispondente linea di spinta ed eccentricità 1217
31.21 Modalità di guasto di un arco semi-cerca a tre cerniera 1218
31.22 Sequenza delle posizioni di cerniera 1218

32.1 Momento resiste alle forze in un arco o sistema di sospensione rispetto a una trave, (Lin e Stotesbury, 1981) 1221
32.2 Statici di un arco a tre punte 1222
32.3 Due arco a cerniera, analogia con fascio fisso (Lin e Stotesbury, 1981) . . . 1229
32.4 Centro di gravità di un voussoir 1238
32.5 Equilibrio di un voussoir infinitesimale 1239
32.6 Arco parabolico ottimale per un carico uniforme 1244
32.7 Arco parabolico senza cerniera; diagramma corpo libero 1250
32.8 Effetto di insediamento iniziale e cambiamento della temperatura 1255
32.9 Scala a spirale al museo louvre (paris), e la cattedrale di sagrada familia (barcelona) 1262
32.10 Geometria della struttura curva nello spazio 1262
32.11 Schema corpo libero di una struttura curva nello spazio 1263

34.1 Slocazioni e sollecitazioni in un piatto 1279
34.2 Internal forces 1282
34.3 Stress distribution 1287
34.4 Equilibrium of a circular plate infinitesimal element 1291

35.1 Elemento di conchiglia differenziale, geometria, sollecitazioni e loro risultati 1299
35.2 Kinematics di elemento differenziale 1299
35.3 Equilibrio di elemento conchiglia differenziale 1301
35.4 elemento di conchiglia differenziale, V_x stress risultati 1305
35.5 Elemento di conchiglia differenziale, curvature principali 1306
35.6 Differential shell element, initial and deformed state 1310
35.7 Elemento di conchiglia differenziale, stato iniziale e deformato; ceppo di taglio causato da aumento della lunghezza dei lati positivi 1312
35.8 Differential shell element, initial and deformed state; rotation 1313
35.9 Middle surface of differential element 1315
35.10 Classification of shells 1324
35.11 Esempi di conchiglie dove l'assunzione della membrana è (per lo più) valida 1325
35.12 Gratuiti diagrammi del corpo di elemento iperboloide e cupola infinitesimale 1327
35.13 Schema corpo libero di un elemento shell circolare infinitesimale 1329

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

35.14 La distribuzione risultante di stringa in una shell circolare completa semplicemente supportata . . . 1332
35.15 Edge effects . . . 1334
35.16 Corrective applied line load in circular shell . . . 1335
35.17 Sine series plot . . . 1335
35.18 Statically indeterminate shell and beam analogies . . . 1353
35.19 Circular shells resting on an elastic support . . . 1354

36.1 oscillatore monogrado di libero dominio . . . 1376
36.2 Curve di amplificazione dinamica concettuale per un oscillatore SDOF smorzato sotto forza armonica . . . 1384
36.3 spettro di risposta accelerata S_a come funzione di periodo naturale T_n per vari rapporti di smorzamento. . . . 1393
36.4 Le prime tre forme di modalità di un raggio semplicemente supportato . . . 1397
36.5 Ciclo elastoplastico bilineare isteresi sotto carico simmetrico ciclico. . . . 1404

37.1 Interazioni iterative dell'ingegnere architettonico . . . 1414
37.2 Domanda e capacità in un fascio . . . 1415
37.3 Sicurezza . . . 1415
37.4 Funzioni di distribuzione probabili C e D . . . 1418
37.5 Probabilità del fallimento in termini di β . . . 1420
37.6 Analisi di stato limite di una sezione in cemento armato cracked . . . 1421
37.7 Blocco di stress Whitney . . . 1423
37.8 Colonna corpo libero e diagrammi di interazione . . . 1430
37.9 Colonna corpo libero, stato equilibrato . . . 1432

38.1 Rotture d'angolo compatibili . . . 1447
38.2 Sfiorazione di un semplice fascio . . . 1447
38.3 Sfiorazione del telaio portale con colonne rigide sotto carico verticale . . . 1448
38.4 Sfiorazione del telaio portale sotto carico verticale . . . 1448
38.5 Esempio di telaio portale soggetto a carico laterale . . . 1448
38.6 Forma e diagramma di momento scelti; telaio portale con carico laterale . . . 1449
38.7 Deflettori di vapore in termini di rigidità di sostegno . . . 1450
38.8 Telaio sotto carico verticale; posizione approssimativa dei punti di inflessione 1452
38.9 analisi approssimativa dei frame sottoposti a carichi verticali; momenti traversi 1453
38.10 Analisi approssimativa dei telai sottoposti a carichi verticali; forze assiali della colonna . . . 1453
38.11 analisi approssimativa dei frame sottoposti a carichi verticali . . . 1454
38.12 Analisi approssimativa dei telai sottoposti a carichi laterali; cesoia della colonna . . . 1455
38.13 analisi approssimativa dei frame sottoposti a carichi laterali; momento trave 1456
38.14 Deformazione della cesoia in un edificio breve,(Lin e Stotesbury, 1981) . . . 1477
38.15 Deformazione flessorale in un edificio alto, (Lin e Stotesbury, 1981) . . . 1477

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

38.16 Diffusore in una struttura di costruzione composta da due pareti e rivestimenti snelle, (Lin e Stotesbury, 1981) 1478
38.17 Deformazione di un piegato (Lin e Stotesbury, 1981) 1479
38.18 Sfilettatura della cinghia e flessorale di un sottosistema rigido del telaio, (Lin e Stotesbury, 1981) 1480
38.19 Sflessione laterale da carico verticale non simmetrico, (Lin e Stotesbury, 1981) 1480

40.1 Ceppo dipendente dal tempo; strisciamento e restringimento 1529
40.2 Carico termico per la costruzione 1529
40.3 Firma Convenzione, Design e Analisi (Fig. 26.1) 1530
40.4 Elementi forze interne e dof locali 1531
40.5 Sviluppi indipendenti 1532
40.6 Sistema di coordinate locali e globali/dof 1533
40.7 Gradi di indeterminatezza statica e cinematica 1534
40.8 Problema di valore boundario 1536

41.1 Definizione del termine di rigidità K_{ij} 1538
41.2 Coefficienti di stiffamento per vari tipi di elementi 1538
41.3 Gradi di libertà dell'elemento trave 3D 1541
41.4 Termini di rigidità individuale in un elemento 3D 1543
41.5 Deformazione parassita della cesoia causata da deformazioni imposte . . 1544
41.6 Forze di fine e spostamenti di un elemento torsione con la resistenza di curvatura 1547

42.1 Esempio di confronto tra flessibilità e rigidità 1551
42.2 Esempio di fascio per determinare il grado di indeterminanza cinematica 1552

43.1 Locale (in inglese)$\mathbf{k}^e$) e globale ($\mathbf{K}^e$) Matrici di rigidità degli elementi . . . 1576
43.2 Matrice di trasformazione per una trave 2D 1576
43.3 Trasformazione vettoriale 3D arbitraria 1578
43.4 rotazione degli elementi del telaio 2D rispetto a Z (or z) 1580
43.5 rotazione degli elementi di griglia 1581
43.6 Matrice di trasformazione per il raggio vlasov 1582
43.7 2D tromba rotazione 1583
43.8 Riduzione della rotazione 3D 1585
43.9 Caso speciale di trasformazione 3D per i membri verticali 1586
43.10 Rotazione 3D complessa 1587

44.1 Dof non teso e vincolato 1594
44.2 Esempio di discortizzazione strutturale 1595
44.3 Esempio per **[ID]** determinazione della matrice 1596
44.4 Esempi di **LM** assegnazioni 1597
44.5 Montaggio del processo di matrice della rigidità globale 1598

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

45.1 Mapping di spostamenti in forze 1616
45.2 Mappatura di un cerchio di spostamento dell'unità in una ellisse forza, (Gavin, 2012). 1617
45.3 Problema di test del valore dell'energia 1620
45.4 Assemblaggio degli Stati membri che risultano inadeguati **K** 1622
45.5 Ill conditioned matrices in terms of K_1 K_2 1623
45.6 Importanza della numerazione nodale 1626
45.7 Requisiti di stoccaggio per la matrice strutturale della rigidità 1627

46.1 Kinematics di un elemento truss 1639
46.2 Elemento stabile e staticamente determinato 1643
46.3 Fascio con offset rigido 1655
46.4 Fbd di fascio con offset rigido 1656
46.5 Travi flessibili, rigide e semirigide 1658
46.6 Deformazioni di un fascio semirigido 1659
46.7 $\overline{K}_{22}$ Coefficiente per connessioni semi-flessibili 1662
46.8 Estratti dal manuale di costanti del telaio (Portland Cement Association, 1947) 1663
46.9 Fascio con sezione variabile 1664
46.10 Sezione con profondità variabile lineare; studio parametrico 1665
46.11 Sezione con profondità variabile parabolica; studio parametrico 1666

47.1 Operatori variabili e differenziali 1681
47.2 Esempi di condizioni limite essenziali e naturali 1686
47.3 Tonti diagrap per il metodo energetico potenziale totale 1692
47.4 Diagramma Tonti per Hu-Washizu, (Červenka, 1994) 1705
47.5 Diagrammi Tonti per Lagrange, Hamilton e D'Alembert 1706

48.1 Definizione di trazione 1711
48.2 Densità energetiche di ceppo e complementari 1712
48.3 Energia potenziale 1713
48.4 Effetti delle storie di carico su U e W_i 1715
48.5 Diagrammi illustrativi dei principi delle opere virtuali e complementari . 1723
48.6 Minimizzazione in meccanica quantistica e classica 1734
48.7 Riepilogo dei metodi variativi 1753
48.8 Dualità dei principi variativi 1754

49.1 Sistema di coordinate naturali lungo una linea retta 1760
49.2 Sistema di coordinate naturali per un triangolo 1761
49.3 Integrazione su un triangolo 1763
49.4 Elemento finito assiale 1764
49.5 Elemento di triangolo costante 1766
49.6 Elemento bilineare rettangolare 1768
49.7 Funzioni di forma per 4 elementi quadrilaterali annunziati 1769

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

49.8 Solido elemento rettangolare trilineare 1769
49.9 Funzioni di forma per 3 elementi lineari triangolari 1772
49.10 Elemento a barre quadratico trinodato 1772
49.11 Elemento finitore flessibile 1773
49.12 Funzioni di forma per flessore di elemento a fascio uniforme. 1775
49.13 Quattro elementi isoparametrici 1779
49.14 Serendipity e quadrilateri lagrangiani quadratici 1780
49.15 Triangoli Pascal per elementi quadrilaterali e triangolari 1780
49.16 Serendipity isoparametrico elemento finito quadratico: elemento globale e genitore 1781
49.17 Funzioni di forma per 8 elementi quadrilaterali annunziati 1782
49.18 Funzioni di forma per 9 elementi quadrilaterali annunziati 1784
49.19 Numerazione nodale per elementi isoparametrici 1785
49.20 Funzioni di forma per 6 elementi quadratici triangolari annui 1787

50.1 Completità e compatibilità 1795
50.2 h, p e r convergenza 1797
50.3 continuità di interelement dello stress 1798
50.4 continuità di interelement 1799

51.1 Mapping bidimensionale di alcuni elementi 1801
51.2 Elementi effettivi e genitoriali 1801
51.3 Iso, super e sotto elementi parametrici 1803
51.4 Elemento differenziale nel sistema di coordinate curvilinea 1807
51.5 Prodotto trasversale di due vettori 1807
51.6 Elemento con possibili jacobian singolari 1808
51.7 Integrazione numerica Newton-Cotes 1813
51.8 Integrazione Gauss-legendre su una superficie 1818
51.9 Integrazione numerica su un triangolo 1819
51.10 Estrazione da 4 punti quadrati (Felippa, 1999) 1820
51.11 Carico della gravità 1822
51.12 Carico di trazione in elementi isoparametrici 1823
51.13 Carico di trazione in elementi isoparametrici contigui 1824
51.14 Modalità di spostamento indipendenti per un elemento bilineare 1827
51.15 Modalità di oreglas in elemento quadratico sottointegrato 1827
51.16 Elemento bilineare rettangolare sottoposto a flessione; elemento bilineare e geometria corretta 1828
51.17 Stime associate a modalità incompatibili per l'elemento q6 1829
51.18 Cilindrata laterale indotta dalla perforazione d.o.f. 1831

53.1 Assilico *vs* rigidità flessografiche 1852
53.2 Riduzione di spostamenti non frenati quando la rigidità assiale viene ignorata 1853
53.3 Modellazione di edificio per carico sismico 1853

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

53.4 Schema corpo libero di un nodo 1854
53.5 Massa e rigidità di smorzamento proporzionale 1860
53.6 Euler avanti vs metodi arretrati Euler 1865

54.1 Non linearità geometrica, grande esempio di deflettorazione (**B**), 29.2.3 . . 1887
54.2 Materiale non linearità, fibre (**D**) 1887
54.3 Materiale non linearità, sezione (**D**) 1887
54.4 Lineare *vs.* analisi non lineari 1888
54.5 Tipi di analisi strutturale 1890
54.6 Curva di difesa del carico e varia gamma di risposta 1893
54.7 Codici di progettazione in antichità 1895
54.8 *) ur Eisenbetonbau* 1897
54.9 Esempi di codici di design moderni 1898
54.10 Livelli di performance 1900
54.11 Confronto di vari quadri di progettazione 1901

55.1 Superficie di usura; definizione 1904
55.2 Modelli indipendenti a pressione idrostatica 1904
55.3 Superfici di resa dipendente dalla pressione 1906
55.4 Modelli a carico della pressione idrostatica 1907
55.5 Stress-strain di metalli; effetto baushinger 1908
55.6 Micro-cracks concreti 1909
55.7 Obbligazioni chimiche 1910
55.8 Obbligazioni duttili e fragili 1910
55.9 Dislocazione 1911
55.10 Elasto-plastic stress sforzo risposta 1912
55.11 Modelli di indurimento 1914

56.1 Sezione di croce arbitraria considerata per la determinazione della $M - \Phi$ .1936
56.2 Procedura di calcolo $M - \Phi$ analiticamente 1937
56.3 Curvatura del momento e diagrammi di forza assiale (interazione) 1943
56.4 Discretizzazione di una sezione trasversale in strati 1944
56.5 Approccio fondamentale per determinare $M - \Phi$ numericamente 1945

57.1 Linee di respirazione in lastre 1967
57.2 Determinazione delle linee di resa in lastre rettangolari 1969
57.3 Soluzione di limite inferiore Statics - *Si'.* Analisi del pushover 1973

59.1 Metodo di Newton 1985
59.2 Schema di integrazione esplicita 1992
59.3 Metodo di Newton spiegato (per il controllo del carico) 1995
59.4 Metodo Newton-raphson per il controllo del carico 1997
59.5 Metodo modificato di newton-raphson, tangente iniziale 1998
59.6 Segreto di incentivo, metodo quasi-newton 1999

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

59.7 Metodo di Newton; carico contro controllo di spostamento 2004
59.8 Metodo di Newton; controllo dello spostamento (confronto con figura 59.3) 2004
59.9 Metodo Newton-raphson; controllo di spostamento 2005

60.1 Livelli di analisi strutturale 2021
60.2 Approccio incrementale esplicito alla non linearità geometrica 2021
60.3 Determinazione del carico di indurimento senza matrice geometrica rigidità 2027

61.1 Sistema di coordinamento per truffe 2D 2033
61.2 Forze interne e spostamenti corrispondenti per il metodo basato sulla rigidità 2D 2038
61.3 Determinazione dello stato per il metodo basato sulla rigidità 2040
61.4 Grafico di flusso dell'analisi non lineare utilizzando il metodo basato sulla rigidità 2043
61.5 Sezione di fibre-distribuzione delle sezioni di controllo e suddivisione della sezione in fibre 2047
61.6 Distribuzione di stress trasversale non lineare 2048
61.7 Elemento telaio 2D senza modalità rigide del corpo 2050
61.8 Firma convenzione sulla forza di sezione 2051
61.9 Forze interne e spostamento corrispondente per il metodo basato sulla flessibilità 2D 2054
61.10 Il rapporto tra modalità corpo rigido e nessun modo di corpo rigido . . . 2054
61.11 Determinazione dello stato per metodo basato sulla flessibilità senza iterazione degli elementi 2056
61.12 Determinazione dello stato (Taucer, Spacone e Filippou, 1991a) 2059
61.13 Determinazione dello stato degli elementi e delle sezioni 2060
61.14 Grafico di flusso dell'analisi non lineare utilizzando metodo basato sulla flessibilità w/o iterazione degli elementi 2072
61.15 Grafico di flusso dell'analisi non lineare utilizzando metodo basato sulla flessibilità w/ iterazione degli elementi 2073
61.16 Confronto della rigidità *vs.* formulazione basata sulla flessibilità 2074
61.17 Elemento 2D a lunghezza zero 2076
61.18 Grafico di flusso dell'elemento 2D a lunghezza zero per la determinazione dello stato degli elementi 2077
61.19 Elemento di sezione a lunghezza zero, equilibrio 2079
61.20 Sistema di coordinamento per elemento sezione zero 2081
61.21 Grafico di flusso per elemento a sezione zero 2082

62.1 Modelli di plasticità lumpate e distribuite 2087
62.2 Modelli isterici 2088
62.3 Paragone di modulo tangente; plasticità vs. Menegotto-Pinto 2090
62.4 Determinazione del modello bilineare 2091
62.5 Paragone di modelli di carico ciclico inverso: plasticità *vs.* Menegotto-Pinto 2092

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

62.6 Menegotto pinto (Menegotto e Pinto, 1973) Modelli in acciaio 2093
62.7 Determinazione (1) per modello giuffre-menegotto-pinto modificato da filippou et al. 2095
62.8 Determinazione (2) per il modello giuffre-menegotto-pinto modificato da filippou et al. 2096
62.9 Determinazione (3) per il modello giuffre-menegotto-pinto modificato da filippou et al. 2097
62.10 Determinazione (4) per il modello giuffre-menegotto-pinto modificato da filippou et al. 2098
62.11 Effetto di confinamento sulla forza concreta (Richart, Brandtzæg e Brown, 1928) 2099
62.12 Confintato *vs.* forza di calcestruzzo compressivo non confusa (Mander, Priestley e Park, 1988) 2100
62.13 Ruolo di agitazioni nel fornire confinamento concreto 2100
62.14 Modello di materiale in calcestruzzo a compressione 2102
62.15 Modello di materiale calcestruzzo sotto carico ciclico in compressione . . 2104
62.16 Modello di materiale calcestruzzo sotto carico ciclico in tensione 2106
62.17 Determinazione (1) per il modello di kent e park modificato 2109
62.18 Determinazione (2) per il modello di kent e park modificato 2110
62.19 Cracks indotti da compressione, tensione, tensione e compressione 2112
62.20 Curva tensione–deformazione del modello di danno anisotropico senza deformazione permanente 2118
62.21 Determinazione (1) per il modello di danno anisotropico 2118
62.22 Determinazione (2) per il modello di danno anisotropico 2119
62.23 Determinazione (3) per il modello di danno anisotropico 2120
62.24 Curva tensione–deformazione del modello di danno anisotropico con deformazione permanente 2124
62.25 Modello di slittamento 2124
62.26 Modello di legame semplificato 2126
62.27 Curva di scorrimento del legame 2127
62.28 Ubicazione dell'asse neutro 2128
62.29 Identificazione delle zone di plastica 2130
62.30 Sfiorazione della deformazione flessorale di un elemento 2131
62.31 Efficace momento di inerzia in R/C 2132
62.32 Ubicazione delle lunghezze di plastica (Park e Paulay, 1991) 2134
62.33 Sostituzione della punta di un raggio cantilevered R/C con assunzione di plasticità lumped 2136
62.34 Sostituzione della punta di un fascio in acciaio con trave a sbalzo con assunzione di plasticità lumped 2138
62.35 Modello plasticità lumpata con guasto della cinghia 2141
62.36 Limitare il guasto della cinghia 2141
62.37 Risorso di primavera 2142

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

62.38 Limita risposta della colonna di stato 2143
62.39 Limitare le risposte individuali dello stato 2144
62.40 Ciclo di isteresi rappresentativa 2145
62.41 Strain addolcimento della resistenza 2146
62.42 Degrado della forza ciclica inversa 2146
62.43 Modello Hysteresis spina dorsale 2148
62.44 Curva a spina dorsale per flessore (Ghannoum, 2020) 2149
62.45 Modelli picchi e orientati al picco 2150
62.46 Ciclo di base del modello orientato al picco 2151
62.47 Caricare inversione e l'aggiornamento dello stato di destinazione 2151
62.48 Aumentare la cronologia dei carichi ciclici seguendo il modello orientato al picco 2152
62.49 Modello di Pining ciclo base 2153
62.50 Determinazione dei punti di rottura 2153
62.51 Determinazione del primo punto di rottura 2155
62.52 Aggiornamento punto di rottura 2155
62.53 Ricaricare oltre il punto di rottura 2156
62.54 Aumentare la cronologia del carico ciclico seguendo il modello di pizzicaggio 2157
62.55 Risultati del laboratorio strutturale UCSD (Ibarra, 2004) 2158
62.56 Modalità di degradazione della forza di base 2159
62.57 Modalità di degrado della forza post-capping 2161
62.58 Scarico della modalità di degrado della rigidità 2162
62.59 Scarico interruzione 2163
62.60 Modalità di degrado della rigidità accelerata 2164
62.61 Curva della spina dorsale (Ghorbani et al., 2022) 2166
62.62 Modello di isteresi a base di spline cubico (Suselo, 2021) 2167

63.1 Processo di elementi finiti (ispirato da Bathe, 1996) 2171
63.2 Complessità del modello uniformemente distribuita 2172
63.3 Pitfalls dell'analisi lineare rispetto all'analisi non lineare 2172
63.4 Elementi finiti per l'analisi non lineare dei frame 2176
63.5 Collegamento a colonna 2177
63.6 Elementi di aspirazione o colonna 2178
63.7 Collegamenti a colonna 2179
63.8 Tracciare la modellazione della sezione in strati 2182
63.9 Modello in cantilever idealizzato di rc trave-colonna (Haselton et al., 2016) 2185
63.10 Tipi di confinamenti (Berry, Parrish e Eberhard, 2004) 2185
63.11 Interfaccia utente grafica per il database delle prestazioni strutturali pari (Berry, Parrish e Eberhard, 2004) 2186

64.1 Sequenza temporale sintetica, covarianza empirica e autocovarianza stimata 2201
64.2 Confronto tra MCS e LHS 2204
64.3 Esempio di una traiettoria per $k = 2$. 2214

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

64.4 Overlapping o punti strettamente raggruppati da diverse traiettorie Morris. 2215
64.5 Variazione casuale e la sua funzione di distribuzione cumulativa (CDF). . 2215
64.6 Risposta periodica di una variabile casuale x_i. Le dimensioni dei passaggi fissi non possono rilevare variazioni periodiche. 2216
64.7 Confronto traiettoria (a) e radiale-punto (b) per i metodi di $k = 3$ RV in iperspazio quantile. 2217
64.8 Inizializzazione e post-inizializzazione nella procedura di screening a punti radiali modificati 2222
64.9 Esempio di valutazione della sensibilità (Gakuhari, 2021) 2226
64.10 L'analisi della sensibilità identifica i parametri del candidato; l'identificazione dei parametri determina i valori sostenuti dalle osservazioni 2226

65.1 Principio dell'approccio di identificazione del sistema: raffinatezza iterativa dei parametri per minimizzare la discrepanza dei dati modello. 2230
65.2 Esempio illustrativo di regressione lineare con RANSAC 2233
65.3 RANSAC applicato al degrado concreto: studio caso (Gakuhari, 2021) . . 2234
65.4 Grafico del flusso della procedura di identificazione dei parametri 2247
65.5 Interfaccia grafica per un'unica funzione residua e cinque variabili. 65.7 per un esempio più completo. 2248
65.6 File di dati di input per l'ottimizzazione Levenberg–Marquardt non lineare dei minimi-quari 2251
65.7 Dashboard per il Levenberg–Marquardt non lineare ottimizzazione di minimo-quari: 12 obiettivi predetti e 8 variabili. 2254
65.8 Integrazione della caratterizzazione del sito, sviluppo di modelli, incertezza, identificazione dei parametri, analisi strutturale e valutazione delle fragilità 2259

66.1 Quattro componenti di PBEE 2265

67.1 La legge (abbondante) di ricorsio 2268
67.2 Classificazione delle fonti sismiche 2270
67.3 Classificazione delle distanze da sito a fonte 2273
67.4 Indagine parametrica sui gmpes 2273
67.5 Analisi dei rischi sismici 2274
67.6 Analisi dei rischi sismici 2276
67.7 Il modello di probabilità di Poisson 2278
67.8 Campione di curve a rischio sismico medi e frattili 2278
67.9 Campioni di noi mappe per i pericoli 2280
67.10 Campioni di appezzamenti sismici deaggregazione per l'università di coloreado boulder 2281
67.11 Confronto tra diversi spettro di risposta 2282
67.12 Confronto tra selezione e scalabilità del movimento terra per IBPA, SBPA e TBPA 2284
67.13 Esempio di prove 2291

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

67.14 Cav di eta40lc01 contro bersaglio 2293
67.15 Energia isterica di eta20kd01 contro bersaglio 2294

68.1 Curva di pericolo. La trama sinistra illustra il concetto dei periodi di ritorno, mentre la trama destra mostra una curva di rischio per un sito specifico. . 2303
68.2 Superficie di analisi del rischio sismico 2306
68.3 Analisi dei rischi sismici probabilistici (PSHA). 2307

69.1 Natura probabilisitc della capacità e della domanda 2313
69.2 Curva di capacità 2316
69.3 Carico laterale per analisi push-over 2318
69.4 Ubicazione e immagine del ponte 2323
69.5 Colonne e dimensioni del pier 2325
69.6 Colonne e sezioni di albero 2326
69.7 Rapporto di sforzo-strain per carico monotonico del calcestruzzo confinato e non confutato (Mander, Priestley e Park, 1988) 2327
69.8 Pier defletto forma e diagramma di curvatura; adattato da AASHTO, Seismic, 2011, fig. c4.9-2 2328
69.9 Curvature di momento e momenti in plastica 2329
69.10 Analisi dello spettro di risposta (C_S) 2333
69.11 Analisi dello spettro di risposta di spostamento 2333
69.12 Elementi di resistenza al terremoto (eres) ammissibili (AASHTO, Seismic, 2011) 2335
69.13 Modello di supporto per lo stress in acciaio rinforzato 2337
69.14 Curvatura del momento (adattato da (AASHTO, Seismic, 2011, fig. 8.5.1)) 2339
69.15 Distribuzione del momento nell'altezza del molo 2340
69.16 Pier defletto forma e diagramma di curvatura; adattato da AASHTO, Seismic, 2011, fig. c4.9-2 2340
69.17 Modello Risa 2343
69.18 Schema di interazione per le tre colonne richieste 2345
69.19 Momenti di plastica 2345
69.20 Definizione dell'albero di Caltran(CALTRANS, 2013) 2347
69.21 Modello elastico modificato dopo formazione di prima cerniera in plastica 2349
69.22 Modello elastico modificato dopo formazione di seconda cerniera in plastica 2350
69.23 Meccanismo di colata con formazione di 4 cerniere in plastica 2351
69.24 Curve di fragilità concettuale basate sul metodo IDA 2355
69.25 Curve di fragilità concettuale basate sul metodo MSA 2357
69.26 Generazione di funzioni a capacità basate su ETA 2360
69.27 Evidenzia quattro strategie diverse (Hariri-Ardebili, Saouma e Porter, 2016) 2363
69.28 Complessità relative dell'analisi sismica 2363

70.1 Rapporti tra un DI e due DV (Saouma e Hariri-Ardebili, 2021) 2374
70.2 PBEE: il grande film 2375

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

70.3 Obiettivi di progettazione delle prestazioni sismiche minimi consigliati per gli edifici (Porter, 2003) . . . 2378

72.1 Descrizione concettuale della prima generazione di PBEE; (Whittaker03, Hamburger e Mahoney, 2003) . . . 2388
72.2 Differenze di livelli di performance, (FEMA, 2012) . . . 2388
72.3 Quattro componenti di PBEE . . . 2391
72.4 Confronto delle curve sismiche, di vulnerabilità e di pericolo . . . 2397
72.5 Rapporto tra curva di fragilità e matrice probabilità danno . . . 2399
72.6 Diversi aspetti delle superfici sismiche di fragilità . . . 2400

B.1 Effetto del carico eolico sulle strutture (Schueller, 1996) . . . 2414
B.2 Approssimativo design pressione del vento p per la forza eolica ordinaria resiste alle strutture edili . . . 2415
B.3 Vibrazioni di un edificio . . . 2417
B.4 Zone sismiche degli stati uniti, (ICBO, 1994) . . . 2418
B.5 Carico camion . . . 2427
B.6 Posizionamento del carico per massimizzare i momenti . . . 2431

D.1 Geometria di arco circolare . . . 2440
D.2 Arco circolare a tre punte sotto carico . . . 2441
D.3 Relazione β con rispetto a θ . . . 2443
D.4 Fbd di arco circolare a tre punte sotto carico del punto . . . 2444
D.5 Trama di forze interne per arco circolare a tre punte sotto carico del punto . . . 2447
D.6 Arco circolare a tre punte sotto il peso di sé . . . 2448
D.7 Fbd di arco circolare a tre punte sotto il peso . . . 2449
D.8 Trama per arco circolare a tre punte sotto peso auto . . . 2451
D.9 Trama per arco circolare a tre punte sotto distribuzione uniforme del carico . . . 2453
D.10 Arco circolare a tre punte sotto carico di autopeso vs. serie di carica del punto . . . 2454
D.11 Arco circolare a tre punte sotto distribuzione uniforme del carico vs. serie di carico a punta . . . 2454
D.12 Sap 2000 - diagramma di momento dell'arco circolare a tre punte sotto il peso auto- . . . 2454
D.13 Sap 2000 - diagramma di forza assiale dell'arco circolare a tre punte sotto il peso auto- . . . 2455
D.14 Sap 2000 - diagramma di forza della cinghia dell'arco circolare a tre punte sotto il peso auto- . . . 2455
D.15 Arco circolare a tre punte sotto il peso di sé vs. udl . . . 2455
D.16 Arco circolare a tre punte sotto carico di punto a 1/2 e 1/4 di larghezza . . . 2456
D.17 Arco circolare a due punte sotto carico . . . 2457
D.18 Arco circolare a due punte dopo aver rimosso la spinta ridondante all'abbattimento . . . 2459
D.19 Arco circolare a due punte con forza virtuale applicata . . . 2461

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

D.20 Fbd dell'arco circolare biforato originale sotto carico a punto 2463
D.21 Fbd a calcolare la deflezione in arco circolare biforato 2466
D.22 Trama per arco circolare a due punte sotto carico del punto 2467
D.23 Arco circolare a due punte sotto il peso di sé 2468
D.24 Fbd di arco circolare a due punte dopo aver rimosso la spinta ridondante all'abbattimento 2469
D.25 Fbd dell'arco circolare biforato originale sotto il peso di auto 2473
D.26 Trama per arco circolare a due punte sotto peso auto 2475
D.27 Trama per arco circolare a due punte sotto udl 2479
D.28 Arco circolare a due punte sotto carico auto-peso vs. serie di carica punti 2480
D.29 Arco circolare a due punte in uniforme distribuzione del carico vs. serie di carico del punto 2480
D.30 Sap 2000 - diagramma di momento dell'arco circolare a due punte sotto il peso 2480
D.31 Sap 2000 - diagramma di forza assiale dell'arco circolare a due punte sotto il peso auto- 2481
D.32 Sap 2000 - diagramma di forza della cinghia dell'arco circolare a due punte sotto il peso 2481
D.33 Arco circolare a due punte sotto il peso di sé vs.udl 2481
D.34 Arco circolare a due punte sotto carico di punto 1/2 e 1/4 2482
D.35 Arco circolare senza cerniera sotto carico del punto 2483
D.36 Arco circolare senza cerniera con momento virtuale a 'b' 2486
D.37 Arco circolare senza cerniera con momento virtuale a 'a' 2486
D.38 Fbd dell'arco circolare senza cerniera originale sotto carico del punto . . 2492
D.39 Trama per arco circolare senza cerniera sotto carico del punto 2496
D.40 Arco circolare senza cerniera sotto il peso di sé 2497
D.41 Forze interne in arco circolare senza cerniera 2501
D.42 Trama per arco circolare senza cerniera sotto il peso di sé 2504
D.43 Trama per l'arco circolare senza cerniera sotto udl 2509
D.44 Arco circolare senza cerniera sotto carico di carica a punto auto-peso vs. . 2509
D.45 Arco circolare senza cerniera sotto distribuzione uniforme del carico vs. serie di carico a punto 2510
D.46 Sap 2000 - diagramma di momento dell'arco circolare senza cerniera sotto il peso 2510
D.47 Sap 2000 - diagramma di forza assiale dell'arco circolare senza cerniera sotto il peso 2510
D.48 Sap 2000 - diagramma di forza della cinghia dell'arco circolare senza cerniera sotto il peso 2510
D.49 Arco circolare senza cerniera sotto il peso di sé vs.udl 2511
D.50 Arco circolare senza cerniera sotto carico punto a 1/2 e 1/4 di portata . . 2511

K.1 Esempi di segnali filtrati butterworth 3048

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

K.2 Confronto dei filtri butterworth per vari n . . . 3049

M.1 Interconnessione dei concetti incorporati nell'analisi probabilistica (Saouma e Hariri-Ardebili, 2021) . . . 3082
M.2 Il concetto di spazio campione e vicende reciprocamente smussate (Saouma e Hariri-Ardebili, 2021) . . . 3083
M.3 Confronto degli istogrammi a causa di 100 campioni per tre volte . . . 3084
M.4 Confronto degli istogrammi a causa di 1.000-100.000 campioni . . . 3085
M.5 Esempi di tre funzioni distributive continue . . . 3085
M.6 Relazione tra PDF e CDF . . . 3086
M.7 Relazione tra PDF e CDF . . . 3087
M.8 Illustrazione dell'intervallo di fiducia . . . 3087
M.9 Illustrazione di Mean e Median . . . 3088
M.10 Illustrazione della Deviazione Standard . . . 3089
M.11 Illustrazione di Skewness e kurtosis . . . 3089
M.12 Illustrazione dei coefficienti di correlazione . . . 3090
M.13 confronto di varie funzioni di distribuzione (e cumulative) probabilità . . . 3096
M.14 Distribuzione normale di Bivariate . . . 3097
M.15 Impatto di correlazione ρ sulla distribuzione normale bivariata . . . 3097

N.1 Definizioni dell'indice di affidabilità . . . 3099
N.2 Probabilità del fallimento in termini di indice affidabilità β . . . 3101

O.1 Trasformazione vettoriale . . . 3110
O.2 Principali direzioni di tenore dell'ordine due . . . 3112
O.3 aereo di Octahedral . . . 3113
O.4 Forze di superficie . . . 3114
O.5 Cauchy: tetraedro allo stress . . . 3115
O.6 Rappresentanza geometrica dello stress . . . 3117
O.7 Vettori di posizione e spostamento . . . 3119
O.8 Flusso attraverso la zona dS . . . 3122
O.9 Equilibrio di stress, coordinate cartesian . . . 3125
O.10 Piatto dalla lezione di hooke su molle . . . 3127
O.11 Controlli di prova . . . 3131
O.12 Curve di metallo e cemento . . . 3132
O.13 Catturare la localizzazione sperimentale in esemplari di calcestruzzo non carichi con precisione . . . 3133
O.14 Il modello fessurioso di Hillerborg . . . 3134
O.15 Modelli di ammorbidimento ceppo in calcestruzzo . . . 3135
O.16 Componenti del diagramma di Tonti (Felippa, 2000) . . . 3138
O.17 Schema Tonti per meccanica di corpi deformabili . . . 3138
O.18 Forze interne in termini di stress . . . 3139

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

P.1 Crack in un piatto infinito 3144
P.2 Modalità indipendenti di spostamenti in cravatta 3148
P.3 Pressione sulla diga a causa dell'azione dinamica dell'acqua (Westergaard, 1933) 3154
P.4 Distribuzione approssimativa delle pressioni (Westergaard, 1933) 3157
P.5 Corpo di acqua che può essere considerato per muoversi con diga. (Westergaard, 1933) 3160
P.6 Massa lussata per area unitaria rispetto all'altezza 3161

Q.1 Algoritmo della regione di fiducia 3165
Q.2 Grafico del flusso della procedura di identificazione dei parametri 3170
Q.3 Interfaccia utente grafica per l'identificazione dei parametri di reazione aggregati alcali (Saouma e Hariri-Ardebili, 2021) 3171

R.1 Differenziazione del vettore di posizione $\mathbf{p}$ 3173
R.2 Curvatura di una curva 3174
R.3 Campo vettoriale che attraversa una regione solida 3175
R.4 Flusso attraverso la zona dA 3175
R.5 Elemento infinito per la valutazione della divergenza 3176
R.6 Gradiente di un vettore 3181

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Elenco delle tabelle: Libri II–IV (Analisi)

18.1 Coefficienti di espansione termica 890

20.1 Determinazione statica e stabilità delle capriate 929
20.2 Equazioni applicabili di equilibrio per capriate 930

22.1 Analogia tra due gruppi di relazioni 1002
22.2 Condizioni di confine del fascio coniugato 1002

25.1 Condizioni di carico dei carichi punti e uniforma 1083

26.1 Stiffness vs metodi di flessibilità 1088
26.2 Analisi della flessibilità e dello stress 1089
26.3 Forze equivalenti nodali per carichi semplici 1093

29.1 Condizioni di confine essenziali e naturali per colonne 1139

34.1 Comparison of governing equations in elasticity and plate bending (Pilkey e Wunderlich, 1994) 1296

35.1 Riassunto di equazioni e sconosciute in sottili gusci 1303
35.2 Contributo individuale alle equazioni di equilibrio in sottili gusci 1304
35.3 Riassunto delle equazioni principali di governo in sottili gusci 1318
35.4 Assunzioni e equazioni di governo per le strutture a membrana 1326
35.5 Comparison of membrane stress resultant distributions under different loading 1331
35.6 Confronto tra le soluzioni a membrana e conchiglia poco profonda per carico uniforme 1345
35.7 Coefficienti di conchiglia (ϕ misurato dalla corona) 1351

37.1 Valori di destinazione dell'indice di affidabilità 1419

38.1 Confronto del sottosistema dell'albero, parete della cinghia e muro di taglio trussed 1475

40.1 Gradi di indeterminatezza statica e cinematica 1535
40.2 Condizioni di confine essenziali e naturali 1535

COPIA DI REVISIONE

43.1 Trasformazioni 3D di elementi lineari 1584

44.1 Divulgazione delle strutture 1594

45.1 Impatto di matrici ill-condizionate 1624

46.1 Definizione della forza degli elementi interni per la matrice statica 1631
46.2 Condizioni per la determinanza statica e l'instabilità cinematica 1639

47.1 Funzionalità in elasticità lineare 1701
47.2 Confronto tra l'energia potenziale totale e le formule Hu-Washizu 1704

48.1 Riassunto delle equazioni per vw, cvw, pe, cpe 1721
48.2 Alternate i percorsi per i principi del lavoro virtuale e il principio di un'opera virtuale complementare 1722

49.1 Interpretazione delle funzioni di forma in termini di serie polinomiale (1d & 2d) 1758
49.2 Termini polinomiali in varie formulazioni di elementi (1d & 2d) 1758
49.3 Caratteristiche delle funzioni di forma degli elementi del fascio 1776
49.4 Funzioni di forma e derivati naturali per l'elemento q8 1781
49.5 Coordinate nodali (naturali) di elemento q9 1782
49.6 Funzioni di forma per elementi nodi variabili 1785
49.7 Funzioni di forma e derivati per l'elemento t6 1786

51.1 Pesi per le formule quadrature Newton-Cotes 1814
51.2 Punti di integrazione e pesi per formule gauss-quadrature nell'intervallo$[-1, 1]$ 1817
51.3 Coordinate e pesi per l'integrazione numerica su un triangolo 1819
51.4 Coordinate naturali dei nodi quadrilateri bilineari 1820
51.5 Integrazioni numeriche complete e ridotte per elementi quadrilaterali . . . 1826
51.6 Bilinsear e slittamenti/strains 1828

53.1 Stato di stabilità per diversi metodi 1868
53.2 Rapporti di smorzamento rappresentativi per diverse classi di strutture . . 1881

54.1 Tabulazione dei livelli di analisi strutturale 1889
54.2 Intercorrelazione dei diversi livelli di analisi 1891

57.1 Confronto degli approcci cinematici e statici per l'analisi del carico limite . 1951
57.2 Confronto tra analisi dei limiti inferiori e analisi pushover 1975
57.3 Plasticità lussata e analisi a rilegatura inferiore 1978

59.1 Parallelismo tra metodo quasi-newton in matematica e analisi implicita nella meccanica strutturale 1994
59.2 Variazioni del metodo di degrado del nuovoton 1998

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

59.3 Confronto degli algoritmi di controllo del carico nell'analisi non lineare . . 2002

61.1 Determinazioni dello stato multilivello 2039
61.2 Confronto della flessibilità con elementi basati sulla rigidità 2071

62.1 Confintato *vs.* proprietà elastiche e di resistenza in calcestruzzo non confusi 2103
62.2 Modulo tangente 2148

63.1 Collegamenti a colonna 2177
63.2 Confronto-elemento 2178
63.3 Modelli "pick and stick" opzioni 2182
63.4 Quantifica della deteriorazione 2183
63.5 Proprietà materiali 2186
63.6 Classificazione delle sezioni 2187
63.7 Codici di modalità guasto 2187
63.9 Dettagli di finitura 2187
63.10 Dettagli di finitura 2187
63.8 Geometria della colonna 2188
63.11 Riassunto delle prove di colonne rinforzate rettangolari (Berry, Parrish e Eberhard, 2004) 2193
63.12 Risultati dello studio di taratura per 30 test sperimentali (Haselton et al., 2008) 2194

64.1 Terminologia adottata in questo libro per l'incertezza quantificazione e analisi dell'incertezza 2197
64.2 Descrittori qualitativi illustrativi per la grandezza di un coefficiente di correlazione Pearson 2200
64.3 Confronto tra MCS e LHS 2203
64.4 Confronto tra metodi di incertezza-propagazione e sensibilità 2220
64.5 ruoli distinti ma complementari di analisi della sensibilità e identificazione dei parametri 2227

65.1 Entrate di configurazione rappresentative `Log.xlsx` 2251
65.2 Funzioni principali nel programma di identificazione dei parametri 2255
65.3 Funzioni di helper private utilizzate dal lettore di fogli di calcolo e dallo strato di aggregazione 2255
65.4 Principali campi della struttura di configurazione `S` 2255
65.5 Variabili a tempo di esecuzione selezionate in `Paridentificazione.m` 2256

67.1 Coefficienti di periodo dipendente Boore, Joyner e Fumal, 1997 modello . 2272
67.2 Stime V_S sulla base della classe del sito 2272

69.1 Confronto dell'analisi pushover e analisi sismica 2320
69.2 Nj strutture di approccio spettro di risposta 2324
69.3 Analisi sequenziali per l'analisi pushover 2331

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

69.4 Proprietà di resistenza delle barre in acciaio rinforzato (AASHTO, Seismic, 2011, table 8.4.2.1) . . . 2337
69.5 Capacità di movimento per le tre diverse sezioni in una gamma di forze assiali . . . 2344
69.6 Risultati di analisi; zero cerniera . . . 2348
69.7 Regolazione della cinghia che porta alla formazione di prima cerniera . . . 2349
69.8 Risultati di analisi; una cerniera . . . 2349
69.9 Regolazione della cinghia che porta alla seconda cerniera . . . 2350
69.10 Risultati di analisi; due cerniere . . . 2350
69.11 Regolazione della cinghia che porta alla terza e quarta cerniere . . . 2351
69.12 Summazione di forze, momenti e spostamenti in fallimento . . . 2352
69.13 Confronto dei metodi di analisi strutturale sismica . . . 2362

70.1 Rati a secco interstoriali (IDR) per vari livelli di prestazioni secondo ASCE 41-17 . . . 2379
70.2 Indice di danno Soglianze e Stati strutturali corrispondenti . . . 2379
70.3 Ratio di domanda a capacità (DCR) Sostegni secondo FEMA 356 . . . 2380

72.1 La gamma di danni dei componenti strutturali e non strutturali per vari livelli di rendimento dell'edificio target (tab. C1-2) (FEMA-356, 2000) . . . 2389
72.2 Confronto tra PBEE 1 e PBEe 2 . . . 2393
72.3 Confronto delle Rappresentanze di Fragilità Bassa e Discreta . . . 2400
72.4 Documenti chiave nello sviluppo storico di Performance-Based Earthquake Engineering (PBEE). . . . 2407

B.1 Peso unitario dei materiali . . . 2413
B.2 Carico medio lordo morto negli edifici . . . 2413
B.3 Pesi dei materiali da costruzione . . . 2420
B.4 Minimo carico live distribuito uniformemente, (ICBO, 1994) . . . 2421
B.5 Variazione della velocità del vento sopra terra . . . 2421
B.6 C_e coefficienti per carico del vento, (ICBO, 1994) . . . 2421
B.7 Coefficienti di pressione del vento C_q, (ICBO, 1994) . . . 2422
B.8 Fattori di importazione per carico eolico e terremoto, (ICBO, 1994) . . . 2422
B.9 Pressione del vento di progettazione approssimata p per la forza vento ordinaria resiste alle strutture edilizie . . . 2423
B.10 Z fattori per diverse zone sismiche, UBC1994 . . . 2423
B.11 S coefficienti di sito per il carico del terremoto, (ICBO, 1994) . . . 2423
B.12 Elenco parziale di R_W per vari sistemi di struttura, (ICBO, 1994) . . . 2424

G.1 Le coordinate nodali di Alamillo (Pollalis, 1999) . . . 2557
G.2 Proprietà membri di Alamillo (Pollalis, 1999) . . . 2558
G.3 Le condizioni di confine di Alamillo (Pollalis, 1999) . . . 2559
G.4 Combinazioni di carico di Alamillo (Pollalis, 1999) . . . 2560

L.1 Metodi di soluzione per equazioni lineari . . . 3059

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

L.2 precondizionamento; confronto tra sinistra e destra 3069
L.3 Confronto di precondizionamento matrice e decomposizione del valore singolare (SVD) 3071

N.1 Valori selezionati per strutture in acciaio e cemento 3100
N.2 Affidabilità delle strutture in acciaio e cemento 3101

O.1 Notifiche 3105
O.2 Rappresentanze di strane 3118
O.3 Esempi di condizioni limite nell'analisi strutturale 3137

P.1 Risultati numerici corrispondenti al periodo, $T = \frac{4}{3}$ secondi 3155

R.1 Simultanee tra operatori di moltiplicazione e differenziazione 3173

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Elenco degli esempi: Libri II–IV (Analisi)

18.1 Caricamento idrostatico . . . 895
18.2 Espansione termica/tensione . . . 899
18.3 Aree di tributo . . . 908
19.1 Carico idrostatico . . . 918
19.2 Trasferimento di carico . . . 919
19.3 Semplicemente supportato . . . 919
19.4 Carico parabolico . . . 920
19.5 Tre raggi di larghezza . . . 921
19.6 Telaio a tre cerniere . . . 922
19.7 Supporti incline . . . 924
19.8 Struttura di rettifica . . . 925
19.9 equilibrio aereo . . . 926
19.10 Barriera Jumbo . . . 927
19.11 Rankine: Equilibrio di un corpo galleggiante (prove idrostatiche) . . . 930
19.12 Palazzetto dello sport; nervi . . . 932
20.1 Analisi della capriata: metodo dei nodi . . . 941
20.2 Capriata tridimensionale . . . 944
20.3 Metodo delle sezioni . . . 949
20.4 Capriata semplice: metodo dei nodi/matrice . . . 951
20.5 Capriata complessa: metodo dei nodi/matrice . . . 953
21.1 Fascio con carico inclinato . . . 966
21.2 Telaio incline . . . 967
21.3 Telaio con carico idrostatico . . . 970
21.4 Carico lineare e variabile . . . 972
21.5 Telaio; esempio tetto inclinato . . . 973
21.6 Telaio reciproco . . . 974
21.7 Telaio 3D . . . 978
22.1 Doppia integrazione . . . 984
22.2 Sfilettatura massima . . . 985
22.3 Forma sci ottimale . . . 986
22.4 Trave galleggiante . . . 987
22.5 Ruota per bicicletta . . . 992

COPIA DI REVISIONE

22.6 Rigidezza di una molla elicoidale 997
22.7 Interruttore bimetallico 1000
22.8 Area di curvatura, trave a sbalzo 1004
22.9 Curvatura del momento, raggio semplicemente sostenuto 1004
22.10 Sfilettatura massima 1006
22.11 Telaio sottoposto a carico della temperatura 1007
22.12 Lunghezza plastica 1010
22.13 Trave di carico; carico del punto 1012
22.14 Trave coniugate; variabile I 1013
23.1 Trave a sbalzo scaricata 1017
23.2 Torsione non uniforme di una sezione I 1029
24.1 Signora 1040
24.2 Cornice; deflettori 1041
24.3 Cornice, rotazione 1042
24.4 Staffa flessibile 1043
24.5 Trave a sbalzo sostenuta da cavo 1045
24.6 Deformazione torsionale e flessorale 1046
24.7 Deformazioni flexurali e cesoie in un fascio 1048
24.8 Effetti termici in un raggio 1049
24.9 Condotta 1050
24.10 Capriata semplice 1051
24.11 Capriata complessa 1052
24.12 Capriata con controfreccia iniziale 1053
24.13 Capriata con tensioni secondarie 1054
24.14 Anello circolare 1056
24.15 Primavera 1058
25.1 Asciugamano con asta di cravatta 1070
25.2 Analisi struttura in acciaio 1071
25.3 Capriata con una forza ridondante 1075
25.4 Capriata con due forze ridondanti 1077
25.5 Capriata con carico termico 1080
25.6 Trave a molla 1081
25.7 Posto della regina 1083
25.8 Matrice di flessibilità: trave curva 1086
25.9 Trave continua 1092
25.10 Trave continua 1093
27.1 Trave a sbalzo 1110
27.2 Trave continua 1111
27.3 Trave a due posti 1112
27.4 Trave a due larghi, deflettore iniziale 1113
27.5 Telaio 1115
27.6 Scatola di chiusura 1117

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

27.7 Trave continua 1122
27.8 Distribuzione/scarico di slittamento/ Gauss-Seidel 1124
28.1 Linee di influenza per un raggio semplicemente supportato 1127
28.2 Fascio con sostegni e sporgenze 1130
28.3 Müller-Breslau; Linea di influenza della cinghia 1131
28.4 Müller-Breslau; Linea di influenza del momento 1132
29.1 Instabilità geometrica 1134
29.2 Impatto di carico assiale sulla deformazione flessorale 1136
29.3 Grande freccia di una trave a sbalzo 1138
29.4 Fibbia di due colonne rigide a cerniera 1144
29.5 Fibbia di colonna a cerniera 1148
29.6 Fibbia di colonna fissa 1149
29.7 Fibbia di colonna fissa 1151
29.8 Colonna con supporti elastici 1152
29.9 Contrattamento 1154
29.10 Torre dell'acqua 1155
30.1 Cavo funicolare 1166
30.2 Cavo funicolare incline 1168
30.3 Gondola bicavo 1169
30.4 Geometria del cavo incline 1181
30.5 Forze di cavi incline 1182
30.6 Torre strallata 1184
30.7 Ponte sospeso 1185
30.8 Cavo inesteso; temperatura 1187
30.9 Cavo estensibile: freccia 1187
30.10 Cavo esteso; termico 1188
30.11 Cavo estensibile: precompressione 1188
30.12 Freccia in un cavo inclinato 1193
30.13 Supporto cavi per autobus 1193
30.14 Catenaria e parabola 1197
31.1 Carico di guasto del voussoir; metodo di pippard 1213
32.1 Arco a tre cerniere; carico del punto; analitico 1232
32.2 Tre arco a cerniera; carico del punto 1234
32.3 Tre arco a cerniera; carico uniforme 1235
32.4 Arco circolare senza cerniera 1239
32.5 Arco perfetto 1254
32.6 Arco parabolico a tre cerniere 1255
32.7 Due arco a sezione trasversale variabile incernierata 1255
32.8 Arco parabolico senza cerniera 1261
32.9 Carico termico su arco parabolico 1267
32.10 Trave ad arco 1268
32.11 Arco elicoidale; carico a punti 1273

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

33.1 Progettazione di un arco staticamente indeterminato 1276
33.2 Cambiamento di temperatura in un arco 1283
34.1 Idealizzazione di piastra sottile e spessa 1293
34.2 Calcolo delle tensioni dai momenti risultanti della piastra 1296
34.3 Piastra quadrata semplicemente appoggiata sotto pressione uniforme 1297
34.4 Sensibilità della freccia della piastra allo spessore 1298
34.5 Piastra circolare incastrata sotto pressione uniforme 1302
35.1 Confronto tra teoria membranale e guscio ribassato 1355
35.2 Progettazione di un guscio cilindrico 1368
36.1 Calcolo di ω_n, T_n e f_n per un sistema SDOF 1386
36.2 Stima dello smorzamento mediante decremento logaritmico 1390
36.3 Risposta armonica: amplificazione e fase 1393
36.4 Risposta dell'unità di impulso di un sistema SDOF umido 1394
36.5 Caricamento passo improvvisa: l'amplificazione dinamica fattore 2 1396
36.6 Carico impulsivo rettangolare e spettro d'urto 1397
36.7 Risposta di frequenza a una macchina periodica forza con due armoniche . . . 1399
36.8 Progettazione sismica di un telaio a singolo piano utilizzando uno spettro di risposta 1403
36.9 Analisi modulare di un edificio a cesoia 3DOF sotto carico sismico 1407
36.10 Frequenza naturale di un ponte pedonale in acciaio e controllo della risonanza pedonale 1410
36.11 Smorzamento viscoso equivalente da un ciclo isteretico bilineare 1413
36.12 Domanda di duttilità e riduzione della forza per una telaio in cemento armato 1415
36.13 Progettazione di un ammortizzatore di massa sintonizzato per un edificio alto 1417
36.14 Progettazione di un edificio ospedaliero isolato alla base 1419
37.1 ASD: elemento inflesso 1426
37.2 Resistenza ultima: verifica 1435
37.3 Resistenza ultima: progetto I 1435
37.4 Resistenza ultima: progetto II 1436
37.5 Analisi esatta 1437
37.6 Colonna R/C, c conosciuto 1443
37.7 Colonna R/C, e conosciuto 1445
37.8 Caso di studio: ponte in legno 1448
38.1 Metodo del portale; edificio a basso aumento 1466
38.2 Soluzione Matlab 1476
38.3 Metodo a mensola: edificio multipiano 1478
38.4 Sottosistema di albero 1480
38.5 Cesoia in cemento 1481
38.6 Muro di taglio intagliato 1484
38.7 Sfilettatura approssimativa trasversale 1489
39.1 Aeroporto di Dulles 1494
39.2 Torre Eiffel 1501

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

39.3 Magazzini Generali 1509
39.4 Ponte George Washington 1513
39.5 Progettazione di un arco a due punte 1520
39.6 Cambiamento di temperatura in un arco 1528
39.7 Arco di Parabolico con variazione del secant *I* 1531
42.1 Trave ortogonale 1562
42.2 Cornice ortogonale 1564
42.3 Griglia 1571
42.4 Cornice ibrida 1575
42.5 Griglia ibrida 1579
44.1 Telaio 1609
44.2 Signora 1614
44.3 Travatura reticolare 1619
45.1 Ill-condizionata 1633
46.1 Matrice statica a trombo determinato statico 1641
46.2 Matrice statica del fascio 1642
46.3 Matrice statica di una travatura reticolare staticamente indeterminata 1643
46.4 Selezione delle forze ridondanti 1645
46.5 Matrice di cinema: esempio truss 1649
46.6 Matrice di flessibilità 1653
46.7 Flessibilità alla rigidità 1655
46.8 Matrice di stiffness di un elemento curvato 1656
46.9 Trasformazione congruente 1660
46.10 Congruente trasformazione di un telaio 1661
47.1 Euler: assiale 1696
47.2 Euler: flessore 1697
47.3 Hamilton 1706
48.1 PCVW, trave a sbalzo rastremata 1735
48.2 Arco semicerchio a tre cerniere 1736
48.3 PVW, trave a sbalzo rastremata 1739
48.4 PTPE, primavera e massa 1743
48.5 PTPE; trave a morsetto con varialble *I* 1744
48.6 Tronchi elastici non lineari 1746
48.7 Castigliano 2; trave a sbalzo 1749
48.8 Castigliano 2; deflettore di un fascio uniformemente caricato utilizzando il secondo teorema di castigliano 1749
48.9 Castigliano 2, truss non lineare 1750
48.10 Castigliano 2, inflessione della molla 1751
48.11 Rayleigh Ritz carica uniformemente semplicemente il fascio supportato 1752
48.12 Metodi variabili 1754
51.1 Operatori giacobini 1820
52.1 Controllare la simmetria e la definizione positiva di un membro assiale 1D 1843

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

52.2 Vibrazione di stringa 1847
52.3 Matrice di stiffness di un elemento del fascio 1852
52.4 Trasferimento termico 1855
53.1 Simulazione Monte Carlo di una risposta elastica lineare al carico laterale . . . 1864
53.2 Calibrazione dei coefficienti di smorzamento Rayleigh per un edificio 1870
53.3 Baseline analitica: vibrazione libera dalle condizioni iniziali generali 1871
53.4 Metodo di Euler 1873
53.5 Passo temporale di stabilità per le differenze centrali 1884
53.6 Velocità d'onda e frequenze naturali assiali di una lega-rod in acciaio 1887
55.1 Modulo tangente 1926
56.1 Analisi sezionale non lineare; analisi analitica 1935
56.2 Layered; acciaio 1938
56.3 Strati; cemento/ACI 1943
56.4 Curvatura del momento di una sezione I R/C 1947
57.1 Trave fissa; carico centrale 1963
57.2 Trave fissa; carico compensato 1963
57.3 Trave continua 1963
57.4 Cornice ortogonale 1964
57.5 Telaio incline 1964
57.6 Profilato cantiliver I 1969
57.7 Cantiliver Propped II 1969
57.8 Trave fissa 1970
57.9 Telaio incline 1971
57.10 Lastra quadrata 1977
57.11 Lastra rettangolare 1979
59.1 Metodo di Newton, scalare 1995
59.2 Metodo di Newton; vettore 1998
60.1 Arresto della colonna 2021
60.2 Guaina per telaio; soluzione Matlab 2023
60.3 Fissaggio telaio; soluzione Mathematica 2025
60.4 Impatto di carico assiale sulla deformazione flessorale 2026
60.5 Grande deflettore del fascio di cantilever 2031
60.6 Carico di chiusura senza $\mathbf{K}_{geom}$ 2035
62.1 Cerniera di plastica in una colonna d'acciaio 2148
63.1 Modelli a colonna 2189
63.2 Modellazione di fascio 2190
64.1 Matrice di correlazione 2208
64.2 Latin Hypercube: esempio lavorato con due variabili 2214
64.3 Esempio di metodo di stima del punto 2217
64.4 Metodo di differenza finito della serie Taylor Esempio 2218
64.5 Espansione di caos polinomiale 2220
64.6 Metodo di Morris 2226

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

64.7 Metodo Morris; identificazione di variabili importanti 2230
65.1 Fissare un modello iperbolico non lineare 2246
65.2 Risalto Bayesiano con una Baside Quadratica e Metropolis–Hastings Sampling 2253
67.1 Analisi dei rischi sismici 2304
68.1 Calcolo del periodo di ritorno 2314
69.1 Esempio di curva della domanda 2328
69.2 Analisi push-over; Esempio pratico 2331
72.1 Esempio completo PBEE 2410
B.1 Carico del vento 2424
B.2 Caricamento del terremoto su una cornice 2434
B.3 Carico di terremoto su un edificio alto 2435
B.4 Riduzione del carico vivo I 2439
B.5 Riduzione del carico vivo II 2439
K.1 FF 3061
L.1 Eliminazione di Gauss 3081
L.2 Espulsione di Gauss-jordan 3081
L.3 **lu** Decomposizione 3082
L.4 La decomposizione di Cholesky 3083
L.5 Gauss-seidel 3084
L.6 Gauss-Seidel 3085
L.7 Decomposizione del valore singolare 3086
L.8 Precondizioni 3087
N.1 Indice di affidabilità 3110
R.1 Tangente a una curva 3183
R.2 Divergenza di un vettore 3186
R.3 Gradiente di un campo scalare I 3187
R.4 Gradiente di un campo scalare ii 3187
R.5 Gradiente di un campo vettoriale 3189
R.6 interpretazione fisica del teorema divergente 3192

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Elenco dei punti chiave: Libri II–IV (Analisi)

17.1 Requisiti di analisi strutturale 876
17.2 Requisiti di progettazione strutturale 877
18.1 Condizione per analisi dinamiche 894
19.1 Equazioni di equilibrio 913
19.2 Diagramma corpo libero 917
21.1 Forze interne nelle strutture 959
21.2 Guarnizione; Differenziale 964
21.3 Momento; Differenziale 964
21.4 Guarnizione; Integral 964
21.5 Momento; Integral 965
22.1 Governare l'equazione differenziale Flexure 984
22.2 Proposizione; Prima Curvatura Area Teorema 1003
22.3 Proposizione: Terorema dell'area di seconda curvatura 1003
23.1 Deformazione della tosaerba 1021
23.2 Torsione uniforme e non uniforme 1026
24.1 Prima Legge di Termodinamica 1035
24.2 Principio del lavoro virtuale (complementari) 1037
24.3 Teorema Reciproco di Maxwell-Betti 1037
25.1 Equazioni di flessibilità 1068
26.1 Relazioni di spostamento della forza in un raggio 1102
27.1 Metodo di deflettore della pila 1109
27.2 Distribuzione dei movimenti 1121
27.3 Distribuzione del momento, deflettore di pendenza e Gauss-Seidel 1124
28.1 Linea di influenza 1126
28.2 Müller-Breslau Principio 1131
30.1 Cavo generale 1167
32.1 Il teorema di Eddy 1232
40.1 Grado di libertà 1541
40.2 Gradi di libertà di diversi elementi 1542
41.1 Forze interne per diversi tipi di elementi 1547

COPIA DI REVISIONE

44.1 Cuore del metodo di stiffness diretto 1601
45.1 Stiffness matrix eigenvalues 1628
45.2 Elemento Stiffness matrice caratteristiche 1628
45.3 Numero di condizioni 1630
45.4 Precisione e condizione di malattia 1633
46.1 Stiffness Flessibilità Relazione 1653
46.2 Flessibilità Stiffness Relazione 1654
46.3 Trasformazione congruente 1659
47.1 Il principio di Hamilton 1703
48.1 Prima legge degli stati termodinamici 1719
48.2 Principio del lavoro complementare virtuale 1735
48.3 Principio di spostamento virtuale 1738
48.4 Principio del valore stazionario dell'energia potenziale 1742
48.5 Il primo teorema di Castigliano 1746
48.6 Il secondo teorema di Castiglione 1748
50.1 Forza di matrice e di elementi 1801
50.2 Criteri di convergenza 1804
57.1 Teorema del Bound superiore 1960
57.2 Teorema del basso profilo 1966
63.1 Ruolo degli studi di elementi finiti 2182

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Parte II

Introduzione: fondamenti e metodi analitici

Questo volume offre quello che è forse l'unico trattamento completo di analisi strutturale che spazia dai principi fondamentali ai metodi computazionali e probabilistici avanzati all'interno di un unico quadro unificato. Semplificare una notazione coerente e un approccio filosofico coerente in tutto, ho posto grande importanza su fondazioni teoriche rigorose, riconoscendo che la profonda comprensione dei principi sottostanti — non solo struttura procedurale — è essenziale per un giudizio tecnico sano e l'applicazione sicura di metodi a problemi che vanno oltre quelli incontrati nei libri di testo, non è un lavoro per il contenuto dell'ingegnere dal cuore debole con trattamento superficiale; esige e premia un autentico impegno intellettuale.

Dai metodi classici ai principi energetici, all'analisi strutturale matrice, agli elementi finiti, all'analisi non lineare e al culmine nell'ingegneria dei terremoti basata sulle prestazioni, questo lavoro dimostra che la vera padronanza dell'analisi strutturale poggia su comprensione teorica che trascende qualsiasi particolare strumento computazionale o codice di progettazione.

Gli ingegneri creano cose che non esistono ancora. Non puoi guardare quello che stai per fare in un libro, quindi cosa fai? Torna alla teoria. Questo ti permette di disegnare tutto ciò che è stato fatto prima e sintetizzare qualcosa di nuovo. Ti permette di vedere le cose e fare connessioni che nessun altro lo farà.

Questa generazione di studenti ingegneristici in particolare dovrebbe padroneggiare la teoria. In questo momento, una parte importante del lavoro dell'ingegnere sta calcolando le cose. Ma penso che l'IA presto ci porterà in un'era post-calcolazionale dove tutto è fatto automaticamente. In questa epoca, un ingegnere con una profonda educazione teorica si distinguerà davvero.

Baker, 2023 William Baker: Structural Engineer and Problem Solver

COPIA DI REVISIONE

Capitolo 17

Introduzione

Abstract

Questo capitolo introduttivo di Book I fornisce una panoramica completa dei suoi principi, applicazioni e i ruoli distintivi dei professionisti nell'industria dell'edilizia. Inizialmente, presenta un'ampia prospettiva di analisi strutturale, ponendo la fase per una più approfondita esplorazione del soggetto in seguito, delineando le specifiche responsabilità e prospettive degli architetti rispetto agli ingegneri strutturali. Il nucleo del capitolo è dedicato agli aspetti fondamentali dell'ingegneria strutturale, tra cui la progettazione, l'analisi e le valutazioni di sicurezza. La discussione si estende alle varie discipline interconnesse con l'analisi strutturale, sottolineando la natura interdisciplinare del settore. Una parte significativa del capitolo introduce il concetto di forze interne, proponendo il loro utilizzo come alternativa semplificata ai calcoli dello stress in determinati contesti. Questo approccio facilita una comprensione più intuitiva di come le forze sono gestite all'interno di una struttura. In seguito, il capitolo esplora diversi tipi di elementi di trasferimento del carico (come travi, colonne e capriate) e i loro ruoli nella distribuzione dei carichi in tutta una struttura. Infine, il capitolo si conclude esaminando i diversi tipi di strutture, dai più fondamentali al complesso.

17.1 Il grande quadro 863
17.1.1 Architettura 864
17.1.2 Ingegneria strutturale 865
17.1.3 Disciplina integrata nell'analisi strutturale 868
17.2 Elementi: forze interne primarie . . 869
17.3 Elementi di trasferimento del carico 869
17.4 Tipologie di struttura 870
17.5 Trasformazione degli strumenti di ingegneria 875
17.6 Corsi di ingegneria strutturale . . . 876

17.1 Il grande quadro

1 In primo luogo, l'ingegneria strutturale si concentra su uno (o più) dei seguenti compiti, Fig. 17.1:

COPIA DI REVISIONE

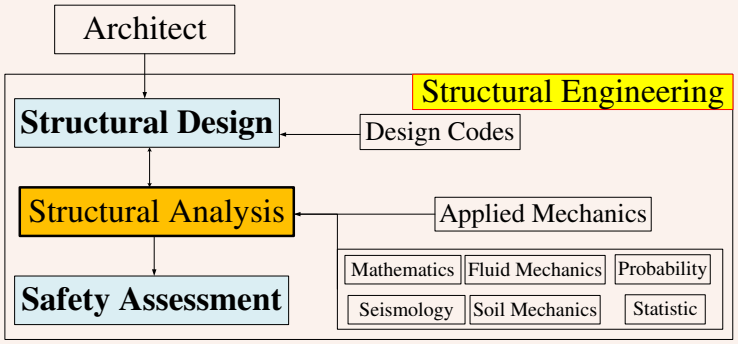


Figura 17.1: Analisi strutturale; il quadro generale

Design of *nuovo* strutture (sia un edificio, un aeroplano o un sottomarino).

Analisi of *nuovo* strutture (di nuovo edifici, aeroplani, sommergibili o altri).

Valutazione della sicurezza di qualsiasi struttura.

17.1.1 Architettura

2 L'architettura comprende l'arte e la scienza di progettare e costruire edifici e altre strutture fisiche. Va oltre la semplice costruzione per includere considerazioni di estetica, funzionalità, contesto culturale e sostenibilità ambientale.

3 Gli architetti sono professionisti formati nella progettazione e nella pianificazione delle strutture, e lavorano a stretto contatto con i clienti per tradurre le loro esigenze e desideri in disegni architettonici tangibili.

4 L'architettura comporta la creazione di spazi che non solo servono scopi pratici ma evocano anche emozioni, ispirano e contribuiscono all'ambiente costruito in modi significativi.

5 Si tratta di un campo multidisciplinare che si basa sui principi dell'ingegneria, dell'arte, della sociologia, della psicologia e della scienza ambientale per creare strutture sia esteticamente gradevoli che funzionali. L'architettura svolge un ruolo significativo nella formazione delle nostre città, comunità e società, riflettendo valori culturali, progressi tecnologici e aspirazioni sociali.

6 Gli architetti sottolineano l'approccio globale, piuttosto che elementare design. Nel processo di progettazione, concettualizzare uno schema a forma di spazio come sistema totale, sono generalisti.

7 Il design architettonico deve rispettare vari vincoli Fondamentalmente gli stessi posti da Vitruvio duemila anni fa (§6.3.1).

Funzionalità: Influenza della struttura adottata sulle finalità per le quali la struttura è stata eretta.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Estetica: L'architetto spesso impone le sue preoccupazioni estetiche all'ingegnere, che a sua volta può porre gravi limitazioni al sistema strutturale.

Economia: Va tenuto presente che i due componenti più grandi di una struttura sono lavori e materiali. Il costo del design è relativamente trascurabile.

8 Il termine "architettura" ha ottenuto un ampio riconoscimento durante il periodo rinascimentale come l'interesse per l'architettura classica è stato rivivere, e nuovi stili architettonici e teorie sono emersi. Architetti come Andrea Palladio, Leon Battista Alberti e Filippo Brunelleschi hanno svolto ruoli cruciali nella formazione del discorso architettonico e nell'elaborazione dell'architettura come professione rispettata (Chapter 15).

17.1.2 Ingegneria strutturale

9 L'ingegneria strutturale è una branca non solo dell'ingegneria civile[1] ma anche meccanico, navale e aerospaziale che si occupa della progettazione e dell'analisi delle strutture.

10 Gli ingegneri strutturali sono responsabili di garantire che le strutture siano sicure, stabili e in grado di sopportare i carichi e le forze a cui possono essere sottoposti durante la loro vita.

11 Il ruolo primario di un ingegnere strutturale è quello di progettare strutture che possono sostenere il proprio peso e i carichi che potrebbero sperimentare da fattori ambientali.

12 Essi devono considerare vari fattori, tra cui materiali utilizzati, codici edili e regolamenti (se applicabili), condizioni ambientali e l'uso previsto della struttura.

13 Come discusso in §11.2, il termine "Ingegneria Strutturale" è emerso fino alla metà del XIX secolo come estensione naturale dell'allora campo di maturazione della Meccanica (che si concentrava su singoli membri strutturali). Si può infatti sostenere che l'analisi strutturale non è altro che meccanica applicata ai sistemi di elementi.

14 Storicamente, abbiamo avuto per la prima volta "costruttori' (ad esempio Imhotep per le piramidi, Bruneleschi per la cupola di Firenze).

17.1.2.1 Struttura strutturale

15 Questo è uno dei due compiti principali intrapresi dagli ingegneri strutturali.

16 Basato sui disegni architettonici sia per un edificio o una macchina) e successiva analisi, gli ingegneri progettano gli elementi strutturali del progetto di costruzione o infrastruttura per trasportare in sicurezza i carichi. Questo include la selezione di materiali appropriati (come cemento, acciaio, legno o materiali compositi), determinando le dimensioni e la geometria dei componenti strutturali (travi, colonne, lastre e fondazioni) e dettagliando i collegamenti tra questi elementi. Si noti che il suo è un processo iterativo come discusso in §37.1.1.

[1] Storicamente, ci sono stati solo due tipi di ingegneria: militare e civile.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

17 Per (far) maggiori informazioni sul rapporto tra architetti e ingegneri strutturali, il lettore è riferito al capitolo 15.

18 La progettazione strutturale deve essere conforme all'esistente *Codici di progettazione*. Questo è ulteriormente affrontato §37.

19 Ci sono diversi livelli di progettazione strutturale:

Design concettuale: Questa fase iniziale prevede la generazione di idee e concetti per la struttura basata su requisiti di progetto, condizioni del sito e considerazioni architettoniche. Gli ingegneri e gli architetti collaborano per sviluppare un concetto di progettazione fondamentale che delinea la forma, la funzione e il layout generale della struttura.

Progetto preliminare: In questa fase, gli ingegneri effettuano analisi preliminari e calcoli per valutare la fattibilità del design concettuale. Possono effettuare analisi strutturali approssimative per valutare carichi, selezionare potenziali sistemi strutturali e determinare le dimensioni dei membri preliminari. L'obiettivo è quello di sviluppare una comprensione più dettagliata dei requisiti strutturali e identificare le principali sfide del design.

Design dettagliato: In questa fase, gli ingegneri affinano il progetto in base a analisi e calcoli più dettagliati, specificando le dimensioni precise, i materiali e le connessioni per tutti gli elementi strutturali, tra cui travi, colonne, lastre e fondazioni. Disegni, piani e specifiche dettagliate sono creati per comunicare i requisiti di progettazione a appaltatori e team di costruzione.

Progettazione di costruzioni: Questo livello di design si concentra sulla preparazione della struttura per la costruzione. Gli ingegneri sviluppano piani di costruzione e sequenze, inclusi sistemi di supporto temporaneo, formwork e ristretto, per garantire l'esecuzione sicura ed efficiente del progetto sul cantiere. Si occupano anche di considerazioni relative alla costruzione, come la disponibilità materiale, la logistica del sito e la pianificazione.

Valutazione e Retrofitting: Nei casi in cui le strutture esistenti richiedono la valutazione o la riabilitazione, gli ingegneri possono eseguire progetti di valutazione e retrofitting. Ciò comporta l'ispezione della struttura, la valutazione delle sue condizioni, l'identificazione di eventuali carenze o debolezze e lo sviluppo di strategie di retrofitting per rafforzare o aggiornare la struttura per soddisfare gli attuali standard di sicurezza e requisiti di prestazioni.

Questi livelli di progettazione strutturale rappresentano una progressione dalla concettualizzazione alla costruzione, con crescenti livelli di dettaglio e raffinatezza in ogni fase. La collaborazione efficace tra architetti, ingegneri, appaltatori e altri stakeholder è essenziale per garantire un successo a ogni livello di progettazione.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

17.1.2.2 Analisi

Per il contesto storico, consultare §11.8

20 Mentre questo è proprio il tema trattato in questo libro, l'analisi non è mai una fine per sé, è solo un passo essenziale sia per progettare una nuova struttura o per valutare la sicurezza di una struttura esistente.

21 L'analisi può variare dal semplice calcolo della mano (come è stato coperto nel libro II), dalla simulazione del computer (Book III) all'analisi non lineare complessa (Libro IV).

22 Da un punto di vista meccanico,

Definition 17.1: Requisiti di analisi strutturale

Tutte le soluzioni di analisi strutturali devono soddisfare

1. Statici (equilibrio)
2. Rapporto costitutivo (relazioni di spostamento dello stress o della forza)
3. Kinematics (compatibilità delle relazioni di spostamento o di slittamento/sostituimento)

23 Nel processo di progettazione strutturale, si è dato un insieme di forze e dimensioni di una componente strutturale (samo, colonna, lastra) e poi per

Strutture in acciaio/legno Selezionare la sezione appropriata.

Calcestruzzo rinforzato: Determinare le dimensioni dell'elemento e rinforzo interno (numero e dimensioni di barre rinforzanti).

24 Per le nuove strutture, si tratta di un processo iterativo tra analisi e progettazione. In primo luogo, viene fatto un disegno preliminare utilizzando regole di pollici (più noto agli ingegneri con esperienza progettuale) analizzati, e poi ridisegnato, Capitolo 37.

25 A seguito del processo di progettazione (forza di vestire)[2], dobbiamo controllare

Servizi: deflettori, larghezze di crepa sotto il carico applicato. Confronta con valori accettabili specificati nel codice di progettazione.

Inadempimento: e confrontare il carico di guasto con i tempi di carico applicati i fattori appropriati di sicurezza.

Se il disegno non è accettabile, allora deve essere modificato e rianalizzato.

26 In sintesi, l'analisi è sempre necessaria.

[2]Si noti che per gli aerei che volano sull'oceano, la servibilità (capacità di sostenere crepe) viene eseguita abeti, forza in seguito.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Definition 17.2: Requisiti di progettazione strutturale

Il design strutturale deve soddisfare:

1. Forza (in inglese)$\sigma < \sigma_f$)
2. Stiffness ('piccola' deformazioni)
3. Stabilità (indurimento, cracking)

27 Interessante Torroja (§15.4.6) considerato i calcoli come un ripensamento, necessario solo per valutare la fattibilità di un progetto.

17.1.2.3 Valutazione della sicurezza

28 Si tratta di un compito relativamente recente per gli ingegneri strutturali, che deriva dall'invecchiamento delle strutture e dalla necessità di rivalutare la loro integrità strutturale.

29 Erroneamente, alcuni ingegneri valutano la sicurezza con il rispetto del codice di progettazione prevalente[3].

30 Invariabilmente questo passaggio, è uno dei più complessi per l'analisi come contrarily al design (elastico lineare), per la valutazione della sicurezza non possiamo più assumere la risposta ad essere lineare (forse a causa di una vasta deformazione cracking o irreversibile) e la l'analisi deve essere non lineare.

17.1.3 Disciplina integrata nell'analisi strutturale

31 L'analisi strutturale, come disciplina, comprende l'integrazione dei principi di molteplici discipline; alcuni possono essere ovvi (Meccanica), o meno così:

Meccanica (Solid) è la comprensione dei singoli membri sottoposti a stressanti; a sua volta l'analisi strutturale affronta un insieme di elementi, ciascuno di essi governato da equazioni fondamentali rilevanti nella meccanica.

Matematica Mentre il calcolo variabile singolo è onnipresente, calcolalo multivariabile (calcolo vettoriale), algebra lineare (metodo basato sul computer nel Libro III), equazioni differenziali, metodi variazionali.

Meccanica fluida come l'equazione Bernouilli per il carico del vento è un fattore importante.

Meccanica del suolo è fondamentale per determinare il tipo di supporti strutturali.

Sessismo è essenziale per fornire accelerazione del movimento terra per l'analisi sismica.

[3]Per esempio, quando si è scoperto che l'edificio di contenimento nucleare Seabrook ha avuto una vasta crepa a causa delle reazioni Aggregate Alkali, la Commissione per le regolamentazioni nucleari si è accontentata quando il proprietario della struttura "tweaked' 'il vecchio codice di progettazione ACI-318 al valutare la sicurezza!

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Probabilità La funzione di distribuzione delle probabilità di resistenza (PDF) si basa su un'analisi statistica dei test di laboratorio, mentre la domanda è basata sul PDF della probabile presenza di carichi.

17.2 Elementi: forze interne primarie

32 forze interne e stress non sono altro che concetti utili fatti dall'uomo, ma solo le tensioni possono essere misurate fisicamente. Questi a sua volta possono essere collegati agli stress attraverso il modulo di Young, e poi possono essere integrati sulla sezione trasversale per definire le forze assiali interne, taglio, flessore e torsione (§).

33 Vorrei fare riferimento alle forze interne primarie:

Assilico N**:** cavi, elementi di tromba, archi, membrana, conchiglie

Flessibili M**:** Aspiratori, cornici, griglie, piastre

Torsional T**:** Griglia, cornici 3D

Shear V**:** Cornici, griglie, pareti di taglio.

34 In realtà, a seconda del tipo di struttura potremmo avere un certo numero di forze interne in combinazione §17.4.

17.3 Elementi di trasferimento del carico

35 si deve tenere presente che sotto carico, una struttura deforma e possiamo misurare la tensione. Poi attraverso l'assunzione di elasticità ci riferiamo alla fatica alle sollecitazioni (che non possono essere misurate *per la*, e poi, per semplicità sostituiamo gli stress dai loro valori integrali, §O.9.

36 Quindi, abbiamo quattro forze interne fondamentali, Fig. 17.2

Assiale: cavi, elementi di tromba, archi, membrana, conchiglie

Flettura: Aspiratori, cornici, griglie, piastre

Torsional: Griglia, cornici 3D

- Si'. Cornici, griglie, pareti di taglio.

37 Si noti che le forze interne di diverso tipo convivono in varie disposizioni, a seconda del tipo di elemento §40.4.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

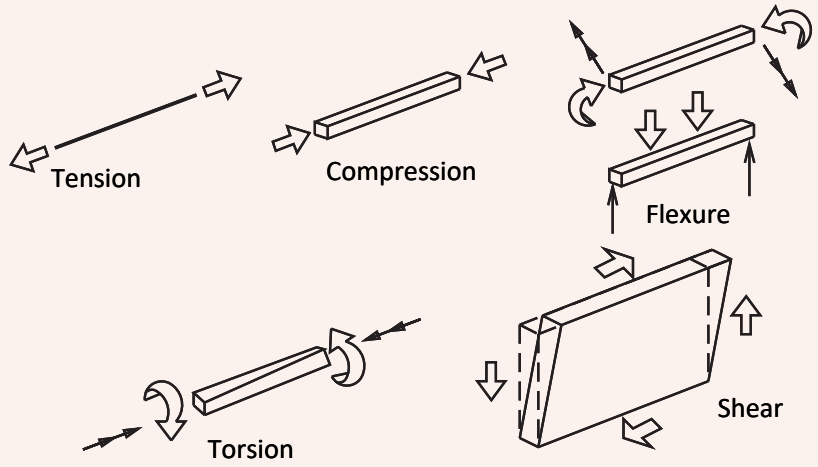


Figura 17.2: Tipi di forze in elementi strutturali (1d)

17.4 Tipologie di struttura

38 Le strutture possono essere classificate come segue:

Tensione & Strutture di compressione: solo, nessuna cesoia, flessore o torsione

Cavo (solo tensione): L'elevata resistenza dei cavi d'acciaio, combinati con l'efficienza della semplice tensione, rende i cavi ideali strutturali elementi per spaziare grandi distanze come ponti, e tetti di piatto, Fig. 17.3

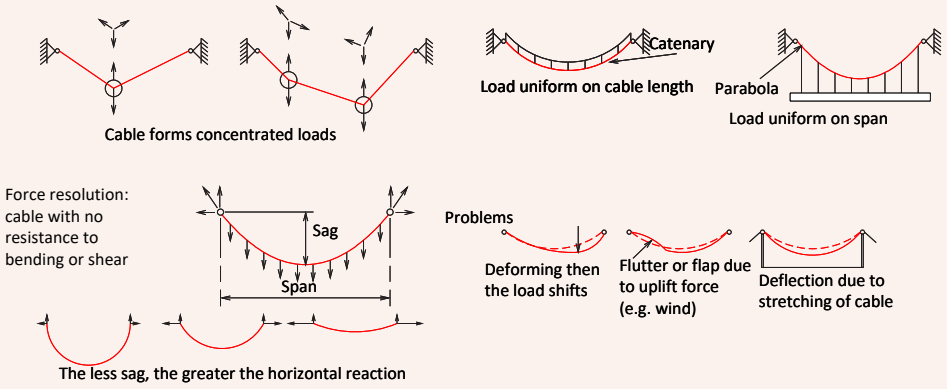


Figura 17.3: Aspetti fondamentali dei sistemi di cavi

Archi (per lo più compressione) è una struttura del cavo "reversed'. arco, cerchiamo di minimizzare la flessione e trasferire il carico attraverso assiale solo le forze. Gli archi sono utilizzati per grandi tetti e ponti, Fig. 17.4

COPIA DI REVISIONE

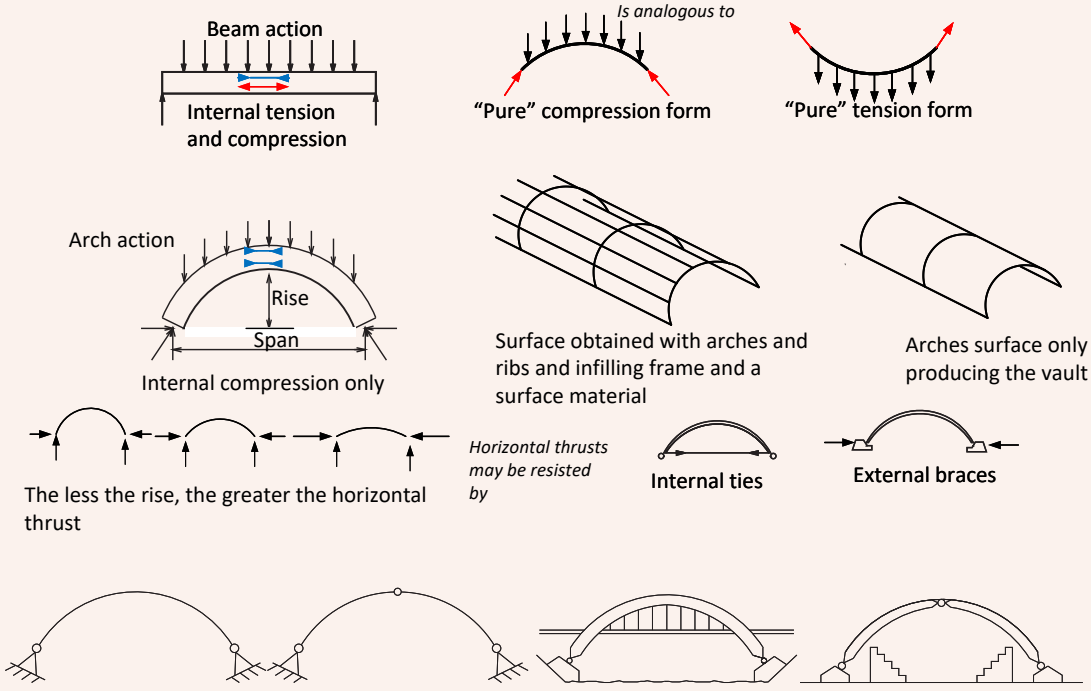


Figura 17.4: Aspetti di base degli archi

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Trusse hanno *perno collegato* elementi che possono trasmettere solo forze assiali (tensione e compressione). Gli elementi sono collegati da slot, avvitati o *piastra di coscia* connettori. Tuttavia, a causa della costruzione dettagli, ci possono essere *stress secondari* causata da relativamente rigida connessioni. Le tarsie sono utilizzate per joist, tetti, ponti, torre elettrica, Fig. 17.5

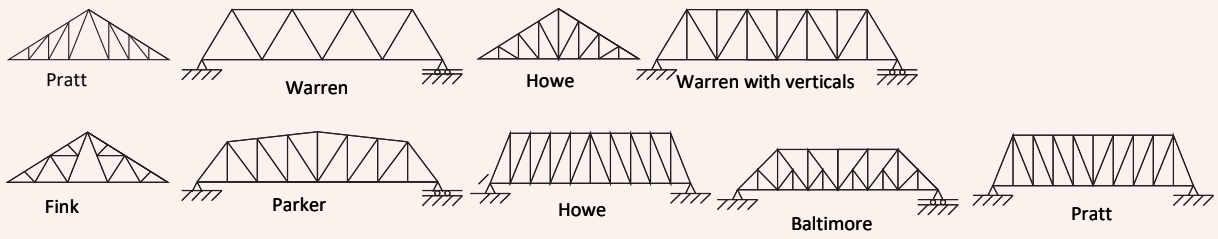


Figura 17.5: Tipi di capriate

Post e travi: Essenzialmente una colonna di supporto su cui un "beam" riposa, Fig. 17.6e 17.7.

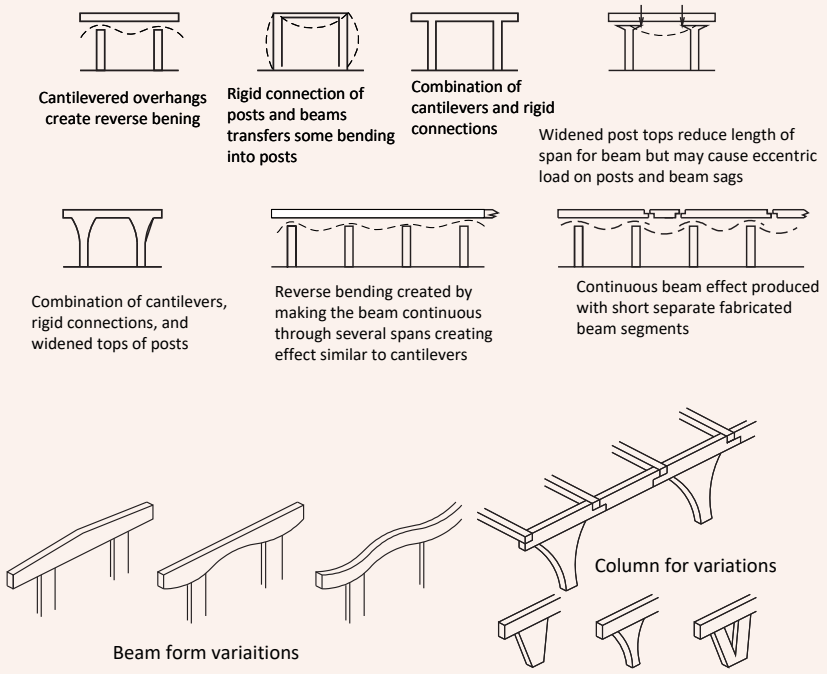


Figura 17.6: Variazioni nelle configurazioni di post e travi

- Le api. Guarnizione, flessione e talvolta forze assiali. Ricordate che $\sigma = \frac{Mc}{I}$ è applicabile solo per *a) travi*, cioè campa/profondità almeno pari a cinque. considerando che

COPIA DI REVISIONE

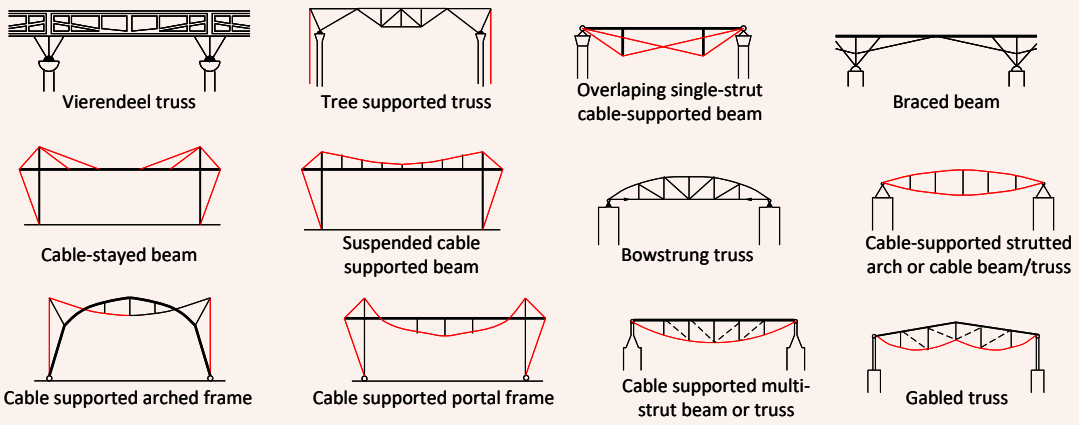


Figura 17.7: Tipi di fascio diversi

le travi R/C sono per lo più rettangolare o a forma di T, i fasci d'acciaio sono di solito ho sagomato (se le flange superiori non sono correttamente irrigiditi, possono fibbie, quindi dobbiamo avere *idraulici*).

Cornici: Il carico è co-planare con la struttura. Assale, taglio, flessione (con riferimento ad un asse in strutture 2D e rispetto a due assi nelle strutture 3D), torsione (solo in 3D). Il telaio è composto da almeno un membro orizzontale (soggiorno) rigidamente collegati a quelli verticali[4]. I membri verticali possono avere diverse condizioni di confine (che sono di solito regolato da condizioni del suolo). I telai sono ampiamente utilizzati per case e edifici, Fig. 17.8.

Griglia e piastre: Il carico è ortogonale al piano della struttura. Flexure, shear, torsione. In una griglia, i travi sono ad angolo retto che provocano uno dispersione a due vie di carichi. A causa dei rigidi collegamenti tra le travi, maggiore rigidità è introdotta dalla resistenza torsionale dei membri. Le griglie possono anche essere *Skewed* per ottenere una maggiore efficienza se l'aspetto rapporto non è vicino a uno. Le piastre sono piane, rigide, due strutture dimensionali che trasmettono verticali caricare i loro supporti. Usato per lo più *lastre di pavimento*. *Piastre pieghevoli* è una combinazione trasversale e longitudinale azione del fascio. Utilizzato per i tetti a lungo arco. Nota che la piastra può essere piegata circolare piuttosto che longitudinalmente. Le piastre piegate sono utilizzate principalmente come tetti a lungo raggio. Tuttavia, possono anche essere utilizzato come pareti verticali per supportare sia verticale che orizzontale carichi.

Membranes: Strutture 3D composte da una superficie 2D flessibile che resiste solo tensione. Sono solitamente supportate via cavo e sono utilizzate per tende e tetti a lunga durata Fig. 17.9.

[4]Il precursore delle strutture frame erano le **Post e Lintel** dove il post è membro verticale su cui si trova lintel semplicemente posato.

COPIA DI REVISIONE

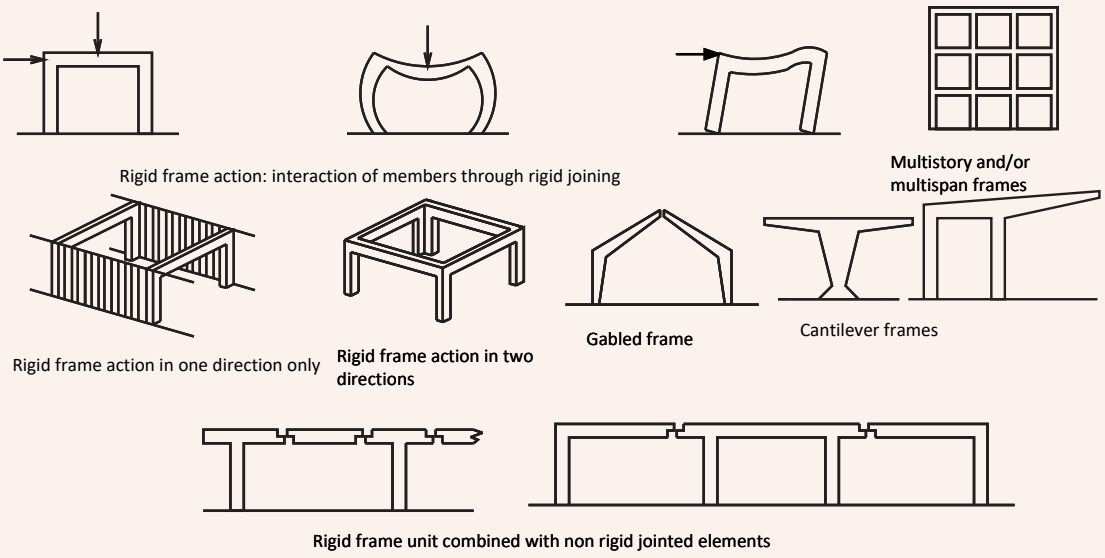


Figura 17.8: Forme di base di cornici

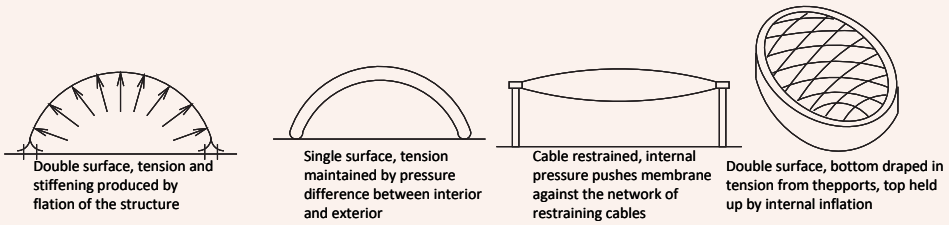


Figura 17.9: Esempi di strutture supportate dall'aria

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

- **Conchiglie:** Strutture 3D composte da una superficie 2D curva, esse sono solitamente sagomati per trasmettere solo sollecitazioni assiali di compressione, Fig. 17.10. Le

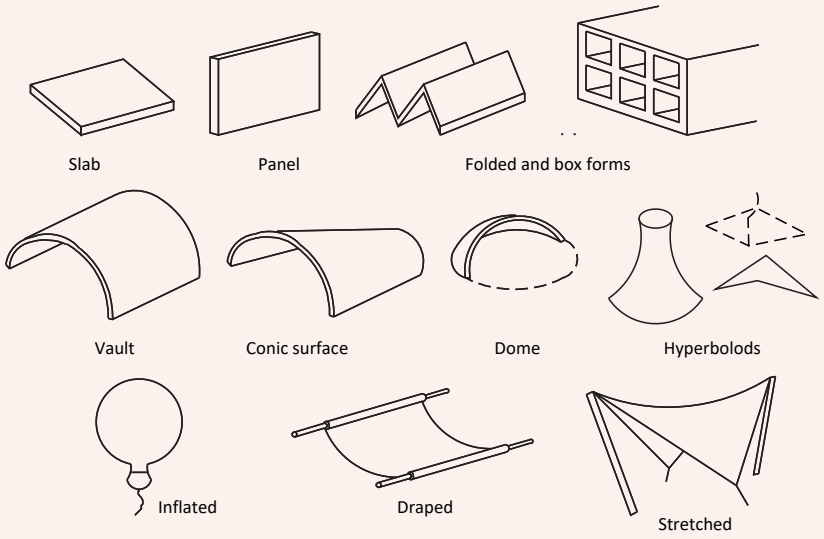


Figura 17.10: Forme di base delle conchiglie

conchiglie sono classificate in termini di curvatura.

17.5 Trasformazione degli strumenti di ingegneria

39 Come istruttore, ho dovuto riconoscere che viviamo in un mondo in evoluzione a cui dobbiamo adattarci *prima di* I nostri studenti.

40 Ormai tutti gli studenti hanno usato computer sin dalle scuole medie (se non prima per i giochi).

41 La maggior parte del programma di computer non ha più manuali, o curve di apprendimento ripide.Per un software per acquisire la fiducia pubblica e il supporto deve essere semplice, elegante, intuitivo, salabile. Questo ha avuto un impatto:

Scrivere I computer hanno rivoluzionato le nostre competenze per iscritto, poiché l'uso dei computer per la elaborazione delle parole diventa sempre più prevalente. Gli studenti non più

- Acquisire penmanship (tecnica di scrittura con la mano utilizzando uno strumento di scrittura).
- Pensate bene prima di mettere idee su carta (troppo facile da copiare/detertare/incolla).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Invece:

- Processore di Word WYSIWYG (cioè Word).
- Sistema di preparazione dei documenti con marcature di testo semplici, LaTeX (simile a HTML).
- Software informatico per la verifica, la convalida, la documentazione e il riutilizzo di calcoli matematici come MathCad[5].

Computing ha anche evoluto ampiamente, presto abbiamo usato Abaqus, regole di scorrimento, e abbiamo avuto la capacità

- Eseguire il calcolo mentale (calcoli aritmetici utilizzando solo il cervello umano), cioè. 78×3.
- Provare per i numeri $3200 \times 400 = 1,280,000$
- Eseguire semplici identità trigonometriche, operazioni di calcolo $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ or $\int \frac{1}{x} dx$

Tuttavia, attualmente ci affidiamo (quasi ciecamente) a: Calcolatori programmabili, Excel, Matlab, Mathematica o Mapple, Mathcad.

Lingue di programmazione evoluto da Basic, Pascal, Fortran 90, Fortrann 2018, C, C++, Perl, Python e naturalmente, mi mancano molti.

Redazione si è inoltre evoluto dalla redazione di tabelle, "blue-prints"', Auto-CAD, Solid-Work, BIM (Building Information Modelling), REVIT e così via.

42 Semplicemente, dovremmo aspettarci ancora più innovazione nel prossimo futuro, possibilmente alimentato b AI.

43 Tis supplica la domanda, dobbiamo davvero insegnare ad alcuni dei materiali in questo libro ai futuri ingegneri?

17.6 Corsi di ingegneria strutturale

44 L'istruzione di ingegneria strutturale può essere affrontata da entrambi uno dei due punti di vista:

Architettonico: Inizia dal design generale, e spostati verso dettagli analisi.

Istruzione: L'enfasi è su un approccio elementare piuttosto che globale. i singoli elementi strutturali e non sempre sul sistema totale.

[5] I miei studenti erano tenuti a presentare tutti i loro homeworks con MathCad. Anche se ampiamente usato nell'industria, purtroppo troppi colleghi sono preoccupati per il deposito di un altro software per imparare dagli studenti!

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

CVEN3525 cercherà un equilibrio tra questi due approcci.

45 Questo è solo il terzo di una lunga serie di corsi che possono essere presi in Ingegneria strutturale, Fig. 17.11

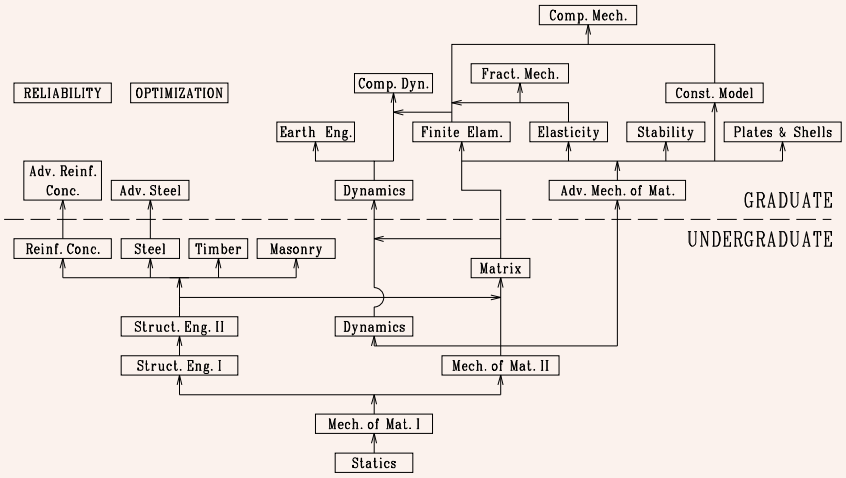


Figura 17.11: Sequenza dei corsi di ingegneria strutturale

COPIA DI REVISIONE

Capitolo 18

Carico

Abstract

Questo capitolo funge da introduzione essenziale al concetto di carichi, fondamentali per l'analisi strutturale.

Rifiutando la dipendenza del libro di testo convenzionale sulle equazioni empiriche e le ampie tabulazioni, questo capitolo fornisce semplicemente una classificazione completa e discussione dettagliata dei vari tipi di carichi. La classificazione comprende carichi verticali, come carichi morti e vivi, e carichi laterali, comprese le forze ventose e sismiche. Particolare attenzione è data alla derivazione delle equazioni di pressione dinamiche (vento) e la discussione del comportamento di carico in diverse condizioni.

Gli approcci empirici ai carichi sono tuttavia coperti nell'appendice B

Il capitolo introduce anche argomenti meno comunemente affrontati, come l'impatto e i carichi secondari, che sono cruciali per comprendere il pieno spettro delle sfide nell'analisi strutturale. Distinguono le caratteristiche e gli effetti di ogni tipo di carico, questo capitolo pone una solida base per un'ulteriore esplorazione del comportamento strutturale sotto queste forze.

18.1 Introduzione 879
18.2 Classificazione dei carichi 879
18.2.1 Verticale 879
18.2.2 Sedia 880
18.2.3 Idrostatica e terra 886
18.2.4 Carico d'impatto 887
18.2.5 Secondario 888
18.2.6 Termotermico 889
18.3 Considerazioni 891
18.3.1 Carico proiettato 891
18.3.2 Posizionamento del carico . 891
18.3.3 Combinazioni di carico . . . 892
18.3.4 Percorso di carico 893
18.3.5 Aree di tributo 898
18.3.6 Ricorso strutturale 899

COPIA DI REVISIONE

18.1 Introduzione

1 Senza carichi, l'analisi strutturale sarebbe ridondante; i carri sono gli stressanti primari di una struttura e la loro comprensione è fondamentale. *A* a punto *B*.

2 Di conseguenza, questo è tipicamente il primo capitolo numerico in qualsiasi libro di analisi strutturale; esso copre due argomenti principali: a) tipi di carichi e questioni associate; b) equazioni empiriche basate su codice per determinare i carichi eolici e sismici.

3 A mio parere, queste equazioni empiriche possono essere confuse in un libro di testo dove ogni altro argomento si basa sulla fisica/meccanica e deriva dalla derivazione razionale. questo capitolo si concentrerà sulla classificazione dei carichi e le relative questioni, mentre tutti i metodi basati sul codice saranno affrontati nell'Appendice B.

18.2 Classificazione dei carichi

4 Per una copertura dettagliata dei carichi, fare riferimento al "Universal Building Code"' (UBC), (ICBO, 1994) e ai «Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures» (ASCE/SEI 7-16, 2017).

18.2.1 Verticale

5 I carichi verticali in una struttura si riferiscono alle forze che agiscono verso il basso a causa della gravità.

6 I carichi verticali cadono in una delle due categorie

Caricamenti morti:

7 Questi sono carichi permanenti derivanti dal peso della struttura stessa, compresi elementi come pareti, pavimenti, tetti e attrezzature permanenti fisse. I carichi morti sono statici e prevedibili, rimanenti costanti nel tempo.

8 Nel processo di progettazione, i carichi morti devono essere stimati e verificati alla fine di ogni ciclo di progettazione. *iterativo.*

Caricamenti in corso:

9 Questi sono carichi variabili causati dall'utilizzo della struttura, come persone, mobili, veicoli e attrezzature mobili. I carichi in tensione possono cambiare di magnitudo e posizione, rendendoli meno prevedibili rispetto ai carichi morti.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

10 In analisi il posizionamento del carico dovrebbe essere tale che il loro effetto (serba/momento) è massimizzato.

11 Un approccio statistico viene utilizzato per determinare un carico statico uniformemente distribuito che equivale al peso della massima concentrazione di occupanti, e questi carichi sono nuovamente definiti da ICBO, 1994 e ASCE/SEI 7-16, 2017.

Caricamento in neve

12 Il carico di neve del tetto varia notevolmente a seconda *geografica posizione e altezza*. Si vanno da 20 a 45 psf, Fig. 18.1.

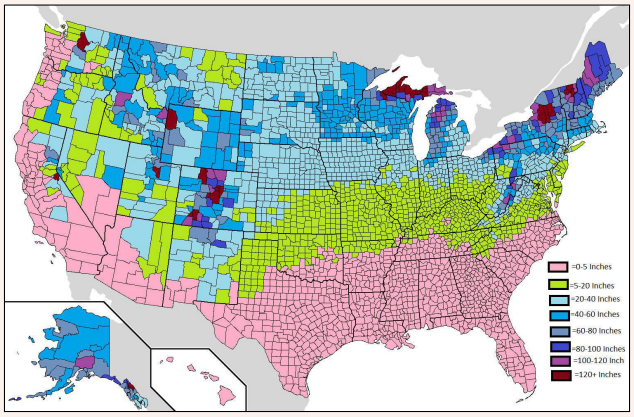


Figura 18.1: Mappa della neve degli stati uniti

18.2.2 Sedia

18.2.2.1 Vento vento

13 Il carico del vento su una struttura si riferisce alla forza esercitata dal vento sulla superficie di un edificio o altra struttura. Questa forza è generata dal movimento delle molecole d'aria e può variare in magnitudo e direzione a seconda di fattori come la velocità del vento, la direzione del vento e la forma dell'edificio, altezza, posizione geografica, struttura della superficie edilizio e rigidità della struttura.

14 I carichi eolici sono particolarmente significativi *edifici alti*[1].

15 Derivamo prima noi *equazione della pressione dinamica* derivato da D. Bernoulli, deriva dai principi dell'energia cinetica e della massa di un fluido. L'energia cinetica (KE) per un oggetto è dato da

$$KE = \frac{1}{2}mV^2$$

[1]La considerazione primaria del design per edifici di elevato aumento è l'eccessiva *deriva dalla* causata da carico laterale (vento e possibilmente terremoti).

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

dove m è la massa e V è la velocità.

Per un fluido con densità ρla massa m di un volume ΔV può essere espresso come:

$$m = \rho \Delta V$$

Utilizzando l'espressione di massa sopra, l'energia cinetica per un volume fluido è:

$$KE = \frac{1}{2}(\rho \Delta V)V^2$$

Poi, l'energia cinetica per volume unitario è ottenuta dividendo ΔV:

$$\frac{KE}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho V^2 \tag{18.1}$$

Questo rappresenta la pressione dinamica del fluido, quantificare l'energia cinetica per volume unitario a causa del movimento del liquido.

L'unità di pressione dinamica q è pascals (Pa), che è anche l'unità per energia cinetica per volume unitario:

$$1\,\text{Pa} = 1\,\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}^2} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

Quindi, la pressione dinamica è una forma di densità energetica.

16 Se consideriamo un velivolo Fico. 18.2 Il flusso deve essere più veloce nella parte superiore (curvata) rispetto al basso, che condurrà ad una riduzione della pressione statica sopra il parabrezza rispetto a quella inferiore.

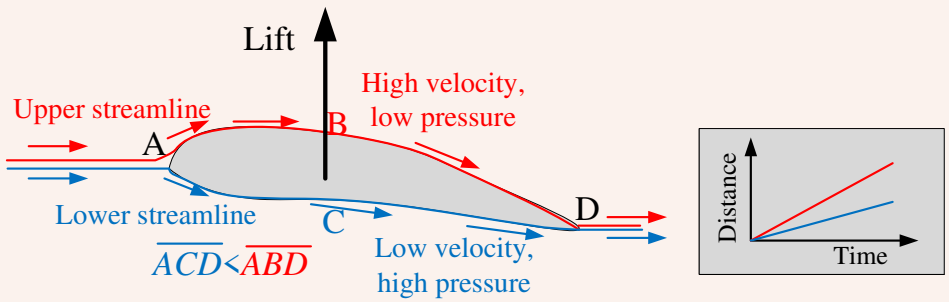


Figura 18.2: Airfoil, equazione di Bernoulli.

17 Sostituire l'aria in Eq. 18.1, la densità di massa dell'aria ρ è il peso dell'aria diviso dall'accelerazione di gravità $g = 32.2$?^{2}. A livello del mare e una temperatura 15^{o}C (59^{o}F), l'aria pesa 0,0765 lb/ft^3 questo avrebbe dato una pressione

$$q_s = \frac{1}{2}\frac{(0.0765)\text{lb/ft}^3}{(32.2)\text{ft/sec}^2}\left(\frac{(5280)\text{ft/mile}}{(3600)\text{sec/hr}}V\right)^2 \tag{18.2}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

or[2]

$$q_s = 0.00256V^2$$

dove V è la velocità massima del vento (in miglia all'ora) e q_s è in psf. V si può ottenere da mappe eoliche (in Stati Uniti $70 \leq V \leq 110$), Fig. 18.3.

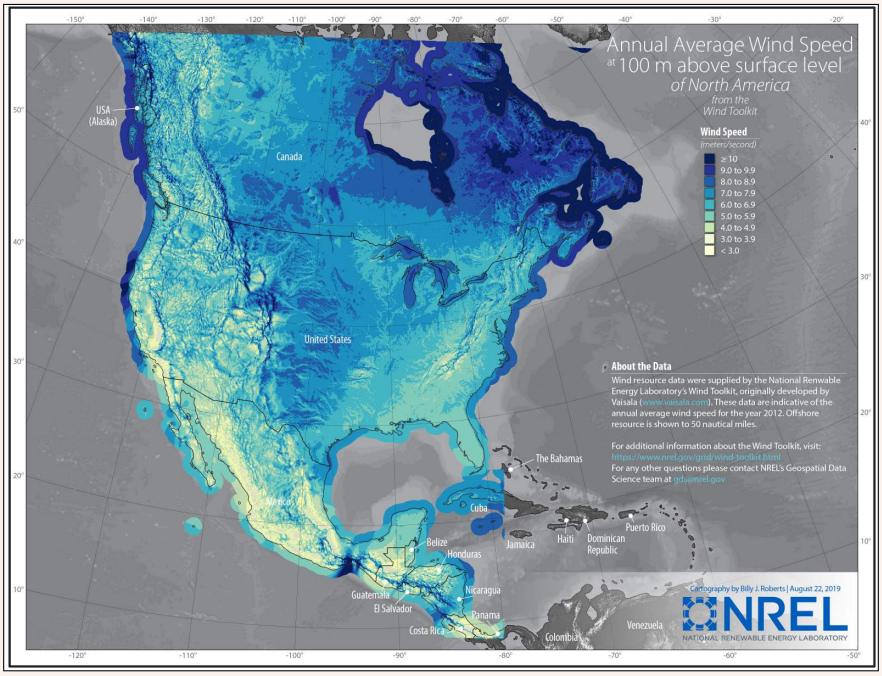


Figura 18.3: Mappa del vento degli stati uniti

18 Quando il vento colpisce un edificio, deve deviare intorno alla struttura perché l'edificio agisce come ostacolo. Il comportamento del vento attorno all'edificio può essere suddiviso in diversi componenti chiave, Fig. 18.4:

Finestre (Vinciso): Mentre il vento colpisce la faccia dell'edificio, rallenta e si accumula pressione, creando una regione di alta pressione su questo lato vento.

Flusso e dintorni: Il vento scorre poi lungo e intorno ai lati dell'edificio. Mentre passa sopra la parte superiore e intorno ai bordi, il vento accelera a causa della ridotta area trasversale che può scorrere attraverso (simile a come l'acqua si velocizza in una parte stretta di un flusso). Secondo il principio di Bernoulli, in quanto aumenta la velocità di un fluido (in questo caso aria), diminuisce la pressione.

Lato del vento (Lieward): Quando il vento è passato sopra la cima dell'edificio e si muove verso il lato leeward, sperimenta un'espansione e una riduzione della velocità.

[2]Purtroppo, la maggior parte dei libri di testo sull'analisi strutturale presenta semplicemente questa equazione senza derivazione, lasciando potenzialmente i lettori con il sospetto che sia semplicemente empirico.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

Questa transizione crea un complesso modello di flusso caratterizzato da turbolenze e vortici.

19 Sul lato sinistro dell'edificio, diversi fattori contribuiscono alla creazione di aspirazione:

Il recupero della pressione è incompleto: Anche se il vento rallenta dopo aver superato la vetta dell'edificio, la pressione non si riprende completamente alle condizioni ambientali. La miscelazione di flussi eolici da direzioni diverse (sotto la parte superiore e intorno ai lati) porta alla turbolenza, che riduce l'efficacia del recupero della pressione.

Separazione del flusso: Mentre il vento scorre sopra la parte superiore dell'edificio e giù per il lato sporgente, tende a separarsi dalla superficie a causa del gradiente di pressione avverso (spostando da bassa pressione in alto a una maggiore pressione verso il terreno). Questa separazione crea una regione di bassa pressione direttamente contro il lato sinistro dell'edificio.

Vortices ed Eddies: La separazione del flusso e l'interazione dei flussi di vento possono produrre vortici ed ed elementi intorno agli angoli e ai bordi dell'edificio. Queste masse d'aria rotante sono regioni di bassa pressione e contribuiscono all'effetto della pressione negativa (suzione) generale sul lato sinistro.



Figura 18.4: Effetto del carico eolico sulle strutture

20 Per l'edificio ad alto aumento, è importante catturare la corretta distribuzione della pressione del vento. $V(z)$ come funzione di altezza z può essere espresso dall'equazione della legge di potere (ASCE/SEI 7-16, 2017):

$$V(z) = V_{\text{ref}} \left(\frac{z}{z_{\text{ref}}} \right)^{\alpha}$$

dove:

- $V(z)$ è la velocità del vento all'altezza z,
- V_{ref} è la velocità del vento di riferimento all'altezza di riferimento z_{ref},
- α è l'esponente dipendente dal terreno.

Questa equazione può essere combinata con Eq. 18.1 per ottenere la distribuzione della pressione.

COPIA DI REVISIONE

21 I dettagli dell'approccio pericardico all'analisi delle strutture soggette al carico del vento sono riportati in §B.2.

18.2.2.2 Sismica

22 La sismicità comporta lo studio dell'insorgenza, della frequenza e della magnitudine dei terremoti all'interno di una specifica area, essenziale per determinare il pericolo sismico associato ad un particolare luogo, Fig. 18.5. I fattori che influenzano la sismicità includono:

Piastre tettoniche: Movimenti e interazioni di piastre tettoniche sono le cause principali dei terremoti.

Dati storici del terremoto: Le registrazioni dei terremoti passati aiutano a prevedere la probabilità del terremoto futuro, le posizioni e le magnitudine potenziali.

Zone di guasto: I difetti attivi influenzano significativamente la sismicizia locale in base alle loro proprietà.

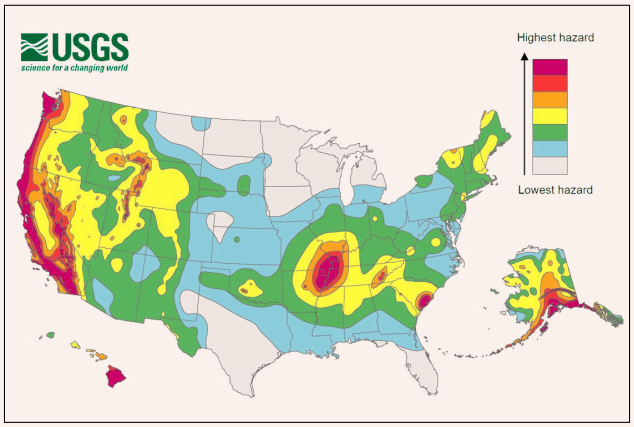


Figura 18.5: Mappa sismica degli stati uniti

23 Il moto terra durante un terremoto è caratterizzato da:

Accelerazione: Il tasso di cambio della velocità con il tempo, con accelerazione del terreno (PGA) picchi utilizzato come misura dell'intensità del terremoto.

Velocita': La velocità dell'onda della cinghia V_s è il parametro critico nella sismatologia per valutare il comportamento del suolo durante i terremoti.

24 La frequenza naturale di una struttura è una funzione di massa e rigidità, per un semplice singolo grado di libertà, questo può essere facilmente determinato.

25 Considerare una massa m attaccato a una molla con rigidità k, e nessuna forza esterna che agisce. L'equazione di equilibrio dinamico è data da:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Assumendo una soluzione del modulo $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$:

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

Sostituire nuovamente l'equazione di equilibrio:

$$(-m\omega^2 + k)A\cos(\omega t + \phi) = 0$$

Per soluzioni non banali ($A \neq 0$):

$$-m\omega^2 + k = 0 \implies \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Così, la frequenza naturale f is:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

26 Da quanto sopra, abbiamo un criterio per determinare quando una analisi dinamica è giustificata[3].

Definition 18.1: Condizione per analisi dinamiche

È necessaria un'analisi dinamica se la frequenza naturale fondamentale di una struttura è vicina alla frequenza dei carichi dinamici (come le frequenze predominanti del movimento terra nei terremoti).

27 Per estensione all'equazione precedente, un edificio ha frequenze naturali a cui tende a vibrare. Se la frequenza del movimento terra corrisponde alla frequenza naturale dell'edificio (resonanza), l'edificio può sperimentare oscillazioni esagerate e potenzialmente dannose.

28 I carichi sismici si manifestano in edifici principalmente come forze laterali.

29 Queste forze sono il risultato dell'edificio che cerca di resistere al movimento impartito dal terreno. La distribuzione delle forze laterali lungo l'altezza dell'edificio aumenta tipicamente con altezza a causa del maggiore effetto leva (momento) mentre si spostano sull'edificio.

30 Le forze laterali inducono le forze di taglio e i momenti di piegamento negli elementi strutturali dell'edificio. Le storie più basse di un edificio multi-story tipicamente sperimentano le forze di taglio più alte perché portano il carico di tutte le storie sopra di loro.

[3] Questo è formalmente definito perché molti studenti e ingegneri lottano per fornire una spiegazione razionale per quando un'analisi dinamica è necessaria.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

31 Se la massa e la rigidità di un edificio non sono distribuite simmetricamente o se lo scuotemento del terreno non è uniforme, le forze torsione (rotazionale) possono anche svilupparsi. Queste forze possono fare girare l'edificio, portando a distribuzioni complesse dello stress e danni potenzialmente significativi.

32 Tutte le strutture hanno un certo grado di smorzamento, che è la capacità di dissipare l'energia. Durante un terremoto, l'umidità aiuta a ridurre la magnitudine delle vibrazioni, riducendo così gli stress e le deformazioni nell'edificio.

33 Infine, per gestire efficacemente i carichi sismici, gli edifici sono progettati secondo standard di progettazione resistenti al terremoto e questi standard aiutano a garantire che le strutture possano sopportare eventi sismi senza una significativa perdita di vita o collasso. Le strategie di progettazione chiave includono l'utilizzo di materiali che possono sopportare grandi deformazioni, la progettazione per duttilità (la capacità di deformare senza rottura), e incorporando elementi come pareti di taglio, telai di resistenza al momento e isolatori base.

34 Tutti i capitoli di cui sopra saranno coperti in maggiori dettagli 36, 70 e 67.

18.2.3 Idrostatica e terra

35 Le strutture sotto terra devono resistere alla pressione della terra laterale.

$$q = K\gamma h$$

dove γ è la densità del suolo, $K = \frac{1-\sin\Phi}{1+\sin\Phi}$ è il coefficiente di pressione, h è l'altezza.

36 For sand and gravel $\gamma = 120$ lb/ ft^3, and $\Phi \approx 30°$.

37 Se la struttura è parzialmente sommersa, deve anche resistere alla pressione idrostatica dell'acqua, Fig. 18.6.

$$q = \gamma_W h$$

dove $\gamma_W = 62.4$ lbs/ft^3.

18.2.3.1 Ex 18.1: Caricamento idrostatico

Il seminterrato di un edificio è 12 ft sotto grado. L'acqua di terra si trova 9 ft sotto grado, quale spessore lastra di cemento è necessario per esattamente equilibrio l'ascensore idrostatico?

La pressione idrostatica deve essere compensata dalla pressione causata dal peso del cemento. Da $p = \gamma h$ equatiamo le due pressioni e risolviamo per h il altezza della lastra di cemento

$$\underbrace{(62.4)\ \text{lbs/ft}^3 \times (12-9)\ \text{ft}}_{\text{water}} = \underbrace{(150)\ \text{lbs/ft}^3 \times h}_{\text{cemento}} \Rightarrow h = \frac{(62.4)\ \text{lbs/ft}^3}{(150)\ \text{lbs/ft}^3}(3)\ \text{ft}(12)\ \text{in/ft} = 14.976\ \text{in} \simeq 15.0\ \text{inch}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

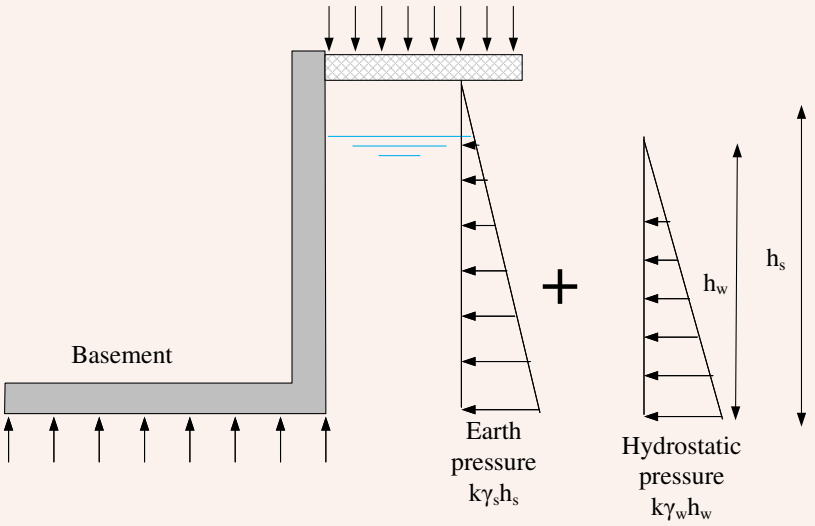


Figura 18.6: Carico terrestre e idrostatico su strutture

18.2.4 Carico d'impatto

38 I carichi di impatto si riferiscono alle forze applicate a una struttura per una durata molto breve ma con grande intensità, che possono derivare da diverse fonti come oggetti in caduta, collisioni dei veicoli o esplosioni.

39 La caratteristica chiave dei carichi di impatto è che essi comportano forze ad alta energia che agiscono durante brevi periodi, portando a stress, vibrazioni e potenziali danni strutturali.

40 La derivazione delle forze di impatto è relativamente semplice.

41 La conservazione della quantità di moto indica che il momento totale prima dell'impatto deve essere uguale al momento totale dopo l'impatto, purché non si agiscano forze esterne sul sistema.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

dove:

m_1, m_2 masse dei corpi collidenti
v_1, v_2 velocità dei corpi prima della collisione
v_1', v_2' velocità dei corpi dopo la collisione

42 In collisioni elastiche, si conserva anche l'energia cinetica; tuttavia nella maggior parte dei casi gli impatti che coinvolgono le strutture, la collisione è inelastice, il che significa che un'energia cnetica viene convertita in altre forme di energia come il calore o viene utilizzata per deformare i corpi.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

43 L'energia cinetica prima e dopo l'impatto è data da:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 + E_{\text{loss}}$$

dove E_{loss} è l'energia persa a causa di deformazione inelastica, calore, ecc.

44 Per determinare la forza d'impatto F, è possibile utilizzare il teorema impulso-momento che riguarda la forza di un impatto al cambiamento in slancio e la durata del tempo Δt dell'impatto:

$$F = ma \implies F \simeq m\frac{\Delta v}{\delta t}$$

dove:

m	la massa dell'oggetto
Δv	cambiamento nella velocità
Δt	durata dell'impatto

45 Per determinare la forza d'impatto di una massa che cade da un'altezza h equatiamo l'energia cinetica acquisita per la perdita di energia potenziale[4]:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \implies v = \sqrt{2gh}$$

Dopo aver urtato la superficie, l'oggetto si decelera a zero. Δt secondi, la forza d'impatto media F sarà

$$F = \frac{m\sqrt{2gh}}{\Delta t}$$

18.2.5 Secondario

46 I carichi secondari nelle strutture sono quelli che nascono dal comportamento della struttura stessa piuttosto che da fonti esterne. Questi carichi sono importanti da considerare nell'analisi strutturale perché possono influenzare in modo significativo l'integrità e le prestazioni di una struttura.

47 I carichi secondari sono in genere indotti dalla risposta della struttura ai carichi primari, alle variazioni di temperatura o ad altri fattori ambientali. A differenza dei carichi primari come i carichi morti (il peso della struttura stessa) e dei carichi vivi (carico dall'uso e occupazione), spesso non vengono applicati direttamente carichi secondari.

48 Tipi di carichi secondari:

Caricatori termici: Questi sono dovuti a variazioni di temperatura che causano espansione o contrazione dei materiali, ad esempio i carichi termici possono indurre gli stress in una lastra di cemento a causa delle differenze di temperatura tra le sue superfici superiori e quelle inferiori.

[4] Come ha scoperto Galileo, la velocità degli oggetti che cadono dalla torre di Pisa sono indipendenti dalle loro "masse".

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Carico di regolazione: Questi si verificano quando una parte di una struttura si stabilisce più di altre parti a causa della compressione del suolo irregolare o altri fattori, creando lo stress all'interno della struttura.

Stage di costruzione: Durante la costruzione, carichi e sequenze temporanee possono indurre effetti secondari a causa della progressiva aggiunta di elementi strutturali e processi costruttivi.

Effetti di eccentricità: L'eccentricità si riferisce alla deviazione del carico applicato dal centroide di un membro strutturale, inducendo momenti e forze aggiuntive che devono essere considerate nell'analisi strutturale.

Effetti P-Delta: Gli effetti P-Delta si verificano a causa dell'azione combinata dei carichi assiali (P) e i carichi laterali (come le forze del vento o sismiche) causando deformazione (delta) nella struttura. Come la struttura si deforma, la distribuzione delle forze cambia, portando ad ulteriori forze interne che non erano presenti in condizioni statiche.

Non linearità geometrica: Ciò si pone quando le deflettenze dei membri strutturali diventano significative, portando a comportamenti non lineari.

Creep e Shrinkage: Nel corso del tempo, materiali come il cemento subiscono deformazione sotto carico sostenuto (creep) e riduzione di volume (shrinkage), che possono portare a ulteriori stress interni.

49 Gli ingegneri devono considerare i carichi secondari durante il processo di progettazione per garantire la sicurezza strutturale e la facilità di manutenzione. Ad esempio, nella progettazione di ponti, gli effetti secondari come quelli dovuti alla curvatura del ponte o all'espansione termica devono essere considerati per prevenire guasti strutturali o deformazione eccessiva.

50 L'analisi dei carichi secondari richiede spesso tecniche di modellazione sofisticate che rappresentano proprietà materiali, cambiamenti della geometria e interazione tra diverse parti della struttura. I metodi avanzati di elementi finiti sono comunemente usati per prevedere come le strutture reagiranno ai carichi secondari.

18.2.6 Termotermico

51 Se un membro è uniformemente riscaldato (o raffreddato) senza restrizioni, allora sarà espandere (o contrarre). Questa espansione è data da

$$\Delta l = \alpha l \Delta T$$

dove α è il coefficiente di espansione termica, Tabella 18.1

52 Se il membro è tenuto a freno all'espansione, allora una compressione stress $\sigma = E\alpha\Delta T$ è sviluppato.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

	α ($/^{\circ}F$)
Acciaio inossidabile	6.5×10^{-6}
Concretamente	5.5×10^{-6}

Tabella 18.1: Coefficienti di espansione termica

[53] Per evitare stress eccessivi dovuti al carico termico *espansione giunti* sono utilizzati in ponti e edifici.

18.2.6.1 Ex 18.2: Espansione termica/tensione

(Schueller, 1996) Un edificio a bassa stazza è racchiuso lungo un lato da una muratura di argilla lunga 100 ft ($\alpha = 3.6 \times 10^{-6}$ in/in./^{o}F, $E = 2,400,000$ psi) parete portante. La struttura è stata costruita ad una temperatura di 60^{o}F e si trova nella parte settentrionale degli Stati Uniti dove la temperatura è compresa -20^{o} e +120^{o}F.

1. Assumendo che la parete può muoversi liberamente senza restrizioni da pareti e fondazione, l'espansione e la contrazione della parete (estate e inverno) sono dati da

$$\Delta L^{Summer} = \alpha \Delta T L = (3.6 \times 10^{-6}) \text{ in/ in/}^{o}F(120 - 60)^{o}F(100) \text{ ft}(12) \text{ in/ft} = 0.26 \text{ in} \quad (18.3)$$

$$\Delta L^{Winter} = \alpha \Delta T L = (3.6 \times 10^{-6}) \text{ in/ in/}^{o}F(-20 - 60)^{o}F(100) \text{ ft}(12) \text{ in/ft} = -0.35 \text{ in} \quad (18.4)$$

2. Ora presumiamo (conservativamente) che il movimento libero non può avvenire ($\Delta L = 0$) da qui resulting stress would be equal to $\sigma = E\varepsilon = E\frac{\Delta L}{L} = E\frac{\alpha \Delta T L}{L} = E\alpha\Delta T$

$$\sigma^{Summer} = E\alpha\Delta T = (2,400,000)\frac{\text{lbs}}{\text{in}^2}(3.6 \times 10^{-6}) \text{ in/ in/}^{o}F(120 - 60)^{o}F \quad (18.5)$$

$$= 518\frac{\text{lbs}}{\text{in}^2} \text{ Tension} \quad (18.6)$$

$$\sigma^{Winter} = E\alpha\Delta T = (2,400,000)\frac{\text{lbs}}{\text{in}^2}(3.6 \times 10^{-6}) \text{ in/ in/}^{o}F(-20 - 60)^{o}F \quad (18.7)$$

$$= -691\frac{\text{lbs}}{\text{in}^2} \text{ Compression} \quad (18.8)$$

$$(18.9)$$

Si noti che le tensioni traslitta sono al di là della capacità muraria, si verificherà la crepatura.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

18.3 Considerazioni

18.3.1 Carico proiettato

54 Anche se una semplice applicazione della trigonometria di base, gli studenti hanno spesso difficoltà a proiettare il carico su una superficie inclinata.

55 Questo è meglio illustrato in Fig. 18.7 con

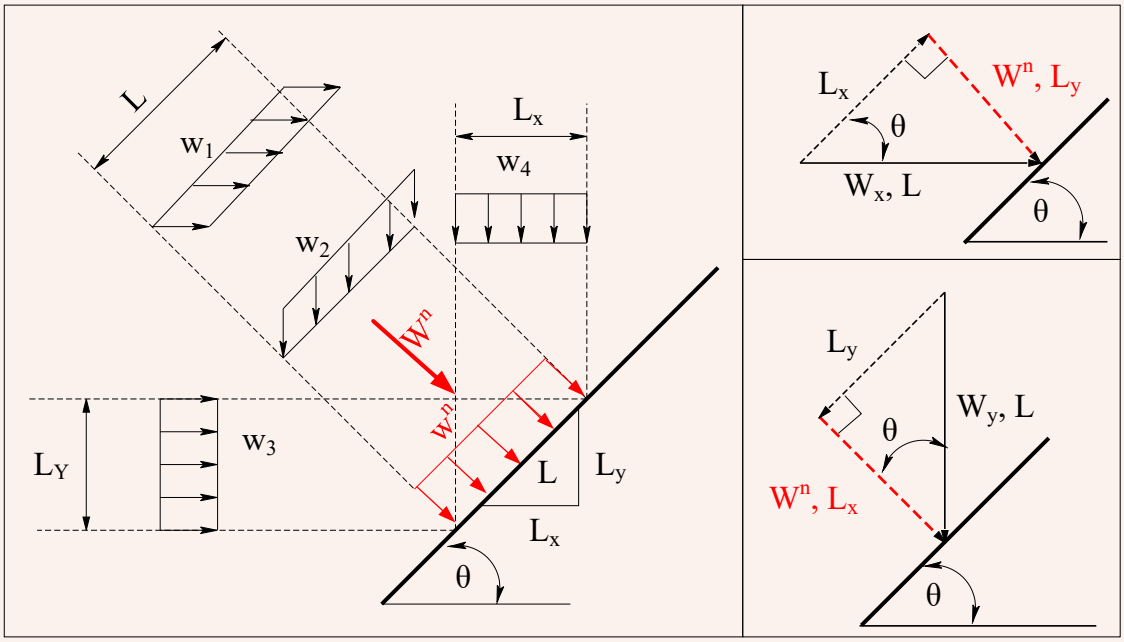


Figura 18.7: Carico proiettato

Lateral inertial force x	$W_1^x = w_1^x L;$	$W^n = W_1^x \frac{L_y}{L};$	$w^n = \frac{W^n}{L}$	$= w_1^x \frac{L_y}{L}$
Self weight y	$W_2^y = w_2^y L;$	$W^n = W_2^y \frac{L_x}{L};$	$w^n = \frac{W^n}{L}$	$= w_2^y \frac{L_x}{L}$
Wind Load	$W_3^x = w_3^x L_y;$	$W^n = W_3^x \frac{L_y}{L};$	$w^n = \frac{W^n}{L}$	$= w_3^x \frac{L_y^2}{L^2}$
Snow Load	$W_4^y = w_4^y L_x;$	$W^n = W_4^y \frac{L_x}{L};$	$w^n = \frac{W^n}{L}$	$= w_4^y \frac{L_x^2}{L^2}$

18.3.2 Posizionamento del carico

56 Il carico vivo, d'altra parte, può essere applicato o meno su un dato componente di una struttura. Pertanto, la disposizione di posizionamento del carico che ha portato alle forze interne più alte (momento +ve o -ve, taglio) in diverse posizioni deve essere considerata.

57 Per un semplice fascio, Fig. 18.8 LL1 massimizzerà il momento positivo al centro del fascio, mentre LL3 massimizzerà il momento negativo al giusto supporto.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

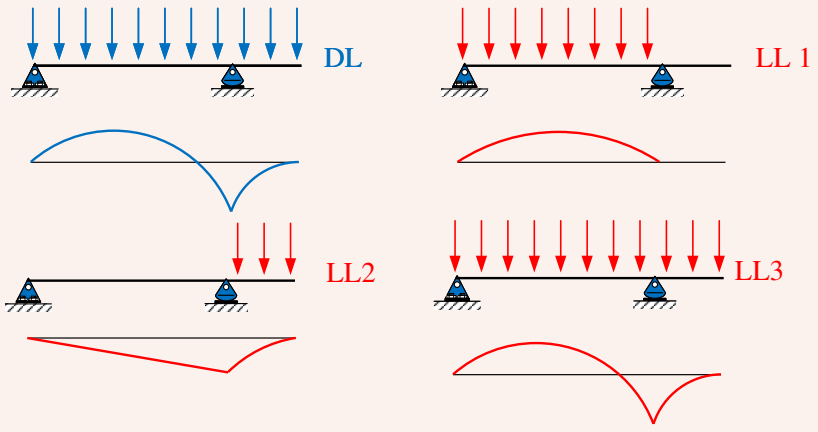


Figura 18.8: Posizionamento del carico per massimizzare i momenti

58 Il posizionamento dei carichi (live) è quindi una considerazione critica che influenza direttamente la sicurezza, la stabilità e le prestazioni di una struttura.

59 Il lettore dovrebbe consultare anche il Chap 28 che copre *Linee di influenza* che sono grafici che mostrano come la risposta (come forza di taglio, momento di piegatura o reazione) a un punto specifico in una struttura cambia mentre il carico unitario si muove attraverso la struttura.

18.3.3 Combinazioni di carico

60 La combinazione di carico in ingegneria strutturale è un aspetto cruciale del processo di progettazione che garantisce edifici e strutture sicure ed efficienti in varie condizioni di caricamento. Ciò comporta l'analisi degli effetti di diversi tipi di carichi che agiscono insieme, piuttosto che in isolamento, per garantire la struttura in grado di sopportare molteplici effetti di carico simultanei senza guasto.

61 L'obiettivo primario delle combinazioni di carico è quello di garantire la sicurezza strutturale. Considerando insieme più tipi di carico, gli ingegneri possono progettare strutture in grado di resistere a condizioni estreme, come l'insorgenza simultanea di carichi eolici e sismici o la combinazione di carichi morti e carichi vivi. Questo aiuta a prevenire guasti strutturali che potrebbero portare a danni di proprietà, lesioni o fatalità.

62 Le combinazioni di carico consentono agli ingegneri di progettare strutture economicamente senza sovraprogettare. Comprendendo come interagiscono i carichi diversi, gli ingegneri possono ottimizzare l'utilizzo dei materiali e selezionare le soluzioni più convenienti che soddisfano ancora i requisiti di sicurezza. Ciò contribuisce a ridurre i costi di costruzione complessivi mantenendo l'integrità strutturale.

63 Le combinazioni di carico aiutano gli ingegneri a anticipare il comportamento delle

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

strutture sotto scenari rari ma possibili, come la caduta pesante innevata combinata con venti forti o carichi di occupazione completi durante un terremoto. Questo è fondamentale per la progettazione di strutture in aree soggette a specifiche sfide ambientali.

64 Progettando per varie combinazioni di carico, le strutture non sono solo sicure per condizioni immediate ma anche costruite per sopportare cambiamenti e stress nel loro ciclo di vita. Ciò contribuisce alla longevità e alla durata della struttura, che è particolarmente importante negli edifici pubblici e nelle infrastrutture.

65 Le strutture spesso servono a molteplici scopi e devono ospitare diversi tipi di carichi durante il loro utilizzo. Ad esempio, un edificio multiuso potrebbe essere necessario per supportare diversi tipi d'occupazione, attrezzature o pesi di stoccaggio. Le combinazioni di carico assicurano che la struttura possa adattarsi a queste diverse esigenze senza compromettere la sicurezza.

66 I tipi comuni di combinazioni di carico includono:

- Caricamento morto + carico vivo
- Caricamento morto + carico del vento
- Carico morto + carico sismico
- Morto carico + carico neve
- Caricamento in tempo reale + carico eolico (per strutture come stadi dove occupazione e vento possono coincidere)

67 I carichi in tensione specificati dai codici rappresentano il massimo dei carichi possibili.

68 La probabilità di tutti questi carichi che si verificano simultaneamente è remota, quindi i codici edili consentono una certa riduzione quando alcuni carichi vengono combinati insieme.

69 Fare riferimento a §B.5 per maggiori dettagli.

18.3.4 Percorso di carico

70 Il concetto del percorso di carico è fondamentale nell'ingegneria strutturale, nella progettazione e nell'analisi.

71 Comprendere il percorso di carico comporta tracciare la rotta che i carichi prendono mentre si muovono dai loro punti di applicazione attraverso vari componenti strutturali fino a quando non vengono trasferiti in sicurezza al terreno.

72 Un percorso di carico deve essere continuo, questo significa che dal punto in cui viene applicato un carico, ci dev'essere una catena chiara e ininterrotta dei membri strutturali che portano questo carico alla fondazione e infine al terreno sottostante. Qualsiasi discontinuità nel percorso di carico può portare a guasti strutturali.

73 Il percorso di carico dovrebbe essere il più diretto e breve possibile, mentre i percorsi

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Zigzag o tortuosi possono portare ad una maggiore forza in alcune aree, creando concentrazioni di stress che possano indebolire l'integrità strutturale. I percorsi diretti aiutano a distribuire carichi più uniformemente e nel ridurre le probabilità di fallimento.

74 La ridondanza nei percorsi di carico assicura che se un percorso non riesce, il carico può essere ancora supportato da percorsi alternativi. *statically indeterminate*.

75 La corretta distribuzione dei carichi garantisce che nessun singolo elemento o connessione sia sovraccaricata. Ciò comporta la progettazione del sistema strutturale in modo tale che i carichi siano distribuiti il più possibile tra più membri strutturali, riducendo il rischio di guasti localizzati.

76 Un robusto percorso di carico può tollerare alcuni cambiamenti o guasti inaspettati senza un crollo catastrofico, che include la capacità di gestire sovraccarichi imprevisti o danni a parte della struttura. La robustezza di un percorso di carico è strettamente legata alla sua ridondanza e alla forza generale e duttilità dei materiali utilizzati.

77 Nelle strutture complesse, è essenziale che il percorso di carico segua una gerarchia di rigidità, il che significa che gli elementi più rigidi portano la maggior parte dei carichi. Questo aiuta a gestire come i carichi sono canalizzati attraverso la struttura, assicurando che gli elementi più flessibili o deboli non siano sottoposti ad un eccessivo stress.

78 Tutti i componenti del percorso di carico devono avere deformazioni compatibili, il che significa che dovrebbero deformarsi in modo che non compromette l'integrità dei componenti adiacenti. Questa compatibilità è fondamentale per mantenere la stabilità complessiva della struttura sotto carico.

79 Percorso di carico in una struttura si realizza attraverso una "gerarchia" di semplici elementi flessografici che sono poi collegati alle colonne, Fig. 18.9 o in due modi lastre come illustrato nella figura. 18.10.

80 Per una lastra semplicemente supportata su quattro supporti lineari, potremmo avere un'azione in modo o due se il rapporto a/b è più grande o più piccole di due rispettivamente, Fig. 18.10.

81 Mentre ci concentreremo sulla progettazione di una sezione in cemento armato o acciaio, dobbiamo tenere a mente quanto segue:

1. La sezione fa parte di un raggio o trave.
2. Il fascio o la trave è realmente parte di una struttura tridimensionale in cui il carico viene trasmesso da qualsiasi punto della struttura alla fondazione attraverso una qualsiasi delle varie forme strutturali.

82 Cattedrale antica (chap. 4Fico. 4.7) i massoni hanno una comprensione notevolmente sana dei meccanismi di trasferimento del carico, come illustrato nella figura. 18.11a. Il sistema strutturale di una cattedrale gotica si basa su un gioco di diversi elementi chiave che garantiscono collettivamente stabilità, consentendo ampi spazi aperti e finestre espansive:

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

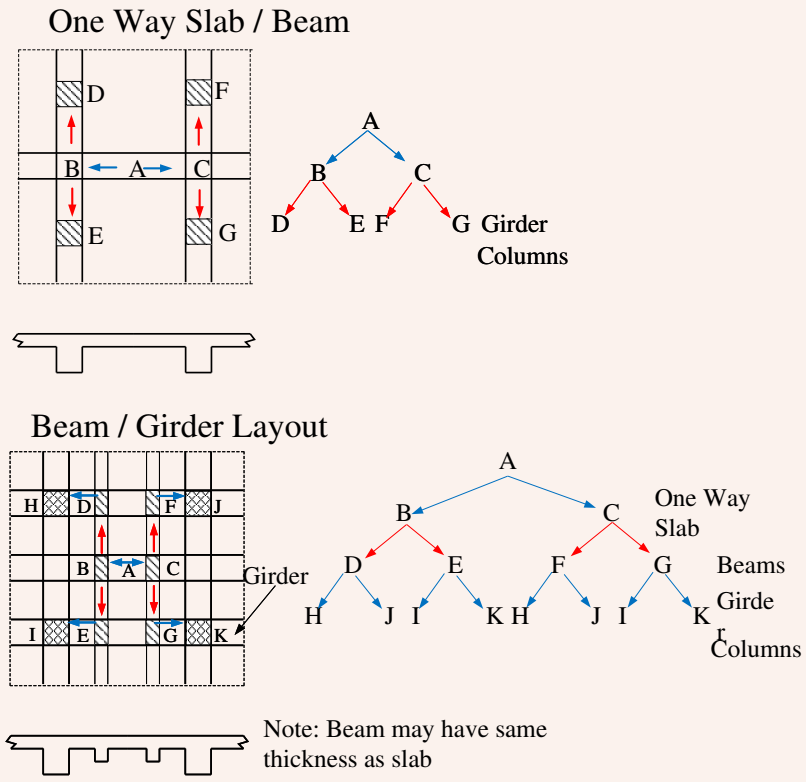


Figura 18.9: Trasferimento di carico negli edifici R/C

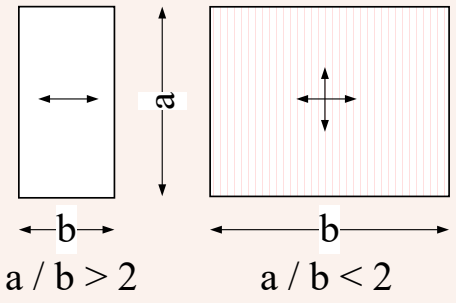


Figura 18.10: Azioni in una o due modalità nelle lastre

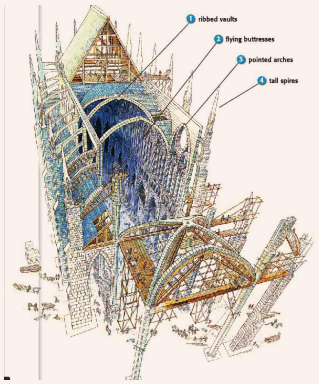
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

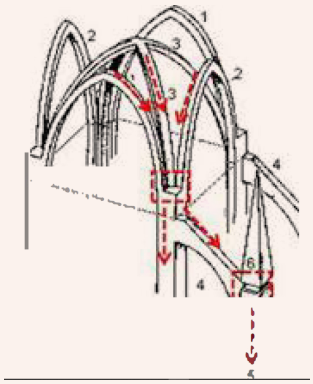
1. **Cuociture a costina** servire a sostenere il tetto canalizzando i carichi lungo linee predefinite—le costolette—che dirigeno le forze verso colonne e pilastri.Questo approccio scheletrico riduce la massa della volta e concentra i carichi su punti specifici.
2. **Matrici volanti** La spinta aumenta, mentre le volte diventano più appuntite (meno semicircolari). Le matresse volanti trasferiscono queste forze laterali lontano dalle pareti principali ai moli esterni, permettendo che le pareti siano aperte per grandi vetrate mantenendo la stabilità.
3. **Arco a punta** sono sia un'innovazione architettonica che strutturale, riducendo la spinta orizzontale rispetto agli archi semicircolari, consentendo strutture più alte e snelle. Architettonicamente, definiscono l'estetica gotica e permettono l'inserimento di grandi aperture finestra, massimizzando la luce interna.
4. **Spire e torri**, spesso situati sopra le contraffazioni o all'incrocio della cattedrale, servono un duplice scopo: prima trasferiscono carichi verticali direttamente a terra attraverso enormi moli. In secondo luogo, il loro peso fornisce forze di compressione stabilizzanti che contrastano le tensioni traslitte che si sviluppano nelle matresse volanti e negli archi sotto carichi laterali. Questo effetto stabilizzante è concettualmente simile ai piloni ponderati in ponti ad arco, come il Pont Alexandre III a Parigi, Fig. 18.11d, dove la spinta laterale è presa da enormi pilastri (sottofondo) e l'aggiunta delle torri minimizzano le tensioni di trazione causate dalla flessione indotta.

COPIA DI REVISIONE

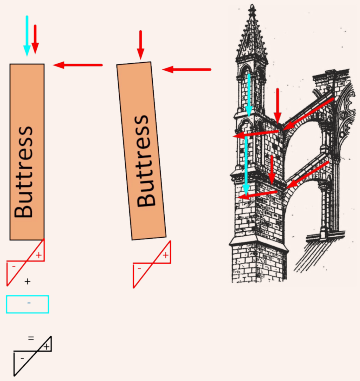
I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Cattedrale gotica



(b) Trasferimento di carico



(c) Stresse in fondo al matrimonio



(d) Ponte Alexandre III

Figura 18.11: Meccanismi di trasferimento del carico nelle cattedrali gotiche e archi poco profondi

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

18.3.5 Aree di tributo

83 Spesso abbiamo bisogno di un modo semplificato per assegnare il carico associato ad un elemento strutturale senza la necessità di una complessa analisi, dove utilizziamo il concetto di *area tributaria*.

84 L'area tributaria è definita come la regione di una struttura che trasferisce i suoi carichi (carico morto, carichi vivi, carichi di neve, ecc.) a un componente strutturale specifico. Questa zona è tipicamente delimitata dai punti intermedi o dalle linee centrali tra i membri strutturali adiacenti o dai confini della struttura stessa. Ecco come si applica generalmente ai diversi componenti strutturali, Fig. 18.12:

- **Le api.** L'area tributaria per un fascio è la zona di pavimento o tetto che si carica sul raggio. Per un fascio che supporta una lastra di sola andata, l'area tributaria è spesso calcolata come la larghezza della lastra tra i centri delle travi adiacenti moltiplicate per il raggio.

Colonne: Per una colonna, l'area tributaria è la superficie del pavimento sostenuta dalla colonna. Questa zona è determinata dividendo il piano in regioni basate sui medi punti tra colonne. Ogni colonna supporta l'area intorno a esso fino al punto intermedio tra essa e le colonne adiacenti.

Piano di appoggio: Nel caso di una lastra che supporta carichi direttamente, come nella costruzione residenziale, l'area tributaria potrebbe essere l'intera superficie del pavimento se la lastra si estende da parete a muro.

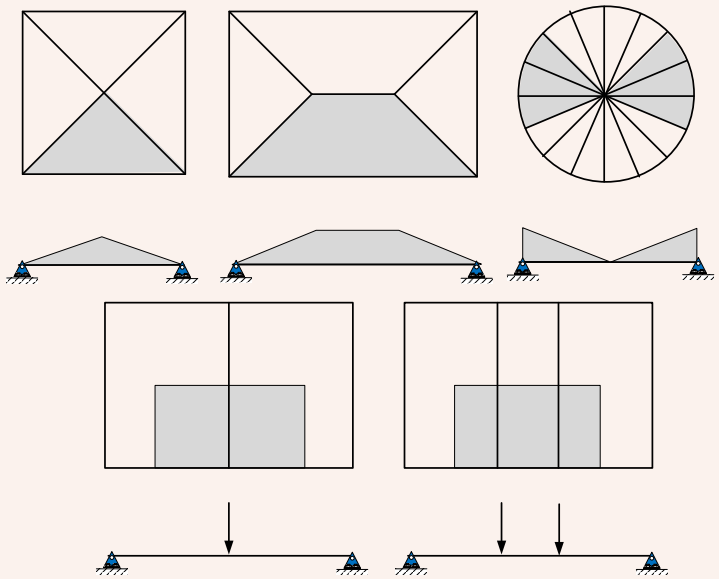


Figura 18.12: Concetto di aree tributarie per il carico dei membri strutturali

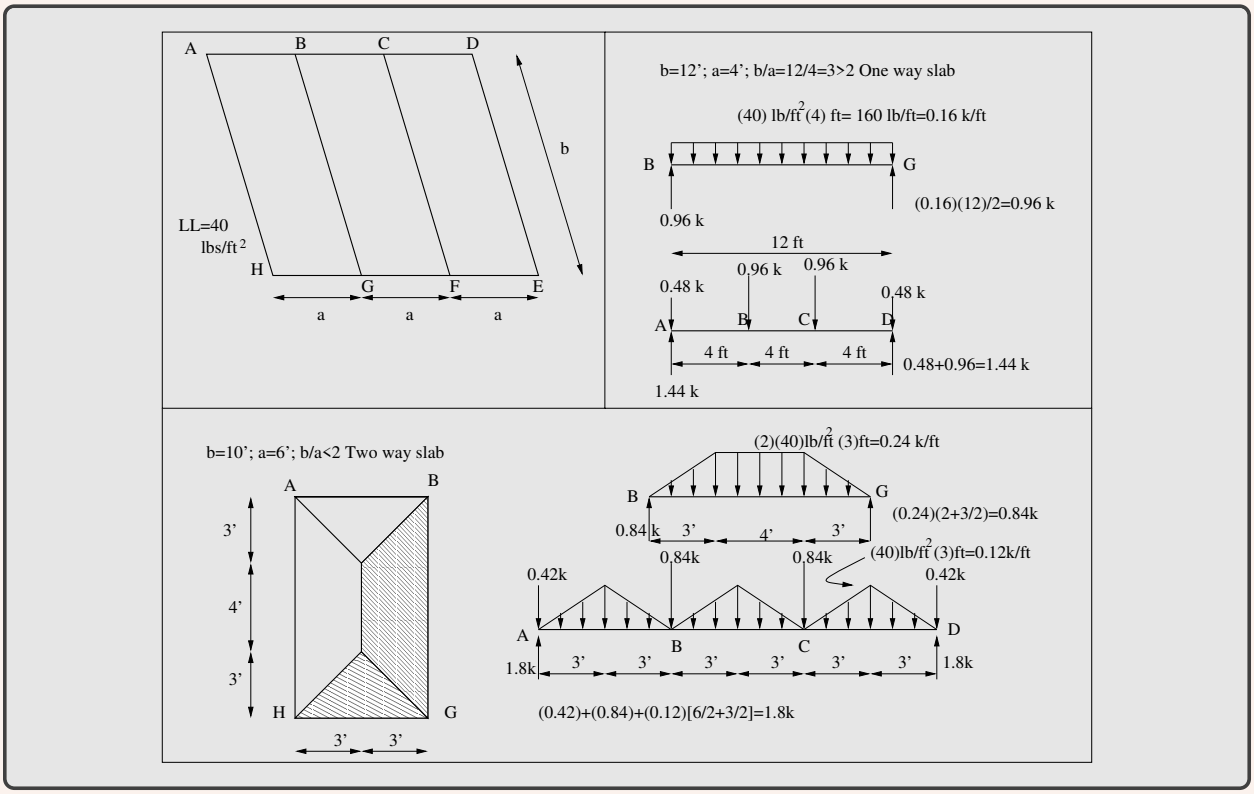
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

85 La determinazione delle zone di affluenza nelle lastre è analoga all'identificazione delle linee di rendimento corrispondenti, Fig. 57.1.

86 Esempio di calcolo dell'area tributaria è dato in §19.2.2.

18.3.5.1 Ex 18.3: Aree di tributo



18.3.6 Ricorso strutturale

87 Concludiamo questo capitolo esaminando il ruolo dei singoli tipi di carichi sulla risposta strutturale, Fig. 18.13.

88 I carichi di servizio, che in genere includono carichi morti e vivi, dovrebbero mantenere la risposta strutturale bene all'interno della gamma elastica lineare.

89 Con carichi insoliti, come i venti alti o l'attività sismica, è accettabile flirtare con la risposta di plastica.

90 La gamma di materie plastiche dovrebbe essere solo in circostanze eccezionali, come durante un forte terremoto, che può effettivamente causare danni permanenti, ma la struttura sarà ancora in piedi, vite salvate. *Ingegneria basata sulle prestazioni*, Capitolo 72.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

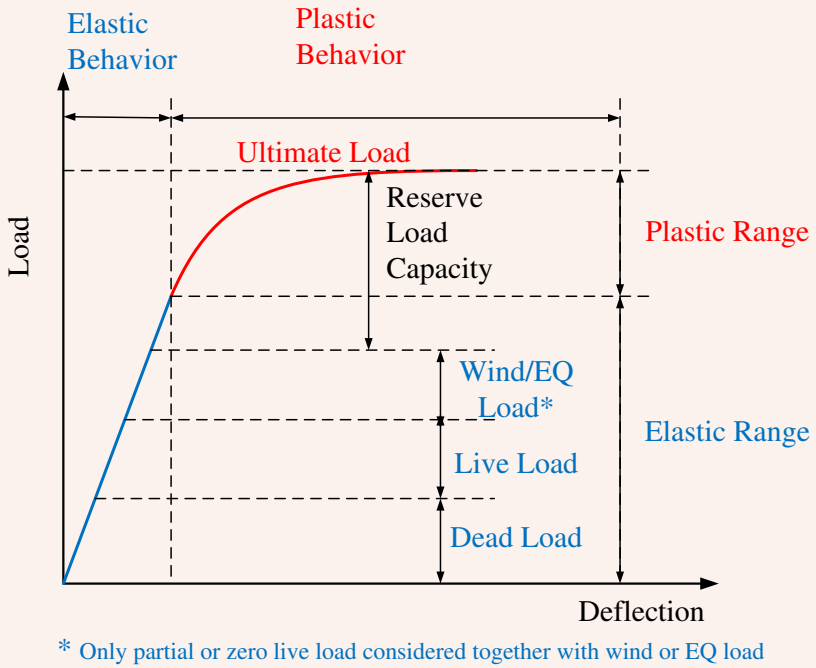


Figura 18.13: Vita di carico di una struttura, (Lin e Stotesbury, 1981)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Atlante Farnese Titan Atlas che porta la sfera celeste, è una potente rappresentazione di carichi e distribuzione della forza

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

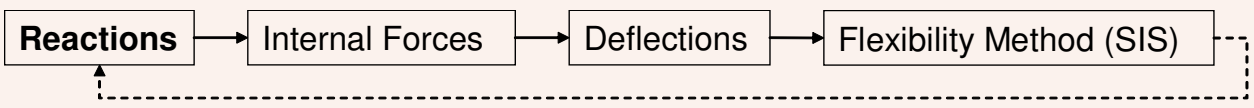
Capitolo 19

Reazioni

Abstract

Le reazioni costituiscono il segmento finale di un percorso di carico e hanno quindi implicazioni significative per la progettazione delle basi. La determinazione delle reazioni può anche semplificare il calcolo delle forze interne (sezione capitolo). Questo capitolo ha pochissime meccaniche che vanno sottoposte a diverse equazioni di equilibrio, da adattare con attenzione alla struttura specifica in esame. La prima sezione di questo capitolo affronta diversi argomenti apparentemente non correlati; tuttavia, questi forniscono collettivamente spunti cruciali che facilitano la determinazione delle reazioni. La seconda sezione presenta una varietà di esempi, progrediti in complessità, per illustrare questi concetti nella pratica. Infine, come dimostrato nella seguente illustrazione, la determinazione delle reazioni è il primo passo per risolvere strutture staticamente indeterminate utilizzando il metodo di flessibilità .

19.1 Introduzione 903
19.1.1 Tipi di supporti 903
19.1.2 Equilibrio 904
19.1.3 Equazioni delle condizioni . 906
19.1.4 Determinazione statica . . . 906
19.1.5 Instabilità geometrica 907
19.1.6 Gratuiti diagrammi del corpo 908
19.2 Esempi 909
19.2.1 Ex 19.1: Carico idrostatico . 909
19.2.2 Ex 19.2: Trasferimento di carico 910
19.2.3 Ex 19.3: Semplicemente supportato 910
19.2.4 Ex 19.4: Carico parabolico . 911
19.2.5 Ex 19.5: Tre raggi di larghezza 912
19.2.6 Ex 19.6: Telaio a tre cerniere 913
19.2.7 Ex 19.7: Supporti incline . . 915
19.2.8 Ex 19.8: Struttura di rettifica 916
19.2.9 Ex 19.9: equilibrio aereo . . . 917
19.2.10 Ex 19.10: Barriera Jumbo . . 918
19.2.11 Ex 19.11: Rankine: Equilibrio di un corpo galleggiante (prove idrostatiche) 921
19.2.12 Ex 19.12: Palazzetto dello sport; nervi 923



COPIA DI REVISIONE

19.1 Introduzione

1 Sebbene riconosciuto come una delle nozioni fondamentali e primordiali della fisica, il concetto di forza non era realmente compreso storicamente (Capitolo 14).

2 Ci sono tre tipi di forze:

Carico sono quantità vettoriali esterne su una struttura in modo concentrato o distribuito, che sono forze o momenti. I carichi vengono discussi dettagliatamente nel capitolo 18.

Reazioni sono le forze esercitate sulla struttura (caricata) dai supporti, generalmente ignote e devono essere determinate prima che possano essere determinate le forze interne. Si noti che spesso si sbaglia la terza legge di Newton *Per ogni azione, c'è una reazione uguale e opposta* prevede un equilibrio di due forze, l'azione e la reazione uguali ed opposte; ma la legge dice che se un corpo A esercita una forza F_a sul corpo B, allora il corpo B esercita una forza uguale e opposta F_b sul corpo A. Non c'è equilibrio perché le forze F_a e F_b sono esercitati su corpi diversi, uno sul corpo A e l'altro sul corpo B.

Forze interne sono forze sulle sezioni interne di una struttura necessaria per mantenere qualsiasi parte della struttura in equilibrio, che saranno affrontate nel capitolo 21.

19.1.1 Tipi di supporti

3 Nell'analisi delle strutture (calcolazioni a mano), è spesso più facile (ma non sempre necessario) iniziare determinando le reazioni.

4 Una volta che le reazioni sono determinate, le forze interne vengono definite in seguito; infine, le deformazioni (difetture e rotazioni) sono determinate duramente.[1].

5 Le reazioni sono necessarie per determinare il carico di fondazione.

6 A seconda del tipo di strutture, ci possono essere diversi tipi di condizioni di supporto, Fig. 19.1.

Rullo: fornisce un restringimento in una sola direzione in una struttura 2D, in strutture 3D un rullo può fornire il restringimento in una o due direzioni. Un rullo permette la rotazione.

Cerniera: consente la rotazione ma non spostamenti. Alcune cerniere, permettono la traduzione verticale ma nessuna rotazione.

Supporto fisso: impedirà la rotazione e gli spostamenti in tutte le direzioni.

[1]Questa è la sequenza delle operazioni nel metodo di flessibilità che si presta al calcolo della mano. Nel metodo di rigidità, determinamo prima le posizioni di spostamento, poi forze interne e reazioni. Questo metodo è più adatto per l'implementazione del computer.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

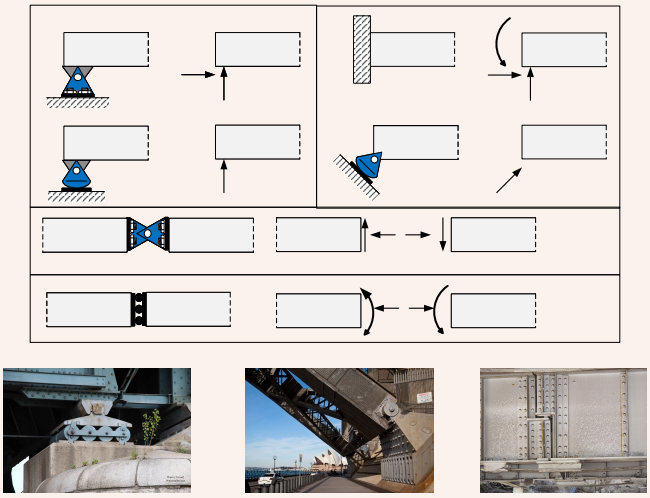


Figura 19.1: Esempi di confini delle reazioni

Questi sono i supporti comuni, molte altre combinazioni sono possibili per le strutture 3D.

19.1.2 Equilibrio

Le reazioni sono determinate dalle equazioni appropriate dell'equilibrio statico.

Summazione di forze e momenti, in un sistema statico deve essere uguale a zero[2].

In un sistema di coordinate cartesian 3D ci sono 6 equazioni indipendenti di equilibrio:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = \Sigma F_y = \quad & \Sigma F_z = 0 \\ \Sigma M_x = \Sigma M_y = \quad & \Sigma M_z = 0 \end{aligned}$$

Non tutte le equazioni sono applicabili a tutte le strutture. Equilibrio equazione per ogni tipo di struttura sono

[2] In un sistema dinamico $\Sigma F = ma$ dove m è la massa e a è l'accelerazione.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Definition 19.1: Equazioni di equilibrio

Tipo di struttura	Equazioni					
	Forze			Momenti		
	x	y	z	x	y	z
Beam, nessuna forza assiale		ΣF_y				ΣM_z
Griglia			ΣF_z	ΣM_x	ΣM_y	
3D Truss, Cornice	ΣF_x	ΣF_y	ΣF_z	ΣM_x	ΣM_y	ΣM_z
Set alternativo						
- Beams, nessuna forza assiale.						ΣM_z^A; ΣM_z^B
2 D Truss, Cornice, Trave	ΣF_x					ΣM_z^A ΣM_z^B
				ΣM_z^A	ΣM_z^B	ΣM_z^C

11 Per i calcoli di reazione, il carico applicato esternamente può essere ridotto a una forza equivalente; tuttavia, per le forze interne (serba e momento) dobbiamo usare la distribuzione effettiva del carico.

12 Summazione dei momenti può essere presa rispetto a qualsiasi punto arbitrario.

13 Mentre le forze sono rappresentate da un vettore, i momenti sono anche quantità vettoriali e sono rappresentati da una freccia curva o da un vettoriale a doppia freccia.

14 È sempre preferibile controllare i calcoli da un'altra equazione di equilibrio.

- Prima di scrivere un'equazione d'equilibrio,

  1. Arbitrariamente decidere quale è il **+ve** direzione
  2. Assumere una direzione per le quantità sconosciute
  3. Il lato destro dell'equazione dovrebbe essere zero

  Se la vostra reazione è negativa, allora sarà in una direzione opposta da quella assunta.
- La summazione delle forze esterne è uguale e opposta a quelle interne, quindi la forza netta/momento è pari allo zero.

15 Equilibrio dei momenti, è stato considerato da Leonardo (Da Vinci, 1490 PDF) (follio 94) e di Alexander Carder nei suoi iconici cellulari Fig. 19.2.

16 Come nota laterale, e come già menzionato in §6.6.7, si crede spesso erroneamente che la terza legge di Newton "per ogni azione, c'è una reazione uguale ed opposta" prevede un equilibrio di due forze, l'azione e la reazione uguali e opposti. Ma la legge dice che se un corpo A esercita una forza F_a sul corpo B, poi corpo B esercita una forza uguale e opposta

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

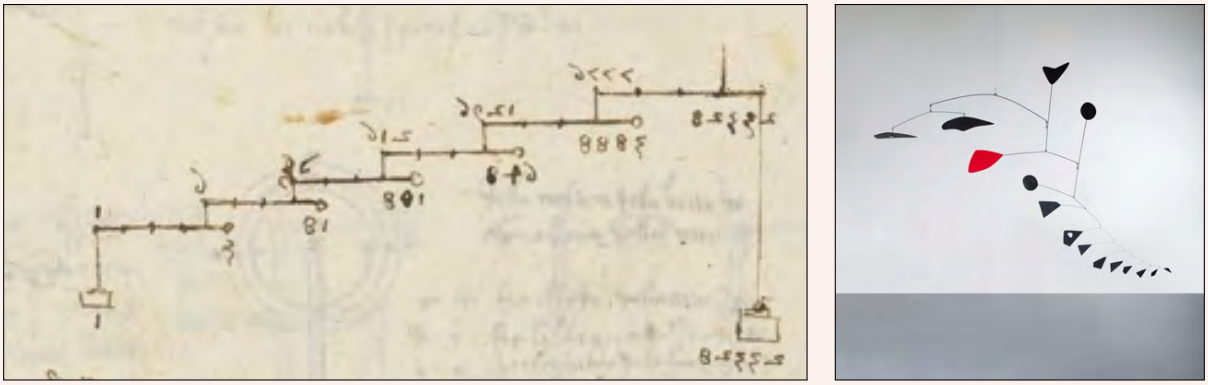


Figura 19.2: Equilibrio di momenti, da leonardo (Da Vinci, 1490)a Calder

F_b sul corpo A. Non c'è equilibrio perché le forze F_a e F_b sono esercitati su corpi diversi, uno sul corpo A e l'altro sul corpo B (Cohen, 2002).

17 Un ricordo del teorema di Varignon §14.5.14: *La somma dei momenti di diverse forze concorrenti su un punto è pari al momento del risultante di quelle forze, o alternativamente, il momento di una forza circa un punto equivale alla somma dei tempi delle sue componenti.*

19.1.3 Equazioni delle condizioni

18 Se una struttura ha un cerniera interna (che può collegare due o più sottostrutture), allora questo fornirà un'equazione aggiuntiva ($\Sigma M = 0$ alla cerniera) che può essere sfruttata per determinare le reazioni.

19 Queste equazioni sono spesso sfruttate nelle capriate (dove ogni connessione è una cerniera) per determinare le reazioni.

20 In un supporto inclinato a rulli con S_x e S_y proiezione orizzontale e verticale, quindi la reazione R avrebbe, figura 19.3

$$\frac{R_x}{R_y} = \frac{S_y}{S_x}$$

19.1.4 Determinazione statica

Per il contesto storico, consultare §11.4.6

21 In strutture staticamente determinate, le reazioni dipendono solo dalla geometria, dalle condizioni di confine e dai carichi.

22 Nella letteratura non anglosassone, ci riferiamo a strutture staticamente determinate e statualmente indeterminate attraverso i termini più eleganti di *isostatica* e *iperstatico* rispettivamente.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

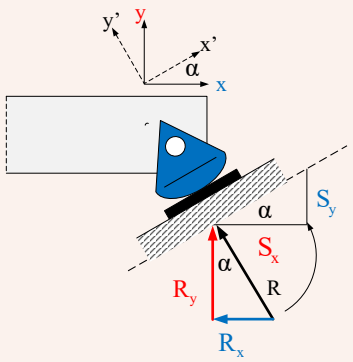


Figura 19.3: Inclinea le reazioni di supporto del rullo

23 Se le reazioni non possono essere determinate semplicemente dalle equazioni dell'equilibrio statico (e delle equazione di condizioni se presenti), allora si dice che le reazioni della struttura siano staticamente indeterminate (o iperstatiche).

24 Il grado di indeterminanza statica è uguale alla differenza tra il numero delle reazioni e il numero di equazioni di equilibrio, figura 19.4

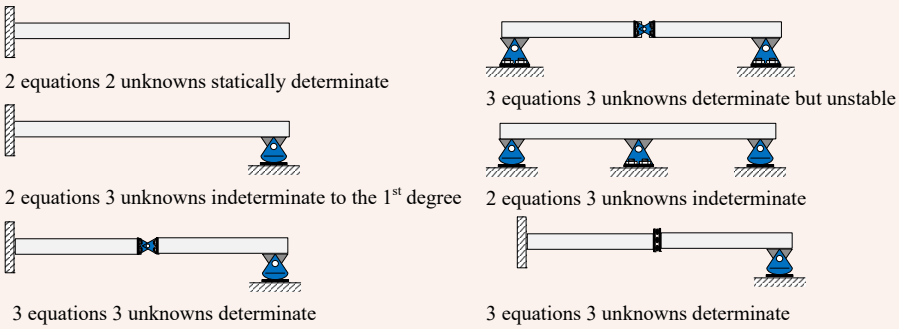


Figura 19.4: Grado di indeterminanza statica

25 Il fallimento di un supporto in un sistema staticamente determinato provoca il crollo delle strutture, quindi una struttura staticamente indeterminata è più sicura di quella statisticamente determinata.

26 Per strutture staticamente indeterminate, le reazioni dipendono anche dalle proprietà materiali (ad esempio, il modulo di Young e/o shear) e le sezioni trasversali degli elementi (per esempio lunghezza, area, momento dell'inerzia).

19.1.5 Instabilità geometrica

27 Instabilità geometrica si verificherà se:

COPIA DI REVISIONE

1. Tutti *reazioni sono parallele* e un carico non-parallelo viene applicato alla struttura.
2. Tutti *le reazioni sono concomitanti* come la figura 19.5

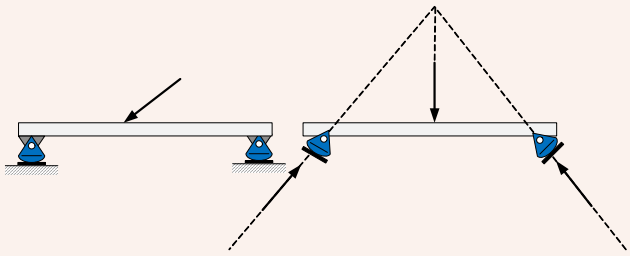


Figura 19.5: Le reazioni sono concomitanti

3. Il numero di reazioni è più piccolo che il numero di equazioni di equilibrio, cioè meccanismo è presente nella struttura.

28 Matematicamente, questo può essere mostrato se il determinante delle equazioni di equilibrio è pari a zero (o le equazione sono interdipendenti).

19.1.6 Gratuiti diagrammi del corpo

Definition 19.2: Diagramma corpo libero

I diagrammi del corpo libero sono dei diagrammi utilizzati per mostrare la magnitudine relativa e la direzione di tutte le forze/momenti che agiscono su un oggetto in una determinata situazione.

29 I diagrammi corporei liberi sono costituiti da:

1. Una versione semplificata del corpo
2. Forze indicate come frecce diritte che puntano nella direzione che agiscono sul corpo, i momenti sono mostrati come curve con una testa freccia o un vettore con due teste di freccia che indicano la direzione che agiscono sul corpo
3. Uno o più sistemi di coordinate di riferimento
4. Convenzione (anche se non sempre seguita), le reazioni alle forze applicate sono mostrate con segni di hash attraverso il gambo del vettore

30 Il numero di forze e momenti mostrati dipende dal problema specifico e dalle ipotesi fatte.

31 Tutte le forze e i momenti devono bilanciarsi a zero.

32 I diagrammi corporei liberi non rappresentano necessariamente un intero corpo fisico.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Le porte di un corpo possono essere selezionate per l'analisi, permettendo il calcolo delle forze interne, facendole apparire esterne, consentendo analisi. Questo può essere utilizzato più volte per calcolare le forze interne in diverse posizioni all'interno di un corpo fisico.

33 Il diagramma del corpo libero di fascio sottoposto a diversi tipi di carico è mostrato in Fig. 19.6.

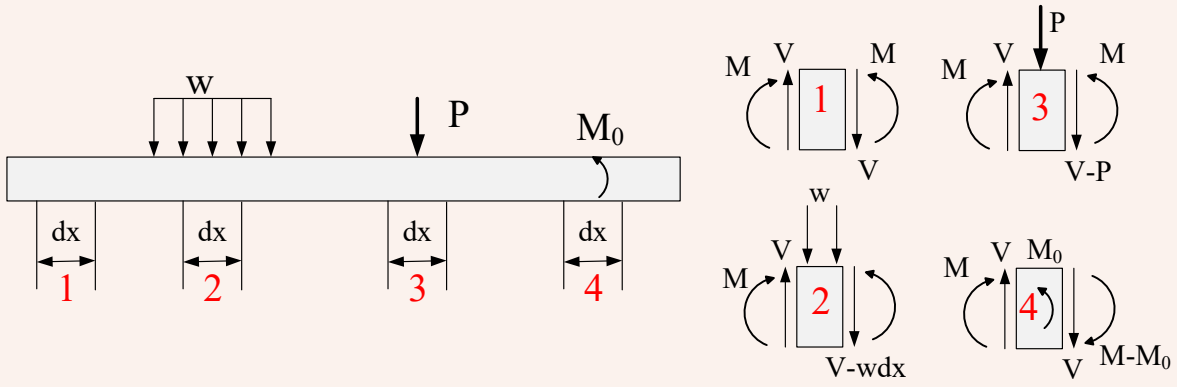


Figura 19.6: Gratuiti diagrammi corporei di un fascio sottoposto a carichi diversi

34 Nella maggior parte dei problemi, il FBD è disegnato sulla base della forma non deformata; per alcuni problemi (che coinvolgono la non linearità geometrica) l'FBD deve essere disegnato in base alla forma deforme (§29), specialmente se si verifica un po' di instabilità (§19.1.5).

19.2 Esempi

19.2.1 Ex 19.1: Carico idrostatico

Il seminterrato di un edificio è 12 ft sotto grado. L'acqua di terra si trova 9 piedi sotto grado, quale spessore lastra di cemento è necessario per bilanciare esattamente il sollevamento idrostatico? La pressione idrostatica deve essere compensata dalla pressione causata dal peso del cemento. $p = \gamma h$ equatiamo le due pressioni e risolviamo per h l'altezza della lastra di cemento

$$\underbrace{(62.4)\ \text{lbs/ft}^3 \times (12-9)\ \text{ft}}_{\text{water}} = \underbrace{(150)\ \text{lbs/ft}^3 \times h}_{\text{concrete}}$$

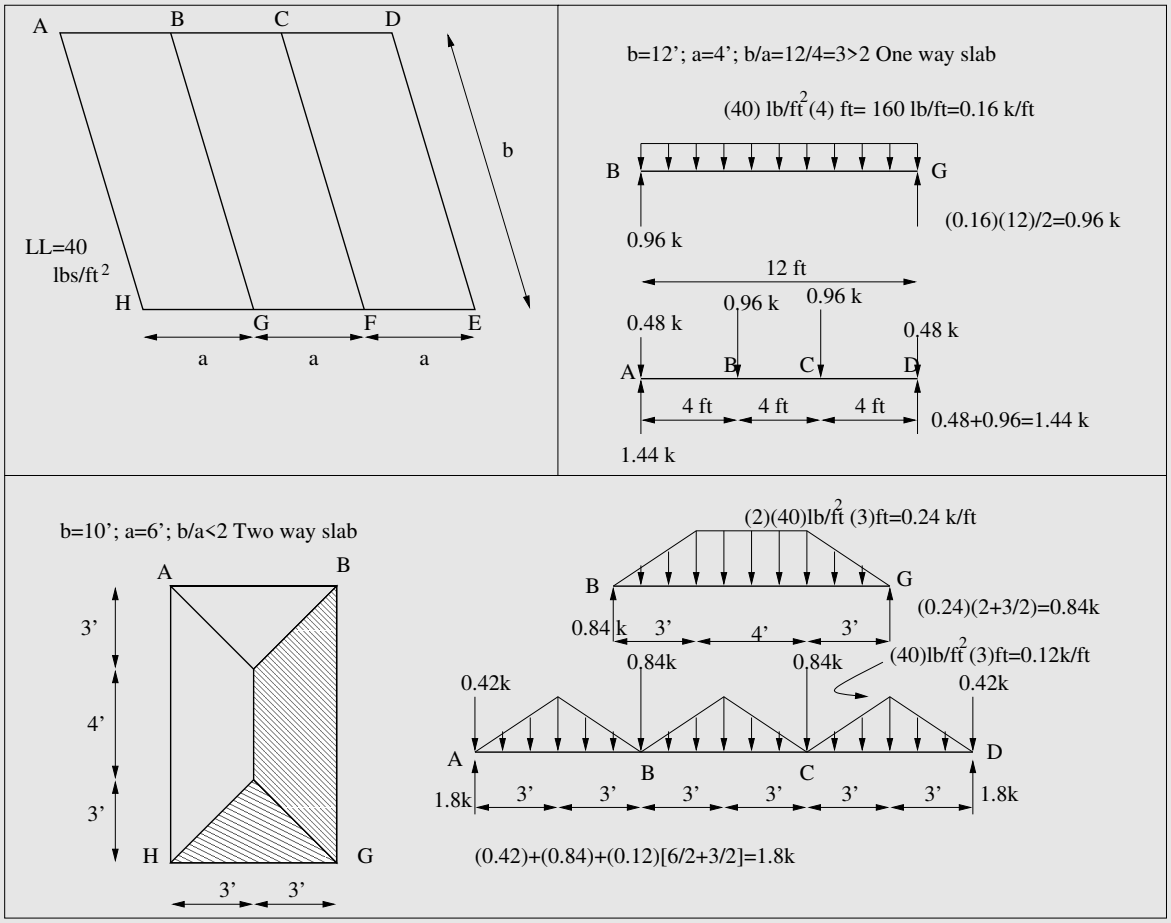
$$\Rightarrow h = \frac{(62.4)\ \text{lbs/ft}^3}{(150)\ \text{lbs/ft}^3}(3)\ \text{ft}(12)\ \text{in/ft} = 14.976\ \text{in} \simeq \boxed{15.0\ \text{inch}}$$

COPIA DI REVISIONE

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

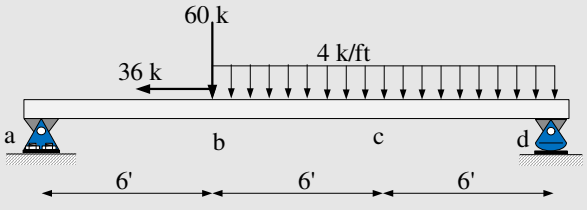
19.2.2 Ex 19.2: Trasferimento di carico

Un semplice esempio di trasferimento del carico è auto contenuto nella figura seguente.



19.2.3 Ex 19.3: Semplicemente supportato

Determinare le reazioni del fascio di seguito semplicemente sostenuto.



COPIA DI REVISIONE

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Il fascio ha 3 reazioni, abbiamo 3 equazioni di equilibrio statico, quindi è staticamente determinata.

$$\begin{aligned}(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0;\Rightarrow \quad & R_{ax} - 36\ \text{k} = 0\\ (+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0;\Rightarrow \quad & R_{ay} + R_{dy} - 60\ \text{k} - (4)\ \text{k/ft}(12)\ \text{ft} = 0\\ (+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^c = 0;\Rightarrow \quad & 12R_{ay} - 6R_{dy} - (60)(6) = 0\end{aligned}$$

or

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 12 & -6\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}R_{ax}\\ R_{ay}\\ R_{dy}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}36\\ 108\\ 360\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix}R_{ax}\\ R_{ay}\\ R_{dy}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}36\ \text{k}\\ 56\ \text{k}\\ 52\ \text{k}\end{Bmatrix}$$

In alternativa, avremmo potuto usare un altro insieme di equazioni:

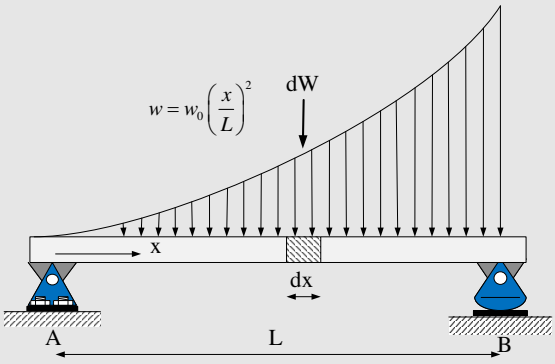
$$\begin{aligned}(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^a = 0; \quad (60)(6) + (48)(12) - (R_{dy})(18) = 0 \quad &\Rightarrow \quad R_{dy} = 52\ \text{k}\uparrow\\ (+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^d = 0; \quad (R_{ay})(18) - (60)(12) - (48)(6) = 0 \quad &\Rightarrow \quad R_{ay} = 56\ \text{k}\uparrow\end{aligned}$$

Check:

$$(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; 56 + 52 - 60 - 48 = 0\checkmark$$

19.2.4 Ex 19.4: Carico parabolico

Determinare le reazioni di un raggio di lunghezza semplicemente sostenuto L sottoposto a carico parabolico $w = w_0\left(\frac{x}{L}\right)^2$



COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Ci sono due sconosciute e due equazioni di equilibrio (ΣF_y e ΣM), si comincia con la seconda, in quanto ci darebbe direttamente la reazione B Considerare un elemento infinitesimale di lunghezza dx, peso dW, e il momento dM:

$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_z^A = 0; \underbrace{\underbrace{\underbrace{\int_{x=0}^{x=L} \underbrace{w_0 \left(\frac{x}{L}\right)^2}_{w}\, dx}_{dW} \times x}_{dM} - (R_B)(L)}_{M} = 0$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{1}{L} w_0 \left(\frac{L^4}{4L^2}\right) = \frac{1}{4} w_0 L$$

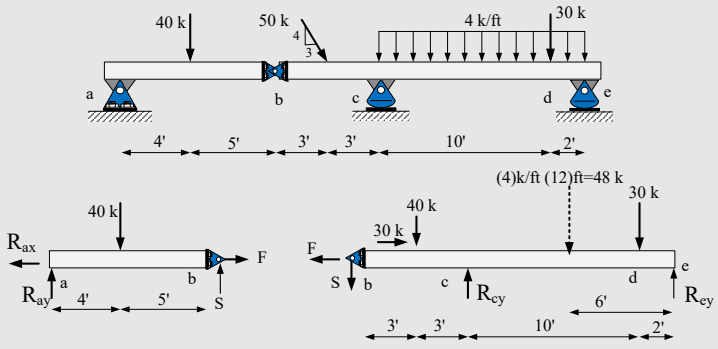
Con R_B determinato, risolviamo per R_A da

$$(+\uparrow)\ \Sigma F_y = 0; R_A + \underbrace{\frac{1}{4} w_0 L}_{R_b} - \int_{x=0}^{x=L} w_0 \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{w_0}{L^2}\frac{L^3}{3} - \frac{1}{4} w_0 L = \frac{1}{12} w_0 L$$

19.2.5 Ex 19.5: Tre raggi di larghezza

Determinare le reazioni per il raggio di tre campate seguente.



4 sconosciuti (R_{ax}, R_{ay}, R_{cy} e R_{ey}), tre equazioni di equilibrio e una equazione di condizione ($\Sigma M_b = 0$), quindi la struttura è staticamente determinato. Anche se ci sono molti approcci per risolvere i quattro sconosciuti (tutti corretti), alcuni sono più semplici. In questo caso, è più facile da pausa la struttura

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

in due sottostrutture, e esaminare il diagramma corpo libero di ciascuno di loro separatamente. Isolamento ab:

$$(+\circlearrowright)\,\Sigma M_z^b = 0; (9)(R_{ay}) - (40)(5) = 0 \qquad \Rightarrow R_{Ay} = 22.2 \text{ k} \uparrow$$
$$(+\circlearrowright)\,\Sigma M_z^a = 0; (40)(4) - (S)(9) = 0 \qquad \Rightarrow S = 17.7 \text{ k} \uparrow$$
$$\Sigma F_x = 0; \qquad \Rightarrow R_{ax} = 30 \text{ k} \leftarrow$$

Isolamento:

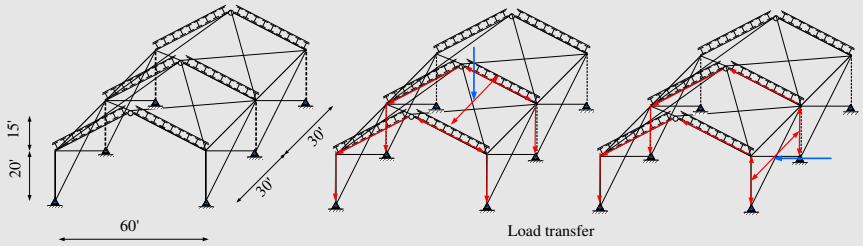
$$(+\circlearrowright)\,\Sigma M_z^e = 0;$$
$$-(17.7)(18) - (40)(15) - (4)(12)(6) - (30)(2) + R_{cy}(12) = 0$$
$$\Rightarrow R_{cy} = \frac{1,266.6}{12} = 105.6 \text{ k} \uparrow$$
$$(+\circlearrowright)\,\Sigma M_z^c = 0;$$
$$-(17.7)(6) - (40)(3) + (4)(12)(6) + (30)(10) - R_{ey}(12) = 0$$
$$\Rightarrow R_{ey} = \frac{361.8}{12} = 30.15 \text{ k} \uparrow$$

Check

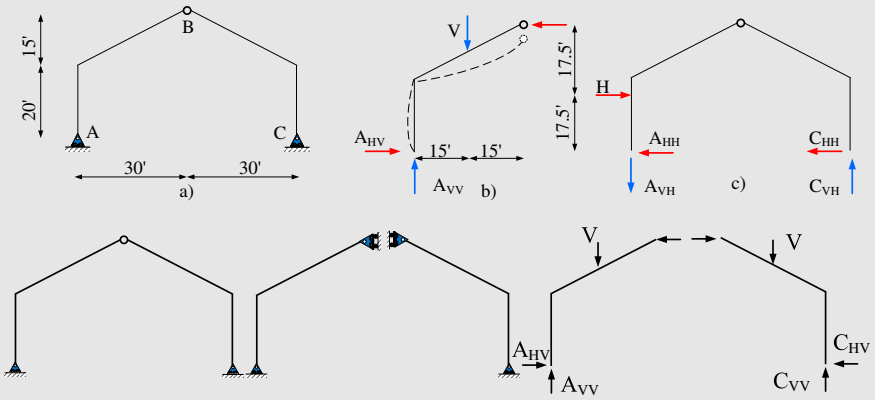
$$\Sigma F_y = 0; \uparrow; 22.2 - 40 - 40 + 105.6 - 4(12) - 30 + 30.15 = -0.050 \simeq 0. \checkmark$$

19.2.6 Ex 19.6: Telaio a tre cerniere

Per le cornici a tre assi posizionate 30 piedi sul centro, determinare i componenti delle reazioni sul telaio a causa di: 1) tetto carico morto, di 20 psf di area del tetto; 2) Carico di neve, di 30 psf di proiezione orizzontale; 3) Carico del vento 15 psf di proiezione verticale. Determinare la valori critici di progettazione per le reazioni verticali e orizzontali.



COPIA DI REVISIONE



A causa della simmetria, non c'è forza verticale trasmessa dalla cerniera per la neve e il carico morto, e quindi possiamo considerare solo il lato sinistro (o destro) del telaio. Carico equivalente punto:

1. Tetto di carico morto per un lato del telaio è

$$DL = (20)\ \text{psf}(30)\ \text{ft}\left(\sqrt{30^2+15^2}\right)\ \text{ft}\frac{1}{1,000}\ \text{lbs/k} = 20.2\ \text{k}\downarrow$$

2. Carico di neve per un lato del telaio è

$$SL = (30)\ \text{psf}(30)\ \text{ft}(30)\ \text{ft}\frac{1}{1,000}\ \text{lbs/k} = 27.\ \text{k}\downarrow$$

3. Carico del vento per frame (ignorando l'aspirazione) è

$$WL = (15)\ \text{psf}(30)\ \text{ft}(20+15)\ \text{ft}\frac{1}{1,000}\ \text{lbs/k} = 15.75\ \text{k}\rightarrow$$

Ci sono 4 reazioni, 3 equazioni di equilibrio e una equazione di condizione $\Rightarrow$ staticamente determinato. In alternativa, di simmetria non c'è alcuna cesoia alla cerniera C, e avremmo per la sottostruttura due reazioni al supporto e una (orizzontale) alla cerniera. Relazione tra le reazioni orizzontali e verticali A a causa di un carico verticale centralizzato, A_{HV} e A_{VV} rispettivamente è determinato prendendo momento rispetto alla cerniera (b):

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} (+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^B &=& 0; & 15V - 30A_{VV} + 35A_{HV} &=& 0 \\ (+\uparrow)\,\Sigma F_y &=& 0; & A_{VV} - V &=& 0; \end{array}\right\} \begin{array}{rcl} A_{HV} &=& \frac{15A_{VV}}{35} \\ &=& .429A_{VV} \end{array}$$

Sostituire per il tetto morto e carico di neve otteniamo

$$\begin{aligned} A_{VV}^{DL} = C_{VV}^{DL} &= && 20.2\ \text{k}\uparrow \\ A_{HV}^{DL} = C_{HV}^{DL} &= (.429)(20.2) && = 8.66\ \text{k}\rightarrow \\ A_{VV}^{SL} = C_{VV}^{SL} &= && 27.\ \text{k}\uparrow \\ A_{HV}^{SL} = C_{HV}^{SL} &= (.429)(27.) && = 11.58\ \text{k}\rightarrow \end{aligned}$$

Le reazioni dovute al carico del vento (salito da sinistra), sono determinate come segue:

COPIA DI REVISIONE

1. Reazione verticale a A è determinato considerando l'intera struttura e prendendo il momento rispetto a C, (c)

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^C = 0; (15.75)(\frac{20+15}{2}) - 60A_{VH} = 0 \qquad \Rightarrow A_{VH} = 4.60 \text{ k} \uparrow$$

   A_{VH} è la reazione verticale a A a causa del carico orizzontale [a] e dall'equilibrio delle forze nel y verso, abbiamo $B_{VH} = -A_{VH} = -4.60 \downarrow$ (nota che il carico del vento non ha alcun componente verticale).
2. La reazione orizzontale a B è determinata considerando la giusta sottostruttura e prendendosi il momento rispetto alla cerniera interna B

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^B = 0; 35C_{HH} - (4.6)(30) = 0 \qquad \Rightarrow C_{HH} = 3.95 \text{ k} \leftarrow$$

3. Reazione orizzontale a A è preso considerando l'intera struttura e le forze di somma nella x direzione:

$$(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0; \quad 15.75 - 3.95 - A_{HH} = 0 \quad \Rightarrow A_{HH} = 11.80 \text{ k} \leftarrow$$

   e nota che A trasporta la maggior parte del carico orizzontale.

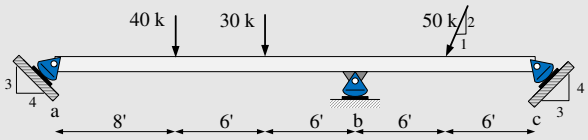
Infine, i supporti dovrebbero essere progettati per più critico (plausibile) combinazione di reazioni:

$$\begin{aligned} H &= 8.66 \text{ k} + 11.58 \text{ k} + 11.8 \text{ k} &&= 32.04 \text{ k} \\ V &= 20.2 \text{ k} + 27.0 \text{ k} + 4.60 \text{ k} &&= 51.8 \text{ k} \end{aligned}$$

[a] La notazione a doppia sottoscrizione è ampiamente utilizzata nell'analisi strutturale. X_{yz} tipicamente implica quantità X at y a causa di qualche azione z.

19.2.7 Ex 19.7: Supporti incline

Un esempio di fascio con supporto inclinato è mostrato sotto



A priori identificheremmo 5 reazioni, tuttavia abbiamo 2 equazioni di condizioni (una ad ogni supporto inclinato), quindi con tre equazione d'equilibrio, abbiamo un sistema staticamente determinato.

$$\begin{aligned} (+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^b = 0; \\ (R_{ay})(20) - (40)(12) - (30)(6) + (44.72)(6) - (R_{cy})(12) = 0 \\ \Rightarrow 20R_{ay} = 12R_{cy} + 391.68 \end{aligned}$$

$$(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0; \frac{3}{4}R_{ay} - 22.36 - \frac{4}{3}R_{cy} = 0 \Rightarrow R_{cy} = 0.5625R_{ay} - 16.77$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Risolvere per queste due equazioni:

$$\begin{bmatrix} 20 & -12 \\ 0.5625 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{ay} \\ R_{cy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 391.68 \\ 16.77 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} R_{ay} \\ R_{cy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14.37 \text{ k} \uparrow \\ -8.69 \text{ k} \downarrow \end{Bmatrix}$$

I componenti orizzontali delle reazioni a e c sono

$$\begin{aligned} R_{ax} &= \frac{3}{4}14.37 \quad &&= 10.78 \text{ k} \rightarrow \\ R_{cx} &= \frac{4}{3}8.69 \quad &&= -11.59 \text{ k} \rightarrow \end{aligned}$$

Infine, risolviamo per R_{by}

$$\begin{aligned} (+\circlearrowleft)\, \Sigma M_z^a &= 0; \\ (40)(8) + (30)(14) - (R_{by})(20) + (44.72)(26) + (8.69)(32) &= 0 \\ \Rightarrow R_{by} &= 109.04 \text{ k} \uparrow \end{aligned}$$

Controlliamo i nostri risultati

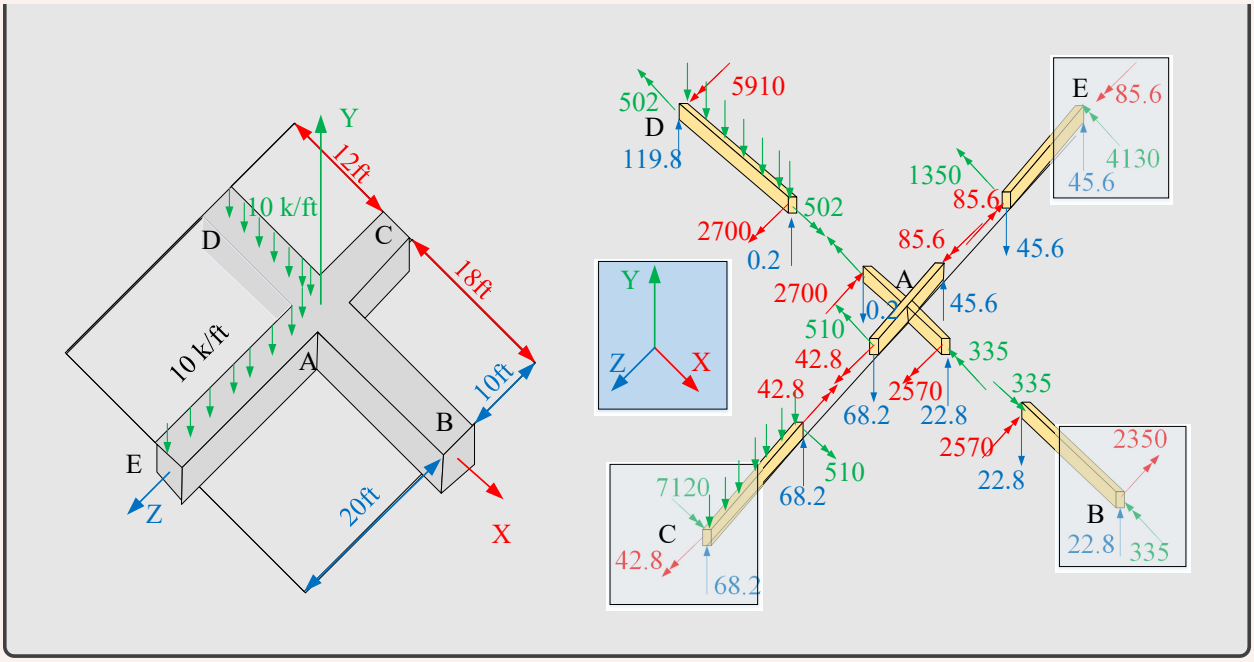
$$\begin{aligned} (+\uparrow)\, \Sigma F_y &= 0; 14.37 - 40 - 30 + 109.04 - 44.72 - 8.69 &&= 0 \checkmark \\ (+\rightarrow)\, \Sigma F_x &= 0; 10.78 - 22.36 + 11.59 &&= 0 \checkmark \end{aligned}$$

19.2.8 Ex 19.8: Struttura di rettifica

La seguente struttura planare della griglia è rigidamente collegata ai quattro supporti B, C, D ed E. Chiaramente, è stabilmente indeterminata al 9^{th} grado ($4 \times 3 - 3$). Come vedremo più tardi, è cinematicamente indeterminato al terzo grado (tre dislocazioni sconosciute a A). Viene prima analizzata dal metodo di rigidità e sono determinate le reazioni di supporto a B, C a E. A quel punto la griglia è statisticamente determinata (tre reazioni esterne), e da semplici statici (tre equazioni di equilibrio: ΣM_x, ΣF_y e ΣM_z possiamo determinare le reazioni a D e alle forze interne. Si noti che non dobbiamo iniziare determinando le reazioni a D, e potremmo procedere da uno qualsiasi dei tre supporti verso il centro, e poi "walk" verso D. I risultati possono essere controllati tramite la contabilità statica solo per carichi e reazioni esterne. Questo esercizio evidenzia il valore dei diagrammi corpo libero correttamente disegnati.

COPIA DI REVISIONE

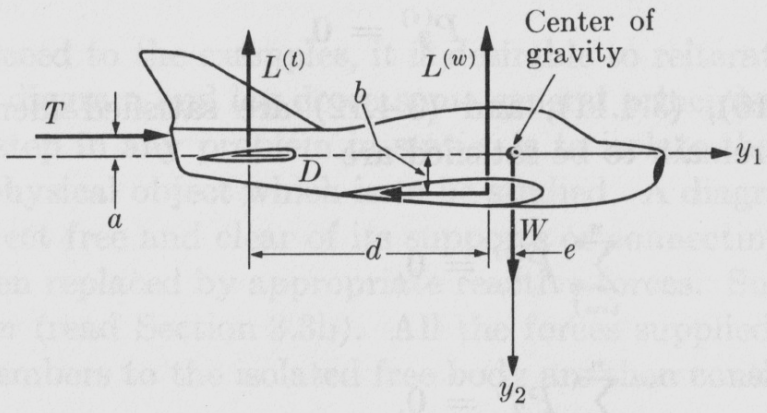
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



19.2.9 Ex 19.9: equilibrio aereo

Da Statics of deformable solids
Bisplinghoff, Mar e Pian, 1965 Cerchiamo di calcolare le forze necessarie per mantenere un aereo in

equilibrio nel volo a livello costante. In seguito è un diagramma corpo libero semplificato dell'aereo con peso W. Si presume che alla velocità di volo dell'aereo la resistenza D è noto, cerchiamo di calcolare l'ascensore sull'ala $L^{(w)}$, l'ascensore sulla coda $L^{(t)}$e la spinta del negine T per un volo di livello costante.



COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Questo è chiaramente un problema di equilibrio statico.

$$\rightarrow \Sigma F_{y1} = 0; \Rightarrow T - D = 0$$
$$\uparrow \Sigma F_{y2} = 0; \Rightarrow -L^{(w)} - L^{(t)} + W = 0$$
$$(+\circlearrowleft)\, \Sigma M_z^a = 0 \Rightarrow Ta + Db + L^{(t)}(d+e) + L^{(w)}e = 0$$

or

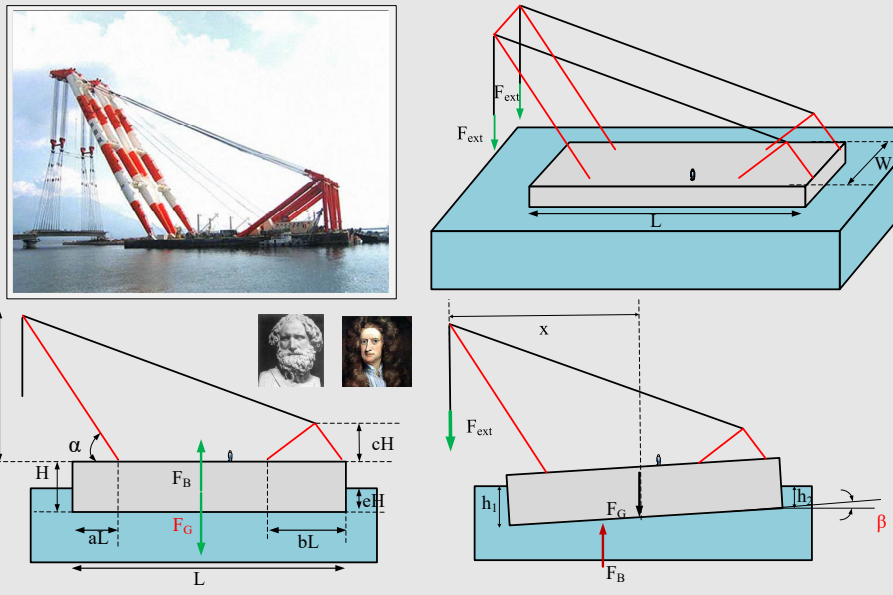
$$T = D$$
$$L^{(t)} = -\frac{D(a+b) + We}{d}$$
$$L^{(w)} = W + \frac{D(a+b) + We}{d}$$

e notiamo che è necessaria una forza di coda verso il basso per mantenere l'equilibrio

19.2.10 Ex 19.10: Barriera Jumbo

Dimensione di un "jumbo barge"[a] che è quello di sollevare un carico $2F_{ext}$. Le caratteristiche di barge sono mostrate qui sotto dove L, H, W e W, sono la lunghezza, l'altezza, la larghezza e il peso della chiatta; F_G e F_B sono le forze di gravità e di galleggiamento. Assumere che il centro della gravità è a $L/2$, $W/2$e $H/2$. Coefficienti a, b, c, d e e si presume che siano noti.

Parte I Si supponga che la chiatta sia rigida



1. Si supponga che non c'è carico esterno, risolvere per e (frazione dell'altezza di bargo sotto acqua).

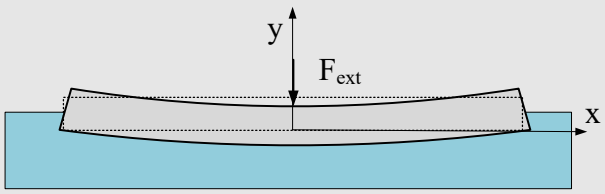
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

2. Per una forza esterna F_{ext},

   (a) Disegnare un diagramma corpo libero chiaro
   (b) Scrivere l'equazione(i) applicabile e risolvere per h_1, h_2 e β.
   (c) Determinare la forza massima F_{max} che può essere sollevato (prima dell'acqua inonda il dorso della chiatta)

Parte II Si supponga che la barga è flessibile, che $F_{ext} \gg F_G$, e viene applicato $L/2$. Dedicare l'equazione differenziale di governo in termini di spostamento verticale y e il carico uniforme della galleggiabilità q_B.



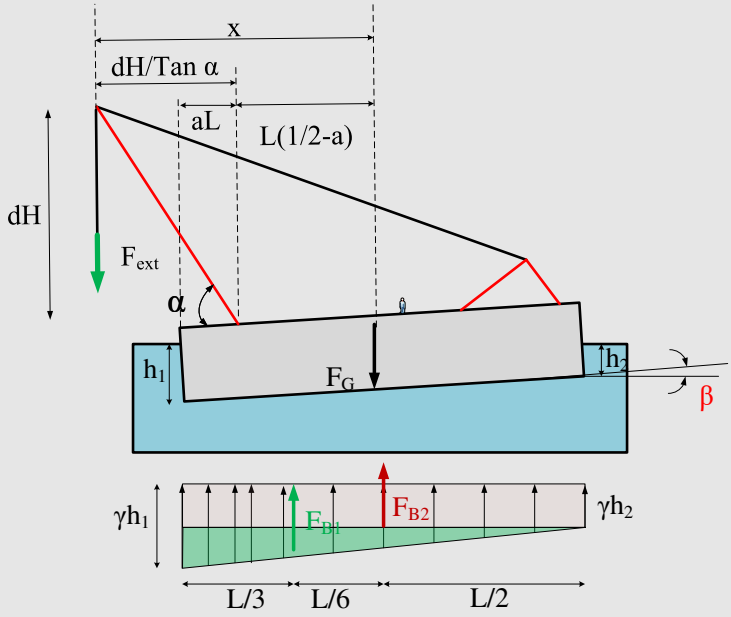
Parte I Barge rigido

1. Dalla legge di Archimede, il peso della chiatta è uguale al peso dell'acqua sfollata

$$F_G = \gamma.W.L.eH \Rightarrow e = \frac{F_G}{\gamma.W.L.W}$$

2. Per una forza esterna F_{ext},

   (a) Schema corpo libero



COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

(b) Scrivere l'equazione(i) applicabile

- Forze di galleggiamento:

$$\begin{aligned} F_B &= F_{B1} + F_{B2} \\ F_{B1} &= \gamma(h_1 - h_2)W\frac{L}{2} \\ F_{B2} &= \gamma h_2 WL \end{aligned}$$

- Geometria

$$x = \frac{dH}{\tan}\alpha + L\left(\frac{1}{2} - a\right)$$

- Summazione di momenti rispetto al centro

$$\begin{aligned} F_{ext}x - F_{B1}\frac{L}{6} &= 0 \\ F_{B1} &= \frac{6F_{ext}x}{L} \\ \gamma(h_1 - h_2)W\frac{L}{2} &= \underbrace{\frac{6F_{ext}}{L}\left[\frac{dH}{\tan\alpha} + L\left(\frac{1}{2} - a\right)\right]}_{A} \end{aligned}$$

- Summazione delle forze verticali

$$\begin{aligned} F_{B1} + F_{B2} - F_G - F_{ext} &= 0 \\ F_{B2} &= F_G + F_{ext} - F_{B1} \\ \gamma h_2 WL &= F_G + F_{ext} - \frac{6F_{ext}x}{L} \\ h_2 &= \frac{F_G + F_{ext} - \frac{6F_{ext}x}{L}}{\gamma WL} \end{aligned}$$

- Risolvere per h_1

$$\begin{aligned} \gamma(h_1 - h_2)W\frac{L}{2} &= A \\ h_1 &= \frac{2A}{\gamma WL} - h2 \end{aligned}$$

- Risolvere per β

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{h_1 - h_2}{L}\right)$$

(c) Per il bargo di "alzare via" $h_2 = 0$ or

$$\frac{F_G + F_{ext} - \frac{6F_{ext}x}{L}}{\gamma WL} = 0 \Rightarrow F_{ext} = \frac{F_G}{6x/L - 1}$$

COPIA DI REVISIONE

Parte II Barriera flessibile

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{M}{EI} \\
\frac{d^2M}{dx^2} &= q \\
\frac{d^4y}{dx^4} &= \frac{q}{EI} \\
q &= -\gamma W y \\
\frac{d^4y}{dx^4} &= -\frac{\gamma W y}{EI} \\
k^2 &= \frac{\gamma W}{4EI} \\
\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^2 y &= 0
\end{aligned}$$

Che è la stessa equazione di quella di un raggio su fondazione elastica. La soluzione dell'equazione differenziale omogenea del quarto ordine è della forma $y = e^{\alpha x}$, che porta a

$$\begin{cases} \dfrac{d^4}{dx^4} - \alpha^4 y = 0 \\ \dfrac{d^4y}{dx^4} + 4k^2 y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^4 = -4k^4 \\ \alpha^2 = \pm 2ik^2 \\ \alpha = \pm\sqrt{\pm 2i}k \\ \quad = \pm(1 \pm i)k \end{cases}$$

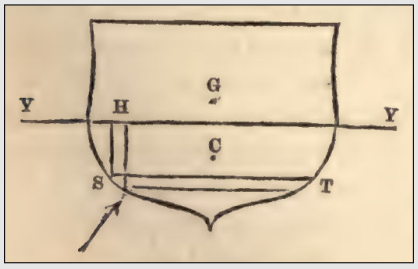
or

$$y = e^{kx}(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + e^{-kx}(C_3 \sin kx + C_4 \cos kx)$$

[a] Ispirato dalla lettura this article

19.2.11 Ex 19.11: Rankine: Equilibrio di un corpo galleggiante (prove idrostatiche)

Questo esempio segue la classica prova di Rankine che l'azione risultante di un liquido su un corpo galleggiante è una forza verticale verso l'alto pari al peso del liquido sfollato, che agisce attraverso il centroide volume spostato (il centro della galleggiabilità). (Rankine, 1858, Art. 120)



COPIA DI REVISIONE

Corpo galleggiante (Rankine, Art. 120). Lasciamo perdere. YY denota la superficie libera orizzontale del liquido. Considerare una piccola porzione piana della superficie immersa di area S, il cui centroide si trova ad una profondità verticale x di seguito YY. L'intensità della pressione idrostatica a quella profondità è

$$p = wx,$$

dove w è il peso per unità di volume del liquido. La pressione totale agisce su S è dunque pS- Si', si comporta normalmente in superficie.

Lasciamo perdere. α essere l'angolo tra la zona del piano S e la superficie libera orizzontale (equivalentemente, l'angolo tra la direzione di pressione e quella verticale).

- **Proiezioni.** La proiezione orizzontale della zona inclinata S is

  $$S_h = S\cos\alpha,$$

  e la proiezione verticale di S su un piano verticale perpendicolare ad un asse prisma orizzontale è

  $$S_v = S\sin\alpha.$$

- **Componenti orizzontali.** Risolvere la pressione pS in componenti, il componente orizzontale che agisce su S is

  $$dF_H = pS_v = (wx)(S\sin\alpha).$$

  Rankine mostra che, per ogni elemento superficiale S, esiste un altro elemento di uguale verticale proiezione alla stessa profondità, producendo un componente orizzontale uguale e opposto. Di conseguenza, sommando su tutta la superficie immersa,

  $$\sum dF_H = 0,$$

  e l'azione fluida risultante non ha componenti orizzontali.
- **Componente verticale e liquido sfiato.** La componente verticale della pressione S is

  $$dF_V = pS_h = (wx)(S\cos\alpha).$$

  La quantità $(S\cos\alpha)\,x$ rappresenta il volume di una colonna prismatica verticale del liquido in piedi la proiezione orizzontale di S e che si estende dalla superficie libera alla profondità x. Moltiplicare questo volume tramite w dà il peso del liquido in quel prisma. Così,

  $$dF_V = w\,x\,S\cos\alpha$$

  è una forza verso l'alto uguale e opposta al peso del liquido spostato da quella porzione prismatica del corpo.
- **Buoyancy isolante e la sua linea di azione.** La regolazione dei componenti verticali su tutti gli elementi della superficie immersa produce un singolo risultato verso l'alto

  $$F_B = wV,$$

  dove V è il volume totale spostato. Poiché ogni contributo elementare agisce attraverso il centroide della sua colonna prismatica, i passaggi risultante attraverso il centroide del volume sfollato, denotato C, il centro della buoia.
- **Condizioni di equilibrio.** Lasciamo perdere. W essere il peso del corpo galleggiante, agendo attraverso il suo centro di gravità G. Equilibrio richiede

  $W = wV$ and G e C si trova sulla stessa linea verticale.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

formulazione integrale moderna (supplemento). Mentre Rankine stabilisce questo risultato attraverso la decomposizione geometrica, la stessa conclusione segue direttamente da una formulazione continuum moderna. Il campo di pressione idrostatica è $p = wz$dove z è la profondità verticale sotto la superficie libera. La forza risultante esercitata dal fluido sul corpo è

$$\mathbf{F} = \iint_{\partial V} p\,\mathbf{n}\,dS,$$

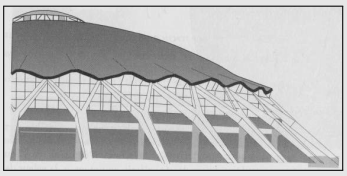
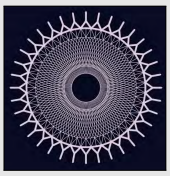
dove $\mathbf{n}$ è l'unità esterna normale alla superficie bagnata. Applicare il teorema divergenza (§R.1.2) al componente verticale,

$$F_z = \iiint_V \frac{\partial p}{\partial z}\,dV = \iiint_V w\,dV = wV,$$

mostra che la forza idrostatica risultante è verticale, verso l'alto e uguale al peso del liquido sfollato. La sua linea d'azione passa attraverso il centroide di V, concomitante con il centro di galleggiamento di Rankine.

19.2.12 Ex 19.12: Palazzetto dello sport; nervi

Adattato da Structure: An Architect's Approach
Howard, 1966, Mécanique des structures
Voldoire e Bamberger, 2008 e Structures
Schodek e Bechthold, 2014

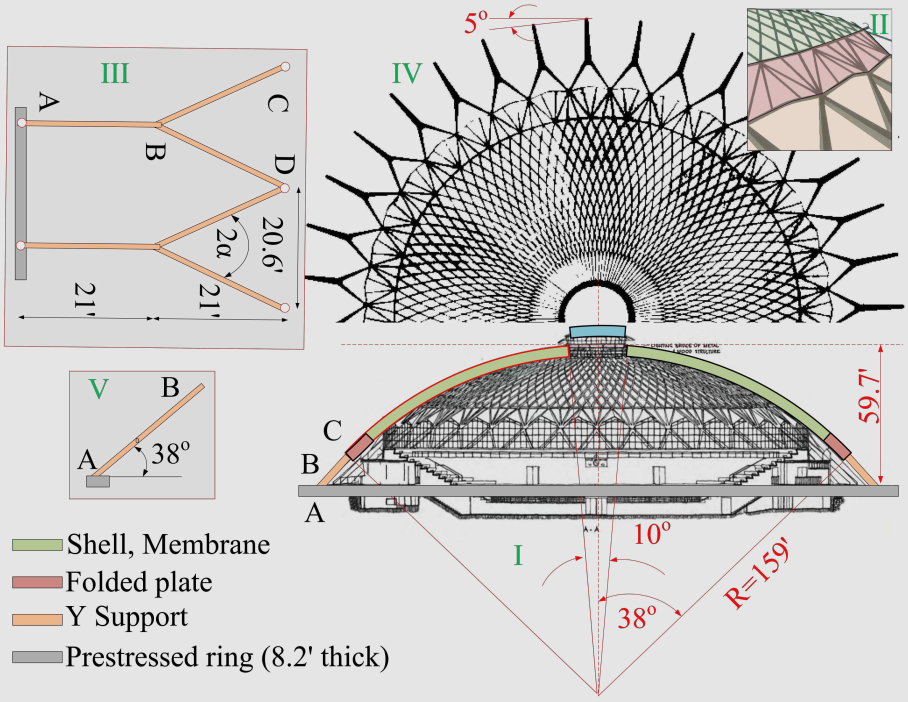
Il famoso *Palazzetto dello Sport*[a] Fu progettato (e costruito) da Pierl-Luigi Nervi nel 1958 per le Olimpiadi del 1960 a Roma, ed era una struttura abbagliante sia per la sua bellezza, il suo stile tecnico e il metodo costruttivo. Fedele ai principi guida di Sullivan, "forma segue la funzione" è infatti celebrata qui.

Geometria

Ha una cupola sferica (conchiglia a membrana con minimo istante/sentiero) uniformemente sostenuta da piastre piegate (flessilmente rigide) che trasferiscono il carico uniforme a supporti sagomati 36 Y. A loro volta, trasferire il carico a un anello circonferenziale prestressato alla base.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Carico

Il peso[b] della cupola è determinata dal peso medio per piede quadrato. Prendendo conchiglia e costole insieme, con cemento a 150 lb/ft^3, abbiamo 61 lb/ft^2; aggiunta - l'isolamento della vermiculite e la copertura darà un totale di 80 lb/ft^2 carico totale morto. Il tetto della cupola sarà preso a 40 lb/ft^2. La zona di una zona di sfera tra due cerchi di latitudine è data dalla formula $\pi R^2(\cos\phi_1 - \cos\phi_2)$ dove ϕ_1 è l'angolo di colazità (angolo misurato giù dal polo nord, o superiore, della cupola).

$$\begin{array}{rrcl} \text{Cupola} & 2\pi(159)^2(\cos 0° - \cos 5°)(40)\ \text{psf} & = & 25\ \text{k} \\ \text{Shell} & 2\pi(159)^2(\cos 5° - \cos 38°)(80)\ \text{psf} & = & 2,655\ \text{k} \end{array}$$

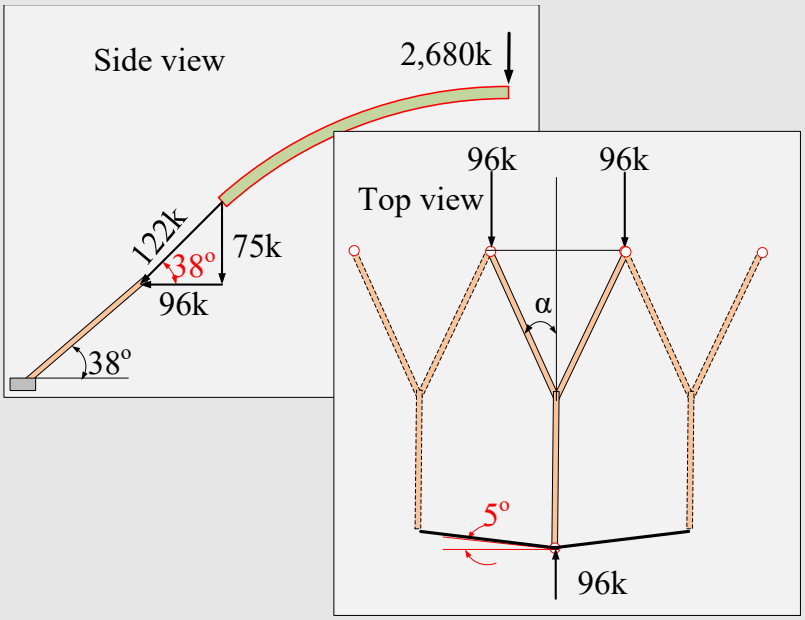
così il peso totale è 2,680 kips.

Forze

Ogni matricola porterà $N_{AB} = 2,655/36 \simeq 75$ per i seguenti diagrammi corpo libero:

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Le forze corrispondenti sull'apice del sostegno Y saranno

$$N_{AB} = \frac{75}{\sin 38°} = 122 \text{ k}; \quad N_{AB}^{\text{hor}} = \frac{75}{\tan 38°} = 96 \text{ k}$$

Dalla geometria

$$\tan \alpha = \frac{20.6}{21} \Rightarrow \alpha = 26°$$

Quindi la forza assiale in BC sarebbe

$$N_{BC} = \frac{122}{2} \frac{1}{\cos 26°} = 68 \text{ k}$$

La forza prestressante N_p necessario per bilanciare la componente orizzontale

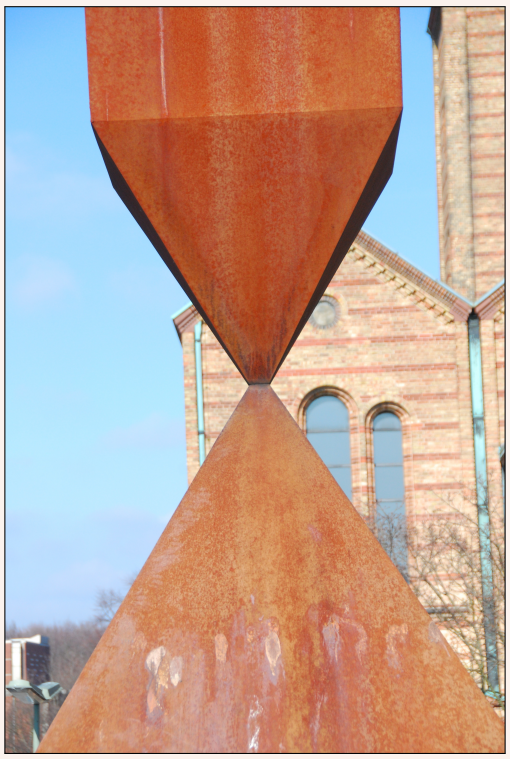
$$N_p = \frac{N_{AB}^{\text{hor}}}{2 \sin 5°} = 550 \text{ k}$$

[a] Al liceo, giocavo a pallamano in questa struttura iconica, che mi dà un legame molto personale con esso.

[b] In questo problema, arrotonderemo le forze al kip più vicino.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Obelisco rotto, Barnett Newman, Berlino (2009)

Sconfigge l'intuizione e sottolinea l'equilibrio strutturale, come le reazioni in ingegneria assicurano la stabilità contrastando i carichi applicati.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 20

Trusse

Abstract

Questo capitolo fornisce un'esplorazione dettagliata dell'analisi truss, a partire da una introduzione alle ipotesi fondanti, convenzioni di segni e definizioni di indeterminanza statica interna/estere esterna. Le equazioni di governo sono esclusivamente quelle dell'equilibrio statico. La discussione poi si progredisce a tre metodi analitici primari: il metodo delle articolazioni, il metodo di sezioni e un metodo matrice. Ogni metodo è spiegato in modo completo attraverso procedure passo-passo, integrate da esempi illustrativi per migliorare la chiarezza e facilitare la comprensione pratica.

20.1 Introduzione 927
20.1.1 Assunzioni 928
20.1.2 Convegno di firma 929
20.1.3 Determinazione e stabilità . 929
20.2 Metodi di analisi 931
20.2.1 Metodo di articolazioni . . . 931
20.3 Metodo delle sezioni 938
20.3.1 Metodo delle sezioni 938
20.3.2 Ex 20.3: Metodo delle sezioni 940
20.4 Giunta/mamma 940
20.4.1 Ex 20.4: Capriata semplice: metodo dei nodi/matrice . . 942
20.4.2 Ex 20.5: Capriata complessa: metodo dei nodi/matrice . . 944

20.1 Introduzione

1 Una tregua è una struttura composta da membri (solitamente rettilinei) disposti in triangoli interconnessi. I membri sono tipicamente collegati alle loro estremità da giunti considerati per essere incisi (collegamenti a cerniera che non trasmettono momenti), che permette alla tromba di comportarsi in modo meccanico specifico.

2 I tipi di capriate sono indicati in Fig. 17.5.

COPIA DI REVISIONE

20.1.1 Assunzioni

3 I collegamenti tra i membri della truppa sono considerati giunti a spillo, il che significa che i membri sono collegati in modo tale da poter trasferire solo forze assiali (tensione o compressione) e non trasferiscono momenti. Questa ipotesi permette di analizzare ogni giunto come nodo in un sistema di forza bidimensionale, dove la somma delle forze in ciascuna direzione deve essere zero.

4 I membri di Truss si suppone che siano in grado di portare forze solo lungo le loro lunghezze, cioè ogni membro è in compressione o tensione senza che le forze di piegamento vengano considerate. Questo semplifica notevolmente l'analisi riducendo il numero di fattori di stress considerati in ciascun membro.

5 Si presume che i carichi (forze e reazioni) siano applicati solo alle articolazioni della tromba, il che è fondamentale perché evita di piegare momenti nei membri, aderendo alla seconda ipotesi delle forze assiali.

6 Anche se le articolazioni sono modellate come giunti per il trasferimento di forza, si presume che siano rigidi nelle proprie dimensioni. Ciò significa che nessuna deformazione avviene alle giunture e i rapporti angolari tra membri collegati rimangono costanti.

7 In molte analisi di truss, il peso dei membri del trombetti è spesso trascurato rispetto ai carichi che sostengono. Questo semplifica i calcoli, anche se in applicazioni pratiche, soprattutto per grandi campate o materiali pesanti, i pesi dei membri possono essere significativi e devono essere considerati.

8 L'uso delle capriate come efficaci strutture portanti di carico è evidente nella loro applicazione diffusa in ponti, tetti e altre forme strutturali dove sono necessarie ampie campate.

9 Concettualmente, una tromba può essere considerata come un raggio gigante che si estende tra due supporti. Questa analogia è utile perché semplifica la comprensione di come funziona una capriata. Come un fascio, una tromba distribuisce carichi applicati sopra ai supporti alle sue estremità. Tuttavia, a differenza di un fasci solido, una capriata lo fa in modo molto più efficiente dal materiale utilizzando le configurazioni triangolari interconnesse. Questi triangoli aiutano a distribuire le forze in tutta la struttura, riducendo al minimo il peso massimizzando la forza.

10 Gli accordi superiori di una tromba sono generalmente in compressione, cioè i membri orizzontali o inclinati nella parte superiore della tregua che si estendono da un'estremità all'altra.

11 Al contrario, gli accordi inferiori di una tensione di esperienza a trebbia. Questi membri sono situati in fondo alla tromba, che corre parallelamente agli accordi superiori.

12 I membri diagonali in una tromba possono essere soggetti a tensione o compressione, a seconda del loro orientamento e della geometria complessiva della tregua. Queste diagonali sono cruciali per il trasferimento di carichi tra gli accordi superiori e inferiori e

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

per mantenere l'integrità strutturale della tromba. La direzione e la magnitudine della forza in un membro diagonale dipendono dalla distribuzione del carico e dal tipo specifico di truss. Ad esempio, in una tipica tromba Pratt, i componenti verticali maneggiano la compressione mentre i membri diagonali gestiscono la tensione.

20.1.2 Convegno di firma

13 Tensione positiva, compressione negativa. Su una tregua le forze assiali sono indicate come forze che agiscono sulle articolazioni.

14 Equazioni di base

$$\text{Stress-Force: } \sigma = \frac{P}{A}$$
$$\text{Stress-Strain: } \sigma = E\varepsilon$$
$$\text{Force-Displacement: } \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad \text{Equilibrium: } \quad \Sigma \mathbf{F} = 0$$

20.1.3 Determinazione e stabilità

15 Una tregua è considerata statisticamente determinata se le forze interne dei suoi membri possono essere calcolate utilizzando solo le equazioni di equilibrio statico. Per le capriate planari, queste sono le equazioni che affermano che la somma delle forze nelle direzioni orizzontali e verticali e la somma dei momenti su qualsiasi punto deve essere pari a zero.

16 if m è il numero dei membri, r il numero di forze di reazione, e j il numero di giunzioni, poi avremmo un totale $m + r$ sconosciute e $2j$ (or $3j$) equazioni di statici (2D o 3D ad ogni articolazione). Se non abbiamo abbastanza equazione delle statiche allora il problema è indeterminato, se abbiamo troppe equazionsioni allora la tromba è instabile, Tabella 20.1.

17 Una tromba può essere statalmente/esternimente determinata o indeterminata rispetto alle reazioni (rispettivamente più di 3 o 6 reazioni in problemi 2D o 3D).

18 Una tromba può essere internamente determinata o indeterminata, Tabella 20.1.

	2D	3D
Indeterminanza statica		
Esterno	$r > 3$	$r > 6$
Interno	$m + r > 2j$	$m + r > 3j$
Non disponibile	$m + r < 2j$	$m + r < 3j$

Tabella 20.1: Determinazione statica e stabilità delle capriate

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

19 If $m < 2j - 3$ (in 2D) la tregua non è internamente stabile, e non rimarrà un corpo rigido quando si stacca dai suoi supporti. Tuttavia, quando attaccato ai supporti, la tromba sarà rigida.

20 Le reazioni possono essere determinate dalle equazioni appropriate di equilibrio mostrata in Def. 19.1 (pg. 19.1.2). Tabella 20.2 riassume le equazioni applicabili di equilibrio.

Tabella 20.2: Equazioni applicabili di equilibrio per capriate

	Reazioni	Equilibrio Nodale
2D	ΣF_X, ΣF_Y, ΣM_Z,	ΣF_X, ΣF_Y
3D	ΣF_X, ΣF_Y, ΣF_Z, ΣM_X, ΣM_Y, ΣM_Z	ΣF_X, ΣF_Y, ΣF_Z

21 La tregua in Fig. 20.1 ha 4 reazioni, quindi è esternamente indeterminato; ha anche 6 articolazioni ($j = 6$), 4 reazioni ($R = 4$) e 9 membri ($m = 9$). Così abbiamo un totale di $m + R = 9 + 4 = 13$ sconosciute e $2 \times j = 2 \times 6 = 12$ equazioni di equilibrio, così la tregua è anche internamente statically indeterminate.

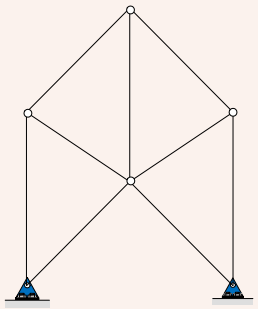


Figura 20.1: Trucchi staticamente indeterminati

22 Ci sono due metodi di analisi per capriate staticamente determinate

1. Il metodo delle articolazioni
2. Il Metodo delle sezioni
3. Metodo di matrice

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

20.2 Metodi di analisi

20.2.1 Metodo di articolazioni

[23] Il *metodo di articolazioni* analizza ogni giunto nella tromba per determinare le forze assiali interne dei membri della truss.

1. Determinare se la struttura è determinata staticamente
2. Competere tutte le reazioni
3. Sketch un diagramma del corpo libero che mostra tutti i carichi articolari (comprese le reazioni)
4. Per ogni giunto, e a partire da quelli caricati, applicare l'appropriato equazioni di equilibrio (ΣF_x e ΣF_y in 2D; ΣF_x, ΣF_y e ΣF_z in 3D).
5. Poiché gli elementi di tromba possono portare solo forze assiali, il risultante forza ($\vec{F} = \vec{F_x} + \vec{F_y}$) deve essere lungo il membro, Fig. 20.2.

$$\frac{F}{L} = \frac{F_x}{L_x} = \frac{F_y}{L_y}$$

6. Di solito, meglio iniziare da reazioni di calcolo prima.
7. Poi si trasferisce in un giunto dove non sono presenti più di due forze sconosciute, spesso al confine della truppa.
8. Applicare le equazioni di equilibrio statico a ogni articolazione:
9. Risolvere queste equazioni per trovare le forze nei membri confinanti, dove i valori positivi indicano la tensione e i valori negativi indicano la compressione.
10. Tenere sempre traccia del x e y componenti di una forza membro (F_x, F_y), come potrebbero essere necessari più tardi quando si considera l'equilibrio di forza a un altro giunto al quale il membro è collegato, figura 20.2.

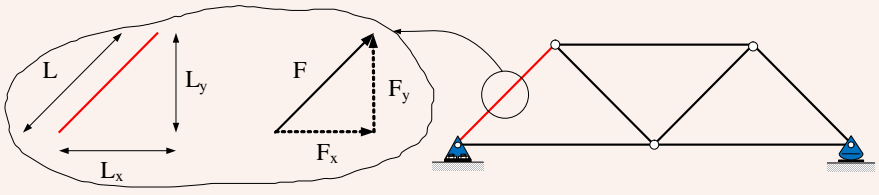


Figura 20.2: Relazione tra forze e lunghezze

11. Spostarsi al prossimo giunto e ripetere il processo fino a quando tutte le forze membri sono determinate.

Questo metodo è particolarmente efficace per le piccole trusse o quando sono necessarie informazioni dettagliate su ogni membro.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

24 Nell'analisi di tromba, non c'è una convenzione dei segni. se dopo l'analisi, la forza si trova negativa, allora questo implica che sia stata fatta l'ipotesi sbagliata e che il membro dovrebbe essere sotto compressione (o tensione).

25 Su un diagramma del corpo libero, le forze interne sono rappresentate da freccia che agisce sulle articolazioni e non come forze finali sull'elemento stesso. Cioè per la tensione, la freccia sta puntando lontano dal giunto, e per compressione verso l'articolazione, Fig. 20.3.

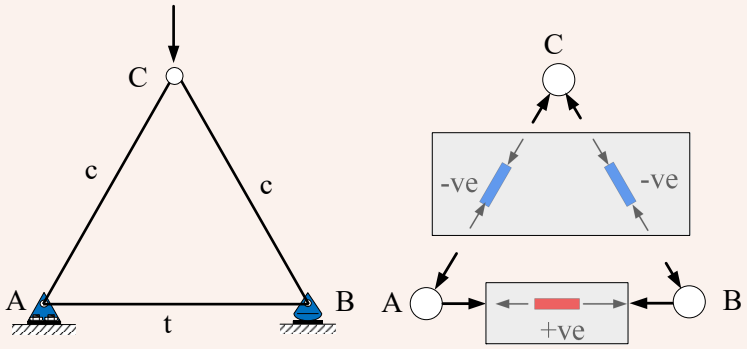
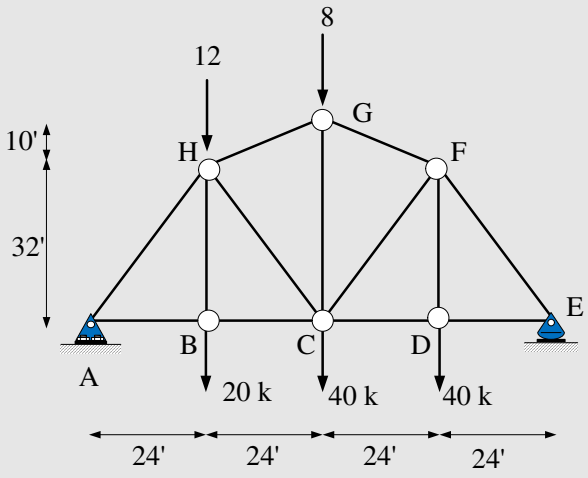


Figura 20.3: Presentare le forze con frecce

20.2.1.1 Ex 20.1: Analisi della capriata: metodo dei nodi



1. $R = 3, m = 13, 2j = 16$e $m + R = 2j$✓

COPIA DI REVISIONE

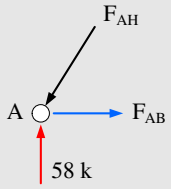
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

2. Computa le reazioni

$$
\begin{aligned}
(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^E = 0; \quad &\Rightarrow \quad (20+12)(3)(24) + (40+8)(2)(24) + (40)(24) \\
&\quad -R_{A_y}(4)(24) = 0 \Rightarrow R_{A_y} = 58 \text{ kip } \uparrow \\
(+\downarrow)\,\Sigma F_y = 0; \quad &\Rightarrow \quad 20 + 12 + 40 + 8 + 40 - 58 - R_{E_y} = 0 \\
&\Rightarrow \quad R_{E_y} = 62 \text{ kip } \uparrow
\end{aligned}
$$

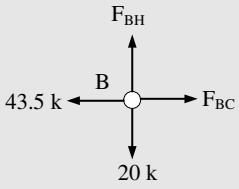
3. Considerare ogni giunto separatamente:

Nodo A: Chiaramente AH è sotto compressione, e AB sotto tensione



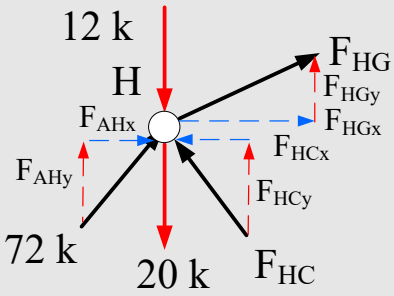
$$
\begin{aligned}
(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; \quad &\Rightarrow \quad -F_{AH_y} + 58 = 0 \\
&\quad F_{AH} = \tfrac{l}{l_y}(F_{AH_y}) \\
&\quad l_y = 32; l = \sqrt{32^2 + 24^2} = 40 \\
&\Rightarrow \quad F_{AH} = \tfrac{40}{32}(58) = 72.5 \text{ kip C} \\
(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0; \quad &\Rightarrow \quad -F_{AH_x} + F_{AB} = 0 \\
&\quad F_{AB} = \tfrac{L_x}{L_y}(F_{AH_y}) = \tfrac{24}{32}(58) = 43.5 \text{ kip T}
\end{aligned}
$$

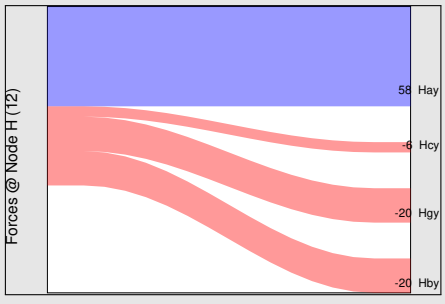
Nodo B:



$$
\begin{aligned}
(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0; \quad &\Rightarrow \quad F_{BC} = 43.5 \text{ kip T} \\
(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; \quad &\Rightarrow \quad F_{BH} = 20 \text{ kip T}
\end{aligned}
$$

Nodo H:





COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Oltre al diagramma del corpo libero, la figura giusta illustra il percorso "load"' in nodo H[a] Trama alluvionale, cioè il "flusso' delle forze verticali al nodo H.

$$(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0; \Rightarrow F_{AH_x} - F_{HC_x} + F_{HG_x} = 0$$
$$\Rightarrow 43.5 - \frac{24}{\sqrt{24^2+32^2}}(F_{HC}) + \frac{24}{\sqrt{24^2+10^2}}(F_{HG}) = 0$$
$$(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; \Rightarrow F_{AH_y} + F_{HC_y} - 12 + F_{HG_y} - 20 = 0$$
$$\Rightarrow 58 + \frac{32}{\sqrt{24^2+32^2}}(F_{HC}) - 12 + \frac{10}{\sqrt{24^2+10^2}}(F_{HG}) - 20 = 0$$

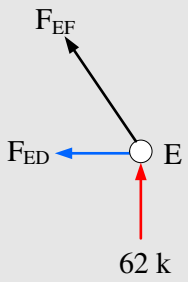
Questo può essere scritto più convenientemente come

$$\begin{bmatrix} 0.6 & -0.921 \\ -0.8 & -0.385 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{HC} \\ F_{HG} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 43.5 \\ 26.0 \end{Bmatrix}$$

Risolvere otteniamo $F_{HC} = -7.5$ e $F_{HG} = -52$, così abbiamo fatto un'ipotesi errata nel diagramma del corpo libero di nodo H, e la risposta finale è

$$F_{HC} = 7.5 \text{ kip T}$$
$$F_{HG} = 52 \text{ kip C}$$

Node E:

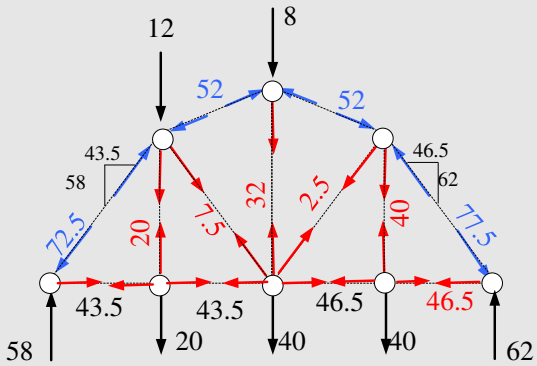


$$\Sigma F_y = 0; \Rightarrow F_{EF_y} = 62 \Rightarrow F_{EF} = \frac{\sqrt{24^2+32^2}}{32}(62) = 77.5 \text{ kip C}$$
$$\Sigma F_x = 0; \Rightarrow F_{ED} = F_{EF_x} \Rightarrow F_{ED} = \frac{24}{32}(F_{EF_y}) = \frac{24}{32}(62) = 46.5 \text{ kip T}$$

I risultati di questa analisi sono riassunti

COPIA DI REVISIONE

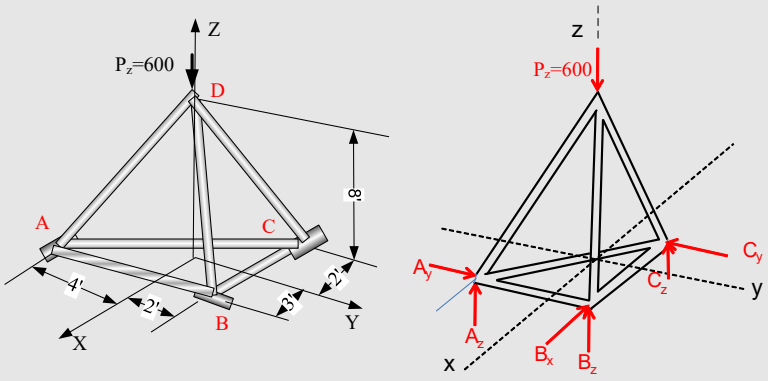
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Potremmo controllare i nostri calcoli verificando l'equilibrio delle forze in un nodo non utilizzato prima, come D

[a] Questo è un cosiddetto *diagramma alluvionale*.

20.2.1.2 Ex 20.2: Capriata tridimensionale



$A(3,-4,0)$, $B(3,2,0)$, $C(-2,2,0)$e $D(0,0,8)$. Nessuna reazione x or y direzione (la struttura è su ghiaccio, e non c'è carico laterale).

Procedura

Risolvere sequenziali per

COPIA DI REVISIONE

1. Reazioni

$$\Sigma M_{AB} = 0 \Rightarrow C_z\checkmark$$
$$\Sigma M_{CB} = 0 \Rightarrow A_z\checkmark$$
$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow B_z = 40.0\checkmark$$
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow B_x\checkmark$$
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y\checkmark; C_y\checkmark$$

2. Giunzione B

$$L_{BD}$$
$$\Sigma F_z = 0; \Rightarrow F_{BD}\checkmark$$
$$F^x_{BD}$$
$$F^y_{BD}$$
$$\Sigma F_x = 0; \Rightarrow F_{BA}\checkmark$$

3. giunto A

$$\alpha\checkmark$$
$$L_{AD}\checkmark$$
$$\Sigma F_z = 0; F_{AD}\checkmark$$
$$\Sigma F_x = 0; F_{AC}\checkmark$$

4. C

$$F^Z_{CD}\checkmark$$
$$\Sigma F_Z = 0 \Rightarrow F_{CD}\checkmark$$

Soluzione

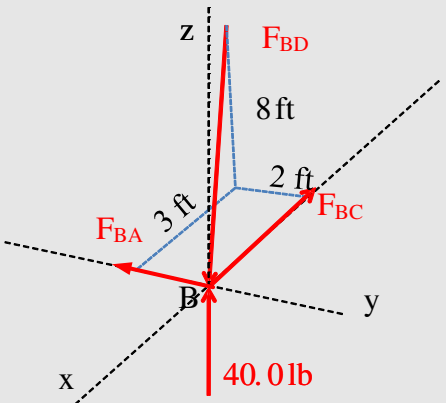
1. Considerando il diagramma del corpo libero dell'intera truss

$$\Sigma M_{AB} = 0; C_z(5) - 600(3) = 0 \Rightarrow C_z = 360$$
$$\Sigma M_{CB} = 0; 600(2) - A_z(6) = 0 \Rightarrow A_z = 200$$
$$\Sigma F_z = 0; B_z + 200 + 360 - 600 = 0 \Rightarrow B_z = 40.0$$
$$\Sigma F_x = 0; B_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0; A_y - C_y = 0$$
$$\Sigma M_z = 0; A_y(3) + C_y(2) = 0; \Rightarrow A_y = C_y = 0$$

2. Giunta B

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Joint B

$$L_{BD} = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 8^2} = \sqrt{77}$$

$$\Sigma F_z = 0; \frac{-8}{\sqrt{77}} F_{BD} + 40 = 0; \Rightarrow F_{BD} = 43.87 \text{lbf (C)}$$

$$\Sigma F_x = 0; F_{BD}^x - F_{BC} = 0$$

$$F_{BD}^x = \frac{L_x}{L} F_{BD} = \frac{3}{\sqrt{77}}(43.87)$$

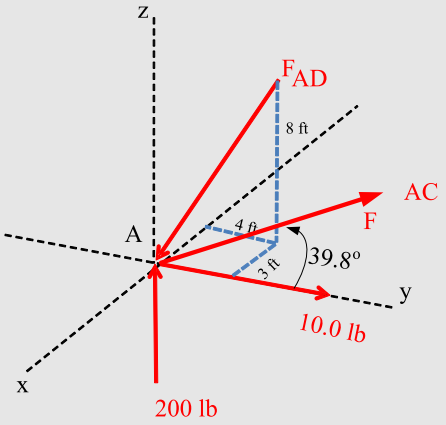
$$F_{BC} = 15.0 \text{lbf (T)}$$

$$\Sigma F_y = 0; F_{BD}^y - F_{BA} = 0$$

$$F_{BD}^y = \frac{L_x}{L} F_{BD} = \frac{2}{\sqrt{77}}(43.87)$$

$$F_{BA} = 10.0 \text{lbf (T)}$$

3. Giunta *A*



COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

$$\tan(\alpha) = \frac{L_x}{L_y} = \frac{5}{6} \Rightarrow \alpha = 39.8\,\text{deg}$$

$$L_{AD} = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} = \sqrt{8^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{89}$$

$$\Sigma F_z = 0; \frac{-8}{\sqrt{89}} F_{AD} + 200 = 0 \Rightarrow F_{AD} = 236\text{lbf (C)}$$

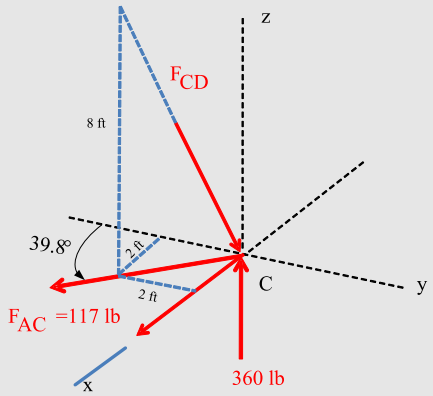
$$\Sigma F_x = 0; F_{AD}^X - F_{AC}^X = 0 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{89}}(235.9) - F_{AC}\sin(39.8°) = 0 \Rightarrow F_{AC} = 117\text{lbf (T)}$$

Check

$$\Sigma F_y = 0 F_{AC}^Y - F_{AD}^Y + 10 = 0$$

$$117.2\cos(39.81^o) - \frac{4}{\sqrt{89}}(235.9) + 10.0 = 0 \checkmark$$

4. C



$$\Sigma F_Z = 0; F_{CD}^Z + 360 = 0$$

$$\frac{-8}{\sqrt{72}} F_{CD} + 360 = 0$$

$$F_{CD} = 382\text{lbf (C)}$$

20.3 Metodo delle sezioni

20.3.1 Metodo delle sezioni

26 Il *metodo delle sezioni* offre un modo più rapido per trovare le forze in membri specifici, particolarmente utili nelle grandi trusse.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

1. Calcolare le reazioni alla tromba supporta utilizzando l'equilibrio complessivo della tregua.
2. Scegliere una sezione che taglia non più di tre membri le cui forze sono sconosciute, questa sezione dovrebbe dividere la tromba in due parti.
3. Analizzando una parte della tregua, assicurandosi che sia statisticamente determinata.
4. Applicare le equazioni di equilibrio alla sezione
5. Risolvere queste equazioni per determinare le forze dei membri tagliate dalla sezione.

27 Summazione di momenti su un punto particolare (solitamente l'incrocio di 2 membri del taglio) consentirebbe la determinazione di altre forze membro.

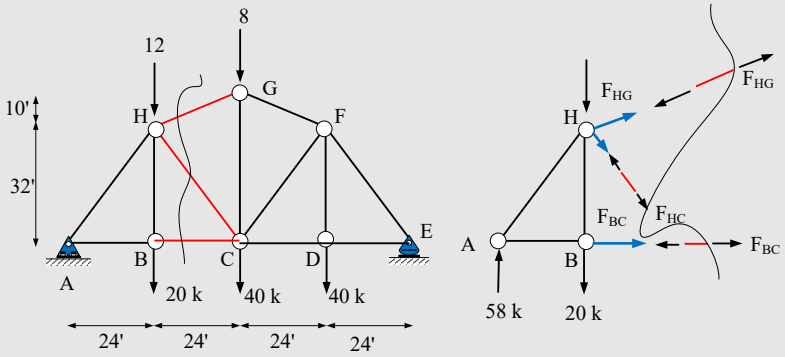
28 La summazione delle forze è solitamente usata per determinare le forze nei membri inclinati.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

20.3.2 Ex 20.3: Metodo delle sezioni

In questo problema, cerchiamo di determinare F_{BC} e F_{HG} nell'esempio precedente. Tagliare attraverso i membri HG, HC e BC, prendiamo per la prima volta la somma delle forze rispetto a H



Cut through the members, but in drawing FBD, remove them and just show nodal forces

$$(+\circlearrowright)\,\Sigma M_z^H = 0 \Rightarrow R_{A_y}(24) - F_{BC}(32) = 0$$

$$F_{BC} = \frac{24}{32}(58) = 43.5 \text{ kip, T}$$

$$(+\circlearrowright)\,\Sigma M_z^C = 0;$$

$$\Rightarrow (58)(24)(2) - (20+12)(24) - F_{HG_x}(32) - F_{HG_y}(24) = 0$$

$$2784 - 768 - (32)(F_{HG})\frac{24}{\sqrt{24^2+10^2}} - (24)(F_{HG})\frac{10}{\sqrt{24^2+10^2}} = 0$$

$$2,000 - (29.5)F_{HG} - (9.2)F_{HG} = 0$$

$$\Rightarrow F_{HG} = 52 \text{ kip C}$$

20.4 Giunta/mamma

29 Questo è essenzialmente il metodo di articolazioni (in steroidi) gettati in forma matrice. Basta mettere, scriviamo tutte le equazioni di equilibrio a tutti i nodi, e poi li castiamo in forma di matrice .

30 Quindi, cerchiamo di determinare la matrice statica $\mathcal{B}$ che riguarda il vettore di tutta la trus $\{\mathbf{P}\}$ forze nodali nelle coordinate globali a tutte le forze sconosciute (l'elezione delle forze interne nel loro sistema di coordinate locali e la struttura reazioni esterne), §46.2.1.2.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{B}_{FF} & \mathcal{B}_{FR} \\ \mathcal{B}_{RF} & \mathcal{B}_{RR} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} \underbrace{\begin{Bmatrix} F \\ R \end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}} + \underbrace{\{P\}}_{\mathbf{P}} = 0$$

COPIA DI REVISIONE

or

Internal Forces-External Forces=0

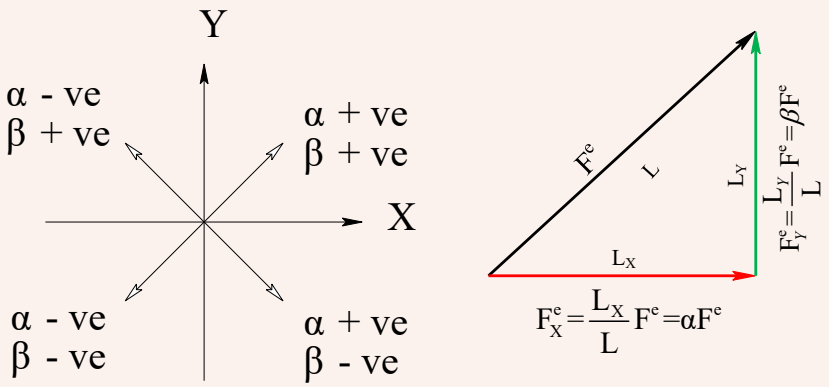
e possiamo pensare $\mathcal{B}$ (la matrice statica) come un "sistema fisico', **F** un "response' e **P** una funzione di forzatura.

31 Questo metodo può essere riassunto come segue.

1. Selezionare un sistema di coordinate
2. Numerare separatamente le giunzioni e gli elementi
3. Assumere
   (a) Tutte le forze membri per essere positive (cioè tensione)
   (b) Tutte le reazioni sono positive
4. Computare la direzione cosenes a ogni nodo j e per ogni elemento eFico. 20.4a

$$\alpha_j^e = \frac{L_x}{L}$$
$$\beta_j^e = \frac{L_y}{L}$$

   Elemento di base e collegamento con giunto i to j avrà $\alpha_i^e = -\alpha_j^e$e $\beta_i^e = -\beta_j^e$e la matrice $[B]$ avrà $2j$ righe e $m + r$ colonne. Può essere invertito solo se è simmetrico (i.e $2j = m + r$, stabilmente determinato).
5. Scrivere le due equazioni di equilibrio a ogni articolazione j in termini di gli sconosciuti (forze e reazioni dei membri)



(a) Direzione cose (b) Forze comuni

Figura 20.4: Metodo congiunto/matrix, diagrammi corpo libero articolari

$$(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0; \Rightarrow \Sigma_{e=1}^{\#\text{ of elements}} \alpha_j^e F_e + R_{x_j} + P_{x_j} = 0$$
$$(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; \Rightarrow \Sigma_{e=1}^{\#\text{ of elements}} \beta_j^e F_e + R_{y_j} + P_{y_j} = 0$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

6. Invertire la matrice a calcolare $\{F\}$ e $\{R\}$

A MATLAB®l'implementazione del codice è data §I.1.1.

32 Il vantaggio di questo metodo, è che una volta $[\mathcal{B}]$ matrice ha è stato invertito, possiamo rianalizzare facilmente la stessa struttura per diversi casi di carico. Con i nuovi codici di progettazione in cui carichi morti e carichi vivi sono separatamente fattorizzati (capitolo 37), questo metodo può salvare notevoli sforzi di rianalisi, inoltre quando le deflettori sono determinate dal metodo della forza virtuale (capitolo 24), le due analisi (carico reale e unità virtuale) possono essere eseguite facilmente.

33 Questo metodo può essere l'unico appropriato per analizzare staticamente Decisi tronchetti che la soluzione sfida i due metodi precedenti, Fig. 20.5.

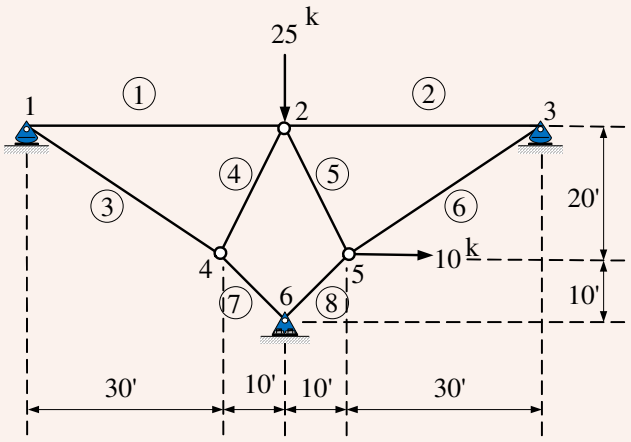


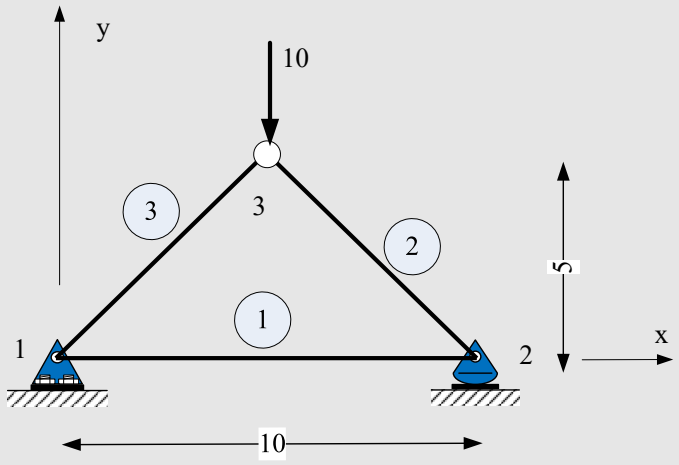
Figura 20.5: Complessivamente determinata trus

20.4.1 Ex 20.4: Capriata semplice: metodo dei nodi/matrice

Determinare tutte le forze membri per la seguente trus

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



1. Prima di tutto determina le direzioni

Membro	Nodi	α	β	α	β
1	1-2	Nodo 1		Nodo 2	
		$\alpha_1^1 = 1$	$\beta_1^1 = 0$	$\alpha_2^1 = -1$	$\beta_2^1 = 0$
2	2-3	Nodo 2		Nodo 3	
		$\alpha_2^2 = -.7071$	$\beta_2^2 = .707$	$\alpha_3^2 = .707$	$\beta_3^2 = -.707$
3	3-1	Nodo 3		Nodo 1	
		$\alpha_3^3 = -.707$	$\beta_3^3 = -.707$	$\alpha_1^3 = .707$	$\beta_1^3 = .707$

2. Poi scriviamo le equazioni dell'equilibrio

$$
\begin{array}{lll}
 & & \begin{matrix} F_1 & F_2 & F_3 & R_{1x} & R_{1y} & R_{2y} \end{matrix} \\
\text{Node 1} & \Sigma F_x = 0 & \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & 0 & \alpha_1^3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & \Sigma F_y = 0 & \begin{bmatrix} \beta_1^1 & 0 & \beta_1^3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
\text{Node 2} & \Sigma F_x = 0 & \begin{bmatrix} \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & \Sigma F_y = 0 & \begin{bmatrix} \beta_2^1 & \beta_2^2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\text{Node 3} & \Sigma F_x = 0 & \begin{bmatrix} 0 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & \Sigma F_y = 0 & \begin{bmatrix} 0 & \beta_3^2 & \beta_3^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
\underbrace{\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ R_{1_x} \\ R_{1_y} \\ R_{2_y} \end{Bmatrix}}_{\{F\}}
+
\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{Bmatrix}}_{\{P\}}
= 0
$$

COPIA DI REVISIONE

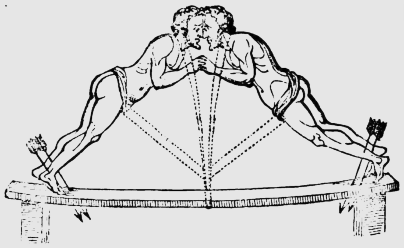
I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

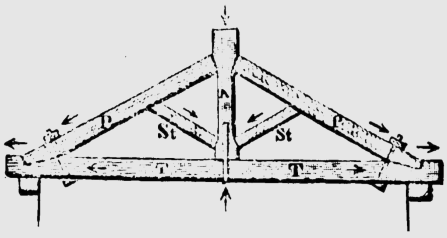
Or

$$\begin{array}{lll} \text{Node 1} & \Sigma F_x = 0 \\ & \Sigma F_y = 0 \\ \text{Node 2} & \Sigma F_x = 0 \\ & \Sigma F_y = 0 \\ \text{Node 3} & \Sigma F_x = 0 \\ & \Sigma F_y = 0 \end{array} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & .707 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .707 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .707 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & .707 & -.707 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -.707 & -.707 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{[\mathcal{B}]} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ R_{1_x} \\ R_{1_y} \\ R_{2_y} \end{array}\right\}}_{\{F\}} + \underbrace{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{array}\right\}}_{\{P\}} = 0$$

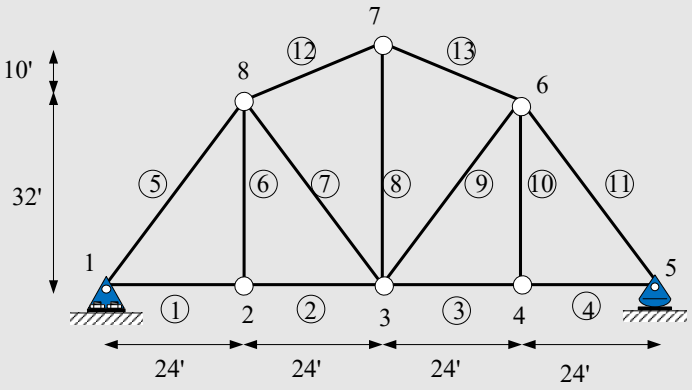
Invertire $[\mathcal{B}]$ noi otteniamo da $F = -[\mathcal{B}]^{-1}P$

$$\left\{\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \hline R_{1_x} \\ R_{1_y} \\ R_{2_y} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 5 \\ -7.07 \\ -7.07 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \end{array}\right\}$$





20.4.2 Ex 20.5: Capriata complessa: metodo dei nodi/matrice



COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

1. Determinare la direzione cosenes

$$\frac{24}{\sqrt{24^2+32^2}} = \frac{3}{5} = 0.6$$
$$\frac{32}{\sqrt{24^2+32^2}} = \frac{4}{5} = 0.8$$
$$\frac{10}{\sqrt{24^2+10^2}} = \frac{10}{26} = 0.38$$
$$\frac{24}{\sqrt{24^2+10^2}} = \frac{24}{26} = 0.92$$

2. Impostare il $\mathcal{B}$ matrice

$$\begin{array}{ll}
\#1 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#2 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#3 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#4 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#5 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#6 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#7 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#8 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y
\end{array}
\underbrace{\left[\begin{array}{cccccccccccc|ccc}
1 & & & & .6 & & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & .8 & & & & & & & & & & 1 & \\
\hline
-1 & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
\hline
 & -1 & 1 & & & & -.6 & & .6 & & & & & & & \\
 & & & & & & .8 & 1 & .8 & & & & & & & \\
\hline
 & & -1 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
\hline
 & & & -1 & & & & & & & -.6 & & & & & \\
 & & & & & & & & & & .8 & & & & 1 & \\
\hline
 & & & & & & & & -.6 & & .6 & & -.92 & & & \\
 & & & & & & & & -.8 & -1 & -.8 & & .38 & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & -.92 & .92 & & & \\
 & & & & & & & -1 & & & & -.38 & -.38 & & & \\
\hline
 & & & & -.6 & & .6 & & & & & .92 & & & & \\
 & & & & -.8 & -1 & -.8 & & & & & .38 & & & &
\end{array}\right]}_{[\mathbf{B}]}
\underbrace{\left\{\begin{array}{c}
F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ \hline R_{1_x} \\ R_{1_y} \\ R_{5_y}
\end{array}\right\}}_{?}
+
\underbrace{\left\{\begin{array}{c}
0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ -20 \\ \hline 0 \\ -40 \\ \hline 0 \\ -40 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ \hline -8 \\ \hline 0 \\ -12
\end{array}\right\}}_{\checkmark}
= 0$$

3. Invert (utilizzando *Mathematica*)

```
b={
{ 1, 0., 0.,  0.,0.6,  0.,  0., 0.,  0.,  0.,  0.,   0.,   0.,  1,
   0., 0.},
{0., 0., 0.,  0.,0.8,  0.,  0., 0.,  0.,  0.,  0.,   0.,   0., 0.,
   1,  0.},
{-1, 1,  0.,  0.,  0.,  0.,  0., 0.,  0.,  0.,  0.,   0.,   0., 0.,
   0., 0.},
{0.,0.,  0.,  0.,  0.,   1,  0., 0.,  0.,  0.,  0.,   0.,   0., 0.,
   0., 0.},
{0.,-1,   1,  0.,  0.,  0.,-0.6, 0.,  0.6, 0.,  0.,   0.,   0., 0.,
   0., 0.},
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
{0., 0., 0.,  0.,  0.,  0., 0.8, 1.,  0.8, 0.,  0.,   0.,   0., 0.,
    0., 0.},
{0., 0., -1,   1,  0.,  0.,  0., 0.,   0., 0.,  0.,   0.,   0., 0.,
    0., 0.},
{0., 0., 0.,  0.,  0.,  0.,  0., 0.,   0., 1.,  0.,   0.,   0., 0.,
    0., 0.},
{0., 0., 0.,  -1,  0.,  0.,  0., 0.,   0., 0.,-0.6,   0.,   0., 0.,
    0., 0.},
{0., 0., 0.,  0.,  0.,  0.,  0., 0.,   0., 0., 0.8,   0.,   0., 0.,
    0., 1.},
{0., 0., 0.,  0.,  0.,  0.,  0., 0., -0.6, 0., 0.6,   0.,-0.92, 0.,
    0., 0.},
{0., 0., 0.,  0.,  0.,  0.,  0., 0., -0.8,-1.,-0.8,   0., 0.38, 0.,
    0., 0.},
{0., 0., 0.,  0.,  0.,  0.,  0., 0.,   0., 0.,  0.,-0.92, 0.92, 0.,
    0., 0.},
{0., 0., 0.,  0.,  0.,  0.,  0., -1,   0., 0.,  0.,-0.38,-0.38, 0.,
    0., 0.},
{0., 0., 0.,  0., -0.6, 0., 0.6, 0.,   0., 0.,  0., 0.92,   0., 0.,
    0., 0.},
{0., 0., 0.,  0.,-0.8, -1,-0.8, 0.,   0., 0.,  0., 0.38,   0., 0.,
    0., 0.}
}
p={0, 0, 0, -20,  0, -40 ,  0, -40,  0, 0,  0, 0, 0, -8,  0, -12}
m=Inverse[b].p
```

4. Risultati finali
   Fuori.[3]= -43.5, -43.5, -46.5, -46.5, 72.5, -20., -7.66598, -31.7344, -2.66598, -40., 77.5, 52.2822, 52.2822, -1.22125 10 , -58., -62.
   che corrispondono alle forze interne dell'elemento sconosciuto e reazioni esterne.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Anselm Kiefer, *Dama* (1990)

Elementi rigidi ma interconnessi riflettono metaforicamente come le capriate distribuiscono efficacemente le forze attraverso la triangolazione, garantendo sia forza che stabilità.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

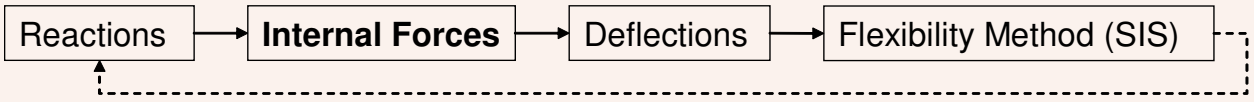
Capitolo 21

Forze interne negli elementi inflessi

Abstract

Questo capitolo rivisita e sottolinea il rapporto fondamentale tra domanda esterna e capacità interna nei sistemi strutturali, un concetto chiave che spesso si trascura (se non del tutto assente) in testi di analisi strutturale standard. Quindi, il capitolo è intenzionalmente chiamato "Forze interne", una partenza dal titolo tradizionale e un po 'mondane di "Shear and Moment Diagrams'. Il capitolo inizia affrontando le relazioni tra stress e forze interne che ne derivano, identificando successivamente le forze interne pertinenti per ogni struttura. Il capitolo si conclude con una serie di esempi progressivamente complessi.

21.1 Introduzione 949
21.1.1 Avviamento di ingegneria: dalle sollecitazioni alle forze interne 949
21.1.2 Forze interne per travi rettilinee/curve da 2d/3d 950
21.1.3 Perché è importante 952
21.1.4 Convenzioni di cartello di progettazione 953
21.2 Carico, taglio, relazioni di momento 954
21.2.1 Forma differenziale 954
21.2.2 Forma integrale 955
21.3 Esempi 956
21.3.1 Ex 21.1: Fascio con carico inclinato 957
21.3.2 Ex 21.2: Telaio incline 958
21.3.3 Ex 21.3: Telaio con carico idrostatico 961
21.3.4 Ex 21.4: Carico lineare e variabile 963
21.3.5 Ex 21.5: Telaio; esempio tetto inclinato 964
21.3.6 Ex 21.6: Telaio reciproco . . . 965
21.3.7 Ex 21.7: Telaio 3D 969

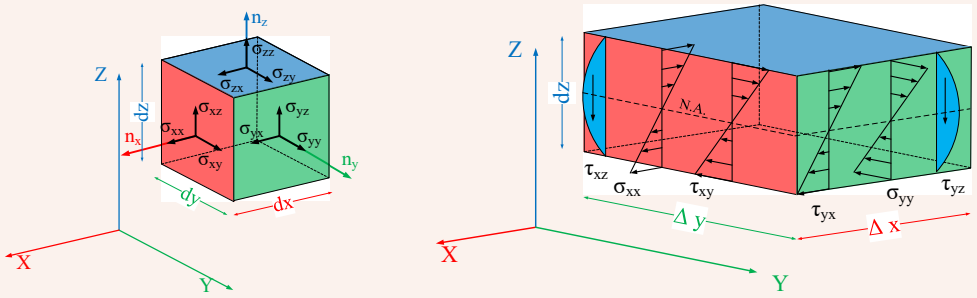


COPIA DI REVISIONE

21.1 Introduzione

21.1.1 Avviamento di ingegneria: dalle sollecitazioni alle forze interne

1 Stresses (definite in §O.2.2) sono definiti in un punto infinitesimale, Fig. 21.1a e hanno (tipicamente) una distribuzione lineare come mostrato in Fig. 21.1b per un piatto di spessore t.



(a) Stress interni ad un punto infinitesimale

(b) Distribuzione di stringa su un piatto

Figura 21.1: Stress interni

2 Trasferirsi alle forze interne, non sono entità fisiche che si possono osservare direttamente; piuttosto, ciò che possiamo effettivamente registrare e osservare è una varietà: a loro volta inducono tensioni che ancora non possono essere misurate direttamente. Solo problemi molto limitati e semplici possono essere risolti analiticamente solo sulla base di stress (funzione di stress aereo o mappatura conformale). Numeramente, useremo naturalmente elementi finiti continuum dove la soluzione è espressa in termini di stress. Queste sollecitazioni possono quindi essere integrate per calcolare le forze interne corrispondenti, necessarie per verificare la conformità ai requisiti di codice

3 Per facilitare l'analisi in scenari complessi (cioè praticamente tutti i problemi), si introduce il concetto di forza interna.

4 Quindi, le forze interne sono concettuali *astrazione* Matematicamente, sono gli elementi fondamentali delle distribuzioni dello stress su aree specifiche.

5 Le forze sono *definito* come risultati

$$\textbf{Forze assiali } \mathbf{N} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma dz$$

$$N_{xx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} dz;\ N_{yy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{yy} dz;\ N_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xy} dz$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Momenti $\mathbf{M} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \boldsymbol{\sigma} z dz$

$$M_{xx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} z dz;\ M_{yy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{yy} z dz;\ M_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xy} z dz$$

Shear $\mathbf{V} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \boldsymbol{\tau} dz$

$$V_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xz} dz;\ V_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz} dz$$

6 I Thos a loro volta saranno usati come forze interne, in varie combinazioni a seconda del tipo di elemento strutturale.

21.1.2 Forze interne per travi rettilinee/curve da 2d/3d

7 A seconda del tipo di struttura, ci saranno diverse forze con cui affrontare, Fig. 21.2. Si noti che i momenti sono mostrati come vettori a doppia testa invece di frecce curve (come nell'esempio in setta. 19.2.8).

8 È consuetudine presumere che il membro sia lungo la x asse, che le forze assiali e di taglio sono denotate da N e V, mentre torsione e momenti sono denotati da T e M.

9 In termini di notazione, è consuetudine indicare la forza assiale lungo il x asse come forza normale ed è denotato da N, mentre gli altri sono forze di taglio V. Allo stesso modo il momento lungo x è la torsione T, gli altri sono momenti M.

10 Quando si considerano le forze interne in contesti tridimensionali (3D), è importante specificare chiaramente la direzione e il piano di azione di queste forze (ad esempio. V_x e V_y, M_z)[1].

11 Di seguito sono riportati i termini applicabili:

[1] Nelle piastre e nelle conchiglie, avremo due sottoscritti, Fig. 34.2b e 35.3

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

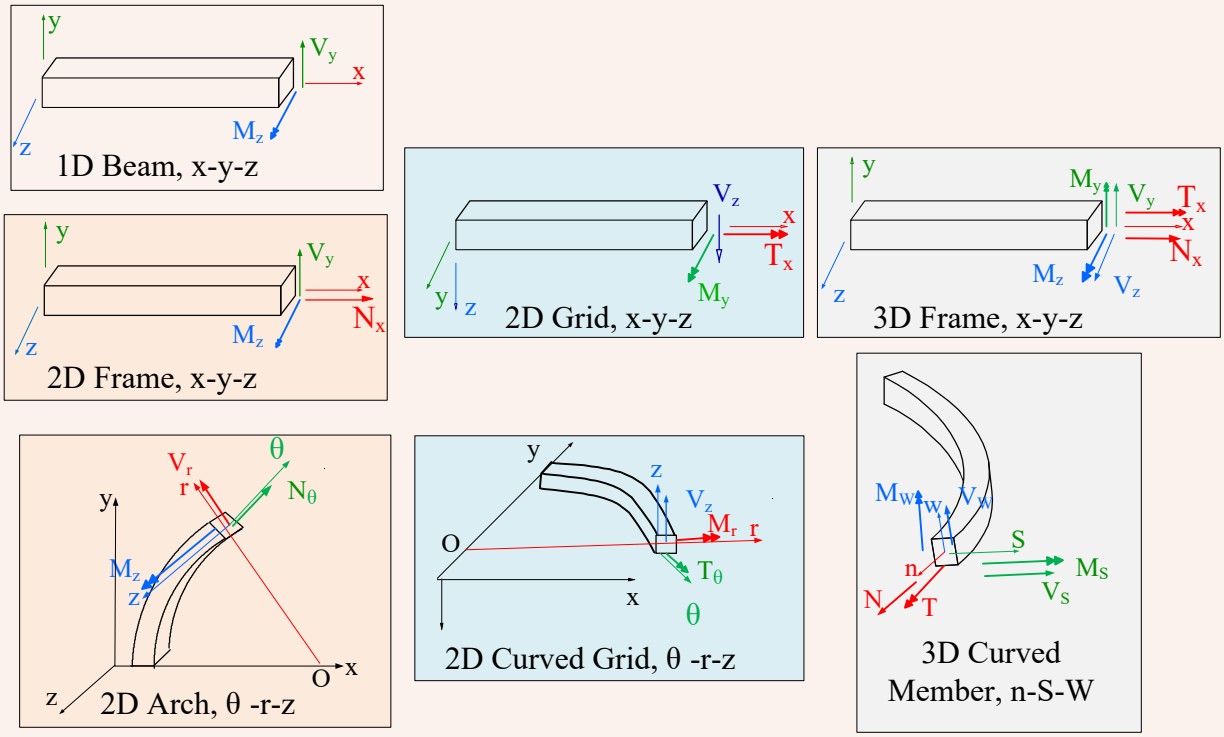


Figura 21.2: Forze interne in travi rettilinee e curve

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Definition 21.1: Forze interne nelle strutture

Carte							Polare polare						
	Forze			Momenti				Forze			Momenti		
	x	y	z	x	y	z		r	θ	z	r	θ	z
Signora		V_y				M_z	Arco	V_r	N_θ				M_z
Telaio 2D	N_x	V_y				M_z							
Griglia			V_z	T_x	M_y		Fascio curvato			V_z	M_r	T_θ	
Telaio 3D	N_x	V_y	V_z	T_x	M_y	M_z							

	Forze			Momenti		
	n	s	w	n	s	w
3D curvato	N_n	V_s	V_w	T_n	M_s	M_w

21.1.3 Perché è importante

12 Nell'ingegneria strutturale, si parla di concetti di domanda e capacità. Nel contesto del presente capitolo, "Demand"' si riferisce alle forze assiali, taglio o momento applicate esternamente. «Capacità» è invece definita come la capacità del membro strutturale di sviluppare una distribuzione interna dello stress, che deve essere uguale e opposta a quella applicata dalla domanda.

13 Questo è illustrato in Fig. 21.3 quando un carico esterno provoca un momento lungo il membro. Prendendo come diagramma del corpo libero il segmento sinistro del fascio, avremo tre equazioni di equilibrio da soddisfare, sommando:

1. Forze in y direzione verticale: $V = R_a - qx$
2. Forze in x direzione assiale: $C = T$
3. Momenti: $M_{ext} = M_{int} = Cd$

14 Le forze interne, come qui definito, sono rilevanti solo nel disegno in cui si riferisce la relazione di stress-strain materiale.[2], la distribuzione delle tensioni è lineare e quindi per qualsiasi rapporto di stress vengono determinate le corrispondenti sollecitazioni. C, T e M_{int}

15 Il requisito di equilibrio tra Capacità e Domanda è un principio fondamentale che si basa su tutti i codici di progettazione (capitolo 37).

[2]Finché la durata dell'arco/altezza è inferiore a circa 8.

COPIA DI REVISIONE

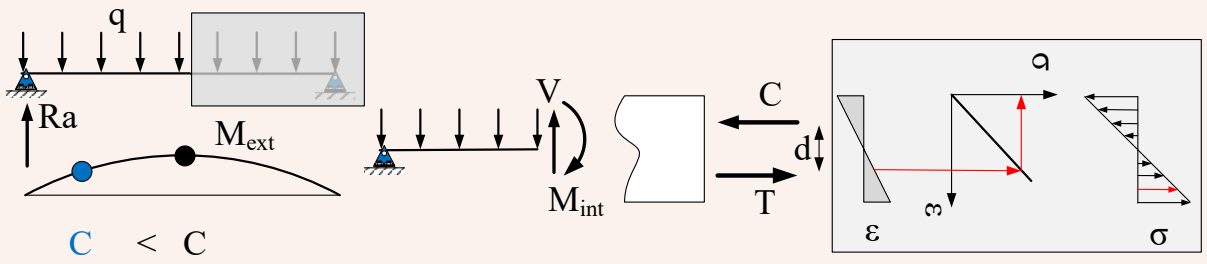


Figura 21.3: Forze interne

21.1.4 Convenzioni di cartello di progettazione

16 Prima di noi (re)dirigenti le relazioni Shear-Moment, definiamo arbitrariamente una convenzione dei segni.

17 La convenzione dei segni adottata qui, è quella comunemente utilizzata per scopi di progettazione[3].

18 Con riferimento a Fig. 21.5

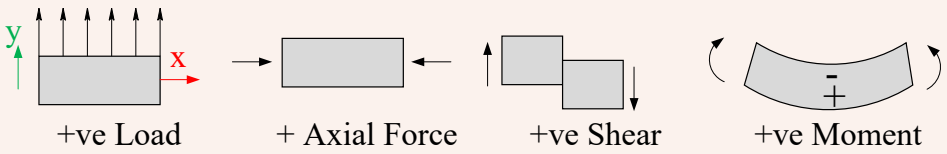


Figura 21.4: Portata e momento firma convenzioni per il design

Figura 21.5: Convenzioni di cartello di progettazione

Caricamento Positivo lungo l'asse y locale del fascio (supponendo un diritto convenzione laterale della mano), che è positivo verso l'alto.

Assiale: tensione positiva.

Flessione: Un momento positivo è quello che provoca tensione nel basso fibre e compressione nelle superiori. In alternativa, i momenti sono disegnati sul lato della compressione (utile da mantenere in mente per cornici).

- Si'. Una forza di taglio positiva è quella che è "up" su un volto negativo, o "down" su uno positivo. In alternativa, un paio di cesoie positive le forze causeranno rotazione in senso orario.

Torsione: In senso orario positivo

[3] Più tardi, in corsi di analisi più avanzati useremo uno diverso, §26.1.1

COPIA DI REVISIONE

19 Per tutte le analisi 3D, è preferibile usare vettori a doppia freccia (e non frecce curve). Le forze e i momenti (comprese le torsioni) sono poi definiti rispetto alle un sistema di coordinate laterali destro.

21.2 Carico, taglio, relazioni di momento

20 (re)dirigiamo le relazioni di base tra carico, taglio e momento. Considerando una lunghezza infinitesimale dx di un raggio sottoposto a un carico positivo[4] $w(x)$, Fig. 21.6. Anche la sezione infinitesimale deve essere in equilibrio.

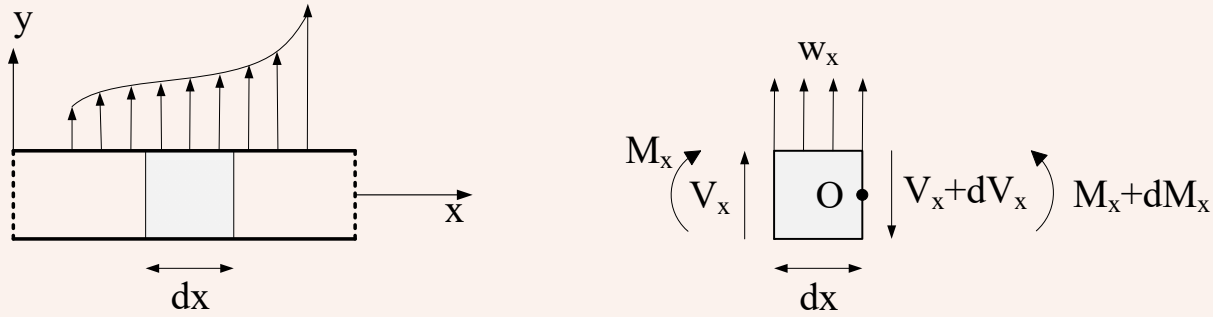


Figura 21.6: Schema corpo libero di un segmento del fascio infinitesimale

21 Non ci sono forze assiali[5], così abbiamo solo due equazioni di equilibrio per soddisfare $\Sigma F_y = 0$ e $\Sigma M_z = 0$.

22 Da dx è infinitamente piccola, la piccola variazione carico lungo può essere trascurato, quindi presumiamo $w(x)$ di essere costante lungo dx.

23 Denotare che un piccolo cambiamento nella torsione e il momento si verifica sopra la lunghezza dx dell'elemento, aggiungiamo il differenziale quantità dV_x e dM_x to V_x e M_x sulla faccia destra.

21.2.1 Forma differenziale

24 Next considering the first equation of equilibrium

$$(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_x + w_x \mathrm{d}x - (V_x + \mathrm{d}V_x) = 0$$

or

[4] In questa derivazione, come in tutti altri che dovremmo assumere tutte le quantità per essere positive.
[5] Le forze assiali saranno incluse nell'equazione differenziale che disciplina l'indurimento (Equazione Euler).

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

Definition 21.2: Guarnizione; Differenziale

$$\frac{dV}{dx} = w(x)$$

Il pendio della curva di taglio in qualsiasi punto lungo l'asse di un membro è data dalla curva di carico a quel punto.

25 Analogamente

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_O = 0 \Rightarrow M_x + V_x dx - w_x dx \frac{dx}{2} - (M_x + dM_x) = 0$$

Neglecting il dx^2 termine, questo semplifica

Definition 21.3: Momento; Differenziale

$$\frac{dM}{dx} = V(x)$$

Il pendio della curva del momento in qualsiasi punto lungo l'asse di un membro è dato dalla cesoia a quel punto.

21.2.2 Forma integrale

26 Forme alternative delle equazioni precedenti

$$V = \int w(x)dx$$

or

Definition 21.4: Guarnizione; Integral

$$\Delta V_{21} = V_{x_2} - V_{x_1} = \int_{x_1}^{x_2} w(x)dx$$

Il cambiamento nella trave 1 e 2, ΔV_{1-2}, è uguale a area sotto il carico tra x_1 e x_2.

allo stesso modo anche allo stesso tempo, allo stesso anche allo stato similarmente.

$$M = \int V(x)dx$$

or

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Definition 21.5: Momento; Integral

$$\Delta M_{21} = M_2 - M_1 = \int_{x_1}^{x_2} V(x)\mathrm{d}x$$

Il cambiamento nel momento tra 1 e 2, ΔM_{21}, è uguale a la zona sotto la curva della cinghia tra x_1 e x_2.

27 Nota che dobbiamo ancora avere V_1 e M_1 per determinare V_2 e M_2.

28 Relazioni simili saranno determinate in seguito (capitolo 9) tra curvatura $\frac{M}{EI}$ e rotazione θ (22.16).

29 La variazione della tosaia e dei momenti lungo un fascio sotto vari carichi è mostrata in Fig. 21.7. Questa figura potrebbe servire come linea guida nel disegno di taglio/momento diagrammi.

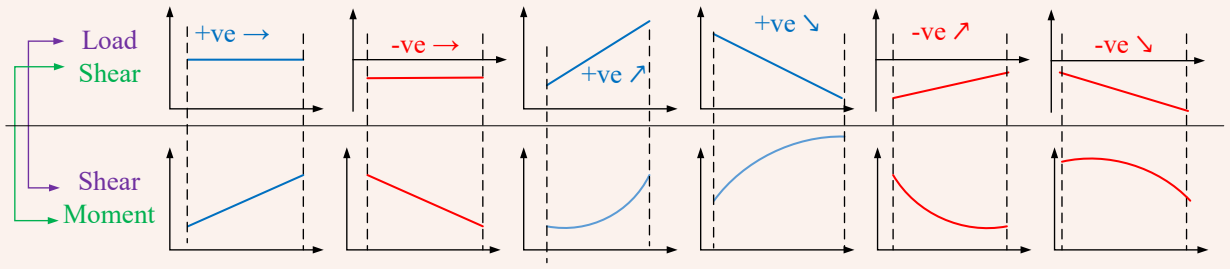


Figura 21.7: Variazioni di carico, taglio e momenti

30 Per il design, spesso dobbiamo considerare diverse combinazioni di carico. Per ogni combinazione di carico, dovremmo disegnare la cinghia, diagrammi di momento. e poi dovremmo usare la busta del Momento per scopi di progettazione.

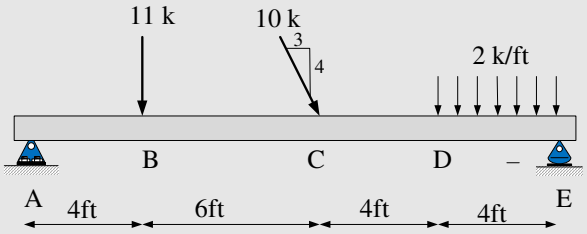
21.3 Esempi

31 Sono stati selezionati con attenzione per evidenziare una sottile complessità del processo, o per fornire approcci alternativi per determinare i diagrammi di taglio e momento. A volte, i calcoli vengono eseguiti separatamente dalla figura, altri, i calcolo sono mostrati nei diagrammi del corpo libero stessi.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

21.3.1 Ex 21.1: Fascio con carico inclinato



Reazioni sono determinati dalle equazioni di equilibrio

$$(\leftarrow) \Sigma F_x = 0; \Rightarrow -R_{A_x} + 6 = 0 \Rightarrow R_{A_x} = 6 \text{ k}$$
$$(+\circlearrowleft) \Sigma M_A = 0; \Rightarrow (11)(4) + (8)(10) + (4)(2)(14+2) - R_{F_y}(18) = 0$$
$$\Rightarrow R_{F_y} = 14 \text{ k}$$
$$(+\uparrow) \Sigma F_y = 0; \Rightarrow R_{A_y} - 11 - 8 - (4)(2) + 14 = 0 \Rightarrow R_{A_y} = 13 \text{ k}$$

Shear sono determinati dopo.

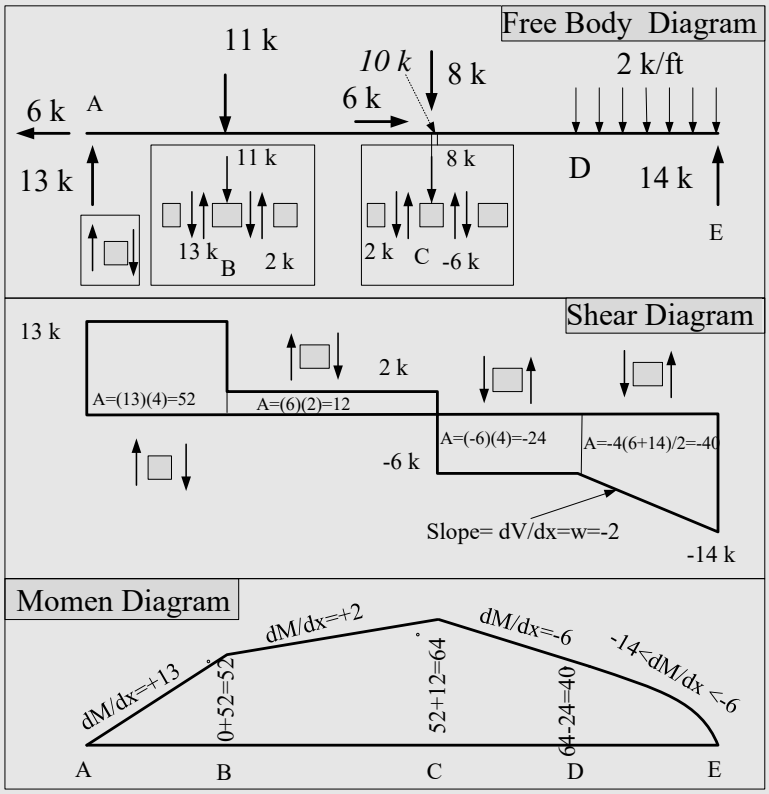
1. At A la cesoia è uguale alla reazione ed è positiva.
2. At B le gocce di taglio (carico negativo) da 11 k to 2 k.
3. At C che cade di nuovo 8 k to −6 k.
4. Resta costante fino a D e poi diminuisce (constante pendenza negativa dal momento che il carico è uniforme e negativa) da 2 k per piedi lineari fino a −14 k.
5. Come assegno, −14 k è anche la reazione precedentemente determinata a F.

Momento è determinato ultimo:

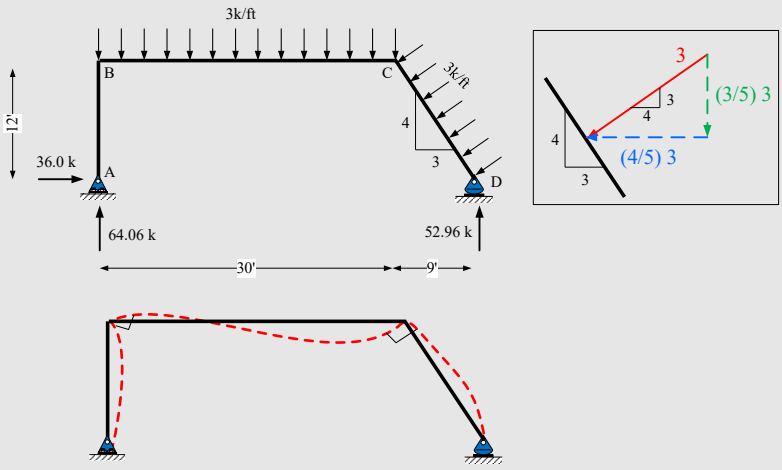
1. Il momento in cui A è zero (supporto cerniera).
2. Il cambiamento nel momento tra A e B è uguale alla zona sotto il diagramma corrispondente della cinghia, o $\Delta M_{B-A} = (13)(4) = 52$.
3. ecc...

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



21.3.2 Ex 21.2: Telaio incline



COPIA DI REVISIONE

Reazioni sono determinati prima

$$(\leftarrow) \Sigma F_x = 0; \Rightarrow R_{A_x} - \underbrace{\frac{4}{5}(3)}_{\text{load}}(15) = 0$$

$$\Rightarrow R_{A_x} = 36 \text{ k}$$

$$(+\circlearrowleft) \Sigma M_A = 0; \Rightarrow (3)(30)(\frac{30}{2}) + \underbrace{\frac{3}{5}(3)(15)\left(30+\frac{9}{2}\right)}_{CD_Y} - \underbrace{\frac{4}{5}(3)(15)\frac{12}{2}}_{CD_X}$$

$$-39R_{D_y} = 0 \Rightarrow R_{D_y} = 52.96 \text{ k}$$

$$(+\uparrow) \Sigma F_y = 0; \Rightarrow R_{A_y} - (3)(30) - \frac{3}{5}(3)(15) + 52.96 = 0$$

$$\Rightarrow R_{A_y} = 64.06 \text{ k}$$

Isolare ogni membro e disegnare il suo diagramma corpo libero per ciascun componente forza.

- Si'.

1. Per $A-B$, la cinghia è costante, pari alla reazione orizzontale at A e negativo secondo la nostra convenzione di segno precedentemente definita, $V_A = -36$ k
2. Per membro $B-C$ at B, la cinghia deve essere uguale alla verticale forza che è stata trasmessa $A-B$, e che è uguale alla verticale reazione a A, $V_B = 64.06$.
3. Da $B-C$ è sottoposto a un carico negativo uniforme, la cinghia lungo il sentiero $B-C$ avrà un pendio pari a -3 e in termini di x (misurato da B to C) è uguale a

$$V_{B-C}(x) = 64.06 - 3x$$

4. La cinghia lungo $C-D$ si ottiene decompostando la verticale reazione a D in componenti assiali e di taglio. Così a D la porta è uguale a $\frac{3}{5}52.96 = 31.78$ k ed è negativo. Sulla base della nostra convenzione di segnale per il carico, la pendenza del cesoio deve essere pari a -3 lungo il sentiero $C-D$. Così la cinghia a punto C è tale che $V_c - \frac{5}{3}9(3) = -31.78$ or $V_c = 13.22$. L'equazione per la cesoia è data da (per x da C to D)

$$V = 13.22 - 3x$$

5. Controlliamo i nostri calcoli verificando l'equilibrio del nodo C

$$(\leftarrow) \Sigma F_x = 0 \Rightarrow \frac{3}{5}(42.37) + \frac{4}{5}(13.22) = 25.42 + 10.58 = 36 \checkmark$$

$$(+\uparrow) \Sigma F_y = 0 \Rightarrow \frac{4}{5}(42.37) - \frac{3}{5}(13.22) = 33.90 - 7.93 = 25.97 \checkmark$$

Momento:

1. Lungo $A-B$, il momento è zero A (dal momento che abbiamo una cerniera), e la sua pendenza è uguale alla cesoia, così a B il momento è uguale a $M_B = (-36)(12) = -432$ k.ft

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

2. Lungo $B-C$, il momento è uguale

$$\begin{aligned} M_{B-C} =& M_B + \int_0^x V_{B-C}(x)\mathrm{d}x = -432 + \int_0^x (64.06 - 3x)\mathrm{d}x \\ =& -432 + 64.06x - 3\frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

which is a parabola. Sostituire per $x = 30$, otteniamo al nodo C: $M_C = -432 + 64.06(30) - 3\frac{30^2}{2} = 139.8$ k.ft

3. If we need to determine the maximum moment along $B-C$, we know that $\frac{\mathrm{d}M_{B-C}}{\mathrm{d}x} = 0$ at the point where $V_{B-C} = 0$, that is $V_{B-C}(x) = 64.06 - 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{64.06}{3} = 21.35$ ft. In altri parole, il momento massimo si verifica dove la cinghia è zero. Thus $M_{B-C}^{\max} = -432 + 64.06(21.35) - 3\frac{(21.35)^2}{2} = -432 + 1,367.7 - 683.7 = -251.98$ k.ft

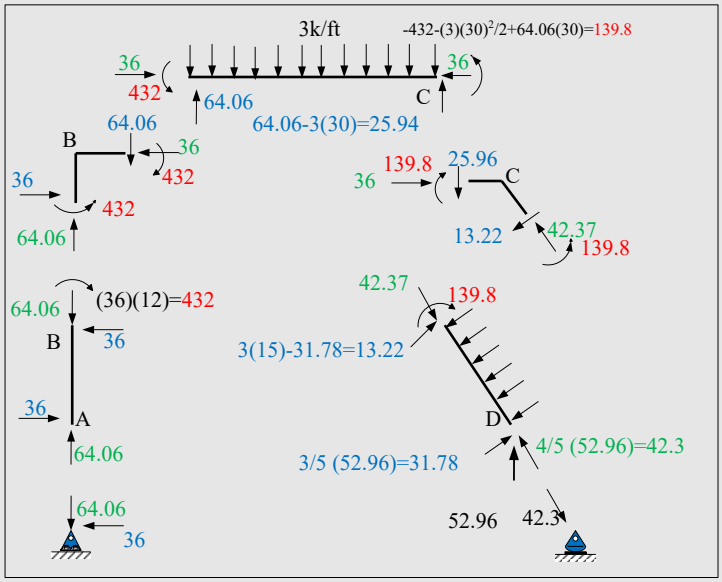
4. Finalmente $C-D$, il momento varia quadraticamente (da quando abbiamo avuto un lineare taglio), il momento aumenta prima (sale positivo) e poi diminuisce (la cesoia negativa). Il momento lungo $C-D$ è dato da

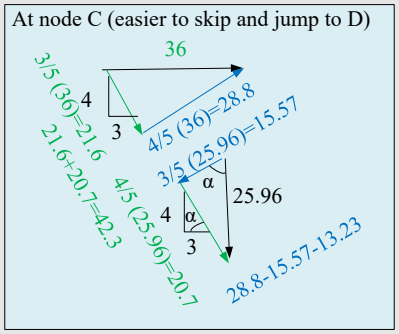
$$\begin{aligned} M_{C-D} &= M_C + \int_0^x V_{C-D}(x)\mathrm{d}x = 139.8 + \int_0^x (13.22 - 3x)\mathrm{d}x \\ &= 139.8 + 13.22x - 3\frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

che è una parabola. Sostituire per $x = 15$, otteniamo al nodo C $M_C = 139.8 + 13.22(15) - 3\frac{15^2}{2} = 139.8 + 198.3 - 337.5 = 0$✓

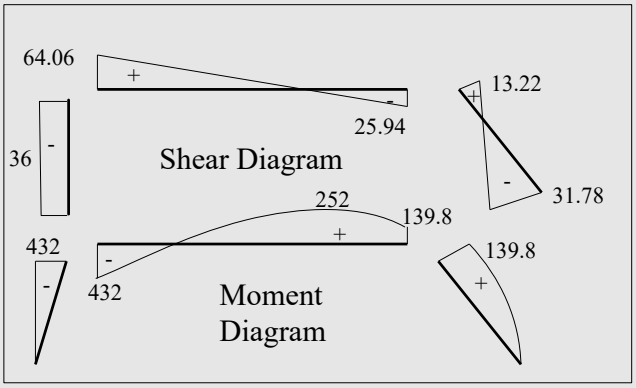
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.





cos α=3/5=N/25.96
N=(25.96)(3)/(5)=15.57



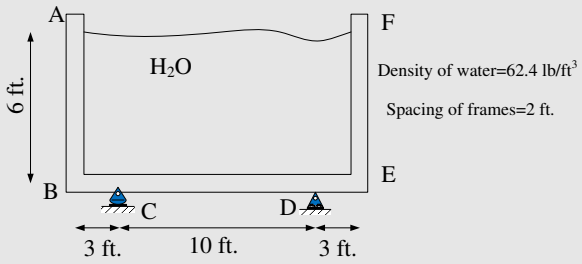
21.3.3 Ex 21.3: Telaio con carico idrostatico

Il seguente telaio è il supporto strutturale di un flamoncino, supponendo che i telai siano distaccati a 2 ft lungo la lunghezza del flume, cerchiamo di

1. Determinare tutte le azioni interne
2. Disegnare la cesoia e diagrammi di momento
3. Individuare e calcolare i massimi momenti di piegatura interna
4. Se questo è un telaio in cemento armato, mostrare la posizione del rinforzo.

COPIA DI REVISIONE

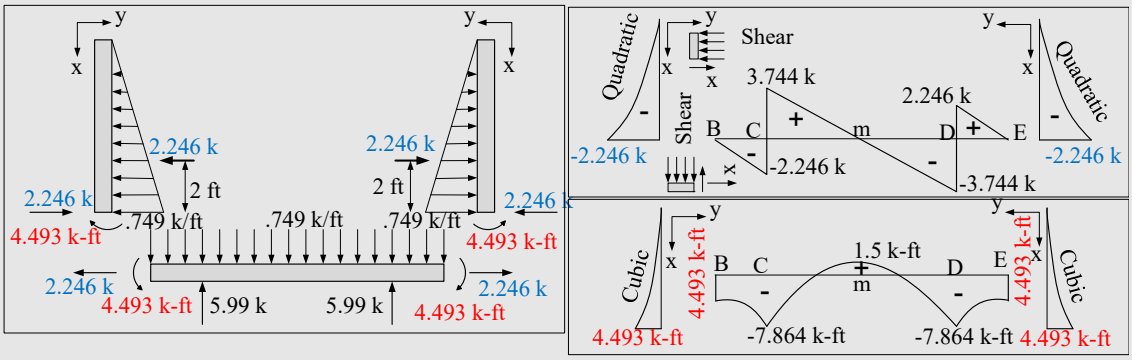
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



La pressione idrostatica provoca forze laterali sui componenti verticali che possono essere trattati come cantilever fissi all'estremità inferiore. La pressione è lineare ed è data da $p = \gamma h$. Poiché ogni cornice supporta una fetta larga 2 ft del flume, l'equazione per w (pounds/foot) è

$$w = (2)(62.4)(h) = 124.8h \text{ lbs/ft}$$

Alla base $w = (124.8)(6) = 749$ lbs/ft $= .749$ k/ft Si noti che questa è sia la pressione laterale sulle pareti finali, così come il carico uniforme sui membri orizzontali.



Azioni finali

1. Forza di base a B is $F_{Bx} = (.749)\frac{6}{2} = 2.246$ k
2. Tempo di base B is $M_B = (2.246)\frac{6}{3} = 4.493$ k.ft
3. Forza di fine B per membro $B - E$ sono uguali e opposti.
4. Reazione C is $R_{Cy} = (.749)\frac{16}{2} = 5.99$ k

Shear forze

1. Base a B la forza di taglio era determinata prima ed era uguale a 2.246 k. Sulla base dell'orientamento del $x - y$ asse, questa è una cesoia negativa.
2. La parte verticale della cinghia B è zero (neglecting the weight of $A - B$)
3. La cesoia a sinistra C is $V = 0 + (-.749)(3) = -2.246$ k.
4. La cesoia a destra di C is $V = -2.246 + 5.99 = 3.744$ k

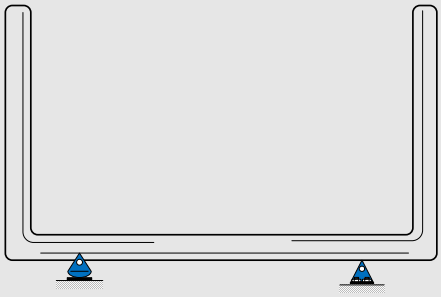
Momento diagrammi

1. Alla base: B $M = 4.493$ k.ft come determinato sopra.
2. A sostegno C, $M_c = -4.493 + (-.749)(3)(\frac{3}{2}) = -7.864$ k.ft
3. Il momento massimo è uguale a $M_{\max} = -7.864 + (.749)(5)(\frac{5}{2}) = 1.50$ k.ft

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Design: Il rinforzo deve essere posto lungo le fibre che sono sotto tensione, cioè sul lato del momento negativo[a]. La figura illustra schematicamente la posizione della flessorale[b] rinforzi.



[a]Ecco perché nella maggior parte dei paesi europei, la convenzione di segno per i momenti di design è l'opposto di quella comunemente usata negli Stati Uniti; il rafforzamento deve essere posto dove il momento è "postivo".

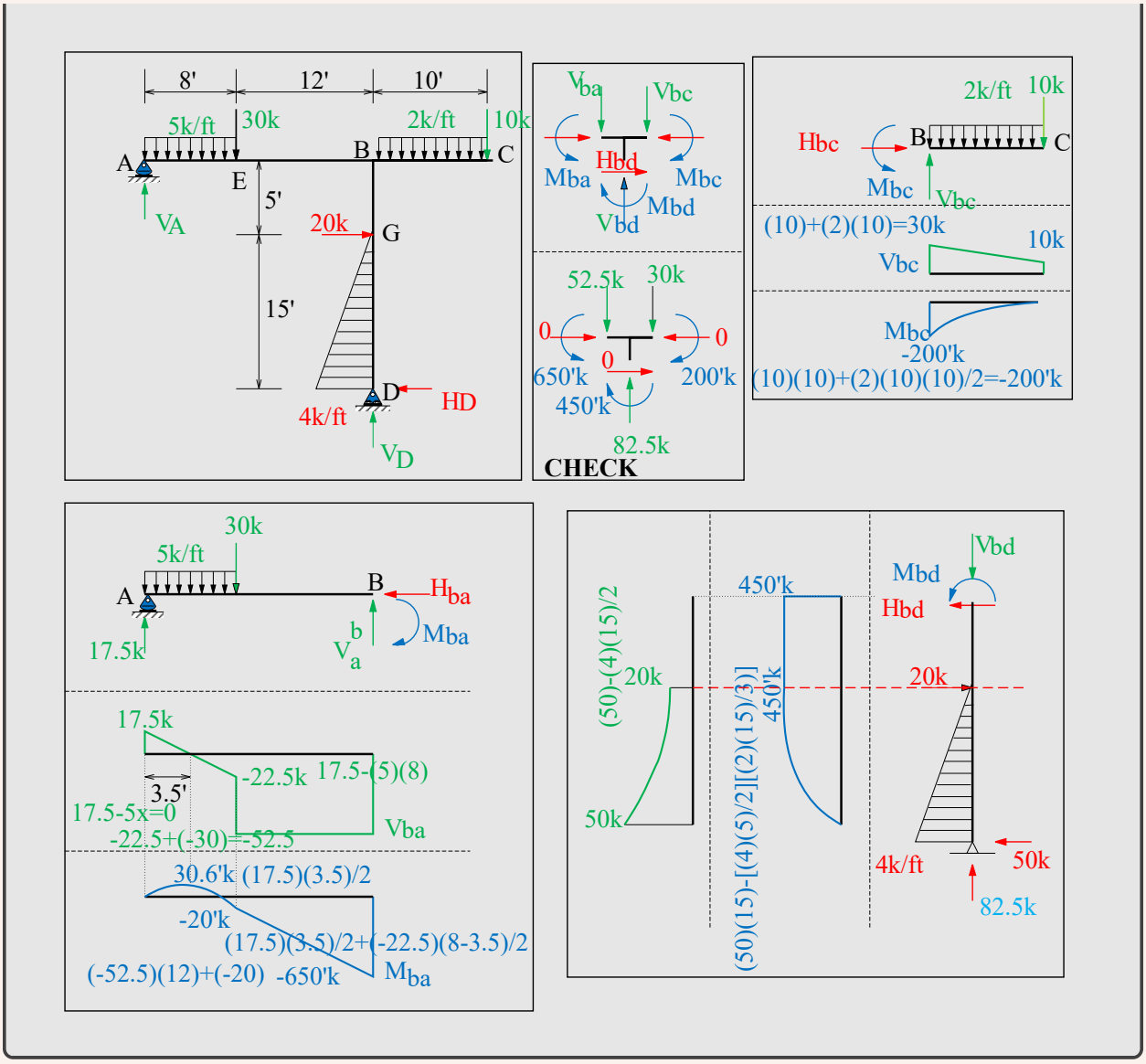
[b]Il rinforzo della cinghia è realizzato in una serie di rotture verticali.

21.3.4 Ex 21.4: Carico lineare e variabile

I dettagli dei calcoli per questo esempio non sono riportati, tuttavia i diagrammi di taglio e di momento possono essere facilmente determinati passo dopo passo

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

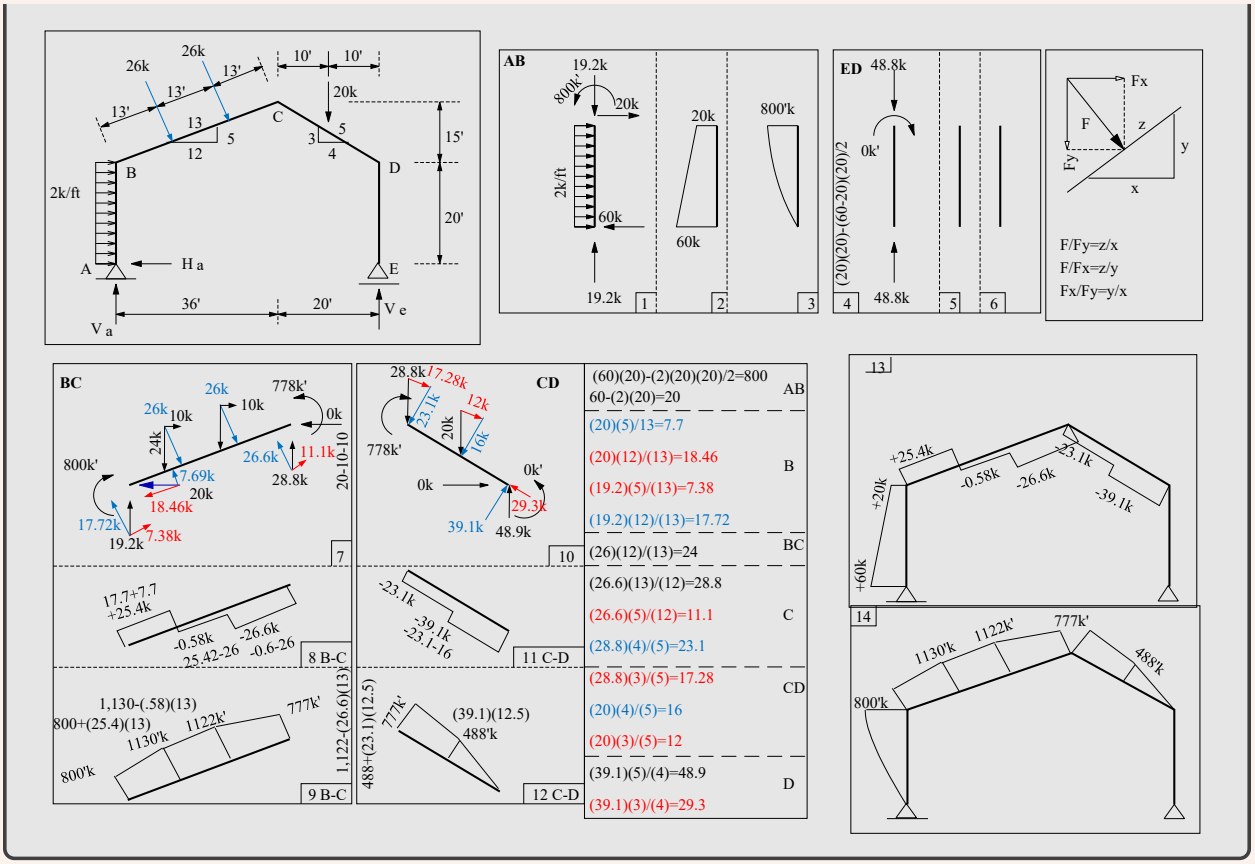


21.3.5 Ex 21.5: Telaio; esempio tetto inclinato

I dettagli dei calcoli per questo esempio non sono riportati, tuttavia i diagrammi di taglio e di momento possono essere facilmente determinati passo dopo passo

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



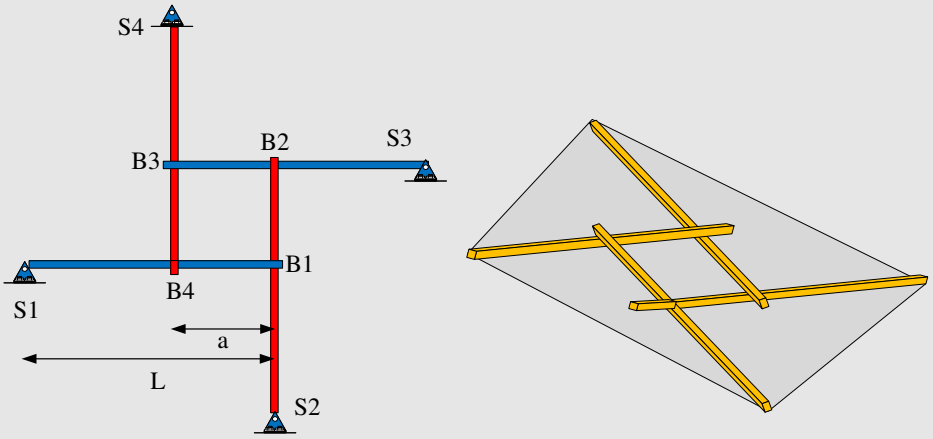
21.3.6 Ex 21.6: Telaio reciproco

La sezione seguente è riprodotta da Schrama, 2021 «*A Structural Analysis of Timber Reciprocal Frames*».

Una semplice cornice reciproca (§15.5.3) è costituito da quattro travi, dove ogni fascio viene supportato su un'estremità da un supporto perimetrale pinned (S1, S2, S3 e S4) e dall'altra da un altro raggio (B1, B2, B3 e B4). Il tipo di supporto dipende dal tipo di connessione che viene utilizzato. Da qualche parte lungo il fascio è dare sostegno ad un altro fascio. La distanza tra la trave supportata e il raggio di appoggio è chiamata *Lunghezza di fidanzamento*. D'ora in poi, il fascio che funge da supporto viene chiamato raggio adiacente, mentre il fazzoletto esercitante si chiama raggio precedente. Il telaio reciproco utilizzato per l'analisi è mostrato di seguito con una lunghezza di fidanzamento a.

COPIA DI REVISIONE

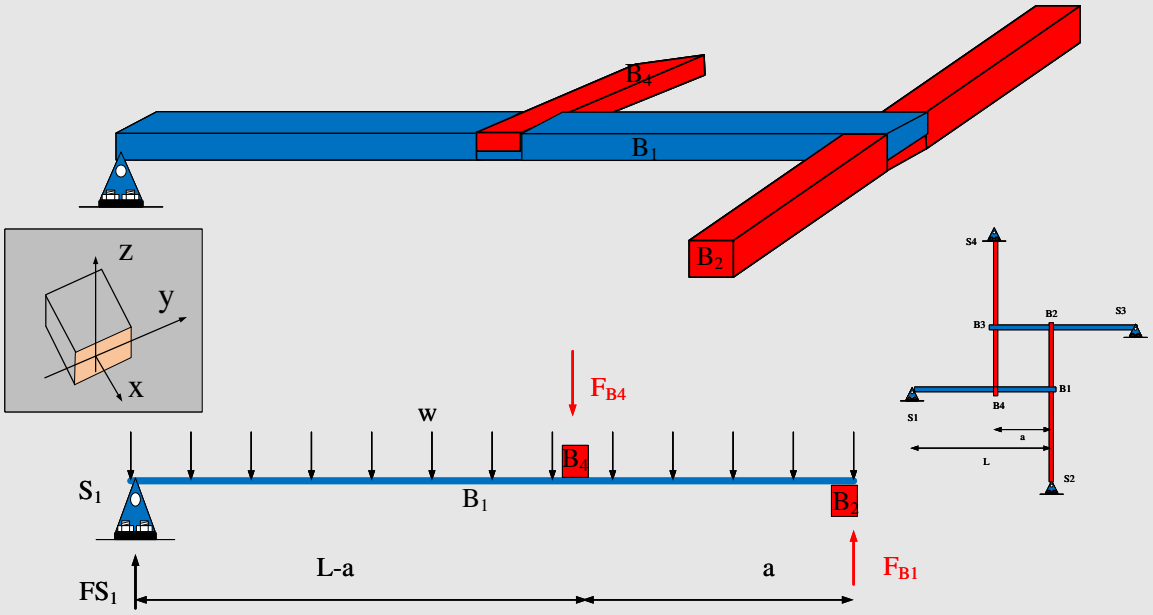
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Connessioni con cerniera

Analizzeremo il telaio reciproco utilizzando la sovrapposizione (cioè senza connessioni rigide notate). I telai sono assunti per essere caricati con un carico uniformemente distribuito w. Inoltre, carico di punto F si aggiunge a distanza a dal fascio di fine, che è esercitato dalla trave precedente. Poiché le travi sono incernierate, entrambe le estremità sono supportate da un supporto pinned. Un singolo fascio dell'unità RF può essere quindi schematizzato come una semplice trave supportata.

Reazioni



A causa della simmetria, le reazioni di supporto verticale sono semplicemente il carico distribuito diviso dal numero di supporti,

$$4wL - 4FS = 0 \Rightarrow F_{S1} = wL$$

dove FS è la somma di tutte e quattro le reazioni. Grazie alla connessione a cerniera in B1, questo fascio è supportato da un supporto pinned che non può portare un momento di piegatura, il che

COPIA DI REVISIONE

significa il momento al momento $B2$ è zero. Con questa condizione, un'espressione per F_{B4} può essere determinato prendendo momento circa B

$$\left.\begin{aligned} F_{S1}L - F_{B4}a - wL\frac{L}{2} = 0 \\ F_{S1} = wL \end{aligned}\right\} F_{B4} = \frac{wL^2}{2a}$$

Poi prendendo la somma della forza verticale

$$\left.\begin{aligned} F_{S1} + F_{B1} - wL - F_{B4} = 0 \\ F_{S1} = wL \end{aligned}\right\} F_{B1} = F_{B4} = \frac{wL^2}{2a} = F$$

Non è sorprendente, poiché la reazione di supporto verticale F_{S1} diventa il carico del punto F adiacente al fascio adiacente. A causa della simmetria e dell'equilibrio verticale totale, F_{S1} e F non può essere diverso da uguale a vicenda.

Forze interne

Le forze interne sezionali sono semplicemente derivate dall'equilibrio.

$$\left.\begin{aligned} M_{\max} = F_{S1}(L-a) - w\frac{(L-a)^2}{2} \\ F_{S1} = wL \end{aligned}\right\} M_{\max} = \frac{L^2 - a^2}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} V_{\text{lft}} = F_{S1} - w(L-a) \\ F_{S1} = wL \end{aligned}\right\} V_{\text{lft}} = wa$$

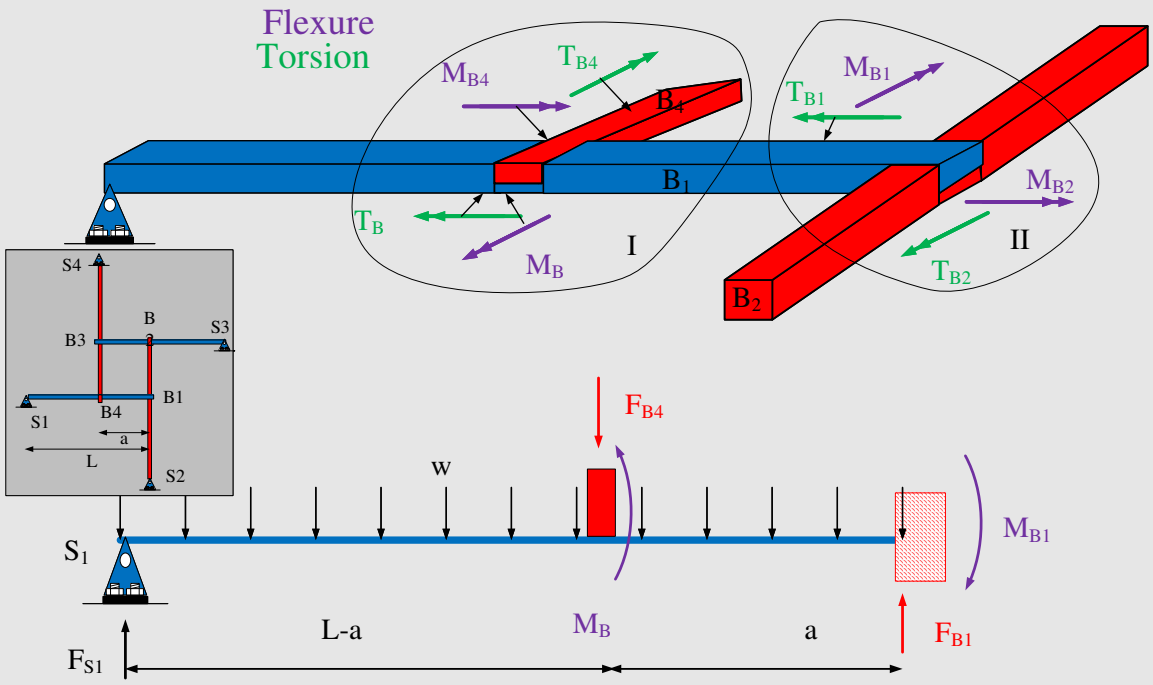
$$\left.\begin{aligned} V_{\text{rgt}} = F_{B1} - wa \\ F_{B1} = \frac{wL^2}{2a} \end{aligned}\right\} V_{\text{rgt}} = w\frac{L^2 - 2a^2}{2a}$$

Collegamenti fissi

Il telaio reciproco si comporta diversamente quando i collegamenti tra le travi sono fissi (tramite tacche) in questo caso, il collegamento può assumere momenti di piegatura. Grazie alle connessioni fisse, il telaio reciproco avrà momenti di flessione in tutte le connessioni. In primo luogo, l'influenza del momento di piegatura M_y rispetto all'asse y viene esaminato. Si noti che questo momento di piegatura M_y risultati in un momento torsionale M_x nella trave adiacente. La distribuzione specifica di questo momento torsionale dipende dal tipo di supporto perimetrale e connessione. In questa cornice reciproca con supporti a pinned, il momento torsional viene trasferito completamente alla prossima connessione. Questo momento torsionale si traduce in un momento di piegatura M_y ad ogni fascio al punto di intersezione con il raggio precedente, come è schematizzato. Ogni connessione include sia un M_y e un M_x e si traduce in un M_x e M_y nel raggio adiacente.

COPIA DI REVISIONE

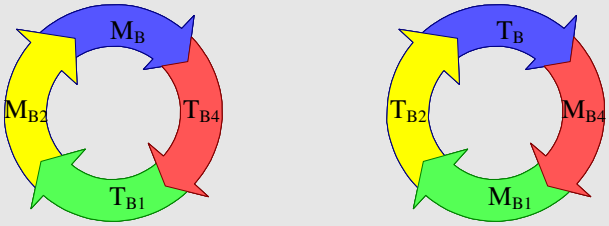
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Considerando solo le forze verticali, abbiamo ancora $F_{B1} = F_{B4}$, ma non conoscono la loro grandezza. In questo problema, dobbiamo torsione in un elemento trasferito come flessore a quello di supporto e viceversa.

$$\underbrace{I \Rightarrow \begin{cases} M_B = T_{B4} \\ T_B = M_{B4} \end{cases}; \quad II \Rightarrow \begin{cases} T_{B1} = M_{B2} \\ M_{B1} = T_{B2} \end{cases};}_{\text{Statics}} \quad \underbrace{\begin{cases} T_{B4} = T_{B1} \\ M_{B4} = M_{B1} \\ M_{B2} = M_B \\ T_{B2} = T_B \\ F_{B4} = F_{B1} \end{cases}}_{\text{Symmetry}}$$

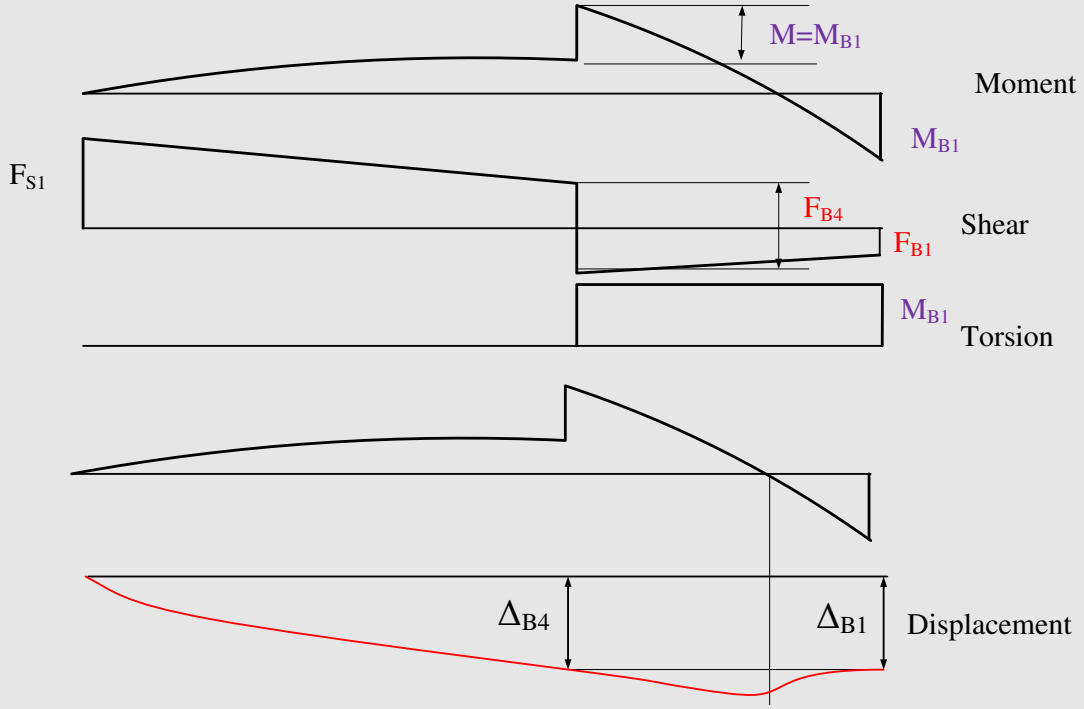
or



e i due set non si intersecano, quindi non possiamo dimostrare che $M_B = M_{B1}$ e siamo lasciati con i seguenti sconosciuti: F_{B1}, M_B, M_{B1} Alla fine, i diagrammi della forza interna saranno

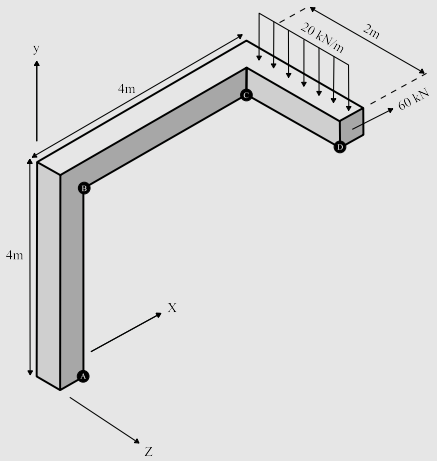
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Ma per simmetria abbiamo $\Delta_{B1} = \Delta_{B4}$, e la pendenza a B1 e B4 deve essere zero. Potremmo applicare i teoremi di curvatura del momento per completare la soluzione.

21.3.7 Ex 21.7: Telaio 3D



1. Il telaio ha un totale di 6 reazioni (3 forze e 3 momenti) al supporto, e abbiamo un totale dei 6 equazioni di equilibrio, quindi è staticamente determinato.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

2. Ogni membro ha le seguenti forze interne (definite in termini di *sistema di coordinate locali* di ogni membro $x' - y' - z'$ tale che x è lungo il membro)

Membro	Forze interne					
Membro	Assilico	Shear		Momento		Torsione
	$N_{x'}$	$V_{y'}$	$V_{z'}$	$M_{y'}$	$M_{z'}$	$T_{x'}$
$C-D$		✓	✓	✓	✓	
$B-C$	✓		✓	✓	✓	✓
$A-B$	✓	✓		✓	✓	✓

3. In questo particolare problema, piuttosto che iniziare determinando le reazioni, è più facile determinare le forze interne alla fine di ogni membro a partire da un membro $C-D$. Si noti che temporaneamente adottiamo una convenzione di firma compatibile con i sistemi di coordinate locali.

C-D

$$\begin{aligned}
\Sigma F_{y'} = 0 \Rightarrow V_{y'}^C &= (20)(2) &&= +40\text{kN}\\
\Sigma F_{z'} = 0 \Rightarrow V_{z'}^C &&&= +60\text{kN}\\
\Sigma M_{y'} = 0 \Rightarrow M_{y'}^C &= -(60)(2) &&= -120\text{kN.m}\\
\Sigma M_{z'} = 0 \Rightarrow M_{z'}^C &= (20)(2)\frac{2}{2} &&= +40\text{kN.m}
\end{aligned}$$

B-C

$$\begin{aligned}
\Sigma F_{x'} = 0 \Rightarrow N_{x'}^B &= V_{z'}^C &&= -60\text{kN}\\
\Sigma F_{y'} = 0 \Rightarrow V_{y'}^B &= V_{y'}^C &&= +40\text{kN}\\
\Sigma M_{y'} = 0 \Rightarrow M_{y'}^B &= M_{y'}^C &&= -120\text{kN.m}\\
\Sigma M_{z'} = 0 \Rightarrow M_{z'}^B &= V_y'^C(4) = (40)(4) &&= +160\text{kN.m}\\
\Sigma T_{x'} = 0 \Rightarrow T_{x'}^B &= -M_{z'}^C &&= -40\text{kN.m}
\end{aligned}$$

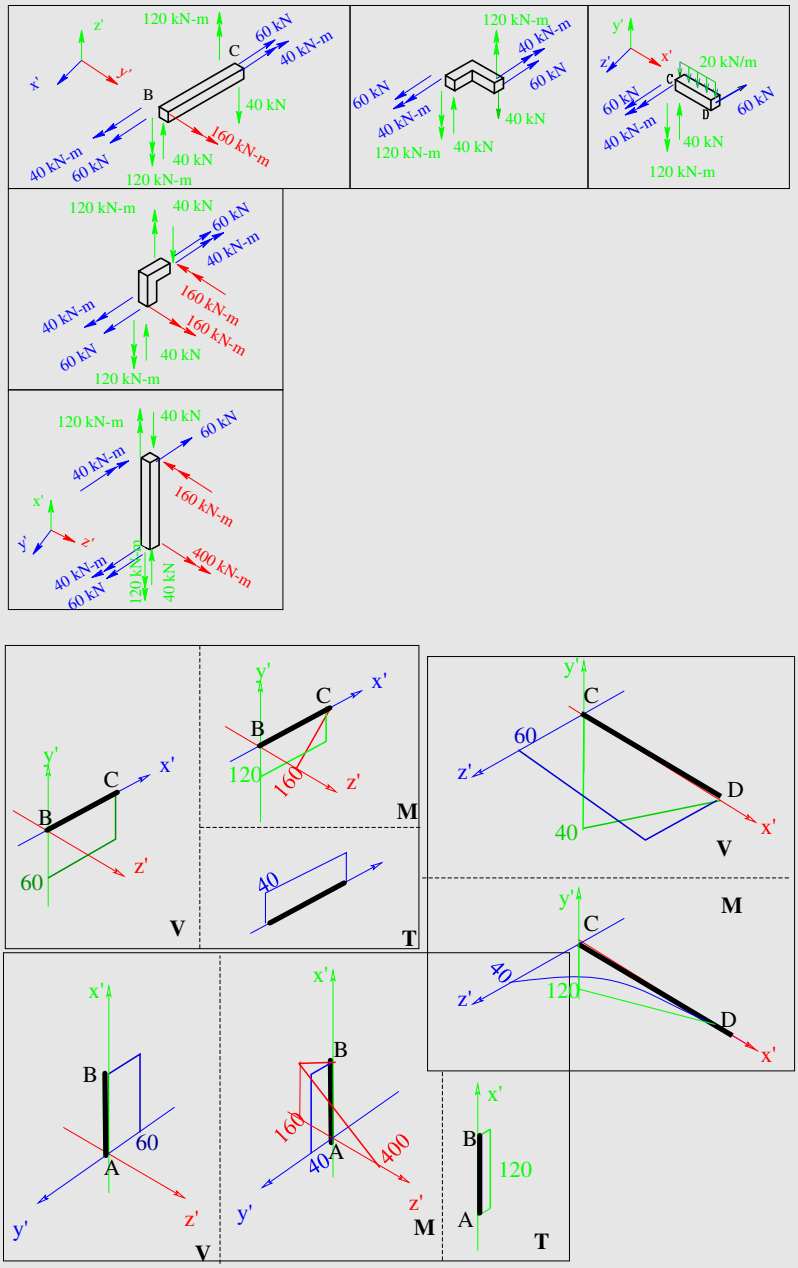
A-B

$$\begin{aligned}
\Sigma F_{x'} = 0 \Rightarrow N_{x'}^A &= V_{y'}^B &&= +40\text{kN}\\
\Sigma F_{y'} = 0 \Rightarrow V_{y'}^A &= N_{x'}^B &&= +60\text{kN}\\
\Sigma M_{y'} = 0 \Rightarrow M_{y'}^A &= T_{x'}^B &&= +40\text{kN.m}\\
\Sigma M_{z'} = 0 \Rightarrow M_{z'}^A &= M_{z'}^B + N_{x'}^B(4) = 160 + (60)(4) &&= +400\text{kN.m}\\
\Sigma T_{x'} = 0 \Rightarrow T_{x'}^A &= M_{y'}^B &&= -120\text{kN.m}
\end{aligned}$$

L'interazione tra forze assiali N e la luce V e tra momenti M e torsione T è chiaramente evidenziato da questo esempio.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Viaducte de Chillon (1969), Monod-Piguet, Svizzera

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 22

Differenze; Curva elastica

Abstract

Questo capitolo affronta la deviazione dei membri flessografici utilizzando sia l'equazione differenziale di governo che il rapporto (collegato) della tensione-curvatura. Quest'ultimo approccio porta al metodo curvatura-area, che include il metodo del fascio coniugato come sottoinsieme. Vengono presentati i problemi di vari livelli di complessità analitica.

22.1 Introduzione 973
22.2 Equazione differenziale 974
22.2.1 Ex 22.1: Doppia integrazione 975
22.2.2 Ex 22.2: Sfilettatura massima 976
22.2.3 Ex 22.3: Forma sci ottimale . 977
22.2.4 Ex 22.4: Trave galleggiante . 978
22.3 Curvatura 981
22.3.1 Ex 22.5: Ruota per bicicletta . 983
22.3.2 Ex 22.6: Rigidezza di una molla elicoidale 988
22.3.3 Relazione curvatura-deformazione 990
22.3.4 Metodo di area curvatura (zona di movimento) 992



22.1 Introduzione

1 La determinazione delle deflettori è parte integrante dell'analisi strutturale, tutti i codici pongono un limite alla deviazione ammissibile (per ridurre le vibrazioni, il battito e altri effetti indesiderati). Inoltre, il calcolo della deflettorazione svolge un ruolo importante nell'analisi delle strutture statalmente indeterminate mediante il metodo di forza (indirizzato nel capitolo 25).

COPIA DI REVISIONE

2 Le disdette delle strutture devono essere determinate per soddisfare i requisiti di serviziabilità, cioè limitare le deflettenze in base alle *servizio* carichi a valori accettabili (come $\frac{\Delta}{L} \leq 360$).

3 Questo capitolo esaminerà le deflettori delle strutture basate su considerazioni geometriche, e in seguito presenteremo un metodo più potente basato sulle considerazioni energetiche (capitolo) 24).

4 In entrambi i casi, il calcolo della deflettorazione è un passo critico per il metodo basato sulla forza di analizzare le strutture staticamente indeterminate.

5 Saranno presentati due metodi (connessi):

- Utilizzare l'equazione differenziale di governo dei raggi attraverso l'integrazione.
- Utilizzare la relazione di curvatura del momento.

22.2 Equazione differenziale

6 Per la custodia elastica:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\sigma}{E}\\ \sigma &= -\frac{M(x)y}{I}\end{aligned}\right\} \varepsilon = -\frac{M(x)y}{EI}$$

Combinando quest'ultima equazione con Eq. 22.15 rendimenti

$$\phi = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \tag{22.1}$$

7 Differenziiamo due volte

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^2\frac{M(x)}{EI}}{dx^2} = \frac{1}{EI}\frac{d^2M(x)}{dx^2}$$

8 Tuttavia, abbiamo anche le relazioni con la forza motrice determinate nel capitolo precedente.

$$\left.\begin{aligned}\frac{dV(x)}{dx} &= w(x)\\ \frac{dM(x)}{dx} &= V(x)\end{aligned}\right\} \frac{d^2M(x)}{dx^2} = w(x)$$

Sostituire

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{w(x)}{EI}$$

Questa equazione può essere generalizzata

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

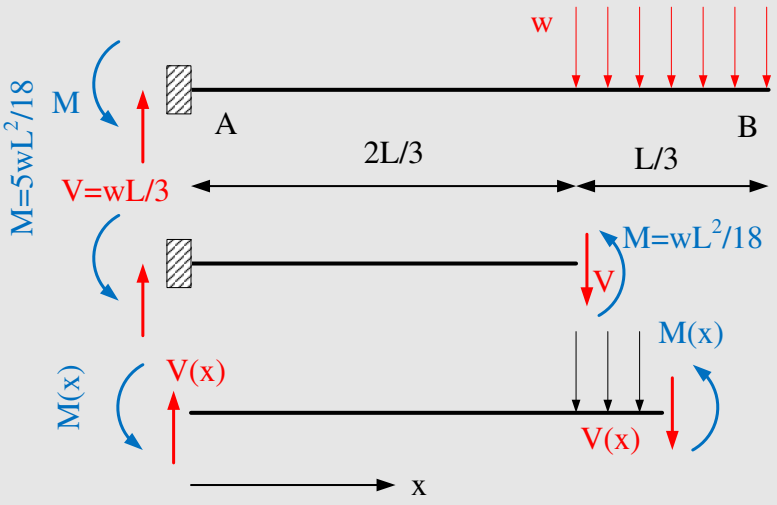
Definition 22.1: Governare l'equazione differenziale Flexure

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = w(x) \text{ or } \frac{\partial^4}{\partial x^4} = \frac{w(x)}{EI} \tag{22.2}$$

Questa è l'equazione differenziale fondamentale dei raggi. Equazioni simili verranno derivate più tardi per cavi e colonne a trave.

22.2.1 Ex 22.1: Doppia integrazione

Cerchiamo di calcolare la deflezione a B per il seguente raggio cantilevered



At: $0 \le x \le \frac{2L}{3}$

1. Equazione del momento

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M_x = \frac{wL}{3}x - \frac{5}{18}wL^2$$

2. Integrare una volta

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{wL}{6}x^2 - \frac{5}{18}wL^2x + C_1$$

   Tuttavia abbiamo $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$, $\Rightarrow C_1 = 0$

3. Integrare due volte

$$EIy = \frac{wL}{18}x^3 - \frac{5wL^2}{36}x^2 + C_2$$

   Ancora una volta abbiamo $x = 0$, $y = 0$, $\Rightarrow C_2 = 0$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

At: $\frac{2L}{3} \le x \le L$

1. Equazione del movimento

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M_x = \frac{wL}{3}x - \frac{5}{18}wL^2 - w(x - \frac{2L}{3})(\frac{x - \frac{2L}{3}}{2})$$

2. Integrare una volta

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{wL}{6}x^2 - \frac{5}{18}wL^2x - \frac{w}{6}(x - \frac{2L}{3})^3 + C_3$$

   Applicare la condizione di confine a $x = \frac{2L}{3}$noi dobbiamo aver $\frac{dy}{dx}$ pari al valore che proviene da sinistra, $\Rightarrow C_3 = 0$

3. Integrazione due volte

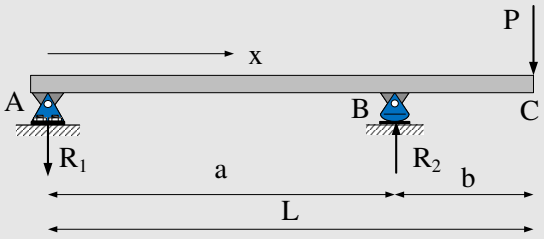
$$EIy = \frac{wL}{18}x^3 - \frac{5}{36}wL^2x^2 - \frac{w}{24}(x - \frac{2L}{3})^4 + C_4$$

   Sempre seguendo lo stesso argomento di cui sopra, $C_4 = 0$

Sostituire per $x = L$ noi otteniamo

$$y = \frac{163}{1944}\frac{wL^4}{EI}$$

22.2.2 Ex 22.2: Sfilettatura massima



Cerchiamo di determinare la massima deviazione per il fascio adiacente. Reazioni

$$sigmccw_z^B = 0; \Rightarrow aR_1 - bP = 0 \Rightarrow edR_1 = \frac{b}{a}P$$

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^A = 0; \Rightarrow aR_2 - PL = 0 \Rightarrow R_2 = \frac{L}{a}P$$

Equazione differenziale

$$EIy'' = -\frac{b}{a}Px + \frac{L}{a}P < x - a >$$

$$EIy' = -\frac{b}{2a}Px^2 + \frac{L}{2a}P < x - a >^2 + C_1$$

$$EIy = -\frac{b}{6a}Px^3 + \frac{L}{6a}P < x - a >^3 + C_1x + C_2$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Applicare le condizioni di confine, a $x = 0$, $y = 0$ di conseguenza $C_2 = 0$e $x = a$, $y = 0$, così $0 = -[b/(6a)]Pa^3 + aC_1$ or $C_1 = (ab/6)P$ Piste sotto carico (nota $x = a + b = L$)

$$\begin{aligned} EIy' &= -\frac{b}{2a}P(a+b)^2 + \frac{a+b}{2a}Pb^2 + \frac{ab}{6}P \\ &= -\frac{b}{2a}P(a^2+2ab+b^2) + \frac{ab^2+b^3}{2a}P + \frac{ab}{6}P \\ &= \dots \\ &= -\frac{1}{6}b(2L+b)P \end{aligned}$$

Sfide sotto il carico P:

$$\begin{aligned} EIy &= -\frac{b}{6a}P(a+b)^3 + \frac{a+b}{6a}Pb^3 + \frac{ab}{6}P(a+b) \\ &= \dots \\ &= -\frac{1}{3}Lb^2P \end{aligned}$$

La deviazione massima tra i supporti si verificherà dove $y' = 0$.

$$EIy^{'} = -\frac{b}{2a}Px^2 + \frac{L}{2a} < x-a >^2 + \frac{ab}{6}P$$

at $y' = 0$, , $x - a >$ non esiste, così $0 = -\frac{b}{2a}Px^2 + \frac{ab}{6}P$ per la risoluzione a, $a = \frac{1}{\sqrt{3}}a$, così possiamo scrivere

$$\begin{aligned} EIy_{max} &= -\frac{b}{6a}P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}a\right)^3 + \frac{ab}{6}P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}a\right) \\ &= \dots \\ &= \frac{a^2b}{9\sqrt{3}}P \end{aligned}$$

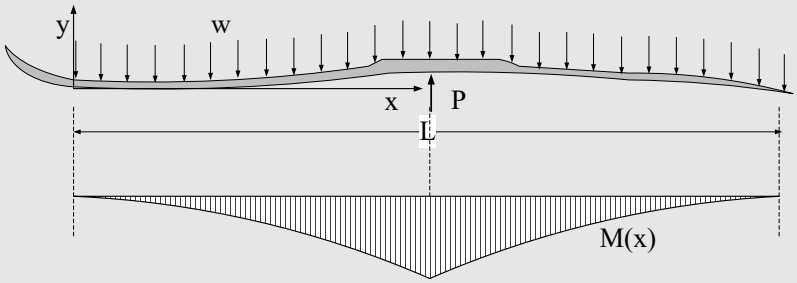
22.2.3 Ex 22.3: Forma sci ottimale

Cerchiamo di determinare la forma di uno sci tale che quando una forza P viene applicata, la forza risultante sotto è unifromly distribuito.

Il problema può essere descritto dalla figura seguente, e

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



noi dobbiamo soddisfare

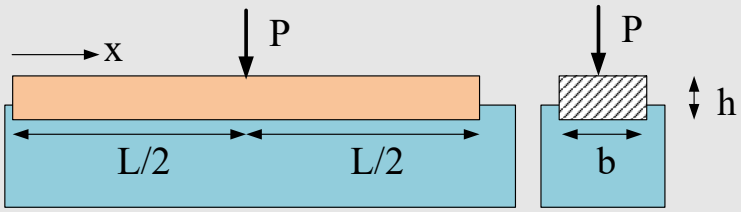
$$\frac{M(x)}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

dove $M(x) = wx^2/2$, $w = P/L$, e le condizioni di confine sono $y = 0$ at $x = 0$ e L.

22.2.4 Ex 22.4: Trave galleggiante

La sezione seguente è riprodotta da Feodossiev, 1977 Résistance des Materiaux: Problèmes et Questions Choisis.

Trave in legno di pino, larghezza $b = 20$cm, lunghezza l =10m, $h = 10$cm, sottoposto a una forza di punto $P = 50$Il pino ha una densità $\gamma = 0.6\text{gf/cm}^3$ e $E \simeq 10^5\text{kgf/cm}^2$



1. L'equazione differenziale di governo può essere scritta come

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w(x)$$

dove $q(x)$ è il peso dell'acqua sfollata (legge di Archimede) per lunghezza unitaria.

$$w(x) = -\gamma y(x)$$

2. Introduzione

$$4k^4 = \frac{b\gamma}{EI} = \frac{3\gamma}{Eh^3}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

l'equazione differenziale di governo può essere semplificata

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^4y = 0 \tag{22.3}$$

che è anche l'equazione differenziale di un fascio su *trave su fondo elastico*.

3. La soluzione è della forma

$$y(x) = A\cosh(kx)\cos(kx) + \frac{1}{2}B\left(\cosh(kx)\sin(kx) + \sinh(kx)\cos(kx)\right) + \frac{1}{2}C\sinh(kx)\sin(kx) + \frac{1}{4}D\left(\cosh(kx)\sin(kx) - \sinh(kx)\cos(kx)\right)$$

4. Può essere riscritto come

$$y = y_0Y_1(kx) + y_0'\frac{1}{k}Y_2(kx) + \frac{M_0}{EI}\frac{1}{k^2}Y_3(kx) + \frac{V_0}{EI}\frac{1}{k^2}Y_4(kx)$$

dovey_0, y_0', M_0 e N_0 sono lo spostamento, la rotazione, il momento e la cinghia $x = 0$. Così

$$N_0 = 0; \qquad M_0 = 0$$

5. Siamo lasciati per determinare y_0 e y_0' at $x = L/2$ tale $y_0' = 0$ e $N = P/2$
6. Usare la seguente tabella

n	$Y_n(kx)$	$Y_n'(kx)$	$Y_n''(kx)$	$Y_n'''(kx)$	$Y_n^{IV}(kx)$
1	$\cosh(kx)\cos(kx)$	$-4kY_4$	$-4k^2Y_3$	$-4k^3Y_2$	$-4k^4Y_1$
2	$\frac{1}{2}\left(cosh(kx)\sin(kx) + \sinh(kx)\cos(kx)\right)$	kY_1	$-4k^2Y_4$	$-4k^3Y_3$	$-4k^4Y_2$
3	$\frac{1}{2}\sinh(kx)\sin(kx)$	kY_2	k^2Y_1	$-4k^3Y_4$	$-4k^4Y_3$
4	$\frac{1}{4}\left(cosh(kx)\sin(kx) - \sinh(kx)\cos(kx)\right)$	kY_3	k^2Y_2	k^3Y_1	$-4k^4Y_4$

noi otteniamo

$$\frac{1}{k}y' = -4y_0Y_4(kx) + y_0'\frac{1}{k}Y_1(kx)$$
$$\frac{1}{k}y'' = -4y_0Y_3(kx) + y_0'\frac{4}{k}Y_4(kx)$$
$$\frac{1}{k}y''' = -4y_0Y_2(kx) + y_0'\frac{4}{k}Y_3(kx)$$

7. Le condizioni di confine sono espresse come[a]

$$-4y_0Y_4\left(\frac{kl}{2}\right) + y_0'\frac{1}{k}Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) = 0$$
$$-4y_0Y_2\left(\frac{kl}{2}\right) + y_0'\frac{4}{k}Y_3\left(\frac{kl}{2}\right) = \frac{P}{2EIk^3}$$

8. Per $x = 0$ noi otteniamo

$$y_0 = \frac{P}{8EIk^3}\frac{-Y_1\left(\frac{kl}{2}\right)}{Y_2\left(\frac{kl}{2}\right)Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) + 4Y_3\left(\frac{kl}{2}\right)Y_4\left(\frac{kl}{2}\right)}$$
$$\frac{y_0'}{k} = \frac{P}{8EIk^3}\frac{-4Y_4\left(\frac{kl}{2}\right)}{Y_2\left(\frac{kl}{2}\right)Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) + 4Y_3\left(\frac{kl}{2}\right)Y_4\left(\frac{kl}{2}\right)}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

9. Lo spostamento e la pendenza saranno così

$$y=-P_0\left[Y_1\left(\frac{kl}{2}\right)Y_1(kx)+4Y_4\left(\frac{kl}{2}\right)Y_2(kx)Y_1(kx)\right]$$
$$y''=4P_0k^2\left[Y_1\left(\frac{kl}{2}\right)Y_3(kx)+4Y_4\left(\frac{kl}{2}\right)Y_4(kx)\right]$$

dove

$$P_0=\frac{P}{8EIk^3}\frac{1}{Y_2\left(\frac{kl}{2}\right)Y_1\left(\frac{kl}{2}\right)+4Y_3\left(\frac{kl}{2}\right)Y_4\left(\frac{kl}{2}\right)}$$

10. Sostituire i valori numerici

$$k^4=3\times10^{-11}\Rightarrow k=2.34\times10^{-3}\text{cm}^{-1}\Rightarrow\frac{kl}{2}=1.17$$

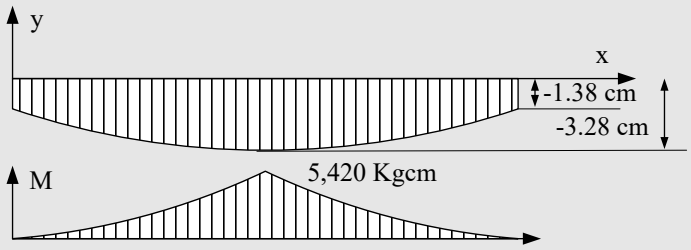
e

$$Y_1\left(\frac{kl}{2}\right)=0.689$$
$$Y_2\left(\frac{kl}{2}\right)=1.097$$

11. La risposta finale sarà

$$P_0=0.0401P$$
$$y(x)=-0.0401P\left[0.689Y_1(kx)-1.058Y_2(kx)\right]\ \text{cm}$$
$$M(x)=146.2P\left[0.689Y_3(kx)+1.058Y_4(kx)\right]\ \text{kgfcm}$$

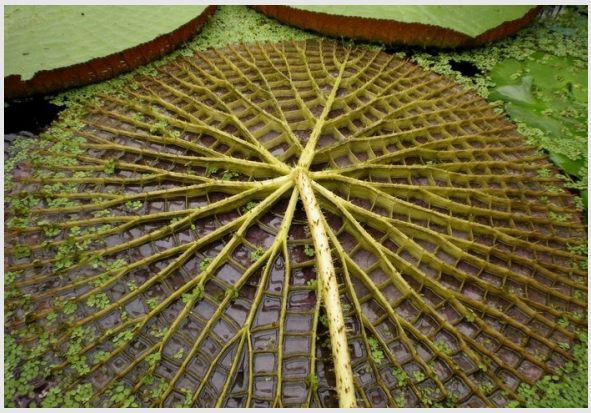
12. La soluzione è valida fintanto che la superficie superiore completa del fascio è sopra l'acqua.



La stessa soluzione potrebbe essere estesa, anche se con molto più difficile, alle piastre. Ma poi ancora una volta la natura ha già capito che *Victoria-Regia* (La foglia più grande del mondo) deve essere adeguatamente irrigidito per resistere a grandi momenti, mentre anche galleggiante.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

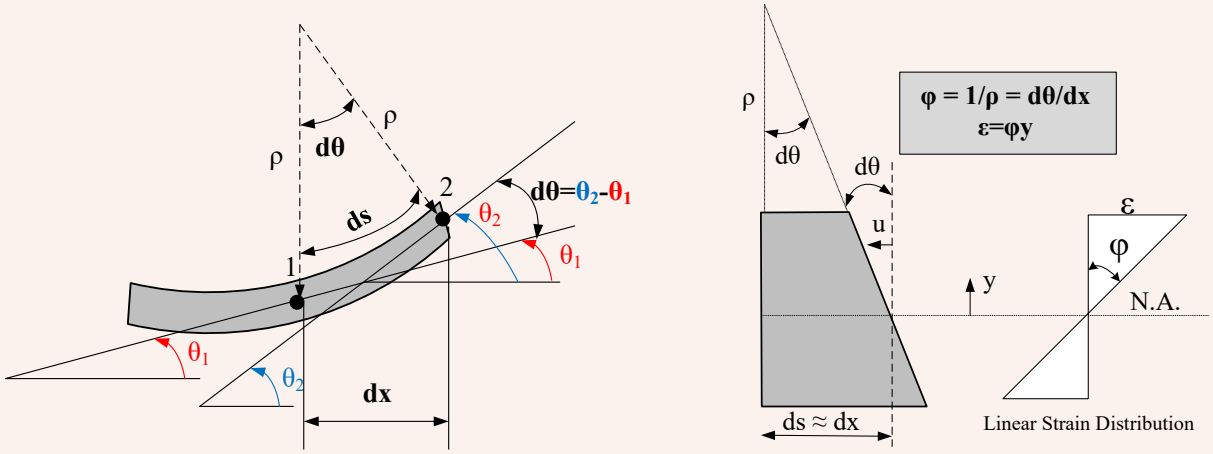


Incidentalmente, questo dovrebbe ricordare al lettore dei cosiddetti *architettura ramificata* simile ispirato da alberi.

[a]Ricordate che $V = EI\frac{d^3y}{dx^3}$

22.3 Curvatura

9 Curvatura, Fig. 22.1a è un termine più critico in flexure (e spesso dimenticato dagli studenti) e prima di tutto derivare il suo rapporto esatto, quindi semplificarlo.



(a) Definizione della curvatura

(b) Curvatura-Strain relazione

Figura 22.1: Curvatura e ceppi

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Espressione esatta

10 Cominciamo con la derivazione generale dell'espressione della curvatura, Fig. 22.1a e prima definiscono la curvatura ϕ as

$$\phi \overset{\text{def}}{=} \frac{d\theta}{ds}$$

Dalla geometria, $\tan\theta = \frac{dy}{dx}$, ora definiamo $t = \frac{dy}{dx}$ noi otteniamo $\theta = \tan^{-1} t$ Applicare la regola della catena ϕ noi abbiamo

$$\phi = \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{ds} \tag{22.4}$$

ds può essere riscritto come

$$\left.\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \\ t &= \frac{dy}{dx} \end{aligned}\right\} ds = \sqrt{1+t^2}\,dx \tag{22.5}$$

11 Il prossimo che combina Eq. 22.4 e 22.5 noi otteniamo

$$\left.\begin{aligned} \phi &= \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}dx} \\ \theta &= \tan^{-1} t \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{1+t^2} \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{1+t^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\frac{dt}{dx} \\ \frac{dt}{dx} &= \frac{d^2y}{dx^2} \end{aligned}\right\} \phi = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

12 Così il pendio θ, curvatura ϕ, raggio di curvatura ρ sono collegati con y dislocamento ad un punto x lungo un membro flessorale

$$\phi = \frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{22.6}$$

Espressione approssimativa

13 Se gli spostamenti sono molto piccoli, $\frac{dy}{dx} << 1$Allora Eq. 22.6 riduce a:

$$\phi = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{22.7}$$

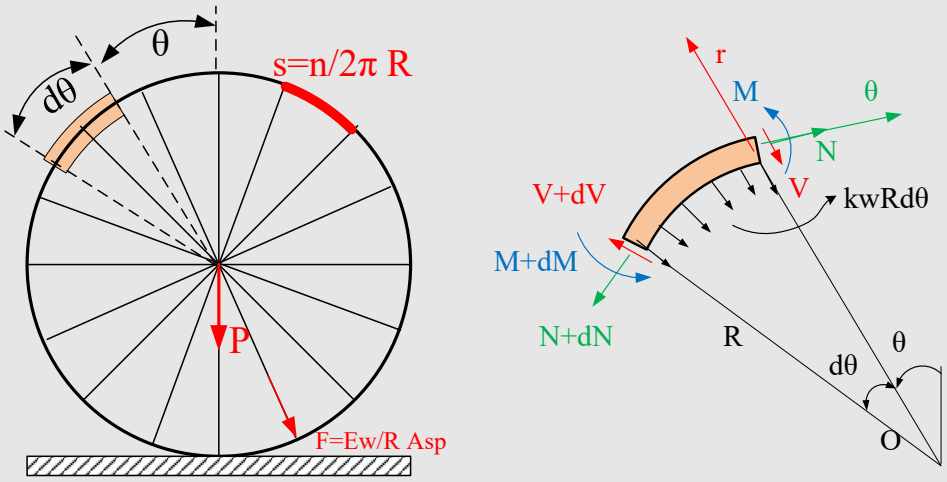
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

22.3.1 Ex 22.5: Ruota per bicicletta

La sezione seguente è riprodotta da Feodossiev, 1977 Résistance des Materiaux: Problèmes et Questions Choisis.

Cerchiamo di determinare le forze nei raggi in termini di loro orientamento. θ^a.



1. I raggi sono abbastanza vicini, che possiamo presumere che il bordo esterno sia continuamente sostenuto da loro. Pertanto, per tutti gli scopi pratici, abbiamo un fascio circonferenziale su fondazione elastica.
2. La lunghezza tributaria di ogni parlato è $n/2\pi R$. Allo stesso modo, ogni parlato porta una forza proporzionale alla sua spostamento radiale w pari a $F = Ew/RA_{sp}$.
3. Quindi per unità di lunghezza del cerchio, abbiamo una forza

$$\underbrace{\frac{EwA_{sp}}{R}}_{\text{Force per spoke}} \quad \underbrace{\frac{n}{2\pi R}}_{\text{Trib. length/spoke}} = kw_s$$

4. Così la costante di primavera è

$$k = \frac{EA_s n}{2\pi R^2}$$

5. Scriviamo tre equazioni di equilibrio

$$\Sigma F_r = 0 \Rightarrow \frac{dV}{d\theta} = N + kRw_s$$
$$\Sigma F_\theta = 0 \Rightarrow \frac{dN}{d\theta} + V = 0$$
$$\Sigma_z^O = 0 \Rightarrow R\frac{dN}{d\theta} + \frac{dM}{d\theta} = 0$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

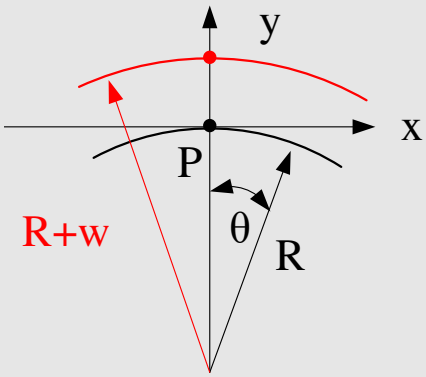
6. Eliminare V e N

$$kR^2\frac{dw}{d\theta} = \frac{dM}{d\theta} + \frac{d^3M}{d\theta^3}$$

7. Il cambiamento nella curvatura $\Delta(1/\rho)$ è correlato al momento

$$M = EI\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

8. Successivamente, dobbiamo trarre un'espressione per il cambiamento di curvatura (Procedure gentilmente concessa dal Prof. F. Vernerey).



Prima della deformazione, la curvatura a P is $\kappa = \frac{1}{R}$, dopo deformazione abbiamo $R = R + w$. Prima cerchiamo un'approssimazione per l'arco della curva deformata

$$x^2 + (y - (R + w))^2 = R^2 \tag{22.8}$$

$$\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R} - \left(1 + \frac{w}{R}\right)\right)^2 = 1 \tag{22.9}$$

Definizione $\xi = x/R$, $\eta = y/R$e $\zeta = w/R$

$$\xi^2 + \left(\eta + (1 + \zeta)\right)^2 = 1$$
$$\xi^2 - \eta^2 - 2\eta - 2\eta\zeta + 1 + 2\zeta + \zeta^2 = 1$$

Termini di ordine più elevati (η^2, $\eta\zeta$ e ζ^2 come sono tutti molto piccoli rispetto a 1) Rearing

$$\xi^2 - 2\eta + 2\zeta = 0$$
$$\eta = \frac{\xi^2}{2} + \zeta$$
$$y = \frac{x^2}{2R} + w \quad \text{Nice parabolic approximation of a circular arc}$$

noi ora procediamo sostituendo x by $R\theta$

$$y = \frac{x^2}{2R} + w \simeq \frac{1}{2R}(R\theta)^2 + w \simeq \frac{R_0 + w}{2}\theta^2 + w$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

La curvatura è data da

$$\kappa = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{R^2}\frac{d^2y}{d\theta^2}$$
$$= \frac{1}{R} + \frac{w}{R^2} + \frac{1}{R^2}\frac{d^2w}{d\theta}$$

Quindi, il cambiamento nella curvatura è dato da

$$\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{R} - \left(\frac{1}{R} + \frac{w}{R^2} + \frac{1}{R^2}\frac{d^2w}{d\theta}\right) = -\frac{w}{R^2} - \frac{1}{R^2}\frac{d^2w}{d^2\theta}$$

Quindi, per uno spostamento positivo w dispiegato dal centro del cerchio la curvatura dell'anello diminuisce. Il cambiamento nella curvatura in questa espressione consiste di due componenti. w/R^2 corrisponde al cambiamento di curvatura dovuto ad una semplice espansione dell'anello. $\frac{1}{R^2}\frac{d^2w}{d^2\theta}$ uguale d^2w/ds^2 rappresenta il solito cambiamento di curvatura che si verifica in una barra retta.

9. Sostituire per M l'equazione differenziale di governo finale è

$$\frac{d^5w}{d\theta^5} + 2\frac{d^3w}{d\theta^3} + a^2\frac{dw}{d\theta} = 0$$

con

$$a^2 = \frac{R^4k}{EI} + 1$$

10. La soluzione a questa equazione differenziale è della forma

$$w = C_0 + C_1\cosh\alpha\theta\cos\beta\theta + C_2\sinh\alpha\theta\sin\beta\theta + C_3\cosh\alpha\theta + C_4\sinh\alpha\theta\cos\beta\theta$$

con

$$\alpha = \sqrt{\frac{a-1}{2}}; \qquad \beta = \sqrt{\frac{a+1}{2}}$$

11. Sostituire:

$$M = -\frac{EI}{R^2}\left(C_0 - 2\alpha\beta C_1\sinh\alpha\theta\sin\beta\theta + 2\alpha\beta C_2\cosh\alpha\theta\cos\beta\theta\right)$$
$$V = 2\alpha\beta\frac{EI}{R^3}\left[\left(\alpha C_1 - \beta C_2\right)\cosh\alpha\theta\sin\beta\theta + \left(\beta C_1 - \alpha C_2\right)\sinh\alpha\theta\cos\beta\theta\right]$$

12. Si nota che dal momento che il cerchio si deforma simmetricamente rispetto all'asse verticale, w deve essere pari (cioè non deve cambiare con il segno di θ). Così C_3 e C_4 Dev'essere zero.
13. Condizioni di bovino

$$\begin{aligned} \tfrac{dw}{d\theta} &= 0; & \theta = \pi \\ V &= -\tfrac{P}{2}; & \theta = \pi \\ \int_0^\pi w d\theta &= 0 \end{aligned}$$

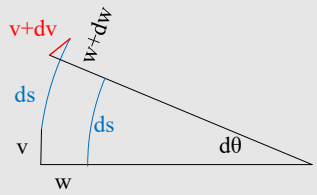
14. L'ultima condizione implica che sotto carico, i punti superiori e inferiori rimangono verticali; infatti, considerando un segmento infinitesimale del cerchio prima e dopo la deformazione, sarebbe stata la condizione di inestensibilità

$$dv + wd\theta = 0 \Rightarrow v = -\int wd\theta$$

dove v è lo spostamento tangenziale lungo l'arco.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



15. Applicare le tre condizioni di confine

$$\begin{aligned} &C_1\left[\alpha\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi-\beta\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi\right]\\ &\quad+C_2\left[\beta\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi+\alpha\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi\right] &&=0 \end{aligned} \tag{22.10}$$

$$\begin{aligned} &C_1\left[\alpha\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi+\beta\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi\right]\\ &\quad-C_2\left[\alpha\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi-\beta\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi\right] &&=-\frac{P}{4EI}\frac{R^3}{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{22.11}$$

$$\begin{aligned} &C_0\pi+\frac{C_1}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi+\beta\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi\right)\\ &\quad+\frac{C_2}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi-\beta\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi\right) &&=0 \end{aligned} \tag{22.12}$$

16. Risolvere per le costanti

$$C_0=\frac{PR^3}{2\pi a^2EI}$$

$$C_1=-\frac{P}{4EI}\frac{R^3}{\alpha\beta}\frac{\alpha\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi+\beta\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi}{a\left(\sinh^2\alpha\pi+\sin^2\beta\pi\right)}$$

$$C_2=\frac{P}{4EI}\frac{R^3}{\alpha\beta}\frac{\alpha\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi-\beta\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi}{a\left(\sinh^2\alpha\pi+\sin^2\beta\pi\right)}\pi$$

$$\begin{aligned} &+\frac{C_1}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi+\beta\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi\right)\\ &+\frac{C_2}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi-\beta\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi\right)=0 \end{aligned}$$

17. Espressioni finali di w e M

$$w(\theta)=\frac{PR^3}{4\alpha\beta EI}\left(\frac{2\alpha\beta}{\pi a^2}-A\cosh\alpha\theta\cos\beta\theta+B\sinh\alpha\theta\sin\beta\theta\right) \tag{22.13}$$

$$M(\theta)=-\frac{PR}{2}\left(\frac{1}{\pi a^2}+A\sinh\alpha\theta\sin\beta\theta+B\cosh\alpha\theta\cos\beta\theta\right) \tag{22.14}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove

$$A = \frac{\alpha \cosh \alpha\pi \sin \beta\pi + \beta \sinh \alpha\pi \cos \beta\pi}{a\left(\sinh^2 \alpha\pi + \sin^2 \beta\pi\right)}$$
$$B = \frac{\alpha \sinh \alpha\pi \cos \beta\pi - \beta \cosh \alpha\pi \sin \beta\pi}{a\left(\sinh^2 \alpha\pi + \sin^2 \beta\pi\right)}$$

18. La forza nel parlato sarà

$$P_r(\theta) = \frac{EA_{sp}}{R} w(\theta)$$

19. **Applicazione numerica.** Consideriamo una ruota con le seguenti proprietà, assumendo pari moduli elastici per cerchio e raggi:

Quantità	Simbolo	Valore
Numero di raggi	n	36
raggio di rotazione	R	31.2 cm
Sezione trasversale del punto	A_{sp}	0.22 cm^2
Rim momento di inerzia	I	0.3 cm^4

Da Eqs. (4) e (9), notando che E cancellazioni:

$$a^2 = \frac{A_{sp}\, n\, R^2}{2\pi I} + 1 = \frac{0.22 \cdot 36 \cdot 31.2^2}{2\pi \cdot 0.3} + 1 = 577.7, \qquad a = 24.04$$

Da Eq. (10):

$$\alpha = \sqrt{\frac{24.04 - 1}{2}} = 3.395, \qquad \beta = \sqrt{\frac{24.04 + 1}{2}} = 3.539$$

At $\theta = \pi$, le funzioni iperboliche soddisfano $\sinh \alpha\pi \approx \cosh \alpha\pi \approx \frac{1}{2} e^{10.66}$, mentre i valori trigonometrici sono $\sin \beta\pi = -0.992$ e $\cos \beta\pi = +0.1223$. Sostituire le espressioni per A e B:

$$A = -0.245\, e^{-10.66}, \qquad B = +0.326\, e^{-10.66}$$

Le espressioni (22.13)–(22.14) poi diventa, per un carico applicato P (in kgf):

$$M(\theta) = P\left(-0.00855 + 3.80\, e^{-10.66} \sinh \alpha\theta \sin \beta\theta - 5.05\, e^{-10.66} \cosh \alpha\theta \cos \beta\theta\right) \text{ kgf cm}$$
$$P_r(\theta) = P\left(\ 0.0278 + 0.514\, e^{-10.66} \cosh \alpha\theta \cos \beta\theta + 0.683\, e^{-10.66} \sinh \alpha\theta \sin \beta\theta\right) \text{ kgf}$$

Il fattore $e^{-10.66}$ causa entrambe M e P_r decadimento estremamente rapido lontano dal punto di carico $\theta = \pi$; per angoli anche leggermente rimossi π i termini oscillatori sono trascurabili, e $M \approx -0.00855\, P$ e $P_r \approx 0.0278\, P$ per la maggior parte del cerchio.

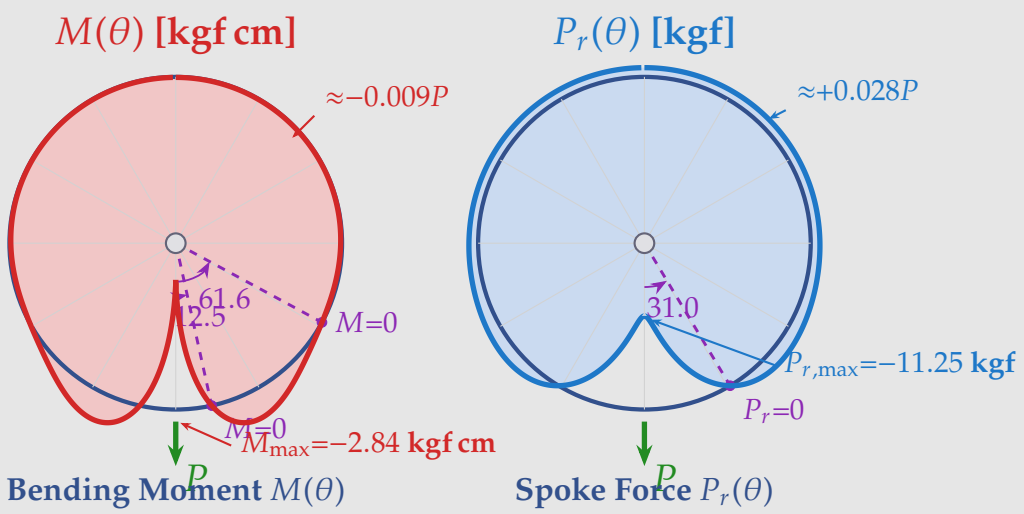
Per $P = 40$ I valori di picco al punto di carico sono

$$M_{\max} = 88 \text{ kgf cm}, \qquad P_{r,\max} = 11.2 \text{ kgf}$$

Il momento di piegatura e le distribuzioni della forza del raggio intorno alla ruota sono mostrate sotto.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Nota: il momento di piegatura $M(\theta)$ e parlava forza $P_r(\theta)$ il mondo ruota (a)$P = 40$ Kgf, $n = 36$, $R = 31.2$ cm). I raggi sperduti segnano incrocio zero; angles measured from the load direction. Far-field: $M_\infty = -PR/(2\pi a^2) \approx -0.009P$ kgf cm.

20. **Effetto della pretensione parlata.** L'analisi sopra tratta i raggi come mezzo elastico passivo e fa non si riferisce alla pretensione iniziale T_0 introdotto durante la ruota montaggio (truing). In servizio, i raggi possono sostenere solo la tensione; un parlato che va slack non offre resistenza elastica, invalidando il continuo modello di fondazione. La quantità $P_{r,\max}$ rappresentati sopra calcolati il *riduzione massima* in forza di parlato causata dal carico applicato. Per la ruota per rimanere strutturalmente sonora sotto carico P, l'assemblaggio la pretensione deve quindi soddisfare

$$T_0 > P_{r,\max}$$

In altre parole, ogni parlato deve mantenere una tensione residua positiva dopo il carico viene applicato. Nell'esempio numerico questo richiede $T_0 > 11.2$ kg per parlare. Tipici ruote da corsa sono trued per 80–120 kgf per parlato, fornendo un margine confortevole.

Questo problema è stato risolto per la prima volta Joukowsky, 1948[b] .

[a] Problema dedicato a Caroline Saouma

[b] Nikolai Yegorovich Joukowsky (1847–1921), Professore di La Meccanica della Scuola Tecnica di Mosca, è meglio conosciuta come la padre dell'aviazione russa e l'autore del Kutta–Joukowsky sollevare il teorema. La sua soluzione della ruota per biciclette come un anello su fondazione elastica predate Feodossiev, 1977 by diversi decenni e fu trasmesso attraverso la scuola di Mosca meccanica.

22.3.2 Ex 22.6: Rigidezza di una molla elicoidale

Cerchiamo di ricavare la rigidità k di una molla elicoidale, dato che la molla è composta da bobine di filo.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Una molla elicoidale in filo di diametro d e arrotolato in un'elisina di diametro medio D deforma principalmente attraverso la cinghia quando una forza assiale F quando applichiamo una forza F, la primavera si estende per uno spostamento Δ (or ΔL) secondo la legge di Hooke:

$$F = k\delta$$

dove k è la rigidità di primavera che vogliamo derivare.

Torsione in ogni bobina Quando una forza F viene applicato alla molla, ogni bobina sperimenta un effetto torsione o torsionale. Per una singola bobina questa forza produce una coppia di torce T circa l'asse della bobina, che può essere espresso come:

$$T = F \cdot \frac{D}{2}$$

Deformazione torsionale e angolo di twist Per un asta cilindrica (o bobina di molla), l'angolo di torsione θ a causa di una coppia T può essere calcolato da:

$$\theta = \frac{T \cdot L_{\text{coil}}}{JG}$$

dove:

- $L_{\text{coil}} = 2\pi D$ è la lunghezza di una bobina (perché ogni bobina è essenzialmente un anello circolare del filo),
- $J = \frac{\pi d^4}{32}$ è il momento polare dell'inerzia per una sezione circolare di diametro d,
- G è il modulo di taglio del materiale primaverile.

Così, per una singola bobina, l'angolo di torsione diventa:

$$\theta = \frac{T \cdot 2\pi D}{\frac{\pi d^4}{32} \cdot G} = \frac{32 \cdot T \cdot D}{d^4 \cdot G}$$

Deformazione totale della primavera Poiché ogni bobina si ritorsce da un angolo θe ci sono n bobine, il torsione angolare totale Θ per tutta la primavera è:

$$\Theta = n \cdot \theta$$

Lo spostamento assiale Δ alla fine della primavera è legata al totale giro angolare da:

$$\Delta = \Theta \cdot \frac{D}{2} = n \cdot \theta \cdot \frac{D}{2}$$

Sostituto e semplificare Sostituto $\theta = \frac{32 \cdot T \cdot D}{d^4 \cdot G}$ e $T = F \cdot \frac{D}{2}$:

$$\Delta = n \cdot \frac{32 \cdot F \cdot \frac{D}{2} \cdot D}{d^4 \cdot G} \cdot \frac{D}{2}$$

Semplificando, otteniamo:

$$\Delta = \frac{16FnD^3}{d^4G}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Derive the Stiffness k From Hooke's law, $F = k\Delta$, we solve for k:

$$k = \frac{F}{\delta} = \frac{Gd^4}{16nD^3}$$

o, come è scritto convenzionalmente:

$$k = \frac{Gd^4}{8D^3n}$$

Lunghezza della riga L **alla stanchezza** k Da $L = n \cdot p$dove p è il passo della primavera, possiamo esprimere n in termini di L:

$$n = \frac{L}{p}$$

Sostituire n nell'equazione di rigidità:

$$k = \frac{Gd^4}{8D^3\left(\frac{L}{p}\right)} = \frac{Gd^4 \cdot p}{8D^3L}$$

Questa forma finale mostra che la rigidità k è inversamente proporzionale alla lunghezza LCon:

$$k \propto \frac{1}{L}$$

Così, aumentando la lunghezza della molla (aumentando il numero di bobine) riduce la rigidità, poiché ogni bobina contribuisce alla deformazione totale della molla sotto carico. Si prega di fare riferimento al Esempio 24.3.15 Anche io.

22.3.3 Relazione curvatura-deformazione

14 Il rapporto tra la tensione di curvatura è illustrato da Fig. 22.1b.

15 Un positivo $d\theta$ a un positivo y (fibre superiori) causerà un *accorciamento* delle fibre superiori $du = -yd\theta$, Dividazione di entrambi i lati dx,

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = -y\frac{d\theta}{dx}$$

Combinando questo con Eq. 22.7, otteniamo il rapporto fondamentale tra curvatura (ϕ), curva elastica (cioè spostamento) (y), e ceppo lineare (ε).

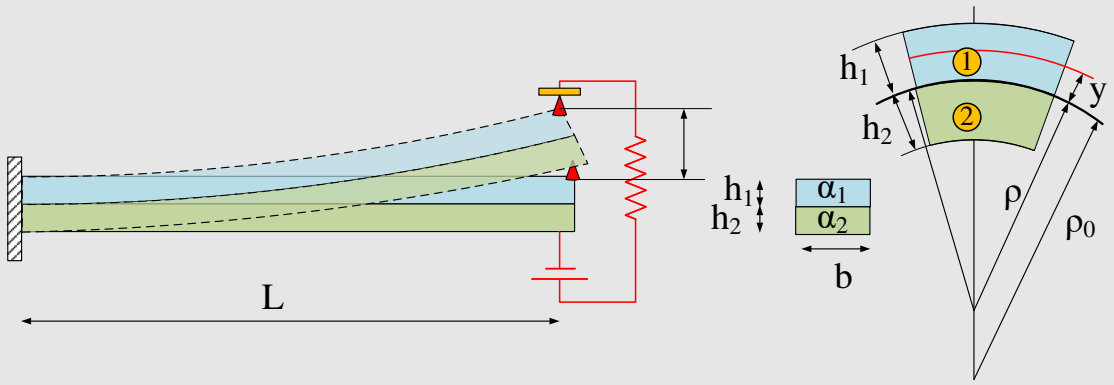
$$\frac{1}{\rho} = \phi = -\frac{\varepsilon}{y} \tag{22.15}$$

16 Si noti che finora non abbiamo fatto ipotesi sulle proprietà materiali, cioè può essere elastico o inelastico.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

22.3.3.1 Ex 22.7: Interruttore bimetallico



Gli elementi bimetalici sono spesso utilizzati come termostato per regolare le temperature delle camere. Un elemento bimetallico è costituito da due piastre metalliche rigidamente collegate con diversi coefficienti di espansione termica. Quando si riscalda, la piastra bimetallica è piegata a causa di estensioni non uguali dei suoi compoenents. Se una estremità è saldamente bloccata, l'altra estremità libera si muoverà da un certo importo Δv. L'elemento è spesso fatto curvato con una curvatura iniziale $\frac{1}{\rho_0}$. Cerchiamo di determinare il cambiamento nella curvatura, la condizione per cui lo spostamento sarebbe massimo, e $\Delta_v^{\max}$

Quindi consideriamo una porzione di segmento della lunghezza ds e una curvatura iniziale alla superficie di giunzione $\frac{1}{\rho_0}$, La varietà di una fibra a distanza y dal bivio è dato da

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + y\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)$$

Sottraggiamo l'estensione termica e moltiplicamo la differenza risultante dal loro rispettivo modulo elastico possiamo determinare lo stressa una fibra a distanza y dal bivio

$$\sigma_1 = E_1\left[\varepsilon_0 + y\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) - \alpha_1\Delta T\right] \qquad 0 \le y \le h_1$$
$$\sigma_2 = E_2\left[\varepsilon_0 + y\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) - \alpha_2\Delta T\right] \qquad -h_2 \le y \le 0$$

Tuttavia, sia la forza normale che il momento nella sezione dell'elemento bimetallico devono essere zero

$$b\int_0^{h_1}\sigma_1 dy + b\int_{-h_2}^{0}\sigma_2 dy = 0$$
$$b\int_0^{h_1}\sigma_1 y dy + b\int_{-h_2}^{0}\sigma_2 y dy = 0$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Sostituire per σ_1 e σ_2, e l'integrazione otteniamo

$$\varepsilon_0(E_1h_1 + E_2h_2) - (\alpha_1E_1h_1 + \alpha_2E_2h_2)\Delta T + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)(E_1h_1^2 - E_2h_2^2) = 0$$
$$\frac{1}{2}\varepsilon_0(E_1h_1^2 - E_2h_2^2) - \frac{1}{2}(E_1\alpha_1h_1^2 - E_2\alpha_2h_2^2)\Delta T + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)(E_1h_1^3 + E_2h_2^3) = 0$$

Eliminazione ε_0, troviamo il cambiamento nella curvatura

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{6\Delta T(\alpha_1 - \alpha_2)}{\frac{\left(E_1h_1^2 - E_2h_2^2\right)^2}{E_1E_2h_1h_2(h_1+h_2)} + 4(h_1 + h_2)}$$

Il cambiamento di curvatura è proporzionale al cambiamento della temperatura e alla differenza dei coefficienti di espansione termica.Il massimo cambiamento nella curvatura avviene quando vengono selezionati gli spessori delle piastre componenti, in modo che

$$E_1h_1^2 = E_2h_2^2$$

poi

$$\Delta\kappa = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{3}{2}\Delta T\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{h_1 + h_2}$$

Applicando il secondo teorema di area curvatura, ora possiamo determinare la deviazione alla punta del fascio argentato. La curvatura (cambiamento in) lungo il fascio è costante

$$\Delta_V^{\max} = \Delta kappa \times L \times \frac{L}{2}$$
$$= \frac{3}{2}\Delta T\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{h_1 + h_2}\frac{L^2}{2}$$

Naturalmente, il secondo teorema di area curvatura avrebbe dato lo stesso risultato di quello ottenuto dal metodo di lavoro virtuale

$$\Delta_V^{\max} = \int_o^L \underbrace{(1)(x)}_{\delta\overline{M}}\underbrace{\Delta\kappa}_{M/EI}\,dx$$
$$= \frac{3}{2}\Delta T\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{h_1 + h_2}\frac{L^2}{2}$$

22.3.4 Metodo di area curvatura (zona di movimento)

Per il contesto storico, consultare §11.4.2

17 Il *metodo zona curvatura* (spesso erroneamente citati come *metodo di zona del momento*) è un metodo geometrico (al contrario di quello analitico del doppio metodo di integrazione) da risolvere per spostamenti basati sulla curva elastica.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

22.3.4.1 Convegno di firma

18 Bisogna essere particolarmente attenti con i segni nell'applicazione del metodo di curvatura. Fig. 22.2 tenta di chiarire le cose.

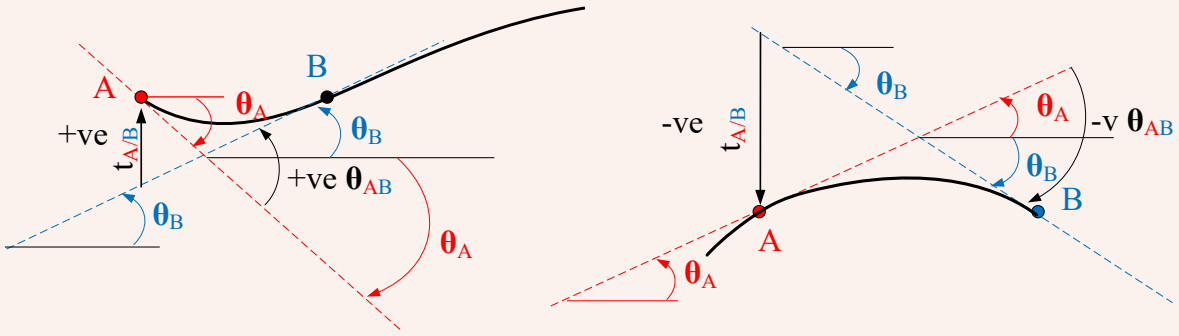


Figura 22.2: Convegno di segnale per il metodo dell'area della curvatura per curve opposte del fascio

22.3.4.2 Teorema della prima curvatura

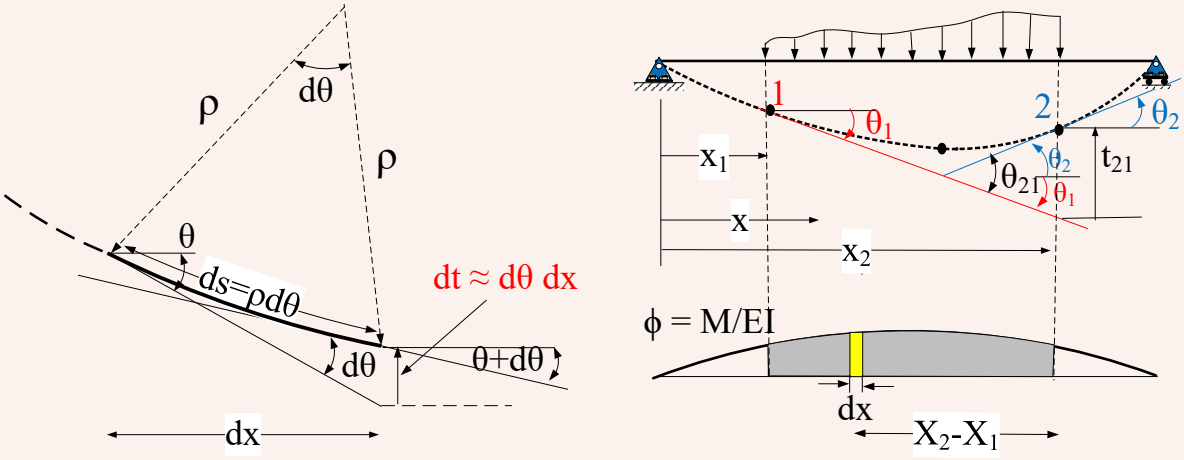


Figura 22.3: Metodi di area curvatura

19 Con riferimento a Fig. 22.3e dall'equazione 22.1 noi abbiamo $\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$ questo può essere riscritto come o con riferimento alla Figura 22.3

$$\theta_{21} = \theta_2 - \theta_1 = \int_{x_1}^{x_2} d\theta = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M}{EI} dx = \int_{x_1}^{x_2} \kappa(x) dx \tag{22.16}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Definition 22.2: Proposizione; Prima Curvatura Area Teorema

La differenza di pendenza (cioè curvatura) tra due sezioni di un membro flessore caricato è uguale all'area della M/EI diagramma tra quei due punti. or Per un fascio che sperimenta la flessione, il cambiamento in pendenza (θ) tra due punti lungo il fascio, punto A at x_A e punto B at x_B, è uguale all'integrale della curvatura del fascio sul segmento tra questi due punti.

Nota somiglianza con Def. 21.4 :

$$\Delta V_{21} = V_2 - V_1 = \int_{x_1}^{x_2} w(x)dx$$

22.3.4.3 Teorema della seconda curvatura

20 Ancora una volta, con riferimento alla figura 22.3 noi definiamo t_{21} la distanza tra il punto 2 e il tangente al punto 1. Per una distanza infinitesimale $ds = \rho d\theta$ e per piccoli spostamenti questo si cederebbe

$$\left.\begin{aligned} dt &= d\theta(x_2 - x_1) \\ \frac{d\theta}{dx} &= \frac{M}{EI} \end{aligned}\right\} dt = \frac{M}{EI}(x_2 - x_1)dx$$

or

$$t_{21} = \int_{x_1}^{x_2} dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M}{EI}(x_2 - x_1)dx$$

Attenzione. $t_{AB} \neq t_{BA}$. t_{AB} è la distanza tra A e il tangente a B, D'altra parte, t_{BA} è la distanza tra il nodo B e il tangente a A.

Definition 22.3: Proposizione: Terorema dell'area di seconda curvatura

La deviazione tangenziale del punto 2 su un membro flessorale caricato, da un tangente alla curva di deflettorazione al punto 1 (t_{21}) è uguale al momento della zona del diagramma di curvatura tra 1 e 2 circa 2.

21 Nota somiglianza con Def. 21.5

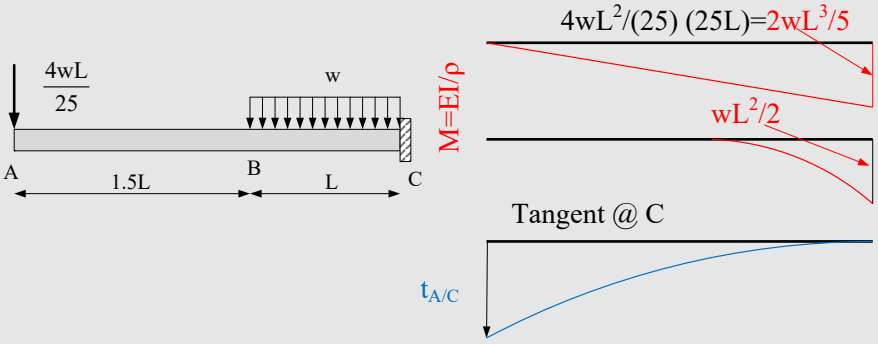
$$\Delta M_{21} = M_2 - M_1 = \int_{x_1}^{x_2} V(x)dx \tag{22.17}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

22.3.4.3.1 Ex 22.8: Area di curvatura, trave a sbalzo

Cerchiamo di determinare il punto A



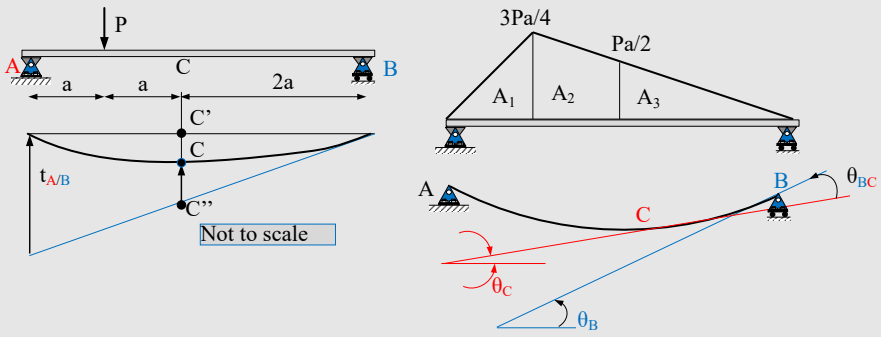
$$EIt_{A/C} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{-2wL^2}{5}\right)\left(\frac{5L}{2}\right)}_{\text{area}}\underbrace{\left(\frac{2}{3}\frac{5L}{2}\right)}_{\text{Moment wrt A}} + \underbrace{\frac{1}{3}\left(\frac{-wL^2}{2}\right)(L)}_{\text{area}}\underbrace{\left(\frac{9L}{4}\right)}_{\text{Moment wrt A}}$$

$$= -\frac{29wL^4}{24}$$

Così, $\Delta_A = \frac{29wL^4}{24EI}$

22.3.4.3.2 Ex 22.9: Curvatura del momento, raggio semplicemente sostenuto

Cerchiamo di determinare Δ_C e θ_C per il seguente esempio



COPIA DI REVISIONE

Sfittamento Δ_C è determinato da $\Delta_C = c'c = c'c'' - c''c$, $c''c = t_{C/B}$e $c'c'' = \frac{t_{A/B}}{2}$ dalla geometria

$$t_{A/B} = \frac{1}{EI}\left[\underbrace{\left(\frac{3Pa}{4}\right)\left(\frac{a}{2}\right)}_{A_1}\left(\frac{2a}{3}\right)\right]_{\text{Moment}} + \left[\underbrace{\left(\frac{3Pa}{4}\right)\left(\frac{3a}{2}\right)}_{A_2+A_3}\left(a+\frac{3a}{3}\right)\right]_{\text{Moment}}$$
$$= \frac{5Pa^3}{2EI}$$

Questo è positivo, quindi sopra tangente da B

$$t_{C/B} = \frac{1}{EI}\left(\frac{Pa}{2}\right)\left(\frac{2a}{2}\right)\left(\frac{2a}{3}\right) = \frac{Pa^3}{3EI}$$

Positivo, così sopra il tangente da B Infine,

$$\Delta_C = \frac{5Pa^3}{4EI} - \frac{Pa^3}{3EI} = \frac{11}{12}\frac{Pa^3}{EI}$$

Rotazione θ_C is

$$\left.\begin{aligned}\theta_C &= \theta_B - \theta_{BC}\\ \theta_{BC} &= A_3\\ \theta_B &= \frac{t_{A/B}}{L}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta_C = \frac{5Pa^3}{2EI(4a)} - \left(\frac{Pa}{2}\right)\left(\frac{2a}{2}\right) = \frac{Pa^2}{8EI}$$

22.3.4.4 Sfilettatura massima

22 Un giunto lungo il fascio avrà il massimo (o minimo) deflezione relativa se $\frac{dy}{dx} = 0$ or $\theta = 0$ Quindi possiamo decidere Δ_{max} if x è noto, Fig. 22.4. Per determinare x:

1. Computo $t_{C/A}$
2. $\theta_A = \frac{t_{C/A}}{L}$
3. $\theta_B = 0$ e $\theta_{AB} = \theta_A - \theta_B$, così $\theta_{AB} = \theta_A$. Quindi, la computezza θ_{AB} in termini di x usando il primo teorema.
4. Equate elementi 2 e 3, quindi risolvere per x.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

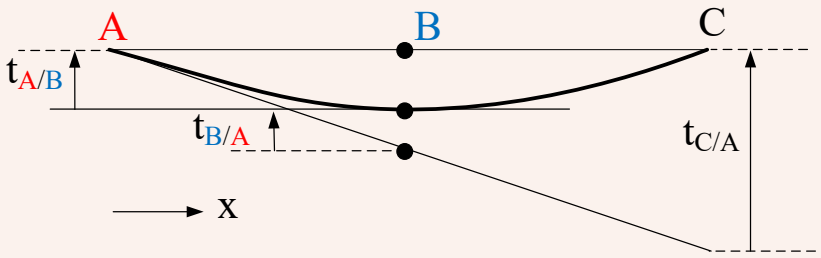
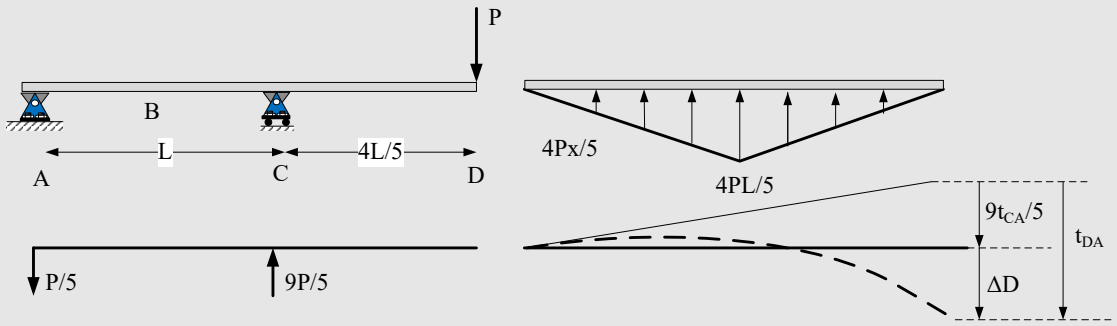


Figura 22.4: Sflessione massima utilizzando il metodo della zona di momento

22.3.4.4.1 Ex 22.10: Sfilettatura massima

Cerchiamo di determinare la deflezione a D, e la massima deviazione a B



Sfida a D:

$$\Delta_D = t_{D/A} - \frac{9}{5} t_{C/A}$$

$$EIt_{C/A} = \frac{1}{2}\left(\frac{-4PL}{5}\right)(L)\left(\frac{L}{3}\right)$$

$$t_{C/A} = -\frac{2PL^3}{15EI}$$

$$EIt_{D/A} = \frac{1}{2}\left(\frac{-4PL}{5}\right)(L)\left(\frac{17L}{15}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-4PL}{5}\right)\left(\frac{4L}{5}\right)\left(\frac{8L}{15}\right)$$

$$t_{D/A} = -\frac{234}{375}\frac{PL^3}{EI}$$

Sostituire otteniamo

$$\Delta_D = -\frac{48}{125}\frac{PL^3}{EI}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Sfilettamento massimo a B:

$$t_{C/A} = -\frac{2PL^3}{15EI}$$
$$\theta_A = \frac{t_{C/A}}{L} = -\frac{2PL^2}{15EI}$$
$$\theta_{AB} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{4Px}{5}\right)(x)\right] = -\frac{2}{5}\frac{Px^2}{EI}$$
$$\theta_A = \theta_{AB} \Rightarrow -\frac{2}{15}\frac{PL^2}{EI} = -\frac{2}{5}\frac{Px^2}{EI} \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$
$$\Delta_{max} = \left(\frac{4Px}{5EI}\right)\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x\right) \text{ at } x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$
$$\Rightarrow \Delta_{max} = \frac{4PL^3}{45\sqrt{3}EI}$$

22.3.4.5 Rapporto di curvatura della temperatura

23 In molti casi, cerchiamo di determinare le deflettori flessografici causate da carichi termici (come un bimateriale in cui abbiamo diversi coefficienti di espansione termica o quando abbiamo diverse temperature superiori e inferiori).

24 Assumendo variazione lineare nella temperatura

$$\Delta_T = \alpha \Delta T_T dx \quad \text{Top}$$
$$\Delta_B = \alpha \Delta T_B dx \quad \text{Bottom}$$

25 Il prossimo, considerando

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\varepsilon}{y}$$

In questo caso, possiamo prendere $\varepsilon = \alpha \Delta T_T$ at $y = \frac{h}{2}$ or $\varepsilon = \alpha(T_T - T_B)$ at $y = h$ così

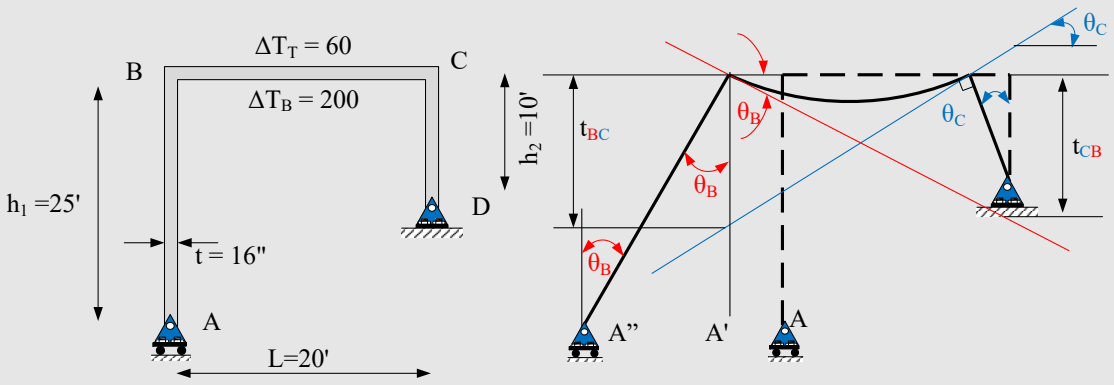
$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\alpha(T_T - T_B)}{h}$$

22.3.4.5.1 Ex 22.11: Telaio sottoposto a carico della temperatura

Trascurando la deformazione assiale, cerchiamo di calcolare lo spostamento a A per il seguente telaio

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



1. Prima di tutto facciamo schizzare la forma deformata
2. Flussi BC $\Rightarrow \theta_B = \theta_C \neq 0$
3. Cerniere rigide a B e C senza carico su AB e CD
4. Sfittamento a A

$$\Delta_A = AA'' = AA' + A'A''$$
$$AA' = \Delta_B = \Delta_C = |\theta_C| h_2$$
$$A''A' = |\theta_B| h_1$$

5. Dobbiamo calcolare θ_B & θ_C

$$\theta_B = \frac{t_{C/B}}{L}$$
$$\theta_C = \theta_{CB} + \theta_B \text{ or } \theta_C = \frac{t_{B/C}}{L}$$

6. Per applicare la curvatura sono teorema, abbiamo bisogno di una curvatura (o diagramma del momento).

$$\frac{1}{\rho} = \alpha\left(\frac{T_B - T_T}{h}\right) = \frac{M}{EI}$$

7. Applicando il secondo teorema, prendiamo il momento di una curvatura rispetto a B, denotiamo da $\mathcal{A}$ la zona sotto il diagramma di curvatura

$$t_{C/B} = \mathcal{A}\left(\frac{L}{2}\right) \Rightarrow |\theta_B| = A\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{L}\right) = \frac{\mathcal{A}}{2} \text{ or } \theta_B = -\frac{\mathcal{A}}{2} \text{ (-ve)}$$

8.

$$\left.\begin{aligned} \theta_{CB} &= \mathcal{A} \\ \theta_C &= \theta_{CB} + \theta_B \end{aligned}\right\} \theta_C = \mathcal{A} - \frac{\mathcal{A}}{2} = \frac{\mathcal{A}}{2} \text{ (+ve)}$$

9. Dall'alto,

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{A}} &= |\theta_C| h_2 + |\theta_B| h_1 \\ &= \frac{\mathcal{A}}{2} h_2 + \frac{\mathcal{A}}{2} h_1 = \frac{\mathcal{A}}{2}(h_2 + h_1) \\ \mathcal{A} &= \frac{\alpha(T_B - T_T)}{h} L \end{aligned}\right\} \Delta_A = \alpha(T_B - T_T)\frac{L}{h}\left(\frac{1}{2}\right)(h_2 + h_1)$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

10. Sostituto

$$\Delta_A = (6.5\times10^{-6})(200-60)\frac{(20)(12)}{(16)}(\frac{1}{2})(10+25)(12)$$
$$= 2.87 \text{ in}$$

11. Altri valori numerici:

$$\theta_B = \theta_C = \frac{A}{2} = \frac{1}{2}\frac{\alpha(T_B - T_T)}{h}L$$
$$= \frac{1}{2}(6.5\times10^{-6})\frac{(200-60)}{(16)}(20)(12)$$
$$= .00683rad. = .39^\circ \Rightarrow \frac{dy}{dx} << 1$$

Nota: sin(.00683) = .006829947 e tan(.00683) = .006830106

$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho} = \alpha\frac{(T_B - T_T)}{h}$$
$$= (6.5\times10^{-6})\frac{(200-60)}{16} = 5.6875\times10^{-5}$$
$$\Rightarrow \rho = \frac{1}{5.6875\times10^{-5}} = 1.758\times10^4 \text{ in} = 1,465 \text{ ft}$$

12. In order to get M, we need E & I.
13. $\sigma = \frac{My}{I} = \frac{EI}{\rho}\frac{y}{I} = \frac{Ey}{\rho}$
14. ρ è costante $\Rightarrow$ BC è su arco di cerchio M is constant & $\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = C \Rightarrow y = C\frac{x^2}{2} + dx + e$.

[26] Prendiamo la curvatura dal pendio parabola e confrontalo con ρ

$$y = \frac{cx^2}{2} + dx + e$$
$$\frac{dy}{dx} = cx + d$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = c$$

at $x = 0$, $y = 0$, così $e = 0$
at $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = \theta_B = -.00683$ così $d = -.00683$
at $x = 20$ ft, $\frac{dy}{dx} = \theta_C = .00683$ così $c(20) - .00683 = .00683$ così $c = 6.83\times10^{-4}$ così

$$y = 6.83\times10^{-4}\left(\frac{x^2}{2} - 10x\right)$$
$$\frac{dy}{dx} = 6.83\times10^{-4}(x-10)$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6.83\times10^{-4}$$
$$\kappa = 6.83\times10^{-4}$$
$$\rho = \frac{1}{6.83\times10^{-4}} = 1,464 \text{ ft as expected!}$$

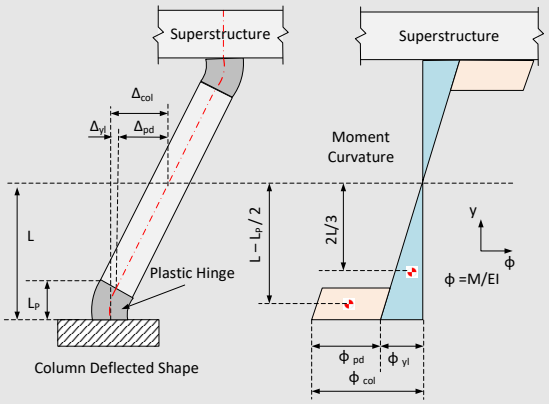
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Se dovessimo usare la formula di curvatura esatta

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+(\frac{dy}{dx})^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6.83\times10^{-4}}{[1+(.00683)^2]^{\frac{3}{2}}}$$
$$= 6.829522\times10^{-4}$$
$$\Rightarrow \rho = 1464.23 \text{ ft} \quad \text{(compared with 1465ft)}$$

22.3.4.6 Ex 22.12: Lunghezza plastica



Pier defletto forma e diagramma di curvatura; adattato da AASHTO, Seismic, 2011, Fig. C4.9-2

Nell'analisi pushover, dobbiamo determinare il rapporto tra la forza applicata lateralmente e la deformazione corrispondente inelastice. *cerniera di plastica.*
Assumere che il diametro della colonna d_c è di 7 piedi, la forza della compressione del calcestruzzo f_c' 5.000 psi, e il momento 15.839 k-ft. La deformazione può essere determinata utilizzando il teorema dell'area di curvatura. Interessante, stiamo applicando il metodo ad un elemento che ha curve elastiche e inelastiche/ Questo esempio è tratto dal Capitolo 69.4.1.

Dal primo teorema, otteniamo la curvatura

$$\theta_{PD} = \Phi_{PD} L_P$$

Dal 2o teorema

$$\Delta_e = \left(\Phi_{yld}\frac{L}{2}\right)\times\frac{2}{3}L$$

Da Eq. 22.1

$$\Phi_{yld} = \frac{M_y}{E_C I_C}$$

Risolvere per modulo elastico, momento di inerzia

$$E_c = 57\sqrt{f'_{cc}} = 57\sqrt{5,000} = 4,031 \text{ (ksi)}$$
$$I_C = \frac{\pi d_C^4}{64} = \frac{\pi\times7^4\times12^4}{64} = 2,443,920 \text{ (in}^4\text{)}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Infine, sostituiamo

$$\Phi_{yld} = \frac{15,839 \times 12}{4031 \times 2,443,920} = 1.93 \times 10^{-5}$$
$$\Delta_e = \left(1.93 \times 10^{-5} \frac{50 \times 12}{2}\right) \times \frac{2}{3}(50 \times 12) = 2.32 \text{ inch}$$

22.3.4.7 Travi elastiche/peso coniugato

Per il contesto storico, consultare §11.4.2

26 L'analogia tra i due teoremi di area curvatura e la definizione integrale della torsione e del momento (evidenziata in precedenza) è riassunta nella tabella 22.1.

Forze interne	Area di Curvatura
w	$1/\rho$
$V_{21} = \int_{x_1}^{x_2} w dx$	$\theta_{21} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\rho} dx$
$M_{21} = \int_{x_1}^{x_2} V dx$	$t_{21} = \int_{x_1}^{x_2} \theta dx$

Tabella 22.1: Analogia tra due gruppi di relazioni

27 Possiamo quindi immaginare *trave di coniugazione* come un fascio immaginario con le stesse dimensioni (lunghezza) di quello del fascio originale ma il carico in qualsiasi punto sul fascio coniugato è uguale alla curvatura. In un "beam' simile, la cinghia sarà uguale al pendio e il momento sarà pari allo spostamento del fascio reale originale.

28 Le condizioni di boundary sono determinate dalla tabella 22.2 e Fig. 22.5.

Ambasciata reale			Coniugare il fascio		
Cerniera	$\theta \neq 0;$	$y = 0$	$V \neq 0$	$M = 0$	"Hinge"
Fine fisso	$\theta = 0;$	$y = 0$	$V = 0;$	$M = 0$	Fine libero
Fine	$\theta \neq 0;$	$y \neq 0$	$V \neq 0;$	$M \neq 0$	Fine fissa
Cerniera interna	$\theta \neq 0;$	$y \neq 0$	$V \neq 0;$	$M \neq 0$	Supporto interno
Supporto per interni	$\theta \neq 0;$	$y = 0$	$V \neq 0;$	$M = 0$	Cerniera interna

Tabella 22.2: Condizioni di confine del fascio coniugato

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

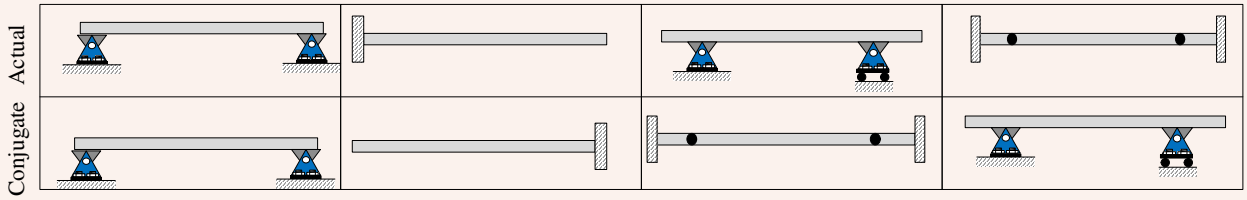


Figura 22.5: Travi a ponte

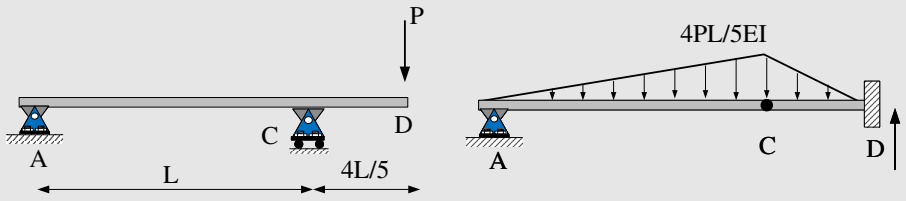
29 Mentre il metodo di area della curvatura ha una base ben definita, la sua applicazione diretta può essere a volte confusa.

30 Si noti che possiamo solo aver distribuito il carico, e che il carico è positivo per un momento positivo, e negativo per un attimo negativo.

31 Unità del carico "distribuito' w^* sono $\frac{FL}{EI}$ (lunghezza del tempo di forza divisa da EI). Così il "Shear' avrebbe unità di $w^* \times L$ or $\frac{FL^2}{EI}$ e il "momento' avrebbe unità di $(w^* \times L) \times L$ or $\frac{FL^3}{EI}$. Ricordare che EI ha unità di $FL^{-2}L^4 = FL^2$, osserviamo che in effetti la "sshear' corrisponde a una rotazione in radian e il ''momento' ad uno spostamento.

22.3.4.7.1 Ex 22.13: Trave di carico; carico del punto

Analizzare il fascio seguente



Nel fascio coniugato, abbiamo 3 equazioni di equilibrio e 1 equazione di condizione che somma è uguale al numero di reazioni.

La deflettorazione a D corrisponderà alla cesoia a D del corrispondente fascio coniugato.

$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_z^C = 0 \Rightarrow R_A(L) - \left(\frac{4PL}{5EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{2PL^2}{15EI}$$

che è la pendenza in fascio reale a A Come calcolato prima!

COPIA DI REVISIONE

Disegnamo il diagramma di Momento per la trave coniugata ad un punto x lontano da A. Da A a C

$$\begin{aligned} M &= \frac{P}{EI}\left[\frac{2}{15}L^2x - \left(\frac{4}{5}x\right)\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{3}\right)\right] \\ &= \frac{P}{EI}\left(\frac{2}{15}L^2x - \frac{2}{15}x^3\right) \\ &= \frac{2P}{15EI}\left(L^2x - x^3\right) \end{aligned}$$

Punto di massima del momento (Δ_{max}) si verifica quando $\frac{dM}{dx} = 0$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{2P}{15EI}(L^2 - 3x^2) = 0 \Rightarrow 3x^2 = L^2 \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

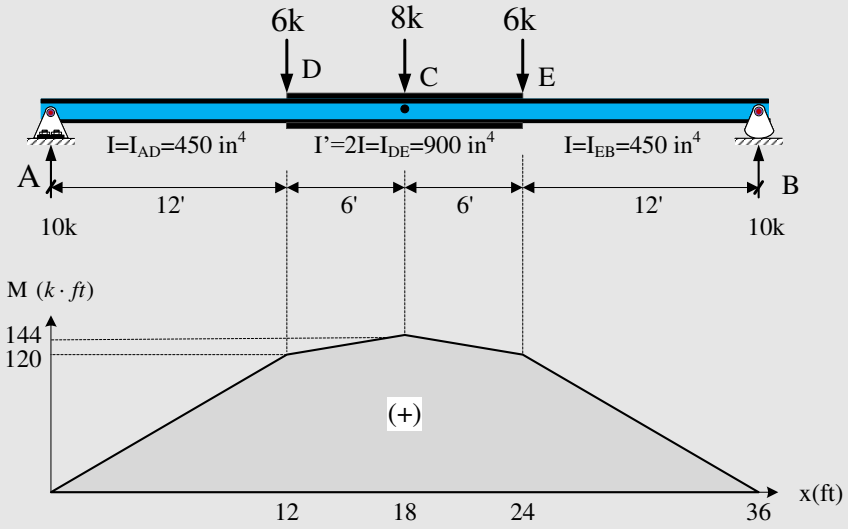
come precedentemente determinato

$$\begin{aligned} x &= \frac{L}{\sqrt{3}} \\ \Rightarrow M &= \frac{2P}{15EI}\left(\frac{L^2L}{\sqrt{3}} - \frac{L^3}{3\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{4PL^3}{45\sqrt{3}EI} \end{aligned}$$

come prima.

22.3.4.7.2 Ex 22.14: Trave coniugate; variabile I

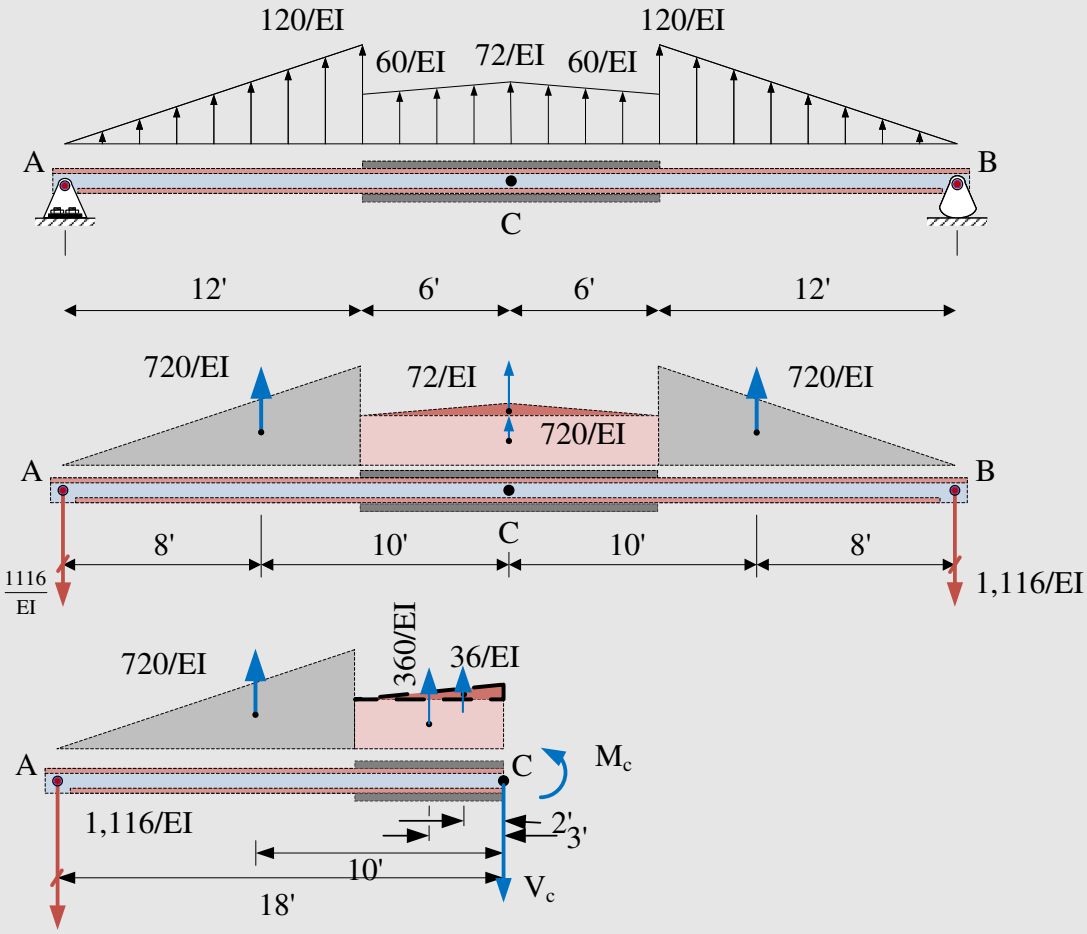
Determinare la deflezione al punto C per il seguente fascio



COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Dalla semplice osservazione, le reazioni a A e B sono pari a 10 k. Il carico elastico sul fascio coniugato è



Proviamo a determinare il momento interno al C′ nel fascio coniugato, si ottiene dall'equilibrio:

$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_z^B = -;\ \frac{1,116}{EI}(18) - \frac{720}{EI}(10) - \frac{360}{EI}(3) - \frac{36}{EI}(2) + M_C = 0$$

$$\Rightarrow M_{C'} = -\frac{11,736\text{k.ft}^3}{EI}$$

Sostituire

$$\Delta_C = M_{C'} = -\frac{11,736\text{k.ft}^3(12^3)\text{in}^3/\text{ft}^3}{(29\times 10^3)\text{k/in}^2(450)\text{in}^4} = -1.55''$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

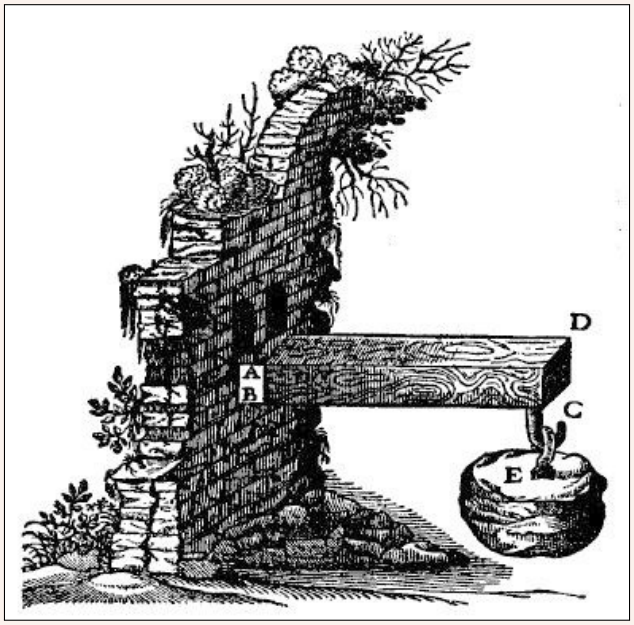


Illustrazione di Galileo di un raggio a baldacchino, dai discorsi e dalle dimostrazioni matematiche Rilasci alle due nuove scienze (1638)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 23

Guarnizione e Torsione

Abstract

La torsione e la rugosità sono spesso oscurate dalla flessione nell'analisi strutturale, ma svolgono ruoli cruciali in molti casi e meritano sicuramente un capitolo di questo libro. La copertura va oltre l'elemento elementare e si rivolge sia a modelli Timoshenko che Vlasov.

Alcune delle equazioni derivate completeranno quelle del capitolo 26, prepararsi ai metodi di rigidità.

23.1 Deformazione della tosapa (trasverso) . . . 1007
23.1.1 Guarnizione, elemento infinitesimale . . . 1008
23.1.2 Distribuzione delle cesoie; $\tau(y)$ . . . 1009
23.1.3 Coefficiente di taglio . . . 1010
23.1.4 Fattore di taglio . . . 1010
23.1.5 Deformazione a taglio v_s, Timoshenko . . . 1012
23.2 Deformazioni torsionali . . . 1012
23.2.1 S^t Torsione venosa o uniforme . . . 1013
23.2.2 Vlasov o torsione non uniforme . . . 1014

23.1 Deformazione della tosapa (trasverso)

[1] In generale, deformazioni della tomaia a causa di flessore, Fig. 23.1Tuttavia, per le travi con un rapporto di bassa portata e profondità, queste deformazioni non possono essere trascurate.

Bernouilli fascio, non contiamo per la deformazione della tosapa, sezione dell'aereo rimane aereo.

Timoshenko fascio conti per deformazione della topaia, ipotesi sezione piano non più valida.

COPIA DI REVISIONE

In quanto tale, questa sezione cercherà di determinare la deformazione della tosapa (senza flessione) e il suo impatto sui coefficienti di rigidità più tardi.

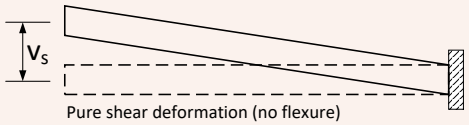


Figura 23.1: Deformazione pura della tosapa

23.1.1 Guarnizione, elemento infinitesimale

2 Assumendo un materiale elastico lineare, la ceppo di taglio (piccolo spostamento, cioè. $\tan\gamma \approx \gamma$), Fig. 23.2, è dato da

$$\tan\gamma \approx \gamma = \underbrace{\frac{dv_s}{dx}}_{\text{Kinematics}} = \underbrace{\frac{\tau}{G}}_{\text{Stress-strain}} \tag{23.1}$$

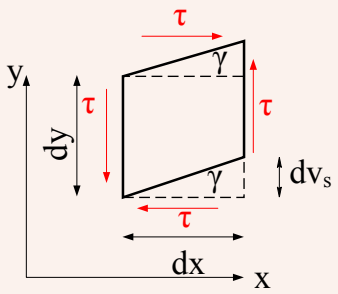


Figura 23.2: Elemento infinitesimale sottoposto a stress della tosapa

dove $\frac{dv_s}{dx}$ pendenza dell'asse neutro del fascio rispetto alla direzione orizzontale. La sezione verticale rimane indeformata. G è il modulo di taglio, τ lo stress della cinghia, e v_s *taglio indotto spostamento*.

23.1.1.1 Ex 23.1: Trave a sbalzo scaricata

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Consideriamo un cantilevered (rettangolare bxh) trave sottoposta a carico di un punto P dal principio del lavoro virtuale complementare (e notando che $\delta M = (1)x$, $M = Px$, $\delta\tau =$ 1e τ è dato da Eq. 23.3):

$$
\begin{aligned}
(1)\Delta &= \underbrace{\int_0^L \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx}_{\text{Flexure}} + \underbrace{\int_{Vol} \delta\overline{\tau}\frac{\tau}{G}dVol}_{\text{Shear}} \\
&= \int_0^L x\frac{Px}{EI}dx + \frac{1}{G}\int_{-h/2}^{h/2} \underbrace{(1)}_{\delta\tau} \underbrace{\left\{\frac{P}{2I}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]\right\}}_{\tau} \underbrace{Lbdy}_{dVol} \\
&= \underbrace{\frac{PL^3}{3EI}}_{\Delta_{flex}} + \underbrace{\frac{6}{5}\frac{PL}{AG}}_{v_s} \\
\Delta &= \frac{PL^3}{3EI}\left(1 + \frac{3E}{10G}\left(\frac{h}{L}\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

per $E/G = 2.5$ (valore fisico per l'acciaio), $\Delta = EI\left(1 + 0.75\left(\frac{h}{L}\right)^2\right)\Delta_{flex}$

Per $L = h$ la deviazione totale è di 1,75 volte quella dovuta solo alla flessione e per $L = 10h$ la deviazione dovuta alla cesoia è inferiore a 1% of Δ_{felx}.

23.1.2 Distribuzione delle cesoie; $\tau(y)$

3 Cerchiamo di determinare la distribuzione verticale dello stress della trasversale, Fig. 23.3a. Considerando un segmento di lunghezza dx taglio a distanza y da N.A. l'equilibrio richiede

$$(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \int_y^{y^{\text{top}}} \sigma_x^{\text{lft}} b dy - \int_y^{y^{\text{top}}} \sigma_x^{\text{rgt}} b dy + \tau_{xy} b dx = 0$$

Sostituire la grandezza delle sollecitazioni:

$$\int_y^{y^{\text{top}}} \frac{M(x)y}{I} b dy - \int_y^{y^{\text{top}}} \frac{M(x) + dM(x)y}{I} b dy + \tau_{xy} b dx = 0$$

Semplificare e dividere dx e b dà

$$\tau_{xy} = \frac{dM(x)}{dx}\frac{1}{Ib}\int_y^{y^{\text{top}}} y b dy$$

ma da $V(x) = dM(x)/dx$, allora la distribuzione dello stress della cinghia è data da

$$\tau(xy) = \frac{V(x)}{Ib}\int_y^{y^{\text{top}}} y b dy = \frac{V(x)Q(y)}{Ib} = \frac{VQ(y)}{Ib}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

V Forza di taglio, Q primo momento (o momento statico) circa l'asse neutro della porzione dell'area trasversale al di fuori della sezione dove lo stress della tosaia deve essere determinato, I momento di inerzia, b larghezza.

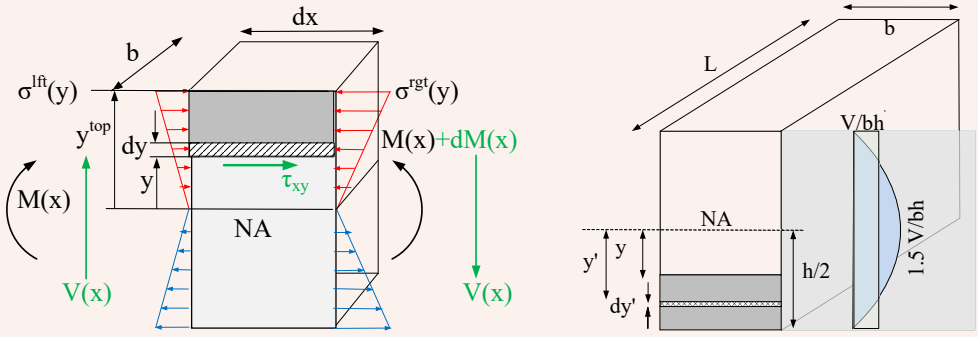
23.1.3 Coefficiente di taglio

4 *Definizione* coefficiente di taglio α_s come rapporto di sforzo della cinghia all'asse neutro $\tau(y = 0)$ allo stress medio della cesoia ($\tau = V/bh$).

$$\tau(y) = \frac{VQ(y)}{Ib} \tag{23.2}$$

$$= \frac{1}{Ib}\int_y^{h/2} V \underbrace{\underbrace{b dy'}_{dA}}_{dF}\, y' = \frac{V}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$$= \frac{6V}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \tag{23.3}$$



(a) Segmento di lunghezza dx taglio a distanza y dalla N.A.

(b) Coefficiente di taglio

Figura 23.3: Stress e coefficiente di taglio

- Lo stress per le orecchie è zero $y = h/2$ e massimo a l'asse neutro dove ($y = 0$ e $\tau_{max} = 1.5\frac{V}{bh}$). $\Rightarrow \alpha_s = 1.5$

23.1.4 Fattore di taglio

5 Just as we had $\sigma = P/A$, can we assume $\tau = V/A$?

COPIA DI REVISIONE

6 Normalizing the shear force V by A ($\tau = V/A$, just like $\sigma = P/A$) is incorrect since the shear stress is not uniformly distributed along the depth.

7 Definiamo

$$\tau \overset{\text{def}}{=} V/A_s \Rightarrow A_s \overset{\text{def}}{=} \frac{A}{\lambda_s} \tag{23.4}$$

where A_s is the effective cross section for shear. We seek to determine λ_s, the *shear factor*.

8 Per determinare λ_s noi stiamo per equare *energia media* U

$$U_{aver} = \int_0^L \frac{V^2}{2GA_s} dx = \lambda_s^? \int_0^L \frac{V^2}{2GA} dx \tag{23.5}$$

a *esatto* uno determinato dalla distribuzione effettiva dello stress

$$U_{exact} = \frac{1}{2}\int_\Omega \gamma \underbrace{G\gamma}_{\tau} d\Omega = \int_\Omega \frac{\tau^2}{2G} d\Omega = \iiint \frac{\tau^2}{2G} dxdydz \tag{23.6}$$

Nota che nella meccanica strutturale Ω rappresenta un volume, e Γ (or $\delta\Omega$) la superficie corrispondente.

9 A partire dall'esatta espressione dello stress della cesoia

$$\tau(y) = \frac{VQ(y)}{Ib}; \qquad Q(y) = \int_y^{h/2} by'dy' = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

10 Sostituire in Eq. 23.6 per determinare l'energia esatta.

$$\begin{aligned}
U_{exact} &= \int_0^L \left[\int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \frac{V^2}{8GI^2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)^2 dydz\right] dx \\
&= \int_0^L \frac{V^2 b}{8GI^2}\left[\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{h^4}{16} - \frac{h^2y^2}{2} + y^4\right) dy\right] dx \\
&= \int_0^L \frac{V^2 b}{8GI^2}\left[\frac{h^4 y}{16} - \frac{h^2y^3}{6} + \frac{y^5}{5}\right]_{-h/2}^{h/2} dx \\
&= \int_0^L \frac{V^2 bh^5}{240GI^2} dx
\end{aligned}$$

11 Per una sezione rettangolare $I = bh^3/12$

$$U_{exact} = \frac{3}{5}\int_0^L \frac{V^2}{GA} dx = \underbrace{\frac{6}{5}}_{1.2} \int_0^L \frac{V^2}{2GA} dx$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

12 Confronto con Eq. 23.5, si nota che il fattore forma della cinghia $\lambda_s = 1.2$. Così

$$\tau = V/A_s; \qquad A_s = \frac{A}{1.2} \tag{23.7}$$

13 Per la deformazione della tomaia, adottiamo così $\tau = V/A_s$ e da Eq. 23.1 noi otteniamo

$$\tan\gamma \simeq \gamma = \frac{dv_s}{dx} = \frac{V}{GA_s} = \frac{\lambda_s V}{AG} \tag{23.8}$$

14 Nota analogia con $\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{P}{AE}$

23.1.5 Deformazione a taglio v_s, Timoshenko

15 La deformazione della cinghia per un fascio fissato ad una estremità sottoposta a carico di punto all'altra (come nella definizione di un coefficiente di rigidità) sarà determinata in seguito.

16 Da Eq. 23.8e supponendo V per essere costante,

$$\int dv_s = \int \frac{V}{GA_s} dx \Rightarrow v_s = \frac{V}{GA_s} x + C_1 \tag{23.9}$$

17 Se lo spostamento v_s è zero all'estremità opposta del fascio, poi $C_1 = -\frac{V}{GA_s}(x - L)$ e

$$v_s = \frac{V}{GA_s}(x - L) \tag{23.10}$$

18 At $x = 0$

Definition 23.1: Deformazione della tosaerba

$$v_s = \frac{V}{GA_s} L \tag{23.11}$$

19 Questa espressione sarà rivisitata in §41.7 nel contesto del raggio Timoshenko.

23.2 Deformazioni torsionali

20 Quando la torsione è applicata a un membro strutturale, le sezioni trasversali di tale membro possono verrucare oltre a contorsione. la coppia applicata è resistita solo da

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

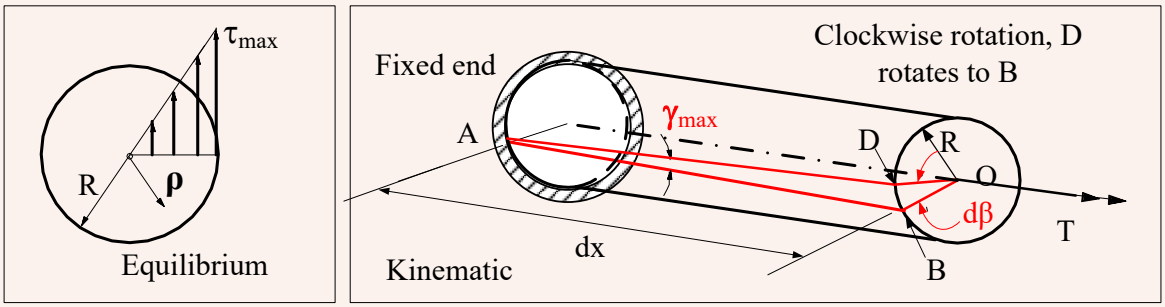


Figura 23.4: Rapporti di rotazione della tortura

Saint-Venant stress di taglio. Questo tipo di comportamento è indicato come puro o *torsione uniforme*. D'altra parte se il membro è trattenuta da un processo di deformazione liberamente, la coppia applicata viene resistita da una combinazione di stress e torsione di taglio Saint-Venant, questo si chiama *torsione non uniforme* (o torsione di Vlasov).

23.2.1 S^t Torsione venosa o uniforme

21 Assumendo un materiale elastico lineare e una tensione lineare (e quindi lo stress) distribuzione lungo il raggio di una sezione circolare a croce sottoposta a torsione carico, Fig. 23.4 abbiamo:

$$T_{SV} = \underbrace{\underbrace{\int_A \underbrace{\frac{\rho}{c}\tau_{max}}_{stress} \underbrace{dA}_{area}}_{Force} \underbrace{\rho}_{arm}}_{torque} = \frac{\tau_{max}}{c} \underbrace{\int_A \rho^2 dA}_{J} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{T_{SV}c}{J} \tag{23.12}$$

Notare l'analogia di questa ultima equazione con $\sigma = \frac{Mc}{I_{zz}}$.

22 $\int_A \rho^2 dA$ è il momento polare dell'inerzia J. Viene anche indicato come costante di torsione del San Venant. Per sezioni circolari

$$\begin{aligned} J &= \int_A \rho^2 dA = \int_0^R \rho^2 \left(2\pi\rho d\rho\right) \\ &= \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Per sezioni rettangolari $b \times d$e $b < d$, un'espressione approssimativa è data da

$$J = kb^3 d$$
$$k = \frac{0.3}{1 + \left(\frac{b}{d}\right)^2}$$

Per altre sezioni, J è spesso tabulato.

23 Nota: J corrisponde a I_{xx} dove x è l'asse lungo l'elemento.

24 Dopo aver sviluppato una relazione tra la torsione e lo stress della cesoia, ora cerchiamo un rapporto tra torsio e rotazione torsiale. In Fig. 23.4, consideriamo la lunghezza dell'arco BD

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{max} dx &= d\beta R \\ \Rightarrow \frac{d\beta}{dx} &= \frac{\gamma_{max}}{R} \\ \gamma_{max} &= \frac{\tau_{max}}{G} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \frac{d\beta}{dx} &= \frac{\tau_{max}}{GR} \\ \tau_{max} &= \frac{T_{SV} R}{J} \end{aligned}\right\} \frac{d\beta}{dx} = \frac{T_{SV}}{GJ}$$

25 Infine, possiamo riscrivere quest'ultima equazione come $\int T_{SV} dx = \int GJ d\beta$ e ottenere:

$$T_{SV} = \frac{GJ}{L}\beta \tag{23.13}$$

Notare la somiglianza tra questa equazione ed Equazione 26.1.

23.2.2 Vlasov o torsione non uniforme

26 Tutte le sezioni trasversali si dividono fuori luogo tranne quelle circolari. Quindi, un vincolo longitudinale può alterare la distribuzione e la rigidità dello stress su una lunghezza sostanziale del membro, solitamente beneficamente, perché inibiscono il deforestamento[1].

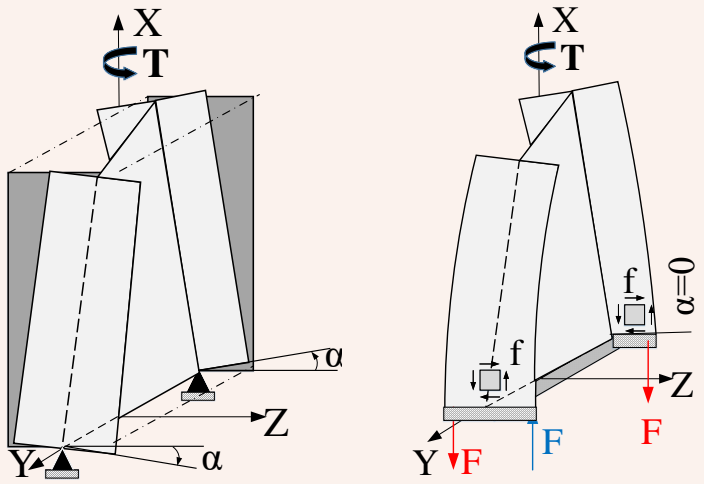
27 La teoria della torsione Vlasov, 1961 include l'effetto di deformazione, Fig. 23.5. Rispetto alla teoria tradizionale del fascio, la teoria di Vlasov introduce due quantità supplementari; *costante di deformazione* C_w e la *bimoment* B. La costante di curvatura è una proprietà a sezione trasversale e una misura per lo sforzo necessario per ridurre la deformazione. L'unità della costante di incenerimento è $[L^6]$. Il bimomento è definito come

$$B = Md \tag{23.14}$$

28 La necessità di definire questo nuovo momento deriva dal fatto che, mentre $M_y = M_z = \mathbf{N} = 0$, esistono ancora normali sollecitazioni che agiscono sulla sezione trasversale; introdurrà così un grado di libertà per elementi travi che rappresentano la coppia dovuta alla deformazione restrittiva.

[1] Rilievo basato su (McGuire e Winter, 1968).

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE



(a) Avvertenza ma non torsione

(b) Torsione e torsione frenati

Figura 23.5: Perché si verifica la guerra

29 Una sezione I completamente libera ad un'estremità e impedita da torsione, ma non disordini, all'altra estremità deforma come in Fig. 23.5aIn questo caso, per tutti gli scopi pratici ciò è strutturalmente simile al caso di un albero libero a entrambe le estremità, ma sottoposto a coppia uguale e opposta.

30 Se la base è impedito di deformare e torsione, le cose sono diverse. Impedire che i flange da inclinazione siano forze **F** che la piegano sul suo asse principale molto simile a un fascio rettangolare sono sviluppati ed esercitati dal supporto, Fig. 23.5b. Questi a sua volta portano ad una forza di taglio trasversale $\mathbf{H}_f$Fico. 23.6a, in ogni flangia. Ciò causerà flessione sull'asse forte molto simile a un fascio rettangolare[2].

31 La forza trasversale nella flangia tempi la distanza tra loro è una coppia che ha la stessa direzione della coppia resistente.

32 Il rinforzo di riscaldamento è generalmente utile, mentre la coppia totale è costante lungo l'albero, il tasso di torsione varia in genere. 23.5b deve essere zero, e tutta la resistenza te è nella coppia di curvatura. Ma poi l'effetto del restringimento finale muore, e la deformazione gradualmente aumenta lungo il pozzo fino a quando, in una sezione remota dalla base, è praticamente lo stesso come nella torsione pura e da allora tutta la coppia viene resistita dalla cesoia torsionale, Fig. 23.6b.

33 La torsione totale è quindi decomposta in due componenti

$$T = T_{SV} + T_V \tag{23.15}$$

[2] C'è anche la flessione del web, ma a causa della sua piccola rigidità nella sua direzione debole può essere ignorato.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

Il primo termine è ottenuto da Eq. 23.12

$$T_{SV} = GJ\theta = GK\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x} \tag{23.16}$$

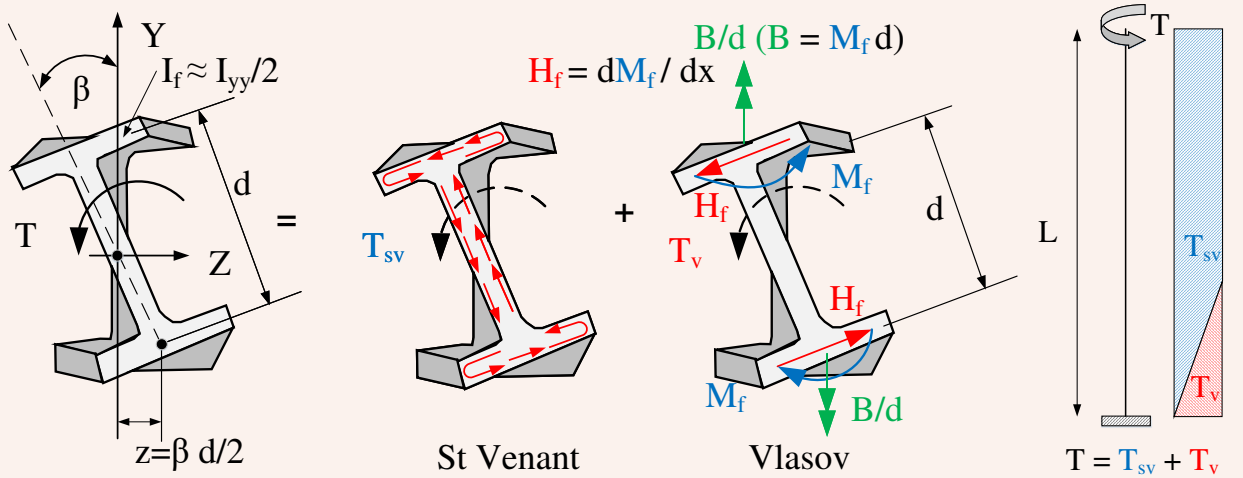
34 Per il secondo termine, ogni flangia può essere trattata come un fascio rettangolare piegato sul suo asse principale e poiché la forza di taglio è il derivato del momento

$$\frac{M_f}{EI_f} = -\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{d}{2}\frac{d^2\beta}{dx^2} \tag{23.17}$$

noi abbiamo

$$H_f = \frac{\mathrm{d}M_f}{\mathrm{d}x} = -EI_f\frac{\mathrm{d}^3z}{\mathrm{d}x^3}$$

dove M_f è il momento di piegamento nella flangia, I_f è il momento (singolo) di flangia dell'inerzia, z è la deviazione trasversale del centro di ogni flangia in una sezione x dalla base (angolo di torsione della sezione essendo β), Fig. 23.6.



(a) Torsioni

(b) Decomposizione della coppia

Figura 23.6: Torsione non uniforme (adattato da (McGuire e Winter, 1968))

35 Trascurare il web, I_f è una metà del momento debole dell'asse di inerzia dell'intera sezione che abbiamo, Fig. 23.6a

$$\begin{aligned} I_f &= I_{yy}/2 \\ z &= \beta d/2 \\ H_f &= T_V/d \end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

Sostituire

$$T_V = \frac{\mathrm{d}M_f}{\mathrm{d}x} = -E \underbrace{\frac{I_{yy}}{2}\frac{d^2}{2}}_{C_w} \frac{\mathrm{d}^3\beta}{\mathrm{d}x^3} \tag{23.18}$$

dove C_w è una proprietà sezione chiamata *costante di deformazione*.

36 Sostituire Eqs. 23.16 e 23.18 in Eq. 23.15:

Definition 23.2: Torsione uniforme e non uniforme

$$T = \underbrace{GJ\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x}}_{T_{SV}} - \underbrace{EC_w\frac{\mathrm{d}^3\beta}{\mathrm{d}x^3}}_{T_V} \tag{23.19}$$

37 In alternativa, portiamo dentro B che è definito come il prodotto di M_f con d

$$\left.\begin{aligned} B &= M_f d \\ M_f &= -EI_f z'' \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} B &= -EI_f z'' d \\ z &= \frac{\beta d}{2} \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} B &= -EI_f \tfrac{d^2}{2}\beta'' \\ I_f &= \tfrac{I_{yy}}{2} \end{aligned}\right\} B = -E\underbrace{I_{yy}\frac{d^2}{4}}_{C_w}\beta''$$

38 Quindi, Eq. 23.19 può essere riscritto come

$$T = GJ\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x} + \frac{dB}{dx}$$

39 Per facilitare l'identificazione dell'equazione differenziale di governo, Eq. 23.19 può essere riscritto come

$$\frac{\mathrm{d}^3\beta}{\mathrm{d}x^3} - p^2\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x} = -\frac{T}{EC_w}$$

dove

$$p^2 = \frac{GJ}{EC_w} \tag{23.20}$$

e la sua soluzione generale è

$$\beta = C_1 + C_2 px + C_3\cosh px + C_4\sinh px \tag{23.21}$$

le costanti saranno determinate mediante l'applicazione delle condizioni di confine applicabili in Fig. 23.7.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

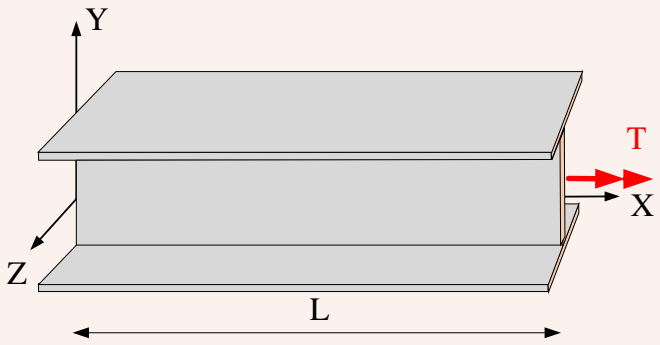


Figura 23.7: Ho un fascio sottoposto a torsione

Fascio di taglio a entrambe le estremità

40 Applicare le seguenti condizioni di confine,

$$\begin{array}{lll} \text{End 1} & x = 0, & \beta = \beta_1, \quad \beta' = \beta'_1, \\ \text{End 2} & x = L, & \beta = \beta_2, \quad \beta' = \beta'_2, \end{array} \tag{23.22}$$

noi determinamo le quattro costanti (Bhatt, 1986)

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(SpL - C + 1)\beta_1 + (1 - C)\beta_2 + p^{-1}(pL - C - S)\beta'_1 + p^{-1}(S - pL)\beta'_2}{D} \\ C_2 &= \frac{-S\beta_1 + S\beta_2 + p^{-1}(1 - C)\beta'_1 + p^{-1}(1 - C)\beta'_2}{D} \\ C_3 &= \beta_1 - C_1 \\ C_4 &= p^{-1}\beta'_1 - C_2 \end{aligned}$$

dove $D = 2(1 - C) + SpL$, $S = \sinh pL$e $C = \cosh pL$. Eq 23.21 può ora essere espresso in termini di funzioni formali

$$\begin{aligned} \beta &= N_1\beta_1 + N_2\beta'_2 + N_3\beta_2 + N_4\beta'_2 \\ N_1 &= \frac{(pL - px + \sinh px)S + (1 - C)(1 + \cosh px)}{D} \\ N_2 &= \frac{kx(1 - C) - (CpL - S)(\cosh px - 1) + (SpL + 1 - C)\sinh px}{D} \\ N_3 &= \frac{(C - 1)(\cosh px - 1) - S(\sinh px - px)}{D} \\ N_4 &= \frac{(C - 1)(\sinh px - px) - (S - pL)(\cosh px - 1)}{pD} \end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

41 In Eq. 23.22 Le condizioni di marea sono state espresse in termini di spostamenti, è meglio esprimerle in termini della coppia $T = GJ\beta' - EC_w\beta'''$ e invece del momento di piegatura nella flangia, usare il bimomento B, definito come

$$B = d\underbrace{EI_f z''}_{M_f} = EC_w\frac{d^2\beta}{dx^2}$$

tale che Eq. 23.19 può essere riscritto come

$$T = GJ\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x} - EC_w\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}$$

42 Usando Eq. 23.21 e i valori delle costanti di integrazione, possiamo esprimere le forze in termini di spostamenti nodali finali.

$$\begin{aligned}
T &= \frac{GJ}{LD}\left[(\beta_2-\beta_1)SpL - (\beta_1'+\beta_2')(C-1)L\right]\\
B &= \frac{GJ}{D}\left\{(\beta_2-\beta_1)\left[(C-1)\cosh px - S\sinh px\right]\right.\\
&\quad + p^{-1}\left[(S-Cp L)\cosh px + (SpL+1-C)\sinh px\right]\beta_1'\\
&\quad \left. + p^{-1}\left[(pL-S)\cosh px + (C-1)\sinh px\right]\beta_2'\right\}
\end{aligned}$$

Asta fissata ad un'estremità

43 In questo caso, le condizioni di confine sono date da

$$\begin{aligned}
&\text{End 1;} x = 0, \beta = 0; \frac{d\beta}{dx} = 0\\
&\text{End 2;} x = L, \qquad \frac{d^2\beta}{dx^2} = 0
\end{aligned} \tag{23.23}$$

Il primo insieme di condizioni afferma che la torsione e il tasso di rotazione sono zero a tal fine.Il secondo, afferma che l'incursione ad ogni flangia circa il suo asse principale è pari a zero (Eq. 23.17).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

44 Applicare queste condizioni di confine a Eq. 23.21 e i suoi derivati, la soluzione è

$$\beta = \frac{T}{GJ}\left[x + \frac{\sinh p(L-x) - \sinh\ pL}{p\cosh pL}\right] \tag{23.24}$$

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{T}{GJ}\left[1 - \frac{\cosh p(L-x)}{\cosh pL}\right] \tag{23.25}$$

$$\frac{d^2\beta}{dx^2} = \frac{T}{GJ}\left[\frac{p\sinh\ p(L-x)}{\cosh pL}\right] \tag{23.26}$$

$$\frac{d^3\beta}{dx^3} = -\frac{T}{GJ}\left[\frac{p^2\cosh\ p(L-x)}{\cosh pL}\right] \tag{23.27}$$

23.2.2.1 Ex 23.2: Torsione non uniforme di una sezione I

Esempio preso da McGuire e Winter, 1968, example 5.17

Un albero lungo 10 ft di una sezione 14 W 74, torsionally fissato ad un'estremità e libera all'altra, sottoposto a coppia T applicato alla fine libera, tracciare l'angolo di torsione e accettazione di T tra la coppia di St. Venant e la coppia in curvatura, cerchiamo di determinare le tensioni interne.

Proprietà fisiche

(in x lb/ft)	h (in)	w (in)	t_w (in)	$b_f(in)$	t_f (in)	I_x (in^4)	I_y (in^4)	J (in^4)	C_w
W 14 x 74	14.17	10.070	0.450	10.07	0.785	796	134	3.88	5,990
Usato*	14.17	10.070	0.450	10.07	0.785	796	134	3.6	6,000

La differenza è dovuta alle proprietà di sezione vecchia adottata nell'esempio.

$E = 30 \times 10^6$ psi, $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{1+0.3}$

Torsioni

Controllavo!

$$J = \Sigma\frac{bt^3}{3} = \frac{2\times 10.07\times(0.783)^3}{3} + \frac{12.62\times(0.450)^2}{3} = 3.60\ \text{in}^4\checkmark$$

$$C_w = \frac{d^2 I_y}{4} = \frac{(14.19-0.78)^2(133.5)}{4} = 6,000\ \text{in}^6\checkmark$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Utilizzo di equazioni precedentemente derivate:

$$\text{Eq. 23.20};\ p = \sqrt{\frac{GJ}{EC_w}} = \sqrt{\frac{E \times 3.6}{2(1+0.3)E \times 6,000}} = \frac{1}{65.9}\left(\frac{1}{\text{in.}}\right)$$

$$GJ = \frac{30 \times 10^6}{2(1+0.3)} \times 3.60 = 41.5 \times 10^6 \text{lbs-in}^2$$

$$\text{Eq. 23.24};\ \beta = \frac{T}{41.5 \times 10^6}\left[x + \frac{\sinh\left(\frac{120-x}{65.9}\right) - \sinh\left(\frac{120}{65.9}\right)}{\frac{1}{65.9}\cosh\left(\frac{120}{65.9}\right)}\right]$$

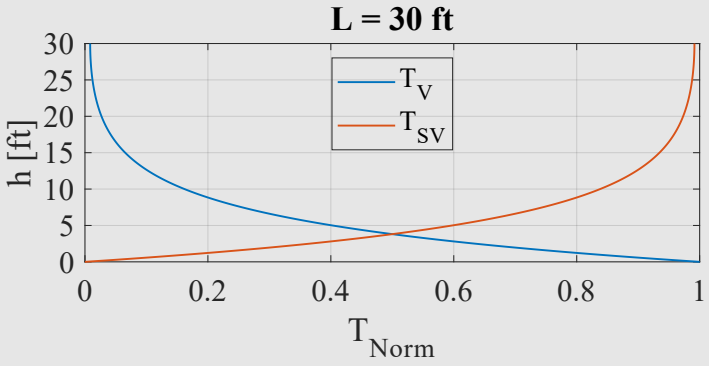
$$= \frac{T}{41.5 \times 10^6}\left[x - 62.4 + 20.8\sinh\left(\frac{120-x}{65.9}\right)\right]$$

$$\text{Eqs. 23.16 \& 23.25};\ T_{SV} = GJ\frac{d\beta}{dx} = T\left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{120-x}{65.9}\right)}{\cosh\left(\frac{120}{65.9}\right)}\right] = T\left[1 - \frac{1}{3.17}\cosh\left(\frac{120-x}{65.9}\right)\right]$$

$$\text{Eqs. 23.18 \& 23.26};\ T_V = -EC_w\frac{d^3\beta}{dx^3} = T\left[\frac{\cosh\left(\frac{120-x}{65.9}\right)}{\cosh\left(\frac{120}{65.9}\right)}\right] = T\left[\frac{1}{3.17}\cosh\left(\frac{120-x}{65.9}\right)\right]$$

Se la base era torsionalmente semplice, allora $T_{SV} = T$e $\beta = T_X/GJ = T_x/(41.5 \times 10^6)$.

I dati seguenti[a] illustrare la distribuzione di torsione normalizzata lungo l'albero. Infatti, per tutte le lunghezze, alla base abbiamo $T_V/T = 1$e $T_{SV}/T = 0$. Mentre ci allontanamo dalla base, l'effetto di restrizione diminuisce e l'impatto di moderazione (in questo caso) scompare solo una volta $L = 30$ Da quel momento in poi, la torsione è interamente resistita dalla Sait-Venant.



Stresse interne

Base : $T_{SV} = 0, T_V = T$

$$3M_f = -EI_f\left[\frac{d^2z}{dx^2}\right]_{x=0} = -\frac{EI_f d}{2}\left[\frac{d^2\beta}{dx^2}\right]_{x=0}$$

$$= -\frac{EI_y d}{4}\left[\frac{Tp}{GJ}\tanh(pL)\right] = -\frac{T}{pd}\tanh(pL)$$

$$= -T\left(\frac{65.9}{14.19 - 0.78}\right)\tanh\left(\frac{120}{65.9}\right) = -4.65T$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Assumere distribuzione lineare

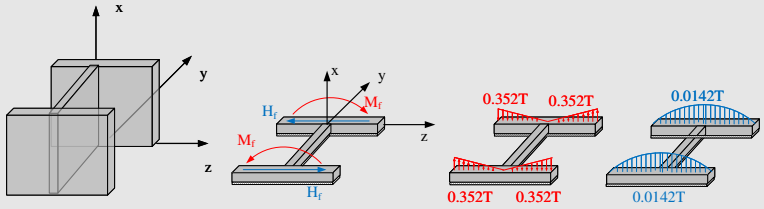
$$\sigma = \pm\frac{M_f}{t_f b_f^2/6} = \pm\frac{6\times 4.65T}{0.783(10.07)^2} = \pm 0.352T$$

Trasversale

$$H = \frac{T_V}{d} = \frac{T}{14.19-0.78} = \frac{T}{13.41}$$

Assumere distribuzione parabolica

$$\tau = \frac{3H}{2b_f t_f} = \frac{1.5T}{13.41(10.07\times 0.783)} = 0.0142T$$



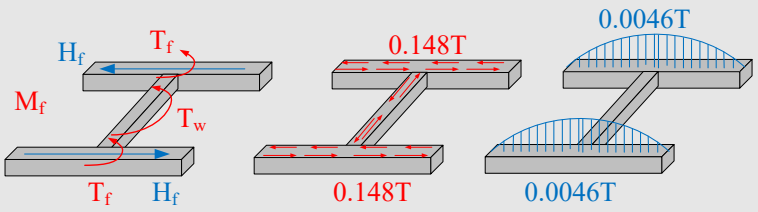
Fine libero Dalle espressioni di T_V e T_{SV} noi abbiamo $T_{SV} = 0.687T$ e $T_V = 0.32T$

Trasversale

$$\tau = 0.32(0.0142T) = 0.00455T$$

Portata torsionale

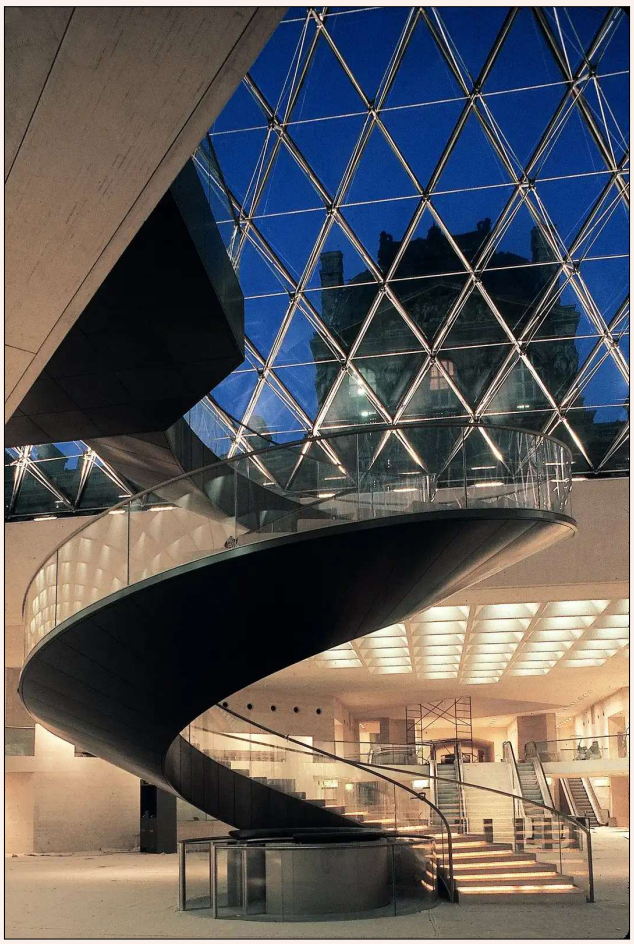
$$\begin{aligned} \tau_{fm} &= \frac{t_f T_{SV}}{J} = \frac{0.783(0.68T)}{3.60} = 0.148T \quad \text{Flange} \\ \tau_{wm} &= \frac{t_w T_{SV}}{J} = \frac{0.450(0.687T)}{3.60} = 0.085T \quad \text{web} \end{aligned}$$



[a] Generando MATLAB®il codice è in §I.2.3.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Museo del Louvre, scala (I.M. Pei)

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 24

Lavoro virtuale complementare

Abstract

Il capitolo precedente introdusse metodi geometrici per determinare le deflettenze, che erano limitate ai membri flessori. Questo capitolo adotta un approccio fondamentalmente diverso, fondato nella prima legge della termodinamica, applicabile a tutti i tipi di elementi strutturali (cfr. figura). 17.2). Sebbene spesso indicato come "Metodi energetici" nella maggior parte dei libri di testo, questo capitolo impiega un titolo più rigoroso per allineare con la copertura dettagliata dei metodi basati sull'energia nel Capitolo 48. Infine, questo capitolo è arricchito con numerosi esempi che vanno da semplici a particolarmente complessi, dimostrando l'applicazione pratica di questi metodi.

24.1 Introduzione 1025
24.2 Derivazione semplificata del principio di lavoro virtuale complementare 1025
24.2.1 Ritiro 1025
24.2.2 f_{ij}, f_{ji} Teorema Reciproco di Maxwell-Betti 1028
24.2.3 Lavoro virtuale esterno $\delta\overline{W}^*$ 1029
24.2.4 Lavoro virtuale interno $\delta\overline{U}^*$. 1029
24.3 Esempi 1031
24.3.1 Ex 24.1: Signora 1031
24.3.2 Ex 24.2: Cornice; deflettori . 1032
24.3.3 Ex 24.3: Cornice, rotazione . 1033
24.3.4 Ex 24.4: Staffa flessibile . . . 1034
24.3.5 Ex 24.5: Trave a sbalzo sostenuta da cavo 1036
24.3.6 Ex 24.6: Deformazione torsionale e flessorale 1037
24.3.7 Ex 24.7: Deformazioni flessurali e cesoie in un fascio . . . 1039
24.3.8 Ex 24.8: Effetti termici in un raggio 1040
24.3.9 Ex 24.9: Condotta 1041
24.3.10 Ex 24.10: Capriata semplice . 1042
24.3.11 Ex 24.11: Capriata complessa 1043
24.3.12 Ex 24.12: Capriata con controfreccia iniziale 1044
24.3.13 Ex 24.13: Capriata con tensioni secondarie 1045
24.3.14 Ex 24.14: Anello circolare . . 1047
24.3.15 Ex 24.15: Primavera 1049



COPIA DI REVISIONE

24.1 Introduzione

1 Il capitolo precedente si è esteso su un metodo geometrico per calcolare le deflettori, ma era restrittivo (limitato ai membri flessografici) e piuttosto "ellittico".

2 Il presente capitolo si rivolgerà ad un approccio generale che può essere applicato a tutti i tipi strutturali e non è limitato ai sistemi lineari, ma lo sviluppo del metodo sarà "sophomoric", una derivazione più razionale verrà presentata in 48.3.1.

3 Una nota sulla notazione, che si fonderà con quantità reali e virtuali; in seguito vengono identificati avendo un overbar su di loro e preceduto da δ simbolo (da non confondere con il derivato).

24.2 Derivazione semplificata del principio di lavoro virtuale complementare

24.2.1 Ritiro

4 De deve derivare il principio considerando una struttura e un carico arbitrario come mostrato nella figura 24.1. per semplicità, presumiamo (o consideriamo) che questa struttura sviluppa solo sollecitazioni assiali interne e ceppi (σ e ε). La struttura sarà sottoposta a due tipi di forze:

Virtuale forze applicate nella posizione A e lungo la direzione (grado di libertà) dove vogliamo calcolare lo spostamento (o rotazione), è virtuale, il suo valore è irrilevante, ma spesso si presume che sia l'unità. *equilibrio equilibrio equilibrio*

Realtà corrispondente al carico effettivo applicato esternamente, B.

Gli spostamenti corrispondenti devono essere conformi alle condizioni di confine.

5 Proveremo a trarre le espressioni per i *lavoro virtuale* che è il lavoro fatto dalla forza virtuale che agisce attraverso un reale spostamento[1]. Questo sarà realizzato attraverso le seguenti sequenze:

- Applicare il carico virtuale solo a A (Oltre Eq. 1)[2]
- Applicare il carico virtuale A e poi applicare il carico reale B (mentre il carico virtuale è ancora acceso).

[1] O forze reali che agiscono attraverso uno spostamento virtuale.
[2] Oppure potremmo iniziare applicando il carico reale B solo (ottenere Eq. 2), quindi applicare quello virtuale. La sequenza di carico è irrilevante.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

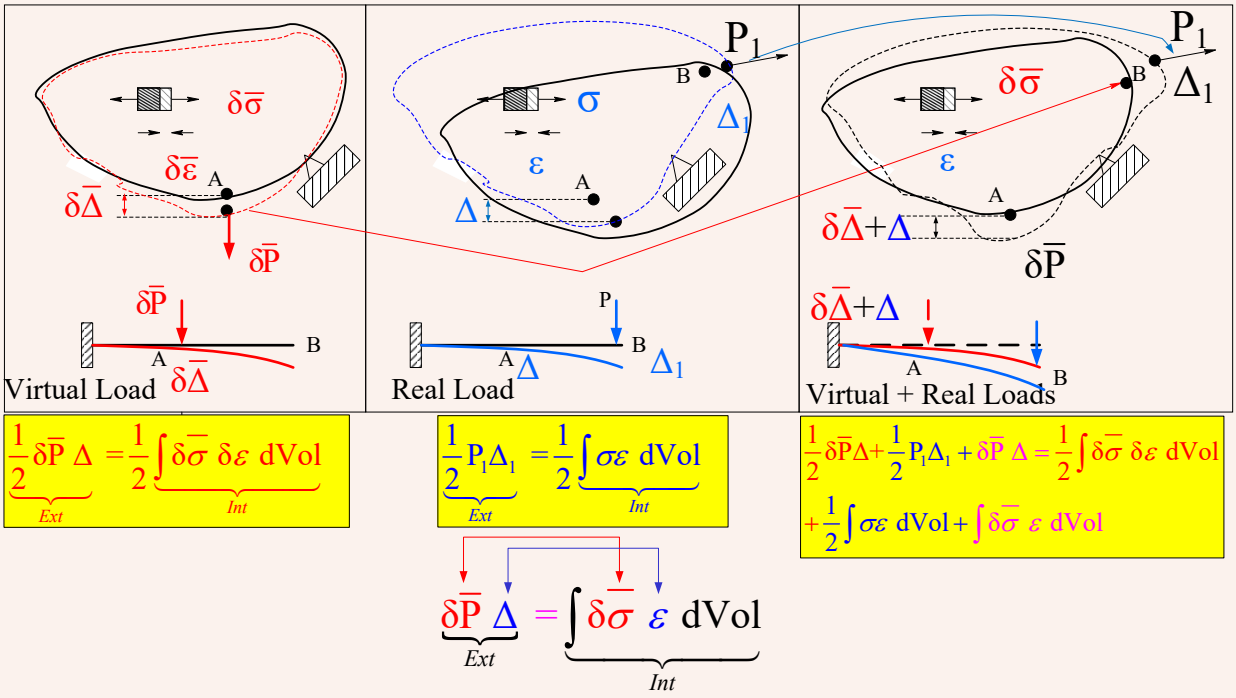


Figura 24.1: Forze virtuali e reali in una struttura arbitraria

6 A questo punto interrompiamo la derivazione e ci ricordiamo

Definition 24.1: Prima Legge di Termodinamica

La velocità di cambiamento dell'energia totale (cioè la somma dell' energia cinetica) K e l'energia interna U) è uguale alla somma del tasso di lavoro fatto dalle forze esterne Noi e al cambiamento dei contenuti termici per tempo di unità H

$$\frac{d}{dt}(K+U) = W_e + H$$

For an adiabatic system (no heat exchange) and if loads are applied in a quasi static manner (no kinetic energy), the above relation simplifies to:

$$W_e = U$$

7 Semplicemente mettere, nel nostro caso, il lavoro esterno deve pari energia di sforzo interno. Di conseguenza:

COPIA DI REVISIONE

1. Quando applichiamo il carico virtuale A, poi il lavoro esterno deve essere uguale all'energia di tensione interna su tutto il volume, quindi:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\delta\overline{P}\delta\overline{\Delta}}_{\text{External virtual work}} = \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\text{dVol}} \delta\overline{\sigma}\delta\overline{\varepsilon}\text{dVol}}_{\text{Internal virtual strain energy}}$$

   - La 1/2 deriva dal fatto che il carico viene gradualmente applicato dilagandosi da 0 a esso pieno valore linearmente. L'area sotto la curva rappresenta l'opera esterna (come per l'energia interna della tensione).
   - L'energia di strain è il lavoro interno ed è integrata sul volume

2. Analogamente, applicazione di carico reale a B darà

$$\underbrace{\frac{1}{2}P_1\Delta_1}_{\text{External real work}} = \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\text{dVol}} \sum \varepsilon\text{dVol}}_{\text{Internal real strain energy}}$$

3. Ora, il carico virtuale viene applicato per la prima volta e poi applichiamo il carico reale (effettivo) sulla parte superiore del sistema deformato. $\delta\overline{P}$ rimane costante ma subì un ulteriore spostamento Δ. Così che c'è un *aggiuntivo* lavori esterni pari a $\delta\overline{P}\Delta$ in quella posizione uguale a

$$\delta\overline{P}\Delta = \int_{\text{Vol}} \delta\overline{\sigma}\varepsilon\text{dVol}$$

   Mancanza di 1/2 termine. Quindi, il lavoro totale fatto diventa

4. - Eq. 1, 2 e 3 otteniamo:

$$\underbrace{\overbrace{\frac{1}{2}\delta\overline{P}\delta\overline{\Delta}}^{A} + \overbrace{\frac{1}{2}P_1\Delta_1}^{B}}_{\text{Uncoupled}} + \underbrace{\overbrace{\delta\overline{P}\Delta}^{A-B}}_{\text{Coupled}} = \underbrace{\overbrace{\frac{1}{2}\int_{\text{Vol}} \delta\overline{\sigma}\delta\overline{\varepsilon}\text{dVol}}^{A} + \overbrace{\frac{1}{2}\int_{\text{Vol}} \sum \varepsilon\text{dVol}}^{B}}_{\text{Uncoupled}} + \underbrace{\overbrace{\int_{\text{Vol}} \delta\overline{\sigma}\varepsilon\text{dVol}}^{A-B}}_{\text{Coupled}}$$

5. Poiché l'energia e il lavoro di sforzo fatti devono essere gli stessi se i carichi vengono applicati insieme o separatamente, otteniamo, sottraendo la somma di Eq. 2 e 1 da 4 e generalizzare, otteniamo

$$\underbrace{\int_{\text{Vol}} \delta\overline{\sigma}\varepsilon\text{dVol}}_{\delta\overline{U}^*} = \underbrace{\delta\overline{P}\Delta}_{\delta\overline{W}^*}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

8 Quest'ultima equazione è la chiave del metodo delle forze virtuali. Il lato sinistro è l'energia virtuale interna $\delta\overline{U}^*$[3]. Analogamente il lato destro è il lavoro virtuale esterno.

9 L'ultima equazione può essere indicata come segue

Definition 24.2: Principio del lavoro virtuale (complementari)

Se una struttura deformabile, in equilibrio e sostenendo un determinato insieme di carichi, è sottoposta a una deformazione virtuale come risultato di qualche azione aggiuntiva, il lavoro virtuale esterno del dato set di carichi è pari al lavoro virtuale interno delle sollecitazioni causate dal dato insieme di carichi.

24.2.2 f_{ij}, f_{ji} Teorema Reciproco di Maxwell-Betti

Per il contesto storico, consultare §11.4.1

10 Recall that f_{ij}, is the displacement at dof i due to a unit force at dof j.

$$\text{Displacement at dof } i \text{ due to point load at } i \ \Delta_i = \int \delta\overline{M}_i \frac{M_i}{EI} \mathrm{d}x$$

$$\text{Displacement at dof } i \text{ due to a unit force at } j \ f_{ij} = \int \delta\overline{M}_i \frac{M_j}{EI} \mathrm{d}x$$

$$\text{Displacement at dof } j \text{ due to a unit force at } i \ f_{ji} = \int \delta\overline{M}_j \frac{M_i}{EI} \mathrm{d}x$$

Poiché sia i carichi virtuali che i carichi reali sono unità $\delta\overline{M}_i = M_i$, $\delta\overline{M}_j = M_j$Allora $f_{ij} = f_{ji}$.

Definition 24.3: Teorema Reciproco di Maxwell-Betti

La deflezione del punto A in direzione 1 a causa del carico unitario al punto B nella direzione 2 è uguale alla grandezza della deviazione del punto B in direzione 2 prodotto da un carico unitario applicato A in direzione 1.

$$f_{ij} = f_{ji}$$

o, per estensione: Se due gruppi di carico agiscono su una struttura linearemente elastica, il lavoro svolto dal primo insieme di carichi in azione attraverso gli sposta-

[3] Usiamo il * per distinguerlo dall'energia virtuale interna di sforzo $\delta\overline{U}$ ottenuto dal metodo di spostamento virtuale (da coprire in seguito) .

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

menti prodotti dalla seconda serie di carichi è pari al lavoro fatto dal secondo set di carichi nell'agire tramite spostamenti prodotto dal primo set.

$$P_1\delta_{12} = P_2\delta_{21}$$

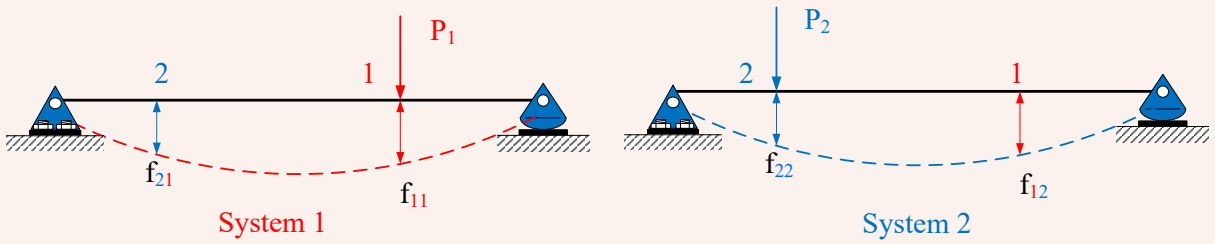


Figura 24.2: Teorema reciproco Maxwell-betti

24.2.3 Lavoro virtuale esterno $\delta\overline{W}^*$

Per il contesto storico, consultare §10.3.2.2

11 Il lavoro virtuale esterno per una struttura sottoposta a carichi o momenti di punta è

$$\delta\overline{W}^* = \sum_{i=1}^{n}(\Delta_i)\delta\overline{P}_i + \sum_{i=1}^{n}(\theta_i)\delta\overline{M}_i$$

Si noti che non c'è una cosa come carico virtuale distribuito. Ricordiamo che tutte le quantità di overbar sono virtuali e quelle altre sono vere.

24.2.4 Lavoro virtuale interno $\delta\overline{U}^*$

12 Da Eq. eq:pvwd, l'espressione generale per il lavoro virtuale interno è

$$\delta\overline{U}^* = \int \delta\overline{\sigma}\varepsilon \mathrm{dVol}$$

13 Per sistemi elastici lineari ($\sum = E\varepsilon$), questo può essere ampliato per relazionarsi con forze e momenti,

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Membri assiali

14 Un'erizione di sostituzione porterebbe a

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U}^* &= \int_{\text{dVol}} \varepsilon(x)\delta\overline{\sigma}(x)d\text{Vol} \\ \delta\overline{\sigma}(x) &= \frac{\delta\overline{P}^{(e)}(x)}{A} \\ \varepsilon(x) &= \frac{P^{(e)}(x)}{AE} \\ dV &= Adx \end{aligned}\right\} \delta\overline{U}^* = \int_0^L \delta\overline{P}^{(e)}(x) \underbrace{\frac{P^{(e)}(x)}{AE}}_{\Delta} dx \tag{24.1}$$

15 Si noti che per una tregua, dove abbiamo n membri, l'espressione di cui sopra diventa

$$\delta\overline{U}^* = \sum_1^n \delta\overline{P}^{(i)} \frac{P^{(i)}L_i}{A_iE_i}$$

Dobbiamo tenere presente che P è la forza assiale causata dal carico reale e $\delta\overline{P}$ È la forza assiale causata dal carico virtuale, che è determinata da un'analisi di truss.

16 Si noti che questa equazione è identica a quella data da Maxwell in §15.5.4.2.

Membri della flessione

17 A seguito di un approccio analogo:

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U}^* &= \int_{\text{Vol}} \varepsilon(x) \underbrace{E\delta\overline{\varepsilon}(x)}_{\delta\overline{\sigma}(x)} \text{dVol} \\ \delta\overline{\sigma}_x(x) &= \frac{\delta\overline{M}_z(x)y}{I_z} \\ \varepsilon(x) &= \frac{M_z(x)y}{EI_z} \\ d\text{Vol} &= dA\,dx \\ I_z &= \int_A y^2 dA \end{aligned}\right\} \delta\overline{U}^* = \int_0^L \delta\overline{M}(x) \underbrace{\frac{M(x)}{EI_z}}_{\Phi(x)} dx$$

18 Ancora una volta, tenete presente che $M(x)$ è il diagramma del momento causato dal carico reale e $\delta\overline{M}(x)$ è il diagramma del momento causato da quello virtuale.

19 Evidentemente, avremo bisogno di *espressioni analitiche per i momenti*.

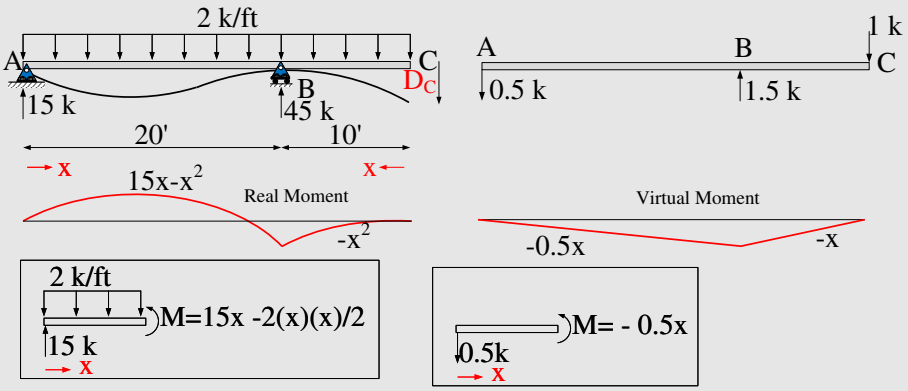
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

24.3 Esempi

24.3.1 Ex 24.1: Signora

Cerchiamo di determinare la deflezione al punto C. $E = 29,000$ - Ok. $I = 100$ in^4.



Per il metodo di forza virtuale, dobbiamo avere due espressioni per il momento, una a causa del carico reale e l'altra alla (unità) virtuali.

Elemento di base	$x = 0$	$M(x)$	$\delta\overline{M}(x)$
AB	A	$15x - x^2$	$-0.5x$
BC	C	$-x^2$	$-x$

Applicando il principio del lavoro virtuale, otteniamo

$$\underbrace{\Delta_C \delta\overline{P}}_{\delta\overline{W}^*} = \underbrace{\int_0^L \delta\overline{M}(x)\frac{M(x)}{EI_z}dx}_{\delta\overline{U}^*}$$

$$(1)k(\Delta_C)ft = \int_0^{20}(-0.5x)\frac{(15x - x^2)}{EI}dx + \int_0^{10}(-x)\frac{-x^2}{EI}dx$$
$$= \frac{2,500}{EI}$$

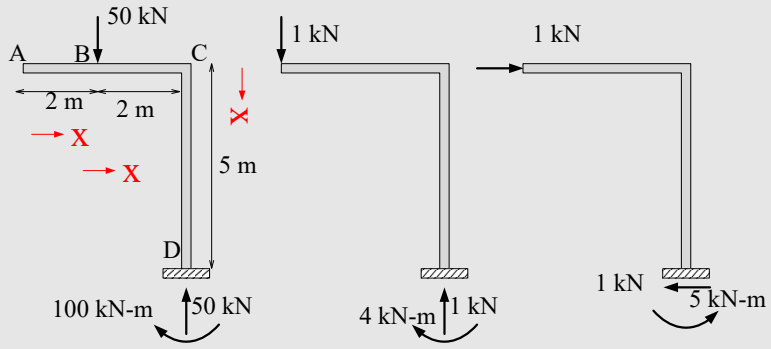
$$(1)k(\Delta_C)\text{ in} = \frac{(2,500)\text{ k}^2 - \text{ ft}^4(1,728)\text{ in}^3/\text{ ft}^3}{(29,000)\text{ k/ in}^2(100)\text{ in}^4}$$
$$= 1.49\text{ in}$$

COPIA DI REVISIONE

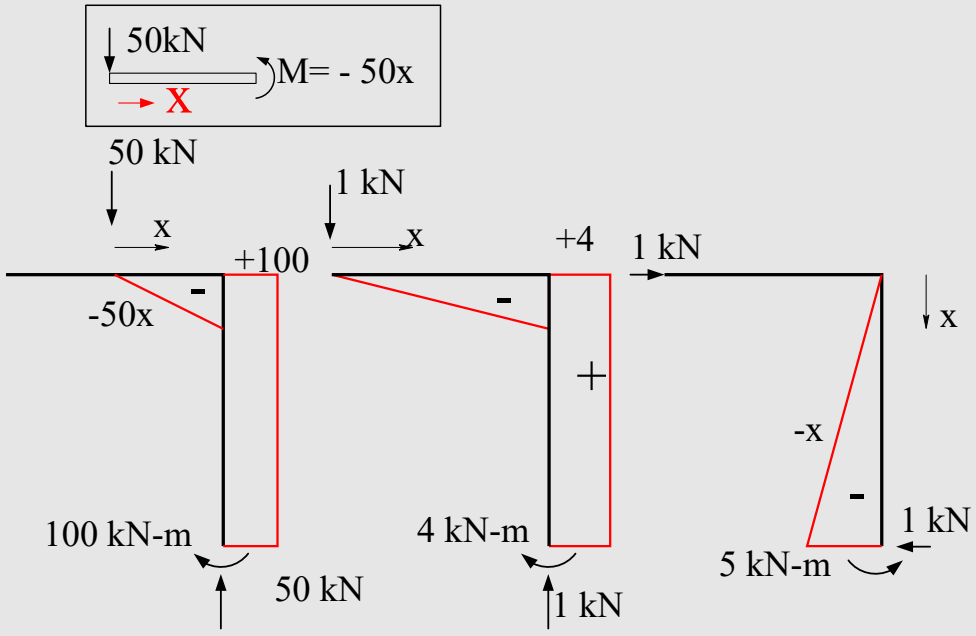
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

24.3.2 Ex 24.2: Cornice; deflettori

Per il seguente telaio cerchiamo di determinare sia la deviazione verticale che orizzontale a A. $E = 200 \times 10^6$ kN/ m^2, $I = 200 \times 10^6$ mm^4.



Per analizzare questo frame dobbiamo determinare le espressioni analitiche per i momenti che si svolgono lungo ogni membro per il carico reale e per i due virtuali. Un carico virtuale è un'unità di carico orizzontale ad A, e l'altro una unità verticale anche ad A. I diagrammi di momento per il set necessario di carichi, e che saranno descritti analiticamente, sono mostrati sotto



Elemento di base	$x = 0$	M	$\delta\overline{M}_v$	$\delta\overline{M}_h$
AB	A	0	$-x$	0
BC	B	$-50x$	$-2-x$	0
CD	C	100	4	$-x$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Unità: kN & m Ora sostituiamo

$$\underbrace{\Delta_v \delta\overline{P}}_{\delta\overline{W}^*} = \underbrace{\int_0^L \delta\overline{M}(x)\frac{M(x)}{EI_z}dx}_{\delta\overline{U}^*}$$

$$\begin{aligned}(1)kN(\Delta_v)m &= \int_0^2 (-x)\frac{(0)}{EI}dx + \int_0^2 (-2-x)\frac{-50x}{EI}dx + \int_0^5 (4)\frac{100}{EI}dx \\ &= \frac{2,333\ \text{kN}^2\ \text{m}^4}{EI} \\ &= \frac{(2,333)\ \text{kN}^2\ \text{m}^4(10^3)^4\ \text{mm}^4/\ \text{m}^4}{(200\times10^6)\ \text{kN}/\ \text{m}^2(200\times10^6)\ \text{mm}^4} \\ &= 0.058\ \text{m} = 5.8\ \text{cm}\end{aligned}$$

Analogamente per lo spostamento orizzontale:

$$\underbrace{\Delta_h \delta\overline{P}}_{\delta\overline{W}^*} = \underbrace{\int_0^L \delta\overline{M}(x)\frac{M(x)}{EI_z}dx}_{\delta\overline{U}^*}$$

$$\begin{aligned}(1)kN(\Delta_h)m &= \int_0^2 (0)\frac{(0)}{EI}dx + \int_0^2 (0)\frac{-50x}{EI}dx + \int_0^5 (-x)\frac{100}{EI}dx \\ &= \frac{-1,250\ \text{kN}^2\ \text{m}^4}{EI} \\ &= \frac{(-1,250)\ \text{kN}^2\ \text{m}^4(10^3)^4\ \text{mm}^4/\ \text{m}^4}{(200\times10^6)\ \text{kN}/\ \text{m}^2(200\times10^6)\ \text{mm}^4} \\ &= -0.031\ \text{m} = -3.1\ \text{cm}\end{aligned}$$

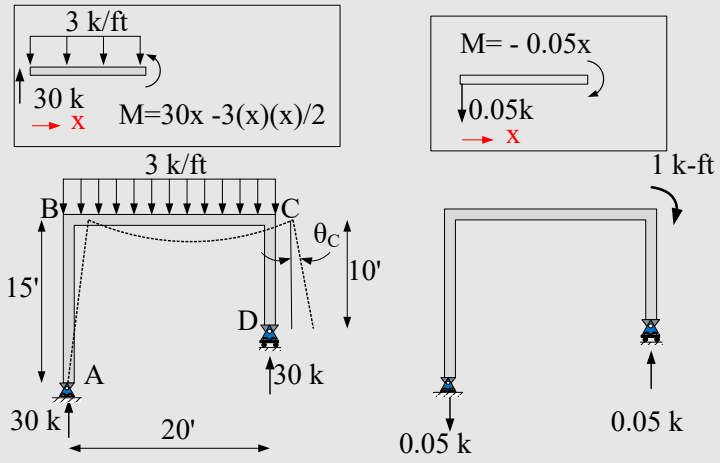
Si noti che la deviazione orizzontale è a sinistra (di fronte alla direzione della forza virtuale).

24.3.3 Ex 24.3: Cornice, rotazione

Vogliamo determinare la rotazione del giunto C. $E = 29,000$ ksi, $I = 240\ \text{in}^4$.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



In questo problema la forza virtuale è un momento unitario applicato al giunto C, $\delta\overline{M}_e$. causerà un momento interno $\delta\overline{M}_i$ espresso come

Elemento di base	$x = 0$	M	$\delta\overline{M}$
AB	A	0	0
BC	B	$30x - 1.5x^2$	$-0.05x$
CD	D	0	0

Resezioni di sostituzione:

$$\underbrace{\theta_C \delta\overline{M}_e}_{\delta\overline{W}^*} = \underbrace{\int_0^L \delta\overline{M}\frac{M}{EI_z}dx}_{\delta\overline{U}^*}$$

$$(1)k - ft(\theta_C)\text{rad} = \int_0^{20}(-0.05x)\frac{(30x - 1.5x^2)}{EI}dx \quad \text{k}^2\ \text{ft}^3$$

$$= -\frac{(1,000)k^2\ \text{ft}^2(144)\ \text{in}^2/\ \text{ft}^2}{(29,000)\ \text{k}/\ \text{in}^2(240)\ \text{in}^4}$$

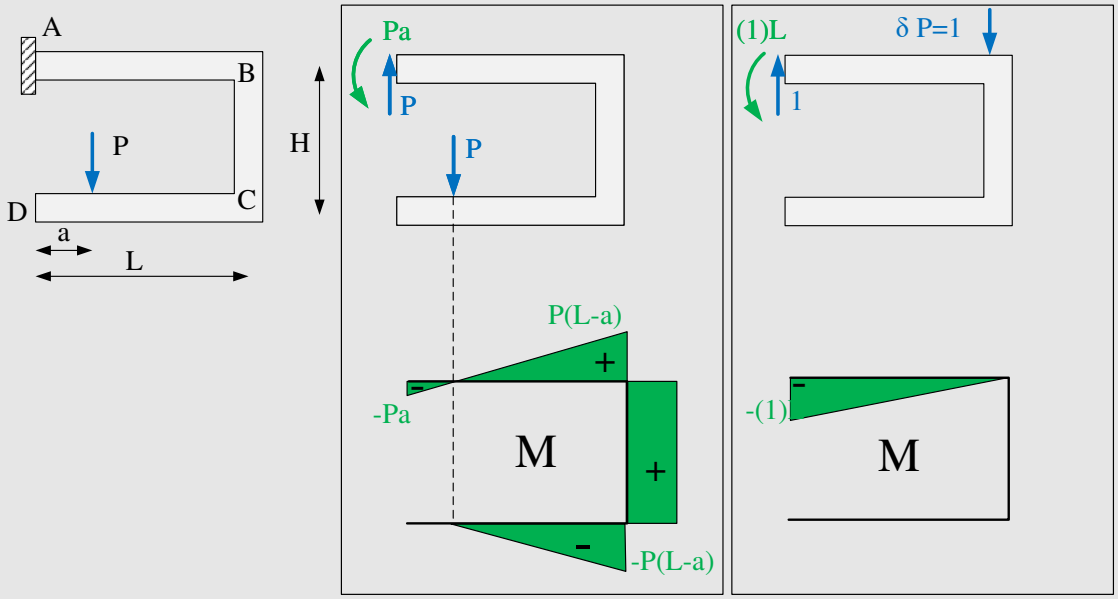
$$= -0.021 \text{ radians}$$

24.3.4 Ex 24.4: Staffa flessibile

Cerchiamo di determinare a tale che la deviazione verticale a B è zero.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Le reazioni e i diagrammi di momento corrispondenti alle forze reali e virtuali sono facilmente determinati e mostrati nei grafici corrispondenti sopra e riassunti sotto nella loro forma analitica.

Elemento di base	$x = 0$ @	M	$\delta\overline{M}$
DE	D	0	0
EC	E	$-Px$ 0	
CB	C	$-P(L-a)$	0
BF	B	$P(L-a-x)$	x
FA	F	Px	$L-a+x$

$$\underbrace{\Delta_B \delta\overline{P}}_{\delta\overline{W}*} == \int_L \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx$$

$$\Delta_B(1) = \int_0^{L-a} \frac{P(L-a-x)x}{EI}dx + \int_0^{a} \frac{-Px(L-a+x)}{EI}dx$$

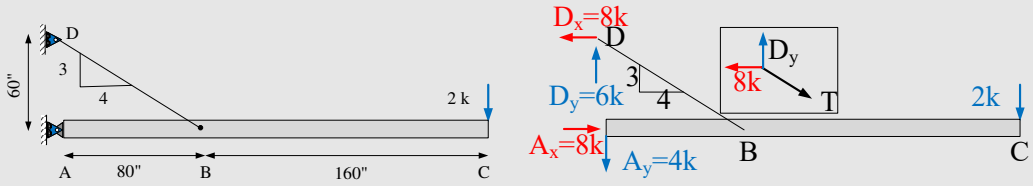
$$\Delta_B = \frac{PL^2}{6EI}(L-3a) \Rightarrow a = \frac{L}{3}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

24.3.5 Ex 24.5: Trave a sbalzo sostenuta da cavo

Un baldacchino d'ingresso è supportato da un cavo in alluminio (A = 1 in^2; E=10^7 psi), e anche il fascio di alluminio (A = 10 in^2; I = 171 in^4, E = 10^7 psi). Cerchiamo di determinare lo spostamento a C.



Prima computer le forze associate al carico reale.

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^A = 0; \Rightarrow D_x(60) - 2(240) = 0 \Rightarrow D_x = 8k$$
$$(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0; \Rightarrow -D_x + A_x = 0 \Rightarrow A_x = 8k$$
$$(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; \Rightarrow -A_y + D_y - 2 = 0$$

Tuttavia il cavo inclinato può trasportare solo forze assiali, quindi

$$\left.\begin{aligned}\frac{3}{5}T - D_y &= 0\\ \frac{4}{5}T - D_x &= 8k\end{aligned}\right\} T = 10k$$

e così $D_y = 6k$ e $A_y = 4k$. Poi tabulamo i risultati con le corrispondenti espressioni analitiche per le forze interne

Elemento di base	$x = 0$ at	P	$\delta\overline{P}$	M	$\delta\overline{M}$
AB	A	-8	-4	$-4x$	$-2x$
BC	B	0	0	$2x - 320$	$x - 160$
DB	D	10	5		

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

da questi due tavoli

$$\underbrace{\delta\overline{P}\Delta_c}_{\delta W_*} = \underbrace{\int_L \delta\overline{P}\frac{P}{AE}dx + \int \delta\overline{M}\frac{M}{Ei}dx}_{\delta\overline{U}_*}$$

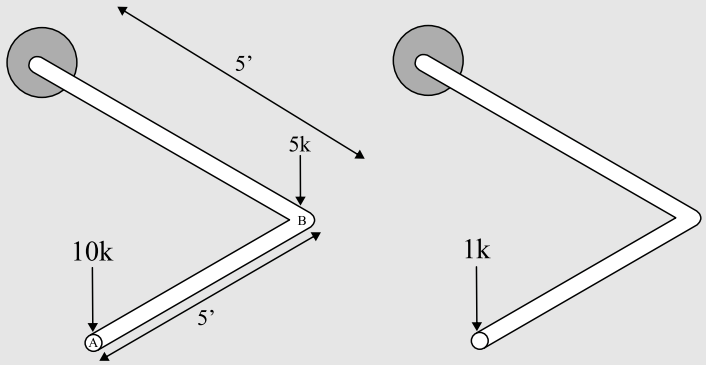
$$\begin{aligned}
(1)\Delta_C &= \int_0^{100}\frac{(5)(10)}{A_cE}dx + \int_0^{80}\frac{(-4)(-8)}{A_bE}dx \\
&\quad + \int_0^{80}\frac{(-2x)(-4x)}{EI_b} + \int_0^{160}\frac{(x-160)(2x-320)}{EI_b}dx \\
&= \int_0^{100}\frac{(5)(10)}{(1\text{in}^2)(10^7\text{psi})}dx + \int_0^{80}\frac{(-4)(-8)}{(10\text{in}^2)(10^7\text{psi})}dx \\
&\quad + \int_0^{80}\frac{(-2x)(-4x)}{(10^7\text{psi})(171\text{in}^4)} + \int_0^{160}\frac{(x-160)(2x-320)}{(10^7\text{psi})(171\text{in}^4)}dx \\
\Delta_C &= 0.0005 + 0.0000256 + 0.0007984 + 0.001597 \\
&= \underbrace{0.000526}_{\text{Axial}} + \underbrace{0.00239}_{\text{flexural}} \\
&= 0.0029\text{in}(\downarrow)
\end{aligned}$$

24.3.6 Ex 24.6: Deformazione torsionale e flessorale

Ora cerchiamo di determinare la deviazione verticale a A nella struttura indicata sotto ($E = 30,000$ ksi, $I = 144$ in^4, $G = 12,000$ ksi, $J = 288$ in^4)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



1. In questo problema abbiamo sia flessorale che torsionale deformazione. Quindi dobbiamo determinare il momento interno e distribuzione torsione sia per il carico virtuale reale che per l'unità.
2. Then we will use the following relation

$$\overbrace{\delta\overline{P}\Delta_A}^{\delta\overline{W}^*} = \overbrace{\underbrace{\int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}\mathrm{d}x}_{\text{flexure}} + \underbrace{\int \delta\overline{T}\frac{T}{GJ}\mathrm{d}x}_{\text{Torsion}}}^{\delta\overline{U}^*}$$

3. The moment and torsion expressions are dato da

Elemento di base	$x=0$	M	$\delta\overline{M}$	T	$\delta\overline{T}$
AB	A	$10x$	x	0	0
BC	B	$15x$	x	50	5

4. Sostituire,

$$\begin{aligned}
\delta\overline{P}\Delta_A &= \int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}\mathrm{d}x + \int \delta\overline{T}\frac{T}{GJ}\mathrm{d}x \\
1\Delta_A &= \int_0^5 x\frac{10x}{EI}\mathrm{d}x + \int_0^5 x\frac{15x}{EI}\mathrm{d}x + \int_0^5 (5)\frac{50}{GJ}\mathrm{d}x \\
&= \frac{(1,042)(1,728)}{(30,000)(144)} + \frac{(1,250)(1,728)}{(12,000)(288)} \\
&= \underbrace{0.417}_{\text{Flexure}} + \underbrace{0.625}_{\text{Torsion}} \\
&= 1.04 \text{ in}
\end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

24.3.7 Ex 24.7: Deformazioni flexurali e cesoie in un fascio

Determinare la deflezione di un fascio a baldacchino, di lunghezza L sottomesso a una forza di fine P a causa sia di flessorale che deformazioni della cesoia. Assumere $G = 0.4E$, e una sezione quadrata di trave solida.

1. L'equazione di lavoro virtuale è

$$\underbrace{\delta\overline{P}}_{1} \cdot \Delta = \int_0^L \delta\overline{M} d\phi + \int_0^L \delta\overline{V}\gamma_{xy} \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^L \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx + \int_0^L \delta\overline{V}\lambda\frac{V}{GA}\mathrm{d}x$$

2. I primi rendimenti integrali per $M = Px$ e $\delta\overline{M} = (1)(x)$

$$\int_0^L \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx = \frac{P}{EI}\int_0^L x^2 dx$$
$$= PL^3/3EI$$

3. The second integral represents the contributo dell'azione di taglio al totale virtuale interno lavoro e quindi allo spostamento totale.
4. Sia la vera cesoia V e la cesoia virtuale $\delta\overline{V}$ sono costanti lungo la lunghezza di the member, hence

$$\int_0^L \delta\overline{V}\lambda\frac{V}{GA}\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{GA}\int_0^L 1(P)\mathrm{d}x = \frac{\lambda PL}{GA}$$

5. Da λ= 1.2 per un fascio quadrato; da qui

$$1 \cdot \Delta = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{1.2PL}{GA}$$
$$= \frac{PL}{3E}\left[\frac{L^2}{I} + \frac{3.6}{0.4A}\right] = red\frac{PL}{3E}\left[\frac{L^2}{I} + \frac{9}{A}\right]$$

6. Per un raggio quadrato di dimensione h

$$I = \frac{h^4}{12} \quad \text{and} \quad A = h^2$$

poi

$$\Delta = \frac{PL}{3E}\left[\frac{12L^2}{h^4} + \frac{9}{h^2}\right] = \frac{3PL}{Eh^2}\left[\frac{1.33L^2}{h^2} + 1\right]$$

7. Scelta L = 20 E' un problema. h = 1.5 ft (L/h = 13.3)

$$\Delta = \frac{3PL}{Eh^2}[1.33\left(\frac{20}{1.5}\right)^2 + 1] = \frac{3PL}{Eh^2}(237 + 1)$$

La deformazione flessorale è quindi 237 volte lo spostamento della tosaia, che rivela perché normalmente trascuriamo la deformazione delle travi. Come il fascio diventa più breve o più profondo, o come L/h diminuisce, la deformazione flessorale diminuisce rispetto allo spostamento della tosaia. L/h = 5, la deformazione flessorale si è ridotta $1.33(5)^2 = 33$ quando la cesoia si sposta.

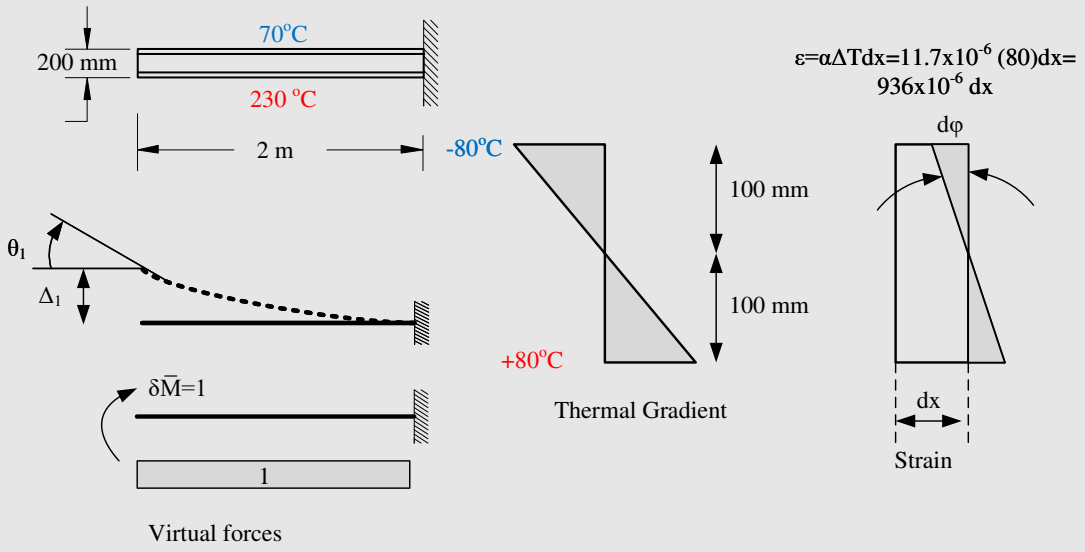
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

24.3.8 Ex 24.8: Effetti termici in un raggio

La sezione seguente è riprodotta da White, Gergely e Sexmith, 1976 Structural Engineering.

Cerchiamo di determinare l'angolo di rotazione, θ_1, alla fine del fascio causato dall'effetto della temperatura nel seguente raggio di cantilever.



Il fascio è un acciaio, ampia sezione flangia, 2 m di lunghezza e 200 mm di profondità, La temperatura uniforme originale delle travi era 40°C.

1. La forza virtuale esterna conforme allo spostamento reale desiderato θ_1 è un momento $\delta\overline{M} = 1$ in punta della cantilever, producendo un termine di lavoro esterno di rotazione dei tempi di momento. Il sistema di forza virtuale interno per questo fascio cantilever è un'uniforme momento $\delta\overline{M}_{int} = 1$.
2. La reale deformazione interna risulta da: a) la temperatura media del fascio of 150°C, che è 110°C sopra quello dell'originale temperatura, e (b) il gradiente di temperatura di 160°C attraverso il profondità del fascio.
3. La prima parte dell'effetto termico produce solo una allungamento del fascio e non entra nell'equazione di lavoro dal il carico virtuale non produce forza assiale corrispondente ad un cambiamento assiale lunghezza del fascio.
4. Il secondo effetto (gradante termico) produce rotazione $d\phi$, e un termine di lavoro virtuale interno of $\int_0^L \delta\overline{M}\phi \mathrm{d}x$.
5. Determinamo il valore del $d\phi$ considerando l'estremo fibra di tensione termica come mostrato

COPIA DI REVISIONE

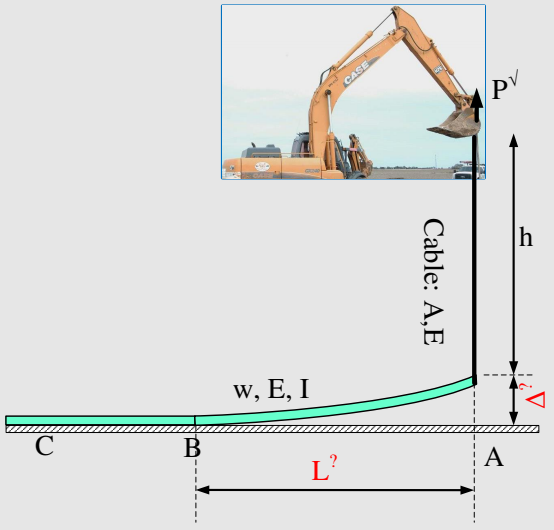
sopra. La rotazione angolare nella lunghezza dx è la fibra estrema di tensione termica divisa per metà della profondità del fascio, o

$$\begin{aligned}1 \cdot \theta_1 &= \int_0^L \delta\overline{M}\phi \mathrm{d}x \\ &= \int_0^L (1)\frac{\alpha(T_b - T_t)}{h}\mathrm{d}x \\ &= \frac{(11.7\times 10^{-6})m/m(230-70)^o\mathrm{C}(2)\text{ m}}{(0.2)\text{ m}} \\ &= 0.01872 \text{ radians}\end{aligned}$$

6. Questo esempio solleva i seguenti punti:
   (a) Il valore del θ_1 sarebbe lo stesso per qualsiasi forma di 200 mm profondo fascio in acciaio che ha il suo asse neutro di flessione a metà profondità.
   (b) La curvatura è prodotta solo da gradiente termico ed è indipendente valori di temperatura assoluti.
   (c) Il calcolo delle rotazioni con il metodo di forze virtuali è semplice e diretto; la forza virtuale applicata è un momento che agisce al punto dove la rotazione deve essere calcolata.
   (d) Deformazione angolare interna $d\phi$ è stato calcolato per un effetto diverso da stress indotto dal carico. L'estensione del metodo di forze virtuali per il trattamento di spostamenti inelastici è ovvio – tutto quello che dobbiamo il know è un metodo per determinare le deformazioni interne inelastiche.

24.3.9 Ex 24.9: Condotta

Si supponga che siamo un ingegnere di campo che stabilisce una pipeline di auto peso w (per lunghezza unitaria), momento di inerzia I, modulo elastico E_p, e Poisson razione ν. Una fine del gasdotto BC sta posando a terra, l'altra gamba AB è da sollevare un'altezza Δ da una forza $P^{\checkmark}$ applicato attraverso un cavo di lunghezza h, zona A e modulo elastico E_c



L'operatore della gru ci chiede di

COPIA DI REVISIONE

1. Determinazione (in termini di forza conosciuta) $P^{\checkmark}$) la lunghezza $L^{?}$ del gasdotto che stacca dal pavimento (AB).
2. Disegnare il diagramma di taglio e momento della porzione sollevata del gasdotto.
3. Compiti lo spostamento $\Delta^{?}$ punto A in termini di: P, w, L, h, E, Ae I.

La soluzione, è la seguente

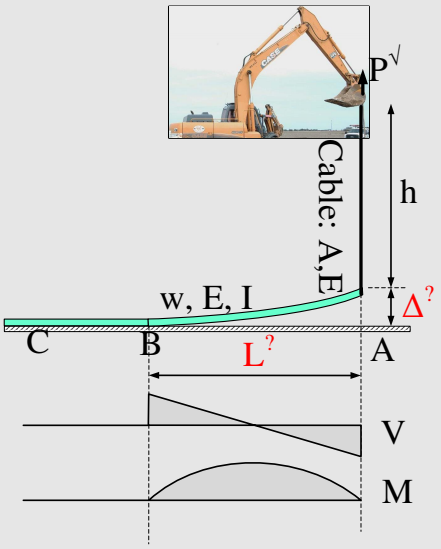
1. At B la curvatura è zero ($d\theta/dx = 0$) quindi zero momento.

$$PL = wL^2/2 \Rightarrow L = 2P/w$$

e il giusto supporto a B è una cerniera. Nota al punto di separazione:

$$+ve \uparrow \sum F_Y = 0; P - wL + R_B = 0; \Rightarrow R_B = w\left(\frac{2P}{w}\right) - P = P \uparrow$$

abbiamo una forza singolare di P



2. Assunzione di disfunzioni $x = 0$ A :

$$\delta\overline{P}\Delta_C = \int_0^L \delta\overline{M}(x)\frac{M(x)}{EI_z}\mathrm{d}x + \delta\overline{P}^{(e)}\frac{Ph}{AE}$$

$$M(x) = Px - w\frac{x^2}{2}$$

$$\delta\overline{M}(x) = (1)x$$

$$\delta\overline{P} = 1$$

$$(1)\Delta_C = \int_0^L x\frac{Px - w\frac{x^2}{2}}{EI}\mathrm{d}x + (1)\frac{Ph}{AE}$$

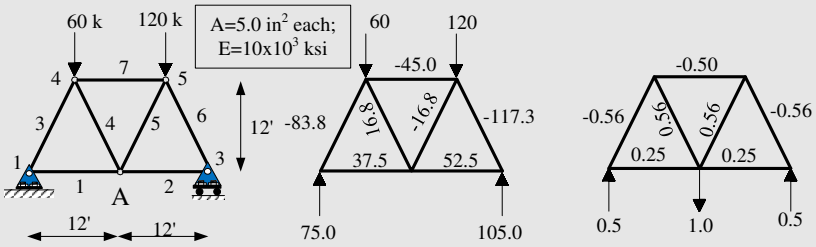
$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{PL^3}{3} - \frac{wL^4}{8}\right) + \frac{Ph}{AE}$$

24.3.10 Ex 24.10: Capriata semplice

Cerchiamo di determinare la deflezione al nodo A delle seguenti truffe.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Il riassunto dei calcoli è espresso nella tabella seguente

Membro	$\delta\overline{P}^{(e)}$ kips	$P^{(e)}$, kips	L, ft	A, in^2	E, - Si'.	$\delta\overline{P}^{(e)}\frac{P^{(e)}L}{AE}$
1	+0.25	+37.5	12	5.0	10×10^3	$+22.5\times10^{-4}$
2	+0.25	+52.5	12	5.0	10×10^3	$+31.5\times10^{-4}$
3	-0.56	-83.8	13.42	5.0	10×10^3	$+125.9\times10^{-4}$
4	+0.56	+16.8	13.42	5.0	10×10^3	$+25.3\times10^{-4}$
5	+0.56	-16.8	13.42	5.0	10×10^3	-25.3×10^{-4}
6	-0.56	-117.3	13.42	5.0	10×10^3	$+176.6\times10^{-4}$
7	-0.50	-45.0	12	5.0	10×10^3	$+54.0\times10^{-4}$
						$+410.5\times10^{-4}$

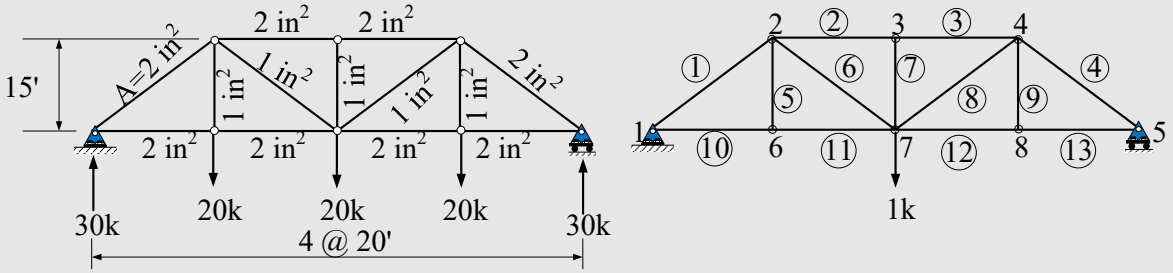
Così

$$(\delta\overline{P})\ \text{k}(\Delta)\ \text{in} = \sum_1^7 \delta\overline{P}^{(e)}\frac{PL}{AE}$$

$$(1)\ \text{k}(\Delta)\ \text{in} = (410.5\times10^{-4})\frac{\text{k}^2\ \text{ft}}{\text{in}^2\ \text{k}/\ \text{in}^2}(12\ \text{in}/\ \text{ft}) = 0.493\ \text{in}$$

24.3.11 Ex 24.11: Capriata complessa

Cerchiamo di determinare la deviazione verticale del giunto 7. $E = 30,000$ ksi.



Sono necessarie due analisi: una con il carico reale, l'altra con un carico verticale unitario al giunto 7. I risultati di tali analisi sono riassunti qui sotto e si nota che è stato sfruttato il carico e la struttura simmetrica.

COPIA DI REVISIONE

Membro	A in^2	L ft	$P^{(e)}$ k	$\delta\overline{P}^{(e)}$ k	$\frac{\delta\overline{P}^{(e)}P^{(e)}L}{A}$ k.ft/ in^2	n	$\frac{n\delta\overline{P}^{(e)}P^{(e)}L}{A}$ k.ft/ in^2
1 & 4	2	25	-50	-0.083	518.75	2	1,037.5
10 & 13	2	20	40	0.67	268.0	2	536.0
11 & 12	2	20	40	0.67	268.0	2	536.0
5 & 9	1	15	20	0	0	2	0
6 & 8	1	25	16.7	0.83	346.5	2	693.0
2& 3	2	20	-53.3	-1.33	708.9	2	1,417.8
7	1	15	0	0	0	1	0
Totale							4,220.3

$$\underbrace{\Delta\delta\overline{P}}_{\delta\overline{W}^*} = \underbrace{\int_0^L \delta\overline{P}\frac{P}{AE}dx}_{\delta\overline{U}^*}$$

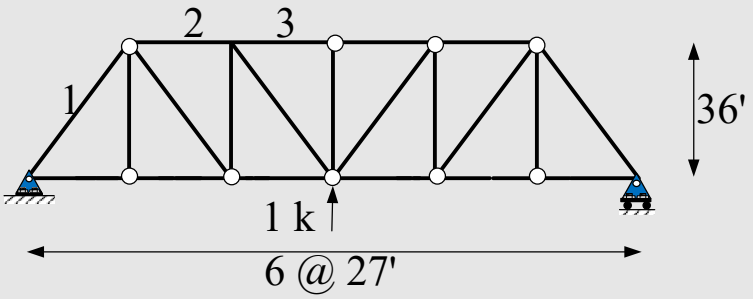
$$= \sum \delta\overline{P}^{(e)}\frac{P^{(e)}L}{AE}$$

$$(1)\ \text{k}(\Delta)\ \text{in} = \frac{(4,220.3)\ \text{k}^2\ \text{ft}/\ \text{in}^2(12)\ \text{in/ft}}{30,000\ \text{ksi}}$$

$$= 1.69\ \text{in}$$

24.3.12 Ex 24.12: Capriata con controfreccia iniziale

Si desidera fornire 3 in. di camber al centro della trucca mostrata qui sotto fabbricando gli endpost e i membri di corda superiore inoltre lungo. Quanto dovrebbe aumentare la lunghezza di ogni vano e ogni pannello dell'accordo superiore?



In primo luogo, presumiamo che ogni endpost e ogni sezione di accordo superiore sia aumentata 0.1 in.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Membro	$\delta\overline{P}^{(e)}_{int}$	ΔL	$\delta\overline{P}^{(e)}_{int}\Delta L$
1	+0.625	+0.1	+0.0625
2	+0.750	+0.1	+0.0750
3	+1.125	+0.1	+0.1125
			+0.2500

che dà

$$(1)\ \mathrm{k}(\Delta)\ \mathrm{in} = (2)(0.250)\ \mathrm{k\ in} \Rightarrow \Delta = 0.50\ \mathrm{in}$$

Poiché la struttura è lineare ed elastica, l'aumento di lunghezza richiesto per ogni sezione sarà

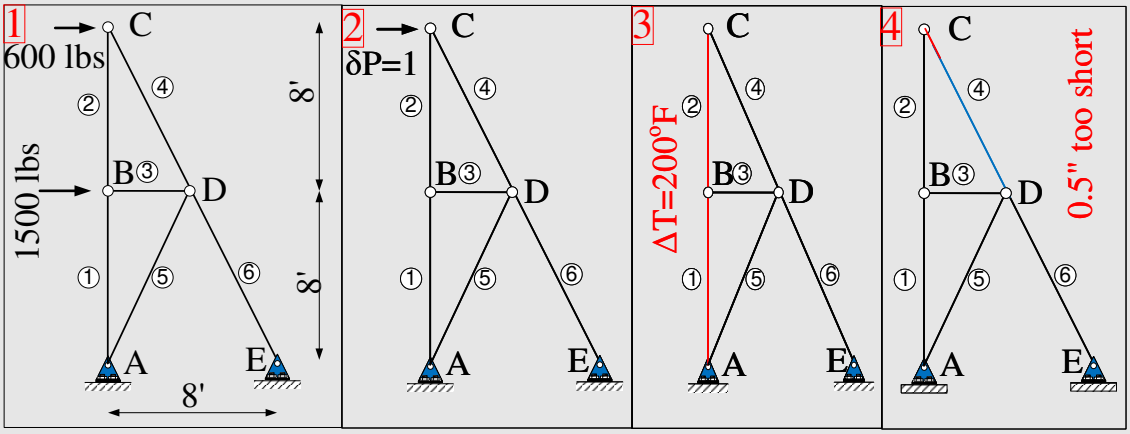
$$\left(\frac{3.0}{0.50}\right)(0.1) = 0.60\ \mathrm{in}$$

Se usiamo il valore pratico di 0.625 in., la camber teorica sarà

$$\frac{(6.25)(0.50)}{0.1} = 3.125\ \mathrm{in}$$

24.3.13 Ex 24.13: Capriata con tensioni secondarie

Cerchiamo di determinare lo spostamento orizzontale del nodo C in varie condizioni di carico: a) Forze (1); 2) aumento della temperatura in due mebers (3); e errore di fabbricazione (4).



COPIA DI REVISIONE

Forze Laterali

Membro	$\delta\overline{P}$ (lbf)	P (lbf)	L (in)	AE	$\delta\overline{p}\frac{PL}{AE}$
1	2	1,200.0	96.00	AE	230,400/AE
2	2	1,200.0	96.00	AE	230,400/AE
3	0	-1,500.0	48.00	AE	0
4	-2.24	-1,341.6	107.33	AE	322,560/AE
5	0	1,677.0	107.33	AE	0
6	-2.24	-3,018.7	107.33	AE	725,760.0/AE
					1,509,120/AE

Da allora $\Delta_C = \frac{1,509,120 \text{ lb-in}}{AE} \rightarrow$

Caricamento della temperatura

Membro	L (in)	α (1/°F)	ΔT (in)	$\Delta L = \alpha \Delta T L$ (in)	$\delta\overline{P}$ (lbf)	$\delta\overline{P}\Delta L$ (Lbf in)
1	96	10^{-6}	200	0.0192	2	0.0384
2	96	10^{-6}	200	0.0192	2	0.0384
3	48	10^{-6}	0	0	0	0
4	107.33	10^{-6}	0	0	-2.24	0
5	107.33	10^{-6}	0	0	0	0
6	107.33	10^{-6}	0	0	-2.24	0
						0.0768

Da $\delta\overline{P} = 1$, $\Delta_C = 0.0768$ in $\rightarrow$

Errore di fabbricazione

Membro	L (in)	ΔL (in)	$\Delta\overline{P}$ (lbf)	$\Delta\overline{P}\delta L$ (Lbf in)
1	96	0	2	0
2	96	0	2	0
3	48	0	0	0
4	107.33	-0.5	-2.24	1.12
5	107.33	0	0	0
6	107.33	0	0	0
				0.0768

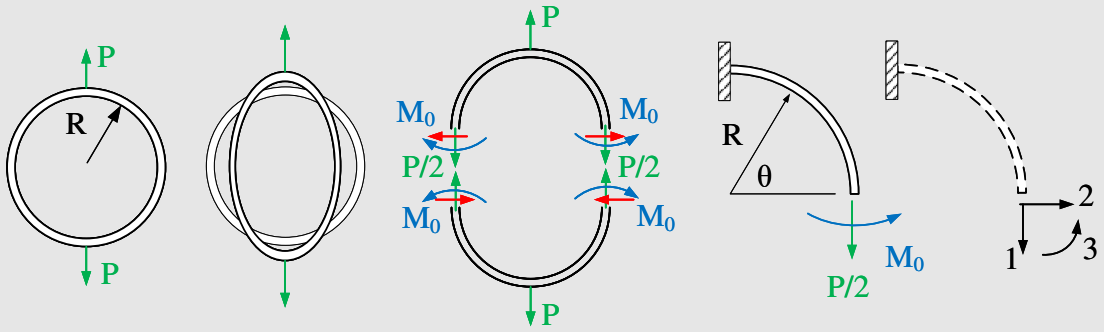
Da $\delta\overline{P} = 1$, $\Delta_C = 1.12$ in $\rightarrow$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

24.3.14 Ex 24.14: Anello circolare

Un anello è sottoposto a due forze concentrate opposte P. cerchiamo di determinare l'allungamento verticale Δ_y, e la contrazione orizzontale Δ_x.



Strength of materials
Den Hartog, 1961 Invocando simmetria, tagliamo l'anello in due e disegnaamo i diagrammi del corpo libero,

1. Se si assume che la forza di taglio sia in una direzione per uno dei quattro estremi, e disegnare le altre forze. Di conseguenza, notiamo che la metà superiore si espanderà lateralmente, mentre nella stessa posizione, contrarrà nell'anello inferiore. Così che le forze di taglio sono uguali a zero.
2. Le forze assiali sono uguali a quelle $P/2$, e così siamo lasciati con i momenti da determinare.
3. Analizzeremo poi solo un quadrante sottoposto ad una forza verticale di $P/2$ e un momento M_0, ma da stabilire in termini di R e P.

La soluzione procede come segue:

1. Momenti (positivi se causano tensione all'interno):

Carico verticale di $P/2$	$M_{P/2}$	$-\frac{PR}{2}(1-\cos\theta)$
Tempo di fine (orario)	M_0	M_0
Forza unità virtuale verticale (in basso)	$\delta\overline{M}_V$	$-R(1-\cos\theta)$
Forza orizzontale (outward) dell'unità virtuale	$\delta\overline{M}_H$	$R\sin\theta$
Rotazione unità virtuale	$\delta\overline{M}_M$	1

2. Rotazione dovuta al carico verticale:

$$f_{32} = \theta_{P/2} = \int \delta M_M \frac{M_{P/2}}{EI} R d\theta = -\int_0^{\pi/2} (1)\frac{PR}{2EI}(1-\cos\theta)Rd\theta = -\frac{PR^2}{2EI}\int_0^{\pi/2}(1-\cos\theta)d\theta$$
$$= -\frac{PR^2}{2EI}\left[\theta+\sin\theta\right]_0^{\pi/2} = -\frac{PR^2}{2EI}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

3. Rotazione a causa del momento M_0

$$f_{33} = \theta_{M_0} = \int M_M \frac{M_0}{EI} R d\theta = \int_0^{\pi/2} (1) \frac{M_0}{EI} R d\theta = \frac{\pi}{2} \frac{M_0 R}{EI}$$

4. Dalla somma di simmetria delle rotazioni deve essere uguale

$$\theta_{P/2} + \theta_{M_0} = 0$$
$$-\frac{PR^2}{2EI}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \frac{\pi}{2}\frac{M_0 R}{EI} = 0$$
$$M_0 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right) PR = 0.182PR \tag{24.2}$$

5. Sflessione verticale dovuta al carico verticale:

$$f_{22} = \Delta^V_{P/2} = \int \delta M_V \frac{M_{P/2}}{EI} = \int_0^{\pi/2} R(1 - \cos\theta) \frac{PR}{2EI} (1 - \cos\theta) R d\theta$$
$$= \frac{PR^3}{2EI} \int_0^{\pi/2} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta$$
$$= \frac{PR^3}{2EI} \left[\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{2}\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{PR^3}{8EI}(3\pi - 8)$$

6. Sflessione orizzontale dovuta al carico verticale

$$f_{12} = \Delta^H_{P/2} = \int \delta M_H \frac{M_{P/2}}{EI} = -\int_0^{\pi/2} R\sin\theta \frac{PR}{2EI} (1 - \cos\theta) R d\theta$$
$$= -\frac{PR^3}{2EI} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos\theta)\sin\theta d\theta$$
$$= -\frac{PR^3}{2EI} \left[-\cos\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2} = -\frac{PR^3}{4EI}$$

7. Sflessione verticale dovuta al momento

$$f_{23} = \Delta^V_{M_0} = \int \delta M_V \frac{M_0}{EI} = -\int_0^{\pi/2} R(1 - \cos\theta) M_0 R d\theta$$
$$= \frac{M_0 R^2}{EI} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos\theta) d\theta$$
$$= \frac{M_0 R^2}{EI} \left(1 - \frac{\pi}{2}\right)$$

8. Sflessione orizzontale a causa del momento

$$f_{13} = \Delta^H_{M_0} \int \delta M_H \frac{M_0}{EI} = \int_0^{\pi/2} R\sin\theta M_0 R d\theta$$
$$= \frac{M_0 R^2}{EI} \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta$$
$$= \frac{M_0 R^2}{EI}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

9. Deflezione orizzontale totale

$$\Delta^H = 2(\Delta^H_{P/2} + \Delta^H_{M_0}) = 2\left[-\frac{PR^3}{4EI} + \frac{M_0R^2}{EI}\right]$$

Sostituire la soluzione per M_0 da Eq. 24.2

$$\Delta^H = \frac{PR^3}{EI}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\right) = -0.135\frac{PR^3}{EI} \text{ Contraction}$$

10. Deflezione totale verticale

$$\Delta^V = 2(\Delta^V_{P/2} + \Delta^V_{M_0} = 2\left[\frac{PR^3}{8EI}(3\pi - 8) + \frac{M_0R^2}{EI}\left(1 - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Sostituire la soluzione per M_0 da Eq. 24.2

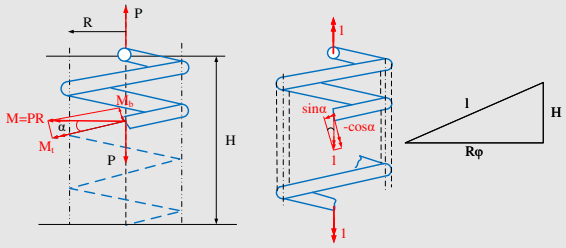
$$\Delta^V = \frac{PR^3}{EI}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\right) = 0.150\frac{PR^3}{EI} \text{ Elongation}$$

11. Si noti che abbiamo introdotto una notazione che verrà utilizzata in seguito f_{ij} per uno spostamento in direzione i a causa di una forza in direzione j, che risultano

$$\begin{bmatrix} f_{12} & f_{13} \\ f_{22} & f_{23} \\ f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$$

Questa non è una matrice di flessibilità, tuttavia poiché le forze applicate non sono unità e la prima colonna manca (non forza orizzontale applicata).

24.3.15 Ex 24.15: Primavera



Una molla elicoidale con angolo elica α e raggio di bobine R è teso dalla forza P. Cerchiamo di determinare il cambiamento in altezza e diametro della molla, e anche la modifica del numero delle bobine.

Trattiamo la molla come un asta tridimensionale. Ad ogni sezione di una bobina della molla allungata c'è una torsione $M_t = PR\cos\alpha$ e un momento $M_b = PR\sin\alpha$.

1. Prima di tutto determina l'aumento dell'altezza della molla

$$\Delta H = \int_l \frac{\delta\overline{M}_b M_b}{EI} ds + \int_l \frac{\delta\overline{M}_t M_t}{EI} ds$$

COPIA DI REVISIONE

dove $\delta\overline{M}_b$ e $\delta\overline{M}_t$ sono i momenti di piegatura e torsione dovuti alle forze virtuali unitarie applicate in-lieu delle forze P e sono equatl a

$$\delta\overline{M}_b = R\sin\alpha, \qquad \delta\overline{M}_t = R\cos\alpha$$

così dopo la sostituzione e l'integrazione

$$\Delta H = \frac{PR^2 l}{EI}\sin^2\alpha + \frac{PR^2 l}{GJ}\cos^2\alpha \tag{24.3}$$

dove l è la lunghezza totale delle bobine nella molla.

2. Troviamo l'angolo attraverso il quale la parte superiore della molla gira rispetto all'estremità inferiore del piano orizzontale, quindi applichiamo momenti unitari alla fine della primavera:

$$\delta\overline{M}_b = -\cos\alpha, \qquad \delta\overline{M}_t = \sin\alpha$$

e

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \int_l \frac{\delta\overline{M}_b M_b}{EI}ds + \int_l \frac{\delta\overline{M}_t M_t}{GJ}ds \\ &= PRl\left(\frac{1}{GJ} - \frac{1}{EI}\right)\sin\alpha\cos\alpha\end{aligned} \tag{24.4}$$

3. Considerando la primavera non tramontata, abbiamo

$$R^2\phi^2 + H^2 = l^2$$

Prendiamo il differenziale, e da allora l rimane costante

$$2R\phi^2\Delta R + R^2 2\phi\Delta\phi + 2H\Delta H = 0$$

dove in questo caso Δ è l'incremento del parametro corrispondente (finito) . Da questa espressione otteniamo

$$\Delta R = -\frac{R}{\phi}\Delta\phi - \frac{H}{R\phi^2}\Delta H$$

4. Sostituire per $\Delta\phi$ e ΔH dà

$$\Delta R = -\frac{PR^2 l}{\phi}\left(\frac{1}{GJ} - \frac{1}{EI}\right)\sin\alpha\cos\alpha - \frac{PHRl}{\phi^2}\left(\frac{\sin^2\alpha}{EI} + \frac{\cos^2\alpha}{GJ}\right) \tag{24.5}$$

5. Dal triangolo segue che

$$l = \frac{\phi R}{\cos\alpha}, \qquad H = \phi R\tan\alpha$$

Abbiamo anche

$$\phi = 2\pi n, \qquad \Delta\phi = 2\pi\Delta n$$

dove n è il numero di bobine.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

6. Eliminazione l, He ϕ da Eq. 24.3, 24.4 e 24.5 dà

$$\Delta H = \frac{PR^3 n 2\pi}{\cos\alpha}\left(\frac{\sin^2\alpha}{EI} + \frac{\cos^2}{GJ}\right)$$
$$\Delta n = PR^2 n\left(\frac{1}{GJ} - \frac{1}{EI}\right)\sin\alpha$$
$$\Delta R = -\frac{2PR^3\sin\alpha}{GJ} + \frac{PR^3}{EI}\sin\alpha(1-\tan^2\alpha)$$

7. Per una molla in filo rotondo di diametro dAllora

$$GJ = G\frac{\pi d^4}{32}$$
$$EI = 2G(1+\nu)\pi\frac{d^4}{64} = G(1+\nu)\frac{\pi d^4}{32}$$

e noi otteniamo

$$\Delta H = +\frac{64PR^3 n}{Gd^4}\frac{1+\nu\cos^2\alpha}{(1+\nu)\cos\alpha}$$
$$\Delta n = +\frac{32PR^2 n}{G\pi d^4}\frac{\nu\sin\alpha}{1+\nu}$$
$$\Delta R = -\frac{32PR^3}{G\pi d^4}\frac{\sin\alpha}{1+\nu}\frac{1+2\nu\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

I segni di fronte ai lati della mano destra delle espressioni sopra indicate indicano che durante l'estensione della molla aumenta la sua lunghezza ($\Delta H > 0$), aumenta il numero di bobine ($\Delta n > 0$), e il raggio diminuisce ($\Delta R < 0$).

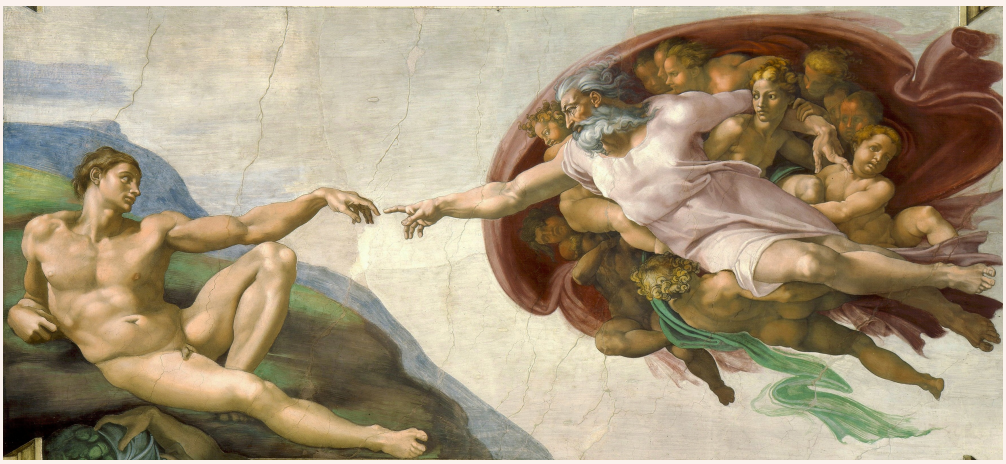
8. Se l'angolo di te α è piccolo, allora

$$\Delta H = +\frac{64PR^3 n}{Gd^4}$$
$$\Delta n = +\frac{32PR^2 n}{G\pi d^4}\frac{\nu\alpha}{1+\nu}$$
$$\Delta R = -\frac{32PR^3}{G\pi d^4}\frac{1+2\nu}{1+\nu}\alpha$$

Si prega di fare riferimento al Esempio 22.3.2 Anche io.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



La creazione di Adamo, Michelangelo, Fresco, Cappella Sistina, Città del Vaticano.

Potente metafora del lavoro virtuale, come le mani quasi toccanti simboleggiano uno spostamento infinitesimale—un concetto di nucleo nel lavoro virtuale dove immaginato, piccole perturbazioni aiutano ad analizzare l'equilibrio.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

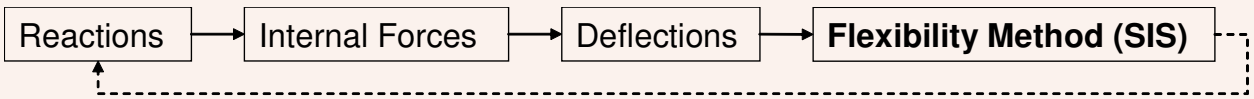
Capitolo 25

Metodo di flessibilità

Abstract

Questo capitolo affronta la soluzione di strutture staticamente indeterminate utilizzando il metodo della flessibilità (aka (aka force based Method) che non si presta all'implementazione del computer. Il metodo prevede la conversione della struttura statically indeterminate in una struttura primaria statisticamente determinata rimuovendo un numero sufficiente di supporti o forze interne. Gli spostamenti di questa struttura primaria vengono calcolati sotto i carichi esterni dati. Successivamente, le forze unitarie vengono applicate una alla volta nelle posizioni in cui sono stati rimossi i supporti o le forze interne e gli spostamenti risultante a causa di queste forze unità sono calcolati. Le equazioni di compatibilità vengono formulate e risolte utilizzando gli spostamenti dei carichi effettivi e delle forze dell'unità per garantire che la struttura complessiva rimanga compatibile ed in equilibrio. Risolvendo queste equazioni di compatibilità, le forze ridondanti sconosciute sono determinate e utilizzando queste forze vengono calcolate le forze interne finali e gli spostamenti per la struttura indeterminata staticamente originale. Il capitolo inizia affrontando i vantaggi delle strutture statuticamente indeterminate, poi dopo alcuni semplici esempi illustrativi introduce il metodo che è finalmente formalizzato. Inoltre è inclusa una breve copertura dell'Equazione dei Tre Momenti. Il capitolo termina con numerosi esempi di maggiore complessità.

25.1 Introduzione 1054
25.2 Il metodo di forza/flessibilità 1059
25.2.1 Esempi 1061
25.3 Equazioni di tre momenti 1080
25.3.1 Ex 25.9: Trave continua . . . 1083
25.3.2 Ex 25.10: Trave continua . . . 1084



Per il contesto storico, consultare §11.4.5

COPIA DI REVISIONE

25.1 Introduzione

1 Una struttura statically indeterminata ha più sconosciute che equazioni di equilibrio (e equazione delle condizioni se applicabili).

2 I vantaggi di una struttura statically indeterminate sono:

Aumento della ridondanza: Le strutture indeterminate hanno più supporti e connessioni che necessarie per mantenere l'equilibrio. Questa ridondanza significa che se un supporto o membro non riesce, il carico può essere ridistribuito ad altri supporti o membri, migliorando la sicurezza e l'affidabilità della struttura.

Distribuzione del carico migliorata: Queste strutture distribuiscono carichi più uniformemente in tutta la struttura, riducendo il rischio di guasti localizzati. Questa distribuzione anche dello stress e della tensione può portare ad un uso più efficiente ed economico dei materiali.

Maggiore rigidità: Le strutture indeterminate tendono ad essere più rigide perché resistono alla deformazione meglio sotto carico, e questa maggiore rigidità può essere vantaggiosa nelle applicazioni dove la deflettorazione deve essere minimizzata, come nei ponti o negli edifici a elevata velocità.

Prestazioni strutturali migliorate: Avendo più percorsi di carico, queste strutture possono gestire meglio carichi, vibrazioni e impatti dinamici. Questa caratteristica è particolarmente importante nelle strutture soggette a carichi variabili nel tempo, come quelli causati da attività sismica e vento.

Estetica e flessibilità progettuale: Gli ulteriori supporti e i membri possono consentire progetti più complessi ed esteticamente gradevoli. Architetti e ingegneri possono creare strutture innovative con forme e forme uniche che potrebbero non essere possibili con disegni staticamente determinati.

Ottimizzazione dei materiali: Con una migliore distribuzione e rigidità del carico, i materiali possono essere utilizzati in modo più efficiente. Questa ottimizzazione può portare a strutture più leggere che utilizzano meno materiale senza compromettere la forza e la sicurezza.

Migliore risposta alle modifiche di temperatura e di regolamento: Le strutture indeterminate possono meglio accogliere insediamenti differenziali di supporti e espansioni termiche o contrazioni, che possono impedire la crepatura ed altri danni che potrebbero verificarsi in strutture staticamente determinate.

Maggiore sicurezza: La ridondanza e la capacità di ridistribuire carichi migliorano la sicurezza complessiva della struttura. Ciò è particolarmente critico nelle infrastrutture critiche come ponti, edifici e altre strutture essenziali in cui il fallimento potrebbe avere gravi conseguenze.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

3 Solo lo svantaggio è che è più complicato da analizzare.

4 Metodi di analisi delle strutture statically indeterminate *deve soddisfare le esigenze* tre requisiti

1. Equilibrio delle forze
2. Rapporto di spostamento forzario (o stress-strain) (elastico lineare in questo corso).
3. Compatibilità degli spostamenti (cioè nessuna discontinuità)

5 Questo può essere raggiunto attraverso due classi di soluzione

Forza o flessibilità metodo, questo capitolo

Dislocazione o stiffamento metodo che sarà coperto nei capitoli 44 e 27. Il primo coprirà i metodi "hand based" (distribuzione del movimento e deflettore della pendenza), e l'altro un computer basato uno.

Esempio illustrativo 1

6 Il metodo di flessibilità è illustrato in primo luogo dal seguente problema di una struttura del cavo statically indeterminate in cui una piastra rigida è sostenuta da due cavi in alluminio e uno in acciaio. Cerchiamo di determinare la forza in ogni cavo, Fig. 25.1

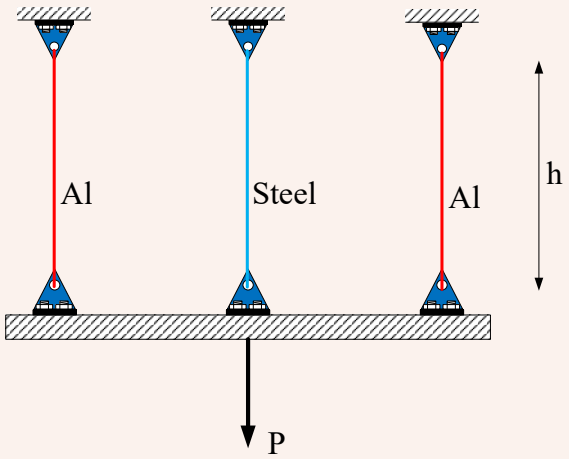


Figura 25.1: Struttura del cavo staticamente indeterminata 3

1. Abbiamo tre sconosciute e solo due equazioni indipendenti di equilibrio. Quindi il problema è stabilmente indeterminato Primo grado.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

2. Applicare le equazioni di equilibrio

$$\begin{aligned}\Sigma M_z = 0; &\Rightarrow P_{Al}^{\text{left}} = P_{Al}^{\text{right}} \\ \Sigma F_y = 0; &\Rightarrow 2P_{Al} + P_{St} = P\end{aligned} \tag{25.1}$$

   Così abbiamo effettivamente due sconosciuti e un'equazione.
3. Dobbiamo avere una terza equazione da risolvere per i tre sconosciuti. Questo sarà derivato dal *compatibilità degli spostamenti* in tutti e tre i cavi, cioè tutti e 3 gli spostamenti devono essere uguali:

$$\Delta_{Al} = \Delta_{St}$$

4. Infine, questi spostamenti sono ottenuti da *Slocamento della forza* relazioni:

$$\left.\begin{aligned}\sigma &= \frac{P}{A} \\ \varepsilon &= \frac{\Delta L}{L} \\ \varepsilon &= \frac{\sigma}{E}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta L = \frac{PL}{AE}$$

$$\underbrace{\frac{P_{Al}L}{E_{Al}A_{Al}}}_{\Delta_{Al}} = \underbrace{\frac{P_{St}L}{E_{St}A_{St}}}_{\Delta_{St}} \Rightarrow \frac{P_{Al}}{P_{St}} = \frac{(EA)_{Al}}{(EA)_{St}}$$

   or

$$-(EA)_{St}P_{Al} + (EA)_{Al}P_{St} = 0$$

5. Soluzione di Eq. 25.1 e 4 rendimenti

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -(EA)_{St} & (EA)_{Al} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{Al} \\ P_{St} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} P_{Al} \\ P_{St} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -(EA)_{St} & (EA)_{Al} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2(EA)_{Al} + (EA)_{St}}}_{\text{Determinant}} \begin{bmatrix} (EA)_{Al} & -1 \\ (EA)_{St} & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

6. Osserviamo che la soluzione di questo problema, in modo contrariato staticamente determinati, dipende dal *proprietà elastiche*.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

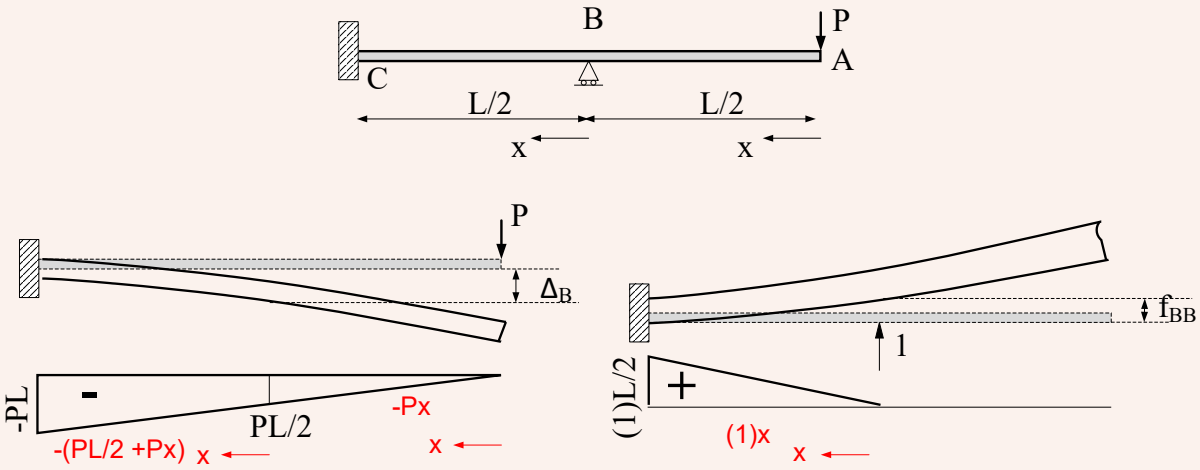


Figura 25.2: Trave di cantilever

Esempio illustrativo 2

7 Un altro esempio è il raggio di lunghezza del cantilever propped *L*Fico. 25.2

1. Prima rimuoviamo il supporto del rullo e siamo lasciati con il cantilever come struttura primaria.
2. Noi allora determinamo la deflezione al punto B a causa del carico applicato P utilizzando il metodo di forza virtuale

$$
\begin{aligned}
1.\Delta &= \int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{L/2} 0\frac{-px}{EI}\mathrm{d}x + \int_0^{L/2} -(x)\frac{\left(\frac{PL}{2}+Px\right)}{EI}\mathrm{d}x = \frac{1}{EI}\int_0^{L/2}\left(\frac{PL}{2}x + Px^2\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{EI}\left[\frac{PLx^2}{4} + \frac{Px^3}{3}\right]\Bigg|_0^{L/2} = \frac{5}{48}\frac{PL^3}{EI}
\end{aligned}
$$

3. Quindi applichiamo un carico unitario al punto B e risolvere per lo spostamento at B utilizzando il metodo di forza virtuale

$$1 f_{BB} = \int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}\mathrm{d}x = \int_0^{L/2}(x)\frac{x}{EI}\mathrm{d}x = \frac{(1)L^3}{24EI}$$

4. Allora sosteniamo che lo spostamento a quel punto B è zero, e quindi il dislocamento f_{BB} dovrebbe essere moltiplicato per R_B tale

$$R_B f_{BB} = \Delta$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

to ensure compatibility of displacements, hence

$$R_B = \frac{\Delta}{f_{BB}} = \frac{\frac{5}{48}\frac{PL^3}{EI}}{\frac{(1)L^3}{24EI}} = \frac{5}{2}P$$

Esempio illustrativo 3

8 Cerchiamo di determinare la matrice della flessibilità per il fascio staticamente determinato. mostrato in Fig. 25.3. La matrice di flessibilità qui sarebbe una 2×2, e ogni termine d_{ij} corrisponde allo spostamento in grado di libertà i a causa di una forza unitaria in grado di libertà j.

- Abbiamo due DOF corrispondenti alle rotazioni a ogni estremità.

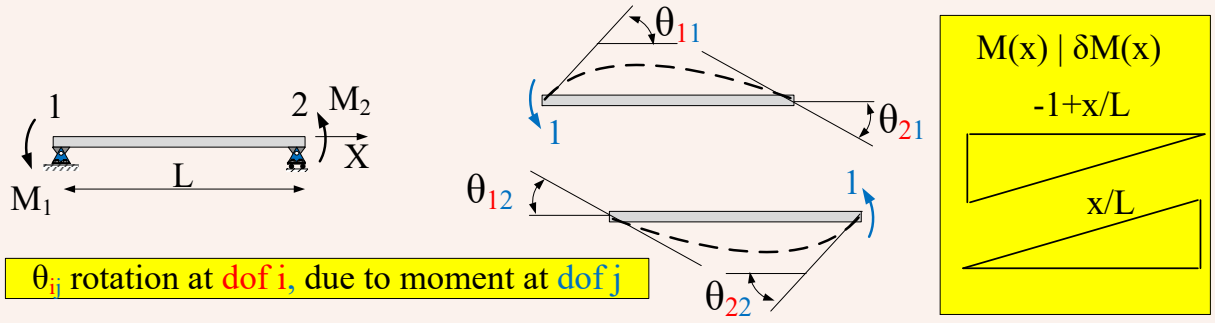


Figura 25.3: Problema illustrativo per il metodo di flessibilità

- Il *forza dislocamento* la relazione è ora espressa come

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{matrix} \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} M_1 & M_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} \tag{25.2}$$

dove M_i corrispondere ai momenti applicati esternamente, $d_{ij} = \theta_{ij}$e θ_i alle corrispondenti rotazioni sconosciute a dof i a causa di un momento in dof j.

- Utilizzo del *lavoro virtuale complementare*, o più specificamente il metodo di forza virtuale per analizzare questo problema:

$$d_{ij} = \underbrace{\int_0^l \delta\overline{M}(x)_i \frac{M(x)_j}{EI_z} dx}_{\text{Internal}} = \underbrace{\delta\overline{P}_i \Delta_j + \delta\overline{M}_i \theta_j}_{\text{External}}$$

dove $\delta\overline{M}(x)$, $\frac{M(x)}{EI_z}$, $\delta\overline{P}$ e Δ sono la forza interna virtuale, lo spostamento interno reale, il carico esterno virtuale e lo spostamento reale esterno rispettivamente.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

- Ecco, *entrambi* la forza e il momento virtuali esterni sono presi come unità.

$$EI \underbrace{1}_{\delta\overline{M}} \underbrace{d_{11}}_{\Delta} = \int_0^L \underbrace{\left(-1+\frac{x}{L}\right)}_{\delta\overline{M}(x)} \underbrace{\left(-1+\frac{x}{L}\right)}_{M(x)} dx = \frac{L}{3} \tag{25.3}$$

- Allo stesso modo, otteniamo:

$$EId_{22} = \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx = \frac{L}{3}$$
$$EId_{12} = \int_0^L \left(-1+\frac{x}{L}\right)\frac{x}{L} dx = -\frac{L}{6} \quad = \quad EId_{21}$$

- Tali risultati possono essere riassunti in una forma matrice come:

$$[\mathbf{d}] = \frac{L}{6EI_z}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

  e potremmo quindi risolvere per gli spostamenti (rotazioni) a causa dei momenti esterni.

Esempio illustrativo 4

9 Il metodo è ulteriormente illustrato, in forma compatta, attraverso Fig. 25.4.

25.2 Il metodo di forza/flessibilità

10 Sulla base dei due esempi illustrativi precedenti, cerchiamo ora di sviluppare un metodo generale per *elastico lineare* analisi statica strutture indeterminate.

Definition 25.1: Equazioni di flessibilità

1. Identificare *grado di indeterminanza statica* (esterno e/o interno) n.
2. Selezionare n *forze e/o coppie sconosciute ridondanti* nella struttura caricata insieme n comunicati corrispondenti (angolari o traduzione): *struttura primaria*.
3. Determinare il n *spostamenti nella struttura primaria* (con il carico applicato) corrispondente alle versioni, Δ_i.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

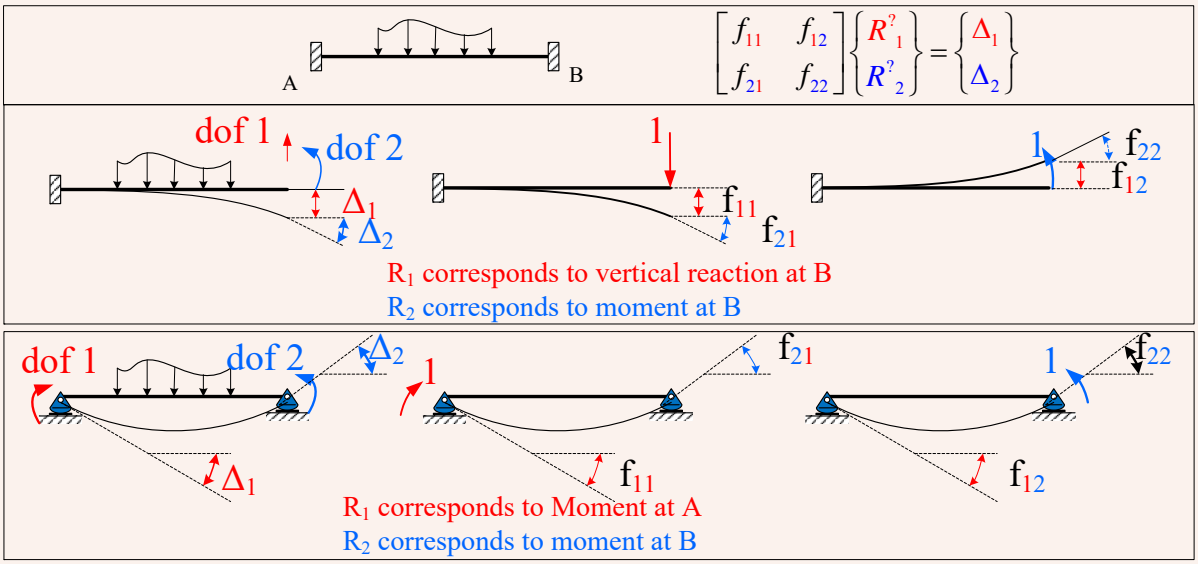


Figura 25.4: Illustrazione del metodo di flessibilità con due sconosciuti

4. Applicare un *forza unitaria* a ciascuna delle versioni j sulla struttura primaria (senza carico esterno) e determinare gli spostamenti in tutte le versioni i: *coefficienti di flessibilità*, f_{ij}, cioè spostamento al rilascio i a causa di una forza unitaria j. La direzione è irrilevante; Se la reazione è positiva sarà lungo la direzione specificata, se negativa, altrimenti.
5. nota che f_{ij} ha le unità di spostamento per carico unitario.
6. Scrivi la *compatibilità della relazione di spostamento*

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}} \underbrace{\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdots \\ R_n \end{Bmatrix}}_{\mathbf{R}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \cdots \\ \Delta_n \end{Bmatrix}}_{\mathbf{\Delta}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Delta_2^0 \\ \cdots \\ \Delta_n^0 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{\Delta}_i^0} \tag{25.4}$$

7. Le reazioni vengono poi ottenute semplicemente invertendo la matrice di flessibilità.

$$\mathbf{R} = \mathbf{f}^{-1}\left(\mathbf{\Delta} - \mathbf{\Delta}_i^0\right)$$

In presenza di un unico sconosciuto, il $\mathbf{f}^{-1}$ è sostituito da $1/f_{11}$

COPIA DI REVISIONE

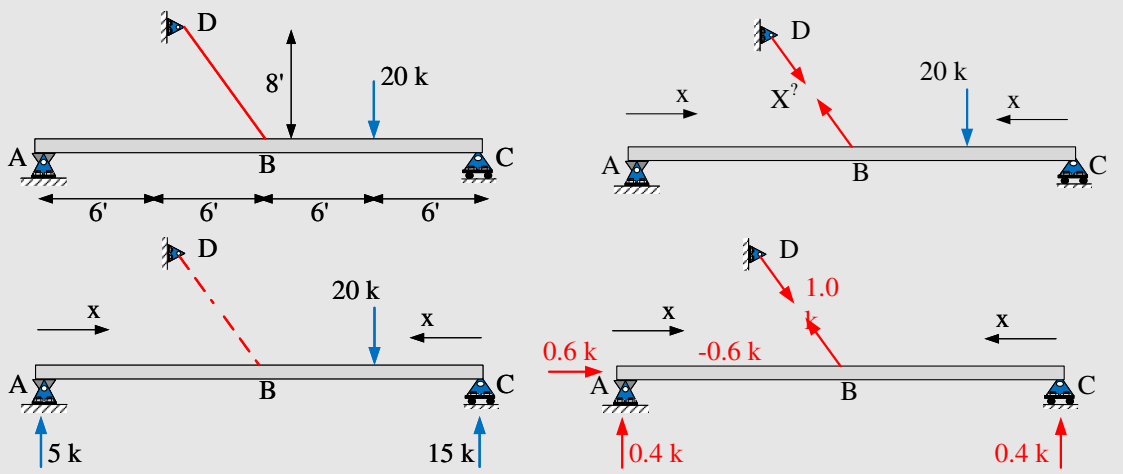
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

11 Nota: Δ_i^0 è il vettore di spostamenti iniziali, che di solito è zero a meno che non abbiamo uno spostamento iniziale del supporto (come il sostegno insediamento).

12 Si noti che dal teorema reciproco di Maxwell-Betti, §24.2.2, la matrice di flessibilità [**f**] è sempre simmetrica.

25.2.1 Esempi

25.2.1.1 Ex 25.1: Asciugamano con asta di cravatta



Cerchiamo di calcolare la forza assiale nella barra delle cravatte.. I=600 in^4, A=20 in^2, la canna ha A-2in^2.

La struttura è indeterminata al primo grado. Tagliamo la cravatta e selezioniamo l'forza della barra come ridondante.

$$\Delta + X\delta = 0.$$

Valutare Δ e δ con il metodo di forza virtuale e includere sia deformazioni flessografiche che assiali.

Membro	$x=0$	L	A	I	P	$\delta\overline{P}$	M	$\delta\overline{M}$
AB	A	12	20	600	0	-0.6	$5x$	$-0.4x$
CE	C	6	20	600	0	0	$15x$	$-0.4x$
EB	C	6	20	600	0	0	$120-5x$	$-0.4x$
DB	-	10	2	-	0	1	0	0

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Applicare il principio del lavoro virtuale per Δ e δ

$$\begin{aligned}(1)\Delta &= \sum \delta\overline{P}\frac{PL}{AE} + \sum\int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx \\ &= 0 + \int_0^{12}(5x)\frac{-0.4x}{EI}dx + \int_0^{6}(15x)\frac{-0.4x}{EI} + \int_6^{12}(120-5x)\frac{-0.4x}{EI}dx \\ \Rightarrow EI\Delta &= -3,168\text{kft}^3\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(1)\delta &= \sum \delta\overline{P}\frac{PL}{AE} + \sum\int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx \\ &= (-0.6)\frac{(-0.6)^2(12)}{EA_2} + (1)\frac{(1)(10)}{EA_1} + 2\int_0^{12}(-0.4x)\frac{(-0.4x}{EI}dx \\ \Rightarrow EI\delta &= 206.05\text{kft}^3\end{aligned}$$

Da

$$\frac{I}{A_2} = \left(\frac{600}{144^2}\right)\left(\frac{144}{20}\right) = \left(\frac{30}{144}\right) \quad \text{and} \quad \frac{I}{A_1} = \left(\frac{600}{144^2}\right)\left(\frac{144}{2}\right) = \left(\frac{300}{144}\right)$$

poi sostituire nell'equazione di compatibilità

$$\frac{-3,168}{EI} + \frac{206.05}{EI} = 0 \Rightarrow X = +15.38 \text{ Tension}$$

Se avessimo trascurato la deformazione a causa di forze assiali, allora

$$X = \frac{3,168}{184.32} = +17.2$$

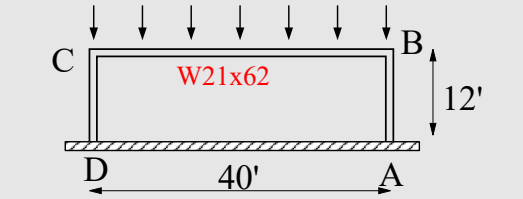
25.2.1.2 Ex 25.2: Analisi struttura in acciaio

Da Structural Engineering
White, Gergely e Sexmith, 1976 Un piccolo edificio industriale prodotto in massa, deve essere incastrato in acciaio strutturale con una sezione tipica trasversale come mostrato di seguito.

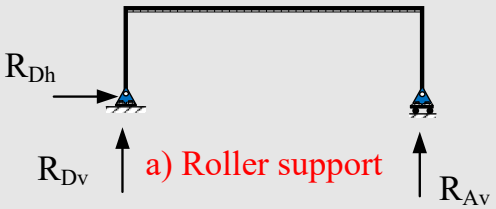
a) Cerniera ad una delle basi e un rullo all'altra; questo deve essere adottato quando abbiamo per le condizioni del suolo povere o sconosciute, e le fondamenta per il telaio non possono essere in grado di sviluppare qualsiasi forza orizzontale affidabile alle sue basi.
b) Cerniere in entrambi i punti A e D; per condizioni di terreno eccellenti.
c) Utilizzare un membro di lega d'acciaio in grado di portare solo la tensione che scorre tra i punti A e D Le fondamenta non dovrebbero fornire alcun restringimento orizzontale per questo caso.

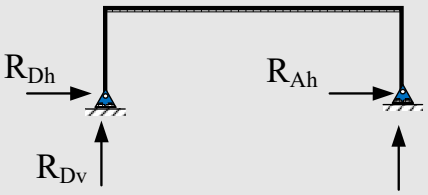
Presumiamo che il telaio sia realizzato in sezioni di travi d'acciaio 21 in profondità e pesatura 62 lb/ft di lunghezza (W 21 × 62), e il membro del pareggio per la progettazione (c) scelta provvisoriamente come 2-in.^{2} Bar.

COPIA DI REVISIONE

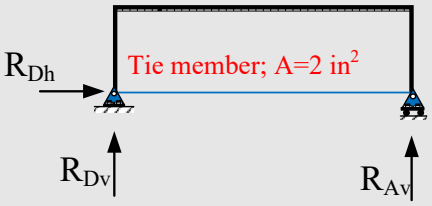


Structure cross section; spaced at 15'





b) Hinged support

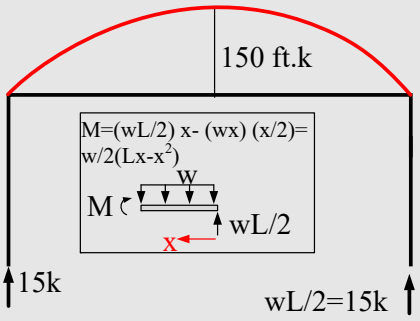


c) Roller with tie

Utilizzare un carico di neve di 30 psf e un carico totale stimato morto di 20 psv. Con cornici distanziati a 15 ft su centri lungo la lunghezza dell'edificio, il carico di progettazione è 15 (30 + 20) = 750 lb/ft.

Opzione a

Questa opzione è statisticamente determinata in quanto ci sono tre reazioni sconosciute e tre equazioni di equilibrio.

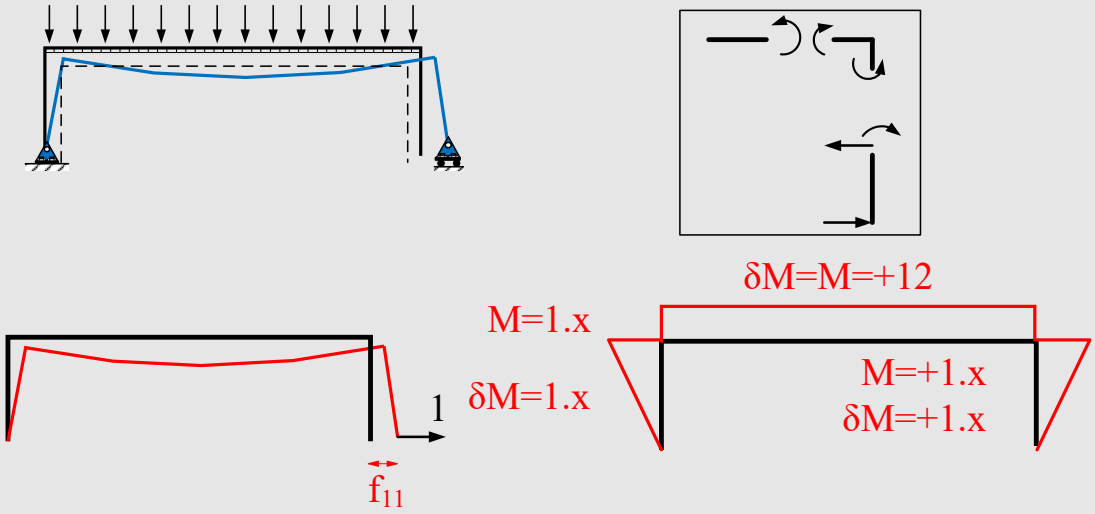


Opzione b

Struttura b Statisticamente indeterminato al primo grado (un ridondante). Applicare il rilascio A, forza di taglio ridondante R_1. Δ_1:

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

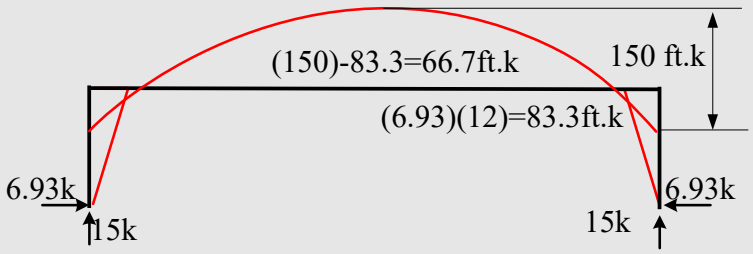


Risolvere per Δ_1 e f_{11}:

$$1(\text{k})\cdot\Delta_1(\text{ft}) = \int_0^L (12)\frac{w}{2}\frac{LX-x^2}{EI}dx = \int_0^{40}(12)\frac{(1/2)(.75)(40x-x^2)}{EI}$$
$$= \frac{48,000}{EI}\ \text{k}^2\,\text{ft}^3$$
$$1(\text{k})\cdot f_{11}(\text{ft}) = 2\left[\int_0^{12} x\frac{x\,dx}{EI} + \int_0^{20} 12\frac{12\,dx}{EI}\right] = \frac{6,912}{EI}\ \text{k}^2\,\text{ft}^3$$

Risolvere per R_1

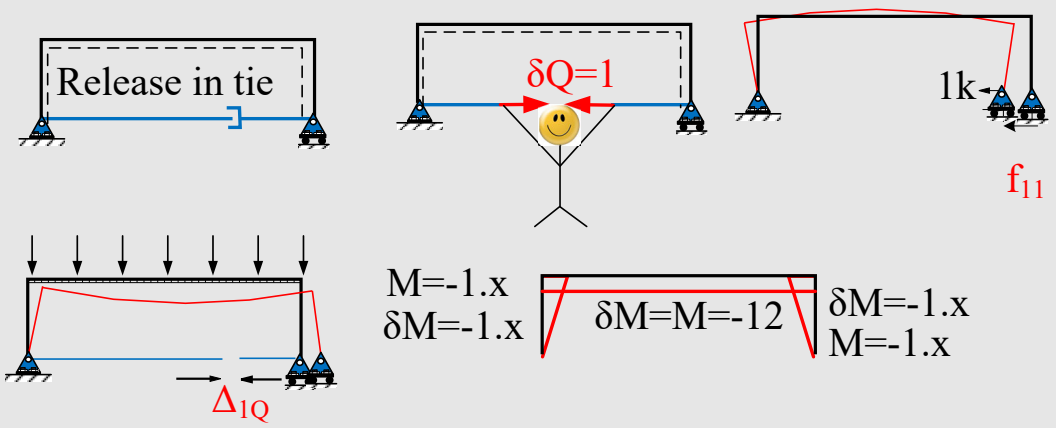
$$\frac{1}{EI}[48,000 + 6,912R_1] = 0 \Rightarrow R_1 = -6.93\ \text{k} \leftarrow$$



Opzione c

Tre forze esterne sconosciute, ma la struttura è statically indeterminate al primo grado dal membro del pareggio fornisce un grado di ridondanza interna. Rilasciare il membro della cravatta, con la sua conseguente spostamento longitudinale e forza assiale.

COPIA DI REVISIONE



Equazione di compatibilità: lo spostamento relativo delle due sezioni del pareggio al punto di rilascio deve essere zero, or $\Delta_1 + f_{11}R_1 = 0$ dove

Δ_1 = spostamento al rilascio 1 nella struttura primaria
f_{11} = spostamento relativo al rilascio 1 per una forza assiale unitaria nel membro del pareggio, Δ_1
R_1 = forza nel membro del pareggio nella struttura originale.

è determinato dal caso b:

$$\Delta_1 = \frac{(48,000)\text{ k ft}^3(1,728)\text{ in}^3/\text{ ft}^3}{(30\cdot 10^3)\text{ ksi}(1,327)\text{ in}^4} = 2.08\text{ in} \rightarrow$$

f_{11} è causata da deformazioni sia flessorali che assiali

$$1\cdot f_{11} = \underbrace{2\left[\int_0^{12}(-x)\frac{(-x)dx}{EI} + \int_0^{20}(-12)\frac{(-12)dx}{EI}\right]}_{\text{Flexure}} + \underbrace{\delta\overline{P}\frac{PL}{EA}}_{\text{Axial}}$$

$$= \frac{6,912}{EI} + \frac{1(1)(40)}{EA}$$

$$= \frac{(6,912)\text{ k ft}^3(1,728)\text{ in}^3/\text{ ft}^3}{(30\cdot 10^3)\text{ ksi}(1,327)\text{ in}^4} + \frac{(40)\text{ ft}(12)\text{ in}/\text{ ft}}{(30\cdot 10^3)\text{ ksi}(2)}$$

$$= 0.300 + 0.008 = 0.308$$

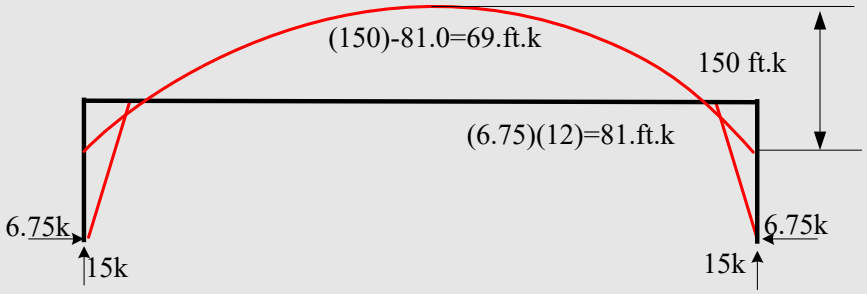
così f_{11} = 0,08 in./k Deformazione coerente:

$$\Delta_1 + f_{11}R_1 = 0 \Rightarrow 2.08 + .308R_1 = 0 \Rightarrow R_1 = -6.75\text{ k}$$

I due termini di spostamento nell'equazione devono portare segni opposti per spiegare la loro differenza in direzione.

COPIA DI REVISIONE

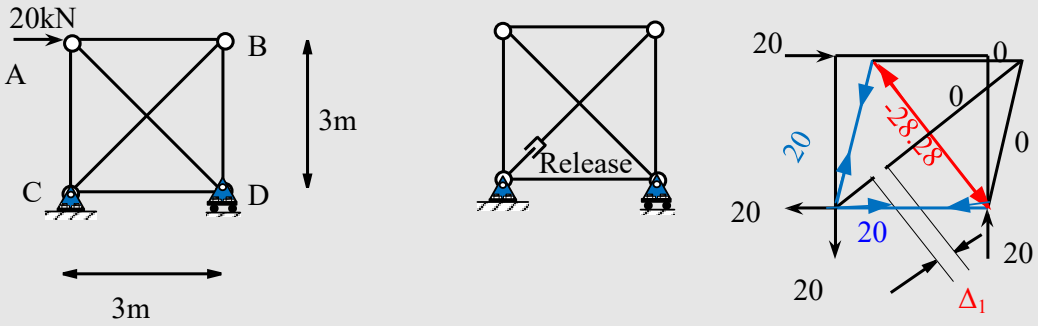
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Osservazioni

M diagramma in c, molto vicino a M per b. Cavo era molto rigido. Ridurre la zona del cavo aumenterà il momento. Le cornici con i membri della cravatta sono ampiamente utilizzate negli edifici industriali. Cornici di momento massimo (b) ec) è circa 55% of (a). La continuità provoca una diminuzione del momento positivo e un aumento della negativa. design ottimale. Le reazioni verticali non sono influenzate dalle condizioni di supporto orizzontale.

25.2.1.3 Ex 25.3: Capriata con una forza ridondante



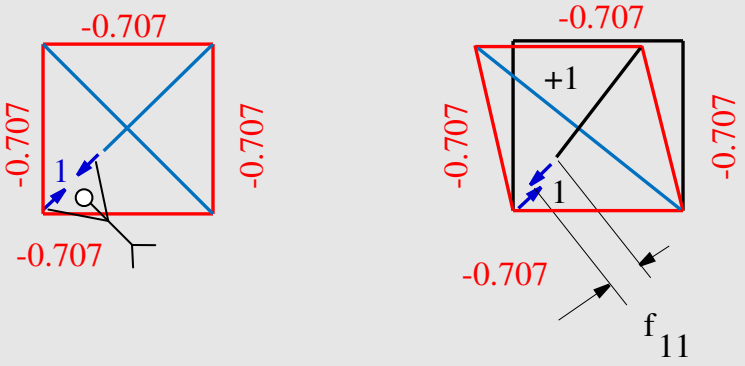
1. Check: $2 \times 4 = 8$ equazioni, 6 membri + 3 reazioni $\Rightarrow$ un grado di indeterminanza. È possibile scegliere un rilascio longitudinale in una delle sei barre.
2. Rilasciare il membro diagonale BC per il rilascio.
3. Δ_1 Sviluppi relativi di giunzione B rispetto alla congiunta C.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

4. Equazione della compatibilità lungo CD

$$\Delta_1 + f_{11}F_1 = 0$$
$$1 \cdot \Delta_1 = \Sigma \delta\overline{P}\frac{PL}{AE}$$
$$f_{11} = \Sigma \delta\overline{P}\frac{\overline{P}L}{AE}$$



5. Valutare queste somme in forma tabellare:

Membro	P	$\delta\overline{P}$	L	$\delta\overline{P}PL$ (Δ_1)	$\delta\overline{P}\overline{P}L$ (f_{11})
AB	0	−0.707	3	0	1.5
BD	0	−0.707	3	0	1.5
CD	+20	−0.707	3	−42.42	1.5
AC	+20	−0.707	3	−42.42	1.5
AD	−28.28	+1	4.242	−119.96	4.242
BC	0	+1	4.242	0	4.242
				-204.8	14.484

$$\Delta_1 = \Sigma \delta\overline{P}\frac{PL}{AE} = -\frac{-204.8}{AE}\text{m.kN}^2$$
$$f_{11} = \frac{14.484}{AE}\text{m.kN}^2$$
$$0 = \frac{1}{AE}[-204.8 + 14.484F_1]$$
F_1=14.14 kN

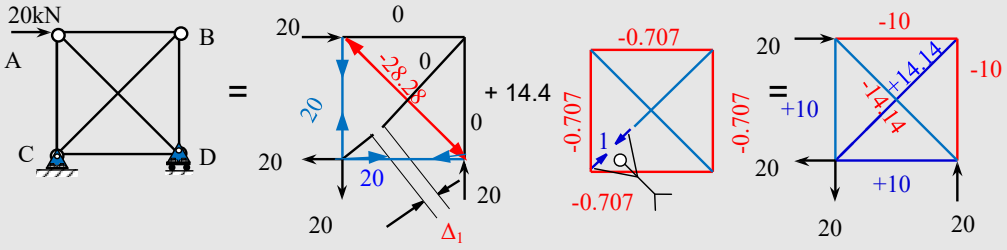
.

6. Le forze finali sono ottenute da superimpilazione forze dovute al ridondante e alle forze a causa del carico reale.

COPIA DI REVISIONE

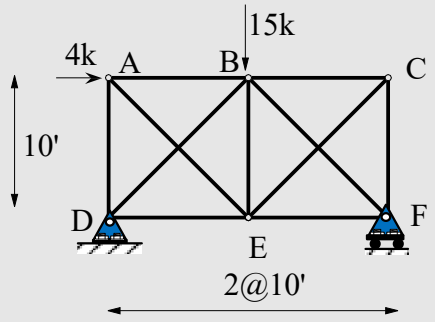
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

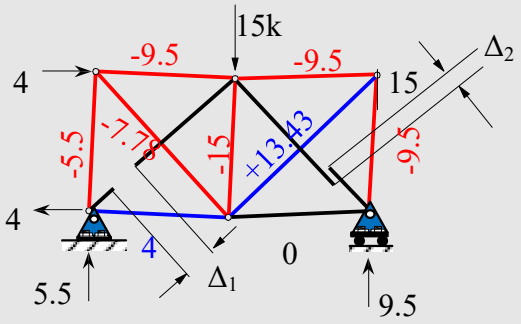
7. Effetto forza ridondante: moltiplicare le forze membri del 14.14 (forza rossa)



Membro	$\delta\overline{P}$	$F_1\delta\overline{P}$	P	P_{total}
AB	−0.707	−10.0	0.0	−10.0
BD	−0.707	−10.0	0.0	−10.0
CD	−0.707	−10.0	+20.0	+10.0
AC	−0.707	−10.0	+20.0	+10.0
AD	+1.0	+14.14	−28.28	−14.14
BC	+1.00	+14.14	0	+14.14

25.2.1.4 Ex 25.4: Capriata con due forze ridondanti





Un altro pannello con un secondo membro ridondante viene aggiunto alla capriata dell'esempio precedente

1. Rilasciare due diagonali (DB e BF).
2. Le forze membri e gli spostamenti necessari per il carico reale e per le due forze ridondanti nei membri DB e BF.
3. Sebbene il carico reale sia normalmente in grado di sottolineare tutti i membri dell'intera truss,

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

vediamo che le forze unitarie corrispondenti ai ridondanti stressano solo quei membri del pannello che contengono la ridondante; tutte le altre forze della barra sono zero.

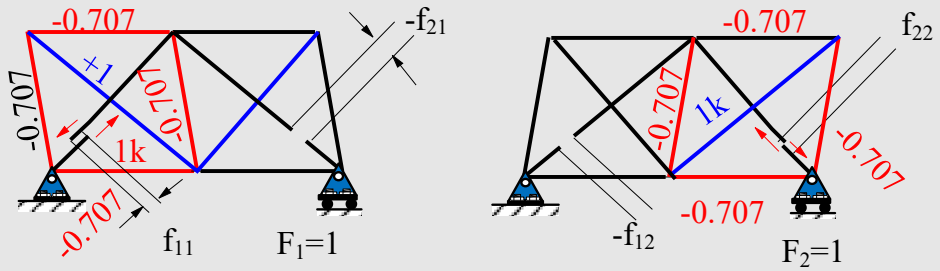
4. Riconoscendo questo fatto ci permette di risolvere il problema della doppia tromba diagonale più rapidamente di un telaio con ridondanti multipli.
5. Le equazioni di lavoro virtuali per l'elaborazione dei sei spostamenti richiesti (due a causa del carico e quattro flessibilities) sono

$$1 \cdot \Delta_1 = \Sigma \delta \overline{P}_1 \left(\frac{PL}{AE} \right) \qquad 1 \cdot \Delta_2 = \Sigma \delta \overline{P}_2 \left(\frac{PL}{AE} \right)$$

$$1 \cdot f_{11} = \Sigma \delta \overline{P}_1 \left(\frac{\overline{P}_1 L}{AE} \right) \qquad 1 \cdot f_{21} = \Sigma \delta \overline{P}_2 \left(\frac{\overline{P}_1 L}{AE} \right)$$

$$f_{12} = f_{21} \text{ by the reciprocal theorem} \qquad 1 \cdot f_{22} = \Sigma \delta \overline{P}_2 \frac{\overline{P}_2 L}{AE}$$

6. Assumere forze unità di trazione (positivo).



7. Tabula:

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

					Sviluppi		Flessibilità		
Membro	P	$\overline{P}_1$	$\overline{P}_2$	L	Δ_1 $\delta\overline{P}_1PL$	Δ_2 $\delta\overline{P}_2PL$	f_{11} $\delta\overline{P}_1\overline{P}_1L$	f_{21} $\delta\overline{P}_2\overline{P}_1L$	f_{22} $\delta\overline{P}_2\overline{P}_2L$
AB	-9.5	-0.707	0	120	+806	0	60	0	0
BC	-9.5	0	-0.707	120	0	+806	0	0	60
CF	-9.5	0	-0.707	120	0	+806	0	0	60
EF	0	0	-0.707	120	0	0	0	0	60
DE	+4	-0.707	0	120	-340	0	60	0	0
AD	-5.5	-0.707	0	120	+466	0	60	0	0
AE	+7.78	+1	0	170	+1,322	0	170	0	0
BE	-15.0	-0.707	-0.707	120	+1,272	+1272	60	60	60
CE	+13.43	0	+1	170	0	+2,280	0	0	170
BD	0	+1	0	170	0	0	170	0	0
BF	0	0	+1	170	0	0	0	0	170
					+3,528	+5,164	+580	+60	+580

$$\Delta_1 + f_{11}F_1 + f_{12}F_2 = 0$$
$$\Delta_2 + f_{21}F_1 + f_{22}F_2 = 0$$

or

$$\frac{1}{AE}\begin{bmatrix} 580 & 60 \\ 60 & 580 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{AE}\begin{bmatrix} 3,528 \\ 5,164 \end{bmatrix}$$

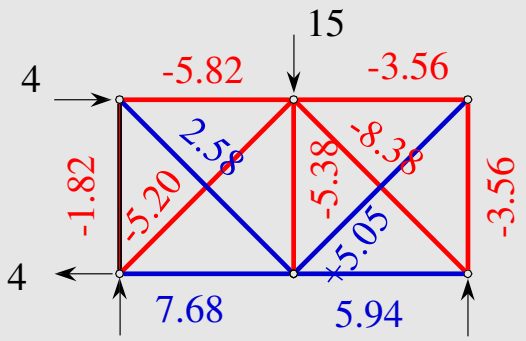
e F_1 = -5.20 kip e F_2 = -8.38 kip

8. Set finale di forze: aggiungere per ogni membro i tre effetti separati: $F = P + F_1\overline{P}_1 + F_2\overline{P}_2$

Membro	P	$\overline{P}_1$	$\overline{P}_2$	$F_1\overline{P}_1$	$F_2\overline{P}_2$	P_{tot}
AB	-9.5	-0.707	0.0	3.676	0.0	-5.82
BC	-9.5	0.0	-0.707	0	5.925	-3.56
CF	-9.5	0.0	-0.707	0	5.925	-3.56
EF	0.0	0.0	-0.707	0	5.925	5.94
DE	+4	-0.707	0.0	3.676	0.0	7.68
AD	-5.5	-0.707	0.0	3.676	0.0	-1.82
AE	+7.78	+1	0.0	-5.20	0.0	2.58
BE	-15.0	-0.707	-0.707	3.676	5.925	-5.38
CE	+13.43	0.0	+1	0.0	-8.38	5.05
BD	0.0	+1	0.0	-5.20	0.0	-5.20
BF	0.0	0.0	+1	0.0	-8.38	-8.38

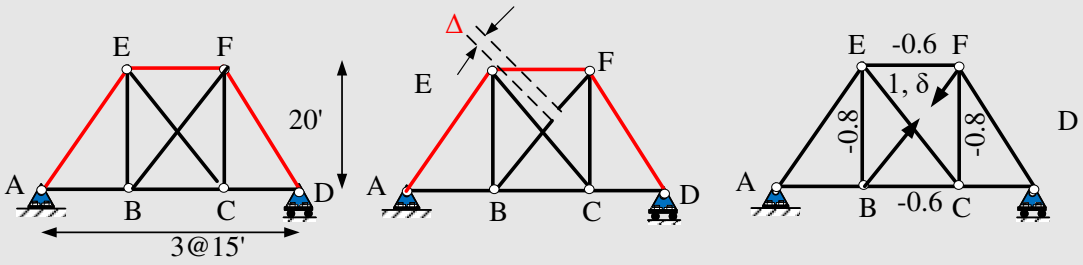
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



25.2.1.5 Ex 25.5: Capriata con carico termico

W eseek per analizzare la seguente tromba (indeterminata al primo grado) sottoposta ad un aumento di temperatura $\Delta T = 60°$F nei membri AE, EF e FD. Prendi. $\alpha = 1/150,000$ per °F, $E = 30 \times 10^3$k/sq in. Tutte le sezioni di incrocio sono uguali a 10 cm2 Per questo problema, scegliamo di tagliare la barra BF e selezionare la sua forza a barre come ridondante.



Poi

$$\Delta + X\delta = 0$$

E' ancora

$$(1)\delta = \frac{1}{E}\sum \delta\overline{P}\frac{PL}{A}$$

per Δ è leggermente diverso.

$$(1)\Delta = \sum \delta\overline{P}\frac{PL}{AE}$$

e come in questo libro, abbiamo chiaramente separato virtuale da quantità reali. Quindi, lo spostamento reale può essere espresso come

$$\frac{P}{AE} = \varepsilon = \alpha\Delta T$$

dove α è il coefficiente di espansione termica, e ΔT il cambiamento di temperatura. Pertanto, per questo problema dovremmo usare

$$(1)\Delta = \alpha\sum \delta\overline{P}\Delta TL$$

Risultati destabilizzanti

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Bar	L	A	$\frac{L}{A}$	$\delta\overline{P} = P$	$\delta\overline{P}\frac{PL}{A}$	ΔT	$\delta\overline{P}\Delta TL$	$X\delta\overline{p}$
	ft	in^2	)^2	k	k^2)^2	°F	k°F.	k
EF	15	10	1.5	-0.6	+0.54	+60	-540	-7.5
BC	15	10	1.5	-0.6	+0.54	0	0	-7.5
EB	20	10	2	-0.8	+1.28	0	0	-10.0
FC	20	10	2	-0.8	+1.28	0	0	-10.0
EC	25	10	2,5	+1.0	+2.5	0	0	+12.5
BF	25	10	2.5	+1.0	+2.5	0	0	+12.5
Σ					+8.64		-540	

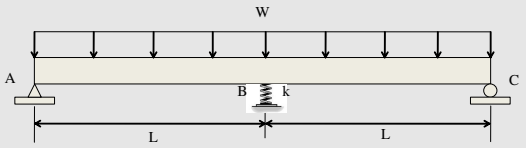
$$\Delta = (-540)\frac{1}{150,000} = -0.0036 \text{ ft}$$

$$\delta = \frac{8.64}{30 \times 10^3} = 0.000288 \text{ ft}$$

Da allora

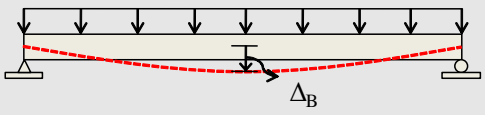
$$-0.0036 + 0.000288X = 0 \Rightarrow X = +12.5 \text{ k (Tension)}$$

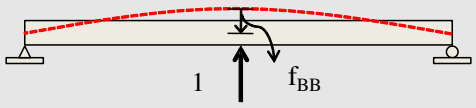
25.2.1.6 Ex 25.6: Trave a molla



Il fascio è supportato da un perno a A, una primavera con rigidità k at Be un rullo a C. Determinare la forza che esercita la molla sul fascio. EI è costante.

1. Definire la struttura primaria (rimuovere la molla) e determinare le deflettenze in questa posizione per il carico reale e l'unità di carico. L





COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Carico uniforme

$$M = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2} = \frac{1}{2}w(LX - x^2)$$
$$\delta\overline{M} = \frac{1}{2}x$$
$$1.\Delta = 2\int_0^{L/2} \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx = 2\int_0^{L/2} \frac{1}{2}x\frac{w(Lx - x^2)}{2EI}dx$$
$$= \frac{2w}{4EI}\int_0^{L/2}(Lx^2 - x^3)dx = \frac{w}{2EI}\left(\frac{Lx^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^{L/2} = \frac{5wL^4}{384EI}$$

Carico di punto:

$$M = \frac{P}{2}x = \frac{Px}{2}$$
$$\delta\overline{M} = \frac{\delta\overline{P}}{2}x = \frac{x}{2}$$
$$1.f_{BB} = 2\int_0^{L/2} \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx = 2\int_0^{L/2} \frac{x}{2}\frac{Px}{2EI} = \frac{2P}{4EI}\int_0^{L/2} x^2dx$$
$$\Rightarrow f_{BB} = \frac{PL^3}{48EI}$$

2. Computare le deflettori a causa del carico totale e del carico unitario. Abbiamo una molla, e quindi la deviazione non è zero ma proporzionale (attraverso la costante di primavera k) alla forza di reazione

$$\Delta_B + f_{BB} = \Delta_{sp} \quad \text{and} \quad \Delta_{sp} = \frac{F_{sp}}{k}$$

Ora si adattano gli spostamenti per il fascio di lunghezza 2L invece che L come nelle equazioni precedentemente derivate

$$\Delta_B^* = \frac{5wL_{AC}^4}{384EI} = \frac{5w(2L)^4}{384EI} = \frac{5wL^4}{24EI}$$
$$f_{BB}^* = \frac{PL_{AC}^3}{48EI} = \frac{F_{sp}(2L)^3}{48EI} = \frac{F_{sp}}{L^3}6EI$$

Sostituire

$$\Delta_B^* + f_{BB}^* = \Delta_{sp} \Rightarrow \frac{5WL^4}{24EI} + \left(-\frac{F_{sp}L^3}{6EI}\right) = \frac{F_{sp}}{k} \Rightarrow F_{sp} = \frac{5wkL^4}{4(6EI + kL^3)}$$

Con la reazione nel supporto centrale noto, il problema è ora staticamente determinato.

Il lettore è riferito all'Appendice F per un problema analogo, anche se considerevolmente più complesso: una scocca a botte sostenuta da un fascio elastico.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

25.2.1.7 Ex 25.7: Posto della regina

Un fascio di pavimenti in acciaio è stato progettato per trasportare un carico di 3 k/ft su una semplice campata di 24 ft. A causa del cambiamento nell'utilizzo dell'edificio, il nuovo proprietario desidera caricare il pavimento con materiali che aumenteranno il caricamento totale a 4,8 k /ft. Un ingegnere propone di rinforzare il fascio con uno strutto a compressione e due legami di tensione, per formare un "king post trus" come mostrato in seguito. I nuovi membri saranno nascosti in una partizione di cuscinetti non a carico sotto il fascio. Vorremmo disegnare lo schema del momento per la nuova trave e valutare l'efficienza di questo sistema di retrofitting. Il fascio è una sezione W 18x60 (I=984 in^4) lo strut è una sezione W 4x13 (A=4.83 in^2). Il cavo d'acciaio ha A=1 in^2.

1. Questa è una struttura statically indeterminate, il fascio ha tre supporti (A, B e C).
2. Per la struttura primaria, togliamo il supporto centrale e poi risolviamo per la deflezione del midspan Δ. ($\Delta = -\frac{5}{384}\frac{wL^4}{EI}$).
3. Applicare una forza unitaria a B e risolvere per f_{BB}, tenere a mente che avremo flesso nel fascio, assiale nei due cavi (AD e DC), e assiale nel membro BD.
4. Risolvere la reazione a B.

1. Selezionare la forza assiale nel membro BD come forza ridondante
2. Determinare la deflezione del fascio

$$D_B = -\frac{5}{384}\frac{wL^4}{EI} = -\frac{5}{384}\frac{(4.8)\text{ k.ft}(24)^4\text{ ft}^4(12)^4\text{ in}^4/\text{ ft}^4}{E(984)\text{ in}^4} = -\frac{36,414}{E}$$

3. Dalla geometria, la lunghezza di ogni cavo è $L = \sqrt{7^2 + 12^2} = 13.89$ ft
4. Dalle statiche, una forza unitaria nel BD membro genererà una forza nel cavo pari a $\frac{13.89}{7}0.5 = 0.9923$ kips
5. Si noti che se applichiamo il carico unitario sulla trave, di quanto supponiamo che abbiamo un supporto rigido a B e non elastico (combinazione del membro assiale e cavo).
6. Determinare il termine flessibilità

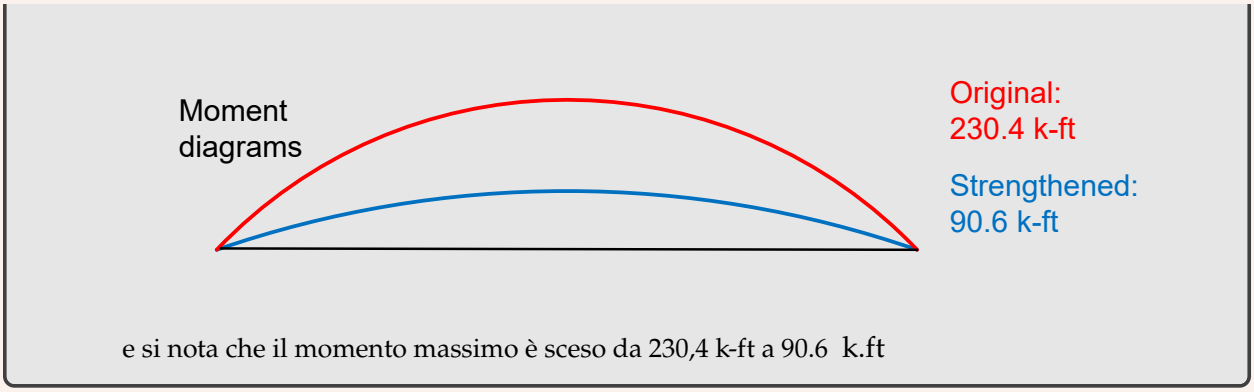
$$\begin{aligned} f_{BB} &= 2\left[\int_0^{12\times12} 0.5x\frac{0.5x}{EI}dx + (0.992)\frac{(0.992)(13.89)(12)}{E}\right] + (1)\frac{(1)(7)(12)}{(3.83)E} \\ &= 2\frac{(0.25)(144)^3}{3E(984)} + 2\frac{(0.992)^2(13.89)(12)}{(1)E} + \frac{(7)(12)}{3.83E} \\ &= \frac{1}{E}(505.7 + 328 + 21.93) = \frac{855.63}{E} \end{aligned}$$

7. La compatibilità degli spostamenti richiede che

$$Rf_{BB} + D_B = 0 \Rightarrow R = -\frac{D_B}{f_{BB}} = -\frac{-36,414}{855.63} = 42.5\text{ k}$$

8. I diagrammi di momento corrispondenti e originali sono

COPIA DI REVISIONE



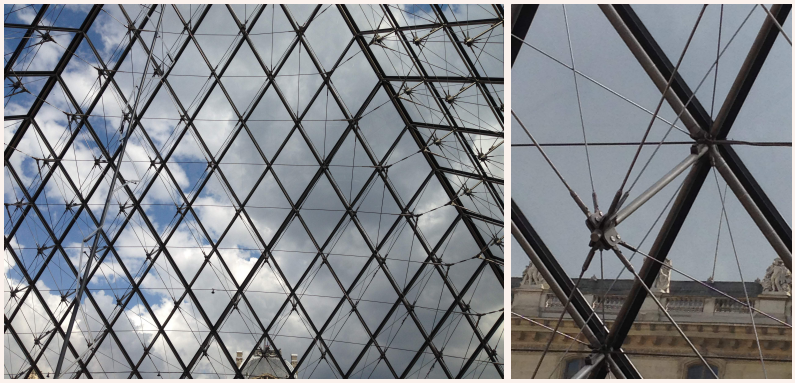
13 Fig. 25.5 illustra alcuni esempi di disegni basati sul concetto Queen-Post.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Aeroporto di Washington Dulles (King Post)



(b) Pyramide du Louvre (I.M. Pei)



(c) Sony Center, Berlino (Helmut Jahn)

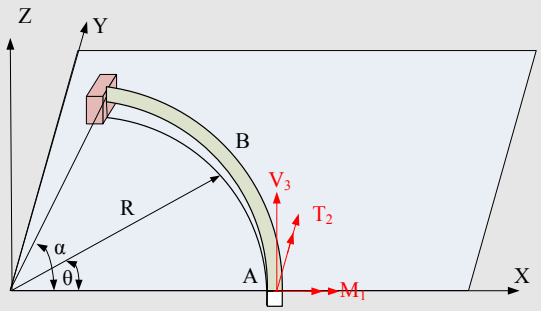
Figura 25.5: Esempi di strutture ispirate a regine-post

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

25.2.1.8 Ex 25.8: Matrice di flessibilità: trave curva

Cerchiamo di ricavare la matrice della flessibilità per il reggisella circolare del raggio R e angolo α. L'arco è fissato a un capo e libero all'altro.

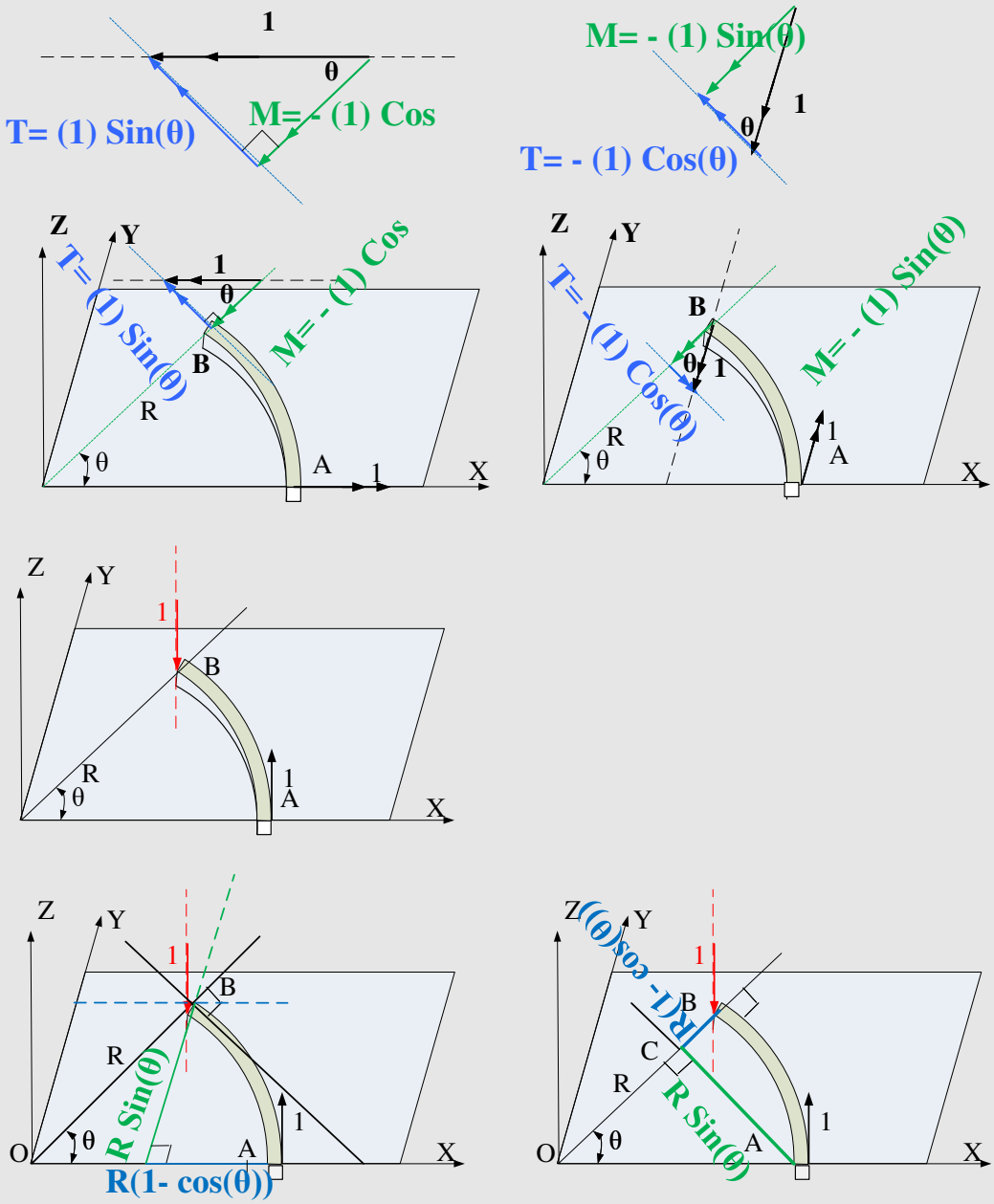


1. I tre gradi di libertà corrispondono al momento, torsione e cesoia.
2. I movimenti e le torsioni dovuti a momento esterno o torsione di unità applicati ad A possono essere facilmente ottenuti dalla geometria.
3. Per l'unità esternamente applicata forza a A, deve determinare dalla geometria i due bracci di momento.

$$
\begin{aligned}
AC &= R\sin(\theta) \\
M &= (1)R\sin(\theta) \\
BC &= R(1-\cos(\theta)) \\
T &= (1)R\,(1-\cos(\theta))
\end{aligned}
$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



dof:	$i=1$	$i=2$	$i=3$
	M_A=1	$T_A=1$	$V_A=1$
$V_i(\theta)$	0	0	-1
$M_i(\theta)$	-cos θ	$-\sin\theta$	-Rsin(θ)
$T_i(\theta)$	sin θ	$-\cos\theta$	$R(1-\cos(\theta))$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

4. Bisogno di applicazione

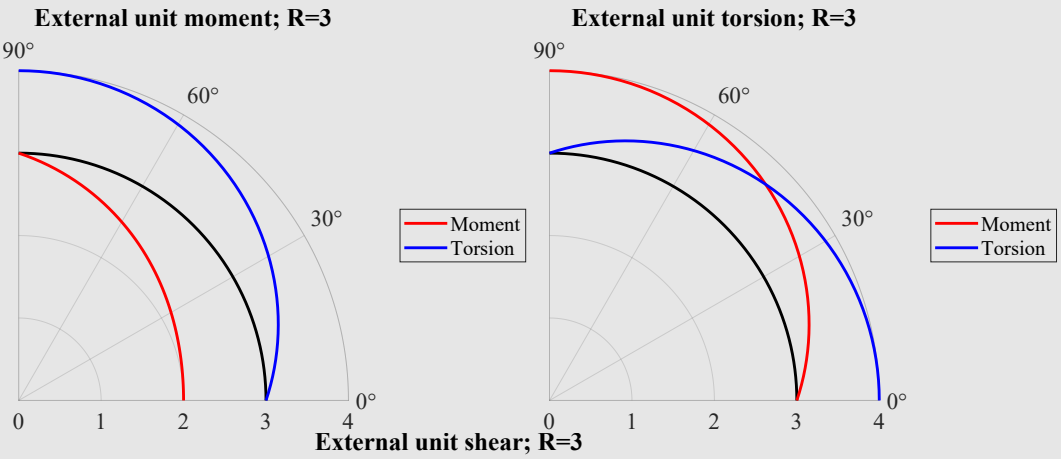
$$d_{ij} = \int_0^\alpha \delta\overline{M}_i(\theta)\frac{M_j(\theta)}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_i(\theta)\frac{T_j(\theta)}{EI}Rd\theta$$

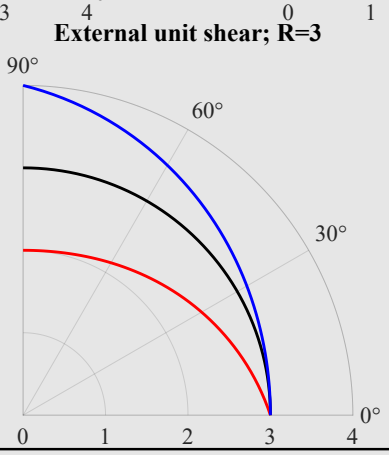
dove $1 \le i, j \le 3$, cioè operiamo sulle linee 2 o 4. Così (segni di d_{x3} i risultati dell'integrazione potrebbero essere errati.:

$$\begin{aligned}
d_{11} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_1\frac{M_1}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta T_1\frac{T_1}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha -\cos\theta\frac{-\cos\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \sin\theta\frac{\sin\theta}{GJ}Rd\theta \\
&= \frac{R}{EI}\left(-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R}{GJ}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) \\
d_{12} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_1\frac{M_2}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_1\frac{T_2}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha -\cos\theta\frac{-\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \sin\theta\frac{-\cos\theta}{GJ}Rd\theta \\
&= \frac{R}{EI}\frac{\sin^2\alpha}{2} - \frac{R}{GJ}\frac{\sin^2\alpha}{2} \\
d_{13} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_1\frac{M_3}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_1\frac{T_3}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha \cos\theta\frac{R\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \sin\theta\frac{R(1-\cos\theta)}{GJ}Rd\theta \\
&= -\frac{R}{EI}\frac{\sin^2\alpha}{2} - \frac{R}{GJ}\left(\frac{1}{2} - \cos\alpha + \cos^2\alpha\right) \\
d_{22} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_2\frac{M_2}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_2\frac{T_2}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha -\sin\theta\frac{-\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha -\cos\theta\frac{-\cos\theta}{GJ}Rd\theta \\
&= \frac{R}{EI}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R}{GJ}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) \\
d_{23} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_2\frac{M_3}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_2\frac{T_3}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha \sin\theta\frac{R\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha -\cos\theta\frac{R(1-\cos\theta)}{GJ}Rd\theta \\
&= -\frac{R}{EI}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R}{GJ}\left(-\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) \\
d_{33} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_3\frac{M_3}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_3\frac{T_3}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha R\sin\theta\frac{R\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha R(1-\cos\theta)\frac{R(1-\cos\theta)}{GJ}Rd\theta \\
&= \frac{R^2}{EI}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R^2}{GJ}\left(\frac{3}{2}\alpha - 2\sin\alpha + \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right)
\end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.





	Unità esterna					
	momento		Torsione		forza	
Int. Forza	Inizia	Fine	Inizia	Fine	Inizia	Fine
Momento	1	0	0	1	0	1
Torsione	0	1	1	0	0	1

25.3 Equazioni di tre momenti

Per il contesto storico, consultare §11.3.2

[14] L'equazione a tre piani, nota anche come teorema di Clapeyron di tre momenti, fu sviluppata dall'ingegnere francese Benoît Clapeiron nel 1857 (§10.3.2.9). Il lavoro di Clapeyron sulla teoria dell'elasticità e dell'analisi strutturale ha posto le basi per l'analisi dei fasci continui. L'equazione a tre piani è stata uno dei primi metodi utilizzati per

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

analizzare le strutture staticamente indeterminate, fornendo un modo di relazionare i momenti con tre supporti consecutivi di una trave continua.

15 A differenza di essere utilizzato al giorno d'oggi, ma ho optato per includerlo sia per la ragione storica, che l'eleganza della soluzione tis.

16 L'equazione dei tre momenti, nota anche come *teorema a tre momenti*" or *Il teorema di Clapeyron* è chiamato tale perché si riferisce i momenti di piegatura in tre punti adiacenti su un fascio.

17 Essenzialmente, questo metodo fornisce una formula semplice per calcolare il momento di piegatura al supporto centrale di un fascio continuo con tre supporti.

18 Il metodo può anche essere esteso a travi con supporti multipli, con conseguente una serie di equazioni che formano una matrice tri-diagonale .

19 Il membro[1] si presume essere etero, e noi designate da L, Ce R, i punti indicati nella figura. 25.6. I momenti di inerzia sono assunti per essere costanti tra i supporti, e sono designati da I_L e I_R. Si presume che le deflettori della posizione originale siano δ_L, δ_Ce δ_R e sono assunti positivi quando verso l'alto come mostrato.

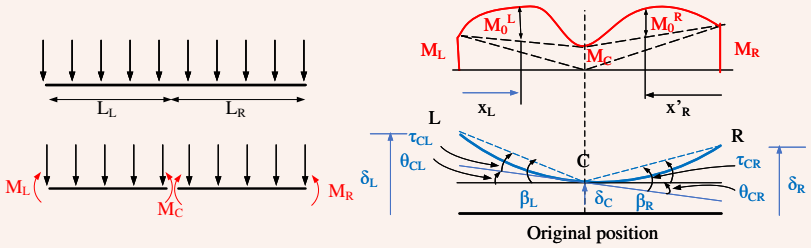


Figura 25.6: Equazione di tre momenti, derivazione

20 Lasciate che i momenti in questi tre punti siano M_L, M_Ce M_R. I momenti di attesa sono positivi quando causano tensione sulle fibre inferiori del fascio. Il diagramma di momento per la porzione LC or CR può essere considerato che derivante dalla sovrapposizione di tre effetti separati:

1. Il contributo di ciascuno dei momenti finali che agiscono separatamente, che è dato dalle ordinazioni dei triangoli indicati dalle linee tratteggiate.
2. Il contributo del carico applicato che agisce da solo con i momenti finali rimossi, che viene dato dalle ordinazioni nelle ordinazioni M_0^L nella porzione LC.
3. by M_0^R nella porzione CR.

21 Da Fig. 25.6 noi abbiamo

$$\theta_{CL} = \beta_L - \tau_{CL} \quad \text{and} \quad \theta_{CR} = \tau_{CR} - \beta_R$$

[1] Derivazione basata da quella di Norris e Wilbur, 1960.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

22 Tuttavia, poiché la curva elastica deve essere continua attraverso il punto C (per questo motivo il metodo di flessibilità rientra nel metodo[2])

$$\theta_{CL} = \theta_{CR} \Rightarrow \beta_L - \tau_{CL} = \tau_{CR} - \beta_R \tag{25.5}$$

23 Poiché questi sono angoli piccoli, possiamo considerare

$$\beta_L = \frac{\delta_L - \delta_C}{L_L} \quad \beta_R = \frac{\delta_R - \delta_C}{L_R} \tag{25.6}$$

24 Se il diagramma del momento doveva essere convertito in e M/EI uno (curvatura), poi τ_{CL} e τ_{CR} potrebbe essere valutato dal secondo teorema di fase[3] (§22.3.4.3):

$$\begin{aligned}
\tau_{CL} &= \frac{1}{EI_L L_L}\left(\frac{M_L L_L^2}{6} + \frac{M_C L_L^2}{3} + \int_0^{L_L} M_0^L x_L dx_L\right) \\
\tau_{CR} &= \frac{1}{EI_R L_R}\left(\frac{M_R L_R^2}{6} + \frac{M_C L_R^2}{3} + \int_0^{L_R} M_0^R x'_R dx'_R\right)
\end{aligned} \tag{25.7}$$

Lasciamo perdere.

$$(\mathcal{M}_0)_L = \int_0^{L_L} M_0^L x_L dx_L \quad \text{and} \quad (\mathcal{M}_0)_R = \int_0^{L_R} M_0^R x'_R dx'_R \tag{25.8}$$

25 Sostituito da Eq. 25.8 in Eq. 25.7 e poi da Eqs 25.6 e 25.7 su Eq. 25.5, otteniamo il cosiddetto *tre equazioni di momento*.

$$M_L \frac{L_L}{I_L} + 2M_C\left(\frac{L_L}{I_L} + \frac{L_R}{I_R}\right) + M_R \frac{L_R}{I_R} = -\frac{\mathcal{L}_0}{I_L} - \frac{\mathcal{R}_0}{I_R} + 6E\left[\frac{\delta_L}{L_L} - \delta_c\left(\frac{1}{L_L} + \frac{1}{L_R}\right) + \frac{\delta_R}{L_R}\right] \tag{25.9}$$

dove i termini di carico sono

$$\mathcal{L}_0 = \frac{6(\mathcal{M}_0)_L}{L_L} \quad \text{and} \quad \mathcal{R}_0 = \frac{6(\mathcal{M}_0)_R}{L_R}$$

dove

1. M_L. M_C e M_R sono positivi quando causano tensione nelle fibre inferiori.
2. δ_L, δ_Ce δ_R sono positive quando verso l'alto dalla posizione orginale.

[2]Nota analogia con il metodo di deflettore del pendio (§27.2) dove scriviamo un'equazione di equilibrio al nodo mentre nell'Equazione dei Tre Momenti scriviamo una equazione delle differenze di compatibilità.

[3]La deviazione tangenziale del punto 2 su un membro flessorale caricato, da un tangente alla curva di deflettorazione al punto 1 (t_{21}) è uguale al momento della zona del diagramma di curvatura tra 1 e 2 circa 2.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

3. $\mathcal{L}_0$ e $\mathcal{R}_0$ sono termini di carico dipendenti dal carico applicato nelle campate LC e CR rispettivamente.
4. Il M_0 diagramma per un membro è il diagramma di flessione-momento disegnato per il membro se si presume essere un semplice fascio di supporto finale.
5. $(\mathcal{M}_0)_L$ rappresenta il momento statico della zona sotto questo diagramma, preso circa un asse attraverso l'estremità sinistra.
6. $(\mathcal{M}_0)_R$ rappresenta il momento statico della zona sotto questo diagramma, preso circa un asse attraverso la fine destra.

Il segno di entrambi gli ultimi momenti statici dipende semplicemente dal segno delle ordinazioni M_0 diagramma.

26 If $I_L = I_R = I$Eq. 25.9 semplificare

$$M_L L_L + 2M_C (L_L + L_R) + M_R L_R = -\mathcal{L}_0 - \mathcal{R}_0 + 6EI \left[\frac{\delta_L}{L_L} - \delta_c \left(\frac{1}{L_L} + \frac{1}{L_R} \right) + \frac{\delta_R}{L_R} \right] \tag{25.10}$$

27 Le condizioni di carico in caso di pieno carico uniforme e concentrato sono indicate nella figura. 25.7 e dato in Tabella 25.1.

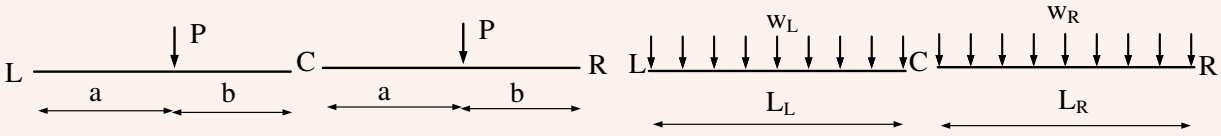


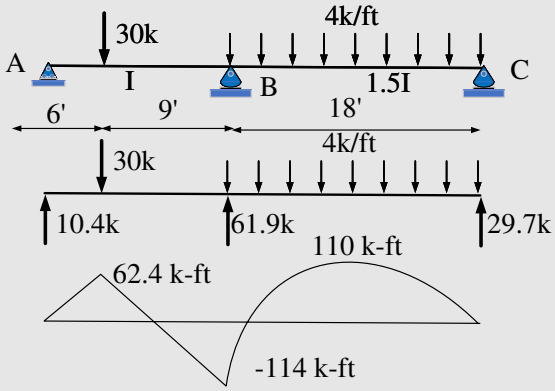
Figura 25.7: Equazione di tre momenti, termini di carico

Tabella 25.1: Condizioni di carico dei carichi punti e uniforma

Carico concentrato	$\mathcal{L}_0 = \frac{Pab(2a+b)}{L_L}$	$\mathcal{R}_0 = \frac{Pab(a+2b)}{L_R}$
Carico uniforme	$\mathcal{L}_0 = \frac{w_L L_L^3}{4}$	$\mathcal{R}_0 = \frac{w_R L_R^3}{4}$

25.3.1 Ex 25.9: Trave continua

COPIA DI REVISIONE



Applicare Eq. 25.9, il A, Be C as L, Ce R:

$$M_a = 0 \quad M_B = ? \quad M_C = 0$$

e

$$\delta_A = \delta_B = \delta_C = 0$$

Dal tavolo 25.1

$$\mathcal{L}_0 = \frac{(30)(6)(9)(21)}{15} = 2,268$$

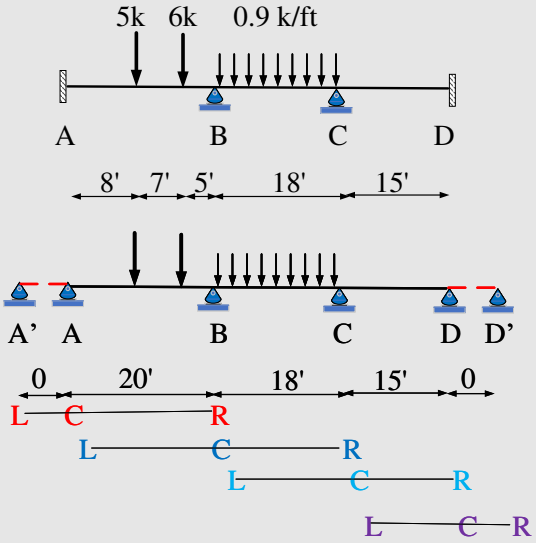
$$\mathcal{R}_0 = \frac{(4)(18)^2}{4} = 5,832$$

Infine, la Commissione ha deciso di chiudere il suo progetto di bilancio.

$$0 + 2M_B\left(\frac{15}{I} + \frac{18}{1.5I}\right) + 0 = -\frac{2,268}{I} - \frac{5,832}{1.5I}$$

$$54M_B = -6,156 \Rightarrow M_B = -114\text{k-ft}$$

25.3.2 Ex 25.10: Trave continua



In questo caso, ci sono quattro momenti sconosciuti, M_A, M_B, M_Ce M_DdPer questo motivo, sono necessarie quattro equazioni: una estremità fissa può essere gestita sostituendola con un'estensione aggiuntiva di lunghezza essenzialmente zero, come mostrato. 25.10 quattro volte separate, considerando L, Ce R a sua volta, come indicato.

$$\delta_{A'} = \delta_A = \delta_B = \delta_C = \delta_D = \delta_{D'} = 0$$

1. Considerare A', Ae B as L, C e R

$$\mathcal{L}_0 = 0 \quad \mathcal{R}_0 = \frac{(5)(8)(12)(32)}{20} + \frac{(6)(15)(5)(25)}{20} = 1,330.5 \quad M'_A = 0$$

$$\Rightarrow 40M_A + 20M_B = -1,330.5$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

2. Considerare A, Be C as L, C e R

$$\mathcal{L}_0 = \frac{(5)(8)(12)(28)}{20} + \frac{(6)(15)(5)(35)}{20} = 11,459.5 \quad \mathcal{R}_0 = \frac{(0.9)(18)^2}{4} = 1,312.2$$
$$\Rightarrow 20M_A + 76M_B + 18M_C = -2,771.7$$

3. Considerare B, Ce D as L, C e R

$$\mathcal{L}_0 = 1,312.2 \quad \mathcal{R}_0 = 0 \Rightarrow 18M_B + 66M_C + 15M_D = -1,312.2$$

4. Considerare C, De D' as L, C e R

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{R}_0 = 0 \quad M_{D'} = 0 \Rightarrow 15M_C + 30M_D = 0$$

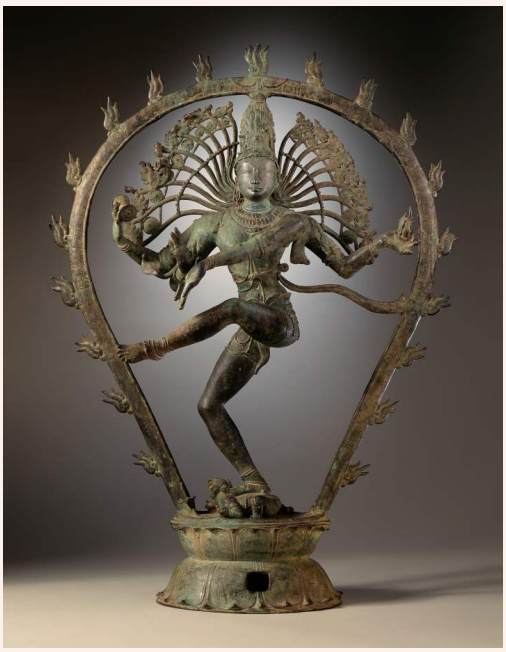
Queste quattro equazioni possono essere scritte come

$$\begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ M_C \\ M_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 0 & 0 \\ 20 & 76 & 18 & 0 \\ 0 & 18 & 66 & 15 \\ 0 & 0 & 15 & 30 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -1,330.5 \\ -2,771.7 \\ -1,312.2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -19.17 \\ -28.20 \\ -13.74 \\ +6.87 \end{Bmatrix} \text{k-ft}$$

(Nota la matrice risultante tri-diagonale prevista).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Shiva, dinastia Chola

La posa dinamica e il movimento fluente della danza cosmica di Shiva simboleggiano flessibilità ed adattabilità, come la deformazione delle strutture flessibili sotto carico mantenendo l'equilibrio.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 26

Forze in termini di spostamenti

Abstract

Mentre nei capitoli precedenti abbiamo esaminato i metodi per calcolare gli spostamenti in termini di forza (essenza della flessibilità/modulo di forze), questo capitolo farà il contrario. Questo è a sua volta l'essenza del metodo di rigidità/spostamento. Questa copertura è puramente preparatoria per la successiva copertura di calcoli a mano (slope-deflection e distribuzione del momento solo per elementi flessografici), e successivamente l'analisi basata sul computer (metodo di rigidità diretta) di complesso strutture. Questo capitolo si limita alla flessione, per la torsione e la shear dovrebbe consultare il Capitolo 23.

26.1 Introduzione 1087
26.1.1 Convegno di firma 1088
26.1.2 Metodi di analisi 1088
26.2 Deformazioni assiali 1089
26.3 Flessibili 1090
26.3.1 Equazione differenziale . . . 1091
26.3.2 Forze di estremità nodale per ceppi iniziali 1094
26.3.3 Forze equivalenti nodali per elementi flessografici 1095

26.1 Introduzione

1 Ricordiamo da §40.8 L'analisi strutturale è un problema di valore limite, dove c'è una dualità tra forze e spostamenti: si conosce, e poi cerchiamo di determinare l'altro attraverso un'analisi appropriata.

2 In tal modo, abbiamo operato lungo Γ_t (Fig. 40.8) quando si conosce la forza e si cerca di determinare gli spostamenti, il metodo della flessibilità è indicato anche come un *Metodo di forza*.

3 Ora, per il bene di questo capitolo, lavoreremo lungo Γ_u dove sono noti gli spostamenti, e

COPIA DI REVISIONE

cercheremo le forze corrispondenti (soddisfacendo l'equilibrio e che si tradurranno in quei luoghi conosciuti).

4 Questo è un passo importante per noi *successivamente* sviluppare il metodo di rigidità che è complementare al metodo flessibilità/forza già discusso, Tabella 26.1.

Tabella 26.1: Stiffness vs metodi di flessibilità

	Flessibilità	**Stiffa**
Variabile primaria (d.o.f.)	Forze	Sviluppi
Indeterminanza	Statistiche	Kinematico
Slocamento della forza	Dislocazione(Force)/Struttura	Forza (Spostamento)/Elementi
Governare le relazioni	Compatibilità di spostamento	Equilibrio

26.1.1 Convegno di firma

5 considerando che il metodo di flessibilità aveva una convenzione dei segni scelta arbitrariamente, Fig. 21.5, quello associato al metodo di rigidità è coerente con il sistema di coordinate degli elementi locali; quindi definiamo un momento positivo come uno che è in senso antiorario, 26.1.

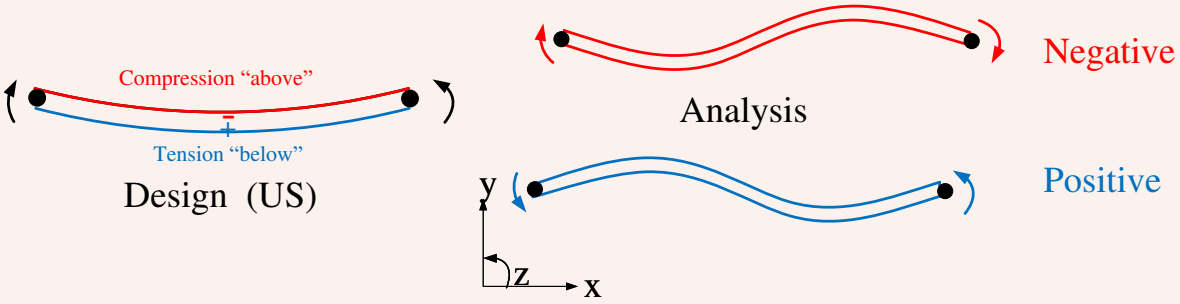


Figura 26.1: Convegno di segnale per il metodo di rigidità

26.1.2 Metodi di analisi

6 Questo capitolo fornisce una nozione introduttiva che sarà applicabile al metodo di rigidità, e ci sono tre approcci basati su questo metodo:

Slope Deflection: (Mohr, 1892) n equazioni lineari con n ignoti, dove n è il grado di indeterminanza cinematica (cioè numero totale di spostamenti/rotazione indipendenti).

Distribuzione del momento: (Cross, 1930) Metodo iterativo da risolvere per n spostamenti e forze interne corrispondenti nelle strutture flessografiche.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Metodo di Stiffness diretto: (≃1960) la dichiarazione formale del metodo di rigidità e gettato in forma matrice è di gran lunga il metodo più potente di analisi strutturale.

I primi due metodi si prestano al calcolo a mano (capitolo 27), e il terzo a un'analisi basata su computer (estensivamente coperta dalla parte 39 attraverso più capitoli).

7 In tutti i metodi di rigidità, avremo bisogno di prevalere noi stessi *prima di* Cominciamo l'analisi con equazione delle forze in termini di spostamento noto.

8 Va notato che i metodi di flessibilità e rigidità funzionano a livelli diversi, e cercano diverse sconosciute, Fig. 26.2.

Tabella 26.2: Analisi della flessibilità e dello stress

Metodo	Livello	Analisi
Flessibilità	Struttura	Sviluppi in termini di forze
Stiffa	Elemento di base	Forze in termini di spostamento

26.2 Deformazioni assiali

9 Dalla forza dei materiali:

$$\sigma = E\varepsilon \Rightarrow \underbrace{A\sigma}_{P} = \frac{AE}{L}\underbrace{\Delta}_{1} \tag{26.1}$$

10 Per uno spostamento di unità, la forza applicata dovrebbe essere uguale a $\frac{AE}{L}$.

11 Dalle statiche, la forza all'altra estremità deve essere uguale e opposta.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

26.3 Flessibili

12 Obiettivo: risolvere per *forze in termini di spostamenti noti* in un raggio: Quattro forze sconosciute ($V_1^?, V_2^?, M_1^?$ e $M_2^?$) in termini di quattro spostamenti noti ($v_1^\checkmark, v_2^\checkmark, \theta_1^\checkmark$ e $\theta_2^\checkmark$), Fig. 26.2.

$$
\begin{aligned}
V_1^? &= V_1^?(v_1^\checkmark, \theta_1^\checkmark, v_2^\checkmark, \theta_2^\checkmark) \\
M_1^? &= M_1^?(v_1^\checkmark, \theta_1^\checkmark, v_2^\checkmark, \theta_2^\checkmark) \\
V_2^? &= V_2^?(v_1^\checkmark, \theta_1^\checkmark, v_2^\checkmark, \theta_2^\checkmark) \\
M_2^? &= M_2^?(v_1^\checkmark, \theta_1^\checkmark, v_2^\checkmark, \theta_2^\checkmark)
\end{aligned}
$$

Con quattro sconosciuti, avremo bisogno di quattro equazioni, due saranno fornite dai *equazione differenziale lineare di secondo ordine* flexure governante, e due dal *due equazioni di equilibrio*.

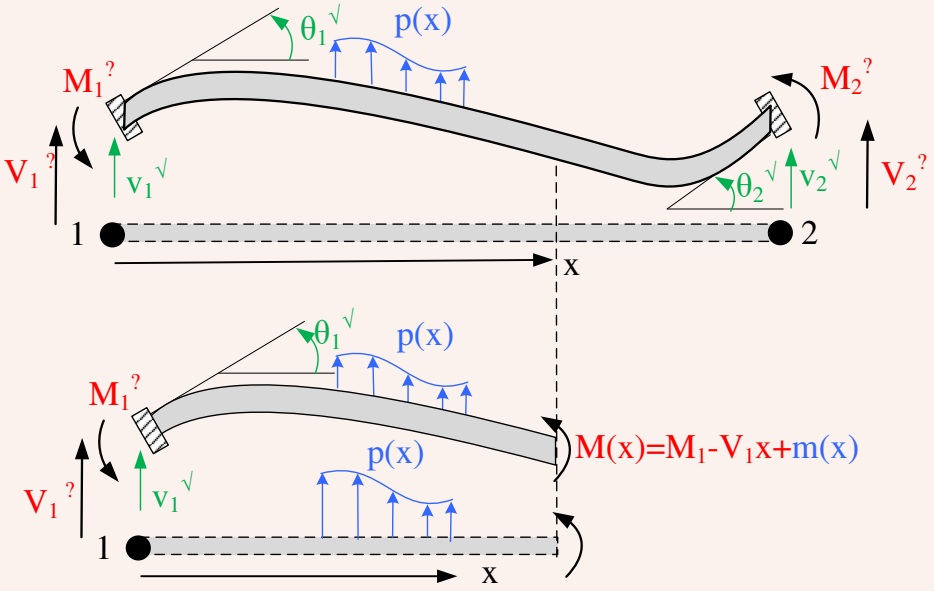


Figura 26.2: Formulazione di problemi flessibili per i termini di rigidità

COPIA DI REVISIONE

26.3.1 Equazione differenziale

13 A partire da

$$M = \underbrace{-EI\frac{d^2v}{dx^2}}_{\text{Diff Eq.}} = \underbrace{M_1^? - V_1^? x + m(x)}_{\text{Statics}}$$

dove $m(x)$ è il momento a causa del carico applicato $q(x)$ a sezione x (per carico uniformemente distribuito: $m(x) = -\frac{1}{2}wx^2$). Inserire due volte

$$-EIv' = M_1^? x - \frac{1}{2}V_1^? x^2 + f(x) + C_1$$
$$-EIv = \frac{1}{2}M_1^? x^2 - \frac{1}{6}V_1^? x^3 + g(x) + C_1 x + C_2$$

dove $f(x) = \int m(x)dx$ e $g(x) = \int f(x)dx$. Applicare le condizioni di confine $x = 0$

$$\left.\begin{array}{rl} v' &= \theta_1^{\checkmark} \\ v &= v_1^{\checkmark} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rl} C_1 &= -EI\theta_1^{\checkmark} \\ C_2 &= -EIv_1^{\checkmark} \end{array}\right.$$

poi $x = L$ e combinare con C_1 e C_2

$$\left.\begin{array}{rl} v' &= \theta_2^{\checkmark} \\ v &= v_2^{\checkmark} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rl} -EI\theta_2^{\checkmark} &= M_1^? L - \frac{1}{2}V_1^? L^2 + f(L) - EI\theta_1^{\checkmark} \\ -EIv_2^{\checkmark} &= \frac{1}{2}M_1^? L^2 - \frac{1}{6}V_1^? L^3 + g(L) - EI\theta_1^{\checkmark} L - EIv_1^{\checkmark} \end{array}\right. \tag{26.2}$$

Anche se potessimo risolvere $M_1^?$ e $V_1^?$ in termini di $v_1^{\checkmark}$, $v_2^{\checkmark}$, $\theta_1^{\checkmark}$ e $\theta_2^{\checkmark}$, procediamo

14 Dall'equilibrio,

$$V_1^? + q + V_2^? = 0 \qquad M_1^? - V_1^? L + m(L) + M_2^? = 0$$

dove $q = \int_0^L w(x)dx$,

15 Così

$$V_1^? = \frac{(M_1^? + M_2^?)}{L} + \frac{1}{L}m(L) \qquad V_2^? = -(V_1^? + q) \tag{26.3}$$

16 Sostituire V_1 in θ_2 e v_2 (Eq. 26.2)

$$\left\{\begin{array}{rl} M_1^? - M_2^? &= \frac{2EI_z}{L}\theta_1^{\checkmark} + \frac{2EI_z}{L}\theta_2^{\checkmark} + m(L) - \frac{2}{L}f(L) \\ 2M_1^? - M_2^? &= \frac{6EI_z}{L}\theta_1^{\checkmark} - \frac{6EI_z}{L^2}v_1^{\checkmark} - \frac{6EI_z}{L^2}v_2^{\checkmark} + m(L) - \frac{6}{L^2}g(L) \end{array}\right.$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

17 Risolvere per i momenti

$$M_1 = \underbrace{\frac{2EI_z}{L}\left(2\theta_1^{\checkmark} + \theta_2^{\checkmark}\right) - \frac{6EI_z}{L^2}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{NEF_{12}}_{II} \tag{26.4}$$

$$M_2 = \underbrace{\frac{2EI_z}{L}\left(\theta_1^{\checkmark} + 2\theta_2^{\checkmark}\right) - \frac{6EI_z}{L^2}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{NEF_{21}}_{II} \tag{26.5}$$

dove In Eq. 26.4 e 26.5 se lasciamo $\Delta = v_2 - v_1$ (*lo spostamento relativo*), $\psi = \Delta/L$ (*rotazione dell'accordo del membro*), e $K = I/L$ (*fattore di rigidità*[1]) NEF *forze equivalenti nodali* , cioè sostituiamo il carico dell'elemento da un insieme equivalente di forze nodali.

18 Infine, queste equazioni possono essere riscritte come:

$$M_1 = 2EK(2\theta_1 + \theta_2 - 3\psi) + NEF_1 \tag{26.6}$$

$$M_2 = 2EK(\theta_1 + 2\theta_2 - 3\psi) + NEF_2 \tag{26.7}$$

Nota: ψ sarà positivo se in senso antiorario, negativo altrimenti.

19 Da Eq. 26.6 e 26.7, se un nodo ha uno spostamento ΔAllora *entrambi* i momenti negli elementi adiacenti avranno lo stesso segno, ma i momenti in elementi su ogni lato del nodo avranno segni diversi.

$$\Psi_{21} = \frac{v_2 - v_1}{2}$$

$$K = \frac{I}{L} \text{ Relative stiffness}$$

$$NEF_1 = \frac{2}{L^2}\left[Lf(L) - 3g(L)\right]$$

$$NEF_2 = -\frac{1}{L^2}\left[L^2 m(L) - 4Lf(L) + 6g(L)\right]$$

20 NEF_1 e NEF_2 sono i *momenti di fine* per $\theta_1 = \theta_2 = 0$ e $v_1 = v_2 = 0$. Quelli saranno derivati separatamente §26.3.3. Per i tipi di carico più comuni, sono tabulati in Tabella 26.3.

21 In Eq. 26.4 e 26.5 osserviamo che i momenti si sono sviluppati alla fine di un membro sono causati da: I) rotazione e spostamenti finali; e II) membri fissi.

[1] K sarà definito come $K = 4EI/L$ nel metodo di distribuzione del momento, e come matrice nel metodo diretto della rigidità.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 26.3: Forze equivalenti nodali per carichi semplici

Caricamento	NEF_1	NEF_2
Carico uniforme w	$\frac{wL^2}{12}$	$-\frac{wL^2}{12}$
Carico centrale	$\frac{PL}{8}$	$-\frac{PL}{8}$

22 Possiamo sostituire quelle espressioni in Eq. 26.3 e risolvere per le forze di taglio:

$$V_1 = \underbrace{\frac{6EI_z}{L^2}\left(\theta_1^{\checkmark} + \theta_2^{\checkmark}\right) - \frac{12EI_z}{L^3}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{V_1^F}_{II} \tag{26.8}$$

$$V_2 = \underbrace{-\frac{6EI_z}{L^2}\left(\theta_1^{\checkmark} + \theta_2^{\checkmark}\right) + \frac{12EI_z}{L^3}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{V_2^F}_{II} \tag{26.9}$$

dove

$$V_1^F = \frac{6}{L^3}\left[Lf(L) - 2g(L)\right]$$
$$V_2^F = -\left[\frac{6}{L^3}\left[Lf(L) - 2g(L)\right] + q\right]$$

23 È molto importante notare che le equazioni derivate si basano su: *Equilibrio*, *Stress-strain* *Compatibilità*.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Definition 26.1: Relazioni di spostamento della forza in un raggio

$$V_1 = \underbrace{\frac{6EI_z}{L^2}\left(\theta_1^{\checkmark} + \theta_2^{\checkmark}\right) - \frac{12EI_z}{L^3}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{V_1^F}_{II}$$

$$V_2 = \underbrace{-\frac{6EI_z}{L^2}\left(\theta_1^{\checkmark} + \theta_2^{\checkmark}\right) + \frac{12EI_z}{L^3}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{V_2^F}_{II}$$

$$M_1 = \underbrace{\frac{2EI_z}{L}\left(2\theta_1^{\checkmark} + \theta_2^{\checkmark}\right) - \frac{6EI_z}{L^2}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{NEF_{12}}_{II}$$

$$M_2 = \underbrace{\frac{2EI_z}{L}\left(\theta_1^{\checkmark} + 2\theta_2^{\checkmark}\right) - \frac{6EI_z}{L^2}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{NEF_{21}}_{II}$$

26.3.2 Forze di estremità nodale per ceppi iniziali

24 In presenza di *carico termico* (o ceppi iniziali), le forze equivalenti nodali possono essere facilmente determinate come segue:

Truss

$$F_1^T = -AE\alpha\Delta T \qquad F_2^T = AE\alpha\Delta T$$

Signora

$$F_1^T = -AE\alpha\Delta T^{avg}; \qquad F_2^T = AE\alpha\Delta T^{avg}$$
$$M_1^T = \frac{EI\alpha(\Delta T^{top} - \Delta T^{bot})}{h}; \qquad M_2^T = -\frac{EI\alpha(\Delta T^{top} - \Delta T^{bot})}{h}$$

where α is the coefficient of thermal expansion and

$$T^{avg} = \frac{\Delta T^{top} + \Delta T^{bot}}{2}$$

25 Per le forze iniziali (come ad esempio *membri pre-stressati*) si deve semplicemente specificare $\alpha\Delta T$ per la prima tensione indotta dalla prestressante

26 Nel file di dati dell'ingresso del carico è sufficiente specificare $\alpha\Delta T$ per la tromba termicamente caricata, e $\alpha(\Delta T^{top} - \Delta T^{bot})$ e h per raggi.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

26.3.3 Forze equivalenti nodali per elementi flessografici

27 Dalle equazioni precedenti,

$$m(x) = \text{ moment due to the applied loads at section } x$$
$$f(x) = \int m(x)dx; \quad g(x) = \int f(x)dx; \quad q(x) = \int p(x)dx$$
$$\text{total load on the span}$$

e

$$M_1^F = \frac{2}{L^2}\left[Lf(L) - 3g(L)\right]$$
$$M_2^F = -\frac{1}{L^2}\left[L^2 m(L) - 4Lf(L) + 6g(L)\right]$$
$$V_1^F = \frac{6}{L^3}\left[Lf(L) - 2g(L)\right]$$
$$V_2^F = -\frac{6}{L^3}\left[Lf(L) - 2g(L)\right] - q$$

26.3.3.1 Cariche distribuite uniformemente

28 Per un carico uniformemente distribuito w per tutta la durata,

$$m(x) = -\frac{1}{2}wx^2; \quad f(x) = -\frac{1}{6}wx^3; \quad g(x) = -\frac{1}{24}wx^4; \quad q = wL$$

29 Sostituire

$$M_1^F = \frac{2}{L^2}\left[L\left(-\frac{1}{6}wL^3\right) - 3\left(-\frac{1}{24}wL^4\right)\right] = \frac{wL^2}{12}$$
$$M_2^F = -\frac{1}{L^2}\left[L^2\left(-\frac{1}{2}wL^2\right) - 4L\left(-\frac{1}{6}wL^3\right) + 6\left(-\frac{1}{24}wL^4\right)\right] = \frac{wL^2}{12}$$
$$V_1^F = \frac{6}{L^3}\left[L\left(-\frac{1}{6}wL^3\right) - 2\left(-\frac{1}{24}wL^4\right)\right] = \frac{wL}{2}$$
$$V_2^F = -\frac{6}{L^3}\left[L\left(-\frac{1}{6}wL^3\right) - 2\left(-\frac{1}{24}wL^4\right)\right] - wL = \frac{wL}{2}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

26.3.3.2 Carico concentrato

30 Utilizzare la funzione passo unità per trovare $m(x)$. Per un carico concentrato P agire in a dalla sinistra con $b = L - a$,

$$\begin{aligned} m(x) &= -P(x-a)H_a && \rightarrow m(L) = -Pb \\ f(x) &= -\frac{1}{2}P(x-a)^2H_a && \rightarrow f(L) = -\frac{1}{2}Pb^2 \\ g(x) &= -\frac{1}{6}P(x-a)^3H_a && \rightarrow g(L) = -\frac{1}{6}Pb^3 \end{aligned}$$

dove definiamo $H_a = 0$ if $x < a$e $H_a = 1$ if $x \geq a$e

$$\begin{aligned} q &= P \\ M_1^F &= \frac{2}{L^2}\left[L\left(-\frac{1}{2}Pb^2\right) - 3\left(-\frac{1}{6}Pb^3\right)\right] = \frac{Pb^2a}{L^2} \\ M_2^F &= -\frac{1}{L^2}\left[L^2(-Pb) - 4L\left(-\frac{1}{2}Pb^2\right) + 6\left(-\frac{1}{6}Pb^3\right)\right] = \frac{Pb}{1^2}\left(L^2 - 2Lb + b^2\right) = \frac{Pba^2}{L^2} \\ V_1^F &= \frac{6}{L^3}\left[L\left(-\frac{1}{2}Pb^2\right) - 2\left(-\frac{1}{6}Pb^3\right)\right] = -\frac{Pb^2}{L^3}(3L - 2b) = \frac{Pb^2}{L^3}(3a + b) \\ V_2^F &= -\left(\frac{6}{L^3}\left[L\left(-\frac{1}{2}Pb^2\right) - 2\left(-\frac{1}{6}Pb^3\right)\right] + P\right) = \frac{Pa^2}{L^3}(a + 3b) \end{aligned}$$

31 Se il carico viene applicato a metà della superficie ($a = B = L/2$), poi l'equazione precedente riduce a

$$\begin{aligned} M_1^F &= -\frac{PL}{8}; & M_2^F &= \frac{PL}{8}; \\ V_1^F &= -\frac{P}{2}; & V_2^F &= -\frac{P}{2}; \end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Il Discobolus (X secolo a.C., Grecia antica)

Cattura un corpo al picco della tensione, dove gli spostamenti determinano le forze necessarie per lanciare il discus.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale ⓒ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

Capitolo 27

Metodo di rigidezza manuale

Abstract

Radicati nel metodo di spostamento (cioè rigidità), sono due metodi che sono stati sviluppati all'inizio del XX secolo e che si prestano ai calcoli delle mani. Questi metodi sembrano essere stati "grand-fathered" nei libri di analisi strutturale fino ai giorni nostri, anche se sono più un valore pedagogico in tempi moderni. Tuttavia, questo capitolo metterà in evidenza alcuni concetti (come la distribuzione di momenti sulla base di rigidità relative nelle connessioni), e può occasionalmente fornire un metodo di analisi per una struttura semplice. Entrambi i metodi sono limitati ai membri flessografici. La sezione finale si rivolge alle controparti matematiche alle soluzioni dei metodi di distribuzione del tempo (Gauss-Jordan) e della difesa delle pendici.

27.1 Introduzione 1098
27.2 Metodo delle deformazioni angolari: soluzione diretta 1099
27.2.1 Esempi 1101
27.3 Distribuzione dei momenti 1109
27.3.1 Introduzione 1110
27.4 Slope deflection; distribuzione del momento; Gauss-Seidel 1115
27.4.1 Ex 27.8: Distribuzione/scarico di slittamento/ Gauss-Seidel 1115

27.1 Introduzione

1 Il capitolo precedente ha posto il lavoro di base per la rigidità (slocamento) metodo sviluppando relazioni per le forze in termini di spostamenti noti nei membri flessografici. 23.

2 Mentre il metodo di flessibilità (forza) si presta al calcolo a mano, il metodo della rigidità viene fornito in due varietà: calcolo e automazione delle mani attraverso un programma informatico (metodo Stiffness diretto, capitolo 44).

COPIA DI REVISIONE

3 Quindi, questo capitolo coprirà il metodo di calcolo tradizionale a base manuale: Slope Deflection e Moment Distribution.

27.2 Metodo delle deformazioni angolari: soluzione diretta

Per il contesto storico, consultare §11.5.2

4 Il metodo è stato derivato da Bendixen, 1914 e raffinato da Maney, 1915 (§11.5.2)

5 Il metodo è illustrato per la prima volta attraverso Fig. 27.1 dove un raggio semplicemente supportato è stabilmente indeterminato al primo grado.

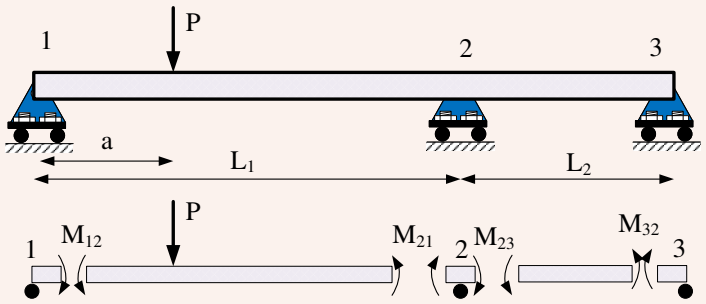


Figura 27.1: Esempio illustrativo per il metodo di deflettore del pendio

Identifichiamo il grado di indeterminanza cinematica (§40.5): tre rotazioni θ_1, θ_2e θ_3 (i.e. *tre gradi di libertà*) ai supporti.

6 Spaccare la struttura su ogni lato di restrizioni, disegnamo i diagrammi del corpo libero e presumiamo *positivo* momenti alla fine di ogni segmento. I momenti possono essere espressi in termini di rotazione sconosciuta.

7 Utilizzo delle equazioni 26.6 e 26.7 noi otteniamo

$$\begin{aligned} M_{12} &= 2EK_{12}(2\theta_1 + \theta_2) + FEM_{12}; \quad M_{21} = 2EK_{12}(\theta_1 + 2\theta_2) + FEM_{21}; \\ M_{23} &= 2EK_{23}(2\theta_2 + \theta_3); \qquad\qquad M_{32} = 2EK_{23}(\theta_2 + 2\theta_3); \end{aligned} \tag{27.1}$$

Ricordate che $K = I/L$.

COPIA DI REVISIONE

8 Abbiamo 3 sconosciuti θ_1, θ_2e θ_3 e abbiamo bisogno di tre equazioni di equilibrio[1]. Scriviamo uno *equazioni di equilibrio per ogni supporto*

$$\begin{aligned} M_{12} &= 0 \\ M_{21} + M_{23} &= 0 \\ M_{32} &= 0 \end{aligned}$$

Sostituire, otteniamo:

$$\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 4K_{12} & 2K_{12} & 0 \\ 2K_{12} & 4(K_{12}+K_{23}) & 2K_{23} \\ 0 & 2K_{23} & 4K_{23} \end{bmatrix}}_{\text{Stiffness Matrix}} \begin{Bmatrix} \theta_1^? \\ \theta_2^? \\ \theta_3^? \end{Bmatrix}}_{F_{int}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -\frac{FEM_{12}}{2EK_{12}} \\ -\frac{FEM_{21}}{2E} \\ 0 \end{Bmatrix}}_{F_{ext}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Se il momento di fine fissa può essere determinato separatamente, si tratta di un'equazione *equilibrio globale*.

9 Prima risolviamo per gli spostamenti, poi sostituiamo in Eq. 27.1 per determinare i momenti in ogni fine di un segmento del fascio.

10 Requisiti computazionali molto meno che per il metodo di flessibilità (o metodo di deformazione coerente) perché abbiamo implicitamente tenuto conto delle relazioni di spostamento della forza (anche se stiamo confrontando sconosciuti statici e cinematici).

Definition 27.1: Metodo di deflettore della pila

1. ketch defletto forma.
2. Identificare gradi di sostegno sconosciuti della libertà (rotazioni e deflettori).
3. Scrivere le equazioni di equilibrio a tutti i supporti in termini dei momenti finali.
4. Esprimere i momenti finali in termini di rotazione, deflettori e momenti fissi.
5. Sostituisci le espressioni ottenute nel passo precedente nelle equazioni di equilibrio.
6. Risolvi le equazioni di equilibrio per determinare la rotazione e/o deflettori del supporto sconosciuto.
7. Utilizzare le equazioni di deflettorazione del pendio per determinare i momenti finali.

[1] Nota analogia con il metodo di Equazione dei Tre Momenti (§25.3) dove abbiamo scritto una compatibilità dell'equazione di rotazione al nodo mentre qui scriviamo un'equità di equilibrio.

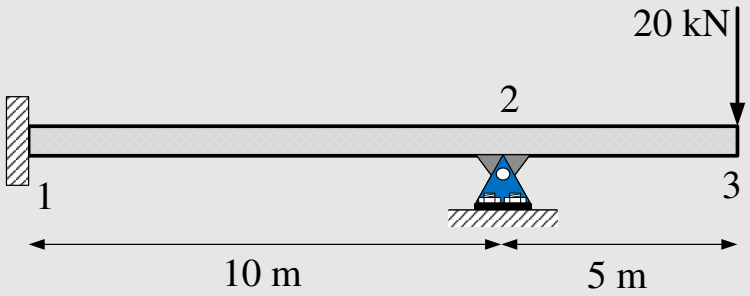
COPIA DI REVISIONE

8. Disegnare il diagramma del momento, (curante della differenza di convenzione dei segni) tra i momenti di deflettorazione del pendio e lo schema del momento.

27.2.1 Esempi

27.2.1.1 Ex 27.1: Trave a sbalzo

Cerchiamo di determinare M_{12} per il fascio seguente



1. Il fascio è kinematicamente indeterminato al terzo grado ($\theta_2,\ \Delta_3,\ \theta_3$), tuttavia sostituendo lo strapiombo da un momento di fine fisso pari a +100 kN.m a sostegno 2, si riduce il grado di indeterminanza cinematica ad uno (θ_2).
2. La relazione di equilibrio è $M_{21} + M_{23} = 0$ or $M_{21} + 100 = 0$
3. I membri terminano i momenti in termini di rotazione sono (Eq. 26.6 e 26.7)

$$M_{21} = 2EK_{12}\,(\theta_1 + 2\theta_2) = \frac{4}{10}EI\theta_2 \text{ Solve for } \theta_2$$
$$M_{12} = 2EK_{12}\,(2\theta_1 + \theta_2) = \frac{2}{10}EI\theta_2 \text{ Solve for the end moment}$$

4. Sostituire le equazioni di equilibrio, risolvere per θ_2.

$$\theta_2 = \frac{10}{4EI}M_{21}$$
$$= \frac{10}{4EI}(-100) = -\frac{250}{EI}$$

(rotazione in senso orario: -ve)

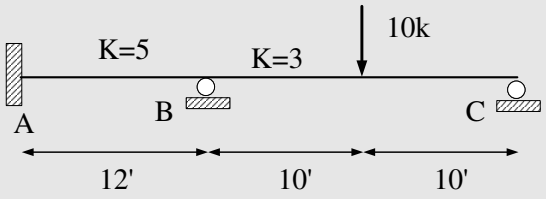
5. Sostituto e risolta per M_{12}

$$M_{12} = \frac{2}{10}EI\theta_2 = -\frac{2}{10}EI\frac{250}{EI} = -50 \text{ kN.m}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

27.2.1.2 Ex 27.2: Trave continua



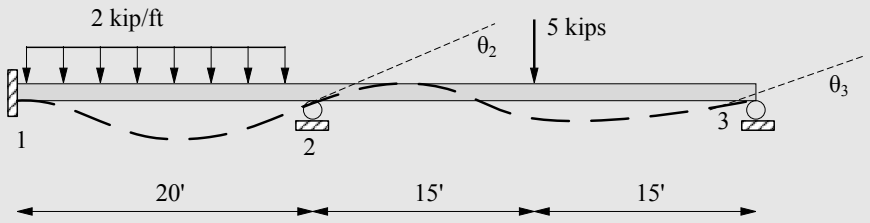
1. FEM $=PL/8 = (10)(20)/8 = 25$
2. Equazioni di equilibrio
$$M_{BA} + M_{BC} = 0; \quad M_{CB} = 0$$
3. Momento espressioni
$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}\theta_B = 2EK_{AB}\theta_B = 10E\theta_B$$
$$M_{BA} = \frac{2EI}{L}(2\theta_B + \theta_A) = 4EK_{AB}\theta_B = 20E\theta_B$$
$$M_{BC} = \frac{2EI}{L}(2\theta_B + \theta_C) + 25 = 4EK_{BC}\theta_B + 2EK_{BC}\theta_C + 25 = 12E\theta_B + 6E\theta_C + 25$$
$$M_{CB} = \frac{2EI}{L}(2\theta_C + \theta_B) - 25 = 4EK_{BC}\theta_C + 2EK_{BC}\theta_B - 25 = 6E\theta_B + 12E\theta_C - 25$$
4. Sostituire nelle equazioni di equilibrio
$$\begin{cases} 32E\theta_B + 6E\theta_C = -25 \\ 6E\theta_B + 12E\theta_C = 25 \end{cases}$$
5. Risolvere
$$\theta_B = -\frac{75}{58E} = -\frac{1.293}{E}$$
$$\theta_C = -\frac{475}{174E} = \frac{2.730}{E}$$
6. Sostituto per ottenere il momento
$$M_{AB} = 10E\theta_B = -10E\frac{75}{58E} = -12.9310$$
$$M_{BA} = 20E\theta_B = -20E\frac{75}{58E} = -25.8621$$
$$M_{BC} = 12E\theta_B + 6E\theta_c + 25 = -12E\frac{75}{58E} + 6E\frac{475}{174E} + 25 = 25.8621$$
$$M_{CB} = 6E\theta_B + 12E\theta_C - 25 = -6E\frac{75}{58E} + 12\frac{475}{174E} - 25 = 0\checkmark$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

27.2.1.3 Ex 27.3: Trave a due posti

Cerchiamo di disegnare il diagramma del momento della seguente trave



1. Gli sconosciuti sono θ_2e θ_3
2. Le relazioni di equilibrio sono $M_{21} + M_{23} = 0$ e $M_{32} = 0$
3. I momenti di fine fissa sono

$$FEM_{12} = -FEM_{21} = \frac{wL^2}{12} = \frac{(2)(20)^2}{12} = 66.67 \text{ k.ft}$$
$$FEM_{23} = -FEM_{32} = -\frac{PL}{8} = \frac{(5)(30)}{8} = 18.75 \text{ k.ft}$$

4. I membri terminano i momenti in termini di rotazione sono (Eq. 26.6 e 26.7)

$$\begin{aligned}
M_{12} &= 2EK_{12}(\theta_2) + FEM_{12} = \frac{2EI}{L_1}\theta_2 + FEM_{12} &&= \frac{EI}{10}\theta_2 + 66.67 \text{ Not used}\\
M_{21} &= 2EK_{12}(2\theta_2) + FEM_{21} = \frac{4EI}{L_1}\theta_2 + FEM_{21} &&= \frac{EI}{5}\theta_2 - 66.67\\
M_{23} &= 2EK_{23}(2\theta_2 + \theta_3) + FEM_{23} = \frac{2EI}{L_2}(2\theta_2 + \theta_3) + FEM_{23} &&= \frac{EI}{7.5}\theta_2 + \frac{EI}{15}\theta_3 + 18.75\\
M_{32} &= 2EK_{23}(\theta_2 + 2\theta_3) + FEM_{32} = \frac{2EI}{L_2}(\theta_2 + 2\theta_3) + FEM_{32} &&= \frac{EI}{15}\theta_2 + \frac{EI}{7.5}\theta_3 - 18.75
\end{aligned}$$

5. Sostituire le equazioni di equilibrio

$$\frac{EI}{5}\theta_2 - 66.67 + \frac{EI}{7.5}\theta_2 + \frac{EI}{15}\theta_3 + 18.75 = 0$$
$$\frac{EI}{15}\theta_2 + \frac{EI}{7.5}\theta_3 - 18.75 = 0$$

or

$$\underbrace{EI\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{Stiffness Matrix}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}}_{\text{Internal Force}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} 718.8 \\ 281.25 \end{Bmatrix}}_{\text{External Force}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

che darà $EI\theta_2 = 128.48$ e $EI\theta_3 = 76.38$

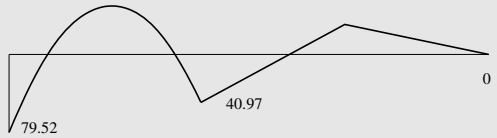
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

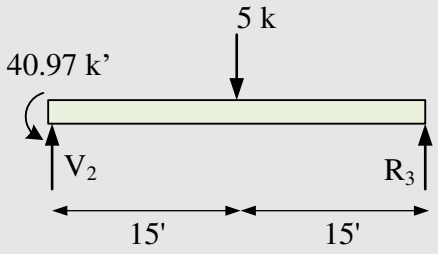
6. Sostituire per i momenti

$$
\begin{aligned}
M_{12} &= \frac{128.48}{10} + 66.67 && = 79.52 \text{ k.ft} \\
M_{21} &= \frac{128.48}{5} - 66.67 && = -40.97 \text{ k.ft} \\
M_{23} &= \frac{128.48}{7.5} + \frac{76.38}{15} + 18.75 && = 40.97 \text{ k.ft} \checkmark \\
M_{32} &= \frac{128.48}{15} + \frac{76.38}{7.5} - 18.75 && = 0 \text{ k.ft} \checkmark
\end{aligned}
$$

Notare le ultime due equazioni sono state scritte semplicemente per controllare i nostri calcoli.

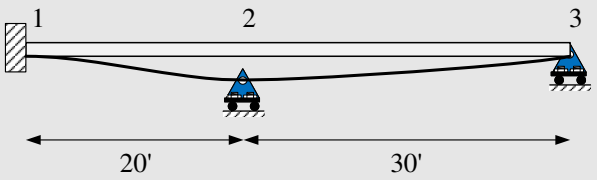


7. Si noti che il momento di mezza stagione deve essere separatamente calcolato dalle equazioni di equilibrio per completare il diagramma.
8. La reazione a 3 è ottenuta da statici



$$15(5) - 30R_3 - 40.97 = 0 \Rightarrow R_3 = 1.134$$
$$V_2 = 5 - 1.134 = 3.77$$

27.2.1.4 Ex 27.4: Trave a due larghi, deflettore iniziale



COPIA DI REVISIONE

1. Poiché stiamo effettuando un'analisi elastica lineare, possiamo analizzare separatamente il fascio per l'insediamento di supporto e poi aggiungere i momenti a quelli dovuti ai carichi applicati.
2. Gli sconosciuti sono θ_2e θ_3
3. Le relazioni di equilibrio sono $M_{21} + M_{23} = 0$ e $M_{32} = 0$
4. I membri terminano i momenti in termini di rotazione sono (Eq. 26.6 e 26.7)

$$\begin{aligned}
M_{12} &= 2EK_{12}\left(\theta_2 - 3\frac{\Delta}{L_{12}}\right) = \frac{2EI}{20}\left(\theta_2 + 3\frac{0.5}{20}\right)\\
&= \frac{EI}{10}\theta_2 + \frac{3EI}{400}\\
M_{21} &= 2EK_{12}\left(2\theta_2 - 3\frac{\Delta}{L_{12}}\right) = \frac{2EI}{20}\left(2\theta_2 + 3\frac{0.5}{20}\right)\\
&= \frac{EI}{5}\theta_2 + \frac{3EI}{400}\\
M_{23} &= 2EK_{23}\left(2\theta_2 + \theta_3 - 3\frac{\Delta}{L_{23}}\right) = \frac{2EI}{30}\left(2\theta_2 + \theta_3 - 3\frac{0.5}{30}\right)\\
&= \frac{EI}{7.5}\theta_2 + \frac{EI}{15}\theta_3 + \frac{EI}{300}\\
M_{32} &= 2EK_{23}\left(\theta_2 + 2\theta_3 - 3\frac{\Delta}{L_{23}}\right) = \frac{2EI}{30}\left(\theta_2 + 2\theta_3 - 3\frac{0.5}{30}\right)\\
&= \frac{EI}{15}\theta_2 + \frac{EI}{7.5}\theta_3 + \frac{EI}{300}
\end{aligned}$$

5. Sostituire le equazioni di equilibrio

$$\begin{aligned}
\frac{EI}{5}EI\theta_2 + \frac{3EI}{400} + \frac{EI}{15}\theta_3 + \frac{EI}{300} &= 0\\
\frac{EI}{15}\theta_2 + \frac{EI}{7.5}\theta_3 + \frac{5EI}{300} &= 0
\end{aligned}$$

or

$$\underbrace{\underbrace{EI\begin{bmatrix}100 & 20\\ 20 & 40\end{bmatrix}}_{\text{Stiffness Matrix}}\begin{Bmatrix}\theta_2\\ \theta_3\end{Bmatrix}}_{\text{Internal Force}} - \underbrace{EI\begin{Bmatrix}-\frac{13}{4}\\ -1\end{Bmatrix}}_{\text{External Force}} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

che darà $\theta_2 = -\frac{5.5}{180} = -0.031$ radians e $\theta_3 = \frac{-1+\frac{5.5}{9}}{40} = -0.0097$ radians

6. Così aggiuntivo momenti a causa dell'insediamento sono

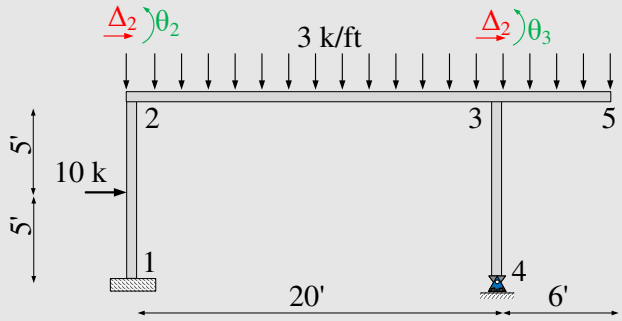
$$\begin{aligned}
M_{12} &= \frac{EI}{10}(-0.031) + \frac{3EI}{400} = 0.0044EI\\
M_{21} &= \frac{EI}{5}(-0.031) + \frac{3EI}{400} = 0.0013EI\\
M_{23} &= \frac{EI}{7.5}(-0.031) + \frac{EI}{15}(-0.0097) + \frac{EI}{300} = -0.0013EI\checkmark\\
M_{32} &= \frac{EI}{15}\theta_2 + \frac{EI}{7.5}(0.0097) + \frac{EI}{300} = 0.\checkmark
\end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

27.2.1.5 Ex 27.5: Telaio

Determinare i momenti finali per il seguente frame dove $I = 60$ in^4 per i membri verticali e 24 in^4 per quelli orizzontali.



1. L'effetto del cantilever 35 può essere incluso sostituendolo con il suo - E' il momento finale.

$$M_3 = -wL\frac{L}{2} = -(3)(6)(3) = -54 \text{ k.ft}$$

2. Gli sconosciuti spostamenti e rotazioni sono

   - Δ_2 e θ_2 in comune 2.
   - θ_3 e θ_4 alle articolazioni 3 e 4.

   Osserviamo che a causa della mancanza di simmetria, ci sarà uno spostamento laterale nella cornice, e trascurando deformazioni assiali, $\Delta_2 = \Delta_3$.

3. Le relazioni di equilibrio sono

$$\begin{aligned} M_{21} + M_{23} &= 0 \\ M_{32} + M_{34} &= -54 \\ M_{43} &= 0 \\ V_{12} + V_{43} - 10 &= 0 \end{aligned}$$

   Abbiamo quindi quattro spostamenti sconosciuti e quattro equazioni. Tuttavia, l'ultima due equazioni sono in termini di forze di taglio, e dobbiamo avere loro in termine dei momenti finali, questo può essere raggiunto attraverso il seguente equilibrio relazioni

$$\begin{aligned} V_{12} &= \frac{M_{12} + M_{21} + 50}{L_{12}} \\ V_{43} &= \frac{M_{34} + M_{43}}{L_{34}} \end{aligned}$$

   Quindi, tutte e quattro le equazioni sono ora in termini di momenti.

4. I momenti fissi del membro 23 sono

$$\begin{aligned} M_{21}^F &= -\frac{PL}{8} = -\frac{-(10)(10)}{8} = 12.5 \text{ k.ft} \\ M_{23}^F &= -\frac{wL^2}{12} = -\frac{-(3)(20)^2}{12} = 100 \text{ k.ft} \end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

5. I membri terminano i momenti in termini di rotazione sono (Eq. 26.6 e 26.7)

$$M_{12} = 2EK_{12}\left(\theta_2 - 3\frac{\Delta_2}{L_{12}}\right) + M_{12}^F = 0.2EI(\theta_2 - 0.3\Delta_2) + 12.5$$
$$M_{21} = 2EK_{12}\left(2\theta_2 - 3\frac{\Delta_2}{L_{21}}\right) + M_{21}^F = 0.2EI(2\theta_2 - 0.3\Delta_2) - 12.5$$
$$M_{23} = 2EK_{23}\,(2\theta_2 + \theta_3) + M_{23}^F = 0.1EI(2\theta_2 + \theta_3) + 100.$$
$$M_{32} = 2EK_{32}\,(\theta_2 + 2\theta_3) + M_{32}^F = 0.1EI(\theta_2 + 2\theta_3) - 100.$$
$$M_{34} = 2EK_{34}\left(2\theta_3 + \theta_4 - \frac{3\Delta_2}{L_{34}}\right) = 0.2EI(2\theta_3 + \theta_4 - 0.3\Delta_2)$$
$$M_{43} = 2EK_{43}\left(\theta_3 + 2\theta_4 - \frac{3\Delta_2}{L_{34}}\right) = 0.2EI(\theta_3 + 2\theta_4 - 0.3\Delta_2)$$

6. Sostituire le equazioni di equilibrio e dividere per EI

$$6\theta_2 + \theta_3 - 0.6\Delta_2 = -\frac{875}{EI}$$
$$\theta_2 + 6\theta_3 + 2\theta_4 - 0.6\Delta_2 = \frac{460}{EI}$$
$$\theta_3 + 2\theta_4 - 0.3\Delta_2 = 0$$

e l'ultima equazione di equilibrio è ottenuta sostituendo V_{12} e V_{43} e moltiplicando per $10/EI$:

$$\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - 0.4\Delta_2 = -\frac{83.3}{EI}$$

or

$$\underbrace{EI\begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & -0.6 \\ 1 & 6 & 2 & -0.6 \\ 0 & 1 & 2 & -0.3 \\ 1 & 1 & 1 & -0.4 \end{bmatrix}}_{\text{Stiffness Matrix}} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} -875 \\ 460 \\ 0 \\ -83.3 \end{Bmatrix}$$

che darà

$$\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} -294.8 \\ 68.4 \\ -240.6 \\ -1,375.7 \end{Bmatrix}$$

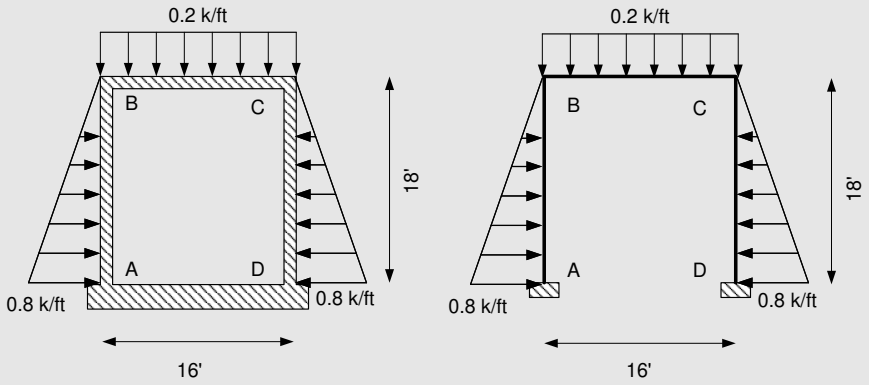
7. La sostituzione nelle equazioni di deflettore del pendio dà i movimenti finali

$$\begin{Bmatrix} M_{12} \\ M_{21} \\ M_{23} \\ M_{32} \\ M_{34} \\ M_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 36.0 \\ -47.88 \\ 47.88 \\ -115.80 \\ 61.78 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

27.2.1.6 Ex 27.6: Scatola di chiusura



1. Da simmetria $\theta_B = -\theta_C$, e alla base $\theta_A = \theta_D = 0$, quindi abbiamo solo uno sconosciuto (nessun spostamento laterale, nessun relativo spostamento verticale).
2. I momenti di fine fissa sono dati da

$$FEM_{BC} = \frac{wL^2}{12} = \frac{(0.2)(16)^2}{12} = 4.267 \text{ k.ft}$$
$$FEM_{CB} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{(0.2)(16)^2}{12} = -4.267 \text{ k.ft}$$
$$FEM_{AB} = \frac{wL^2}{20} = \frac{(0.8)(18)^2}{20} = 12.96 \text{ k.ft}$$
$$FEM_{BA} = \frac{wL^2}{30} = \frac{(0.8)(18)^2}{30} = -8.64 \text{ k.ft}$$

3. I momenti sono dati da

$$M_{BC} = \frac{2EI}{16}(2\theta_B + \underbrace{\theta_C}_{-\theta_B}) + 4.267 = \frac{EI}{8}\theta_B + 4.267$$
$$M_{BA} = \frac{2EI}{18}(2\theta_B + 0) - 8.64 = \frac{2EI}{9}\theta_B - 8.64$$
$$M_{AB} = \frac{2EI}{18}(\theta_B) + 12.96$$

4. Equilibrio al giunto B

$$\begin{aligned} M_{BA} + M_{BC} &= 0 \\ \tfrac{2EI}{9}\theta_B - 8.64 + \tfrac{EI}{8}\theta_B + 4.267 &= 0 \\ \theta_B &= -\tfrac{12.61}{EI} \end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

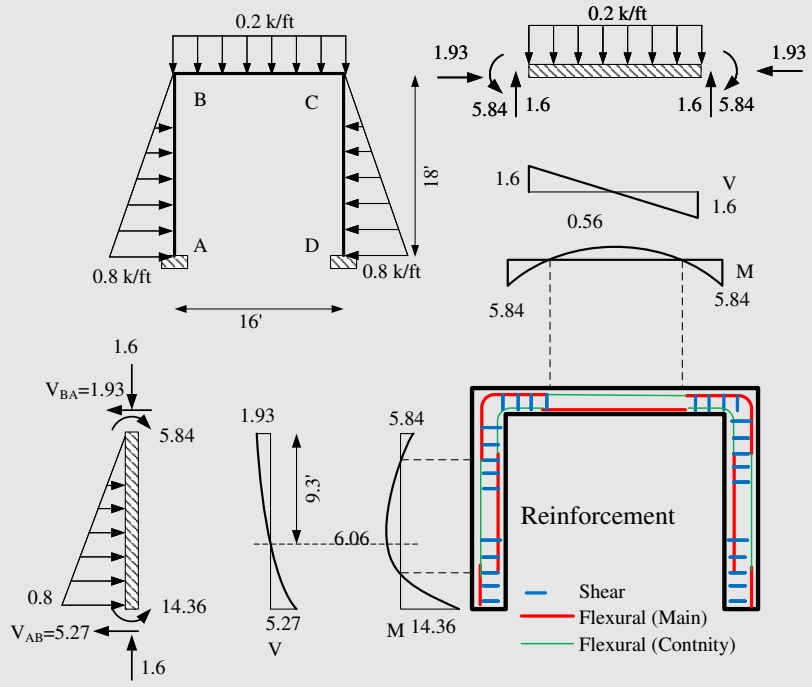
5. Sostituto θ_B per ottenere i momenti

$$M_{BC} = \frac{EI}{8}\left(\frac{12.61}{EI}\right) + 4.266 = 5.84 \text{ k.ft}\circlearrowleft$$

$$M_{AB} = \frac{EI}{9}\left(\frac{12.61}{EI}\right) + 12.96 = 14.36 \text{ k.ft}\circlearrowleft$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{9}\left(\frac{12.61}{EI}\right) - 8.64 = -5.84 \text{ k.ft}\circlearrowright$$

6. Le forze membri sono determinate dalle statiche. Attenzione, il diagramma del momento è ora basato sulla cosiddetta convenzione dei segni "design'.



27.3 Distribuzione dei momenti

Per il contesto storico, consultare §11.5.3

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

27.3.1 Introduzione

11 Nel metodo di deflettorazione del pendio, dobbiamo invertire un $n \times n$ matrice. Al momento in cui erano disponibili solo regole di scorrimento o calcolatrici meccaniche ($\simeq$ 1030), c'era la necessità di una procedura semplificata di soluzione.

12 Per tutti gli scopi pratici, il metodo di distribuzione del momento è quello della deflezione del pendio che Gaus-Seidel è al metodo Gaus - Jordan per risolvere le equazioni lineari.

13 Fisicamente, implica *bloccaggio* tutte le articolazioni → *sbloccaggio* loro in successione (uno alla volta) → momenti interni sono *"distribuita' ed equilibrata* fino a quando tutte le articolazioni hanno ruotato alla loro posizione finale (o quasi definitiva) di equilibrio[2].

14 Per comprendere meglio il metodo, devono essere definiti alcuni termini chiave, Fig. 27.2

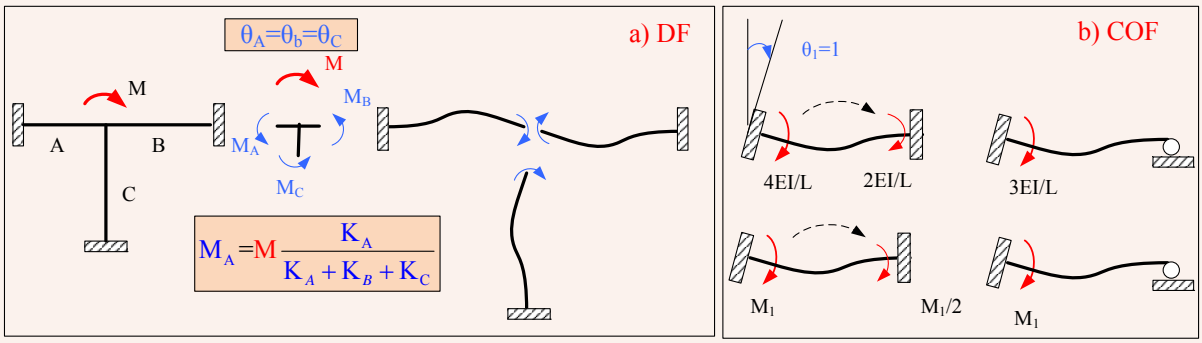


Figura 27.2: Concetti chiave della distribuzione del momento

Convenzione dei segni

15 La convenzione dei segni è la stessa di quella adottata per il metodo di deflettorazione del pendio, momento in senso antiorario*elemento finale* è positivo.

Momenti fissi

16 Ancora una volta i momenti finali fissi sono lo stesso insieme di forze definite nella deflettorazione del pendio metodo per un fascio che è rigidamente collegato a entrambe le estremità.

17 In linea con la convenzione dei segni, i momenti fissi sono i momenti causati dal carico applicato alla fine del fascio (supponendo che sia rigidamente collegato).

[2]Questo è un *tecnica di rilassamento* analogo a quello di Southwell (Southwell, 1935 PDF)

COPIA DI REVISIONE

Fattore di afflizione

18 Definiamo il *fattore di rigidità* as *il momento necessario per ruotare l'estremità di un fascio per angolo unitario di un radian, mentre l'altra estremità is fixed*. From Eq. 26.4, we set $\theta_2 = v_1 = v_2 = 0$, and $\theta_1 = 1$, questo si cederà

$$K = \frac{4EI}{L} \text{ Far End Fixed}$$

19 Si nota che questa è leggermente diversa dalla definizione indicata nella metodo di deflettorazione del pendio (I/L).

20 Se la fine lontana del fascio è incernierata piuttosto che fissa, allora avremo un *fattore di rigidità ridotto*. da Eq. 26.4 e 26.5, con $M_2 = v_1 = v_2 = 0$, noi otteniamo

$$M_2 = \frac{2EI_z}{L}(\theta_1 + 2\theta_2) = 0$$
$$\Rightarrow \theta_2 = -\frac{\theta_1}{2}$$

Sostituire M_1

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \frac{2EI_z}{L}(2\theta_1 + \theta_2) \\ \theta_2 &= -\frac{\theta_1}{2} \end{aligned}\right\} M_1 = \frac{3EI}{L}\theta_1 \text{ Far End Pinned}$$

21 Confrontando questa rigidità ridotta $\frac{3EI}{L}$ con la rigidità di un raggio, definiamo il *fattore di rigidità ridotto*

$$\text{Reduced Stiffness Factor} = \frac{K_{red}}{K} = \frac{3}{4} \text{ Far End Pinned}$$

Fattore di distribuzione (DF)

22 Se un membro è applicato a una giunzione fissa dove là è un totale n membri, poi dall'equilibrio:

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n$$

Tuttavia, da Eq. 26.6e *assumendo l'altra estremità del membro da fissare*Allora

$$M = K_1\theta + K_2\theta + \cdots + K_n\theta$$

or

$$DF_i = \frac{M_i}{M} = \frac{K_i}{\Sigma K_i}$$

23 Quindi, se un momento M viene applicato a un giunto, quindi la porzione di M portato da un membro collegato a questo giunto è proporzionale al fattore di distribuzione. Più rigido il membro, maggiore è il momento portato.

24 Analogamente, $DF = 0$ per un fine fisso, e $DF = 1$ per un supporto pin.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Fattore di carry-Over

25 Ancora da Eq. 26.6e 26.7

$$M_1 = 2EK(2\theta_1 + \theta_2 - 3\psi) + M_1^F$$
$$M_2 = 2EK(\theta_1 + 2\theta_2 - 3\psi) + M_2^F$$

osserviamo che se una estremità del fascio è trattenuta ($\theta_2 = \psi = 0$), e non c'è carico membro, quindi le equazioni precedenti si riducono a

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= 2EK(2\theta_1) \\ M_2 &= 2EK(\theta_1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow M_2 = \frac{1}{2}M_1$$

26 Pertanto, in questo caso il fattore di riporto rappresenta la frazione del M che è "portato sopra" dalla fine rotante a quella fissa.

$$CO = \frac{1}{2} \text{ Far End Fixed}$$

27 Se la fine lontana è bloccata non c'è alcun passaggio.

Definition 27.2: Distribuzione dei movimenti

1. Contrassegna tutte le rotazioni e le traduzioni.
2. Applicare il carico e determinare i momenti di fine fissa (che possono essere causati dal caricamento degli elementi, o dalla traduzione del supporto).
3. In qualsiasi giunto i l'equilibrio non è soddisfatto $M_{left}^F \neq M_{right}^F$, e il momento netto è M_i
4. Noi esecuzioniamo l'equilibrio applicando al nodo $-M_i$, in altre parole noi equilibrio le forze al nodo.
5. Quanto costa M_i va a ciascuno degli elementi collegati al nodo i dipende dal fattore di distribuzione.
6. Ma applicando una parte di $-M_i$ alla fine di un fascio, mentre l'altro è ancora vincolato, da Eq. 26.6, la metà di quel momento deve essere trasportati all'altra estremità.
7. Poi chiudiamo il nodo ie passare al nodo j dove si ripetono queste operazioni
   (a) Sommare momenti
   (b) Momenti di equilibrio
   (c) Distribuire momenti (K, DF)
   (d) Trascorrere nei momenti (CO)

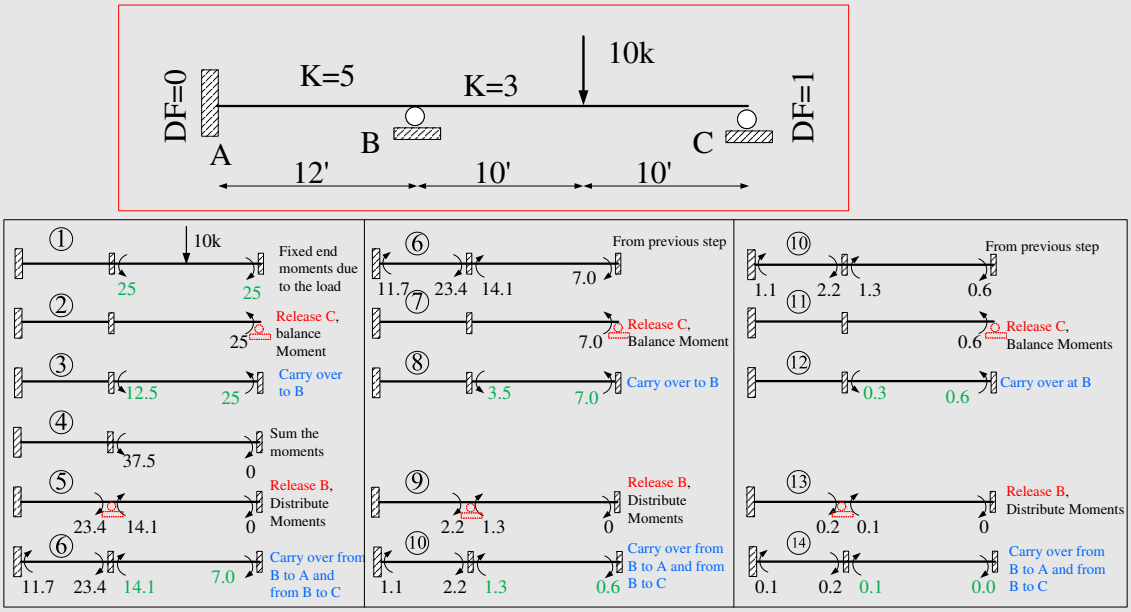
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

(e) nodo di blocco

8. Ripetere le operazioni di cui sopra fino a quando tutti i nodi sono bilanciati, quindi somma tutti i momenti.
9. Le operazioni precedenti possono essere facilmente effettuate attraverso una corretta tabulazione.

27.3.1.1 Ex 27.7: Trave continua



1. Per questo esempio (precedentemente analizzato dal metodo di deflettorazione del pendio in §27.2.1.2, i momenti di fine fissa sono calcolati come segue:

$$M^F_{BC} = \frac{PL}{8} = \frac{(10)(20)}{8} = +25.0 \text{ k.ft}$$
$$M^F_{CB} = -25.0 \text{ k.ft}$$

2. Poiché la rigidità relativa è data in ogni arco, i fattori di distribuzione sono

$$DF_{AB} = \frac{K_{AB}}{\Sigma K} = \frac{5}{\infty + 5} = 0,$$
$$DF_{BA} = \frac{K_{BA}}{\Sigma K} = \frac{5}{5+3} = 0.625,$$
$$DF_{BC} = \frac{K_{BC}}{\Sigma K} = \frac{3}{5+3} = 0.375,$$
$$DF_{CB} = \frac{K_{CB}}{\Sigma K} = \frac{3}{3} = 1.$$

COPIA DI REVISIONE

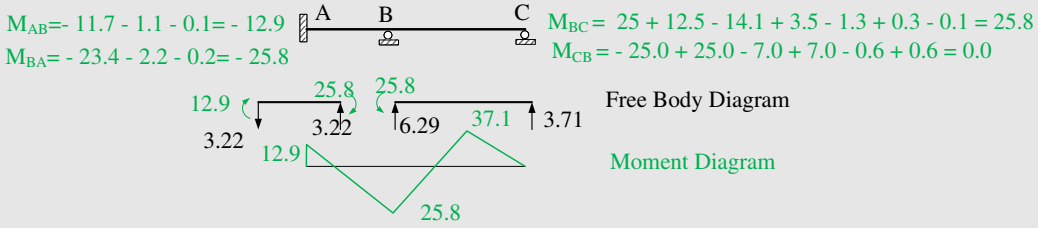
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

3. I calcoli di bilanciamento sono mostrati qui sotto.

Giunta	A		B		C	Passo	Bal.	CO
Membro	AB	BA	BC	CB				
K	5	5	3	3				
DF	0	0.625	0.375	1				
FEMME			+25.0	-25.0		①		
			+12.5	+25.0		② ③	C	BC
	-11.7	-23.4	-14.1	-7.0		④ ⑤ ⑥	B	AB; CB
			+3.5	+7.0		⑦ ⑧	C	BC
	-1.1	-2.2	-1.3	-0.6		⑨ ⑩ ❶	B	AB; CB
			+0.3	+0.6		❷ ❸	C	BC
	-0.1	-0.2	-0.1			❹	B	AB
Totale	-12.9	-25.8	+25.8	0				

4. Nota: otteniamo gli stessi risultati di quelli ottenuti dal metodo di deflettorazione del pendio §27.2.1.2.
5. La correttezza delle risposte può essere verificata in un certo senso verificando che $\Sigma M = 0$ a ogni giunto. Tuttavia, *anche se le risposte finali soddisfano questa equazione in ogni giunto, questo non è in alcun modo un controllo sui primi momenti di fine fissa*Questi momenti di fine fissa, quindi, devono essere controllati con grande cura prima di iniziare l'operazione di bilanciamento. Inoltre, a volte capita che gli errori di compensazione siano fatti nel bilanciamento e questi errori non saranno evidenti quando si verifica $\Sigma M = 0$ a ogni giunto.
6. Per disegnare il diagramma finale della cesoia e del momento, iniziamo a disegnando il diagrammi corpo libero di ogni segmento del fascio con i momenti calcolati, e poi risolviamo da statici per le reazioni:

$$12.9 + 25.8 - 12V_A = 0 \Rightarrow V_A = R_A = 3.22 \text{ k} \downarrow$$
$$V_A + V_B^L = 0 \Rightarrow V_B^L = -3.22 \text{ k} \uparrow$$
$$25.8 + (10)(10) - 20V_B^R = 0 \Rightarrow V_B^R = 6.29 \text{ k} \uparrow$$
$$6.29 + V_C - 10 = 0 \Rightarrow V_C = R_C 3.71 \text{ k} \uparrow$$
$$-V_B^L - V_B^R + R_B = 0 \Rightarrow R_B = 9.51 \text{ k} \uparrow$$
$$\text{Check: } R_A + R_B + R_C - 10 = -3.22 + 9.51 + 3.71 - 10 = 0 \checkmark$$
$$M_{BC}^+ = (3.71)(10) = 37.1 \text{ k.ft}$$



COPIA DI REVISIONE

27.4 Slope deflection; distribuzione del momento; Gauss-Seidel

28 Abbiamo analizzato lo stesso raggio con il metodo di deflettorazione del pendio e il metodo della distribuzione del momento, §27.2.1.2 e §27.3.1.1 Il secondo metodo era iterativo, e quindi ricorda naturalmente il metodo Gauss-Seidel di risolvere un sistema di equazioni lineari (coperte in §L.2.3.1).

29 Può essere facilmente dimostrato che

Definition 27.3: Distribuzione del momento, deflettore di pendenza e Gauss-Seidel

Risolvere il sistema di equazioni lineari associate ai metodi di deflettorazione del pendio iterativamente dal metodo Gaus-Seidel, quindi ogni passo corrisponde esattamente a uno corrispondente nel metodo iterativo del metodo di distribuzione del momento. Così entrambi i metodi producono gli stessi risultati approssimativi finali attraverso lo stesso numero di iterazioni.

30 Questo verrà mostrato nel prossimo esempio.

27.4.1 Ex 27.8: Distribuzione/scarico di slittamento/ Gauss-Seidel

Lo stesso fascio è stato analizzato dal metodo di deflettorazione del pendio (§27.2.1.2), e la distribuzione del momento (§27.3.1.1).

1. Ora rivisiteremo questo problema risolvendo la formulazione di deflettore del pendio, e scrivere è come
$$E\begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 32 & 6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 25 \\ -25 \end{Bmatrix}$$
Ora risolveremo questo problema con il metodo iterativo Gauss-Seidel e confrontare le iterazioni di distribuzione del momento, con quelle dei Gauss-Seidel.
2. Inizia con $\theta_C = \theta_B = 0$e poi risolvere per $\theta_C \to \theta_B \to \theta_C \cdots$ fino alla convergenza.
3. La seguente tabella riassume ciascuna delle fasi Gauss-Seidel

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$E\theta_C$	0.0	2.083	2.670	2.724	2.729	2.730
$E\theta_B$	0.0	-1.172	-1.282	-1.292	-1.293	-1.293
M_{AB}	0.0	-11.72	-12.82	-12.92	-12.93	-12.93
M_{BA}	0.0	-23.44	-25.63	-25.84	-25.86	-25.86
M_{BC}	0.0	23.44	25.63	25.84	25.86	25.86
M_{CB}	0.0	-7.03	-0.658	-0.062	-0.006	0.000

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

4. Abbiamo effettivamente recuperato iterativamente i momenti precedentemente calcolati da iterazione cinque.
5. Si noti che nella distribuzione del momento, risolviamo direttamente per i momenti mentre nel metodo di deflettorazione della pendenza prima determinamo le rotazioni e poi i momenti.
6. Finalmente confrontiamo *intermediario* valori della distribuzione del momento con quelli corrispondenti del metodo di deflettorazione del pendio

	Metodo	$n = 1$	$n = 2$
M_{AB}	MD	-11.7	-11.7-1.1=-12.8
	SD	-11.7	-12.82
M_{BA}	MD	-23.4	-23.4-2.2=-25.6
	SD	-23.44	-25.63
M_{BC}	MD	25+12.5-14.1=23.4	23.4+3.5-1.3=25.7
	SD	23.44	25.63
M_{CB}	MD	-25.0+25.0-7.0=-7.0	-7.0+7.0-0.6=-0.6
	SD	-7.03	-0.658

La distribuzione del momento corrisponde chiaramente a quella del metodo iterativo Gauss-Seidel. θ_B.



Ponte dei Sospiri, Venezia (1603). Antonio Contino.

L'arco curvato distribuisce momenti di piegatura e deviazioni, adattando l'analogia per la deflettorazione del pendio e distribuzione del momento.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 28

Linee di influenza

Abstract

Le linee di influenza offrono un metodo per determinare le reazioni di progettazione o forze interne massime che derivano da un carico in movimento in una struttura, parte integrante del design strutturale. Questo capitolo è intenzionalmente breve, completando la copertura precedente del posizionamento dei carichi, evidenziando la procedura per determinare le linee di influenza e spiega l'Müller-Breslau Principio e la sua applicazione per influenzare le linee.

28.1 Introduzione 1117
28.2 Procedura 1118
28.2.1 Ex 28.1: Linee di influenza per un raggio semplicemente supportato 1118
28.2.2 Ex 28.2: Fascio con sostegni e sporgenze 1121
28.3 Müller-Breslau Principio 1121
28.3.1 Ritiro 1121

28.1 Introduzione

1 Finora, il carico è stato fissato e non abbiamo fatto alcuna distinzione tra carico fisso (morte) e carico variabile (live). Poiché un carico variabile/Live può muoversi, una domanda chiave è come potrebbe una reazione o una forza interna in un dato punto essere influenzata dal posizionamento del carico vivo.

COPIA DI REVISIONE

Definition 28.1: Linea di influenza

Una linea di influenza mostra come la risposta (come forza della cinghia, momento di piegatura o reazione) in un punto specifico in una struttura cambia mentre il carico dell'unità si muove attraverso la struttura.

2 Questo faciliterà il posizionamento del carico per massimizzare una forza interna (sentiero, o momento).Matematicamente, una linea di influenza può essere descritta come IL_{ij} dove IL è la quantità di interesse (di nuovo, reazione, taglio o momento) in grado di libertà i a causa di un carico unitario in grado di libertà j.

28.2 Procedura

3 Per strutture staticamente determinate, IL sarà composto solo *linee di linea* segmenti tra valori ordinari critici.

4 IL per una forza di taglio in un dato luogo conterrà una discontinuità traduttiva in questo luogo. La somma delle forze di taglio positive e negative in questa posizione è uguale all'unità.

5 Eccetto in una posizione interna di cerniera, la pendenza alla forza taglio IL sarà lo stesso su ogni lato della sezione critica dal momento che il momento di flessione è continuo nella sezione critica.

6 Allo stesso modo, IL per un momento di piegatura conterrà una discontinuità rotazionale unitaria al punto in cui viene valutato il momento di curvatura.

7 Due metodi:

Equilibrio: Scrivere un'equazione per la funzione che viene determinata, ad esempio, l'equità della cinghia, del momento o della forza assiale indotta a un punto a causa dell'applicazione di un carico unitario in qualsiasi altra posizione sulla struttura.

Müller Breslau Principio disegnare linee d'influenza qualitative, che sono direttamente proporzionali alla linea effettiva dell'influenza.

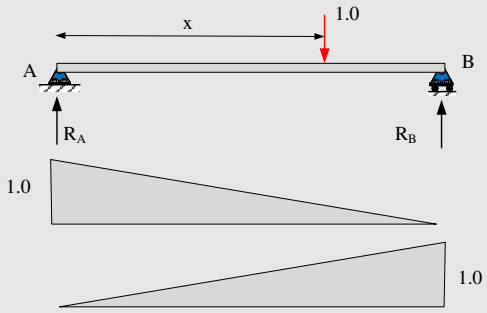
28.2.1 Ex 28.1: Linee di influenza per un raggio semplicemente supportato

Un carico concentrato di magnitudo 1 si sposta da A a B attraverso il fascio semplicemente supportato AB. Cerchiamo di tracciare linee d'influenza per reazioni A e B, e per la cesoia e il momento C.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Reazione



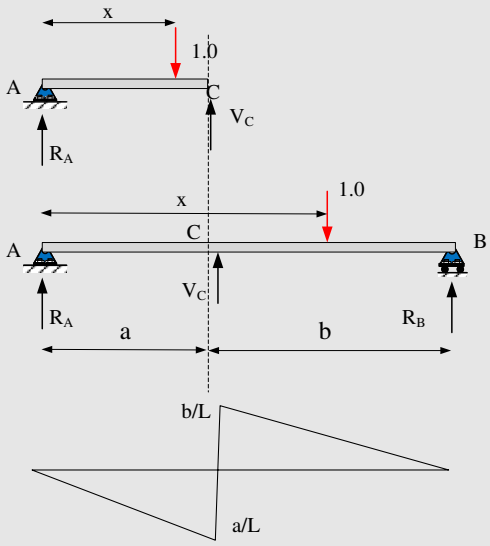
Equilibrio

$$\Sigma M_B = 0$$
$$R_A L = 1.(L - x)$$
$$\Rightarrow R_{Ax} = 1 - \frac{x}{L}$$

Equazione lineare in x per la reazione. Anche se non lo so

$$\Sigma M_A = 0$$
$$R_B L = 1.0x \Rightarrow R_{Bx} = \frac{x}{L}$$

Taglio



COPIA DI REVISIONE

Segmento AC

$$\curvearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow R_A(L) - (L-x)(1) = 0 \Rightarrow R_A = 1 - \frac{x}{L}$$

V a C per carico unitario a x (a sinistra di C):

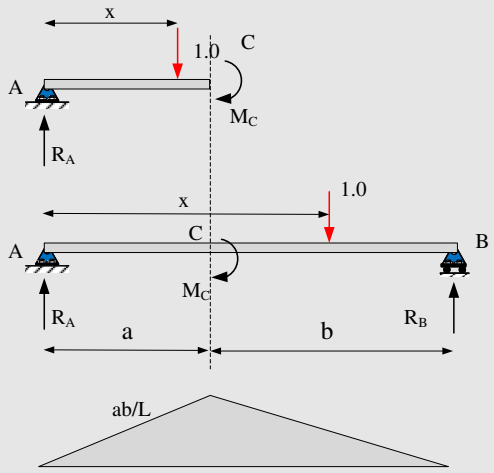
$$V_{Cx}^{-} = R_A - 1.0 = \left(1 - \frac{x}{L}\right) - 1.0 = -\frac{x}{L}$$

Quando $x = 0$, $V_{CA} = 0$e quando $x = a$ (solo prima del punto) C), $V_{CC} = -a/L$ Il carico unitario è al di là del segmento AC

$$V_{Cx}^{+} = R_A = 1 - \frac{x}{L}$$

Quando $x = a$ (solo dopo il punto C), $V_{CC} = 1 - a/L = (L-a)/L = b/L$ e quando $x = L$, $V_{CB} = 1 - L/L = 0$

Momento



$$M_{Cx}^{-} = aR_A - 1.0(a-x) = a\left(1 - \frac{x}{L}\right) - (a-x) = a - \frac{ax}{L} - a + x = -\frac{ax}{L} + x$$

Quando $x = 0$, $M_{Cx} = 0$e quando $x = a$ (solo poco prima del punto) C),

$$M_{CC} = -a^2/L + a = (-a^2 + aL)/L = a(L-a)/L = ab/L$$

Il carico unitario è al di là del segmento AC

$$M_{Cx}^{+} = aR_A = a(1 - \frac{x}{L}) = a - \frac{ax}{L}$$

Quando $x = a$ (solo dopo il punto C),

$$M_{CC} = a - a^2/L = (aL - a^2)/L = a(L-a)/L = ab/L$$

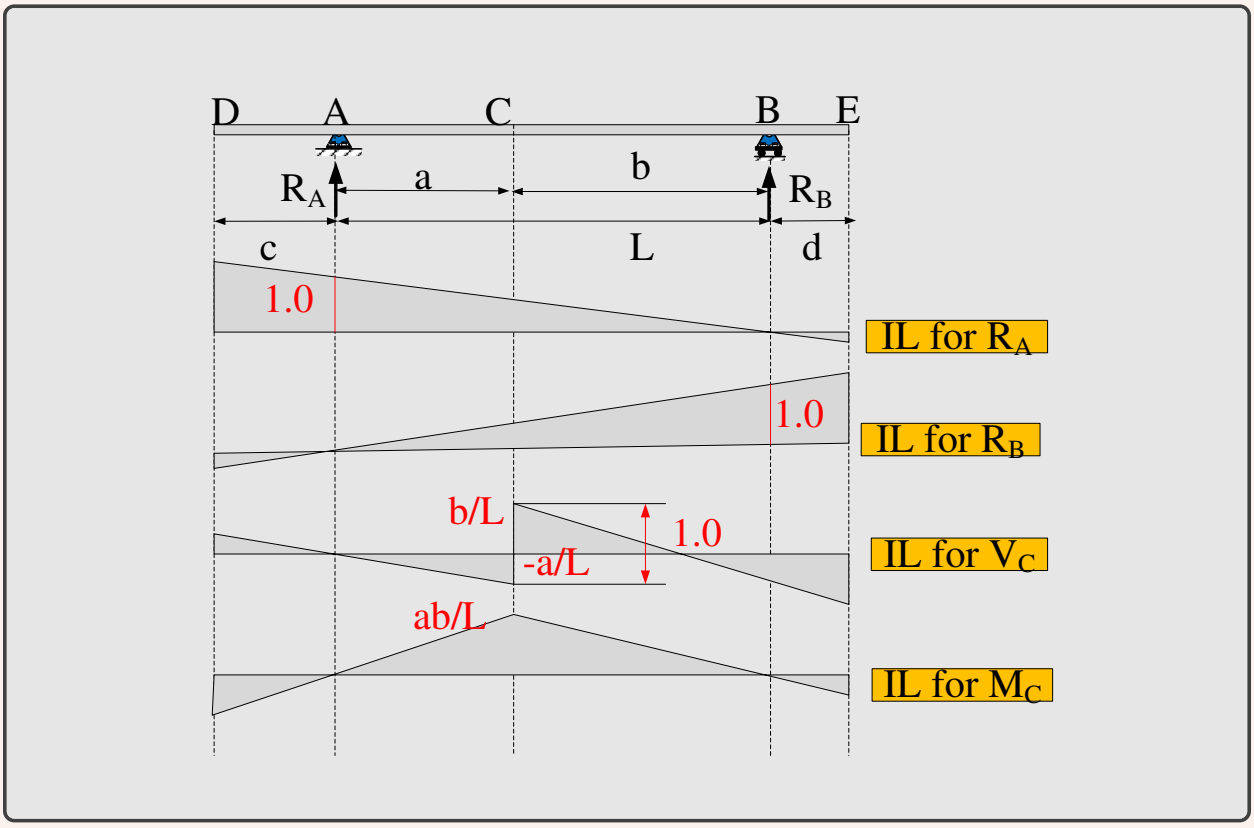
e quando $x = L$,

$$M_{CB} = a - aL/L = a - a = 0$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

28.2.2 Ex 28.2: Fascio con sostegni e sporgenze



28.3 Müller-Breslau Principio

Per il contesto storico, consultare §11.4.4

28.3.1 Ritiro

8 Richiamo il teorema reciproco Maxwell-Betti (MBRT)§24.2.2): *il lavoro virtuale svolto dalle forze del Sistema 1 che attraversano i corrispondenti spostamenti nel sistema 2 dovrebbe essere pari al lavoro virtuale fatto dalle forze in Sistema 2 passando attraverso le relative sostituzioni nel Sistema 1.*

9 Consideriamo poi i due sistemi indicati in Fig. 28.1 dove l'unità forza P_C può essere

COPIA DI REVISIONE

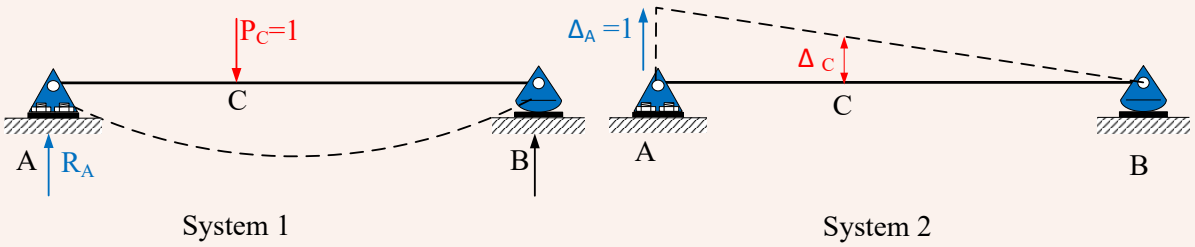


Figura 28.1: Müller-Breslau Principio

"traveling" tra A e B (cioè analogo al carico dell'unità mobile che genererà la reazione corrispondente a A), ed applicare il MBRT

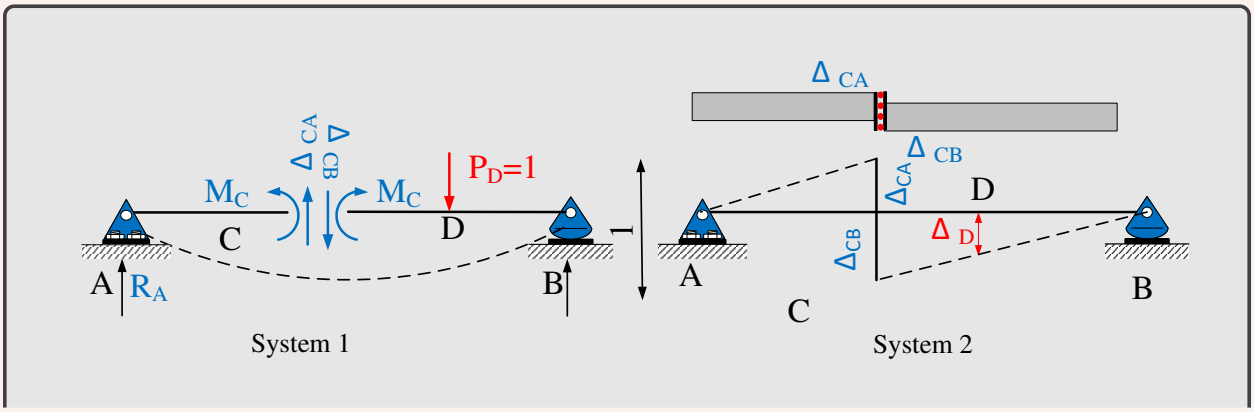
$$\underbrace{P_C}_{1}\,\Delta_C = R_A\,\underbrace{\Delta_A}_{1} \Rightarrow \Delta_C = R_A$$

Quindi, lo spostamento a C è uguale alla reazione ad A. Questa è la MüTeorema di ller-Breslau.

Definition 28.2: Müller-Breslau Principio

La linea di influenza per qualsiasi reazione o forza interna corrisponde alla forma defletta della struttura prodotta rimuovendo la capacità della struttura di portare quella forza e poi introducendo nella struttura modificata (o rilasciata) un'unità deformazione corrispondente al resto rimossa.

28.3.1.1 Ex 28.3: Müller-Breslau; Linea di influenza della cinghia



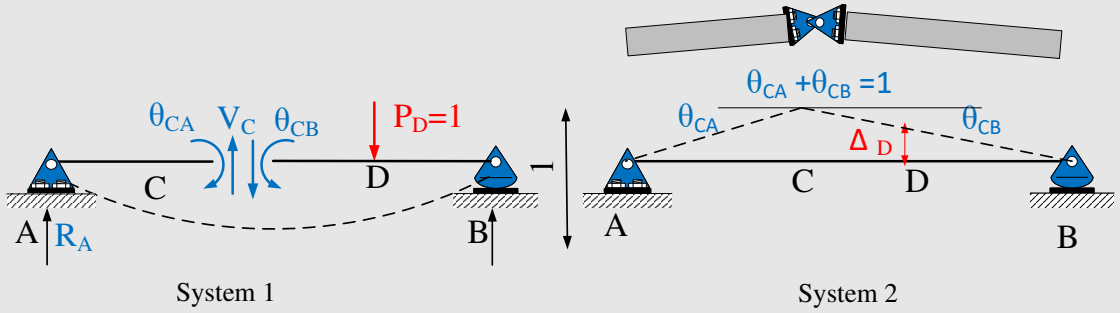
COPIA DI REVISIONE

Applicare un rilascio di taglio (ma nessun momento) a C, da Maxwell-Betti

$$\underbrace{(P_D)}_{1}\ \Delta_D = V_C\ \underbrace{(\Delta_{CA} + \Delta_{CB})}_{1} \Rightarrow \Delta_D = V_C$$

Così, la forma defletta nel Sistema 2 rappresenta la linea di influenza per la forza della tosapa V_C.

28.3.1.2 Ex 28.4: Müller-Breslau; Linea di influenza del momento



Applicare un momento (ma non cesoia) rilascio a C, Ancora una volta, da Maxwell-Betti (come prima)

$$\underbrace{(P_D)}_{1}\ \Delta_D = M_C\ \underbrace{(\theta_{CA} + \theta_{CB})}_{1} \Rightarrow \Delta_D = M_C$$

Così, la forma defletta nel Sistema 2 rappresenta la linea di influenza per il momento M_C.



Arab Horse Gallop, Etienne-Jules Marey, 1887.

Influenza di un carico in movimento, parallela a come le linee influenzano tracciano variazioni della forza nelle strutture.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 29

Analisi elastica di secondo ordine

Abstract

Questo capitolo affronta l'analisi delle strutture in cui la deformazione (slocazione) influenza significativamente la risposta complessiva (equazioni di equilibrio), mentre i materiali stessi mantengono un comportamento linearemente elastico. Questa forma di analisi è conosciuta come Analisi Second Order (elastica).

Il capitolo è diviso in due sezioni principali: la prima sezione riguarda i problemi che coinvolgono grandi spostamenti ma strutture stabili. La seconda sezione si concentra sui problemi con piccoli spostamenti che possono diventare instabili, anche conosciuti come Euler Buckling.

Viene presentata anche un'analogia tra l'equazione differenziale di governo per Euler Buckling e quella che governa le vibrazioni libere.

Infine, il capitolo si conclude con un'introduzione concisa al concetto di lunghezza effettiva (un concetto relativo alla progettazione) e al diagramma della colonna, che considera la risposta inelastice.

La controparte numerica di questo capitolo sarà presentata in seguito sotto la Nonlinearità Geometrica nel Capitolo

---

29.1 Introduzione 1125
29.2 Grandi spostamenti, stabile 1125
29.2.1 Ex 29.1: Instabilità geometrica 1125
29.2.2 Ex 29.2: Impatto di carico assiale sulla deformazione flessorale 1127
29.2.3 Ex 29.3: Grande freccia di una trave a sbalzo 1129
29.3 Piccoli spostamenti, instabile 1133
29.3.1 Barre rigide discrete 1133
29.3.2 Sistemi continui 1137

.

COPIA DI REVISIONE

29.1 Introduzione

1 Finora abbiamo analizzato strutture elastiche lineari con piccoli spostamenti, permettendoci di assumere infinitisimali spostamenti che non hanno impatto sul diagramma del corpo libero.

2 In Second Order Analysis (SOA), questa ipotesi non è più valida. Dobbiamo considerare la deformazione sotto il carico nel diagramma del corpo libero, come è il caso per le strutture via cavo (Chap 30). Questo concetto è illustrato nella figura. 54.5.

3 In SOA, gli aspetti fondamentali dell'analisi rimangono invariati: le stesse equazioni di governo devono essere soddisfatte (equilibrio, compatibilità e relazioni stress-strain). Tuttavia, la differenza fondamentale è che il diagramma del corpo libero deve spiegare gli spostamenti finiti. Anche se questi spostamenti possono essere considerati piccoli (permettendo semplificazioni come $\sin\theta \simeq \theta$) ma non infinitesimale.

4 Di conseguenza, il processo di soluzione è tipicamente più complesso e può comportare la risoluzione delle equazioni differenziali con costanti determinate dalle condizioni limite note.

5 È importante notare che ci sono essenzialmente due classi di problemi in SOA:

Grandi spostamenti, stabile le strutture hanno la capacità di mantenere la loro configurazione sotto l'azione dei carichi e tornare alla loro posizione originale dopo che i carichi sono rimossi.

Piccoli spostamenti, Instabile strutture sono quelle che, quando sottoposti a carichi, sperimentano piccole deformazioni finite che non ritornano alla loro configurazione originale, portando ad una perdita di equilibrio e potenziale fallimento (instaurazione).

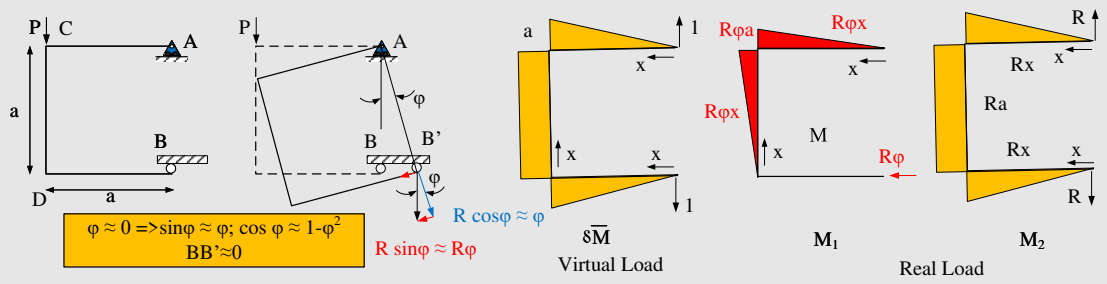
6 Esamineremo i problemi in entrambe le categorie attraverso molti esempi illustrativi.

29.2 Grandi spostamenti, stabile

29.2.1 Ex 29.1: Instabilità geometrica

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Se cerchiamo di determinare la reazione al supporto inferiore

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow Pa = R \times 0 \Rightarrow R = \pm\infty$$

così il sistema non è in equilibrio nella posizione indicata.

Inoltre, si può osservare facilmente che abbiamo una instabilità geometrica come tutte le reazioni convergono allo stesso punto (§19.1.5, §46.2.1.5).

La reazione può essere determinata solo se consideriamo lo spostamento orizzontale del rullo inferiore.

Avere un angolo infinitamente piccolo ϕ, abbiamo le forze inferiori mostrate nella figura

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow Pa - R\phi a \Rightarrow P = R\phi$$

Poi, cerchiamo di eliminare ϕ derivando due espressioni separate per l'allungamento di AB in AB'.

Prima di tutto consideriamo la geometria della forma deformata. Segment AB aumenta a AB

$$\Delta v = AB' - AB = a(1 - cos\phi) \simeq \frac{a\phi^2}{2}$$

Successivamente determina la stessa quantità utilizzando il metodo di forza virtuale

$$\begin{aligned}(1)\Delta v &= \int_0^a (1)x\frac{Rx}{EI}dx + \int_0^a (1)a\frac{R\phi x + Ra}{EI}dx + \int_0^a (1)x\frac{R\phi x + Rx}{EI}dx \\ &= \frac{Ra^3}{EI}\left(\frac{1}{3} + \frac{\phi}{2} + 1 + \frac{\phi}{3} + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{5}{3}\frac{Ra^3}{EI}\left(1 + \frac{\phi}{2}\right)\end{aligned}$$

Since $\phi \ll 1$, then we have

$$\Delta v \simeq \frac{5}{3}\frac{Ra^3}{EI} \simeq \frac{a\phi^2}{2}$$

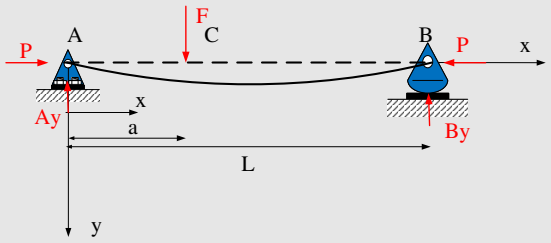
Sostituire $\phi = \frac{P}{R}$ dall'alto, possiamo risolvere per R

$$R = \sqrt[3]{\frac{3P^2EI}{10a^2}}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

29.2.2 Ex 29.2: Impatto di carico assiale sulla deformazione flessorale



Esaminiamo l'impatto del carico assiale sulla rigidità di una colonna a fascio che è libera di ruotare ad ogni estremità, ed è sottoposta a una forza concentrata insieme a una costante assiale. Cerchiamo di ricavare le espressioni per la deflezione e le forze interne del fascio adiacente, che risolve il problema analiticamente, e lo stesso problema verrà risolto in seguito numericamente dall'analisi degli elementi finiti nell'ambito della §60.1.2.4.

$$\begin{aligned} EI\frac{d^2y_1}{dx^2} &= -Py_1 - A_y x &&= -Py - F(L-a) && x \le a \\ EI\frac{d^2y_2}{dx^2} &= -Py_1 - B_y(L-x) &&= -Py - F\tfrac{a}{L}(L-x) && x > a \end{aligned}$$

La soluzione generale di queste equazioni è

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1\cos(nx) + D_1\sin(nx) - \frac{F(L-a)}{PL}x \\ y_2 &= C_2\cos(nx) + D_2\sin(nx) - \frac{Fa}{PL}(L-x) \end{aligned}$$

dove $n^2 = P/EI$.

Si nota che entrambe le funzioni sono linearmente dipendenti F e non lineare dipendente dalla forza assiale P.

Applicare le condizioni di confine, a A e B, gli spostamenti sono zero, che porta a $C_! = 0$ e $C_2 = -D_2\tan(nL)$

$$\begin{aligned} y_1 &= D_1\sin(nx) - \frac{F(L-a)}{PL}x \\ y_2 &= D_2\tan(nL)\cos(nx) + D_2\sin(nx) - \frac{Fa}{PL}(L-x) \end{aligned}$$

Ma sappiamo che c'è continuità di spostamenti e piste a C

$$y_1 = y_2\big|_{x=a} \quad \text{and} \quad \frac{dy_1}{dx} = \left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=a}$$

Espansione

$$\begin{aligned} D_1\sin(na) &= D_2\left(\sin(na) - \tan(nL)\cos(na)\right) \\ D_1 n\cos(na) &= D_2 n\left(\cos(na) + \tan(nL)\sin(na)\right) + \frac{F}{P} \end{aligned}$$

Risolvere per D_1 e D_2

$$D_1 = \frac{F\sin(n(L-a))}{Pn\sin(nL)} \quad \text{and} \quad D_2 = -\frac{F\sin(na)}{Pn\tan(nL)}$$

Così, il momento sarà

$$M(x) = -EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Fn\sin(n(L-a))}{P\sin(nL)}\sin(nx)$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Il momento massimo si verificherà se $a = L/2$, poi per $x = L/2$

$$y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{FL^3}{48EI}\underbrace{\frac{3(\tan\phi - \phi)}{\phi^3}}_{\lambda_y} \quad \text{where} \quad \phi = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}$$

$$M\left(\frac{L}{2}\right) = -EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{FL}{4}\underbrace{\frac{\tan\phi}{\phi}}_{\lambda_M}$$

dove λ sono fattori di amplificazione. È ovvio che la presenza di una forza di compressione aumenterà sia lo spostamento che il momento. F e non lineare dipendente P

Vorremmo verificare l'esattatezza delle equazioni precedenti impostando $P = 0$ (e così) $\phi = 0$), tuttavia questo non è chiaro come avremmo $0/0$, così consideriamo il limite $P \to 0$ $(\phi \to 0)$, e applica l'Hospital

$$\lim_{\phi\to 0}\frac{3(\tan\phi - \phi)}{\phi^3} = 1 \quad \text{and} \quad \lim_{\phi\to 0}\frac{\tan\phi}{\phi} = 1$$

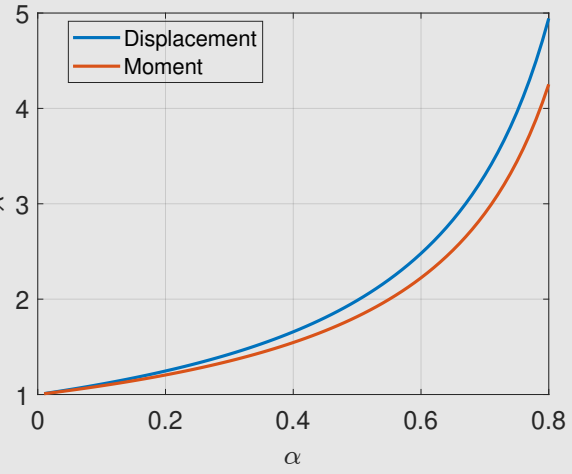
$$y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{FL^3}{48EI} \quad \text{and} \quad M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{FL}{4}$$

quindi recuperiamo le soluzioni classiche per un raggio semplicemente supportato con un carico di punto centrale.

Se ci mettiamo $P = \alpha P_{cr}$ dove $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$ per questa colonna del fascio, da qui ϕ riduce a

$$\phi = \frac{\pi}{2}\sqrt{\alpha}$$

e tracciamo i due fattori di amplificazione. Come previsto, se $\phi \to 1$, i due fattori di amplificazione andranno all'infinito.



[7] La soluzione per una grande deflezione di un fascio cantilever non può essere ottenuta dalla teoria del raggio elementare poiché le ipotesi di base non sono più valide. In particolare, la teoria elementare trascura il quadrato del primo derivato nella formula di curvatura e non fornisce alcuna correzione per l'ammortizzazione del braccio del momento come estremità caricata del fascio deflette (Bisshopp e Drucker, 1945). Per grandi carichi finiti, dà deflettori più grande della lunghezza del fascio! Il quadrato dei primi fattori

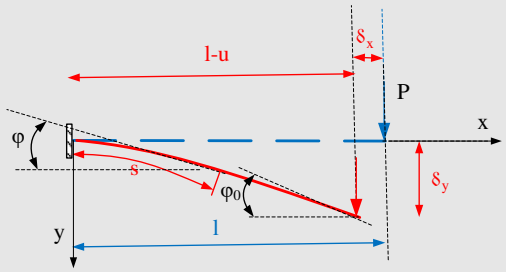
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

derivati e correttivi per l'ammortizzazione del braccio di momento diventa il contributo principale alla soluzione di grandi problemi di deflettorazione.

8 La derivazione di derivazione seguente è ancora basata sul teorema fondamentale Bernoulli-Euler che afferma che la curvatura è proporzionale al momento della piegatura.

29.2.3 Ex 29.3: Grande freccia di una trave a sbalzo



Considerando una lunga, sottile primavera foglia cantilever, lasciare L indicare la lunghezza del fascio, u il componente orizzontale dello spostamento dell'estremità carica del fascio, v il corrispondente spostamento verticale, P il carico concentrato in verticale alla estremità libera, EI la rigidità flessorale. Si noti che questo è un quintessential *elastico* problema discusso in §8.2.
Questo stesso problema verrà analizzato più tardi attraverso il metodo degli elementi finiti §60.2.1.

Formulazione

L'esatta espressione per la curvatura della linea elastica può essere indicata comodamente in termini di lunghezza dell'arco e angolo del pendio denotato da s e ϕ, rispettivamente, in modo che se x è la coordinata orizzontale misurata dall'estremità fissa del fascio, il prodotto EI e la curvatura del fascio uguale al momento di piegamento M:

$$EI\frac{d\phi}{ds} = P(L - x - \delta_x) = M \tag{29.1}$$

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} = -\frac{P}{EI}\frac{dx}{ds} = -\alpha^2\cos\phi \tag{29.2}$$

con $\alpha^2 = P/EI$.

Nota: $dx/ds = \cos\phi$ e $dy/ds = \sin\phi$.

Se moltiplichiamo entrambi i lati di Eq. 29.2 by $d\phi/ds$Allora

$$\frac{d\phi}{ds}\frac{d^2\phi}{ds^2} = -\alpha^2\cos\phi\frac{d\phi}{ds}$$

Integrazione rispetto a se mettere $\phi = \phi_o$ e $d\phi/ds = 0$ at $x = l$ noi abbiamo

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = -\alpha^2\sin\phi + \alpha^2\sin\phi_0$$

Così

$$\frac{d\phi}{ds} = \pm\sqrt{2}\alpha\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi} \tag{29.3}$$

Prendiamo la radice positiva da quando $d\phi/ds$ è positivo e

$$ds = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\frac{d\phi}{\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}} \tag{29.4}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Risolvere per ϕ_0 Dobbiamo risolvere per ϕ_0 primo. Riconoscere che il fascio è *inesteso*:

$$l = \int_0^l ds = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}}$$

e ϕ_0 può essere risolto numericamente.

Risolvere per δ_y

Primo:

$$\frac{dy}{d\phi}\frac{d\phi}{ds} = \frac{dy}{ds} = \sin\phi$$

Sostituire Eq. 29.3

$$\frac{dy}{d\phi}\underbrace{\sqrt{2}\alpha\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}}_{d\phi/ds} = \sin\phi \Rightarrow dy = \frac{\sin\phi}{\sqrt{2}\alpha\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}}d\phi$$

Infine,

$$\begin{aligned}\delta_y &= \int_0^{\delta_y} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\int_0^{\phi_0} \frac{\sin\phi}{\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}}d\phi\end{aligned}$$

Normalizzando,

$$\frac{\delta_y}{l} = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2\beta}\int_0^{\phi_0} \frac{\sin\phi}{\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}}d\phi}_{L} \tag{29.5}$$

dove $\beta^2 = \alpha^2 L^2$.

Questo è un integrato ellittico "hidden"[a].

Trasformazione in Integrali Ellittici Per (Bisshopp e Drucker, 1945), viene introdotta la seguente sostituzione:

$$1 + \sin\phi = 2k^2\sin^2\theta = (1 + \sin\phi_0)\sin^2\theta \tag{29.6}$$

dove

$$k = \sqrt{\frac{1 + \sin\phi_0}{2}}$$

La trasformazione dettagliata da Eq. 29.5 a forma integrale ellittica standard procede come segue.

Da Eq. 29.6:

$$\sin\phi = 2k^2\sin^2\theta - 1 \tag{29.7}$$

Il prossimo, abbiamo

$$\begin{aligned}\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi} &= \sqrt{(1 + \sin\phi_0) - (1 + \sin\phi)} \\ &= \sqrt{2k^2 - 2k^2\sin^2\theta} = \sqrt{2}k\cos\theta\end{aligned} \tag{29.8}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Differenziando entrambe le parti della prima uguaglianza in Eq. 29.6, noi otteniamo

$$\cos\phi\, d\phi = 4k^2 \sin\theta\cos\theta\, d\theta \implies d\phi = \frac{4k^2 \sin\theta\cos\theta\, d\theta}{\cos\phi} \tag{29.9}$$

Usando Eq. 29.7, riscriviamo il denominatore 29.9 as

$$\begin{aligned}\cos\phi &= \sqrt{1-\sin^2\phi} = \sqrt{1-\left(2k^2\sin^2\theta-1\right)^2} \\ &= \sqrt{4k^2\sin^2\theta - 4k^4\sin^4\theta} = 2k\sin\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\end{aligned} \tag{29.10}$$

Plugining 29.7-29.10 in 29.5, noi otteniamo

$$\begin{aligned}L &= \frac{\sqrt{2}}{2\beta}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\left(2k^2\sin^2\theta-1\right)\times 4k^2\sin\theta\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{2}k\cos\theta\times 2k\sin\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \\ &= \frac{1}{\beta}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\left(2k^2\sin^2\theta-1\right)d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\end{aligned} \tag{29.11}$$

dove θ_1 e θ_2 sono i valori di θ corrispondenti a $\phi = 0$ e $\phi = \phi_0$, rispettivamente. 29.6♪, we find

$$1 = \left(1+\sin\phi_0\right)\sin^2\theta_1 \implies \theta_1 = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sin\phi_0}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}k}\right) \tag{29.12}$$

$$1+\sin\phi_0 = \left(1+\sin\phi_0\right)\sin^2\theta_2 \implies \theta_2 = \frac{\pi}{2} \tag{29.13}$$

Espressione utilizzando Integrali Ellittici Completi Ricordiamo che gli integrali ellittici completi dei primi e dei secondi sono definiti rispettivamente come:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \qquad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, d\theta$$

e gli integrali ellittici incompleti sono:

$$F(\psi,k) = \int_0^{\psi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \qquad E(\psi,k) = \int_0^{\psi} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, d\theta$$

L'integrale in Eq. 29.11 può essere diviso come:

$$\int_{\theta_1}^{\pi/2} \frac{\left(2k^2\sin^2\theta-1\right)d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \int_0^{\pi/2}(\cdots)\, d\theta - \int_0^{\theta_1}(\cdots)\, d\theta$$

Per l'integrale da 0 to $\pi/2$, ci decompongono:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\left(2k^2\sin^2\theta-1\right)d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = 2k^2\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} - K(k)$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Utilizzo dell'identità:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \frac{1}{k^2}\left[K(k)-E(k)\right]$$

otteniamo:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\left(2k^2\sin^2\theta-1\right) d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = 2\left[K(k)-E(k)\right]-K(k) = K(k)-2E(k)$$

Analogamente, per l'integrale dall' 0 to θ_1:

$$\int_0^{\theta_1} \frac{\left(2k^2\sin^2\theta-1\right) d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = F(\theta_1,k)-2E(\theta_1,k)$$

Pertanto, l'espressione completa per δ_y/l is:

$$\frac{\delta_y}{l} = \frac{1}{\beta}\left[(K(k)-2E(k))-(F(\theta_1,k)-2E(\theta_1,k))\right] \tag{29.14}$$

dove $\theta_1 = \arcsin(1/(\sqrt{2}k))$ da Eq. 29.12.

Equivalenza con Bisshopp & Formula di Drucker L'espressione data da Bisshopp e Drucker, 1945 is:

$$\frac{\delta_y}{l} = 1-\frac{2}{\beta}\left[E(k)-E(\theta_1,k)\right] \tag{29.15}$$

Per mostrare l'equivalenza, utilizziamo l'Equazione del vincolo per il fascio inestensibile.

$$l = \int_0^l ds = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\sin\phi_0-\sin\phi}}$$

che, dopo la stessa sostituzione, diventa:

$$1 = \frac{1}{\beta}\int_{\theta_1}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \frac{1}{\beta}\left[K(k)-F(\theta_1,k)\right]$$

Quindi:

$$\beta = K(k)-F(\theta_1,k) \tag{29.16}$$

Sostituire Eq. 29.16 in Eq. 29.14 e semplificazione (notando che diversi termini annulla), si recupera esattamente Eq. 29.15.

Quindi, c'è una sola soluzione; Equazioni 29.14 e 29.15 sono espressioni matematicamente equivalenti per δ_y/l.

Risolvere per δ_x

Lo spostamento orizzontale dell'estremità caricata è calcolato da Eq. 29.1 e 29.3 con $x = \phi = 0$. Così

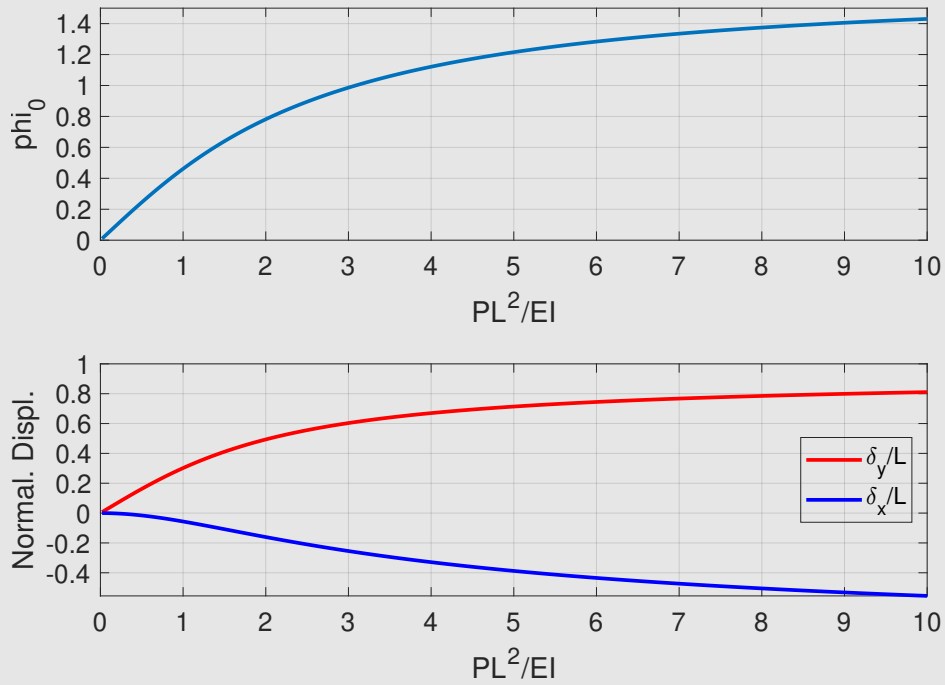
$$P(l-\delta_x) = EI\sqrt{2}\alpha\sqrt{\sin\phi_0}$$

or

$$\frac{l-\delta_x}{l} = \frac{\sqrt{2}}{\beta}\sqrt{\sin\phi_0} \tag{29.17}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Tutti e tre i codici Matlab che implementano questa soluzione sono elencati §I.1.6.

[a] Un integrale ellittico è qualsiasi parte integrante nella forma generale $f(x) = \int \frac{A(x)+B(x)}{C(x)+D(x)\sqrt{S(x)}}$ dove $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ e $D(x)$ sono polinomi in x e $S(x)$ è un polinomio di grado 3 o 4.

29.3 Piccoli spostamenti, instabile

29.3.1 Barre rigide discrete

9 Il requisito chiave AA per valutare i problemi di stabilità (e buckling) è quello di prima disegnare il diagramma del corpo libero dello stato deformato.

29.3.1.1 Sistema a barre singolo

10 Introduttiva, cominciamo considerando una barra rigida collegata al supporto da una molla e caricata assialmente all'altra estremità, Fig. 29.1. Supponendo una piccola rotazione, ci prendiamo momenti circa punto A:

$$\Sigma M_A = P\Delta - k\theta = 0 \Rightarrow \Delta = L\theta \Rightarrow P\theta L - k\theta = 0 \Rightarrow (P - \frac{k}{L}) = 0$$

Quindi abbiamo tre possibilità, Fig. 29.1

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

Equilibrio stabile: per $P < k/L$, $\theta = 0$

Equilibrio neutro: per $P = k/L$e θ può prendere qualsiasi valore

equilibrio instabile: per $P = P_{cr} > k/L$, $\theta = 0$

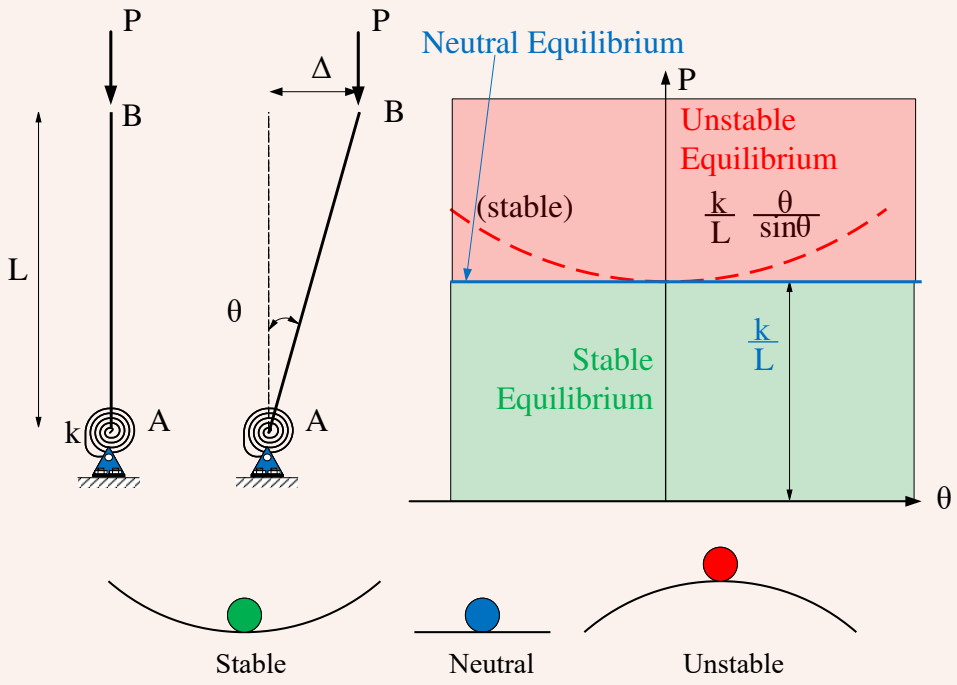


Figura 29.1: Stabilità di una barra rigida

11 Introduciamo quindi un carico critico definito da

$$P_{cr} = \frac{k}{L}$$

12 Per una grande rotazione, avremmo

$$\Sigma M_A = P\Delta - k\theta = 0 \Rightarrow \Delta = L\sin(\theta) P\theta L - k\theta = 0 \Rightarrow P_{cr} = \frac{k}{L}\frac{\theta}{\sin(\theta)}$$

13 Perché c'è più di un percorso possibile (θ) quando $P = P_{cr}$, noi chiamiamo questo punto *punto di biforcazione*.

14 Se ora supponiamo che ci sia un'iniziale imperfezione nella colonna, cioè. la colonna è inizialmente "crooked', Fig. 29.2Allora

$$\Sigma M_A = PL\theta - k(\theta - \theta_0) = 0 \Rightarrow P_{cr} = \frac{k}{L}(1 - \frac{\theta_0}{\theta})$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

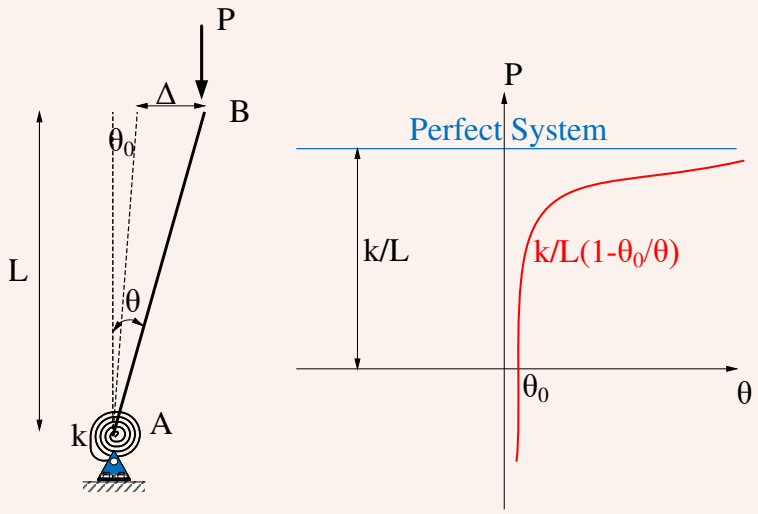


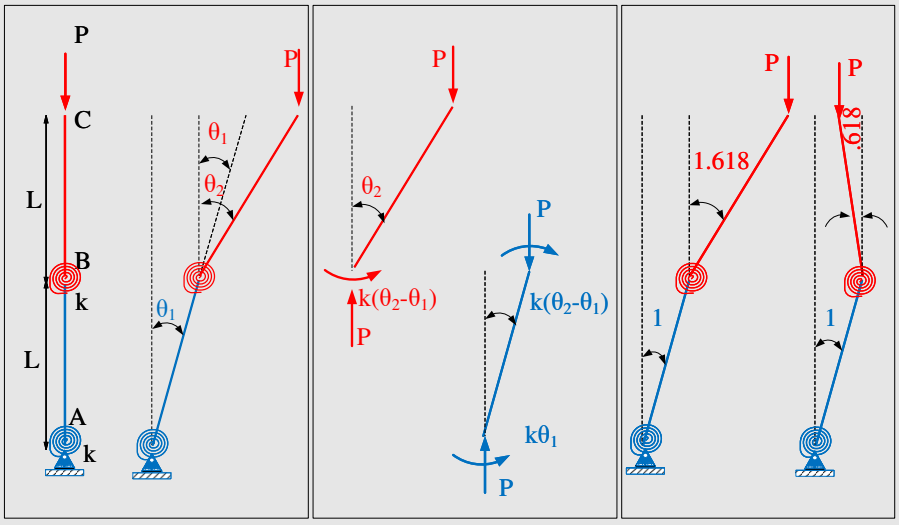
Figura 29.2: Stabilità di una barra rigida con imperfezione iniziale

15 Nota che abbiamo qui un *instabilità* problema, da non confondere con la buckling (che è una forma di instabilità).

Please note that this section contains floating elements (figures and/or tables) that need to be printed before the next one. As a result, you may encounter blank spaces or gaps in here.

29.3.1.1.1 Ex 29.4: Fibbia di due colonne rigide a cerniera

Consideriamo la stabilità di due barre rigide collegate da molle con rigidità k a ogni fine. Cerchiamo di valutare la stabilità del sistema. Per questo problema, dobbiamo considerare l'equilibrio del *stato deformato* (anziché non deformate), a causa della grande deformazione in presenza:



COPIA DI REVISIONE

$$\Sigma M.B. = PL\theta_2 - k(\theta_2 - \theta_1) = 0 \qquad \Rightarrow -\theta_1 + \theta_2 = \frac{PL}{k}\theta_2$$
$$\Sigma M.A. = PL\theta_1 + k(\theta_2 - \theta_1) - k\theta_1 = 0 \Rightarrow 2\theta_1 - \theta_2 = \frac{PL}{k}\theta_1$$

Queste due equazioni possono essere gettate in forma matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

where $\lambda = PL/k$, this is an *eigenvalue* formulation and can be riscritto come

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \lambda \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 1 &= 0 \\ \lambda^2 - 3\lambda + 1 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Quindi ora abbiamo due carichi critici:

$$\begin{aligned} P_{cr_1} &= \frac{3-\sqrt{5}}{2}\frac{k}{L} = 0.382\frac{k}{L} \\ P_{cr_2} &= \frac{3+\sqrt{5}}{2}\frac{k}{L} = 2.618\frac{k}{L} \end{aligned}$$

Ora cerchiamo di determinare la forma deformata per ciascuno dei primi critici carichi

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ \begin{bmatrix} 2 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & 1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1.618 & -1 \\ -1 & 0.618 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

noi ora abbiamo arbitrariamente impostato $\theta_1 = 1$Allora $\theta_2 = 1/0.618 = 1.618$, così la prima automoda è

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.618 \end{Bmatrix}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Infine, esaminiamo la seconda forma della modalità carichi

$$\lambda_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 2-\frac{3+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & 1-\frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & 1-\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.618 & -1 \\ -1 & -1.618 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

noi ora abbiamo arbitrariamente impostato $\theta_1 = 1$Allora $\theta_2 = -1/1.618 = -0.618$, così il secondo eigenmode è

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.618 \end{Bmatrix}$$

29.3.2 Sistemi continui

29.3.2.1 Carico di indurimento Euler

16 Nell'approccio precedente, i carichi di indurimento sono stati ottenuti per una colonna con specifiche condizioni essenziali di confine (spostamento e pendenza) che hanno portato ad un'equazione differenziale secondo ordine.

17 In questo approccio successivo considereremo anche le condizioni di confine naturali (sentieri e momenti espressi come terzo e quarto derivato degli spostamenti) che si tradurranno in un'equazione differenziale dell'ordine.

18 Considerando una trave-colonna sottoposta a forze assiali e di taglio, nonché un momento, Fig. 29.3 (nota analogia con struttura del cavo, Fig. 30.2).

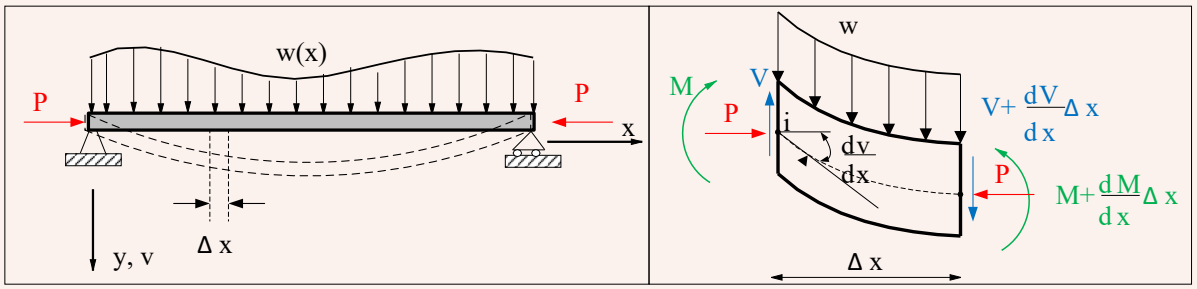


Figura 29.3: Colonna di fascio semplicemente supportata; segmento differenziale; effetto della forza assiale p

COPIA DI REVISIONE

19 Tempo di riempimento rispetto al i per il segmento del fascio e assumendo l'angolo $\frac{dv}{dx}$ tra l'asse del fascio e l'asse orizzontale è piccolo, conduce a

$$\underbrace{M - \left(M + \frac{dM}{dx}\Delta x\right) + w\frac{(\Delta x)^2}{2}^{0} + \left(V + \frac{dV}{dx}\Delta x\right)^{0}\Delta x}_{} + \underbrace{P\left(\frac{dv}{dx}\right)\Delta x} = 0$$

Si noti che il primo termine sottobraciato è identico a quello usato nella derivazione precedente dell'equazione differenziale del fascio (Eq. 22.2).

20 Trascurare i termini dx^2 che sono piccole, e poi differenziare ogni termine con rispetto to x, noi otteniamo

$$\frac{d^2M}{dx^2} - \frac{dV}{dx} - P\frac{d^2v}{dx^2} = 0 \tag{29.18}$$

Tuttavia, considerando l'equilibrio nel y direzione dà

$$\frac{dV}{dx} = -w \tag{29.19}$$

21 Dalla teoria del fascio, trascurando deformazioni assiali e cesoie, abbiamo

$$M = -EI\frac{d^2v}{dx^2} \tag{29.20}$$

22 Sostituire Eq. 29.19 e 29.20 in 29.18e supponendo un raggio di sezione trasversale uniforme, otteniamo

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} - P\frac{d^2v}{dx^2} = w$$

Sostituire $\lambda = \sqrt{\frac{P}{EI}}$e $w = 0$ finalmente otteniamo

$$\frac{d^4v}{dx^4} + \lambda^2\frac{d^2v}{dx^2} = 0 \tag{29.21}$$

Ancora una volta, si nota che considerando l'equilibrio nello stato deformato abbiamo introdotto il secondo termine a quello che altrimenti sarebbe il differenziale di governo equazione per i membri flessografici (somma).

Infine, notiamo l'analogia tra questa equazione, e l'equazione differenziale di governo per una struttura del cavo, Eq. 30.5.

23 La soluzione generale di questo differenziale del quarto ordine equazione a qualsiasi insieme di condizioni limite è

$$v = C_1 + C_2x + C_3\sin\lambda x + C_4\cos\lambda x \tag{29.22}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Le costanti $C's$ sono ottenuti dalle condzioni di confine. Per le colonne, quelle sono mostrate nella tabella 29.1 Le condizioni essenziali di confine sono associate allo spostamento, e al pendio, quelli naturali con cesoia e momenti (tramite le rispettive relazioni con lo spostamento).

Tabella 29.1: Condizioni di confine essenziali e naturali per colonne

Essenziale (Dirichlet)	Naturale (Neumann)
v	$\frac{d^3v}{dx^3}$ (V)
$\frac{dv}{dx}$	$\frac{d^2v}{dx^2}$ (M)

[24] Si noti che a ogni nodo, dovremmo avere due condizioni di confine, tutte le combinazioni sono possibili eccetto coppie della stessa cruda (cioè non possiamo avere lo spostamento conosciuto e taglio, o noto pendio e momento).

29.3.2.1.1 Ex 29.5: Fibbia di colonna a cerniera

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Se consideriamo la stabilità di una colonna a cerniere, le condizioni limite sono spostamento (v) e momento ($\frac{d^2v}{dx^2}EI$) uguale a zero in entrambe le estremità, o

$$\begin{array}{lcccccc} \textbf{Essential:} & v|_{x=0} & = & 0; & v|_{x=L} & = & 0; \\ \textbf{Natural:} & \underbrace{v_{,xx}|_{x=0}}_{M|_{x=0}} & = & 0; & \underbrace{v_{,xx}|_{x=L}}_{M|_{x=L}} & = & 0 \end{array}$$

Sostituzione delle due condizioni $x = 0$ porta a $C_1 = C_4 = 0$.
Dalle condizioni rimanenti, otteniamo

$$\begin{aligned} C_3 \sin \lambda L + C_2 L &= 0 \\ -C_3 k^2 \sin \lambda L &= 0 \end{aligned}$$

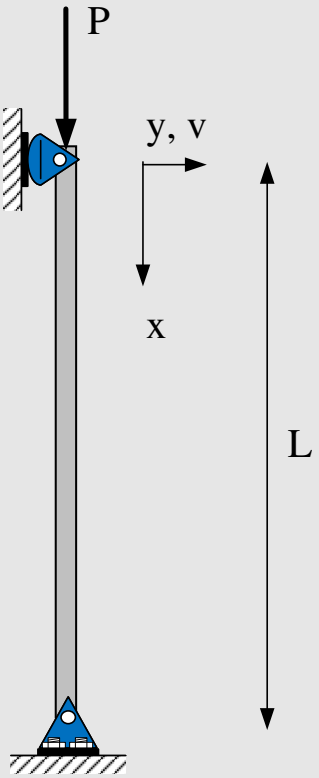
queste relazioni sono soddisfatte o se $C_2 = C_3 = 0$ o se $\sin \lambda L = C_2 = 0$. La prima alternativa porta alla soluzione triviale di equilibrio a tutti i carichi, e la seconda a $\lambda L = n\pi$ per $n = 1, 2, 3 \cdots$. Il carico critico è

$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$$

che è stato derivato prima utilizzando l'equazione differenziale dell'ordine inferiore. La forma della colonna a fibbia è

$$y = C_3 \sin \frac{n\pi x}{L}$$

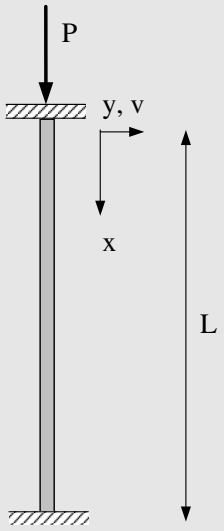
e solo la forma (ma non la geometria) può essere determinata. In generale, supponiamo $C_3 = 1$ e trama y.



29.3.2.1.2 Ex 29.6: Fibbia di colonna fissa

COPIA DI REVISIONE

Se la colonna è ora trattenuta contro rotazione a entrambe le estremità, e utilizzando Eq. 29.22, le condizioni di confine sono



$$\textbf{Essential:} \quad v|_{x=0}=0; \quad v|_{x=L}=0; \quad \underbrace{v_{,x}|_{x=L}}_{\theta|_{x=L}}=0;$$

$$\textbf{Natural:} \quad \underbrace{v_{,xx}|_{x=0}}_{M|_{x=0}}=0$$

$$\begin{aligned} v(0)=0 &\Rightarrow C_1+C_4=0\\ v'(0)=0 &\Rightarrow C_2+C_3\lambda=0\\ v(L)=0 &\Rightarrow C_1+C_2L+C_3\sin\lambda L+C_4\cos\lambda L=0\\ v'(L)=0 &\Rightarrow C_2+C_3\lambda\cos(\lambda L)-C_4\sin(\lambda L)=0 \end{aligned}$$

queste equazioni possono essere impostate in forma matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 0\\ 1 & L & \sin\lambda L & \cos\lambda L\\ 0 & 1 & \lambda\cos\lambda L & -\lambda\sin\lambda L \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} C_1\\ C_2\\ C_3\\ C_4 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 0\\ 1 & L & \sin\lambda L & \cos\lambda L\\ 0 & 1 & \lambda\cos\lambda L & -\lambda\sin\lambda L \end{vmatrix}=0$$

Il determinante è ottenuto da

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0\\ L & \sin\lambda L & \cos\lambda L\\ 1 & \lambda\cos\lambda L & -\lambda\sin\lambda L \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda\\ 1 & L & \sin\lambda L\\ 0 & 1 & \lambda\cos\lambda L \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} \sin\lambda L & \cos\lambda L\\ \lambda\cos\lambda L & -\lambda\sin\lambda L \end{vmatrix}-\lambda\begin{vmatrix} L & \cos\lambda L\\ 1 & -\lambda\sin\lambda L \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & \sin\lambda L\\ 0 & \lambda\cos\lambda L \end{vmatrix}-\lambda\begin{vmatrix} 1 & L\\ 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$-2\lambda+\lambda^2L\sin\lambda L+2\lambda\cos\lambda L=0$$

La prima soluzione, $\lambda=0$ è una cosa banale, e la prossima

$$\begin{aligned} \lambda L\sin\lambda L+2\cos\lambda L-2 &= 0\\ \lambda L\sin\lambda L &= 2(1-\cos\lambda L) \end{aligned}$$

La soluzione di questa equazione trascendentale è

$$\begin{aligned} \lambda L &= 2n\pi\\ \sqrt{\frac{P}{EI}} &= \frac{2n\pi}{L} \end{aligned}$$

così il carico critico e le sollecitazioni sono date da

$$\begin{aligned} P_{cr} &= \frac{4n^2\pi^2EI}{L^2}\\ \sigma_{cr} &= \frac{4n^2\pi^2E}{(L/r)^2} \end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

La forma defletta (o eigenmodi) può essere ottenuta sostituendo la valore del λ nel $c's$.

29.3.2.1.3 Ex 29.7: Fibbia di colonna fissa

Cerchiamo di determinare il carico di indurimento di una colonna fissata a $x = L$ e aggrappato $x = 0$.
Le condizioni di confine sono

$$\begin{aligned} v &= 0, \quad \frac{d^2v}{dx^2} = 0 \text{ at } x = 0 \quad \text{Natural B.C.} \\ v &= 0, \quad \frac{dv}{dx} = 0 \text{ at } x = L \quad \text{Essentia B.C.} \end{aligned}$$

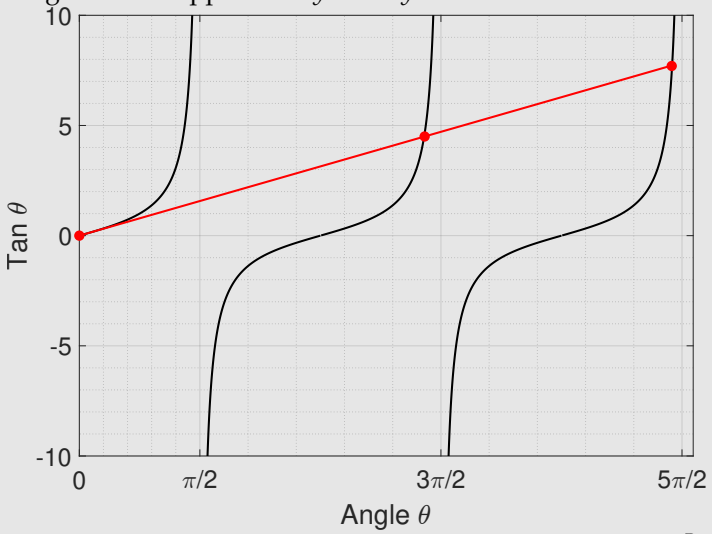
I primi due rendimenti a B.C. $C_1 = C_4 = 0$, e gli altri due

$$\sin \lambda L - \lambda L \cos \lambda L = 0$$

Ma da quando $\cos \lambda L$ non può essere uguale a zero, l'equazione precedente può essere ridotta

$$\tan \lambda L = \lambda L \tag{29.23}$$

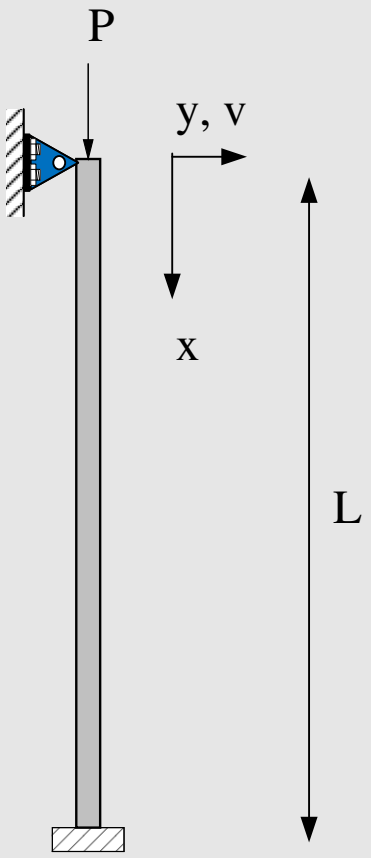
che è un'equazione algebraica trascendentale e può essere risolta solo in particolare, la relazione dell'onorevole von Wogau è stata approvata. $y = x$ e $y = \tan x$.



e la più piccola radice positiva è $\lambda L = 4.4934$Da allora $k^2 = \frac{P}{EI}$, il più piccolo carico critico è

$$P_{cr} = \frac{(4.4934)^2}{L^2} EI = \frac{\pi^2}{(0.699L)^2} EI$$

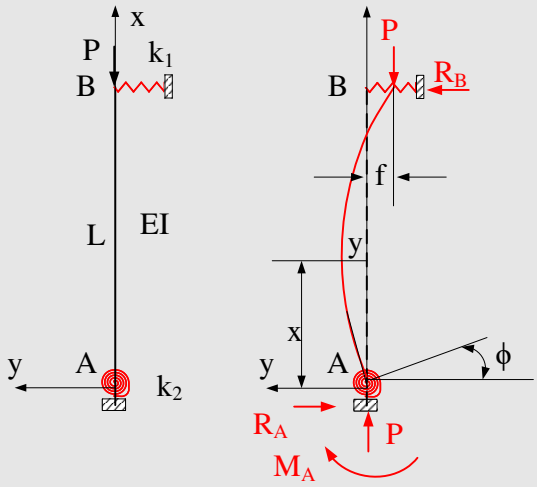
Nota che se dovessimo risolvere x tale $v_{,xx} = 0$ (cioè un punto di inflezione), poi $x = 0.699L$.
Il carico di indurimento di questa colonna sarà determinato numericamente §60.1.2.1.



COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

29.3.2.1.4 Ex 29.8: Colonna con supporti elastici



La colonna adiacente ha supporti elastici a entrambe le estremità: $R_B = k_1 f$ e $M_A = k_2\phi$. Cerchiamo di determinare il carico di indurimento P_{cr}. Momento in qualsiasi momento X is

$$M(x) = -P(f + y) + k_1 f(L - x)$$

Sostituire $EId^2y/dx^2 = M(x)$, noi otteniamo

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} + Py = f\,[k_1(L - x) - P] \tag{29.24}$$

Questa è l'equazione differenziale non omogenea di secondo ordine. Se definiamo

$$f* = f\left[\frac{k_1}{P}(L - x) - 1\right]$$

Poi, la soluzione generale di Eq. 29.24, e il corrispondente pendio sono

$$y = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x + y*$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = -C_1\lambda \sin\lambda x + C_2\lambda \cos\lambda x - \frac{fk_1}{P}$$

dove

$$\lambda^2 = \frac{P}{EI}$$

Risolviamo per le due costanti C_1 e C_2 e f dalle seguenti condizioni di confine

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = \phi; \qquad y(L) = -f$$

Le prime condizioni di confine portano a

$$C_1 + f\left(\frac{k_1 L}{\lambda} - 1\right) = 0$$

A sostegno A, $M_A = f(k_1 L - P)$, quindi l'angolo di rotazione è

$$\phi = \frac{M_A}{k_2} = \frac{f}{k_2}(k_1 L - P)$$

Quindi la seconda condizione di confine porta a

$$C_2\lambda - f\left(\frac{k_1}{P} + \frac{k_1 L - P}{k_2}\right) = 0$$

Infine, la terza condizione di confine dà

$$C_1 \cos\lambda L + C_2 \sin\lambda L = 0$$

COPIA DI REVISIONE

Queste tre equazioni possono essere espresse come

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{k_1 L}{P} - 1 \\ 0 & \lambda & -\left(\frac{k_1}{P} + \frac{k_1 L - P}{k_2}\right) \\ \cos \lambda L & \sin \lambda L & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Questa è un'equazione omogenea, quindi dobbiamo assicurarci che esista una soluzione (non banale) impostando il suo determinante pari a zero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{k_1 L}{P} - 1 \\ 0 & \lambda & -\left(\frac{k_1}{P} + \frac{k_1 L - P}{k_2}\right) \\ 1 & \tan \lambda L & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Prendendo il determinante, l'equazione può essere riscritta come una trascendente rispetto a λ

$$\tan \lambda L = \frac{k_2 \lambda (k_1 L - P)}{k_1 (k_2 + LP) - P^2} \tag{29.25}$$

Casi speciali

1-a: Top free, molla di base: $k_1 = 0,\ k_2 \neq 0$ Questo è semplice rendimento di sostituzione

$$\tan \lambda L = \frac{k_2 \sqrt{\frac{P}{EI}}}{P}$$

2-a: Piano fisso, molla di base: $k_1 = \infty,\ k_2 \neq 0$ Da Eq. 29.25 avremmo una forma indefinita $(\infty / infty)$, così applichiamo L'Hîegola opitale:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

or

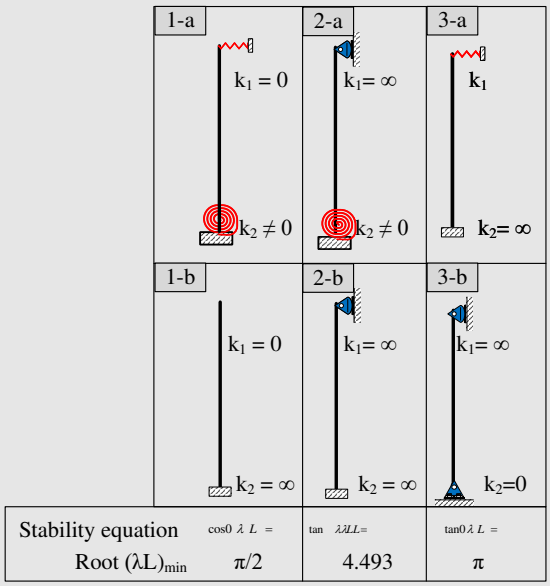
$$\tan \lambda L = \lim_{k_1 \to \infty} \frac{k_2 \lambda (k_1 L - P)}{k_1 (k_2 + LP) - P^2} = \frac{k_2 L \lambda}{k_2 + LP} = \frac{k_2 L \sqrt{\frac{P}{EI}}}{k_2 + LP}$$

3-a: Molla superiore, base fissa: $k_1 \neq 0,\ k_2 = \infty$ Ancora una volta, dobbiamo invocare L'Hîa regola dell'ospedale:

$$\tan \lambda L = \lim_{k_2 \to \infty} \frac{k_2 \lambda (k_1 L - P)}{k_1 (k_2 + LP) - P^2} = L \sqrt{\frac{P}{EI}} \left(1 - \frac{P}{k1L}\right)$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Da queste equazioni, possiamo derivare (o recuperare le equazione precedentemente derivati).

1-b: Top Free, base fissa: $k_1 = 0, k_2 = \infty$ di semplice ispezione abbiamo

$$\tan \lambda L = \infty \Rightarrow (\lambda L)_{min} = \frac{\pi}{2}$$

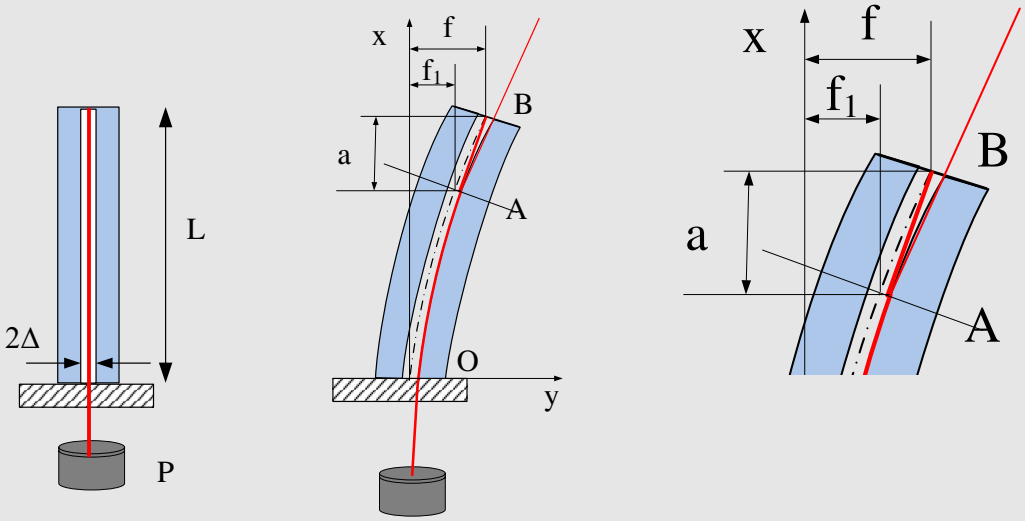
2-b: fisso superiore, base fissa: $k_1 = \infty;\ k_2 = \infty$

$$\tan \lambda L = \lim_{k_2 \to \infty} \frac{k_2 L \sqrt{\frac{P}{EI}}}{k_2 + LP} \Rightarrow (\lambda L)_{min} = 4.493$$

3-b: Fisso superiore, cerniera di base: $k_1 = \infty;\ k_2 = 0$ Questo non è esattamente un caso speciale delle equazioni precedenti, quindi riconsideriamo Eq. 29.25. Con le condizioni di confine specificate, abbiamo chiaramente

$$\tan \lambda L = 0 \Rightarrow (\lambda L)_{min} = \pi$$

29.3.2.1.5 Ex 29.9: Contrattamento



Il tubo si accelererà quando $P = \pi^2 EI/4L^2$. Questo rimane la forza limite fino a quando la deflettorazione f non ha superato Δ.

Tuttavia, ad un certo punto, la corda verrà a contatto con la parete curva del tubo e avremo poi due porzioni da considerare, OA e AB.

COPIA DI REVISIONE

Nella porzione OA il momento è semplicemente uguale a $P\Delta$, e il tubo è piegato in una curva di secondo grado (Recall $M/EI = d^2y/dx^2$, integrando due volte e applicando le condizioni di confine alla base)

$$y = \frac{P\Delta}{2EI}x^2$$

La deviazione a A is

$$f_1 = \frac{P\Delta}{2EI}(L-a)^2$$

Ora, dobbiamo risolvere per f. Da considerazioni geometriche, se la barra non era piegata nella porzione AB, lo spostamento a B sarebbe

$$f = \frac{P\Delta}{2EI}(L-a)^2 + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=L-a} a = \frac{P\Delta}{2EI}(L-a)^2 + \frac{P\Delta}{EI}(L-a)a$$

Tuttavia, la seconda parte si curva abbastanza lontano per B per partire dal tangente AB by Δ. Da qui

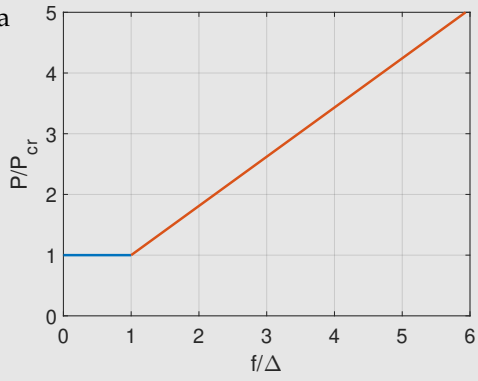
$$f = \frac{P\Delta}{2EI}(L-a)^2 + \frac{P\Delta}{EI}(L-a)a + \Delta$$

or

$$f = \frac{P\Delta}{2EI}(L^2 - a^2) + \Delta$$

Ma non abbiamo ancora a. a è la lunghezza di una barra fissata ad un'estremità che perde stabilità sotto la forza P

$$P = \frac{\pi^2 EI}{4a^2} \Rightarrow a^2 = \frac{\pi^2 EI}{4P}$$



Sostituire in f

$$f = \Delta\left(\frac{PL^2}{2EI} - \frac{\pi^2}{8} + 1\right)$$

or

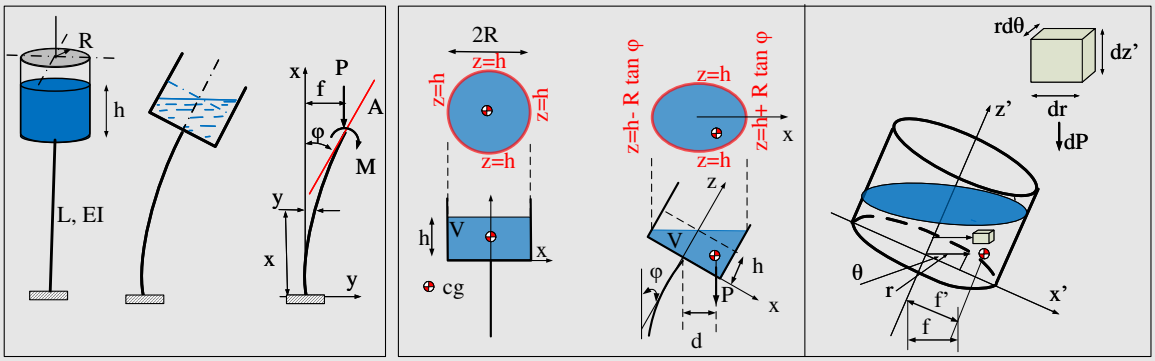
$$\frac{f}{\Delta} = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{P}{P_{cr}} - 1\right) + 1$$

dove $P_{cr} = \pi^2 EI/4L^2$.

29.3.2.1.6 Ex 29.10: Torre dell'acqua

Quando si progetta un ower dell'acqua, una domanda naturale è se la struttura è stabile. A che livello di acqua nel serbatoio il polo di sostegno perde stabilità (Feodossiev, 1977).

COPIA DI REVISIONE



Governare l'equazione differenziale

Iniziamo disegnando il diagramma del corpo libero con una piccola deformazione L'equazione differenziale della curva elastica della barra è la seguente:

$$EIy'' = P(f - y) + M$$

La forza P è ovviamente uguale al peso dell'acqua

$$P = \gamma \pi R^2 h$$

dove γ è il peso specifico dell'acqua.

Momento proposto

Poi cerchiamo di trarre il momento M causata dall'acqua nel contenitore cilindrico inclinato. L'angolo di inclinazione è ϕ, e il momento è circa z-assi, che è ortogonale al supporto verticale.

Quando il cilindro è inclinato da un angolo ϕ, il centro dei turni di massa. Derivamo lo spostamento orizzontale d del centro di massa dall'asse verticale fino al punto di sostegno.

Usiamo coordinate cilindriche con le z' asse allineato con l'asse di simmetria del cilindro, e x -assi allineati con la direzione che il cilindro è stato inclinato. θ tale $x = r\cos\theta$. In termini di questo sistema, la superficie libera dell'acqua è data dall'equazione

$$z = h + \alpha x = h + \alpha r \cos\theta$$

dove $\alpha = \tan\phi$. Il volume di integrazione viene poi dato da

$$0 \le r \le R \quad 0 \le \theta \le 2\pi \quad 0 \le z \le h + \alpha r \cos\theta$$

Poi $dV = rdrd\theta dz$, e la massa del peso del peso dell'acqua è $P = \gamma \pi h R^2$.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Cerchiamo di determinare il centroide dell'acqua (in un certo senso la x') asse, e l'unica complicazione è che dobbiamo prenderci cura dell'ordine in cui valutiamo gli integrali.

$$\begin{aligned} df' &= \frac{\gamma}{P}\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{h+\alpha r\cos\theta} (r\cos\theta) r dr d\theta dz \\ &= \frac{\gamma}{P}\int_0^R \int_0^{2\pi} (hr^2\cos\theta + \alpha r^3\cos^2\theta) dr d\theta \\ &= \frac{\gamma\pi}{P}\int_0^R (\alpha r^3) dr \\ &= \frac{\alpha\gamma R^4}{4P} = \frac{\alpha R^2}{4h} \end{aligned}$$

Infine, siamo interessati a x coordinate del centroide, sostituendo, otteniamo

$$f = f'\cos\phi = \frac{\tan\phi R^2}{4h}\cos\phi = \frac{R^2}{4h}\sin\phi \simeq \frac{R^2}{4h}\phi$$

Il momento risultante sarà allora

$$M = Pd = (\gamma\pi R^2 h)\frac{R^2}{4h}\phi = \frac{\gamma\pi R^4}{4}\phi$$

Questa espressione è indipendente h, e chiaramente la derivazione è errata.

Quindi, adottiamo l'equazione fornita da Feodossiev, 1977 (seppure senza derivazione.

$$M = \frac{\gamma\pi R^2}{4}(2h^2 + R^2)\phi$$

Soluzione

Risolviamo l'equaiton differenziale di governo

$$y = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x + f + \frac{2h^2 + R^2}{4h}\phi$$

con $\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}}$

Condizioni di boundary

Quando $x = 0$, $y = 0$ e $y' = 0$Quando $x = l$, $y = f$ e $y' = \phi$. Quelle condizioni daranno

$$\begin{aligned} B + f + \frac{2h^2 + R^2}{4h}\phi &= 0 \\ A &= 0 \\ A\sin\alpha l + B\cos\alpha l + \frac{2h^2 + R^2}{4h}\phi &= 0 \\ A\alpha\cos\alpha l - B\alpha\sin\alpha l &= \phi \end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Dalle ultime due equazioni, troviamo

$$\frac{\alpha l \tan \alpha l}{4\frac{h}{l}}\left(2\frac{h^2}{l^2}+\frac{R^2}{l^2}\right)=1$$

Sostituire il valore del P, noi otteniamo

$$\alpha l=\sqrt{\frac{P}{EI}}l=\sqrt{\frac{\gamma\pi R^2 l^3}{EI}}\sqrt{\frac{h}{l}}$$

la quantità richiesta h/l è quindi determinato da equazione trascendentale

$$\frac{a}{4}\frac{\tan a\sqrt{\frac{h}{l}}}{\sqrt{\frac{h}{l}}}\left(2\frac{h^2}{l^2}+b^2\right)=1$$

con

$$a=\sqrt{\frac{\gamma\pi R^2 l^3}{EI}} \quad \text{and} \quad b=\frac{R}{L}$$

29.3.2.2 Analogia con vibrazione libera

25 Il problema appena considerato ha una grande somiglianza con la vibrazione di un sistema a molla di massa di due gradi, Fig. 29.4 che è anche un *problema di autovalore*.

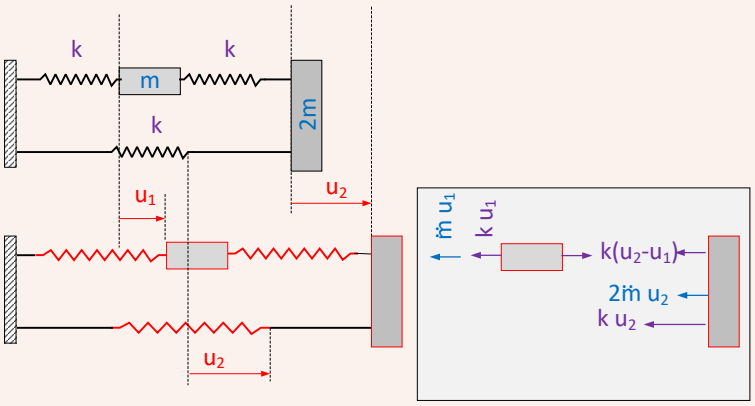


Figura 29.4: Sistema dinamico a due dof

26 Ogni massa è sottoposta a una forza inerziale pari ai tempi di massa l'accelerazione e la forza di primavera:

$$2m\ddot{\mathbf{u}}_2+k\mathbf{u}_2+k(\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1)=0$$
$$m\ddot{\mathbf{u}}_1+k\mathbf{u}_1+k9\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_10=0$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

o in forma matrice

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_2 \end{Bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{U}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

27 L'equazione caratteristica è $|\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}|$ dove $\lambda = \omega^2$e ω è la frequenza naturale.

$$\begin{vmatrix} 2h - \lambda & -h \\ -h & 2h - 2\lambda \end{vmatrix} = 0$$

dove $h = k/m$. Questo riduce al polinomio

$$\lambda^2 - 3h\lambda + \frac{3}{2}h^2 = 0$$

Risolvere, $\lambda = (3 \pm -\sqrt{3})h/2$ or

$$\omega_1 = 0.796\sqrt{k/m}$$
$$\omega_1 = 1.538\sqrt{k/m}$$

28 Per trovare le forme di modalità ϕ_1 e ϕ_2 (valore di riferimento) DOF) sostituiamo nell'equazione caratteristica e stabiliamo il primo elemento pari a 1:

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 1.3660 \end{Bmatrix} \quad \text{and} \quad \phi_1 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -0.3660 \end{Bmatrix}$$

29.3.2.3 Fattori di lunghezza effettivi K

29 Ricordiamo che il carico di contorno Euler è stato derivato per una colonna pinned. In molti casi, una colonna avrà diverse condizioni di confine. si mostra che in tutti i casi, il carico di buckling sarebbe dato da

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \tag{29.26}$$

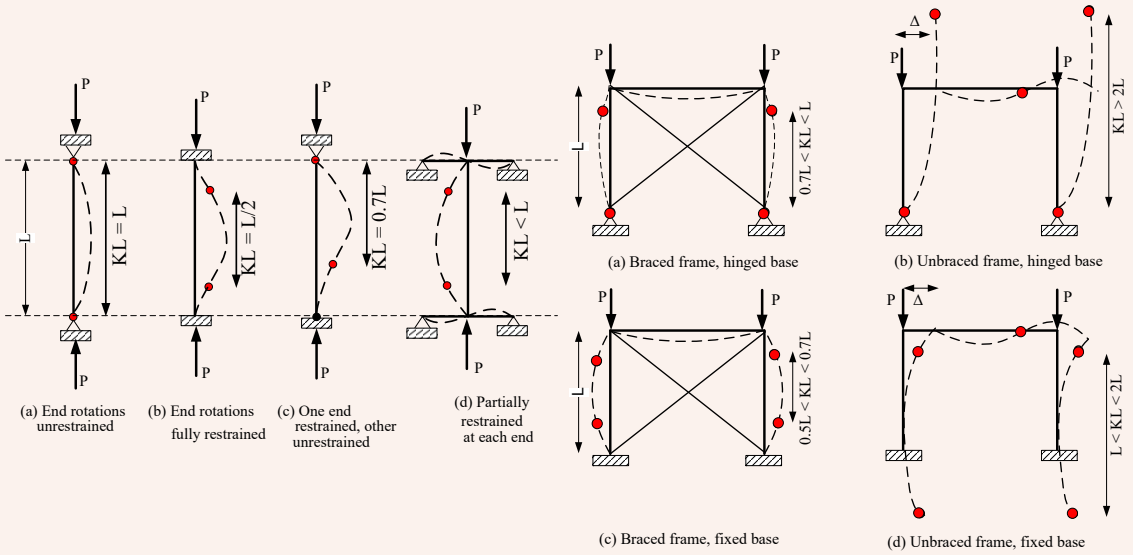
dove K si chiama *fattore di lunghezza efficace* e KL è il *lunghezza effettiva*. Così

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{KL}{r_{\min}}\right)^2}$$

Il rapporto $\frac{KL}{r_{\min}}$ si definisce il rapporto di snellezza . Nota che $r_{\min}$ dovrebbe essere il più piccolo raggio di giro nella direzione non forzata.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) - Le api (b) Cornici

Figura 29.5: Efficace lunghezza per travi e cornici

30 La lunghezza effettiva, può essere determinata solo attraverso metodi numerici o approssimativi ed è la *distanza tra due adiacenti* (reali o virtuali) punti di inflezione, Fig. 29.5,

31 I grafici più utilizzati per la determinazione della lunghezza effettiva sono quelli prodotti dal Consiglio di ricerca sulla stabilità strutturale. 29.6 è mostrato in Fig. 29.7[1]. Va notato

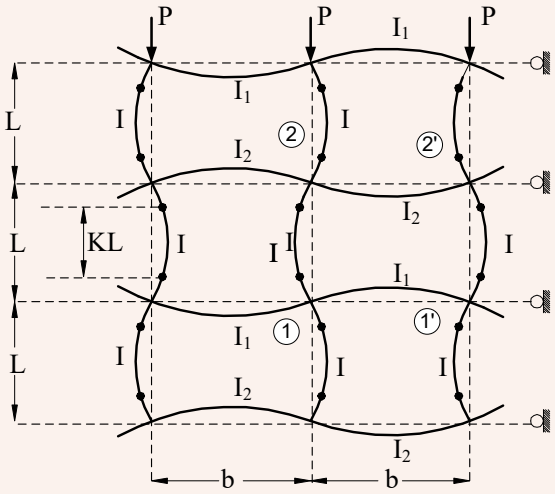


Figura 29.6: Colonne lunghezze efficaci in un multi-bay cornici a più piani

COPIA DI REVISIONE

che questo grafico presuppone che tutti i membri siano ancora nella gamma elastica.

32 Questo tipo di grafico è chiamato un *Un nomogramma* or *nomografo*. È purtroppo un'arte dimenticata che rappresenta graficamente una relazione matematica, ovvero uno schema bidimensionale progettato per consentire il calcolo grafico approssimativo delle funzioni matematiche (solitamente complesse). È stato utilizzato per molti anni per fornire agli ingegneri calcoli grafici veloci di formule complesse a una precisione pratica. È spiacevole che sia ormai fuori moda e sostituito dal computer, e possiamo tendere a fidarci di tutte le cifre significative che ci sono state fornite.

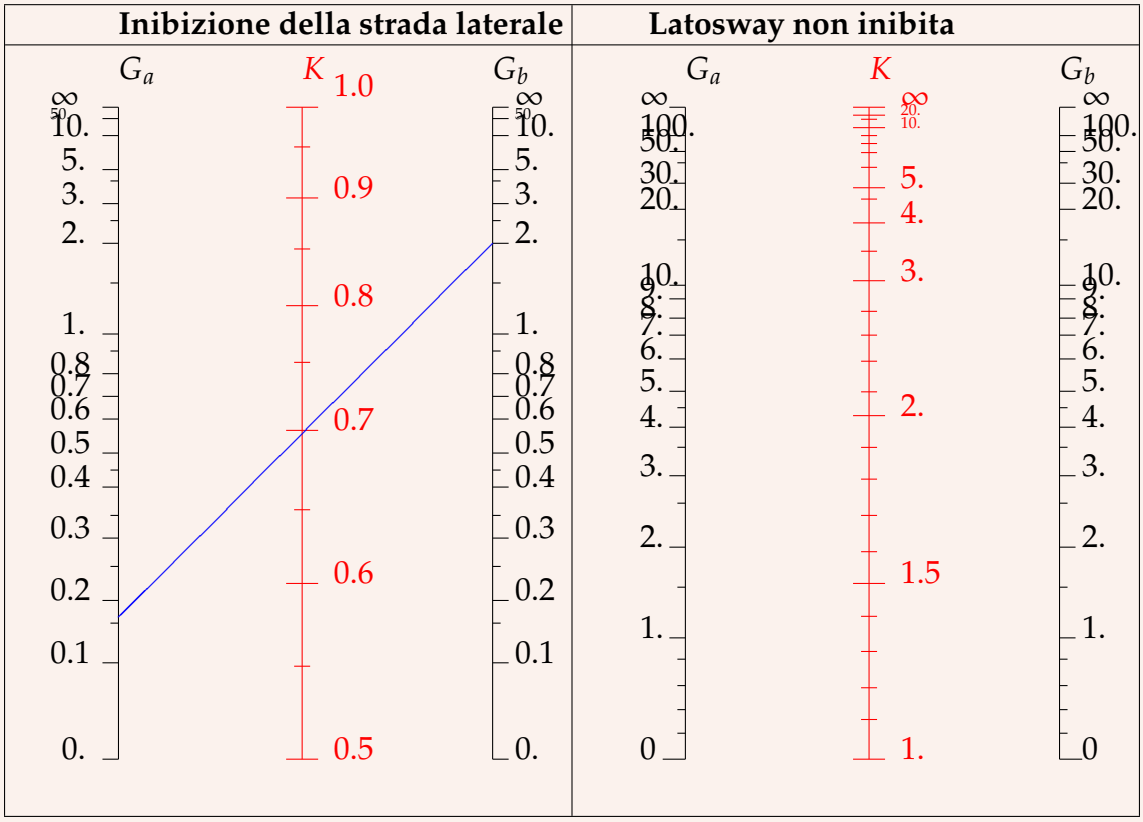


Figura 29.7: Grafico di allineamento per connessioni semi-flessibili (American Institute of Steel Construction, 2016)

33 L'uso del grafico di allineamento comporta il calcolo G a ogni fine della colonna utilizzando la seguente formula

$$G_a = \frac{\sum \frac{I_c}{L_c}}{\sum \frac{I_g}{L_g}}$$

dove G_a è la rigidità alla fine a della colonna, I_c, I_g sono i momento di inerzia delle colonne e

[1] nella figura G_a e G_b sono uguali a 0,18 e 2.0 rispettivamente, il corrispondente K è così pari a 0,7. La linea blu si chiama *linea di indice* or *isopleth*, la linea rossa centrale è *asse scala*.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dei travetti rispettivamente. La somma deve includere solo i membri che sono rigidamente collegati a quella giuntura e sdraiata nell'aereo per cui si sta prendendo in considerazione la buckling.

34 Quindi, una volta G_a e G_b sono determinati, questi valori sono collegato da una linea retta nel grafico appropriato, e k is il punto di intersezione di quella linea con l'asse centrale.

35 In alternativa:

$$\frac{G_A G_B}{4}\left(\frac{\pi}{K}\right)^2 + \left(\frac{G_A + G_B}{2}\right)\left(1 - \frac{\pi/K}{\tan \pi/K}\right) + \frac{2\tan \pi/2K}{\pi/K} = 1$$

McGuire e Winter, 1968, pg. 467

29.3.2.4 Colonne inelastici

36 Ci sono due carichi limitanti per una colonna

1. Rendimento della sezione lorda $P_{cr} = F_y A_g$, che si verifica in colonne rigide corte
2. Elastico (Euler) indurimento, Eq. 29.26 $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$, in colonne lunghe e snelle.

37 Queste due espressioni sono valori asintotici per la stabilità delle colonne reali. I carichi di guasti intermedi sono causati dalla presenza di tensioni residue che a loro volta danno luogo a *inelastico buckling*.

38 L'indurimento inelastico avviene quando gli stress (media) non hanno ancora raggiunto lo stress di resa, ed è basato sul modulo tangente E_t che è inferiore al modulo iniziale E.

39 Le tensioni residue (causate da un raffreddamento irregolare) inizieranno l'installazione inelastica, Fig. 29.8.

40 La curva di inelastica buckling deve essere asintotica sia per l'accoppiamento elastico Euler (per colonne sottili), che per lo stress della resa (per le colonne rigide).

41 Il Consiglio di Ricerca per la Stabilità Strutturale (SSRC) ha proposto una curva parabolica che prevede un passaggio tra buckling elastico e rendimento, tenendo conto della presenza di tensioni residue e del conseguente instauramento inelastico Fig. 29.9.

$$\sigma_{cr} = \sigma_y\left[1 - \frac{\sigma_y}{4\pi^2 E}\left(\frac{KL}{r_{min}}\right)^2\right]$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

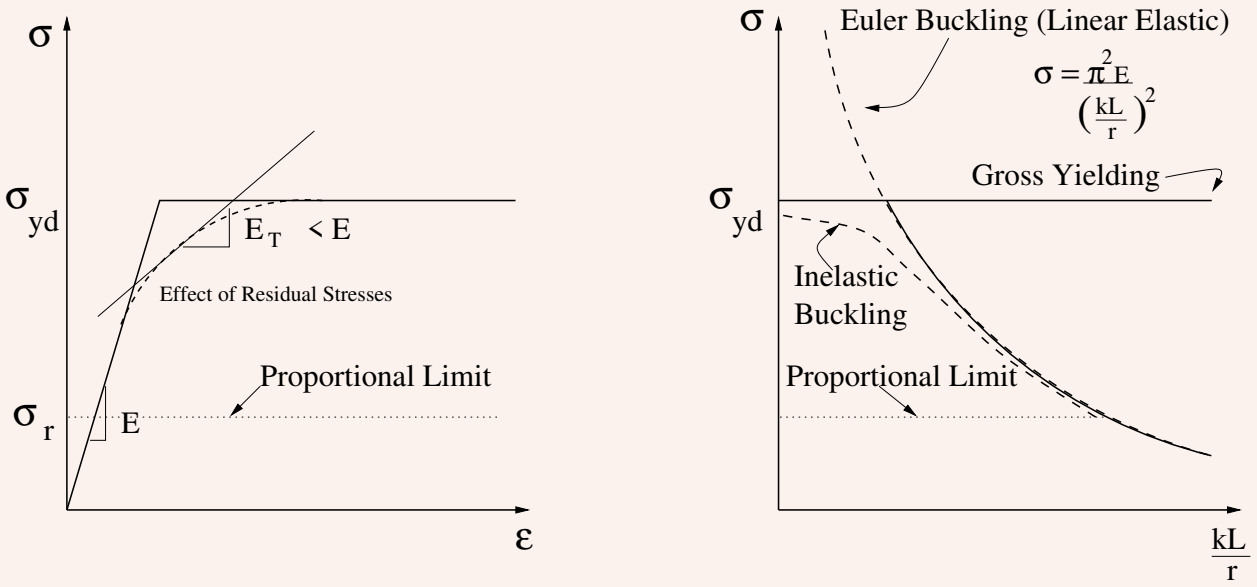


Figura 29.8: Inelastica buckling

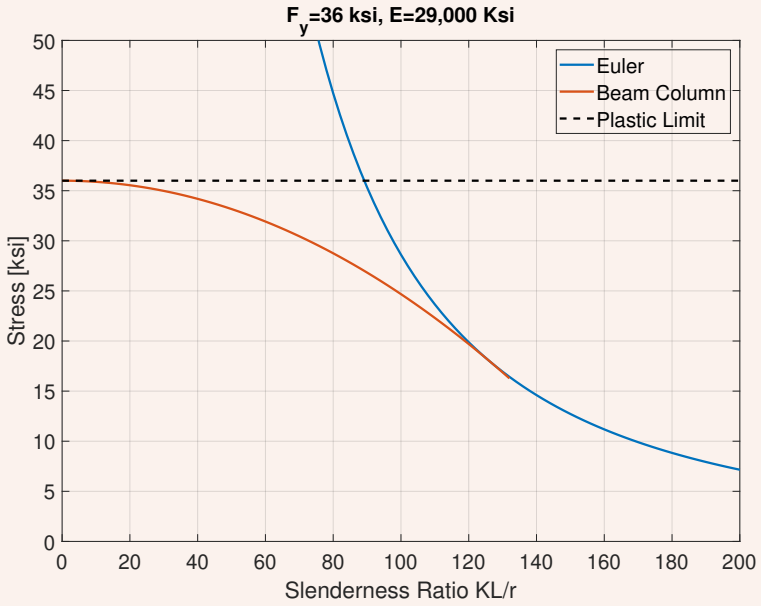
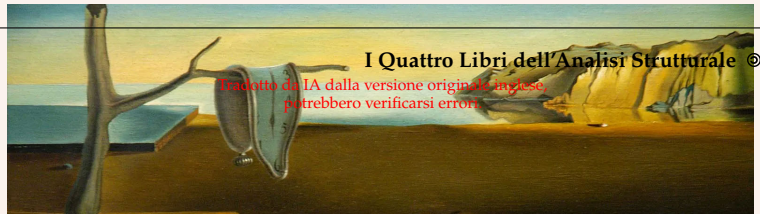


Figura 29.9: Curva della colonna di Euler e ssrc

COPIA DI REVISIONE



 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Capitolo 30

Strutture del cavo

Abstract

I cavi sono strutture in grado di sostenere grandi deformazioni, adattando continuamente la loro geometria per ospitare carichi e portando solo forze trasligenti. Queste caratteristiche rendono i cavi sia preziosi che difficili da analizzare, e queste complessità saranno esplorate in questo capitolo. Cominciamo con carichi di punti e cavi funicolari, e poi procediamo a carichi distribuiti. quelli distribuiti sulla lunghezza proiettata, con una forma parabolica e quelli distribuiti lungo l'arco del cavo, dando origine a una forma catenaria. In entrambi i casi, diverse condizioni di partenza (lunghezza, sag, supporti, ecc.) richiedono diversi set di equazioni. Esploreremo anche l'impatto della temperatura, l'estesabilità del cavo e la sua prestressante. Infine, il capitolo sarà illustrato con numerosi esempi di crescente complessità per coprire a fondo l'argomento.

30.1 Introduzione 1155
30.2 Carico concentrato 1156
30.2.1 Ex 30.1: Cavo funicolare . . . 1157
30.2.2 Ex 30.2: Cavo funicolare incline 1159
30.2.3 Ex 30.3: Gondola bicavo . . . 1160
30.3 Cariche distribuite; 1160
30.3.1 Equazione dell'equilibrio . . 1161
30.3.2 qdx; carico laterale; parabola 1162
30.3.3 $q$ds; catenaria 1180
30.3.4 Confronto tra le soluzioni a base di parabola e catenaria . 1187

30.1 Introduzione

1 Un cavo è un membro flessibile snello con rigidità flessorale zero o trascurabile, in modo da poter trasmettere solo forze di trazione.

2 La forza di trazione in qualsiasi punto agisce nella direzione del tangente al cavo (come ogni altro componente causerà flessore).

COPIA DI REVISIONE

3 La sua forza deriva dalla capacità di subire ampie variazioni nella geometria (slopes in punti di applicazione del carico) per ospitare la distribuzione del carico.

4 I cavi resistono alle forze verticali subendo il sag (h) e quindi sviluppando forze di trazione.

5 La componente orizzontale di questa forza (H) si chiama spinta .

6 La distanza tra i supporti del cavo è chiamata corda (span).

7 Il rapporto tra sag e span è denotato da

$$r = \frac{h}{l}$$

8 Quando un insieme di carichi concentrati viene applicato a un cavo di (relativamente) peso trascurabile, il cavo si discosta in una serie di segmenti lineari e la forma risultante è chiamata funicolare!poligono .

9 Se un cavo supporta solo le forze verticali, allora il componente orizzontale H della tensione del cavo T rimane costante (quindi entrambe le reazioni orizzontali sono uguali e opposte).

10 Una caratteristica unica delle strutture dei cavi (e di strutture flessibili per quella materia) è che non solo sono le forze interne sconosciute, ma anche la geometria. In altre parole, poiché la geometria varia con il carico (le equazioni di equilibrio si basano sul diagramma del corpo libero della configurazione deformata), deve essere anche determinato. Quindi, l'analisi delle strutture dei cavi comporta non solo reazioni e forze interne (assiali), ma anche geometria.

11 Se iniziamo con il cavo scaricato e non allungato prima di applicare il carico, il problema dovrebbe essere risolto iterativamente (come è geometricamente non lineare). D'altra parte, in genere si avvia con un cavo teso prima che venga applicato il carico. In questo caso le deformazioni aggiuntive sono di solito piccole, e possiamo trattare il cavo come inestessibili, e le equazioni di equilibrio sono sufficienti per risolvere il problema,

30.2 Carico concentrato

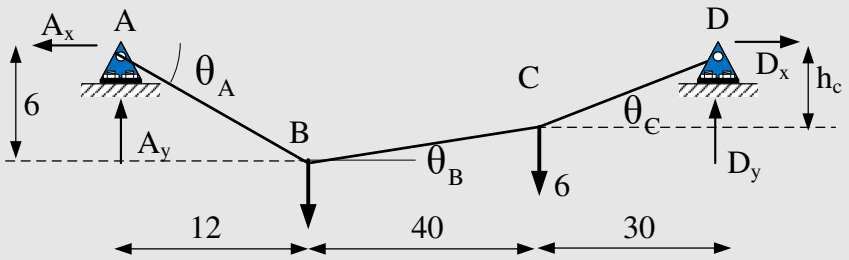
12 Un carico del punto di supporto del cavo è indicato come un funicolare!cabile . La sua analisi è *a priori* abbastanza semplice e utilizza le equazioni di equilibrio di base.

13 Iniziamo con un semplice esempio, e poi definiamo un teorema funicolare che governa la forma della funicolari.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

30.2.1 Ex 30.1: Cavo funicolare



Abbiamo 4 reazioni esterne, tuttavia quelle orizzontali sono uguali e possiamo usare una qualsiasi delle varie equazioni di condizioni oltre alle tre equazioni di equilibrio. Prima di tutto, risolviamo per A_y, D_y e $H = A_x = D_x$. Per questo problema potremmo usare le seguenti 3 equazioni di equilibrio statico $\Sigma F_x = \Sigma F_y = \Sigma M = 0$, tuttavia poiché non abbiamo alcuna forza in x direzione, la seconda equazione non è di nessun valore. Invece considereremo il seguente set $\Sigma F_y = \Sigma M_A = \Sigma M_B = 0$. Si noti che abbiamo in questo problema 8 sconosciute ($A_x, A_y, D_x, D_y, \theta_A, \theta_B, \theta_C$ e h_C), e abbiamo quattro nodi e due equazioni di equilibrio a ogni nodo.

1. Prima risolviamo per D_y

$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_A = 0; \Rightarrow 12(30) + 6(70) - D_y(100) = 0 \Rightarrow D_y = 7.8 \text{ kip}$$

2. Allora risolviamo per A_y

$$(+\uparrow)\ \Sigma F_y = 0; \Rightarrow A_y - 12 - 6 + 7.8 = 0 \Rightarrow A_y = 10.2 \text{ kip}$$

3. Risolvere la forza orizzontale isolando il diagramma del corpo libero AB

$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_B = 0; \Rightarrow A_y(30) - H(6) = 0 \Rightarrow H = 51 \text{ kip}$$

4. Ora possiamo risolvere per il sacco a punto C isolando il diagramma del corpo libero CD

$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_C = 0 \Rightarrow -D_Y(30) + H(h_c) = 0$$

$$\Rightarrow h_c = \frac{30D_y}{H} = \frac{30(7.8)}{51} = 4.6 \text{ ft}$$

5. Ora risolviamo per le forze o trazioni cavi interne in questo caso

$$\tan\theta_A = \frac{6}{30} = 0.200 \Rightarrow \theta_A = 11.31 \text{ deg}$$

$$T_{AB} = \frac{H}{\cos\theta_A} = \frac{51}{0.981} = 51.98 \text{ kip}$$

$$\tan\theta_B = \frac{6 - 4.6}{40} = 0.035 \Rightarrow \theta_B = 2 \text{ deg}$$

$$T_{BC} = \frac{H}{\cos\theta_B} = \frac{51}{0.999} = 51.03 \text{ kip}$$

$$\tan\theta_C = \frac{4.6}{30} = 0.153 \Rightarrow \theta_C = 8.7 \text{ deg}$$

$$T_{CD} = \frac{H}{\cos\theta_C} = \frac{51}{0.988} = 51.62 \text{ kip}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

14 In esecuzione dei calcoli dell'esempio precedente, è chiaro che i passaggi sono simili all'analisi di un fascio semplicemente supportato con una campata pari a quella del cavo e portando lo stesso carico verticale. Si nota anche che la forma del cavo e il diagramma di momento della trave equivalente sono identici, Fig. 30.1.

15 Non abbiamo in coincidenza $Hh = M$:

$$(51)(6) = (10.2)(30) = 306\checkmark$$
$$(51)(4.6) = (7.8)(30) = 234\checkmark$$

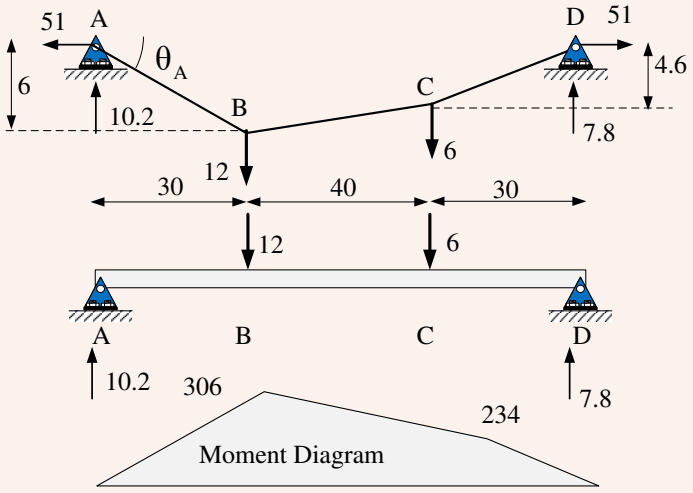


Figura 30.1: Verifica della teoria dei cavi

16 Quindi, possiamo affermare che

Definition 30.1: Cavo generale

In qualsiasi punto su un cavo azionato da carichi verticali, il prodotto del componente orizzontale9 della tensione del cavo e la distanza verticale dal punto al cordone del cavo uguale al momento di piegatura che si verificherebbe in quella sezione se i carichi trasportati dal cavo stavano agendo su un raggio semplicemente supportato della stessa durata del cavo.

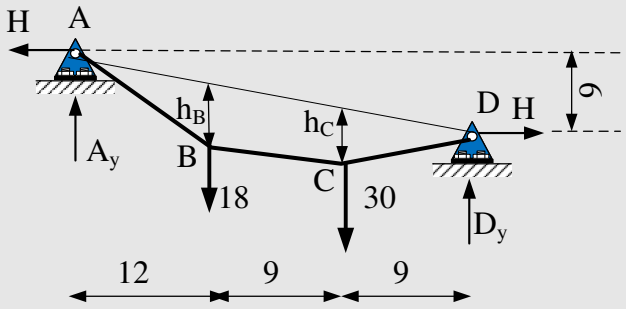
17 Questo sarà ulteriormente illustrato dal seguente esempio.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

30.2.2 Ex 30.2: Cavo funicolare incline

Cerchiamo di determinare le reazioni e i sag a B e C per la seguente funicolare.



Utilizzo di equazioni di equilibrio

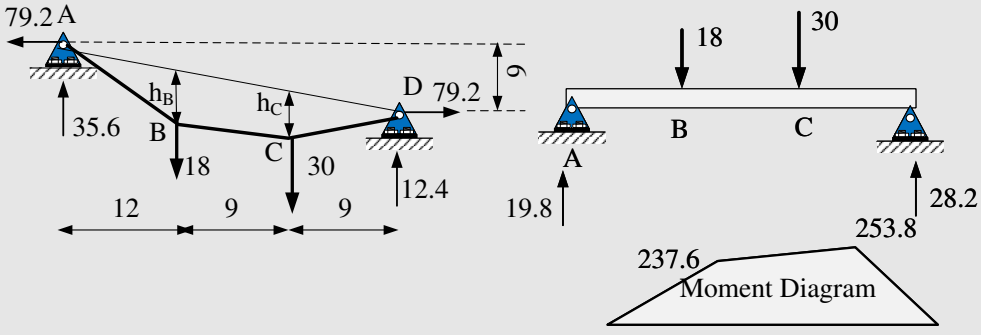
$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_A = 0 \Rightarrow 12(18) + 21(30) - 6H - 30D_y = 0$$
$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_D = 0 \Rightarrow 18(18) + 9(30) - 30A_y + 6H = 0$$
$$(+\uparrow)\ \Sigma F_y A_y + D_y - 30 - 18 = 0$$

La soluzione di queste tre equazioni è

$$\lfloor\ A_y \quad D_y \quad H\ \rfloor = \lfloor\ 35.6 \quad 12.4 \quad 79.2\ \rfloor$$

Il diagramma di momento corrispondente è mostrato qui sotto, e i sag sono semplicemente determinati da

$$h_B = \frac{M_B}{H} = \frac{237.6}{79.2} = 3$$
$$h_C = \frac{M_C}{H} = \frac{253.8}{79.2} = 3.2$$



COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

18 Quindi, i sag dei cavi possono essere facilmente determinati dalle equazioni di equilibrio e dal teorema generale del cavo.

19 Si noti che per estensione, la forma di un cavo che sostiene un carico uniformemente distribuito attraverso l'accordo sarà parabolica (forma del diagramma di momento corrispondente).

30.2.3 Ex 30.3: Gondola bicavo

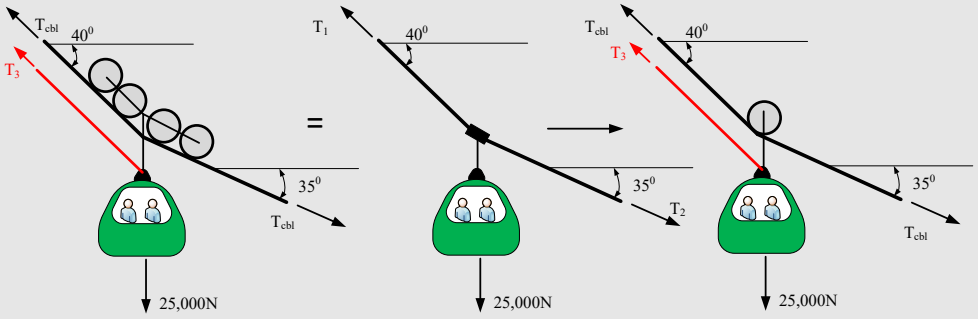
Cerchiamo di determinare la forza necessaria per tirare su una gondola (con il cavo rosso), sostenuta da un cavo portante (nero), viaggiando ad una velocità costante da una torre inferiore a quella più alta. Prima di tutto presumiamo che la gondola sia fissata (clamata) al cavo di supporto, ignorando così il tirante, abbiamo

$$\begin{cases} (\leftarrow\ \ )\,\Sigma F_x = 0 & \Rightarrow \quad T_1\cos(40) - T_2\cos(35) \\ (+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0 & \Rightarrow \quad T_1\sin(40) - T_2\sin(35) - 25,000 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 234,900 \\ 219,700 \end{Bmatrix} \text{ N}$$

Si nota che le tensioni dei cavi sono circa 10 volte il peso della gondola, e $T_1 > T_2$ Se sclampiamo la gondola, si scivola giù, a meno che non sia tenuto da T_3, e (supponendo zero attrito nel sistema di supporto) avremmo dovuto avere una tensione costante nel cavo T_{cbl}. Da qui

$$T_3 = T_1 - T_2 = 234,900 - 219,700 = 15,200 \text{ N}$$
$$T_{cbl} = 234,900 - 15,200 = 219,700 \text{ N}$$



30.3 Cariche distribuite;

20 In questa sezione successiva esamineremo due casi. Nel primo il carico viene distribuito uniformemente lungo la lunghezza del cavo proiettato (come ad esempio un ponte a carica

COPIA DI REVISIONE

uniforme), e l'altro dove il cavo è semplicemente sostenere il proprio peso (distribuito uniformemente sulla lunghezza dell'arco).

21 Prima di procedere, va notato che un problema impegnativo nell'analisi dei cavi è la varietà delle soluzioni corrette per un dato problema, cioè una soluzione può essere in termini di combinazione della forza orizzontale, del sag, della massima tensione o lunghezza del cavo. Ciò, a volte, può fare soluzioni o confronto con altre soluzioni perplexing.

30.3.1 Equazione dell'equilibrio

22 Il diagramma del corpo libero di un cavo sospeso con carico uniformemente distribuito è mostrato in Fig. 30.2. In genere, la campata L massimo sag d e distanza verticale tra i supporti h è conosciuto.

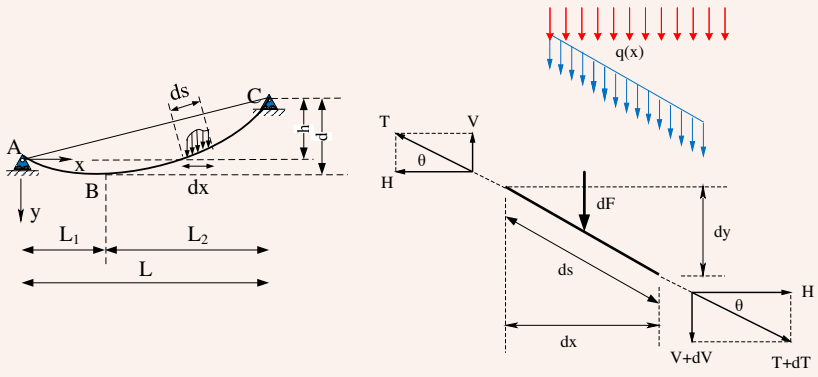


Figura 30.2: Geometria del cavo # 1

23 In assenza di carico orizzontale abbiamo H =costante.

24 Summazione delle forze verticali rese:

$$(+\downarrow)\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -V + dF + (V + \mathrm{d}V) = 0 \tag{30.1}$$

$$dV + dF = 0 \tag{30.2}$$

dove V è il componente verticale della tensione del cavo x.

25 Perché il cavo deve essere tangente a TAbbiamo:

$$\tan\theta = \frac{V}{H}$$

Eliminare V e riscrivi in termini di H che è costante lungo il cavo sostituendo in Eq. 30.2

$$\mathrm{d}(H\tan\theta) + dF = 0 \tag{30.3}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

30.3.2 qdx; carico laterale; parabola

30.3.2.1 Geometria

26 Due equazioni equivalenti per la geometria del cavo saranno derivate in quanto avremo bisogno di entrambe le derivazioni successive.

I Termini di utilizzo H, q, L

27 Questa prima derivazione sarà in termini di forza orizzontale H, carico q, e la geometria L e hFico. 30.2

28 Per un carico uniformemente distribuito lungo x (come il cavo che supporta un ponte di ponti) abbiamo $dF = qdx$ Eq. 30.3 può essere riscritto come

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(H\tan\theta\right) = q$$

Da H è costante (non viene applicato alcun carico orizzontale

$$-H\frac{d}{\mathrm{d}x}\left(\tan\theta\right) = q \tag{30.4}$$

e sostitutiva $\tan\theta = \frac{dy}{\mathrm{d}x}$ in Eq. 30.4 otteniamo l'equazione differenziale di governo per i cavi

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{q}{H} \tag{30.5}$$

29 Nota analogia con flessore

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M}{EI}$$

30 Doppia integrazione dà

$$Hy' = -qx + C_1 \tag{30.6}$$

$$Hy = -q\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2 \tag{30.7}$$

C_1 e C_2 si ottengono dalle condizioni di confine: $y = 0$ at $x = 0$ e $y = -h$ at $x = L$

31 Questo è quanto

$$C_2 = 0$$

$$-Hh = -q\frac{L^2}{2} + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{qL}{2} - H\frac{h}{L}.$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Quindi Eq. 30.6 e 30.7 diventare

$$y' = -\frac{q}{H}x + \frac{qL}{2H} - \frac{h}{L} \tag{30.8}$$

$$y = -\frac{q}{2H}x^2 + \left(\frac{qL}{2H} - \frac{h}{L}\right)x \tag{30.9}$$

Così il cavo è parabolico in forma e questa equazione dà la forma $y(x)$ in termini di forza orizzontale H ancora da determinare.

II In termini di s, L

32 La forma del cavo può essere ottenuta da Eq. 30.9 (per y), e Eq. 30.23 per H, combinandoli, otteniamo

$$\frac{x\left(2d\left(\sqrt{1-\frac{h}{d}}+1\right)(L-x)+h(x-2L)\right)}{L^2}$$

rispetto a Fig. 30.3.

33 To obtain the curve equation with respect to the chord and in terms of the sag s, Fig. 30.3, we set h=0

$$y = \frac{4sx}{L^2}(L-x)$$

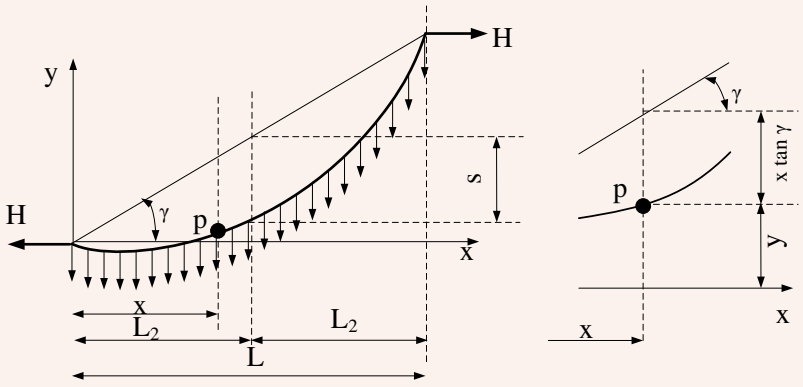


Figura 30.3: Geometria del cavo # 2

34 Torniamo indietro e ora cerchiamo di determinare l'equazione del cavo rispetto ad un asse orizzontale

$$y = \frac{4sx}{L^2}(L-x) + x\tan\gamma \tag{30.10}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Entità della freccia

35 Sag massimo rispetto all'accordo sarà

$$s = \frac{qL^2}{8H} \tag{30.11}$$

36 Il sacco d rispetto al più alto sostegno sarebbe dato da una di queste due equazioni

$$d = \frac{hL^2 - 2hLL_1 + hL_1^2}{L(L-2L_1)} \qquad \text{in terms of } h \text{ and } L_1$$

$$d = \frac{\left(2hH + L^2q\right)^2}{8HL^2q} \qquad \text{in terms of } q \text{ and } H$$

Posizione della freccia massima

37 Il punto del massimo sag d (at L_1) ha $y' = 0$, da qui di Eq. 30.8

$$0 = -\frac{q}{H}x + \frac{0}{qL}2H - \frac{h}{L} \Rightarrow x = \frac{L}{2} - \frac{Hh}{qL} = L_1 \;\&\; L_2 = \frac{L}{2} + \frac{Hh}{qL}$$

Prendere i momenti di AB e BC rispettivamente su A e B

$$\begin{aligned} H(d-h) - q\frac{L_1^2}{2} = 0 \Rightarrow H = q\frac{L_1^2}{2d-h} \\ Hd - q\frac{L_2^2}{2} = 0 \Rightarrow H = q\frac{L_2^2}{2d} \end{aligned} \tag{30.12}$$

Equazione H

$$q\frac{L_1^2}{2d-h} = q\frac{L_2^2}{2d} \Rightarrow L_1 = \sqrt{\frac{d-h}{d}}L_2$$

But $L_1 + L_2 = L$, hence

$$L2 = \frac{L}{\left[\sqrt{\frac{d-h}{d}} + 1\right]} \tag{30.13}$$

Che cosa dà

$$L_1 = L - \frac{L}{\sqrt{\frac{d-h}{d}} + 1}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Lunghezza cavo Arc

38 In generale la lunghezza iniziale del cavo L_{cbl} Non è dato, per esempio, che deve essere determinato in modo tale da non superare un certo sag di cavi. L_{cbl} e pretensionamento iniziale σ_0 fino a quando il sag richiede è raggiunto.

39 La lunghezza del cavo è data da

$$L_{cbl} = \int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \tag{30.14}$$

40 Passeremo attraverso due espressioni per la lunghezza, il primo in termini di H, il secondo in termini di s e L.

I In termini di H

41 Ricalcare l'espansione infinita di teorema binomiale:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots \\ (1+b)^n &= 1 + nb + \frac{n(n-1)b^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)b^3}{3!} + \cdots \\ \Rightarrow \text{for } b^2 << 1; \sqrt{1+b} &= (1+b)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{8}b^2\end{aligned} \tag{30.15}$$

Quindi semplificamo Eq. 30.14 by

$$L_{cbl} = \int_0^L \left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{dy}{dx}\right)^4\right\} dx \tag{30.16}$$

dy/dx è ottenuto da Eq. 30.8, H da Eq. 30.23, e un piccolo aiuto da Mathematica, otteniamo

$$\begin{aligned}L_{Cfr.} \simeq \frac{1}{120L^3}\Bigg\{&-3d^4\left(\sqrt{1-\frac{h}{d}}+1\right)^8 \\ &+ 10d^2\left(\sqrt{1-\frac{h}{d}}+1\right)^4 (L'articolo 3, paragrafo 2, del regolamento n.) - 15h^4 \\ &+ 60h^2L^2 + 20\Bigg\}\end{aligned} \tag{30.17}$$

42 In alternativa, in termini di H

$$L_{cbl} = -\frac{h^4}{8L^3} + \frac{Lq^2\left(2L^2-3h^2\right)}{48H^2} + \frac{h^2}{2L} - \frac{L^5q^4}{640H^4} + L \tag{30.18}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

II In termini di s e L

43 Per un accordo orizzontale, iniziamo con Eq. 30.10, spostare l'origine al punto più basso (che è a metà-span), portando a

$$y = \frac{4s}{L^2}x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{8sx}{L^2}$$

Sostituito in Eq. 30.14

$$L_{cbl} = 2\int_0^{L/2}\left(1 + \frac{64h^2x^2}{L^4}\right)dx$$

Invochiamo ancora il teorema binomiale Eq. 30.15 e conservare i primi termini della serie risultante

$$L_{cbl} = 2\int_0^{L/2}\left[1 + \frac{1}{2}(64)\frac{h^2}{L^4}x^2 - \frac{1}{4}(64)^2\frac{h^4}{L^8}x^4 + \cdots\right]dx$$

resa

$$L_{cbl} \simeq L\left(1 + \frac{8\theta^2}{3} - \frac{32\theta^4}{5}\right) \tag{30.19}$$

dove θ è ora definito come

$$\theta = h/L \tag{30.20}$$

44 Per un cavo inclinato, dovremmo usare dy/dx da Eq. 30.10, tuttavia questo avrebbe dato un'equazione molto ingombrante (attraverso Mathematica)

$$\begin{aligned} L_{cbl} \simeq \frac{1}{8\theta}\Bigg\{&\sqrt{\sec^2(\gamma)}(-L\tan(\gamma) - 4L\theta + 4s) \\ &+ L\left[(\tan(\gamma) + 4\theta)\sqrt{8\theta(\tan(\gamma) + 2\theta) + \sec^2(\gamma)} + \sinh^{-1}(\tan(\gamma) + 4\theta)\right] \\ &- L\sinh^{-1}(\tan(\gamma))\Bigg\} \end{aligned} \tag{30.21}$$

45 Un'espressione semplificata può essere determinata assumendo la lunghezza del cavo è uguale a quella di un cavo con una corda orizzontale, dove l'arco corrisponde alla lunghezza dell'accordo inclinato del cavo, cioè $L\sec\gamma$e il sacco è uguale $s\cos\gamma$, che è un'espressione approssimativa per la massima distanza perpendicolare dal cavo all'accordo del cavo.

$$\theta' = \frac{s\cos\gamma}{L\sec\gamma} = \frac{\theta}{\sec^2\gamma}$$

Sostituire in Eq. 30.19

$$L_{cbl} = L\left(\sec\gamma + \frac{8}{3}\frac{\theta^2}{\sec^3\gamma}\right) \tag{30.22}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

30.3.2.2 Forze interne

Forza orizzontale

46 Successivamente, combinando Eq. 30.12 con Eq. 30.13

$$H = \frac{qL^2}{2d\left[\sqrt{\frac{d-h}{d}}+1\right]^2} \tag{30.23}$$

Tensione massima

47 Da Fig. 30.2[1]

$$\frac{T}{H} = \frac{ds}{dx} \Rightarrow T(x) = H\frac{ds}{dx}$$

Tuttavia, la Commissione non ha ancora fatto ricorso ad un'azione di

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx \Rightarrow T(x) = H\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{30.24}$$

48 Per il caso generale di un cavo inclinato, e utilizzando Eq. 30.10

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{8sx}{L^3} - \frac{4s}{L} + \tan\gamma \\ &= \frac{8\theta x}{L^3} - 4\theta + \tan\gamma\end{aligned}$$

dove $\theta = s/L$ e corrisponde al rapporto di sag. Differenziazione che otteniamo

$$T(x) = H\left(1 + \frac{64\theta^2x^2}{L^2} + 16\theta^2 + \tan^2\gamma - \frac{64\theta^2x}{L} + \frac{16\theta x}{L}\tan\gamma - 8\theta\tan\gamma\right)^{1/2} \tag{30.25}$$

La massima tensione si verificherà alle estremità del cavo

$$\begin{aligned}&\text{For } x\text{=0 ; } T_{max} = H\left(1 + 16\theta^2 + \tan^2\gamma - 8\theta\tan\gamma\right)^{1/2} \\ &\text{For } x\text{=L ; } T_{max} = H\left(1 + 16\theta^2 + \tan^2\gamma + 8\theta\tan\gamma\right)^{1/2}\end{aligned} \tag{30.26}$$

30.3.2.3 elastico elastico

In termini di θ e H

[1] Adattato da Norris, C. H. e J. B. Wilbur. "Elementi strutturali". 1960

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

[49] Un cavo caricato subirà un elastico che potrebbe influenzare sostanzialmente il sacco. Il sag sarebbe semplicemente $\Delta L = FL/AE$.

[50] Anche se la tensione del cavo $T(x)$ varia con lunghezza, determina la tensione media che se applicata per tutta la durata del cavo causerà lo stesso allungamento elastico totale (Norris e Wilbur, 1960)

$$\frac{T_{avg} L_{cbl}}{AE} = \int_0^{L_{cbl}} \frac{T(l)dl}{AE}$$

A e E essere costante

$$\begin{aligned} T_{avg} &= \frac{1}{L_{cbl}} \int_0^{L_{cbl}} T(x)dl = \frac{1}{L_{cbl}} \int_0^{L_{cbl}} H \frac{dl}{dx} dl \\ &= \frac{H}{L_{cbl}} \int_0^{L} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx \end{aligned}$$

Considerando un carico uniforme per lunghezza orizzontale, e una corda di cavo inclinata, dy/dx può essere ottenuto da Eq. 30.10 e noi abbiamo

$$T_{avg} = \frac{HL}{L_{cbl}} \left(1 + \frac{16}{3}\theta^2 + \tan^2 \gamma \right) \tag{30.27}$$

Infine, usiamo Eq. 30.22 per determinare l'allungamento del cavo

$$\Delta L = \frac{HL}{AE} \frac{1 + 16\theta^2/3 + \tan^2 \gamma}{\sec \gamma + 8/3(\theta^2/\sec^3 \gamma)} \tag{30.28}$$

In termini di q e L e L_{cbl}

[51] La lunghezza di un cavo inclinato nello stato deformato può essere espressa come

$$\begin{aligned} L_{cbl}^{ext} &= \int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx \\ &= L_{cbl} \left(1 + \alpha_T \Delta T - \frac{\sigma_0}{E} \right) + \int_0^L \frac{T\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}}{EA} dx \end{aligned} \tag{30.29}$$

che include l'estensione termica $\alpha \Delta T$, stress iniziale σ_0, e la tensione del cavo T. Il secondo termine sulla destra può essere riscritto come (Usando Eq. 30.24)

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{T\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}}{EA} dx &= \frac{H}{EA} \int_0^L \left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right) dx \\ &= \frac{H}{EA} \int_0^L \left(\tan \gamma + \frac{V(x)}{H} \right)^2 dx \end{aligned} \tag{30.30}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

e da Fig. 30.4

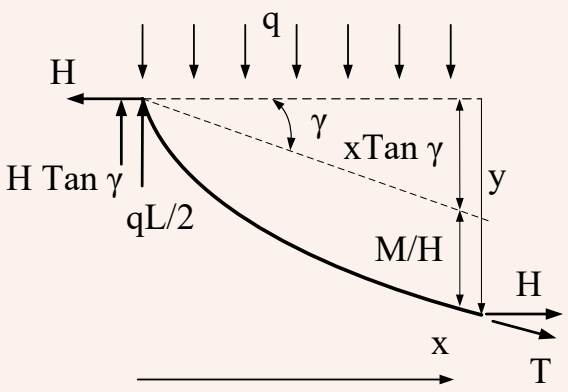


Figura 30.4: Geometria di un cavo inclinato sottoposto a carico trasversale orizzontale uniforme

$$y = \frac{M(x)}{H} + x\tan\gamma; \quad y' = \frac{V(x)}{H} + \tan\gamma; \quad V(x) = H\tan\gamma + q\frac{L}{2} - qx$$

Sostituito in Eq. 30.30 e 30.29 questo riduce a

$$L_{cbl}^{ext} = L_{cbl}\left(1 + \alpha_T\Delta T - \frac{\sigma_0}{E}\right) + \frac{L^2 q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma) + 8\theta^2 + 3\right) \tag{30.31}$$

30.3.2.4 Equivalente rigidità assiale

49 Un termine di rigidità corrisponde alla forza per spostamento unitario, quello di un cavo è semplicemente L/AE

50 Per un cavo caricato, la rigidità sarebbe la forza orizzontale per unità corrispondente allungamento. 30.5a che sarebbe dH/du. Come mostrato in seguito, questa rigidità è determinata attraverso l'inversione del termine di flessibilità (deformazione per forza unitaria). L'approccio è relativamente semplice:

1. Applicare H, cavo allunga da $u_1 = HL/AE$.
2. Con la tensione H Tenuto in funzione, applicare il carico trasversale q, questo causerà un accorciamento (Eq. 30.16)

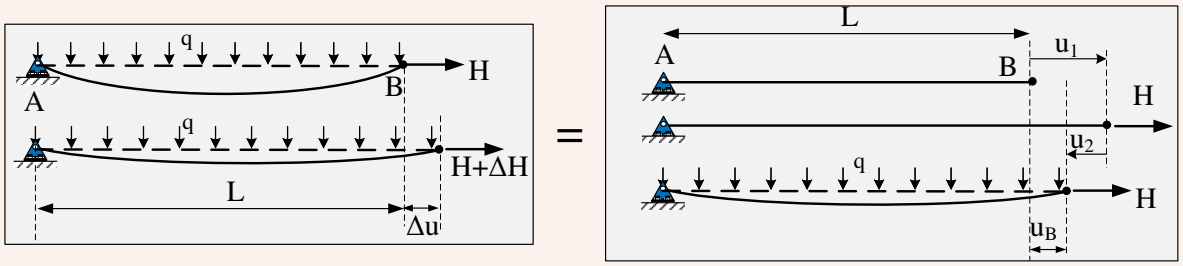
$$u_2 = \int_0^L \left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{dy}{dx}\right)^4\right\} dx$$

e $y(x)$ è dato da Eq. 30.37, sostitutiva, rendimenti

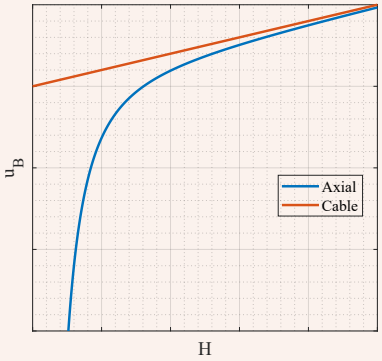
$$u_2 = \frac{L}{24}\left(\frac{qL}{H}\right)^2 - \frac{L}{640}\left(\frac{qL}{H}\right)^4$$

COPIA DI REVISIONE

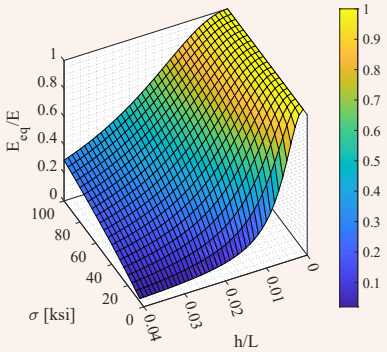
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Fissazione del cavo



(b) Effetto addolcitore di carico trasversale



(c) Equivalente E in termini di stress e sag

Figura 30.5: Durezza del cavo

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

3. Lo spostamento netto, e i suoi derivati rispetto a H, sarà così

$$u_B = u_1 - u_2 = \frac{HL}{AE} - \frac{L}{24}\left(\frac{qL}{H}\right)^2 + \frac{L}{640}\left(\frac{qL}{H}\right)^4 \tag{30.32}$$

$$\begin{aligned}\frac{du_B}{dH} &= \frac{L}{AE} + \frac{L}{12H}\left(\frac{qL}{H}\right)^2 - \frac{L}{160H}\left(\frac{qL}{H}\right)^4 \\ &= \frac{L}{AE}\left\{1 + \frac{1}{12}\frac{AE}{H}\left(\frac{qL}{H}\right)^2 - \frac{1}{160}\frac{AE}{H}\left(\frac{qL}{H}\right)^4\right\}\end{aligned}$$

   Eq. 30.32 è tracciato in Fig. 30.5b e l'effetto di ammorbidimento[2] del carico trasversale è chiaramente identificato.
4. Tuttavia, siamo davvero interessati al termine rigidità

$$\frac{dH}{du_B} = k_t = \left(\frac{1}{1 + (1/12)(AE/H)(qL/H)^2 - (1/160)(AE/H)(qL/H)^4}\right)\frac{AE}{L} \tag{30.33}$$

51 La rigidità tangente può anche essere espressa in termini di un modulo elastico equivalente E_{eq}

$$E_{eq} = \left(\frac{E}{1 + (1/12)(AE/H)(qL/H)^2 - (1/160)(AE/H)(qL/H)^4}\right)\frac{AE}{L} \tag{30.34}$$

Va notato che il carico laterale ridurrà la rigidità, quindi avremo sempre $E_{eq} < E$.

52 Possiamo sostituire

$$\sigma = \frac{H}{A}; \quad \text{and} \quad \frac{qL}{H} = 8\frac{H}{L}$$

così Eq. 30.34 diventa to

$$E_{eq} = \frac{E}{1 + \frac{16}{3}\frac{E}{\sigma}\left(\frac{h}{L}\right)^2 - \frac{128}{5}\frac{E}{\sigma}\left(\frac{h}{L}\right)^4} \tag{30.35}$$

Il modulo equivalente dipende sia dallo stress iniziale del cavo che dal rapporto sag, ulteriormente esplorato dalla Fig. 30.5c, dove si nota che E_{eq} diminuisce con aumento del sag o diminuzione della tensione assiale.

[2] Questo è analogo a quello che $P - \delta$ effetto in colonne soggette a carico di compressione come sarà discusso in §29.2.2 e 60.1.2.4.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

30.3.2.5 Caso speciale: corda orizzontale

53 Per un cavo in cui i supporti sono allo stesso livello, cioè. $h = 0$, alcune delle equazioni precedenti si riducono a:

$$\text{Eq. 30.9} \rightarrow y = \frac{4xs}{L^2}(L - x) \tag{30.36}$$

$$\text{Eq. 30.9} \rightarrow y = \frac{qx}{2H}(L - x) \tag{30.37}$$

$$\text{Eq. 30.23} \rightarrow H = \frac{qL^2}{8s} \tag{30.38}$$

$$\text{Eq. 30.17} \rightarrow L_{cbl} \simeq -\frac{32s^4}{5L^3} + \frac{8s^2}{3L} + L \tag{30.39}$$

$$\text{Eq. 30.18} \rightarrow L_{cbl} = -\frac{L^5q^4}{640H^4} + \frac{L^3q^2}{24H^2} + L \tag{30.40}$$

$$\text{Eq. 30.28} \rightarrow \Delta L = \frac{HL}{AE}\frac{1 + 16\theta^2/3}{1 + 8\theta^2/3} \tag{30.41}$$

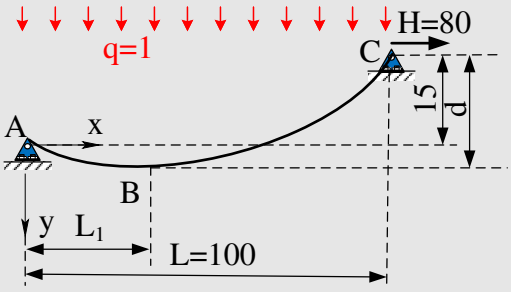
$$\text{Eq. 30.26} \rightarrow T_{max} = H\sqrt{1 + 16r^2} \tag{30.42}$$

$$\text{Eq. 30.30} \rightarrow L_{cbl}^{ext} = L_{cbl}\left(1 + \alpha_T\Delta T - \frac{\sigma_0}{E}\right) + \frac{L^2q\left(8\theta^2 + 3\right)}{12AE\theta} \tag{30.43}$$

dove s è il sag, e in Eq. 30.42 $r = s/L$ (Fig. 30.3), e $r = d/L$ in Fig. 30.2. Questo può essere semplificato attraverso Eq. 30.15 (e conservando solo il primo termine) a

$$T_{max} = H\sqrt{1 + 16r^2} \approx H(1 + 8r^2) \tag{30.44}$$

30.3.2.5.1 Ex 30.4: Geometria del cavo incline



COPIA DI REVISIONE

Conto: con $H = 80$, $L = 100$, $h = 15$ e $q = 1$, La lunghezza dell'equazione può essere ottenuta da Eq. 30.18 e dà

$$L_{cbl} = -\frac{15^4}{8(100)^3} + \frac{(100)(1)^2\left(2(100)^2 - 3(15)^2\right)}{48(80)^2} + \frac{(15)^2}{2(100)} - \frac{(100)^5(1)^4}{640(80)^4} + 100 = 107.03$$

Il prossimo risolviamo per d da Eq. 30.23,

$$80 = \frac{5000}{\left(\sqrt{\frac{d-15}{d}} + 1\right)^2 d}$$

che produce $d = 24.025$ Noi verifichiamo i calcoli per mezzo di calcolo L_{cbl} da Eq. 30.17, sostitutiva,

$$\begin{aligned} L_{cbl} \simeq \frac{1}{120(100)^3}\Bigg\{ & -3(24.02)^4\left(\sqrt{1-\frac{15}{24.02}}+1\right)^8 \\ & + 10(24.02)^2\left(\sqrt{1-\frac{15}{24.02}}+1\right)^4 \\ & \times \left(2(100)^2 - 3(15)^2\right) - 15(15)^4 \\ & + 60(15)^2(100)^2 + 120(100)^4\Bigg\} \\ = 107.03 \end{aligned}$$

In alternativa, in termini di H, Eq. 30.18

$$L_{cbl} = -\frac{(15)^4}{8(100)^3} + \frac{(100)(1)^2\left(2(100)^2 - 3(15)^2\right)}{48(80)^2} + \frac{(15)^2}{2(100)} - \frac{(100)^5(1)^4}{640(80)^4} + (100) = 107.03$$

Infine il punto più basso è a una distanza L_1 dal supporto sinistro tramite Eq. 30.3.2.1,

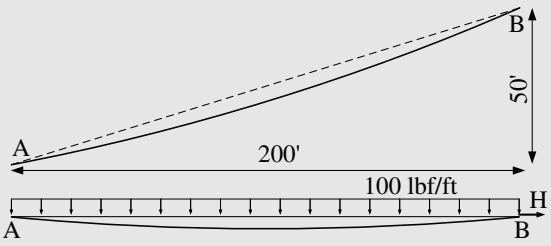
$$L_1 = 100 - \frac{100}{\sqrt{\frac{24.02-15}{24.02}}+1} = 38$$

30.3.2.5.2 Ex 30.5: Forze di cavi incline

Per un cavo che supporta un carico uniforme di 100 lbf per piede orizzontale è sospeso tra due punti a 200 ft separati orizzontalmente, con un punto di supporto 50 ft più alto dell'altro. La tensione del cavo viene regolata fino a quando il sacco a metà della larghezza (cioè la distanza verticale dalla corda del cavo a metà dell'espansione) è di 12,5 ft, cerchiamo di determinare la massima tensione del cavi e la lunghezza del cavo.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



La componente orizzontale della tensione è data da Eq. 30.38

$$H = \frac{qL^2}{8s} = \frac{100(200)^2}{8(12.5)} = 40,000 \text{ lbf}$$

θ e $\tan\gamma$ sono a loro volta ottenuti da Eq. 30.20 e Fig. 30.3

$$\theta = \frac{h}{L} = \frac{12.5}{200} = 0.0625$$
$$\tan\gamma = \frac{50}{200} = 0.25 \Rightarrow \gamma = 0.245 \text{ rad}$$

La tensione massima si verifica al punto alto del supporto e viene data da Eq. 30.26

$$\begin{aligned} T_{max} &= H\left(1 + 16\theta^2 + \tan^2\gamma + 8\theta\tan\gamma\right)^{1/2} \\ &= 40,000\left(1 + 16(0.0625)\theta^2 + (0.25)^2 + 8(0.0625)(0.25)\right)^{1/2} \\ &= 44,700 \text{ lbf} \end{aligned}$$

La lunghezza del cavo sarà determinata dalle due equazioni precedentemente derivate. Prima la soluzione quasi esatta, Eq. 30.21

$$\begin{aligned} L_{cbl} \simeq \frac{1}{8(0.0625)}\Bigg\{ &\sqrt{\sec^2(0.245)}\left[-(200)\tan(0.245) - 4(200)(0.0625) + 4(12.5)\right] \\ &+ 200\Bigg[\tan(0.245) + 4(0.0625)\sqrt{8(0.0625)(\tan(0.245) + 2(0.245)) + \sec^2(0.245)} \\ &+ \sinh^{-1}(\tan(0.245) + 4(0.0625))\Bigg] - (200)\sinh^{-1}(0.245)\Bigg\} \\ = 214.1 \text{ ft} \end{aligned} \tag{30.45}$$

Allora con l'approssimazione, Eq. 30.22

$$L_{cbl} = L\left(\sec(0.245) + \frac{8}{3}\frac{0.0625^2}{\sec^3(0.245)}\right) = 208.1\text{ft}$$

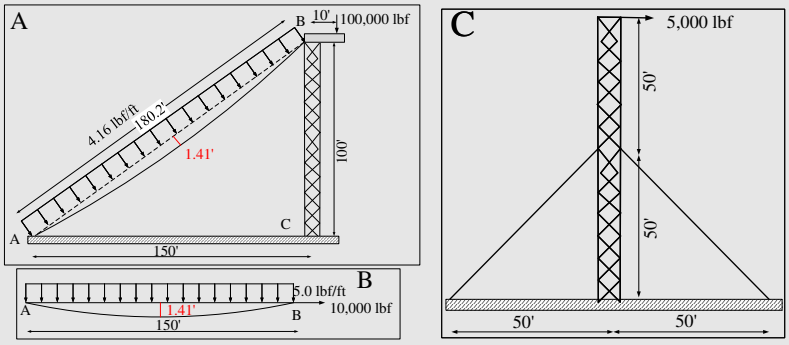
La differenza con la soluzione più esatta è sotto 3%.

COPIA DI REVISIONE

30.3.2.5.3 Ex 30.6: Torre strallata

La sezione seguente è riprodotta da Norris e Wilbur, 1960 Elementary Structural Analysis.

Supponiamo che un cavo di 4,16 lb/ft sia usato come ragazzo e questo è necessario che questo tizio tenga il mastBC verticalmente quando viene applicato il carico di 100.000 lbf[a].



Prendere il momento rispetto al supporto

$$100H - 100,000(10) = 0 \Rightarrow H = 10,000 \text{ lbf}$$

H deve poi essere sviluppato per tenere il mast verticalmente. Dal 4,16 lbf/ft è lungo il cavo, il carico verticale equivalente q' (utilizzando il cavo equivalente nella figura B)

$$q' = 4.16\frac{180.2}{150} = 5.0 \text{ lbf per horizontal foot}$$

Il sag del cavo deve soddisfare Eq. 30.38

$$H = \frac{qL^2}{8h} \Rightarrow h = \frac{qL^2}{8H} = \frac{5(150)^2}{8(10,000)} = 1.41 \text{ ft}$$

Poiché, in questa soluzione approssimativa, il cavo si assume essere parabolico e agisce su un carico uniforme di

$$q = 4.16(180.2/150) = 5.0 \text{ lbf per horizontal foot}$$

la massima tensione nel ragazzo si verificherebbe a B usando Eq. 30.26

$$\begin{aligned} T_{max} &= H\left(1 + 16\theta^2 + \tan^2\gamma + 8\theta\tan\gamma\right)^{1/2} \\ &= 10,000\left[1.0 + 16\left(\frac{1.41}{150}\right)^2 + \left(\frac{100}{150}\right)^2 + 8\left(\frac{141}{150}\right)\left(\frac{100}{150}\right)\right]^{1/2} \\ &= 12,240 \text{ lbf} \end{aligned}$$

Va notato che una stretta approssimazione alla soluzione precedente può essere ottenuta considerando il cavo per agire come un'asta di cravatta dritta che si trova lungo la corda AB. La lunghezza di questo accordo è 180,2 ft; la tensione sarebbe allora uguale

$$T_{max} = 10,000\left(\frac{180.2}{150}\right) = 12,000 \text{ lbf}$$

COPIA DI REVISIONE

L'unico errore introdotto in questa approssimazione deriva dal fatto che la pendenza del cavo a B è in realtà più ripida di quella dell'accordo. A meno che il rapporto sag del cavo sia grande, questa differenza in pendenza non è probabile essere di importanza.

Di solito è necessario avere più di un ragazzo su una mast o altre strutture maschiate, in modo che l'albero può essere tenuto contro ribaltamento in più di una direzione. In queste condizioni, i ragazzi sono regolati in modo che abbiano una certa tensione iniziale; una tensione iniziale pari a circa la metà della massima tensione che si verificherà sotto carico è comunemente usata. AB e AC sono stati regolati in modo che, senza carico orizzontale applicato al mast, il componente orizzontale della tensione del cavo in ogni ragazzo id 6.000 lbf. In queste circostanze, lo stress iniziale massimo in ogni ragazzo, seguendo il metodo approssimativo di analisi suggerito sarà uguale $6,000 \times 1.414 = 8,500$ L'articolo. Quando il carico di 5.000 lbf viene applicato in cima alla mast, una forza orizzontale risultante di 10.000 lbF è applicata aumentando la componente orizzontale della tensione nel ragazzo AC dalla stessa quantità, che porta a $H_{AB} = 11,000$ Lbf e $H_{AC} = 1,000$ Lbf. La tensione massima del ragazzo è poi uguale a quella

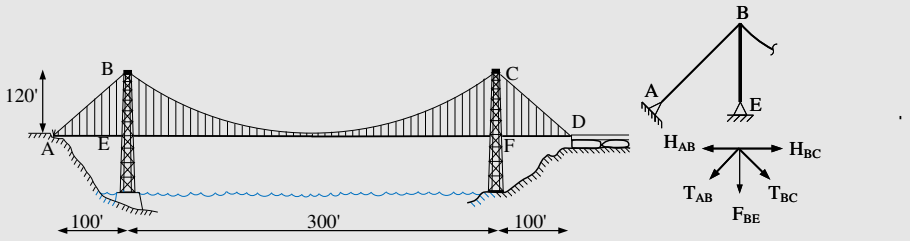
$$T_{max} = 11,000 \times 1.414 = 15,500 \text{ lbf}$$

In realtà, quando il carico di 5.000 lbf è applicato in cima al mast, punto A si muove a destra. Guy AB permettere il movimento in quanto subisce un ulteriore elastico stretch e dal suo sacco diminuisce. AC aumenta, e la lunghezza di quel ragazzo accorcia elasticamente. Un'analisi esatta, tenendo conto dei cambiamenti elastici della lunghezza e del sag cambia, può essere arrabbiato, ma è relativamente complicato.

[a] Adattato da Norris, C. H. e J. B. Wilbur. "Elementi strutturali". 1960

30.3.2.5.4 Ex 30.7: Ponte sospeso

Cerchiamo di determinare i diametri preliminari di un ponte sospeso supponendo una resistenza cavo ammissibile σ_{all} di 190 ksi. Le basi della torre sono incernierate per evitare grandi momenti di piegatura.



Il carico totale è stimato a 200 psf. Assumere un rapporto di sag to span $\frac{1}{5}$. Il carico morto trasportato da ogni cavo sarà di una metà del carico totale o $p_1 = \frac{1}{2}(200)$ psf(50) ft$\frac{1}{1,000} = 5.0$ k/ft. Utilizzando il camion HS 20 (o il suo carico equivalente distribuito di 0.64 k/ft per la corsia), il carico aggiuntivo uniforme per cavo è

$$p_2 = (2)\text{lanes/cable}(.64)\text{k/ft/lane} = 1.28 \text{ k/ft/cable}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Così, il carico totale del design è

$$p_1 + p_2 = 5 + 1.28 = 6.28 \text{ k/ft}$$

La spinta H è determinato da Eq. 30.38

$$H = \frac{pl^2}{8h} = \frac{(6.28) \text{ k/ft}(300)^2 \text{ ft}^2}{(8)(60) \text{ ft}} = 1,177 \text{ k}$$

Nota: h è dato da $r = h/L = 1/5$. Da Eq. 30.44 la massima tensione è

$$\begin{aligned} T_{max} &= H\sqrt{1 + 16r^2} \\ &= (1,177) \text{ k}\sqrt{1 + (16)\left(\frac{1}{5}\right)^2} \\ &= 1,507 \text{ k} \end{aligned}$$

Nota che se abbiamo usato la formula approssimativa in Eq. 30.44 noi avremmo ottenuto

$$\begin{aligned} T_{max} &= H(1 + 8r^2) \\ &= 1,177\left(1 + 8\left(\frac{1}{5}\right)^2\right) \\ &= 1,554 \text{ k} \end{aligned}$$

or 3% differenza! The required cross sectional area of the cable along the main span should be equal to $A = \frac{T_{max}}{\sigma_{all}} = \frac{1,507 \text{ k}}{190 \text{ ksi}} = 7.93 \text{ in}^2$ which corresponds to a diameter $d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{(4)(7.93)}{\pi}} = 3.18$ in. Cerchiamo di fianco per determinare la forza cavo in AB. Poiché il pilone non può prendere nessuna forza orizzontale, dovremmo avere la componente orizzontale di T_{max} uguale e opposto alla componente orizzontale di T_{AB} or $\frac{T_{AB}}{H} = \frac{\sqrt{(100)^2+(120)^2}}{100}$ così

$$T_{AB} = H\frac{\sqrt{(100)^2 + (120)^2}}{100} = (1,177)(1.562) = 1,838 \text{ k}$$

la zona del cavo dovrebbe essere $A = \frac{1,838 \text{ k}}{190 \text{ ksi}} = 9.68 \text{ in}^2$ che corrisponde a un diametro $d = \sqrt{\frac{(4)(9.68)}{\pi}} = 3.51$ in Per determinare il carico verticale che agisce sul pilone, dobbiamo aggiungere i componenti verticali di T_{max} e T_{AB} (V_{BC} e V_{AB} rispettivamente). Possiamo determinare V_{BC} da H e T_{max}, così

$$P = \underbrace{\frac{120}{100}(1,177)}_{V_{AB}} + \underbrace{\sqrt{(1,507)^2 - (1,177)^2}}_{V_{BC}} = 1,412 + 941 = 2,353 \text{ k}$$

Utilizzando l'acciaio A36 con uno sforzo ammissibile di 21 ksi, la zona trasversale della torre dovrebbe essere $A = \frac{2,353}{21} = 112 \text{ in}^2$. Si noti che la fissazione di una torre così alta potrebbe governare le dimensioni finali. Se i cavi dovevano essere ancorati a un blocco di cemento, il volume del blocco dovrebbe essere almeno uguale a $V = \frac{(1,412) \text{ k}(1,000)}{150 \text{ lbs/ft}^3} = 9,413 \text{ ft}^3$ o un cubo di circa 21 ft

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

30.3.2.5.5 Ex 30.8: Cavo inesteso; temperatura

Un cavo orizzontale, lungo 300 ft, un sag centrale di 50 piedi e un carico uniforme di 2 k/ft, cerchiamo di determinare il cambiamento della geometria a causa di un aumento di temperatura di 150°F, $\alpha_T = 6.6^{-6}/°\text{F}$. La forza orizzontale è determinata da Eq.

$$H = \frac{qL^2}{8s} = 450 \text{ kip}$$

Lunghezza cavo (Eq. 30.39)

$$\begin{aligned}
L_{cbl} &\simeq -\frac{32s^4}{5L^3} + \frac{8s^2}{3L} + L = 320.7 \text{ ft} \\
\Delta L_{cbl} &= \alpha \Delta T L_{cbl} = 0.317 \text{ ft} \\
\frac{\Delta L}{\Delta s} &\simeq -\frac{128}{5}\left(\frac{s}{L}\right)^3 + \frac{16}{3}\frac{s}{L} = 0.770 \\
\Delta s &\simeq \frac{0.317}{0.770} = 0.412 \text{ ft} \\
s + \Delta s &= 50.41 \text{ ft} \\
\Delta H &= 450 - \frac{qL^2}{8(s+ds)} = 3.68 \text{ kip}
\end{aligned}$$

O solo 0,80 %!

30.3.2.5.6 Ex 30.9: Cavo estensibile: freccia

Un cavo lungo 40,5 m (L_{cbl}), con $E = 195 \text{ kN/mm}^2$ e $A = 100 \text{ mm}^2$ spazia una distanza orizzontale di $L = 40$ m ed è caricato da un carico uniformemente distribuito $q = 1.5$ KN/m. Il suo sag può essere determinato da Eq. 30.31, tuttavia la lunghezza effettiva del cavo è sconosciuta, quindi ricorriamo a Eq. 30.19 resa

$$L\left(1 + \frac{8\theta^2}{3} - \frac{32\theta^4}{5}\right) = L_{cbl}\left(1 + \alpha_T \Delta T - \frac{\sigma_0}{E}\right) + \frac{L^2 q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma) + 8\theta^2 + 3\right)$$

Sostituire[a] $\gamma = 0$, $\alpha_T = 0$ e $\Sigma M_0 = 0$ rendimenti $\theta = 0.0900$, così

$$\begin{aligned}
L\left(1 + \frac{8\theta^2}{3} - \frac{32\theta^4}{5}\right) &= 40000\left(-\frac{32\theta^4}{5} + \frac{8\theta^2}{3} + 1\right) \\
\frac{L^2 q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma) + 8\theta^2 + 3\right) &= \frac{10.2564\left(8\theta^2 + 3\right)}{\theta} \\
40000\left(-\frac{32\theta^4}{5} + \frac{8\theta^2}{3} + 1\right) &= 40.5 + \frac{10.2564\left(8\theta^2 + 3\right)}{\theta}
\end{aligned}$$

La radice più piccola è $\theta = 0.09$ così

$$\text{sag} = \theta L = 0.090(40) = 3.6 \text{ m}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

La tensione orizzontale H è quindi determinato da Eq. 30.23 con $h = 0$

$$H = \frac{qL^2}{8d} = \frac{1.5(40)^2}{8(3.6)} = 83.3 \text{ kN}$$

[a]Risolto con Mathematica

30.3.2.5.7 Ex 30.10: Cavo esteso; termico

Cerchiamo di determinare la lunghezza iniziale di un cavo L_{cbl} Spanning $L = 40m$ con $E = 195$ kN/mm^2 e $A = 100$ mm^2 e $\alpha_T = 10^{-5}/°\text{C}$ tali che, quando sottoposti a $q = 1$ KN/m e $\Delta T = 40°\text{C}$ è raggiunto un sacco di 3m. Ancora una volta, ci rivolgiamo a

$$L\left(1 + \frac{8\theta^2}{3} - \frac{32\theta^4}{5}\right) = L_{cbl}\left(1 + \alpha_T \Delta T\right) + \frac{L^2 q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma) + 8\theta^2 + 3\right)$$

Così

$$\theta = \frac{3}{40} = 0.075$$
$$L\left(1 + \frac{8\theta^2}{3} - \frac{32\theta^4}{5}\right) = 40.591 \text{ m}$$
$$1 + \alpha_T \Delta T = 1.0004$$
$$\frac{L^2 q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma) + 8\theta^2 + 3\right) = 0.2776 \text{ m}$$
$$40.591 = 1.0004 L_{cbl} + 0.2776 \Rightarrow L_{cbl} = 40.297 \text{ m}$$

30.3.2.5.8 Ex 30.11: Cavo estensibile: precompressione

Cerchiamo di determinare la forza prestressante necessaria per raggiungere un sacco di 1 m per un carico $q = 2$ con $L_{cbl} = L = 40.5m$, $E = 195$ kN/mm^2 e $A = 100$ mm^2 Ancora una volta, usando

$$L\left(1 + \frac{8\theta^2}{3} - \frac{32\theta^4}{5}\right) = L_{cbl}\left(1 - \frac{\sigma_0}{E}\right) + \frac{L^2 q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma) + 8\theta^2 + 3\right)$$

Così

$$\theta = \frac{1}{40} = 0.025$$
$$L\left(1 + \frac{8\theta^2}{3} - \frac{32\theta^4}{5}\right) = 40,067 \text{ mm}$$
$$L_{cbl}\left(1 - \frac{\sigma_0}{E}\right) = 40,000 - \frac{\sigma_0}{195} \text{ mm}$$
$$\frac{L^2 q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma) + 8\theta^2 + 3\right) = 1,644 \text{ mm}$$
$$40,0067 = \left(40,000 - \frac{\sigma_0}{195}\right) + 1,644 \Rightarrow \sigma_0 = 7.688 \text{ kN/mm}^2$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

La tensione orizzontale H è quindi determinato da Eq. 30.23 con $h = 0$

$$H = \frac{qL^2}{8d} = \frac{2.0(40)^2}{8(1)} = 400 \text{ kN}$$

30.3.3 $q$ds; catenaria

Per il contesto storico, consultare §30.3.3

30.3.3.1 Geometria

54 Consideriamo ora il caso in cui il cavo è sottoposto al proprio peso (più ghiaccio e vento se ne ha). $q\mathrm{d}x$ by $q_g\mathrm{d}s$ in Eq. 30.2. L'equazione differenziale per questo nuovo caso sarà derivata esattamente come prima e Eq. 30.5 diventa

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\underbrace{\frac{q_g}{H}}_{a}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} \tag{30.46}$$

55 Tuttavia, $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + dy^2$, da cui:

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = -a\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{\mathrm{d}x}\right)^2} \tag{30.47}$$

56 La soluzione di questa equazione differenziale è notevolmente più complicata rispetto a Eq. 30.5. Noi abbiamo lasciato $dy/\mathrm{d}x = p$Allora

$$\frac{dp}{\mathrm{d}x} = a\sqrt{1 + p^2} \tag{30.48}$$

Rearing

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \int a\mathrm{d}x \tag{30.49}$$

Il lato sinistro è uguale a

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \ln(p + \sqrt{1 + p^2}) + c_1$$

Il lato destro sarà

$$\int a dx = ax + c_2 \tag{30.50}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Sostituito in Eq. 30.49

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = ax + c_3$$

But at $x = 0$ we have $\theta = dy/dx = p = 0$, hence $c_3 = 0$ and

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = ax$$

Semplifichiamo

$$\begin{aligned} p + \sqrt{1 + p^2} &= e^{ax} \\ \sqrt{1 + p^2} &= e^{ax} - p \\ 1 + p^2 &= p^2 - 2pe^{ax} + e^{2ax} \\ p = \frac{dy}{dx} &= \frac{e^{2ax} - 1}{2e^{ax}} = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} = \sinh ax \\ y &= \int \sinh ax dx \\ &= \frac{\cosh ax}{a} \end{aligned}$$

Una forma alternativa per l'ultima equazione è

$$y = c \cosh \frac{x}{c} \tag{30.51}$$

dove $c = 1/a = H/q_g$. Quindi, $x = 0$ $y = c = 1/a$; questo corrisponde al sistema di coordinate giusto in Fig. 30.6. Se usiamo il sistema di coordinate sinistro, l'equazione corrispondente sarebbe

$$y = c\left(\cosh \frac{x}{c} - 1\right) \tag{30.52}$$

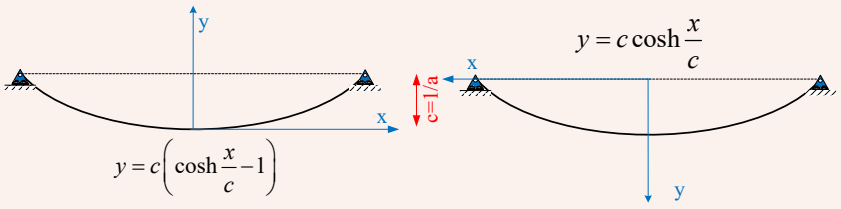


Figura 30.6: Coordinate di riferimento alternative catanarie

57 La lunghezza dell'arco è ottenuta per la riorganizzazione Eq. 30.46

$$H\frac{d^2y}{dx^2}dx = q_g ds$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

Integrazione

$$L_{cbl} = 2\int_0^{L/2} \frac{H}{q_g}\frac{d^2y}{dx^2}dx = \frac{2}{q_g}H\frac{dy}{dx}\Big|_0^{L/2}$$
$$= \frac{2H}{q_g}\sinh\left(\frac{q_g L}{2H}\right) \tag{30.53}$$

30.3.3.2 Forze

58 La tensione lungo il cavo è data da

$$T(x) = H\frac{ds}{dx}$$

Da Eq. 30.51

$$\frac{dy}{dx} = \sinh\frac{x}{c}$$
$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

o semplicemente

$$T(x) = H\cosh\left(\frac{q_g x}{H}\right) \tag{30.54}$$

e la massima tensione si verifica al supporto $x = L/2$

$$T_{max} = H\cosh\left(\frac{q_g L}{2H}\right) \tag{30.55}$$

30.3.3.3 Corda incline catastale

59 Procediamo poi alla geometria di un catenario con una corda inclinata. Seguiremo la derivazione della (Cella, 1999), e fare riferimento a Fig. 30.7.

60 A partire da Eq. 30.51 possiamo facilmente trarre s da

$$s = \int_0^x \sqrt{1+(\sinh x/c)^2}dx = \int_0^x \cosh\frac{x}{c}dx = c\sinh\frac{x}{c} \tag{30.56}$$

Prendendo il derivato di Eq. 30.51

$$y' = c\cosh\frac{x'}{c}, \quad y' - v = c\cosh\frac{d-x'}{c}, \tag{30.57}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

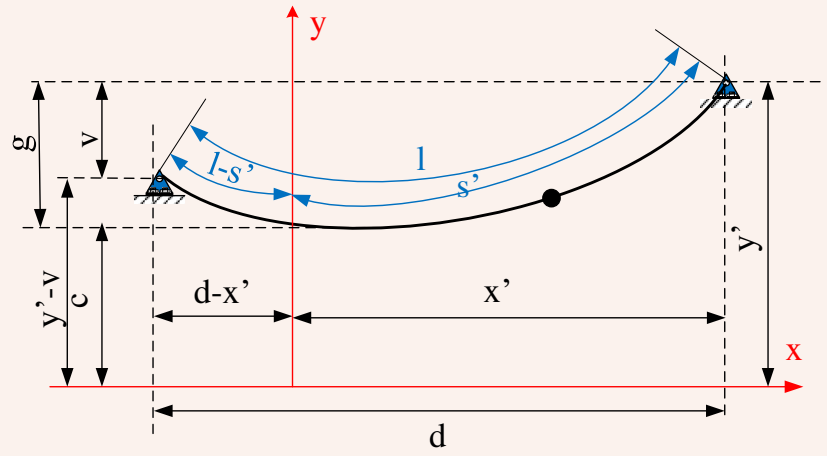


Figura 30.7: Catenario con corda inclinata, (Cella, 1999)

Eq. 30.56 darà

$$s' = c \sinh \frac{x'}{c}, \quad l - s' = c \sinh \frac{d - x'}{c}. \tag{30.58}$$

Da Eq. 30.57

$$v = c \cosh \frac{x'}{c} - c \cosh \frac{d - x'}{c}. \tag{30.59}$$

e l è poi ottenuto da

$$l = c \sinh \frac{x'}{c} + c \sinh \frac{d - x'}{c}, \tag{30.60}$$

così

$$\frac{v}{l} = \frac{\cosh\left(x'/c\right) - \cosh\left(\left(d - x'\right)/c\right)}{\sinh\left(x'/c\right) + \sinh\left(\left(d - x'\right)/c\right)}.$$

Applicare le identità iperboliche

$$\cosh a - \cosh b = 2 \sinh \frac{a + b}{2} \cdot \sinh \frac{a - b}{2}$$
$$\sinh a + \sinh b = 2 \sinh \frac{a + b}{2} \cdot \cosh \frac{a - b}{2}$$

otteniamo dopo la cancellazione

$$\frac{v}{l} = \tanh \frac{2x' - d}{2c}$$

che, quando risolti per x'/c rendimenti

$$\frac{x'}{c} = \frac{d}{2c} + \tanh^{-1} \frac{v}{l} \tag{30.61}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Sostituire in Eq. 30.60, noi otteniamo

$$l = c \sinh\left(\frac{d}{2c} + \tanh^{-1}\frac{v}{l}\right) + c \sinh\left(\frac{d}{2c} - \tanh^{-1}\frac{v}{l}\right) \tag{30.62}$$

che è l'equazione da usare per determinare c quando l'ignoto è g Infine, da Fig. 30.7, $y' = c + g$E da Eq. 30.57 noi otteniamo

$$c + g = c \cosh\frac{x'}{c} \tag{30.63}$$

così, sapendo c, possiamo determinare g

30.3.3.3.1 Ex 30.12: Freccia in un cavo inclinato

Cerchiamo di determinare il sacco sotto il supporto superiore di un cavo lungo 110′ sospeso tra supporti che sono separati da 100′ orizzontalmente e 20′ verticalmente. Applicazione Eq. 30.62 noi risolviamo per c in questa equazione non lineare

$$110 = c \sinh\left(\frac{100}{2c} + \tanh^{-1}\frac{20}{110}\right) + c \sinh\left(\frac{100}{2c} - \tanh^{-1}\frac{20}{110}\right) \Rightarrow c = 72.288$$

Sostituire in Eq. 30.61 dà $x' = 63.291$E finalmente da Eq. 30.63 noi abbiamo $g = 29.523$′ Analogamente, le equazioni possono essere derivate per trattare i casi in cui la variabile sconosciuta è v, d, or l.

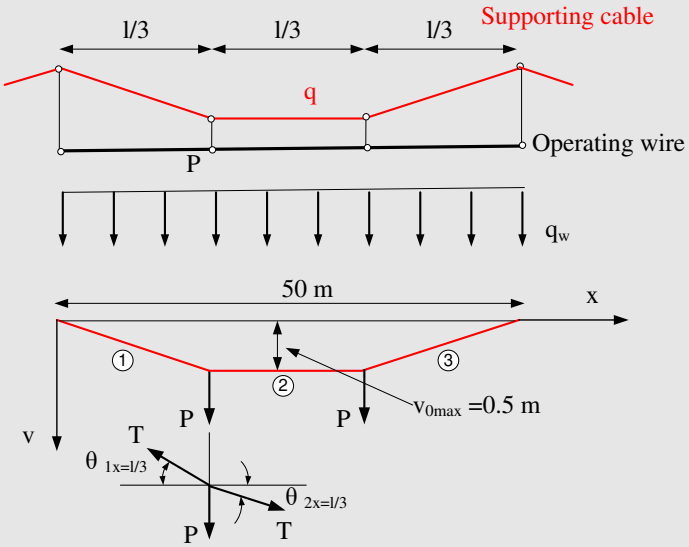
30.3.3.3.2 Ex 30.13: Supporto cavi per autobus

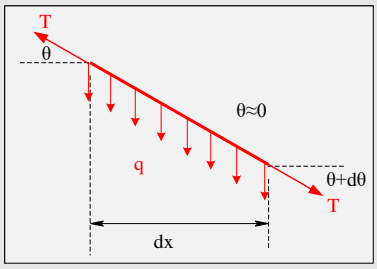
La sezione seguente è riprodotta da Feodossiev, 1977 Résistance des Materiaux: Problèmes et Questions Choisis.

Cerchiamo di determinare la tensione e la curva di deflettore del cavo di supporto di un filo operativo di una linea di filo-bus.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.





Uso l = 50m, v_{0max}=0.5m. Il cavo di suporting in acciaio ha una zona trasversale A = 0.6cm^2, modulo ridotto[a] di elasticità $E = 8 \times 10^5$ kgf/cm^2, peso del filo q_w per unità di lunghezza è 1,5 volte più grande del peso del cavo q.

Prima di tutto, dobbiamo immediatamente notare che questo è una struttura incredibilmente "shallow' 'cavo con un rapporto sag-spazzatura $r = 1/100$ e quindi angoli θ sarà molto piccolo.

Il problema si riduce all'analisi di un cavo caricato da due forze concentrate $P = q_w l/3$.Da equazioni 30.38 noi abbiamo

$$T_0 = \frac{ql^2}{8v_{0\,\max}} \tag{30.64}$$

e applicando l'equazione dell'equilibrio al segmento dei cavi

$$T\theta - qdx - T(\theta + d\theta \Rightarrow \frac{q}{T} = -\frac{d\theta}{dx} \Rightarrow \theta = \frac{q}{T}(C - x)$$

At $x = l/2$ noi abbiamo $T = T_0$e $\theta_0 = 0$ così $C - l/2$ e

$$\theta_0 = \frac{q}{T_0}\left(\frac{l}{2} - x\right) \tag{30.65}$$

dove θ_0 e T_0 sono, rispettivamente, il pendio della curva di deflettore e la tensione nel cavo prima che il filo inferiore sia sospeso.

Considerare la porzione di sinistra (1) e una metà della parte centrale (2) del cavo. Corrispondente a queste porzioni abbiamo

$$\left.\begin{aligned} \theta_1 &= \tfrac{q}{T}(C_1 - x), \\ v_1 &= \tfrac{q}{T}\left(A_1 + C_1 x - \tfrac{x^2}{2}\right) \end{aligned}\right\} \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{3}\right);$$

$$\left.\begin{aligned} \theta_2 &= \tfrac{q}{T}(C_2 - x), \\ v_2 &= \tfrac{q}{T}\left(A_2 + C_2 x - \tfrac{x^2}{2}\right) \end{aligned}\right\} \left(\frac{l}{3} \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}\right).$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Le costanti A_1, A_2, C_1e C_2 sono determinate dalle seguenti condizioni: quando $x = 0, v_1 = 0$Quando $x = l/2, \theta_2 = 0$Quando $x = l/3, \quad v_1 = v_2$ e $T\theta_1 - T\theta_2 = P$. In questo caso

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{Pl}{3q}, \quad C_1 = \frac{P}{q} + \frac{l}{2}, \quad C_2 = \frac{l}{2}.$$

Rivisitazione Eq. 30.14 noi abbiamo

$$L_{cbl} = \int_0^L \sqrt{1 + \theta^2} dx$$

Possiamo usare l'espansione binomiale e con l'assunzione di piccoli angoli avremo

$$L_{cbl} \simeq \int_0^L 1 + \frac{\theta^2}{2} dx$$

Il prossimo, la forza T è determinato equando la differenza tra le lunghezze del liberamente appeso e il cavo stretto all'allungamento della trazione

$$\int_0^{l/3} \left(1 + \frac{\theta_1^2}{2}\right) dx + \int_{l/3}^{l/2} \left(1 + \frac{\theta_2^2}{2}\right) dx - \int_0^{l/2} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{2}\right) dx = \frac{(T - T_0)\, l}{2EA}$$

o, dopo la sostituzione dei valori di θ, Eq. 30.65

$$\frac{q^2}{T^2} \int_0^{l/3} (C_1 - x)^2 \, dx + \frac{q^2}{T^2} \int_{l/3}^{l/2} (C_2 - x)^2 \, dx - \frac{q^2}{T_0^2} \int_0^{l/2} \left(\frac{l}{2} - x\right)^2 dx = \frac{(T - T_0)\, l}{EA}$$

quindi, per integrazione, troviamo

$$\frac{q^2}{T^2} \left(\frac{P^2}{q^2} \frac{l}{3} + \frac{P}{q} \frac{2l^2}{9} + \frac{l^3}{24}\right) - \frac{q^2}{T_0^2} \frac{l^3}{24} = \frac{(T - T_0)\, l}{EA}.$$

Su sostituzione per T_0 (Eq. 30.64) otteniamo

$$\left(\frac{Tv_{0\max}}{ql^2}\right)^3 + \left(\frac{Tv_{0\max}}{ql^2}\right)^2 \left[\frac{8}{3} \frac{EAv_{0\max}^3}{ql^4} - \frac{1}{8}\right] = = \frac{1}{3} \frac{EAv_{0\max}^8}{ql^4} \left(\frac{P^2}{q^2 l^2} + \frac{2}{3} \frac{P}{ql} + \frac{1}{8}\right)$$

Eseguire un calcolo numerico:

$$P = \frac{q_v l}{3} = \frac{1.5ql}{3}, \quad \frac{P}{ql} = 0.5,$$
$$q = 0.6 \times 0.0078 = 0.00468\text{kgf/cm},$$

dove 0.0078kgf/cm^3 è il peso specifico dell'acciaio; così otteniamo

$$\frac{EAv_{0\max}^3}{ql^4} = 0.0205.$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

In questo caso l'equazione di progettazione viene ridotta al seguente:

$$\left(\frac{Tv_{0\,\max}}{ql^2}\right)^3 - 0.0704\left(\frac{Tv_{0\,\max}}{ql^2}\right)^2 - 0.00484 = 0,$$

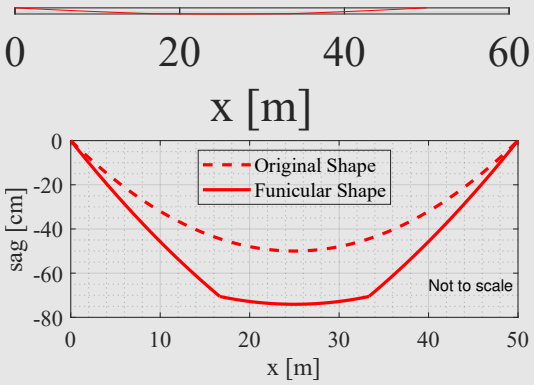
da

$$\frac{Tv_{0\,\max}}{ql^2} = 0.196, \quad T = 460\text{kgf}$$

L'equazione della curva di deflettore (il sacco per la porzione esterna è v_1, e della porzione media è v_3) diventa

$$v_1 = 254\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2}\right)\text{cm}$$
$$v_2 = 254\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\frac{x}{l} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2}\right)\text{cm}$$

Si noti che in realtà, i sag sono appena visibili!



Questa figura mostra chiaramente che il cambiamento nella forma del cavo per ospitare i carichi di punta.

[a] L'allungamento di un cavo in tensione è dovuto non solo alla sua deformazione elastica ma anche alla flessione parziale e torsione. Il modulo ridotto di elasticità del cavo in tensione non rimane costante, cioè il diagramma di prova trasile del cavo non è lineare anche a ceppi elastici nel cavo. In primo luogo l'estensione del cavo si stringe e la clearance tra i fili gradualmente diminuiscono.In un ulteriore estensione l'effetto della deformazione locale che si verifica nelle zone di contatto tra i cavi diventa sempre più pronunciato.

30.3.4 Confronto tra le soluzioni a base di parabola e catenaria

61 Eq. 30.11 e 30.3.2.1 può essere combinato per la resa

$$y = \frac{q}{2H}x^2 \text{ Parabola}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

62 Infine, cerchiamo di confrontare il parabola e la catenaria. Eq. 30.11 e 30.3.2.1 può essere combinato per la resa

$$y = \frac{q}{2H}x^2 \Rightarrow \frac{q}{H}y = \frac{1}{2}\left(\frac{q}{H}x\right)^2$$

E per il catenario, riscriviamo Eq. 30.52

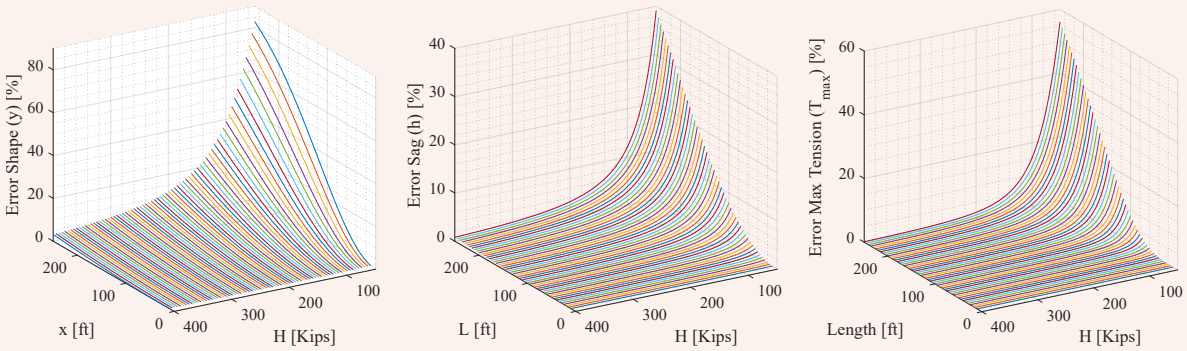
$$\frac{q}{H}y = \cosh\left(\frac{q}{H}x\right) - 1 \text{ Catenary}$$

Per consentire il confronto diretto, esprimiamo la cosane iperbolica come una serie di potenza Taylor

$$\frac{qy}{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{qx}{H}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{qx}{H}\right)^4 + \frac{1}{720}\left(\frac{qx}{H}\right)^6 + \ldots \tag{30.66}$$

Il primo termine di questo sviluppo è identico alla formula per il parabola, e l'altro i termini costituiscono la differenza tra i due. La differenza diventa significativa solo per grandi qx/H, cioè per grandi sag in confronto con l'arco (figura 30.8b).

63 Per un cavo con un peso di 1,0 k/ft, gli errori tra le soluzioni a base parabolica e catenaria sono mostrati in Fig. 30.8a, 30.8b e 30.8c per la geometria, il sag e la massima tensione rispettivamente.



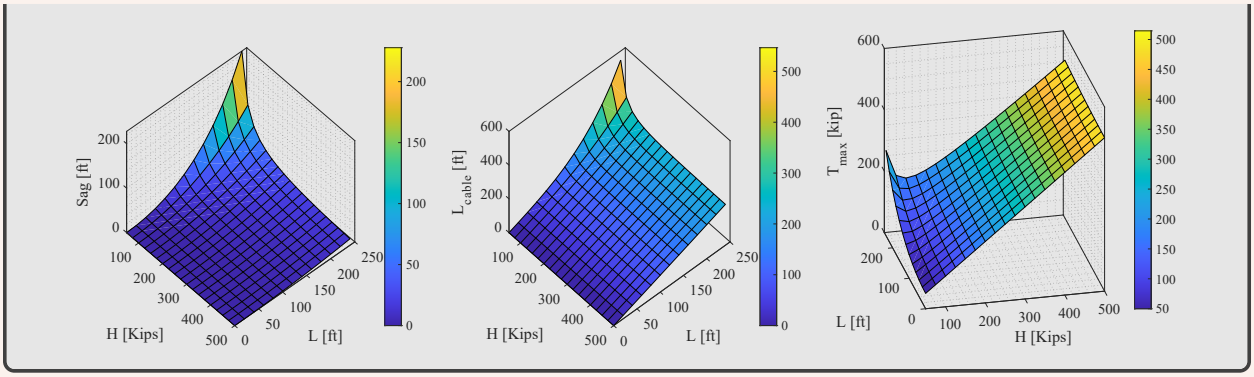
(a) Forma (b) Sag (c) Tensione massima

Figura 30.8: Confronto tra soluzioni a catenaria e parabolica

30.3.4.1 Ex 30.14: Catenaria e parabola

For a cable with a self weight of 1.0 kip/ft we seek to determine the maximum tension T_{max}, the sag h and the cable length L_{cable} in terms of H and L. Usando Eq. 30.53 e 30.55 per il sag, la lunghezza del cavo e la massima tensione rispettivamente, i risultati sono meglio illustrati attraverso le seguenti figure.

COPIA DI REVISIONE





Ponte di Inca, Perù

Azione catanario, distribuzione del carico e equilibrio in strutture flessibili—un'analogia storica ai moderni ponti sospensioni.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 31

Analisi di Masonry Arches (Voussoir)

Abstract

Gli archi sono stati "inventati" dai Romani, e sono stati utilizzati per secoli. Fino alla fine del XIX secolo, quelli erano voussoirs (o archi muratori).

Sono composti da blocchi a forma di cuneo tagliati con precisione, ciascuno si sporge saldamente contro la superficie dei blocchi vicini e trasferisce carichi in modo uniforme.

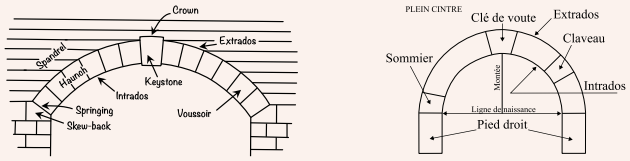
Questo capitolo, anche se non esaustivo, fornirà un'introduzione a queste strutture test-temporale, che l'analisi non è stata compresa fino al XVIII secolo (anche se molte regole di pollici sono state ovviamente trovate precedenti).

31.1 Introduzione 1190
31.2 Alcune note storiche 1191
31.2.1 De la Hire; 1640-1718 1191
31.2.2 Belidor; 1698-1761 1192
31.2.3 Coppia: 1670-1744 1196
31.2.4 Danyzy; 1698-1777 1197
31.2.5 Coulomb; 1736-1806 1198
31.2.6 Moseley; 1801-1872 1199
31.2.7 Soluzioni elastiche 1200
31.2.8 Pippard; 1891-1969 1202
31.3 Generalizzazione del metodo di pippard; smars 1208
31.4 Algoritmo 1213
31.5 Osservazioni finali 1215
31.5.1 Jacques Heyman; 1925 1215
31.5.2 Linea di trazione 1216
31.5.3 Linea di trazione e pippard . 1217

31.1 Introduzione

1 Nonostante l'antichità dell'arco di voussoir, Fig. 31.1 e l'uso esteso, la teoria del suo comportamento non sembra mai stata adeguatamente esaminata; Anche se esiste una notevole letteratura che tratta il suo disegno, i metodi suggeriti sono in gran parte empirici e non tengono conto delle caratteristiche essenziali della meccanica della struttura (Pippard,

COPIA DI REVISIONE



(a) Definizioni (Pippard, Tranter e Chitty, 1936 PDF)

(b) Termini e condizioni

Figura 31.1: Che cosa è un voussoir

Tranter e Chitty, 1936 PDF)Mentre, infatti, ci può essere poco interesse per la progettazione di voussoir-archi, c'è un gran numero di tali disegni in ponti in tutto il mondo.

2 La complessità dell'analisi di arco murario non rinforzato è meglio catturata da

> L'architettura tradizionale della muratura non rinforzata è scomparsa dalla nuova attività di costruzione nel mondo occidentale, ma deve essere preservato il patrimonio architettonico della murazione e ciò comporta l'analisi strutturale. La teoria classica delle strutture non si applica bene a tali strutture eterogenee con condizioni di confine sconosciute, ma esiste una teoria delle strutture murarie basate in semplici ipotesi sul materiale: buona resistenza alla compressione, quasi nessuna forza di trazione e una cura costruttiva per evitare fallimenti scorrevoli. La teoria nasce alla fine del XVII secolo, sviluppata nel XVIII secolo ed è stata applicata nel XIX secolo. Fu abbandonato e infine dimenticato all'inizio del XX secolo. Dopo mezzo secolo, negli anni '60, Heyman incorporava la vecchia teoria all'interno del quadro di analisi dei limiti moderni con il suo tesoro implicito di osservazione critica e esperienza. Il teorema sicuro permette di usare equazioni di equilibrio e semplici dichiarazioni materiali citate. Non si fa alcuna affermazione sulle condizioni limite, impossibile da conoscere ed essenzialmente cambiando (oltre al solito su forza e piccoli spostamenti).
>
> Huerta, 2008 PDF «*The analysis of masonry architecture: A historical approach: To the memory of professor Henry J. Cowan*»

31.2 Alcune note storiche

31.2.1 De la Hire; 1640-1718

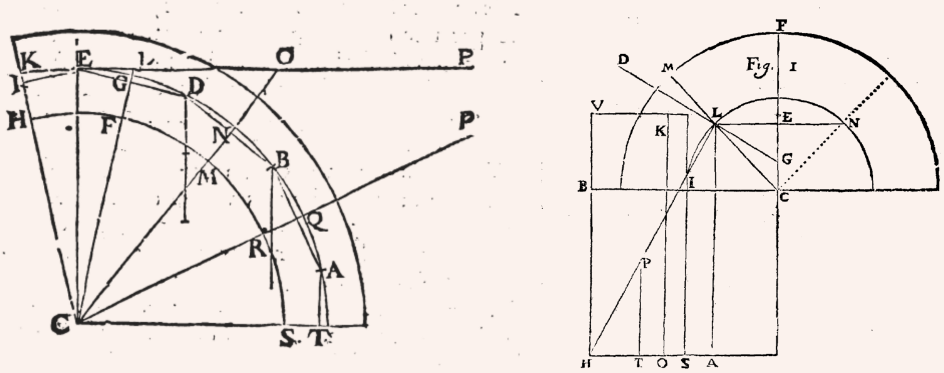
3 Predestinato a seguire le gradinate del padre, pittore conosciuto nella corte di Luigi XIV, de La Hire[1] in Italia, Fig. 31.2.

4 de La Hire, Philippe, 1695 PDF pubblicato il suo *Traite de Mécanapa* e fu il primo ad applicare

[1] Un'ottima biografia di de la Hire si trova in (Academie Royale des Sciences, 1741 PDF).

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese, potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

il concetto di poligono funicolare al problema dell'arco, poi pubblicò uno studio più completo. (de la Hire, 1712) ha pubblicato una procedura per calcolare le forze di contraffazione basate su un meccanismo di collasso delle zeppe (non corretto ma sicuro).



(a) de La Hire, Philippe, 1695 (b) de la Hire, 1712

Figura 31.2: Arch analizza per de la rental

5 Inizia qualificando la complessità del problema

> C'est un Probleme des plus difficiles qu'il y ait dans l'Architecture, que de connoîitre la force que doivent avoir les pieds-droits des Voûtess pour en foutenir fa pouflee, & les Architecles n' ont trouvée jufqu'à prefent aucune regle certaine pour la déterminer. Ce probleme appartient à La Mécanique, & c'est par fon moyen que nous pouvons le réfoudre, en faifant quelques ffuppofitions, dont on convient affé facilement dans la conflruction de ces fortes d' ouvrages.
>
> de la Hire, 1712 «*Sur la construction des voûtes dans les édifices*»

31.2.2 Belidor; 1698-1761

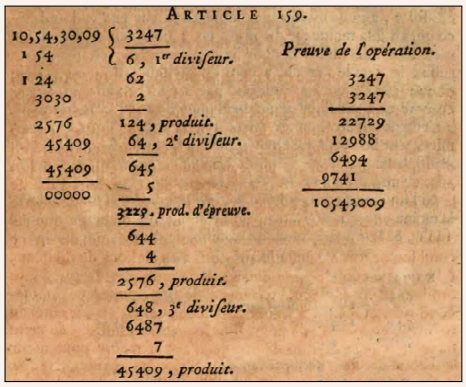
6 Belidor era in primo luogo un ingegnere militare (de Belidor, B. F., 1757). In questa pubblicazione espone grandi talenti in geometria, trigonometria e algebra. Ad esempio, nella Fig. 31.3 illustra le procedure per determinare la radice quadratica e cubica di un numero.

7 In questa stessa pubblicazione, dà una tabella a dimensione *pieds droits*[2] di archi basati sul metodo de La Hire, Fig. 31.4[3].

[2] Il termine si riferisce all'elemento strutturale verticale che sostiene l'arco (abutment), Fig. 31.1b.
[3] Interessante, Belidor sta fornendo dimensioni per una volta che immagazzina polvere di fuoco.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

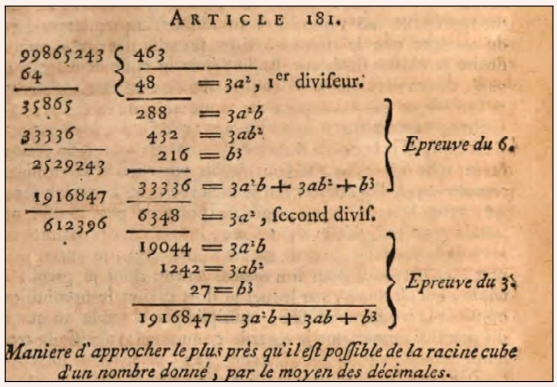


ARTICLE 159.

10,54,30,09 { 3247 — 6, 1er diviseur.
1 54
1 24 — 62 — 2 — 124, produit.
3030 — 64, 2e diviseur.
2576 — 645
45409 — 5
45409 — 3229. prod. d'épreuve.
00000 — 644 — 4 — 2576, produit.
648, 3e diviseur.
6487 — 7 — 45409, produit.

Preuve de l'opération.
3247
3247
22729
12988
6494
9741
10543009

(a) Radice quadratica di 10,543,009=3,247



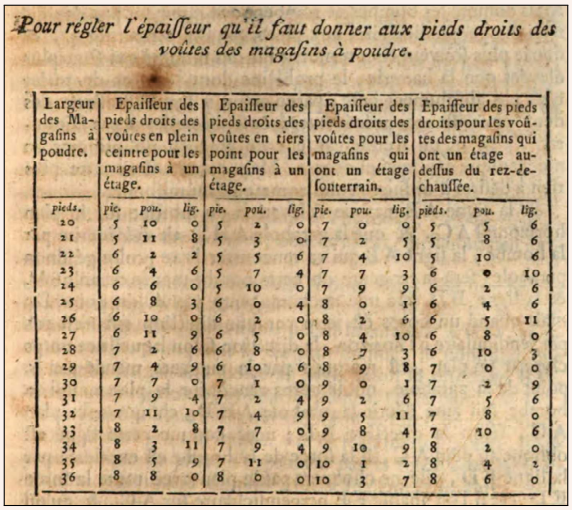
ARTICLE 181.

99865243 { 463
64 — 48 = $3a^2$, 1er diviseur.
35865 — 288 = $3a^2b$
33336 — 432 = $3ab^2$
2529243 — 216 = b^3 } Epreuve du 6.
1916847 — 33336 = $3a^2b + 3ab^2 + b^3$
612396 — 6348 = $3a^2$, second divis.
19044 = $3a^2b$
1242 = $3ab^2$
27 = b^3 } Epreuve du 3.
1916847 = $3a^2b + 3ab + b^3$

Maniere d'approcher le plus près qu'il est possible de la racine cube d'un nombre donné, par le moyen des décimales.

(b) Radice cubica di 99,865,243=463.9

Figura 31.3: Radici quadratiche e cubice di grandi numeri de Belidor, B. F., 1757



Pour régler l'épaisseur qu'il faut donner aux pieds droits des voûtes des magasins à poudre.

Largeur des Magasins à poudre.	Epaisseur des pieds droits des voûtes en plein ceintre pour les magasins à un étage.			Epaisseur des pieds droits des voûtes en tiers point pour les magasins à un étage.			Epaisseur des pieds droits des voûtes pour les magasins qui ont un étage souterrain.			Epaisseur des pieds droits pour les voûtes des magasins qui ont un étage au-dessus du rez-de-chaussée.		
pieds.	pie.	pou.	lig.	pie.	pou.	lig.	pie.	pou.	lig.	pieds.	pou.	lig.
20	5	10	0	5	2	0	7	0	0	5	5	6
21	5	11	8	5	3	0	7	2	5	5	8	6
22	6	2	2	5	5	6	7	4	10	5	10	6
23	6	4	6	5	7	4	7	7	3	6	0	10
24	6	6	0	5	10	0	7	9	9	6	2	6
25	6	8	3	6	0	4	8	0	1	6	4	6
26	6	10	0	6	2	0	8	2	6	6	5	11
27	6	11	9	6	5	0	8	4	10	6	8	0
28	7	2	6	6	8	0	8	7	3	6	10	3
29	7	4	9	6	10	6	8	9	8	7	0	0
30	7	7	0	7	1	0	9	0	1	7	2	9
31	7	9	4	7	2	4	9	2	6	7	5	6
32	7	11	10	7	4	9	9	5	11	7	8	0
33	8	2	8	7	7	0	9	8	4	7	10	6
34	8	3	11	7	9	4	9	10	9	8	2	0
35	8	5	9	7	11	0	10	1	2	8	4	2
36	8	8	0	8	0	0	10	3	7	8	6	0

Figura 31.4: La tavola di Belidor per dimensionare il supporto verticale (*pied-droit*) di archi secondo de La Hire; de Belidor, B. F., 1757

[8] Il lavoro di Belidor è più su abutment dimensionali, che gli archi deigning (voussoirs).

[9] In (de Belidor, B. F., 1729) Belidor rompe la sua copertura di abutment in due parti: una) teoria rigorosa (capitoli 2 e 3); e b) metodi semplificati (cap. 4). In ciascuno, esamina varie (confrontali) condizioni e seguendo la teoria/metodo fornisce un esempio di applicazione numerica.

[10] La nota di apertura del quarto capitolo legge

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

> Qui comprend des règles pour trouver l'epaisseur des piedroits des voûtes de toute sorte d'espèces , par le seul calcul des nombres, pour l'intelligence de ceux qui ne savent pas l'algèbre.
>
> ...
>
> Je me suis engagée au commencement de ce second livre à donner des regles pour trouver l'epaisseur des piedroits des voûtes, afin de se passer du calcul algebrique, et contribuer à la satisfaction des personnes qui, quoique très-habiles d'ailleurs dans l'architecture militaire ou civile, ne s'y sont point appliquées. Quand on ecrit pour le public, et qu'il s'agit d'un ouvrage comme celui-ci, il faut autant qu'il est possible faire en sorte d'etre entendu de tout le monde, principalement de ceux qui se contentent de savoir la pratique des choses, et qui veulent bien s'en rapporter a la bonne-foi d'un auteur.
>
> de Belidor, B. F., 1729 La science des Ingegnieurs

11 Nella prima parte è il "abstract", ma la maggior parte interessante è la seconda parte che si traduce a

> *Ho preso un impegno all'inizio di questo secondo libro per dare regole per trovare lo spessore degli abutments delle volte, al fine di passare dal calcolo algebrico, e contribuire alla soddisfazione delle persone che, anche se molto abile nell'architettura militare o civile, non si applica ad esso. Quando la scrittura per il pubblico, e in un lavoro come questo, si deve raggiungere un ampio pubblico, soprattutto chi vuole solo conoscere il lato pratico delle cose, e che preferisce realizzare sulla competenza di un autore.*

In effetti, questo è un problema perenne che affronta l'insegnamento dell'ingegneria nelle università[4].

12 de Belidor, B. F., 1729 ha studiato un meccanismo di guasto a quattro cerniere che, in modo diverso da La Hire, era caratterizzato da crepe poste a 45° dalla sorgente dell'arco, mentre la sulla superficie di contatto è trascurata (Brandonisio e De Luca, 2020). Nel modello di Belidor, lo scorrimento della cuneo centrale dell'arco provoca una spinta laterale T sulla matrice che tende a ribaltare il punto A e la spinta T è bilanciato dal peso del molo (W_{pier}) e di restante parte dell'arco (W_{arch}). Inoltre, nel modello si presume che la spinta T si applica nel mezzo ($t/2$) della superficie rotture, perpendicolare alla fessura (Fig. 31.6). Pertanto, dalla condizione di equilibrio da garantire per la stabilità ribaltabile, lo spessore minimo del buttress può essere valutato secondo il Belidor criteri di guasto:

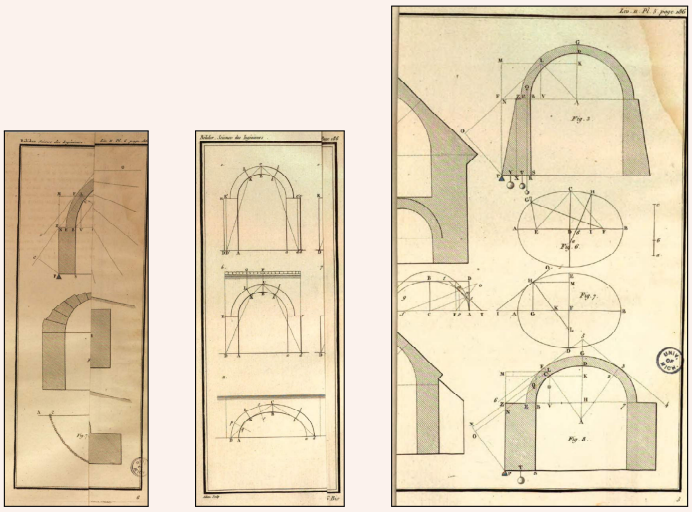
$$T.d_T \leq W_{arch}(t).d_{Warch} + W_{pier}(h, B).d_{Wpier}(B) \Rightarrow B_{min,Belidor} = B(t, R, h)$$

13 Torna a una descrizione qualitativa della modalità di fallimento, e con riferimento alla Fig. 31.5b (prima), Belidor scrive

[4]Nota anche la differenziazione di sepoltura tra gli ingegneri "miltary' e "civil'.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) (b) (c)

Figura 31.5: Analisi di archi (de Belidor, B. F., 1729 PDF)

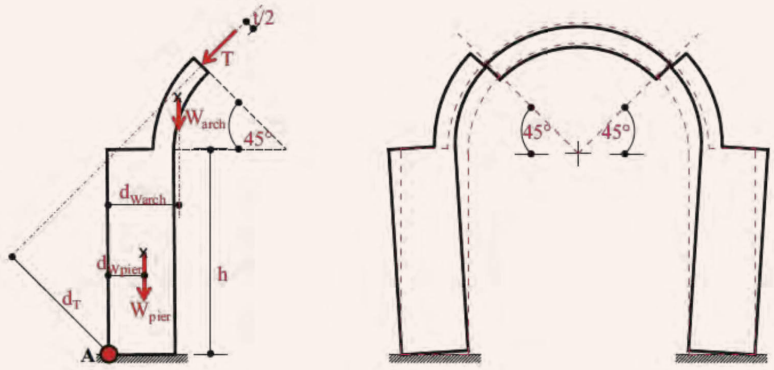


Figura 31.6: I criteri di fallimento di Belidor (Brandonisio e De Luca, 2020)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

> Il résulte de cette analyse que, au moment où une voûte est prête à se rompre, elle se sépare en quatre parties dont les deux inférieures portent sur leurs bases par les arêtes D' et d', et dont les deux supérieures portent sur les inférieures par les arêtes K et k, en s'appuyant l'une contre l'autre par l'arête C. Si la rupture a lieu, ces quatre parties tournent autour de ces cinq arêtes comme sur des charnières, jusqu'à ce que les points K et k se soient tellement écartés, que leur distance horizontale soit devenue égale à la somme des deux lignes KC et kc. Alors la partie supérieure n'étant plus soutenue, tombe verticalement, et la voûte s'écroule tout-à-fait. Si on joint les arêtes qui servent d'axes à ces mouvements de rotation par les lignes $D'K$, KC, $d'k$, kC, on pourra considérer ces lignes comme des leviers mobiles à leurs extrémités sur des charnières, et chargés chacun du poids des portions de voûte qui leur correspondent, et il est évident que les conditions de l'équilibre de ces leviers sont absolument les mêmes que celles de la voutte, en sorte qu'il faudra concevoir que le poids de la partie supérieure KCk, décomposé dans le sens des lignes CK, ck, est une force appliquée aux extrémités K, k, des leviers $D'K$, $d'k$, qui tend à les faire tourner en dehors autour des points fixes D' et d', tandis que le poids des parties inférieures $D'E'$, $d'e'$, tend à faire tourner ces mêmes leviers en dedans, et c'est de l'équilibre de ces forces que dépend la stabilité de la voûte. Quant aux joints de rupture K et k, ils sont placés dans le lieu où la voûte est la plus faible, ou, pour s'exprimer avéc plus de rigueur, dans le lieu ou le moment des pressions exercess en K, k, qui tendent à renverser les piedroits $D'L$, $d'l$ pris par rapport aux points fixes D', d', est le plus grand possible par rapport au moment du poids de ces piédroits, pris par rapport aux memes points.

31.2.3 Coppia: 1670-1744

14 La coppia ha pubblicato due grandi documenti (Couplet, 1729) e (Couplet, 1730).

Citando dal suo primo *méMoire* dove usa il parallelogramma delle forze[5] e considerato attrito:

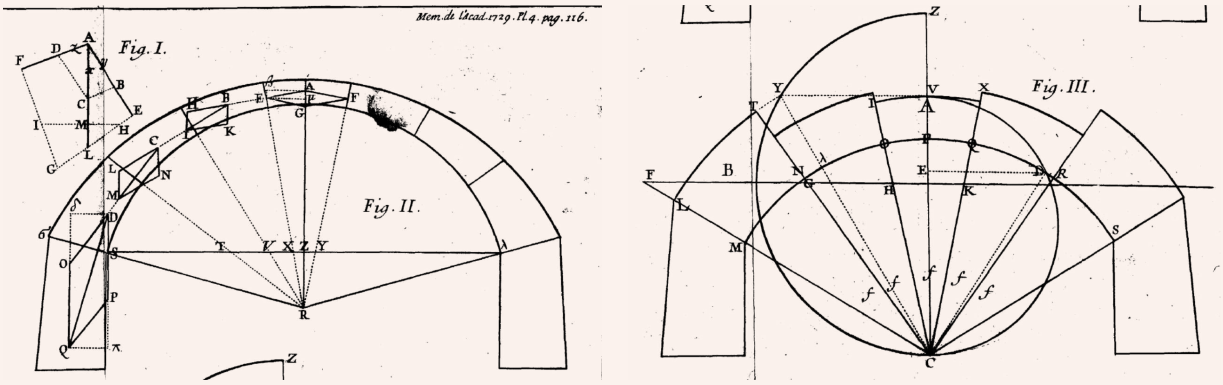
> Si la force x fe décompofe -en deux forces y &r z, ces trois forces feront elles comme les côtés d'un Triangle formé par les perperuliculaires nenés fur les directions de ces trois forces. Ceci efl: demontré dans prefque toutes les Méchaniques.
>
> Couplet, 1729 «*De la poussée des voûtes*»

15 L'idea di applicare il parallelogramma delle forze al triangolo i cui lati sono perpendicolari alle direzioni delle forze è dovuta a de La Hire, che ha il vantaggio di coinvolgere nel problema il raggio del cerchio della volta. Questo è importante perché il raggio di questo cerchio diventerà il raggio della curvatura, nel lavoro successivo. Con un certo tratto dell'immaginazione si può sostenere che questo era un passo timido nell'uso del calcolo differenziale.

16 Nella sua seconda pubblicazione, Couplet, 1730 è stato il primo a sostenere correttamente che la modalità di fallimento corretta di un voussoir si verifica attraverso la formazione di un meccanismo con quattro parti.

[5] Conosciuto già da Stevin §14.5.4

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE



(a) Fig. I & II (b) Fig. III

Figura 31.7: Analisi di archi (Couplet, 1729 PDF)

31.2.4 Danyzy; 1698-1777

17 Danyzy, 1732 è stato il primo a effettuare test sistematici su modelli di archi, al fine di scoprire il corretto meccanismo di collasso (e quindi verificare le modalità di fallimento proposte da Coppiat), Fig. 31.8.

18 Ha fatto due contributi originali:

1. Notare il carattere asintotico della curva che definisce la necessaria matrice di un arco o una volta in termini di altezza. In altre parole, è possibile dedurre una regola di matrice dimensionale il buttress anche senza contabilizzare l'altezza finché si considera il valore asintotico.
2. Ho cercato di definire una nuova regola, dove non considera l'altezza, ma lo spessore della volta nella chiave.

Danizy non ha potuto pubblicare la sua promemoria di cui solo

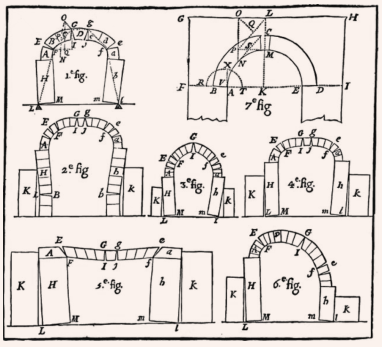


Figura 31.8: Modelli di liste Danyzy, 1732

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

31.2.5 Coulomb; 1736-1806

19 Una delle prime analisi di voussoir è stata intrapresa da Coulomb, 1773 nel suo articolo seminale sull'attrito, contrasta i voussoirs senza attriti del capitolo XVII (Fig. 31.9) con il caso in cui l'attrito è rappresentato nel successivo.

> XVII
> Des voûtes dont les joints n'ont ni frottemtn, ni cohéfion
>
> Cette formule fe trouve exactement la même que celle qui a été déterminée par M. Euler (dans le troifiéme volume de l'Académie de Péterfbourg) pour fa figure d'une chaine, follicitée par des puiffances quelconques. Ce qui doit effectivement arriver; car, en renverfant la courbe, & fubituant la tenfion à la précédente,s'applique également à l'un ou l'autre cas, & donne préifément la mê expreffion. Au refte, la méthode de M. Euler n'a rien de commun avec celle-ci , que le réfultat.
>
> Par cette théorie, je n'ai cherché qu' à remplir Ia premiére coindition d'équilibre, qui exige que toutes les forces qui agissent sur une portion de voûte GaMm, aient leur refultante perpendiculaire au joint Mm ; mais il eft facile de e non mi sono mai sentitoêe-temps à La mia vita condition, qui demande que cette réfultante tombe entre les poin M & m; car, puifque la force conflante A agit perpeiidiculaireinent au joint vertical Ga, en un point quelconque S, il s'enfuit que par la condition d'équilibre que l'on vient de remplir, la ligne des réfultantes doit couper tous les joins perpendiculairement, elle formera une courbe Parallèle à la ligne intéesaudere a B; isfi, dans le cas où la forza A feroit appliqué en a, la ligne des prefions feroit exactement la même que aMb.
>
> XVIII
> De l'équilibre des voûtes, en ayant égard au frottement et àla cohéfion.
>
> Le frottement eft fouvent affez confidérable dans les matériaux que l'on emploie à la conftruction des voûtes, pour que les différens vouffoirs ne puiffent point gliffer l'un contre l'autre; en ce cas, l'on peut négliger ia première condition d'équilibre; & il n'eft plus nécceffaire que la réffultante des forces qni agit fur une portion quelconque de voûte foit perpendiculaire aux joints qui la terminent; mais feulement qu'elle tombe sur ces joints. Ainfi, en négligeant la cohéfion des joints, ce qui doit le faire dans les voûtes nouvellement conftruites; il suffit de chercher le maximum de $\frac{\phi g M}{MQ}$, pour déterminer la force B_i, & le minimum de $\frac{\phi g M}{mQ}$, pour déterminer B'; l'on doit en outre fuppofer que le force B agit en G, fommet du joint, pour rendre la force B, auffi petite qu'elle puiffe être. Il faut cependant remarquer que lorfqu'on cherche à fixer l'état d'équilibre par cette feconde condition, en fuppofant les forces paffant par les points G & M, il faut fuppofer que ces points font affez éloignés de l'extrémité des joints, pour que l'adherence des vouffoirs ne permette pas à ces forces d'en rompre les angles; ce qui fe détermine par les méthodes que nous avons employées en cherchant la force d'un pilier.
>
> Coulomb, 1773 «*Essai sur une application de maximis & minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture*»

20 nel XVII (senza attrito né coesione), sostiene per la prima volta che la forma ideale di un arco è la stessa di una catenaria inversa, la cui forma era determinata da Euler (Riferimento alla tabella 15.5; Gaudi lo sfruttava magnificamente nel disegno del *Sagrada Familia*). Poi afferma che la linea di spinta dovrebbe rimanere limitata per essere all'interno della geometria.

21 Come discusso da Heyman, 1997 in XVIII (con attrito), Fig. 31.9, mostra metà di un arco murario e considera il fallimento dell'arco sotto l'azione del proprio peso e della spinta

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

orizzontale, H, recitando alla corona attraverso il punto f Prendendo in primo luogo un materiale (come il suolo) che ha sia l'attrito e la coesione (forza della cinghia), Coulomb determina il valore del H necessario causare il fallimento dell'arco scorrendo lungo l'aereo MmTuttavia, Coulomb osserva immediatamente che "la frizione è spesso così alta per i materiali utilizzati nella costruzione dell'arco, che i voussoir non possono mai scivolare l'uno sull'altro". Quindi conclude che se il fallimento è a verificarsi alla sezione Mm, deve essere per rotazione di una porzione dell'arco su entrambi m or M.

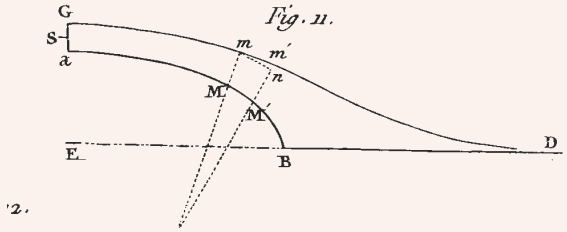


Figura 31.9: Analisi di voussoirs senza frizione da Coulomb, 1773

22 If ϕ è il peso della porzione $GaMm$ dell'arco, recitando in linea $g'g$, si vedrà che se la rotazione è in corso su M,

$$H = \phi \frac{gM}{MQ} \tag{31.1}$$

e, se di m,

$$H = \phi \frac{qg'}{mq} \tag{31.2}$$

Queste espressioni per H coinvolgono la densità del materiale e le dimensioni dell'arco, ma non comportano la forza del materiale; le espressioni sono quindi dichiarazioni puramentegeometriche della stabilità dell'arca.

23 Il Coulomb ha dimostrato che il valore massimo H deve essere ricercato da Eq. 31.1, considerando varie sezioni di fallimento e linee d'azione H; analogamente, il valore minimo deve essere trovato da Eq. 31.2. Coulomb ha notato che un metodo di prova ed errore è molto accurato, dal momento che il massimo o minimo è molto "flat'.

31.2.6 Moseley; 1801-1872

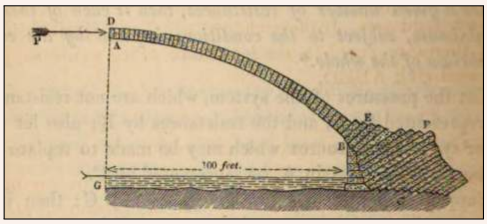
24 Un "rivendicato alla fama" di Moseley è il suo *Principio di pressione minima* pubblicato per primo (Moseley, 1833) e più tardi nel suo libro[6] (Moseley, 1869)Fico. 31.10 .

[6]Che era ampiamente accettato, e usato da West Point.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

> Si ritiene che costituisca un nuovo principio in statici; se ci sono moltissime forze in equilibrio tra le quali si entra in un sistema di resistenze, allora queste resiste zioni tali, che la loro somma è una MINIMUM; ciascuno considerato una funzione delle coordinate del suo punto di applicazione, assunto con un segno positivo e sottoposto alle condizioni imposte dall'equilibrio dell'intero.
>
> Moseley, 1833 «*L. On a new principle in statics, called the Principle of least Pressure*»



335. *Of all the pressures which can be applied to the highest voussoir of a semi-arch, different in their amounts and points of application, but all consistent with the equilibrium of the semi-arch, that which it would sustain from the pressure of an opposite and equal semi-arch is the least.*

Let EB represent the surface by which an arch rests upon

Figura 31.10: Il principio di Moseley meno resistenza (Moseley, 1869)

25 Ho trovato questo "nuovo principio" per essere confuso. Tuttavia, sembra sopportare qualche somiglianza con il lavoro di Maxwell discusso in §15.5.4.2.

26 Molto più tardi, Moseley, 1869 ha dichiarato chiaramente che il requisito di stabilità è che la linea di spinta non deve passare fuori dall'intera sezione trasversale. D'altra parte, se rientra nel terzo medio, allora nessuna tensione viene esercitata.

31.2.7 Soluzioni elastiche

31.2.7.1 Castigliano; 1847-1884

27 Le due teorema di Castigliano hanno rivoluzionato l'analisi strutturale, ed è stato utilizzato per l' analisi degli archi elastici, (Castigliano, 1879).

28 Nel suo libro dà dettagli su un ponte costruito da Charles Mosca nel 1827 sopra la Dora Riparia, Torino, Fig. 31.11. Catsigliano tratta il ponte a Torino come arco elastico con tre ridondanze, i cui valori procede verso computo e mostra che un arco incrinato (cioè un arco elastico imperfettamente) può essere trattato con prova ed errore, e fa tre serie di calcoli per il ponte.

29 In primo luogo, l'indennità totale è fatta per l'elasticità dei letti mortali tra i voussoirs e il valore della spinta orizzontale di abutment è calcolato per essere 352,990 kgf/m larghezza del ponte. (Heyman, 1969) Castigliano effettua i suoi calcoli a un numero non garantito di figure significative.

31.2.7.2 Winkler; 1835-1888

30 Mentre Emil Winkler è meglio conosciuto per l'analisi di travi su fondazioni elastiche ("Winkler's spring"), non è ben noto che egli era anche il primo a eseguire un'analisi elastica degli archi (Winkler, 1879) (Winkler, 1880)Fico. 31.12.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Étude du pont en pierre de taille
construit sur la Doire à Turin, par l'Ingénieur Ch. Mosca

(Planche XV)

1. Données générales. – Corde de l'intrados . . 45m,00
Flèche de l'intrados 5m,50
Rayon » 48m,773
Amplitude » 54° 56′ 42″
Épaisseur de la voûte à la clef 1m,50
» » aux naissances 2m,00
Corde de l'extrados 46m,846
Flèche » 5m,226
Rayon » 55m,102
Amplitude » 50° 18′ 42″
Largeur du pont, y compris les garde-corps . . 12m,60.
2. Charges. – La voûte du pont est en granit du Manalaggio

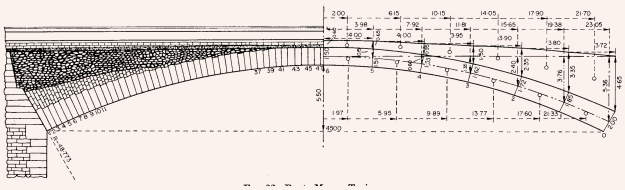


Figura 31.11: Ponte di Charles Mosca voussoir (turin) analizzato da (Castigliano, 1879 PDF)

Lage der Stützlinie im Gewölbe.

Vortrag, gehalten im Architekten-Verein zu Berlin am 12. Januar 1880 von E. Winkler.

(II. Theil. Fortsetzung zu Jahrg. 1879, S. 130 dies. Ztg.)

In dem I. Theil meines Vortrages habe ich die hauptsächlichsten Gewölb-Theorien hinsichtlich der Lage der Stützlinie besprochen und bin dabei zu dem Resultate gekommen, dass nur die auf die Elastizitätslehre gegründete Theorie als richtig anzuerkennen ist und dass dieselbe in neuerer Zeit immer mehr Vertreter findet.*)

Bei der Besprechung dieser Theorie haben wir uns die Gewölbe im normalen Zustande vorgestellt, d. h in einem solchen Zustande, dass unmittelbar vor dem Beseitigen des Lehrgerüstes zwar noch keine Drücke in den Fugen existiren, wohl aber alle Fugen vollständig geschlossen und die Widerlager absolut unverrückbar sind.

Wir haben dort den Satz aufgestellt, dass diejenige Stützlinie die richtige ist, welche die Mittellinie des Gewölbes ausgleicht oder für welche die Summe der Quadrate der Abweichungen von der Mittellinie ein Minimum ist. Hieraus folgt, dass in dem Falle, wo sich eine Stützlinie konstruiren lässt, die mit der Mittellinie zusammen fällt, die Mittellinie in der That die Stützlinie ist.

Beide Sätze sind nur annähernd richtig und nur bei nicht zu flachen Bogen anwendbar; sie ergeben sich nämlich, wenn man den Einfluss der Fugendrücke auf die Deformation gegen den der Momente vernachlässigt. In der That ist es nicht gut denkbar, dass bei einem Gewölbe in normalem Zustande die Stützlinie mit der Mittellinie zusammen fällt; denn beim Ausrüsten senkt sich das Gewölbe etwas, es ändert sich somit die Krümmung an den einzelnen Stellen; es treten somit beim Senken Momente ein oder die Stützlinie tritt aus der Mittellinie heraus. Der Krümmungs-Radius wird am Scheitel gröfser, an den Kämpfern, der festen Anstemmung halber, kleiner, was darauf hinaus kommt, dass die Stützlinie im Scheitel hinauf, an den Kämpfern dagegen herab rückt (Fig. 5). Bezeichnen wir den Abstand der Stützlinie von der Mittellinie im Scheitel und an den Kämpfern mit c und b, die Bogenhöhe mit h, die Gewölbdicke mit d, so ergiebt sich annähernd durch die im ersten Vortrage aufgestellten Bedingungen für flache Bogen bei totaler Belastung:

elliptischen Bögen öffnen sich die Fugen an höher liegenden Bogentheilen.

Beim Ausrüsten öffnen sich die Fugen in Folge der Zusammendrückung des Bogens noch mehr, während sie sich als Wirkungen der entstehenden Momente und der hieraus resultirenden Verdrehungen zum Theil wieder schliefsen. Die genauere Untersuchung mit Hülfe der Elastizitäts-Theorie giebt, dass der aus beiden Ursachen resultirende Betrag e, um welchen die Fugen sich wieder schliefsen, bei flachen Bögen annähernd:

$$e = \frac{9\,l^3}{8\,E\,d}\,\frac{4\,h - 5\,d}{8\,h^2 + 10\,h\,d + 5\,d^2}$$

ist. Dieser Betrag ergiebt sich aber im allgemeinen kleiner, als der aus der Senkung des Lehrgerüstes resultirende, vielfach beobachtete Betrag, so dass in der That die Fugen im allgemeinen geöffnet bleiben, also ein Aufruhen an den unteren Kanten der Kämpferfugen oder vielmehr an einer diesen Kanten nahe liegenden Stelle eintritt (Fig. 6). Das Gewölbe verhält sich alsdann so, als ob dasselbe auf Gelenken ruhte, die sich nahe an den unteren Kanten der Kämpferfugen befinden. Bei Gewölben mit grofsem

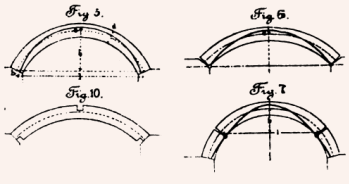


Figura 31.12: Analisi elastica di Winkler degli archi (Winkler, 1880 PDF)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

31 Il suo approccio è più rigoroso e generalizzato di quello di Castiglione.

31.2.8 Pippard; 1891-1969

32 Ci sono due interessanti contributi di Pippard. Nel primo, proprio come Danyzy, 1732 testato la teoria di Coppia, Pippard, Tranter e Chitty, 1936 ha condotto test per accertare le teorie di fallimento dei voussoirs, Fig. 31.13 predetto da Castigliano.

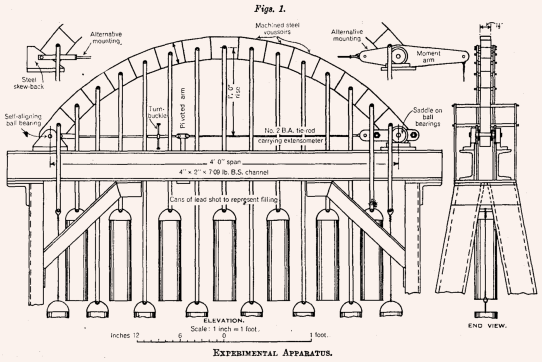


Figura 31.13: Apparecchi sperimentali utilizzati da Pippard, Tranter e Chitty, 1936 per indagare la stabilità di archi voussoir.

33 Nel suo secondo contributo, Pippard esamina il fallimento del voussoir. Citando dal suo libro:

1. In Fig. 31.14 a) mostra un arco voussoir con il suo riempimento di terra e, in aggiunta, un carico applicato ad un particolare voussio. Come questo carico del punto è aumentato, anche la spinta orizzontale aumenta. W la spinta concorda praticamente esattamente con i valori per una costola solida della stessa dimensione e con abutmenti simili.
2. A un valore particolare W_1Fico. 31.14 b) una variazione avviene nella velocità di cambiamento della spinta con il carico applicato che è coerente con la formazione di un perno a C, indicando che l'arco è diventato effettivamente due sezioni solide AC e BC infilato insieme a C. Se i supporti sono permessi di diffondersi leggermente, il "pin" può chiaramente visto essere formato dalla cerniere dei voussoir adiacenti C. Il nuovo rapporto di spinta a carico è mantenuto per un tempo.
3. A carico W_2 un altro cambiamento della velocità si verifica che è dovuto alla formazione di un secondo perno virtuale a D, come in Fig. 31.14 (c). Questo perno è, tuttavia, sull'intrados dell'arco, mentre il primo era sugli extrado. L'arco ora consiste di due sezioni solide AD e BC collegato da una terza sezione solida DC che è a loro spillato, ed è essenzialmente la struttura del ponte di cantilever.
4. Un ulteriore aumento del carico mostra che W_3 c'è un altro cambiamento del tasso di cambio della spinta con carico dovuto alla formazione di un terzo "pin' all'internodos

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

B. L'arco ora è costituito da tre sezioni solide di cui una, *AD*, is *incastreé* at *A*, gli altri due sono effettivamente solidi collegamenti con pin-jointed. come in Fig. 31.14 d) Durante questo processo si registra una progressiva riduzione della ridondanza nella struttura. L'arco originale ha tre gradi di ridondanza, ma con la formazione di ogni perno successivo, un grado di ridundanza è perso, in modo che (b) abbia due, (c) ne ha uno, e (d) non ha nessuno, cioè (d), è staticamente determinato.

5. Se il carico è continuato oltre W_3 , un crollo improvviso dell'arco si verifica a carico W_4 a causa della formazione di un quarto perno ad A che trasforma l'assemblaggio in un meccanismo, Fig. 31.14 (e).

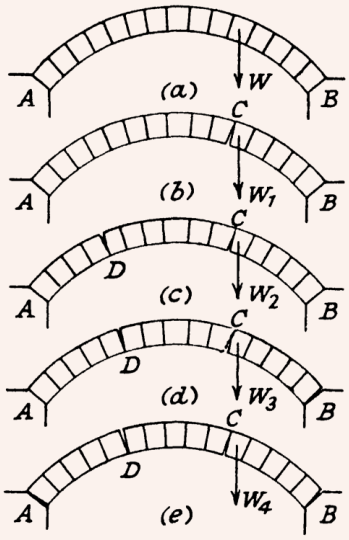


Figura 31.14: Insufficienza graduale di un voussoir Pippard, Tranter e Chitty, 1936

34 Pippard continua a dire che

> Anche se alla luce del lavoro più recente appare il metodo di Castigliano fornire la base più solida di progettazione, non è finora stato generalmente accettata e la dipendenza è ancora posta su una combinazione di teorie più antiche, che sarà riassunto nel prossimo paragrafo.
>
> Pippard e Baker, 1943 The analysis of engineering structures

35 Quindi, con riferimento a Fig. 31.15, egli propone una procedura come segue:

1. Si supponga che le posizioni dei quattro cerniere (A, B, C e D) sono conosciute.
2. La sezione CDB sarà in equilibrio sotto le forze che agiscono su di esso, ma non includono l'ignoto *W*.
3. Prendete i momenti di queste forze su C e D, avremo due equazioni in H, V_B e parte appropriata del sistema di carico morto. V_B e risolvere per H.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

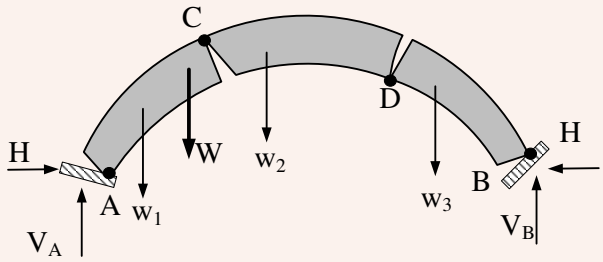


Figura 31.15: Voussoirs analizza da Pippard e Baker, 1943

4. Considerate il momento di A, sono presi, avremo un'equazione in termini di W, V_B, H e i termini del carico morto. V_B viene nuovamente eliminato utilizzando le equazioni dei momenti su C, e da allora H era stato trovato, allora W può essere determinato.

36 Tuttavia, le posizioni di C e D non sono note *a priori* è necessaria una procedura di prova e errore, ma alcune regole generali riducono chap: regione della fiducia considerevolmente. Così, pin C sempre si forma agli extrados del giunto adiacente a W, sdraiata tra W e la corona dell'arco; spillo B sempre fors agli extrados della primavera più lontano da W; perno A è sull'intrados, sia all'altro a molla o su un giunto vicino ad esso, e la posizione del perno D può nella maggior parte dei casi essere giudicato molto quasi.

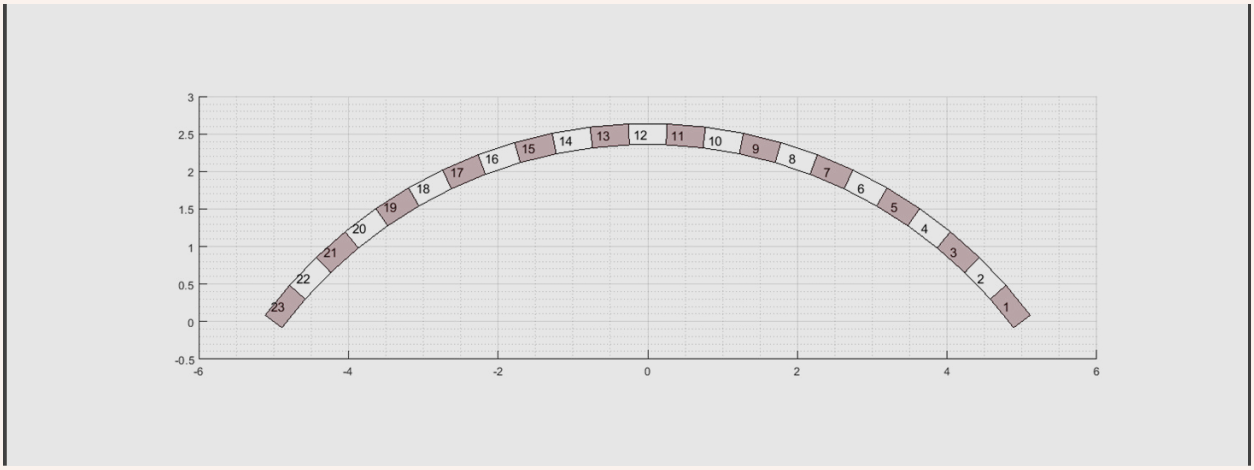
37 Per trovare W è quindi necessario fare alcune prove per posizioni di spillo diverse. H è calcolato in base a una considerazione dell'equilibrio della sezione CB come prima, ma per alcuni (forse due o tre) posizioni diverse di D. Che dà il valore più basso di H sarà quello corretto, poiché darà il valore più basso di W che cosa la posizione A. Dopo aver trovato H, alcune posizioni alternative per A sono presi e i valori corrispondenti di W calcolato come già descritto. Il più basso sarà quello corretto.

38 Segue un esempio numerico.

31.2.8.1 Ex 31.1: Carico di guasto del voussoir; metodo di pippard

La sezione seguente è riprodotta da Pippard e Baker, 1943 The analysis of engineering structures.

COPIA DI REVISIONE



COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
Punti di riferimento			x	y	Caricamento	Momento	Σw	Σwx
In	Mezzogiorno	Esame			w	wx		
23, 0			1.600	-0.027				
		23, 0	1.636	0.000			2,016	1,649
	23		1.593		108	172		
22, 23			1.550	0.035				
		22, 23	1.584	0.064			1,908	1,477
	22		1.540		106	163		
21, 22			1.496	0.091				
		21, 22	1.526	0.123			1,802	1,314
	21		1.481		107	159		
20, 21			1.437	0.144				
		20, 21	1.465	0.178			1,695	1,155
	20		1.419		100	142		
19, 20			1.369	0.191				
		19, 20	1.399	0.228			1,595	1,013
	19		1.353		94	127		
18, 19			1.307	0.233				
		18, 19	1.329	0.272			1,501	880
	18		1.283		86	110		
17, 18			1.237	0.270				
		17, 18	1.256	0.310			1,415	776
	17		1.210		83	100		
16, 17			1.165	0.301				
		16, 17	1.181	0.342			1,332	676
	16		1.135		77	88		
15, 16			1.090	0.326				
		15, 16	1.102	0.368			1,255	588
	15		1.057		74	78		
14, 15			1.013	0.345				
		14,15	1.022	0.388			1,181	510
	14		0.978		71	69		
13, 14			0.936	0.357				
		13, 14	0.941	0.401			1,110	441
	13		0.898		68	61		
12, 13			0.857	0.364				
		12, 13	0.859	0.408			1,042	380
	12		0.818		68	56		
11, 12			0.778	0.364				
		11. 12	0.777	0.408			974	324
	11		0.737		68	50		
10, 11			0.700	0.357				
		10, 11	0.694	0.401			906	274
	10		0.657		71	47		
9, 10			0.622	0.345				
		9, 10	0.613	0.388			835	227
	9		0.578		74	43		
8, 9			0.545	0.326				
		8, 9	0.533	0.368			761	184
	8		0.501		77	39		
7, 8			0.471	0.301				
		7, 8	0.455	0.342			684	145
	7		0.425		83	35		
6, 7			0.398	0.270				
		6, 7	0.379	0.310			601	110
	6		0.353		86	30		
5, 6			0.328	0.233				
		5, 6	0.306	0.272			515	80
	5		0.283		94	27		
4, 5			0.267	0.191				
		4, 5	0.237	0.228			421	53
	4		0.217		100	22		
3, 4			0.199	0.144				
		3, 4	0.171	0.178			321	31
	3		0.154		107	16		
2, 3			0.140	0.091				
		2, 3	0.109	0.123			214	15
	2		0.096		106	10		
1, 2			0.085	0.035				
		1, 2	0.052	0.064			108	5
	1		0.043		108	5		
0, 1			0.036	-0.027				
		0, 1	0.000	0.000				

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Poiché nella maggior parte dei casi i valori critici W sarà necessario per tutti i punti sull'arco il lavoro dovrebbe essere fatto sistematicamente, e la seguente si raccomanda di usare l'anello dell'arco con 23 voussoirs 3·33' profondi. L'arco è di 10 piedi e il rialzo di 2 piedi 6 pollici.

Prendi. B come origine con Ox come orizzontale e Oy A partire dall'abutment sinistro, i co-ordinati degli extrados e delle intrados di ogni articolazione sono tabulati (in questo caso particolare in termini del raggio medio). Il x coordinamento del centro di ogni voussoir è inserito nella colonna 4 della tabella, il carico morto applicato a nella colonna 6, e il momento di questo carico morto circa l'origine nella colonna 7. La somma di tutti i carichi morti a destra di un giunto e la somma dei loro momenti sono inseriti nelle colonne 8 e 9.

Come esempio, determineremo il carico che deve essere applicato al voussoir n. 19 per far sì che l'arco diventi instabile.

Prendere momenti circa C per la parte dell'arco tra C e B noi otteniamo

$$x_c V_B = y_c H + x_c \sum_C^B w - \sum_C^B wx$$

N. C 18-19e[a], e sulla sostituzione dei valori numerici dalla tabella che abbiamo hanno

$$1.329V_B = 0.272H + (1.329 \times 1,501) - 886 \Rightarrow V_B = 0.204H + 835 \tag{31.3}$$

Per un primo processo, assumere il pin D tra i blocchi 9-10i. L'equazione del momento per la parte dell'arco tra D e B su questo punto è

$$0622V_n = 0345H + (0622 \times 835) - 227 \Rightarrow V_n = 0554H + 471 \tag{31.4}$$

Eliminazione V_n da Eq. 31.3 e 31.4 dalle precedenti due equazioni

$$H = l,040 \text{ lbs} \tag{31.5}$$

Per un secondo processo assumere pin D a 10-11i;

$$0700VB = 0357H + (0700 \times 906) - 274 \Rightarrow V_B = 0511H + 516.$$

Ancora da Eq. 31.3 e 31.2.8.1

$$H = 1,042 \text{ lbs}$$

Allo stesso modo, se perno D è a 8-9i

$$H = l,045 \text{ lbs}$$

La posizione 9-10i è corretta poiché dà il valore più basso per H. Selezione dell'abbattimento sinistro (cioè 23-0i) come il perno A otteniamo, prendendo momenti circa A

$$l600V_B = -0027H + (l600 \times 02016) - 1,649 + 0247W \Rightarrow V_n = -0017H + 086 + 0155W. \tag{31.6}$$

Eliminazione V_n tra Eq. 31.3 e 31.6 e sostituti per H da 31.5,

$$W = 512 \text{ lbs}$$

Se perno A è a 23-22

$$W = 534 \text{ lbs}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

I perni corretti sono, quindi, 0-le, 9-l0i; I8l9e e 23-0i, e i valori corrispondenti per il carico e la spinta orizzontale sono $W = 512$ Lbs e $H = l,040$ L'esame rispettivamente.

Va notato che W è direttamente proporzionale al carico morto e quindi, dal punto di vista della stabilità, un riempimento pesante è preferibile a una luce. Le sollecitazioni di compressione, tuttavia, sono naturalmente aumentate nella stessa proporzione e c'è più pericolo di un fallimento da questa causa.

[a] 18-19e: articolazioni tra i 18 e 19, extrados.

31.3 Generalizzazione del metodo di pippard; smars

Adattato da «Etudes sur la stabilité des arcs et voûtes» by Smars, 2000

39 L'analisi degli archi murari (e in qualche misura, in strutture di blocco più generali) può essere eseguita attraverso una discretizzazione delle equazioni derivate §32.1.4, (Smars, 2000).

40 Smars, 2000 metodo esteso di Pippard (discretization) per tenere conto anche del carico variabile della gravità e dei momenti interni, quindi non è limitato ai voussoirs.

41 È possibile scrivere le equazioni di equilibrio in forma matrice per collegare forze interne alle forze esterne se si è interessati solo alle forze in un numero discreto di sezioni.

42 L'arco è discretizzato come set di n blocchi. Ogni blocco è sottoposto a forze esterne (agire lungo i suoi intrados, extrado e centro di gravità (auto-peso)) ed ha forze interne (azione sulle pietre), Fig. 31.16.

43 Per semplificare, le forze, comprese le forze interne sono espresse nello stesso referenziale (x, y) piano. Indice 1 si riferisce alle forze ingoing, indice 2 a forze in uscita e indice e alle forze esterne.

44 Le forze interne $\mathbf{X}$ agire sulle interfacce tra i blocchi i e $i+1$ agire in direzioni opposte su ciascuno dei due blocchi adiacenti. La forza che agisce sul blocco i è denotato $\mathbf{X}_1^{i+1}$ con $\mathbf{X}_2^i = -\mathbf{X}_1^{i+1}$.

45 Equazioni di equilibrio per un blocco sono quindi semplicemente

$$F_{1x} - F_{2x} + F_{ex} = 0 \tag{31.7}$$

$$F_{1y} - F_{2y} + F_{ey} = 0 \tag{31.8}$$

$$F_{1x}y_{1r} - F_{1y}x_{1r} + M_1 - F_{2x}y2r + F_{2y}x_{2r} - M_2 + F_{ex}y_{er} - F_{ey}x_{er} + M_e = 0 \tag{31.9}$$

Con coordinate relative basate su un punto di riferimento r

$$x_{1r} = x_1 - x_r \tag{31.10}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

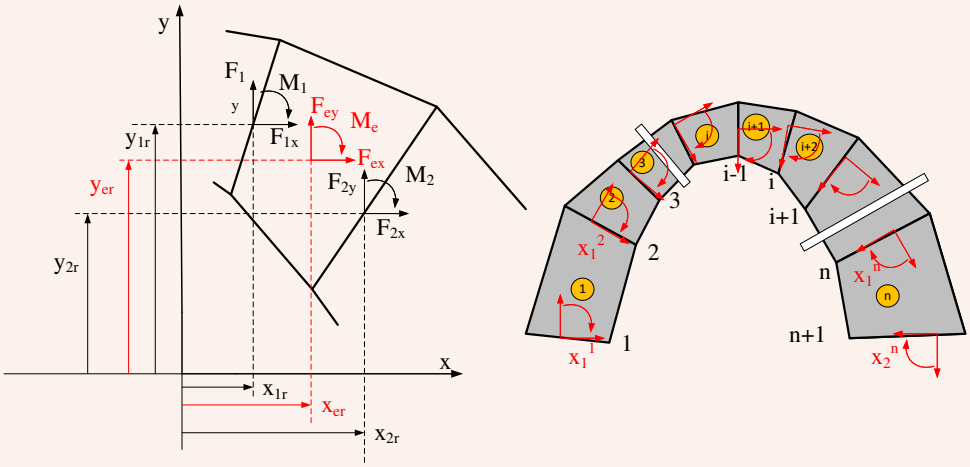


Figura 31.16: Flusso di forze attraverso i blocchi in un arco

Che può essere scritto in forma matrice

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} F_{1x} \\ F_{1y} \\ \hline M_1 + F_{1x} y_{1r} - F_{1y} x_{1r} \\ \hline F_{ex} \\ F_{ey} \\ \hline M_e + F_{ex} y_{er} - F_{ey} x_{er} \\ \hline F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_2 + F_{2x} y_{2r} - F_{2y} x_{2r} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} \tag{31.11}$$

46 L'equazione dell'equilibrio può essere semplificata con le seguenti definizioni

$$\lfloor \mathbf{I} \quad \mathbf{I} \quad -\mathbf{I} \rfloor \left\{\begin{array}{c} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_e \\ \mathbf{X}_2 \end{array}\right\} = 0$$

$$\mathbf{I} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{31.12}$$

$$\mathbf{X}_{_} = \left\{\begin{array}{c} F_{_x} \\ F_{_x} \\ M_{_} + F_{_x} y_{_r} - F_{_y} x_{_r} \end{array}\right\}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

47 Si noti che la forza in ogni blocco deve essere in equilibrio ($X_2^i = X_1^{i+1}$), l'equilibrio di una sequenza del blocco può essere scritto

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c|c|c} \mathbf{I} & \mathbf{I} & -\mathbf{I} & & & & \\ & & \mathbf{I} & \mathbf{I} & -\mathbf{I} & & \\ & & & & I & \ddots & \\ & & & & & \mathbf{I} & \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \mathbf{X}_1^1 \\ \mathbf{X}_e^1 \\ \hline \mathbf{X}_1^2 \\ \mathbf{X}_e^2 \\ \hline \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{X}_1^n \\ \mathbf{X}_e^n \\ \hline \mathbf{X}_2^n \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{array}\right\} \tag{31.13}$$

48 Se le forze esterne sono note, possono essere spostate sul lato destro dell'equazione

$$\left[\begin{array}{cccccc} \mathbf{I} & -\mathbf{I} & & & & \\ & \mathbf{I} & -\mathbf{I} & & & \\ & & \mathbf{I} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \mathbf{X}_1^1 \\ \mathbf{X}_1^2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_1^n \\ \mathbf{X}_2^n \end{array}\right\} = - \left\{\begin{array}{c} \mathbf{X}_e^1 \\ \mathbf{X}_e^2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_e^n \end{array}\right\} \tag{31.14}$$

49 Per determinare le forze interne, come abbiamo visto, dobbiamo conoscere i valori di tre parametri: ad esempio possiamo prendere i componenti della forza. $\mathbf{X}_e^n$

$$\left\{\begin{array}{c} \mathbf{X}_1^1 \\ \mathbf{X}_1^2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_1^n \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccccc} \mathbf{I} & -\mathbf{I} & & & & \\ & \mathbf{I} & -\mathbf{I} & & & \\ & & \mathbf{I} & & & \\ & & & \ddots & -\mathbf{I} & \\ & & & & \mathbf{I} & \end{array}\right]^{-1} \left\{ - \left\{\begin{array}{c} \mathbf{X}_e^1 \\ \mathbf{X}_e^2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_e^n \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_2^n \end{array}\right\} \right\} \tag{31.15}$$

$$= - \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & & & & \vdots \\ & & 1 & & & & \vdots \\ & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \mathbf{X}_e^1 \\ \mathbf{X}_e^2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_e^n - \mathbf{X}_2^n \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \mathbf{X}_2^n - \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_e^i \\ \mathbf{X}_2^n - \sum_{i=2}^n \mathbf{X}_e^i \\ \vdots \\ \mathbf{X}_2^n - \sum_{i=n}^n \mathbf{X}_e^i \end{array}\right\} \tag{31.16}$$

$$\mathbf{X}_1^i = \mathbf{X}_2^i - \mathbf{X}_e^i \quad , \quad \mathbf{X}_2^i = \mathbf{X}_1^{i+1} \tag{31.17}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

50 Le forze X^i ad angolo polare θ_i per ogni elemento i, la conversione alle forze interne normali è direttamente

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{c} N^i \\ V^i \\ M^i \end{array}\right\} &= \left[\begin{array}{ccc} -\cos\theta_i & \sin\theta_i & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} F^i_{1x} \\ F^i_{1y} \\ M^i_1 \end{array}\right\} \\ &= \left[\begin{array}{ccc} -\cos\theta_i & \sin\theta_i & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} F^{i-1}_{2x} \\ F^{i-1}_{2y} \\ M^{i-1}_2 \end{array}\right\}\end{aligned} \tag{31.18}$$

M sarebbe zero solo quando la linea di resistenza passa attraverso il centro della sezione (cioè l'eccentricità zero), questa condizione può essere imposta solo in tre sezioni.

51 La definizione di eccentricità assoluta e relativa (ex, e) è la stessa cosa di quanto precedentemente dato

$$ex^i = \frac{M^i}{N^i} \quad , \quad e^i = -2\frac{ex}{d} = -2\frac{M^i}{N^i d} \tag{31.19}$$

52 L'eccentricità relativa determina il punto in cui la forza normale N dovrebbe agire per causare un momento M. Questo punto è chiamato *centro di pressione* e la linea che li collega è *linea di spinta*. Si noti che la trasformazione $x'_i = a_{ij}x_j$) della forma dell'arco e delle forze applicate porta ad una trasformazione identica della linea di spinta. "Linea di resistenza" collega i punti in cui le forze interne entrano nella sezione.

53 Come mostrato in precedenza, le forze interne nell'arco potrebbero essere determinate da tre condizioni di confine iniziali. Così, assegnando tre punti attraversati da quella linea, possiamo determinare le costanti di integrazione, Fig. 31.17 dove $x_{a1} = x_a - x_1$, $x_{b1} = x_b - y_I$

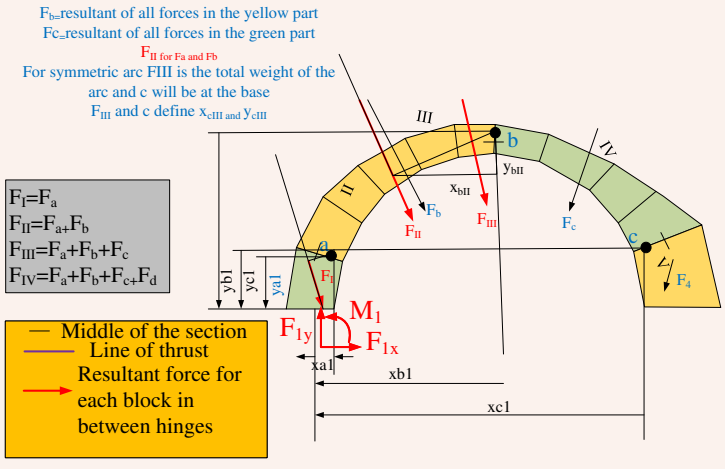


Figura 31.17: Determinazione dell'insieme delle forze all'origine

ecc.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

54 In seguito, determineremo le condizioni di confine in modo che la linea di spinta passerà attraverso tre punti nell'arco. M e N) in quei luoghi

$$\begin{cases} M_a = (F_{1x}y_{a1} - F_{1y}x_{a1} + M_1) + (F_{xI}y_{aI} - F_{yI}x_{aI}) \\ M_b = (F_{1x}y_{b1} - F_{1y}x_{b1} + M_1) + (F_{xII}y_{bII} - F_{yII}x_{bII}) \\ M_c = (F_{1x}y_{c1} - F_{1y}x_{c1} + M_1) + (F_{xII}y_{cIII} - F_{yIII}x_{cIII}) \end{cases}$$

Ovvero questi momenti dovrebbero essere zero,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{a1} & -x_{a1} & 1 \\ y_{b1} & -x_{b1} & 1 \\ y_{c1} & -x_{c1} & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{yI}x_{aI} - F_{xI}y_{aI} \\ F_{yII}x_{bII} - F_{xII}y_{bII} \\ F_{yIII}x_{cIII} - F_{xIII}y_{cIII} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_I \\ M_{II} \\ M_{III} \end{Bmatrix} \tag{31.20}$$

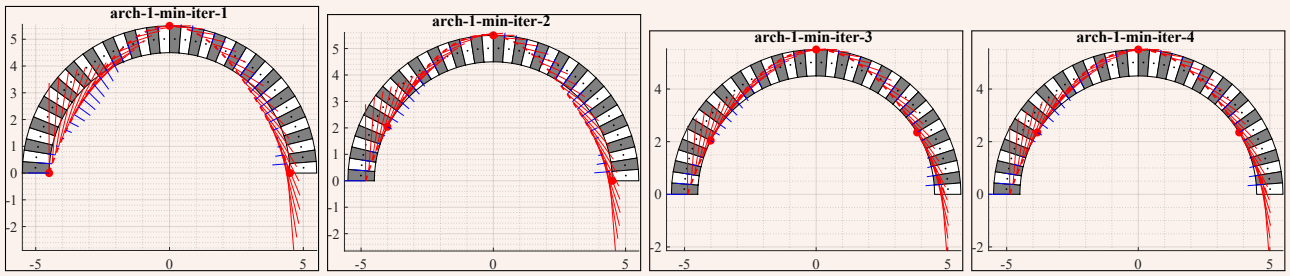
Risolvendo, determinamo il set di forze "input' per ogni blocco.

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} x_{b1} - x_{c1} & x_{c1} - x_{a1} & x_{a1} - x_{b1} \\ y_{b1} - y_{c1} & y_{c1} - y_{a1} & y_{a1} - y_{b1} \\ x_{c1}y_{b1} - x_{b1}y_{c1} & x_{a1}y_{c1} - x_{c1}y_{a1} & x_{b1}y_{a1} - x_{a1}y_{b1} \end{bmatrix}$$

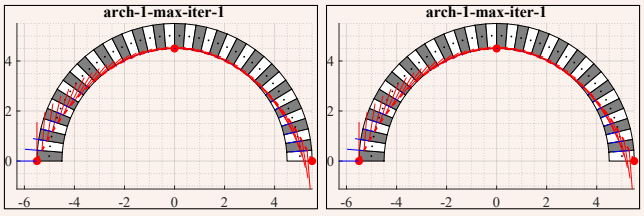
dove

$$\Delta = -x_{a1}y_{b1} + x_{a1}y_{c1} + x_{b1}y_{a1} - x_{b1}y_{c1} - x_{c1}y_{a1} + x_{c1}y_{b1}$$

55 Il MATLAB®codice indicato §I.1.4 genera le seguenti cifre corrispondenti, Fig. 31.18.



(a) Profilata minima



(b) Propulsione massima

Figura 31.18: MATLAB®sequenza generata di cerniere in un voussoir

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

31.4 Algoritmo

56 L'approccio non è specifico per un particolare tipo di arco (in termini di cerniere), ed è analogo al metodo statico inferiore (§57.2.2) per l'analisi del collasso.

57 Il corrispondente MATLAB®il codice è dato in §I.1.4.

procedure ANALISI DEL CROLLO DELL'ARCO DELLA MURATURA(Figura 31.17)
    Inizializzare n, R, γ, g α e_max, ε
    Assumere n_1, n_2, n_3,e_1, e_2, e_3, $iter_{max}$ ▷ Inizializzare le costanti
    Minimo_Thurst
    Massimo_Thurst
end procedure

procedure MINIMO_TRASMISSIONE(Determinare la linea di spinta minima data 3 cerniere) ▷ Prova iniziale
    $e_1 \leftarrow -max_eccent; e_2 \leftarrow max_eccent; e_3 \leftarrow -max_eccent;$
    $n_1 \leftarrow 1; n_2 \leftarrow round(n/2)+1; n_3 \leftarrow n+1; iter \leftarrow 0$
    while Eccentrico **false** & $iter < iter_{max}$ **do**
        $iter \leftarrow iter + 1$ ▷ Trazione integrale del viso
        [**N**, **V**, **ex**] ← Volti_Sforzi($n_1, e_1, n_2, e_2, n_3, e_3$)] ▷ Trova la sezione più offensiva in termini di eccentricità
        $[m, r_0] \leftarrow max(abs(\mathbf{ex})$ ▷ Posizione di cerniera fine
        if $ex(r_0) < 0$ **then**
            if $abs(r_0 - n_1) < abs(r_0 - n_3)$ **then**
                $n_1 = r_0$
            else
                $n_3 \leftarrow r_0$
            end if
        else
            $n_2 \leftarrow r_0$
        end if
        if $max(abs(\mathbf{ex})) -$ **max_eccent** $< \varepsilon$ **then**
            Eccentrico ← **true**
        else
            Eccentrico ← **false**
        end if
    end while
end procedure

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

procedure VOLTO_SFORZI($n_1, e_1, n_2, e_2, n_3, e_3$)(Equazione 31.18) ▷ Compute forze sul primo volto per passare dai tre punti imposti
    $[F_{x1} F_{y1} M_1] \leftarrow$ Tre._Punti($n_1, e_1, n_2, e_2, n_3, e_3$) ▷ Forze esterne sul primo volto
    $[F_x, F_y, M] \leftarrow$volti_chiavi ▷ Aggiungere i due componenti
    $F_x \leftarrow F_x + F_{x1}, F_y \leftarrow F_{y1}; M \leftarrow M + M_1 + (x - x(1))F_{y1} - (y - y(1))F_{x1}$ ▷ Determinare le forze interne corrispondenti
    $\mathbf{N} \leftarrow -\cos(\boldsymbol{\theta})F_x + \sin(\boldsymbol{\theta})\mathbf{F}_y; V \leftarrow \sin(\boldsymbol{\theta})\mathbf{F}_x + \cos(\boldsymbol{\theta})\mathbf{F}_y; ex \leftarrow -2\mathbf{M}/(\mathbf{Nt})$
end procedure

procedure TRE._N.(Equazione 31.20)
    Spessore di calcolo **t**, raggio **r**, estrados $\mathbf{x}_e$, endodos $\mathbf{x}_i$, linea centrale **x** ▷ centro punto prima sezione
    $x_1 = \sin(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{r} + \mathbf{t}/2)e_1,\ y_1 = \cos(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{r} + \mathbf{t}/2)e_1$
    $x_2 = \sin(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{r} + \mathbf{t}/2)e_2,\ y_2 = \cos(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{r} + \mathbf{t}/2)e_2$
    $x_3 = \sin(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{r} + \mathbf{t}/2)e_3,\ y_3 = \cos(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{r} + \mathbf{t}/2)e_3$ ▷ Coordinate delle tre cerniere
    $x_a = x_1(n_1); y_a = y_1(n_1)$
    $x_b = x_2(n_2); y_b = y_2(n_2)$
    $x_c = x_3(n_3); y_c = y_3(n_3)$ ▷ Set matrice che si occupa delle forze della prima sezione ai momenti alle 3 cerniere
    $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} y_a - y_r & -(x_a - x_r) & -1. \\ y_b - y_r & -(x_b - x_r) & -1. \\ y_c - y_r & -(x_c - x_r) & -1. \end{bmatrix}$$
    $[F_x, F_y, M] \leftarrow$ volti_chiavi ▷ coordinate del centro vettoriale di sezione -> punto di passaggio
    $x_a = x_a - x_1(n_1); y_a = y_a - y_1(n_1)$
    $x_b = x_b - x_2(n_2); y_b = y_b - y_2(n_2)$
    $x_c = x_c - x_3(n_3); y_c = y_c - y_3(n_3)$ ▷ Aggiornare i momenti
    $M_a = M(n_1) - F_x(n_1)y_a + F_y(n_1)x_a$
    $M_b = M(n_2) - F_x(n_2)y_b + F_y(n_2)x_b$
    $M_c = M(n_3) - F_x(n_3)y_c + F_y(n_3)x_c$
    $\mathbf{M}_p = [M_a\ M_b\ M_c]$ ▷ Determinare le forze necessarie per avere la linea che passa attraverso i 3 punti imposti
    $W = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{M}_p; F_{x_1} = W(1); F_{y_1} = W(2); M_1 = W(3)$
end procedure

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
procedure VOLTI_CHIAVI
    Competere ogni peso del blocco
    for - No. do
        F_x = [F_x; 0. + F_x(i)]
        F_y = [F_y; −w(i) + F_y(i)]
        M = [M; w(i)x_g(i) + M(i)]
    end for
    eccent = 0, x = sind(θ)(r + t/2.eccent);y=cosd(θ)(r+t/2.eccent); M = M + F_y x − F_x y;
end procedure
```

θ	Angolo di ciascuna giunzione rispetto alla verticale
n	numero di blocchi
n_i	Id comune in cui si formano forme di cerniera
e_i	Linea di eccentricità della spinta all'articolazione $< 0 < i < 1$
R	Radius (può variare per ogni blocco
γ	Densità di massa
g	Accelerazione della gravità
α	Angolo di apertura (90° per semi-circolo)
e_{max}	Massima eccentricità ($\leq 1.$)
ε	Tolleranza
t	Spessore di ogni voussoir

31.5 Osservazioni finali

31.5.1 Jacques Heyman; 1925

58 Jacques Heyman era una figura tortuosa nella divulgazione del lavoro sulle strutture murarie, e la storia delle costruzioni di cattedrale gotica. Anche se molto ben versato in matematica (il suo primo campo di stdy) e meccanica (era uno studente di Inglis), non ha davvero fatto contributi tecnici da solo. Tuttavia, era così bravo in letteratura storica che non solo poteva riassumerlo, ma anche sintetizzarla.

59 Fu il primo a enunciare chiaramente le tre ipotesi per la determinazione del dominio di ammissibilità della voussoir (Heyman, 1997). Ancora una volta, non era niente di nuovo, ma si formalizzava in modo chiaro alcune ipotesi sul materiale che ha formato la base per il calcolo degli archi nel XVIII e XIX secolo.

COPIA DI REVISIONE

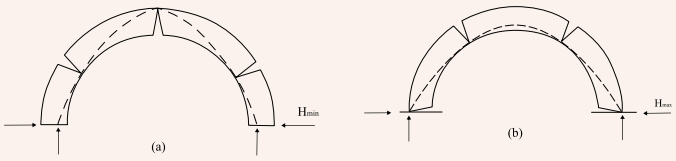
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

1. La muratura (o la pietra), né l'agente vincolante (se presente) non ha resistenza alla trazione
2. La muratura ha una forza di compressione infinita
3. Non si verificano guasti scorrevoli

31.5.2 Linea di trazione

60 La linea di spinta rappresenta il locus dei punti lungo l'arco attraverso cui passano le forze che ne derivano; se tutti i voussoir dell'arco hanno la stessa dimensione, la linea di spinta ha quasi la forma di un catenario invertito.

61 La linea di spinta non deve uscire dallo spessore della muratura: a questo scopo è interessante studiare le sue due posizioni estreme che rappresentano due stati ancora in equilibrio. Infatti, quando la linea di spinta tocca il bordo inferiore o superiore dell'arco, la muratura si trova al limite della regione ammissibile degli stati e l'eccentricità è tale che promuove la formazione delle cerniere. In particolare, nelle due condizioni estreme, la linea di spinta dà la posizione di tre cerniere che si aprono: in questo modo è possibile calcolare il valore della spinta orizzontale dell'butment, come mostrato nella figura. 31.19. Nelle due posizioni estreme della linea di spinta, la spinta orizzontale dell'abutment sarà: a) minimo; b) massimo. È importante conoscere le due posizioni estreme della linea di spinta, perché la vera spinta dell'arco non può essere calcolata, ma i limiti superiori e inferiori possono essere fissati (Nobile e Bartolomeo, 2014 PDF).



(a) Minimo (b) Massimo

Figura 31.19: Meccanismi di colata; spinte d'abutmento (Nobile e Bartolomeo, 2014 PDF)

62 La catenaria (§30.3.3) è la forma vera dell'arco. Gli archi con altra forma si alzano perché i catenari sono inclusi nel loro spessore.

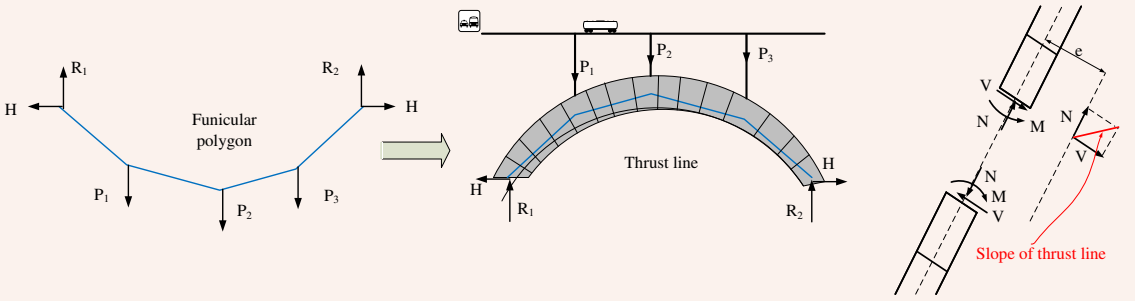
63 La forma della linea di spinta è il catenario matematico se l'auto-peso viene distribuito in modo equo intorno all'arco.

64 C'è uno spessore minimo di arco semicircolare che contiene solo un catenario. L'arco limite ha esattamente questo spessore minimo ed è in equilibrio instabile.

65 Per illustrazione, Fig. 31.20 mostra un poligono funicolare (cavo) sottoposto a carichi

COPIA DI REVISIONE

di punti, e la corrispondente linea di spinta. In questo caso la linea di propulsione è interamente all'interno del voussoir che supporta un ponte ed è quindi sicuro.



(a) Funicolare e corrispondente voussoir (b) eccentricità interna

Figura 31.20: Poligono funicolare invertito e corrispondente linea di spinta ed eccentricità

66 La linea di spinta può essere all'interno del terzo kernel centrale, in cui il segmento è in piena compressione. Se è al di fuori di questo kernel, che la tensione (apertura congiunta) si sviluppano, se sul bordo, allora abbiamo instabilità incipiente.

67 La linea di spinta cerca di determinare la posizione e il pendio. Il primo, è facilmente definito come la razione $e = M/N$, e la pendenza è determinata dal risultante delle somme vettoriali N e V.

68 La linea di spinta può essere calcolata attraverso l'analisi elastica (o la programmazione lineare), ma solitamente gli archi voussoir non sono stati decisi staticamente, e le relazioni di equilibrio non sono sufficienti.

31.5.3 Linea di trazione e pippard

69 La modalità di fallimento del Pippard comporta la formazione di un meccanismo e questo è ovviamente analogo alla graduale formazione delle cerniere in plastica nel fallimento plastico delle strutture Capitolo 57.

70 Questo può essere ulteriormente illustrato da insufficienza di un arco semicircolare sotto carico costante attraverso la formazione graduale delle cerniere, Fig. 31.21. Tre (in questo caso) sono sufficienti per indurre un meccanismo di guasto (come ad esempio 57.2.1.1). Questo sarà ulteriormente discusso di seguito.

71 Un arco è quindi sicuro semplicemente se una linea di spinta può essere trascinata all'interno del suo spessore.Un arco collasserà solo se la linea di impulso raggiunge il bordo dell'arco almeno in quattro punti, convertendo l'arca in un meccanismo.

72 La formazione di cerniere sufficienti causerà effettivamente un meccanismo. Questo metodo presuppone che un arco di muratura diventi un meccanismo quando almeno tre

COPIA DI REVISIONE

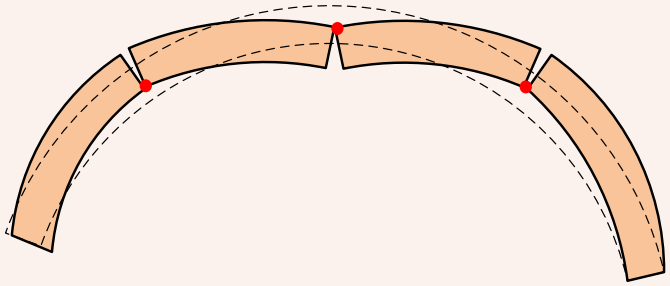


Figura 31.21: Modalità di guasto di un arco semi-cerca a tre cerniera

(o quattro in alcuni casi) cerniere di plastica si aprono. Tuttavia la posizione delle cernieri è inizialmente sconosciuta, quindi il primo passo consiste nell'ipotesi che sia possibile posizionarsi su tre (in Fig. 31.22) cerniere.

73 Dopo il pugno di supposizione (non mostrato), la linea di spinta viene tracciata, e poi si identifica il peggio "offender' (eccentricità maggiore di 1). Il processo viene ripetuto fino a quando si forma un meccanismo causato da tre cerniere con un'eccentricità di 1, in ogni caso abbiamo le equazioni usul dell'equilibrio statico e gli ulteriori momenti zero alle cernie. La procedura è descritta in modo algoritmico di seguito.

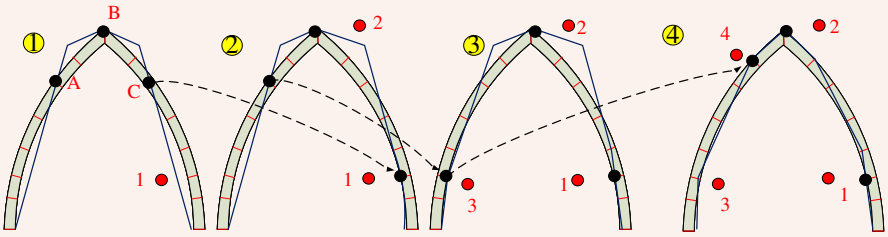


Figura 31.22: Sequenza delle posizioni di cerniera

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Grande moschea di Cordova, VIII-XI secolo, Córdoba, Spagna.
Le pietre a forma di cuneo rosso e bianco in alternativa assicurano la distribuzione del carico e la stabilità negli iconici archi a ferro di cavallo.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 32

Arci e ardesia curvata

Abstract

Questo è l'ultimo di un trio di capitoli che trattano strutture in cui la resistenza primaria è fornita da forze assiali. I precedenti capitoli coprivano cavi e archi rigidi (voussoirs). Questo capitolo si immergerà in archi elastici e travi curve, fornendo un'analisi completa del loro comportamento e delle caratteristiche. Partiremo con un'analisi approfondita di archi circolari, esaminando il loro comportamento strutturale in varie condizioni di carico. Ciò includerà una discussione su diversi livelli di complessità, in particolare in termini di numero e posizionamento delle cerniere. In seguito, ci si muoverà verso archi parabolici, considerando nuovamente varie complessità legate alle cerniere e ai loro effetti sulle prestazioni strutturali. Dopo aver esplorato accuratamente gli archi, ci concentreremo sulle travi curve. L'analisi coprirà sia i raggi curvi planari che le strutture elicoidali spaziali. Queste strutture sono particolarmente interessanti perché mostrano una complessa interazione tra flessore e torsione. Infine, Appendice D coprirà archi circolari più complessi che vanno oltre la portata di questo capitolo.

32.1 Arco circolare 1222
32.1.1 Tre archi circolari a cerniera 1222
32.1.2 Due archi circolari a cerniera 1229
32.1.3 Arco circolare senza cerniera 1229
32.1.4 Soluzione generalizzata . . . 1237
32.1.5 Soluzioni basate sulla Mathematica 1244
32.2 Forma ottimale di un arco 1244
32.2.1 Ex 32.5: Arco perfetto 1245
32.3 Arco di Parabolico 1245
32.3.1 Esempi 1246
32.3.2 Arco fisso con carico simmetrico 1250
32.3.3 Effetti di regolamento e temperatura della Fondazione . 1255
32.4 Travi curvate 1258
32.4.1 Trave ad arco 1258
32.4.2 Elicoidale 1261

[1] Gli archi sono stati un elemento fondamentale dell'architettura e dell'ingegneria per migliaia di anni, servendo sia a scopi funzionali che estetici. Dall'acquedotto dell'antica Roma alle cattedrali dell'epoca gotica, gli archi hanno svolto un ruolo cruciale nello sviluppo della civiltà umana. La loro unica capacità di sostenere il peso in modo efficiente ha fatto loro una soluzione strutturale preferita in varie costruzioni, che vanno dai ponti e gateway alle finestre e soffitti.

COPIA DI REVISIONE

2 Il principio dietro l'arco sta nella sua capacità di trasferire carichi attraverso la sua forma curva dove flexure è minimizzata e forze assiali massimizzate.

3 Questo capitolo si concentrerà sull'analisi di archi e travi curve, i concetti utilizzati sono identici a quelli precedentemente visti, tuttavia gli elementi che hanno dato origine alla loro analisi. la differenza maggiore (e solo) è che le equazioni saranno scritte in coordinate polari per archi circolari (e cartesiano per quelli parabolici).

4 Come i cavi, gli archi possono essere utilizzati per ridurre il momento di curvatura nelle strutture a lungo raggio. Essenzialmente, un arco può essere considerato come un cavo invertito e trasmette il carico principalmente attraverso la compressione assiale, ma può anche resistere alla flessione attraverso la sua rigidità flessorale.

5 Per ottimizzare l'efficienza del carico morto, le strutture a lungo raggio potrebbero hanno le loro forme approssimare il diagramma del momento corrispondente, da qui un arco, cavo sospeso o configurazione tendine in una prestressed il fascio di cemento è quasi parabolico, Fig. 32.1.

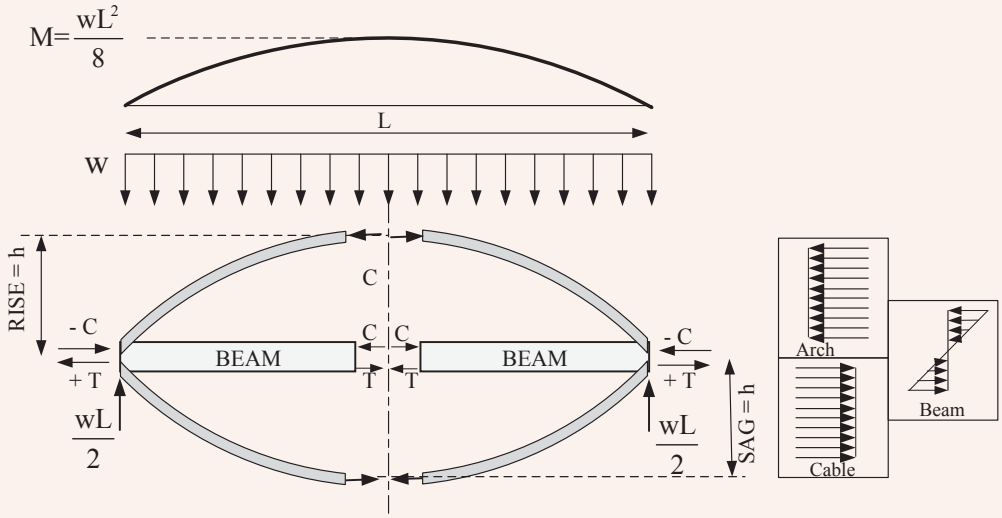


Figura 32.1: Momento resiste alle forze in un arco o sistema di sospensione rispetto a una trave, (Lin e Stotesbury, 1981)

6 Questo capitolo affronterà gli archi (circolari che parabolici), i raggi curvi, e infine le strutture elicoidali.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

32.1 Arco circolare

7 Le strutture a lungo arco possono essere costruite utilizzando la costruzione piana come travi o capriate. Tuttavia, per le campate in eccesso 100 ft, è spesso più economico costruire una struttura curva come un arco, cavo sospeso o gusci sottili.

8 Fin dall'alba della storia, l'umanità ha cercato di superare le distanze in quanto un arco è stato costruito con la costruzione dell'arco. materiali necessari per resistere solo alla compressione (come la pietra, muratura, mattoni), e il lavoro non era un problema.

9 Le questioni di base del design statico dell'arco sono illustrate in Fig. 32.2 dove il carico verticale è per unità proiezione orizzontale (come un carico esterno ma non un peso auto).

32.1.1 Tre archi circolari a cerniera

10 Gli archi a tre punte sono strutture staticamente determinate che la forma può ospitare insediamenti di sostegno e espansione termica senza stress interni secondari. Sono anche facili da analizzare attraverso statici.

11 In generale un arco porterà il carico verticale attraverso una combinazione di forze assiali e flessori. arco avrà un piccolo per trascurabile momento, e relativamente stress di compressione normali elevati.

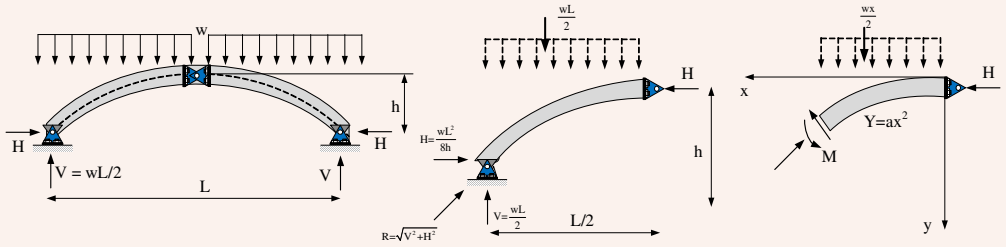


Figura 32.2: Statici di un arco a tre punte

12 A causa della simmetria, la reazione verticale è semplicemente $V = \frac{wL}{2}$, e non c'è alcuna cesoia attraverso il midspan dell'arco (nor un momento). Prendere il momento della corona,

$$M = Hh - \frac{wL}{2}\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{4}\right) = 0$$

13 Risolvere per H

$$H = \frac{wL^2}{8h}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

14 Ricordiamo che un'equazione simile è derivata per i cavi (Eq. 30.38), e H è analogo a $C - T$ forze in un raggio (Fig. 32.1), e h è l'altezza complessiva dell'arco, Dal h è molto più grande di d, H sarà molto più piccolo $C - T$ in un raggio.

15 Poiché l'equilibrio richiede H per rimanere costante attraverso l'arco, una curva parabolica avrebbe teoricamente risultato in nessun momento sulla sezione dell'arco.

32.1.1.1 Il teorema di Eddy

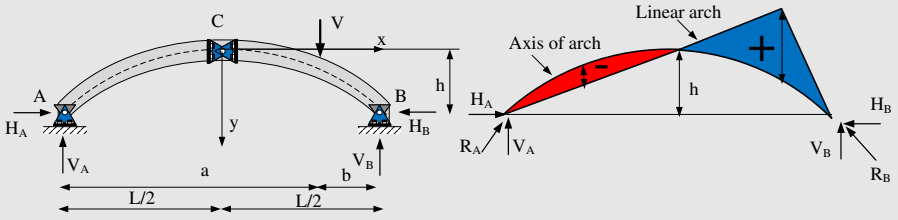
16 Il teorema di Eddy è un concetto importante nell'analisi degli archi, che fornisce un metodo per determinare i momenti e le forze in una struttura ad arco. Il teorema è particolarmente utile per analizzare gli archi a tre punte, dove semplifica i calcoli complessi coinvolti.

Definition 32.1: Il teorema di Eddy

Il momento di curvatura in qualsiasi punto dell'asse dell'arco è proporzionale all'intercettazione verticale tra l'arcata teorica e l'asse del vero arco (Eddy, 1878).

32.1.1.2 Esempi

32.1.1.2.1 Ex 32.1: Arco a tre cerniere; carico del punto; analitico



La sezione seguente è riprodotta da Thandavamoothy, 2011 Structural Analysis.

Per quanto riguarda i raggi diritti

$$V_A = \frac{Wb}{L} \text{ and } \quad V_B = \frac{Wa}{L} \tag{32.1}$$

Momento sul punto C alla corona è data da

$$V_B \frac{L}{2} - H_B h - W\left(\frac{L}{2} - b\right) = 0$$

COPIA DI REVISIONE

Sostituto per V_B da Eq. 32.1

$$\frac{Wa}{2} - H_B h - \frac{WL}{2} + Wb = 0; \quad W\left(\frac{a}{2} - \frac{L}{2} + b\right) - H_B h = 0$$
$$\frac{W}{2}(a - L + 2b) - H_B h = 0; \quad \frac{W}{2}(a - L + b + b) - Hh = 0$$
$$\frac{Wb}{2} - H_B h = 0; \quad H_B = \frac{Wb}{2h} \tag{32.2}$$

Dall'equilibrio delle forze orizzontali $H_A = H_B = H$

$$H = H_A = \frac{Wb}{2h} \tag{32.3}$$

Analogamente, se il carico è tra A e CAllora

$$H_A = \frac{Wa}{2h} \tag{32.4}$$

Dall'equazione di equilibrio

$$H = H_B = \frac{Wa}{2h}$$

Il momento in qualsiasi sezione X_1 tra il punto di carico e il supporto B a distanza di x dalla corona, la

$$M_{x1} = V_B\left(\frac{L}{2} - x\right) - H_B(h - y) \tag{32.5}$$

Sostituire Eq. 32.1 e 32.2 in 32.5

$$M_{x1} = \frac{Wa}{L}\left(\frac{L}{2} - x\right) - \frac{Wb}{2h}(h - y)$$
$$= \frac{Wa}{2} - \frac{Wax}{L} - \frac{Wb}{2} + \frac{Wby}{2h} = \frac{WL}{2} - W\left(\frac{ax}{L} - \frac{by}{2h}\right)$$

Il momento in qualsiasi sezione X_2 tra il carico del punto e la corona ad una posizione x dalla corona

$$M_{x2} = V_B\left(\frac{L}{2} - x\right) - W\left(\frac{L}{2} - b - x\right) - H_B(h - y) \tag{32.6}$$

Sostituire Eqs. 32.1 e 32.3 in 32.6

$$M_{x2} = \frac{Wa}{L}\left(\frac{L}{2} - x\right) - W\left(\frac{L}{2} - b - x\right) - \frac{Wb}{2h}(h - y)$$
$$= \frac{Wa}{2} - \frac{Wax}{2} - \frac{WL}{2} + Wb + Wx - \frac{Wb}{2} + \frac{Wby}{2h}$$
$$= Wx\left(1 - \frac{a}{L}\right) + \frac{Wby}{2h} = \frac{Wbx}{L} + \frac{Wby}{2h}$$
$$M_{x2} = Wb\left(\frac{x}{L} + \frac{y}{2h}\right)$$

Il momento in qualsiasi sezione X_2 tra A e a distanza x da C verso sinistra

$$M_{x3} = V_A\left(\frac{L}{2} - x\right) - H_A(h - y) \tag{32.7}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

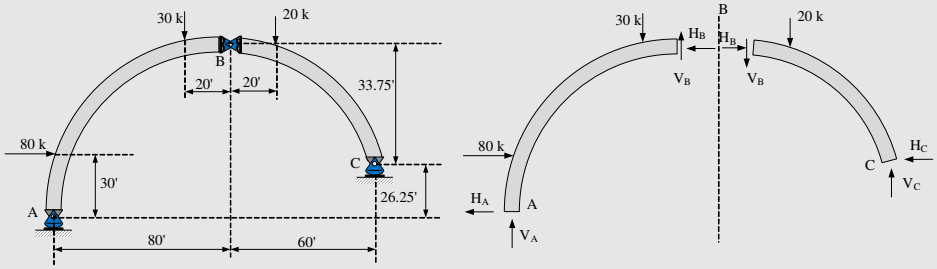
Sostituire Eqs. 32.1 e 32.4 in 32.7

$$M_{x3} = \frac{Wb}{L}\left(\frac{L}{2} - x\right) - \frac{Wb}{2h}(h - y) = \frac{Wb}{2} - \frac{Wbx}{L} - \frac{Wb}{2} + \frac{Wbx}{2h}$$
$$= -Wb\left(\frac{x}{L} - \frac{y}{2h}\right) \tag{32.8}$$

Il diagramma di istante per il tri-mantellato è mostrato sopra. AC e dal momento in cui C è zero, la spinta A deve passare attraverso C per incontrare la linea di azione W prodotto D. Ora, R_A, R_B e W sono in equilibrio, la linea di azione R_B at B deve incontrarsi W at D. Triangolo ADB rappresenta ad una certa scala il diagramma di momento per un semplice fascio ed è di segno positivo. $ACBA$ rappresenta alla stessa scala il diagramma del momento per $H(h^{-}y)$ Il diagramma ombreggiato ad una certa scala indica il diagramma del momento risultante. Per la metà carica, lo schema risultante è positivo e per la metà scaricata negativa. Così, il momento risultante in qualsiasi sezione è rappresentato dall'ordinato del diagramma formato da arco lineare e l'asse dell'arco. Il momento ordinato al carico può essere ottenuto sostituendo il momento della spinta circa la aveva dal momento di un semplice fascio al carico

32.1.1.2.2 Ex 32.2: Tre arco a cerniera; carico del punto

Determinare le reazioni dell'arco a tre punte mostrate di seguito



Quattro sconosciute, tre equazioni di equilibrio, una equazione della condizione $\Rightarrow$ - Si', e' una decisione statologica.

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^C = 0$$
$$\Rightarrow (R_{Ay})(140) + (80)(3.75) - (30)(80) - (20)(40) + R_{Ax}(26.25) = 0$$
$$\Rightarrow 140R_{Ay} + 26.25R_{Ax} = 2.900$$
$$(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0; \Rightarrow 80 - R_{Ax} - R_{Cx} = 0$$
$$(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; \Rightarrow R_{Ay} + R_{Cy} - 30 - 20 = 0$$
$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^B = 0; \Rightarrow (R_{ax})(60) - (80)(30) - (30)(20) + (R_{Ay})(80) = 0$$
$$\Rightarrow 80R_{Ay} + 60R_{Ax} = 3,000$$

Risolvere queste quattro equazioni:

$$\begin{bmatrix} 140 & 26.25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 80 & 60 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{Ay} \\ R_{Ax} \\ R_{Cy} \\ R_{Cx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2,900 \\ 80 \\ 50 \\ 3,000 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} R_{Ay} \\ R_{Ax} \\ R_{Cy} \\ R_{Cx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15.1\text{ k} \\ 29.8\text{ k} \\ 34.9\text{ k} \\ 50.2\text{ k} \end{Bmatrix}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Possiamo controllare i nostri risultati considerando la sommazione rispetto a b dalla destra:

$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_z^B = 0; -(20)(20) - (50.2)(33.75) + (34.9)(60) = 0 \checkmark$$

17 A causa della simmetria, la reazione verticale dell'arco mostrata in figura 32.2 è semplicemente $V = \frac{wL}{2}$, e non c'è alcuna cesoia attraverso la metà della fascia dell'arco (nor un momento).

$$M = Hh - \frac{wL}{2}\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{4}\right) = 0$$

18 Risolvere per H

$$H = \frac{wL^2}{8h}$$

19 Nota analogia con $M = wL^2/8$ per travi e $H = wL^2/8h$ per cavi. In generale un arco porterà il carico verticale attraverso una combinazione di forze assiali e flessori. Un arco ben dimensionato avrà un piccolo momento trascurabile, e relativamente elevati stress di compressione normali. La forma parabolica "perfetto" di un arco a tre assi semplicemente sostenuto

- Non ci dovrebbe essere alcuna cesoia o momento lungo qualsiasi sezione.
- Momento a x: $M = Hy - wx^2/2 = Hax^2 - wx^2/2 = 0$,
- Risolvere per a: $a = w/(2H)$
- Sostituto per H e concludere che a deve essere uguale a $4h/L^2$.
- Per ogni ampiezza L, c'è solo un'altezza h che avrebbe dato un parabola con zero momento e taglio.

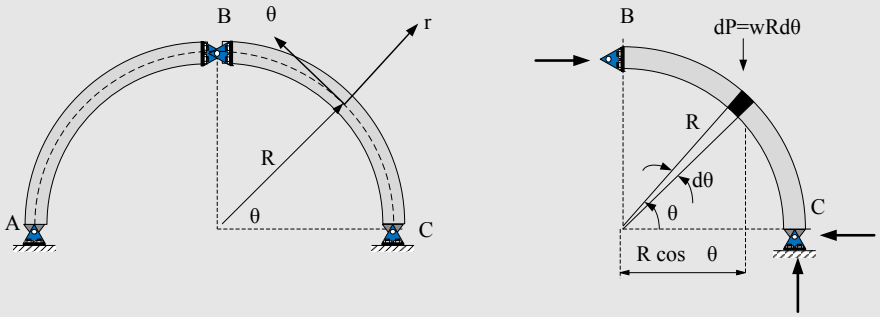
20 Gli archi a tre punte sono strutture staticamente determinate che la forma può ospitare insediamenti di supporto e l'espansione termica senza stress interni secondari, ma anche facili da analizzare attraverso statici. Un arco è molto più efficiente di un fascio, e forse più economico ed estetico che una tregua nel portare carichi su lunghe campate.

32.1.1.2.3 Ex 32.3: Tre arco a cerniera; carico uniforme

Determinare le reazioni dei tre acerrimi archi semi-circolari stazionatamente determinati sotto il proprio peso morto w (per lunghezza d'arco unitario $s$dove $ds = rd\theta$).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Le reazioni possono essere determinate integrando il carico sull'intera struttura. Reazione verticale:

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_A = 0; (C_y)(2R) - \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \underbrace{wRd\theta}_{dP}\ \underbrace{R(1+\cos\theta)}_{\text{moment arm}} = 0$$

$$\Rightarrow C_y = \frac{wR}{2}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}(1+\cos\theta)d\theta = \frac{wR}{2}[\theta+\sin\theta]\,|_{\theta=0}^{\theta=\pi}$$

$$= \frac{wR}{2}[(\pi+\sin\pi)-(0+\sin 0)]$$

$$= \frac{\pi}{2}wR$$

Reazioni orizzontali

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_B = 0; -(C_x)(R) + (C_y)(R) - \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \underbrace{wRd\theta}_{dP}\ \underbrace{R\cos\theta}_{\text{moment arm}} = 0$$

$$\Rightarrow C_x = \frac{\pi}{2}wR - \frac{wR}{2}\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta$$

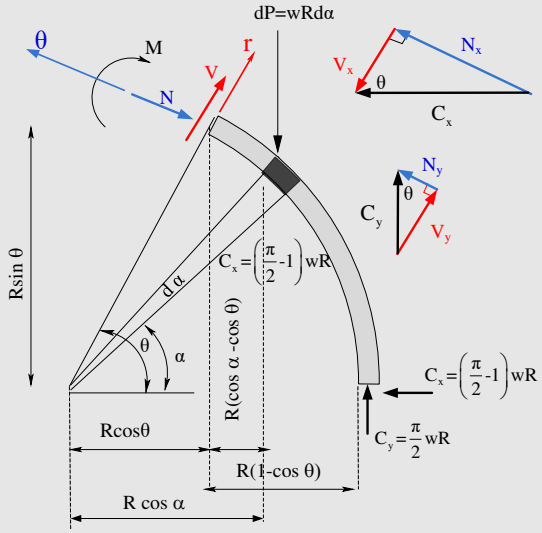
$$= \frac{\pi}{2}wR - wR[\sin\theta]\,|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}wR - wR(1-0)$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}-1\right)wR \tag{32.9}$$

Con simmetria le reazioni A sono uguali a quelli di C. Le Forze interne possono essere determinate.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Forze di taglio: Considerando il diagramma del corpo libero dell'arco, e sommando le forze nella direzione radiale ($\Sigma F_R = 0$):

$$-\underbrace{(\frac{\pi}{2}-1)wR\cos\theta}_{V_x}+\underbrace{\frac{\pi}{2}wR\sin\theta}_{V_y}-\int_{\alpha=0}^{\theta} wR\,d\alpha\sin\theta+V=0$$

$$\Rightarrow V(\theta)=wR\left[(\frac{\pi}{2}-1)\cos\theta+(\theta-\frac{\pi}{2})\sin\theta\right] \tag{32.10}$$

Forze assiali: Analogamente, se consideriamo la somma delle forze nella direzione assiale ($\Sigma F_\theta = 0$):

$$\underbrace{(\frac{\pi}{2}-1)wR\sin\theta}_{N_x}+\underbrace{\frac{\pi}{2}wR\cos\theta}_{N_y}-\int_{\alpha=0}^{\theta} wR\,d\alpha\cos\theta+N=0$$

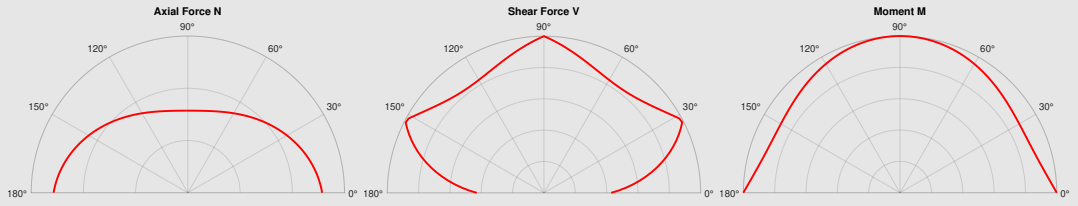
$$\Rightarrow N(\theta)=wR\left[(\theta-\frac{\pi}{2})\cos\theta-(\frac{\pi}{2}-1)\sin\theta\right] \tag{32.11}$$

Momento: Ora possiamo considerare la terza equazione di equilibrio ($\Sigma M_z = 0$):

$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M\ \underbrace{(\frac{\pi}{2}-1)wR}_{C_x}\cdot R\sin\theta-\underbrace{\frac{\pi}{2}wR}_{C_y}R(1-\cos\theta)$$
$$+\int_{\alpha=0}^{\theta} wR\,d\alpha\cdot R(\cos\alpha-\cos\theta)+M=0$$
$$\Rightarrow M(\theta)=wR^2\left[\frac{\pi}{2}(1-\sin\theta)+(\theta-\frac{\pi}{2})\cos\theta\right] \tag{32.12}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Nota: una soluzione generalizzata basata sulla Mathematica è data in §I.1.3

32.1.2 Due archi circolari a cerniera

21 Se l'arco ha solo due cerniere, Fig. 32.3, o se non ha cerniere, allora i momenti di piegatura possono esistere sia alla corona o ai supporti o in entrambi i posti.

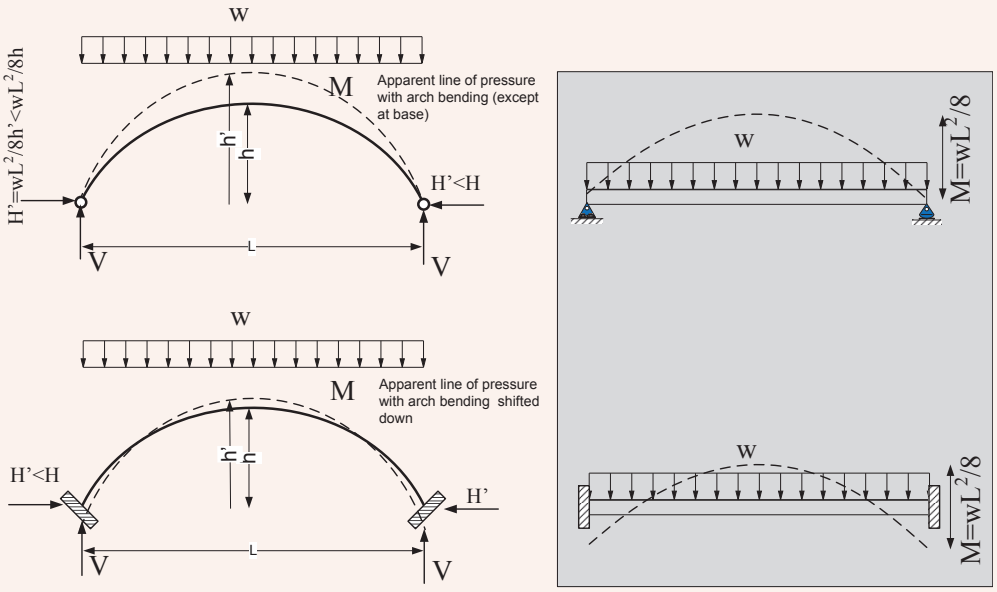


Figura 32.3: Due arco a cerniera, analogia con fascio fisso (Lin e Stotesbury, 1981)

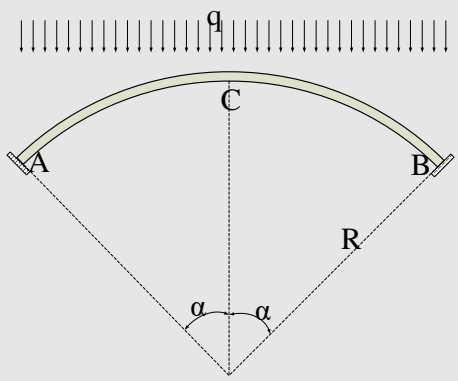
22 Da H varia inversamente all'ascesa h, è ovvio che si dovrebbe utilizzare il più alto possibile. Per una combinazione di considerazioni estetiche e pratiche, un rapporto di durata/rise che va da 5 a 8 o forse fino a 12, viene spesso utilizzato. Tuttavia, poiché il rapporto va più alto, potremmo avere problemi di buckling, e la sezione avrebbe poi una maggiore profondità della sezione, e il vantaggio dell'arco diminuisce.

32.1.3 Arco circolare senza cerniera

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

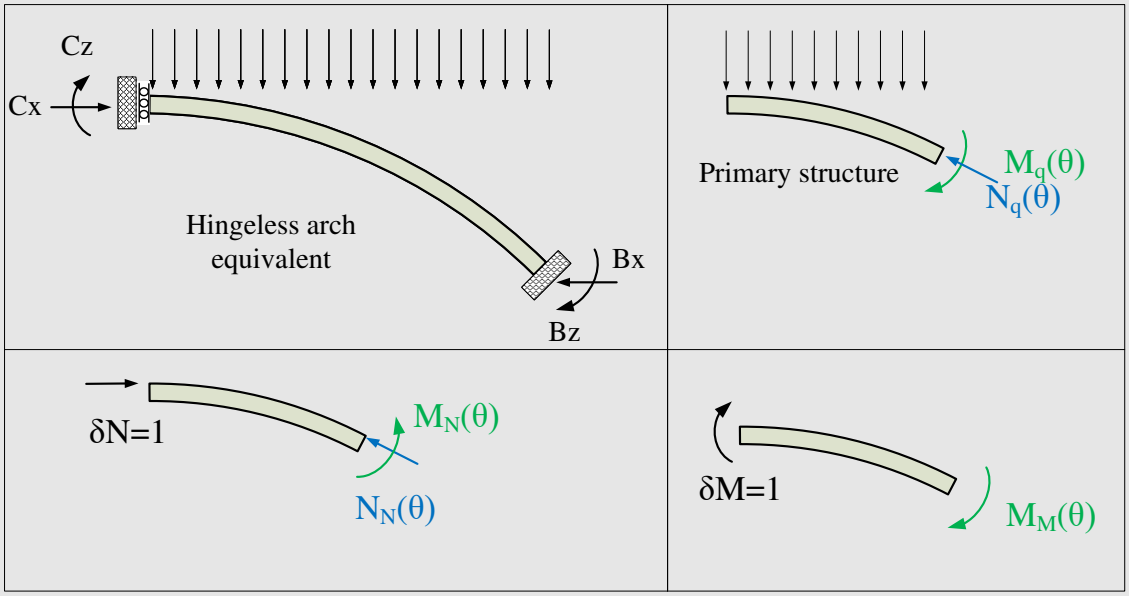
32.1.3.1 Ex 32.4: Arco circolare senza cerniera



Questo arco senza cerniera avrebbe tre forze ridondanti, all'inizio sarebbe tentato di liberare tutte le forze a un sostegno e poi finiremmo con una matrice flessibilità 3 per 3.

Approccio

A causa della simmetria dell'arco (non può esserci una forza di taglio alla corona) è più succosa rilasciare l'arcata nella corona dove il carico simmetrico avrebbe portato a solo due forze ridondanti: assiale e momento.



Useremo il principio del lavoro virtuale complementare per risolvere questo problema attraverso il metodo di forza (ossia flessibilità). La matrice di flessibilità è data da

$$\begin{bmatrix} f_{nn} & f_{nm} \\ f_{mn} & f_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_n \\ \Delta_m \end{Bmatrix}$$

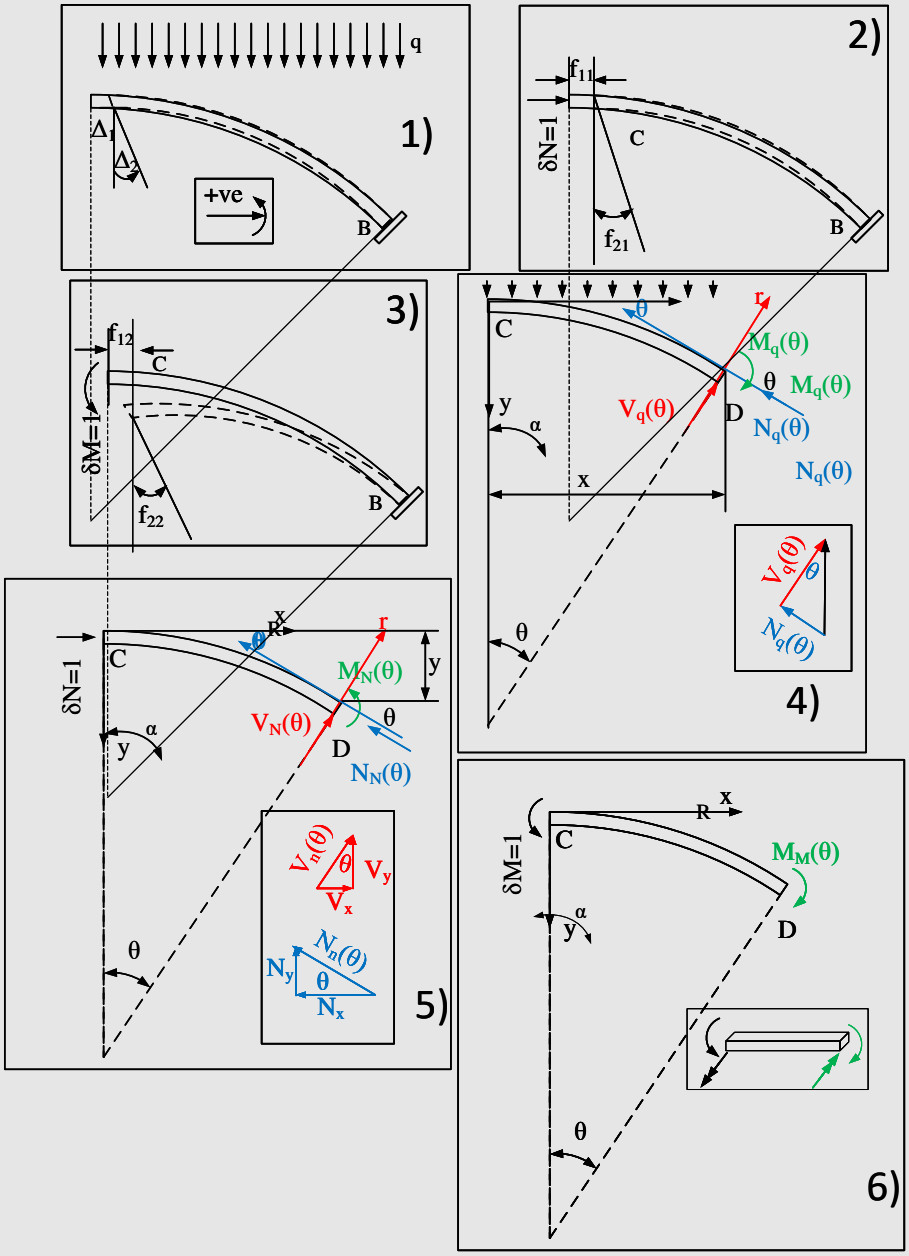
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

e

$$\text{Solve} \left\{ \begin{matrix} \Delta_N,\ \Delta_M \\ f_{NN},\ f_{NM} \\ f_{MM} \end{matrix} \right\} \text{ in terms of } \left\{ \begin{matrix} N_q(\theta),\ M_q(\theta) \\ N_n(\theta),\ M_n(\theta); \\ N_m(\theta),\ M_m(\theta); \end{matrix} \right\} \text{ due to } \left\{ \begin{matrix} q \\ \delta\overline{N} = 1 \\ \delta\overline{M} = 1 \end{matrix} \right\}$$

Forze e momenti normali interni



COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Dalla figura 1 e 4 la forza normale e il momento a causa del carico esterno è dato da

$$V_q(\theta) = qx\cos\theta = qR\sin\theta\cos\theta$$
$$N_q(\theta) = qx\sin\theta = qR\sin^2\theta$$
$$M_q(\theta) = -q\frac{x^2}{2} = -q\frac{R^2\sin^2\theta}{2}$$

La forza orizzontale virtuale (unità) causerà le seguenti forze interne (Fig. 2/5)

$$M_n(\theta) = (1)(y) = R(1-\cos\theta)$$

Da Fig. 5 ($\delta N = 1$), equilibrio di forze (nota che abbiamo solo un insieme di forze in x direzione, e nessuno in y) rendimenti

$$\left\{\begin{array}{rcl} V_x - N_x + \delta N &=& 0 \\ V_y + N_y &=& 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{cc} \sin\theta & -\cos\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} V_n(\theta) \\ N_n(\theta) \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

Risolvere e inserire $M_n(\theta)$

$$\lfloor\ V_n(\theta),\quad N_n(\theta), M_n(\theta)\ \rfloor = \lfloor\ -\sin(\theta),\quad \cos(\theta),\quad R(1-\cos\theta)\ \rfloor$$

Per il momento esterno dell'unità a C, non abbiamo nessuna forza interna indotta, tuttavia il momento interno è (Fig. 3/6)

$$\lfloor\ N_m,\quad M_m\ \rfloor = \lfloor\ 0,\quad -1\ \rfloor$$

Si nota che dalla figura precedente, sotto il carico verticale, l'arco spingerebbe contro il supporto come si sarebbe spostato a sinistra. Eppure, abbiamo qui assunto uno spostamento verso destra per direzione di $\delta N = 1$.

Sviluppi della struttura primaria

Ora determinamo i due spostamenti associati al carico reale da

$$\underbrace{\delta\overline{N}}_{1}\Delta_n = \int_0^\alpha M_q(\theta)\frac{\delta\overline{M}_n(\theta)}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha N_q\frac{\delta\overline{N}_n(\theta)}{EA}Rd\theta$$
$$\underbrace{\delta\overline{M}}_{1}\Delta_m = \int_0^\alpha M_q(\theta)\frac{\delta\overline{M}_m(\theta)}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha N_q(\theta)\frac{\delta\overline{N}_m(\theta)}{EA}Rd\theta$$

e sostituire le forze interne dall'alto.

$$\Delta_n = \frac{qR^2\left(4\sin^3(\alpha)\left(2\kappa + R^2\right) + 3R^2(\sin(2\alpha) - 2\alpha)\right)}{24EI}$$
$$\Delta_m = \frac{qR^3(\alpha - \sin(\alpha)\cos(\alpha))}{4EI}$$

dove $\kappa = I/A$, cioè trascureremmo la deformazione assiale se $\kappa = 0$. Si noti che la rigidità assiale non influisce sulla rotazione Δ_2.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Matrice di flessibilità

La matrice di flessibilità è prossimamente ottenuta da

$$f_{ij} = \int_0^\alpha M_i(\theta)\frac{M_j(\theta)}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha N_i(\theta)\frac{N_j(\theta)}{EA}Rd\theta$$

dove i, j mappa n, m. Sostituire,

$$\begin{aligned} f_{nn} &= \frac{R\left(2\alpha\left(\kappa+3R^2\right)+\sin(2\alpha)\left(\kappa+R^2\right)-8R^2\sin(\alpha)\right)}{4EI} \\ f_{nm} = f_{mn} &= \frac{R^2(\sin(\alpha)-\alpha)}{EI} \\ f_{mm} &= \frac{\alpha R}{EI} \end{aligned}$$

Invertire la matrice di flessibilità produce la matrix ridotta rigidità K_{ij} che è dato da

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{4\alpha EI}{\alpha R(2\alpha+\sin(2\alpha))\left(\kappa+R^2\right)-4R^3\sin^2(\alpha)} \\ K_{12} &= \frac{4EI(\alpha-\sin(\alpha))}{\alpha(2\alpha+\sin(2\alpha))\left(\kappa+R^2\right)-4R^2\sin^2(\alpha)} \\ K_{22} &= \frac{EI\left(2\alpha\left(\kappa+3R^2\right)+\sin(2\alpha)\left(\kappa+R^2\right)-8R^2\sin(\alpha)\right)}{\alpha R(2\alpha+\sin(2\alpha))\left(\kappa+R^2\right)-4R^3\sin^2(\alpha)} \end{aligned}$$

Multiplying la matrice di rigidità da Δ_n e Δ_m è stata eseguita da Mathematica, tuttavia la risposta è troppo complessa per essere ben apprezzata analiticamente.

Semplificazione; Ignora deformazione assiale

Equazioni di governo

Mentre le soluzioni esatte potrebbero essere ottenute numericamente in base alle precedenti equazioni, semplifichiamo il problema ignorando le deformazioni assiali, impostando così $\kappa = 0$, questo significherebbe

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \frac{qR^4\left(-6\alpha+4\sin^3(\alpha)+3\sin(2\alpha)\right)}{24EI} \\ \Delta_m &= \frac{qR^3(\alpha-\sin(\alpha)\cos(\alpha))}{4EI} \\ \mathbf{f} &= \begin{bmatrix} \frac{R^3(6\alpha-8\sin(\alpha)+\sin(2\alpha))}{4EI} & \frac{R^2(\sin(\alpha)-\alpha)}{EI} \\ \frac{R^2(\sin(\alpha)-\alpha)}{EI} & \frac{\alpha R}{EI} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} \frac{4\alpha EI}{R^3\left(\alpha(2\alpha+\sin(2\alpha))-4\sin^2(\alpha)\right)} & \frac{4EI(\alpha-\sin(\alpha))}{R^2\left(\alpha(2\alpha+\sin(2\alpha))-4\sin^2(\alpha)\right)} \\ \frac{4EI(\alpha-\sin(\alpha))}{R^2\left(\alpha(2\alpha+\sin(2\alpha))-4\sin^2(\alpha)\right)} & \frac{EI(6\alpha-8\sin(\alpha)+\sin(2\alpha))}{R\left(\alpha(2\alpha+\sin(2\alpha))-4\sin^2(\alpha)\right)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

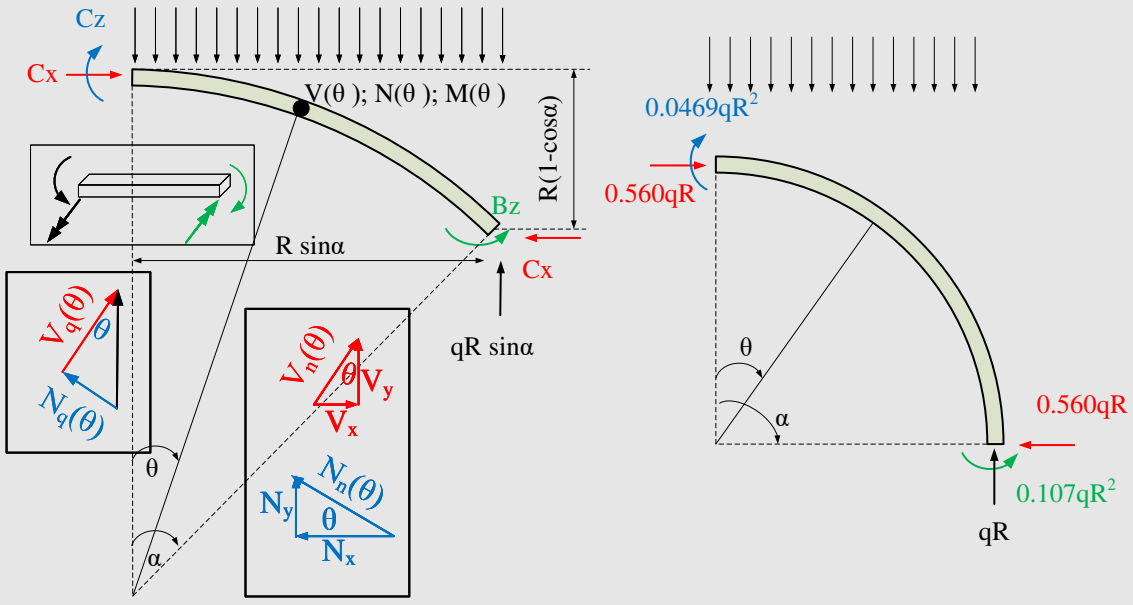
I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Ciò provocherà le seguenti forze

$$C_x = \frac{qR\sin(\alpha)(2\alpha(\cos(2\alpha)+2)-3\sin(2\alpha))}{24\sin^2(\alpha)-6\alpha(2\alpha+\sin(2\alpha))}$$

$$C_z = -\frac{qR^2}{48\left(\alpha(2\alpha+\sin(2\alpha))-4\sin^2(\alpha)\right)}\left[24\alpha^2+8\sin(\alpha)\right.$$
$$\left.\left(-6\alpha+4(\alpha-\sin(\alpha))\sin^2(\alpha)+3\sin(2\alpha)\right)+3\cos(4\alpha)-3\right]$$

Con riferimento alla figura seguente, le forze interne saranno così date da



$$N(\theta) = C_x \underbrace{\cos\theta}_{N_n} + \underbrace{qR\sin^2\theta}_{N_q} \qquad \text{+ve Compression}$$

$$V(\theta) = -C_x \underbrace{\sin\theta}_{V_n} + \underbrace{qR\sin\theta\cos\theta}_{V_q} \qquad \text{+ve CW}$$

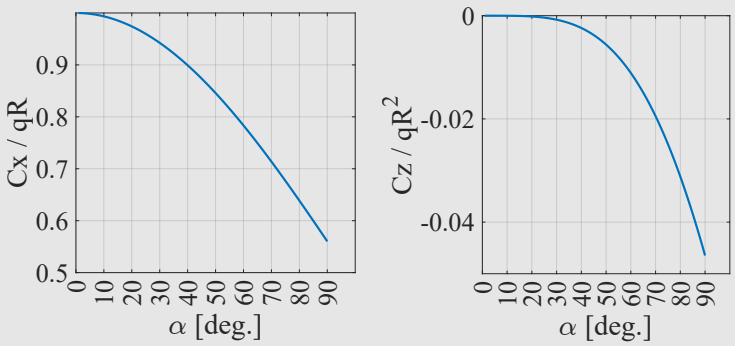
$$M(\theta) = C_z \underbrace{1}_{M_m} + C_x \underbrace{R(1-\cos\theta)}_{M_n} - \underbrace{q\frac{R^2\sin^2\theta}{2}}_{M_q} \qquad \text{+ve CCW}$$

Risultati Visualizzazione

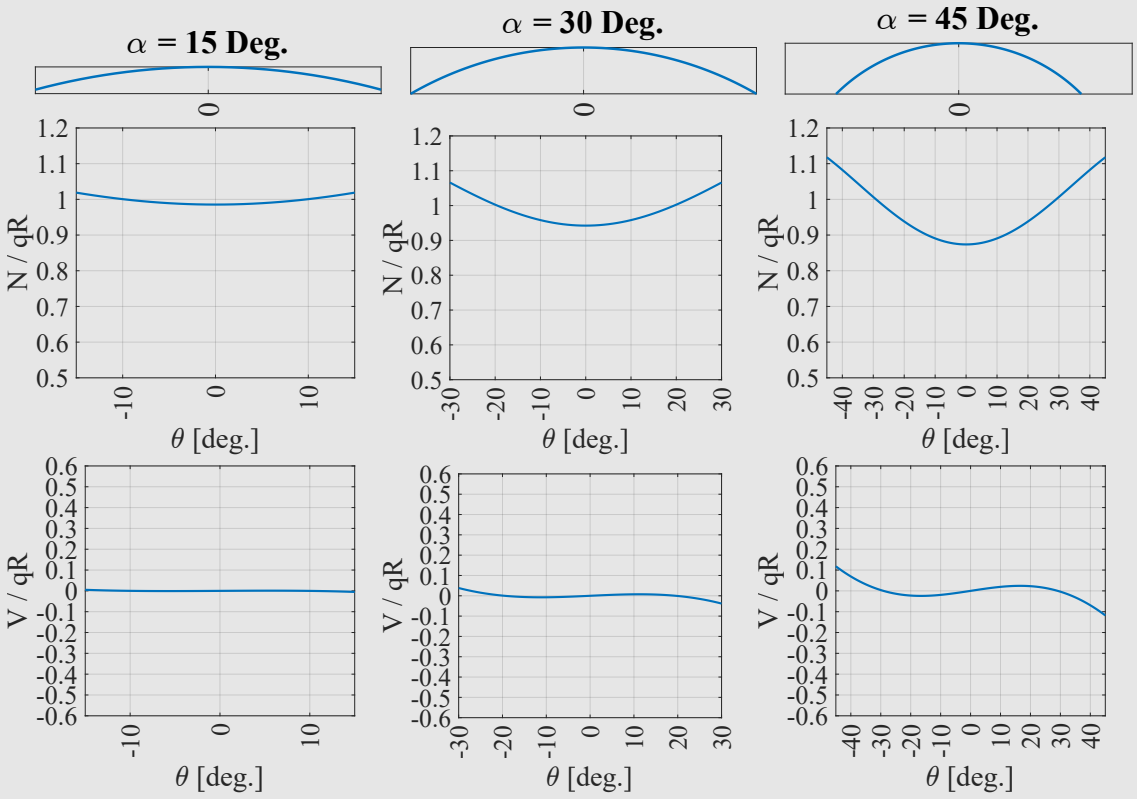
Esaminare la variazione C_x e C_z, il primo è più grande per "arche fiocchi' e diminuisce quasi linearmente mentre l'arco si trasforma in uno semi-circolo. C_z è quasi zero per l'arco "flat" ed è massimo per uno semi-circolo.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

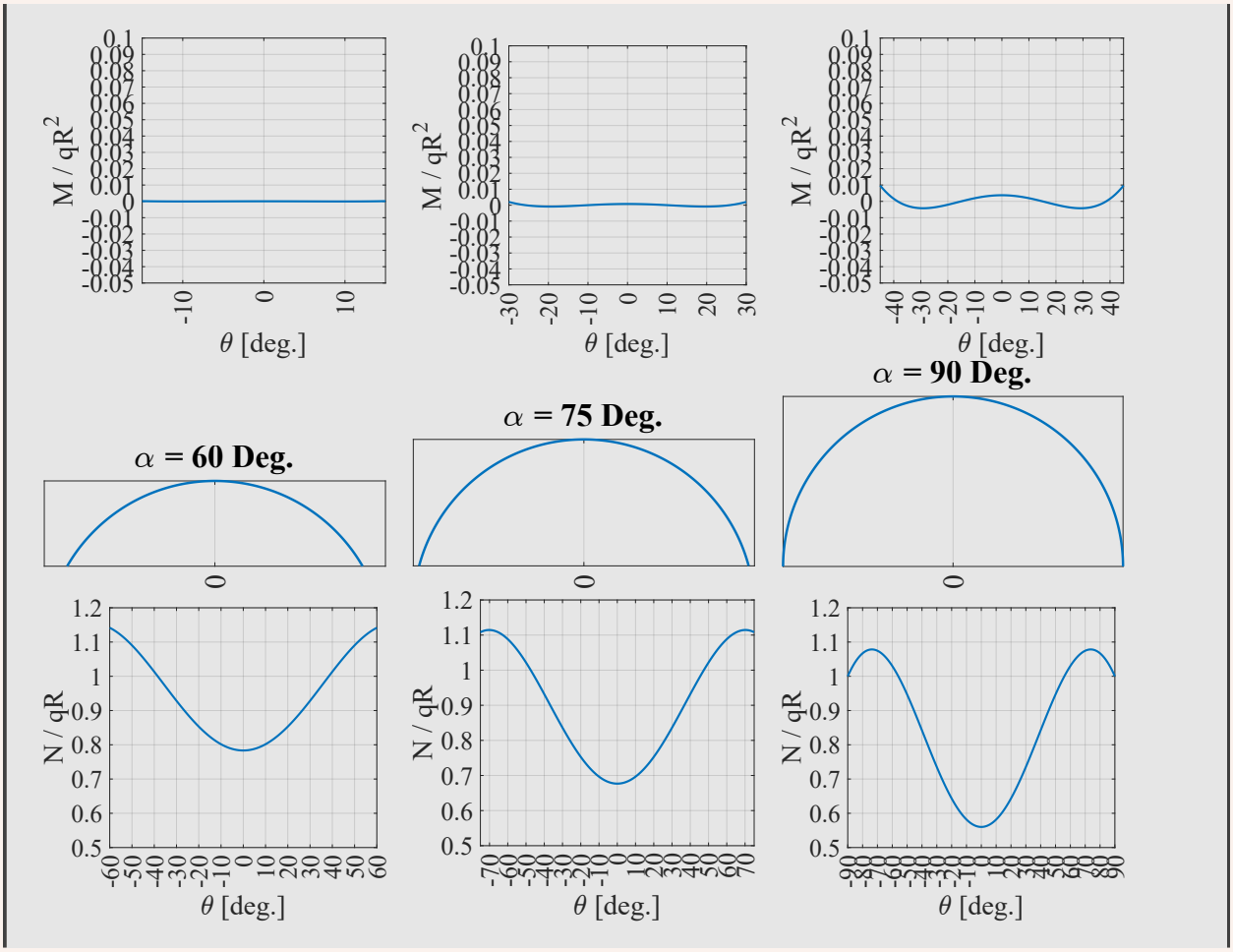


Poi esaminiamo l'assiale normalizzato (N), cesoia (V) e momento (M) lungo gli archi in termini di θ. Per facilitare i confronti, tutti i grafici hanno gli stessi valori min e max. La forza normale è quasi costante per piccole α, ma N nella diminuzione della corona, alla fine con conseguente due punti di inflessione. Mentre i valori assoluti della cesoia potevano essere tracciati, si nota che è quasi zero per un "arco piatto' e gradualmente decolla come α aumenta alla fine, mentre come previsto (a causa di simmetria) è sempre zero alla corona. Infine, il momento è quasi zero per gli archi quasi piatti e gradualmente aumenta, i picchi sono sempre ai supporti ed è caratterizzato dai suoi W forma.



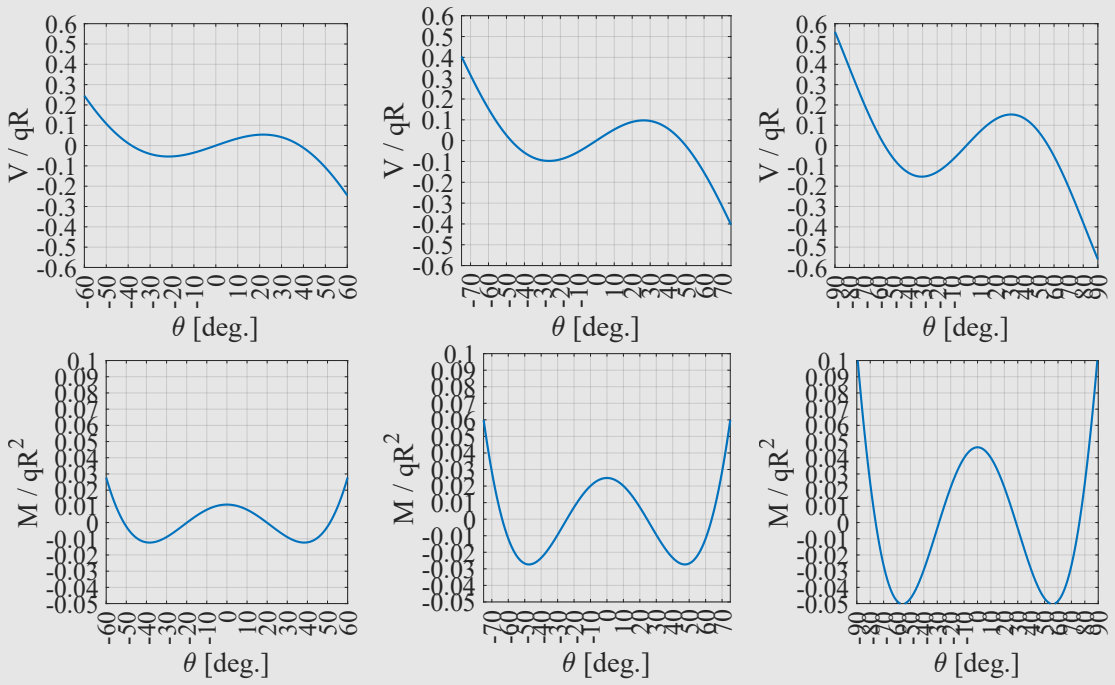
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Infine, la soluzione di questo problema non sarà completa senza un appezzamento della forma deformata che viene lasciato come esercizio e si possono trovare suggerimenti di una soluzione nel capitolo D.

32.1.4 Soluzione generalizzata

32.1.4.1 Ritiro

Adattato da Smars, 2000 «*Etudes sur la stabilité des arcs et voûtes*».

32.1.4.1.1 Centro di gravità

23 Questa derivazione è stata pubblicata per la prima volta da Milankovitch, 1907 «*Theorie der druckkurven*».

24 Prima di tutto deriva la posizione di un voussoir centro di gravità (non un compito ovvio!). 32.4

25 Prima di tutto notiamo che il centro og gravità (ad esempio) del voussoir è in una posizione diversa rispetto al punto centrale M della sezione trasversale AB ($A_1B_1B_2A_2$).

26 Determinamo la posizione G considerando la differenza tra il primo momento della zona di triangoli infinitesimali CB_1B_2 e CA_1A2 rispetto all'asse che passa attraverso C e ortogonale al raggio di curvatura. In particolare, il primo momento della zona S_1 of CB_1B_2 è dato dalla zona $A_{CB_1B_2}$ moltiplicato per la distanza $R_{CB_1B_2}$ del suo centro di massa da C.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

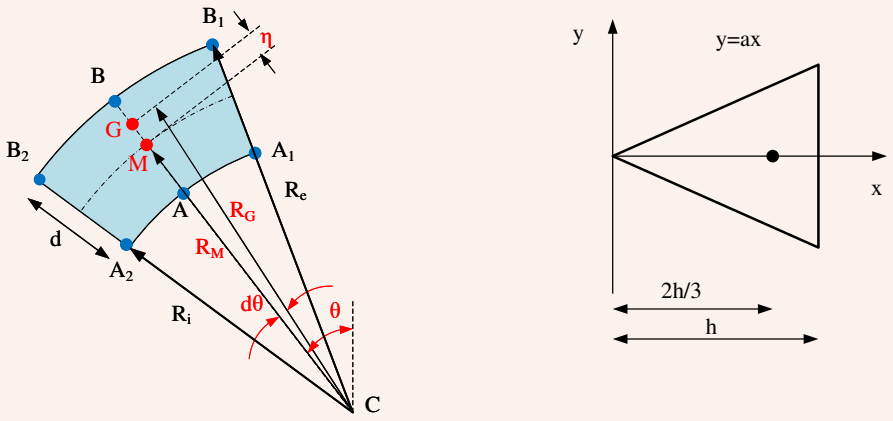


Figura 32.4: Centro di gravità di un voussoir

27 Allo stesso modo, il primo momento di area S_2 of CA_1A_2 è dato dalla zona $A_{CA_1A_2}$ moltiplicato per la distanza $R_{CA_1A_2}$ del suo centro di massa da C.

$$S_2 = A_{CA_1A_2} R_{CA_1A_2} = A_{CA_1A_2} \frac{2}{3}\left(R_M - \frac{d}{2}\right)$$

28 Il primo momento delle areea del voussoir infinitesimale $A_1B_1A_2B_2$ is

$$(A_{CB_1B_2} - A_{CA_1A_2}) R_G = A_{CB_1B_2} \frac{2}{3}\left(R_M + \frac{d}{2}\right) - A_{CA_1A_2} \frac{2}{3}\left(R_M - \frac{d}{2}\right) \tag{32.13}$$

29 Il rapporto tra una zona di triangolo e l'altezza è determinato dalla definizione del centroide

$$\overline{x} = \frac{\int x dA}{\int dA} = \frac{\int_0^h x(\overbrace{ax}^{y})\, dx}{\int_0^h (ax) dx} = \underbrace{\frac{\frac{ah^3}{3}}{\frac{ah^2}{2}}}_{A} = \frac{2h}{3} \Rightarrow A = \frac{ah^2}{2} \Rightarrow A \propto h^2$$

30 Il rapporto tra $A_{CB_1B_2}$ e $A_{CA_1A_2}$ è quindi proporzionale alla razione tra i quadrati delle distanze $\left(R_M + \frac{d}{2}\right)^2$ e $\left(R_M - \frac{d}{2}\right)^2$, quindi

$$A_{CB_1B_2} = A_{CA_1A_2} \frac{\left(R_M + \frac{d}{2}\right)^2}{\left(R_M - \frac{d}{2}\right)^2} \tag{32.14}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

31 Sostituire Eq. 32.14 in Eq. 32.13 e la soluzione per R_G

$$R_G = R_M + \frac{d^2}{12R_M} \Rightarrow \eta = \frac{d^2}{12R_M}$$

32.1.4.1.2 Ritiro

32 La geometria di un arco di spessore dell'unità è definita dal suo angolo polare θ, il suo raggio di curvatura r(θ), ed è spessore d(θ(Figura) 32.5). Per ricavare l'equazione differenziale dell'equilibrio, studiamo l'equilibrio di un voussoir infinitesimale (o di un segmento di arco) Nota che né lo spessore né la curvatura r dell'arco sono necessariamente piccoli.

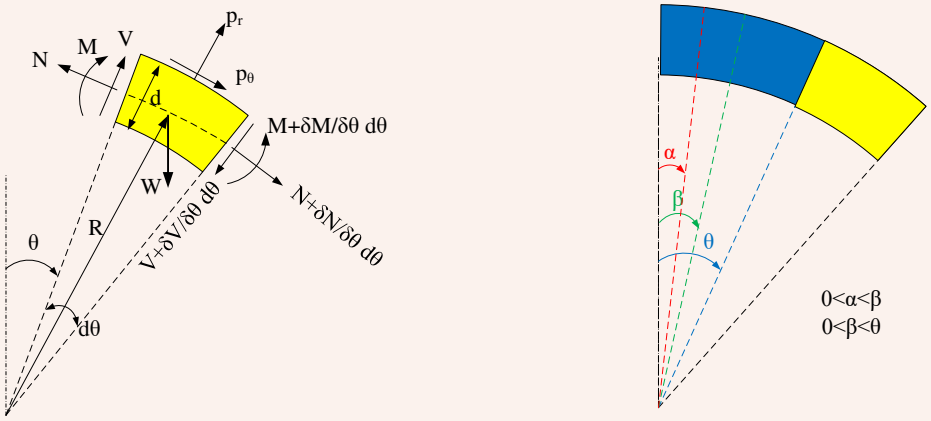


Figura 32.5: Equilibrio di un voussoir infinitesimale

33 Il voussoir ha un peso, W, dato da:

$$W = \gamma r d \, d\theta$$

dove γ è il peso specifico dell'arco $[N/m^3]$. Viene applicato al centro della gravità del voussoir, a una distanza r_G dal centro della curvatura.

$$R_G = R\left[1 + \frac{1}{12}\left(\frac{d}{R}\right)^2\right] = R\left[1 + \frac{\eta^2}{12}\right]$$

34 Le forze interne sono la forza normale N (positivo in tensione), la forza di taglio V (positivo se tende a causare una rotazione in senso orario) e il momento M (positivo se tende la fibra inferiore). Non si assume alcuna considerazione circa la distribuzione dello stress nella sezione.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

35 L'arco è sottoposto a forze di superficie sui suoi extrados, p_θ nella direzione tangenziale e p_r nella direzione radiale. L'equilibrio radiale è dato da

$$-\frac{\partial V}{\partial \theta}d\theta - Nd\theta - \gamma R d\cos(\theta)d\theta + p_r\left(R+\frac{d}{2}\right)d\theta = 0$$

Si noti che poiché i volti non sono paralleli, la forza normale ha un componente radiale $-Nd\theta$.

36 Il viso degli extradossi ha una lunghezza $\left(R+\frac{d}{2}\right)d\theta$.

37 L'equilibrio tangenziale è scritto:

$$-\frac{\partial N}{\partial \theta}d\theta - Vd\theta + \gamma R d\sin(\theta)d\theta + p_\theta\left(R+\frac{d}{2}\right)d\theta = 0$$

Ancora una volta, poiché i volti non sono paralleli, la forza di taglio ha un componente tangenziale.

38 Infine, è scritto l'equilibrio di rotazione al centro:

$$-\frac{\partial M}{\partial \theta}d\theta + VRd\theta + \frac{d^2}{12R}\sin(\theta)\gamma R d d\theta + p_\theta\left(R+\frac{d}{2}\right)\frac{d}{2}d\theta = 0$$

39 Se la derivazione rispetto a θ è denotato da un primo ($'$), e se il parametro non dimensionale η denotare la snellezza dell'arco $n = d/r$ è introdotta, le equazioni di equilibrio possono essere riscritte:

$$N' - V + \gamma R^2\eta\sin(\theta) + p_\theta R(1+\eta/2) = 0 \tag{32.15}$$

$$-V' - N - \gamma R^2\eta\cos(\theta) + p_r R\left(1+\frac{\eta}{2}\right) = 0 \tag{32.16}$$

$$-M' + VR + \gamma R^3(\eta^3/12)\sin(\theta) + p_\theta R^2\left(1+\frac{\eta}{2}\right)\frac{\eta}{2} = 0 \tag{32.17}$$

40 Sostituire il derivato V' of V, (Eq. 32.16) nel derivato di Eq. 32.15, V può essere eliminato.

$$N'' + V' + (\gamma R^2\eta)'\sin(\theta) + \gamma R^2\eta\cos(\theta) + (p_\theta R(1+\frac{\eta}{2}))' = 0$$

Quindi otteniamo:

$$N'' + N = q(\theta) \tag{32.18}$$

Se i termini variabili (e spesso noti) sono stati raggruppati nel secondo termine

$$q(\theta) = \underbrace{R(p_r - p'_\theta)\left(1+\frac{\eta}{2}\right) - p_\theta\left[R\left(1+\frac{\eta}{2}\right)\right]}_{\text{External load}} - 2\gamma R^2\eta\cos(\theta) - (\gamma R^2\eta)'\sin(\theta)$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

41 La soluzione generale dell'equazione differenziale omogenea associata è una combinazione lineare di $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta)$. Può essere mostrato (ignorando il carico esterno) che

$$N(\theta) = a_1 \cos(\theta) + \left(a_2 + \underbrace{\int_0^\theta \frac{\overbrace{\int_0^\beta q(\alpha) \sin\alpha d\alpha}^{F_1(\beta)}}{\sin^2\beta} d\beta}_{F_2(\theta)} \right) \sin(\theta) \tag{32.19}$$

è una soluzione.

42 Noi verifichiamo

$$F_1(\beta) = \int_0^\beta q(\alpha)\sin(\alpha)d\alpha = \frac{1}{4}\gamma\eta R^2\left[-2\beta - 4\sin^2(\beta) + \sin(2\beta)\right]$$

$$F_2(\theta) = \frac{\int_0^\theta F_1(\beta)}{\sin^2(\beta)} = \frac{1}{2}R^2\gamma\eta\left[(-1 + \theta(-2 + \cot(\theta))\right]$$

$$F_3(\theta) = \frac{d^2}{d\theta}N(\theta) = -\frac{1}{2}\cos(\theta)\left[2a1 + \gamma\eta(\theta+4)R^2\right] - \frac{1}{2}\sin(\theta)\left[2a_2 + \gamma\eta(1-2\theta)R^2\right]$$

$$N(\theta) = a_1\cos(\theta) + (a_2 + F_2(\theta))\sin(\theta)$$

$$\frac{d^2}{d\theta}N(\theta) = -\frac{1}{2}(2a_1 + R^2\gamma\eta(4+\theta))\cos(\theta) - \frac{1}{2}\left[2a_2 + R^2\gamma\eta(1-2\theta)\right]\sin(\theta)$$

Sostituito in Eq. 32.18, può essere facilmente dimostrato che

$$\frac{d^2}{d\theta}N(\theta) + N(\theta) - q(\theta) = 0$$

43 La forza di taglio può essere determinata da Eq. 32.16

$$V(\theta) = \cos(\theta)\left(a_2 - \gamma\eta\theta R^2\right) - \tfrac{1}{2}\sin(\theta)\left(2a_1\gamma\eta\theta R^2\right)$$

44 Il Momento è a sua volta ottenuto da Eq. 32.17

$$M(\theta) = a_3 - a_1 R + R^3\gamma\eta + \frac{1}{2}R\left[2a_1 + R^2\gamma\eta(-2+\theta)\right]\cos(\theta) + a_2 R\sin(\theta) + \frac{1}{12}R^3\gamma\eta\left[-6 + (-12+\eta^2)\theta\right]\sin(\theta)$$

Si noti che una terza costante di integrazione (a_3) è stato introdotto.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

45 Per trovare le tre costanti di integrazione a_1, a_2, e a_3, sono necessarie tre equazioni aggiuntive. Il valore di N, Ve V può essere trovato per impostazione $\theta = 0$.

46 Gli sforzi interni possono essere rappresentati altrimenti. Definizioni di assoluta eccentricità, ex, e l'eccentricità relativa, e:

$$ex = -\frac{M}{N},\ e = \frac{2ex}{d}$$

47 Il momento è misurato in riferimento al punto centrale della sezione.Il sistema è equivalente al sistema (N*, V, ex) o (N *, V e) dove $N*$ è una forza della stessa intensità N, applicato a distanza ex dalla metà della sezione calcolata per produrre un momento M. Il valore del e è inferiore a -1 quando la forza $N*$ si estende oltre la fine intrados della sezione, 0 quando $N*$ passa attraverso il centro, ed è maggiore di 1 quando attraversa gli extrados.

48 Per esempio, consideri un arco circolare di spessore costante, soggetto solo al suo peso. Equazioni equilibrio (Eqs. 32.15-32.17) può essere riscritta come:

$$\begin{aligned} N'(\theta) - V(\theta) + \gamma R^2 \eta \sin(\theta) &= 0 \\ V'(\theta) + N(\theta) + \gamma R^2 \eta \cos(\theta) &= 0 \\ -M'(\theta) + V(\theta)R + \gamma R^3 \frac{\eta^3}{12} \sin(\theta) &= 0 \end{aligned}$$

E l'equazione differenziale 32.18 diventa

$$N''(\theta) + N(\theta) = -2\gamma R^2 \eta \cos(\theta)$$

49 Risolvere Eq. 32.19 per questo caso, otteniamo

$$\begin{aligned} N(\theta) &= N_0 \cos(\theta) + (a_2 - \gamma R^2 \eta \theta) \sin(\theta) \\ V(\theta) &= -N_0 \sin(\theta) + (a_2 - \gamma R^2 \eta \theta) \cos(\theta) \end{aligned}$$

dove N_0 è la forza normale per $\theta = 0$. Per quanto riguarda i momenti, Eq. 32.17 diventa

$$M'(\theta) = VR + \gamma R^3 \frac{\eta^3}{12} \sin(\theta)$$

sostituire l'espressione di V

$$M'(\theta) = -N_0 R \sin(\theta) + (V_0 - \gamma R^2 \eta \theta) R \cos(\theta) + \gamma R^3 \frac{\eta^3}{12} \cos(\theta)$$

Risultati di integrazione

$$M(\theta) = a_3 + N_0 R \cos(\theta) + V_0 R \sin(\theta) - \gamma R^3 \eta (\theta \sin(\theta) + cos(\theta) - \gamma R^3 \frac{\eta^3}{12} \cos(\theta)$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

50 Infine, le forze interne saranno date da

$$N(\theta) = N_0 \cos(\theta) + (V_0 - \gamma R^2 \eta \theta) \sin(\theta) \tag{32.20}$$

$$V(\theta) = -N_0 \sin(\theta) + (V_0 - \gamma R^2 \eta \theta) \cos(\theta) \tag{32.21}$$

$$M(\theta) = M_0 - N_0 R(1 - \cos(\theta)) + V_0 R \sin(\theta) - \gamma R^3 \eta \left[\theta \sin(\theta) - (1 - \cos(\theta)) \left(1 + \frac{\eta^2}{12}\right)\right] \tag{32.22}$$

32.1.4.1.3 Verifica

51 Possiamo verificare che Eqs. 32.20-32.22 confronta con Eqs. 32.10, 32.11e 32.12 per i tre assiali centrati, taglio e momento (Smars, 2022).

52 In questa derivazione, gli angoli sono misurati dalla cresta ($\theta = 0$) dove sia la cesoia che i momenti sono zero ($V = M = 0$). Presumiamo inoltre che lo spessore sia trascurabile (rispetto a R), così $\eta = 0$. D'altra parte, il peso di sé può essere espresso come $w = \gamma R \eta$Sostituire, Eqs. 32.20-32.22 diventare

$$\begin{aligned} N(\theta) &= N_0 \cos(\theta) - wR\theta \sin(\theta) \\ V(\theta) &= -N_0 \sin(\theta) - wR\theta \cos(\theta) \\ M(\theta) &= -N_0 R(1 - \cos(\theta)) - wR^2 [\theta \sin(\theta) - 1 + \cos(\theta)] \end{aligned}$$

N_0, la forza assiale alla cresta, dovrebbe essere uguale alla reazione orizzontale (Eq. 32.9), $N_0 = C_x = (\pi/2 - 1)wR$

$$\begin{aligned} N(\theta) &= wR \left[\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \cos(\theta) + \theta \sin(\theta)\right] \\ V(\theta) &= wR \left[\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \sin(\theta) - \theta \cos(\theta)\right] \\ M(\theta) &= wR^2 \left[\frac{\pi}{2}(1 - \cos(\theta)) - \theta \sin(\theta)\right] \end{aligned}$$

53 Infine, facciamo una sostituzione per l'angolo θ che si misura dalla cresta in questa derivazione, e θ' misurato dal x asse nella soluzione arco a tre piani

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \theta'$$

resa

$$\begin{aligned} N(\theta') &= -wR \left[\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \sin(\theta) + \left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right) \cos(\theta')\right] \\ V(\theta') &= wR \left[\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \cos(\theta') - \left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right) \sin(\theta')\right] \\ M(\theta') &= wR^2 \left[\frac{\pi}{2}(1 - \sin(\theta')) - \left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right) \cos(\theta')\right] \end{aligned}$$

Abbiamo così recuperato la stessa equazione derivata prima, Eqs. 32.10, 32.11e 32.12.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

32.1.5 Soluzioni basate sulla Mathematica

54 Un insieme ampio di soluzioni per l'arco circolare con varie combinazioni di carichi e supporti è dato in Appendice D. Questa era la tesi di MS Sonavane, 2014, e contiene diagrammi corpo libero e corrispondente codice Mathematica.

32.2 Forma ottimale di un arco

55 Mentre un numero infinito di parabola può essere sostenuto tra due punti, cerchiamo di trovare quello ottimale per un carico uniforme, Fig. 32.6. Dall'equilibrio della figura

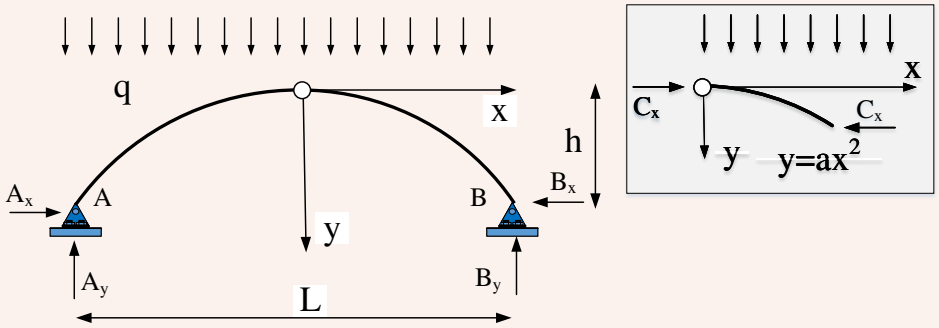


Figura 32.6: Arco parabolico ottimale per un carico uniforme

sinistra abbiamo

$$\begin{cases} (+\circlearrowleft)\,\Sigma M_A = 0 \Rightarrow B_y L - \dfrac{qL^2}{2} == 0 \\ (+\circlearrowright)\,\Sigma M_C = 0 \Rightarrow \dfrac{qL}{2}\dfrac{L}{4} + B_x \dfrac{L}{2} - C_x h = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_x = \dfrac{qL^2}{8h} \\ B_y = \dfrac{qL}{2} \end{cases}$$

Cerchiamo di determinare a tale $M(x) = 0$ per tutto l'arco. Considerando l'equilibrio nel diagramma del corpo libero destro, e prendendo $y = ax^2$, cerchiamo di determinare a

$$(+\circlearrowright)\,\Sigma M_C = 0 \Rightarrow C_x \underbrace{(ax^2)}_{y} - \frac{qx^2}{2} \Rightarrow a = \frac{4}{L^2}$$

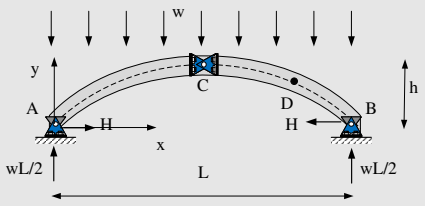
56 Per una tale parabola non ci saranno momenti interni per un carico uniforme.

57 Per quanto riguarda i cavi, la più grande forza totale nell'arco è al supporto, ($F_{max} = \sqrt{V^2 + H^2}$), mentre alla corona abbiamo semplicemente H, la corona sarà richiedono una sezione più piccola del supporto.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

32.2.1 Ex 32.5: Arco perfetto



Un arco parabolico a tre punte con campata L e l'aumento h è sottoposto a carico uniforme w on Il momento di curvatura in qualsiasi punto dell'arco è zero.

La spinta orizzontale H è determinato prendendo momenti su Che corona C

$$Hh = \frac{wL}{2} \times \frac{L}{2} - \frac{wL}{2} \times \frac{L}{4} = \frac{wL^2}{8} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{wL^2}{8h}$$

Il momento di piegatura in qualsiasi sezione a distanza x is

$$M_x = \frac{wL}{2} \times x - \frac{wx^2}{2} - Hy$$

Qui y è l'altezza del punto a una distanza x dalla fine A e la sua è data Con l'origine a A, l'equazione della parabola è

$$y = \frac{4hx(L-x)}{L^2}$$

Sostituire il valore del H e y nell'espressione sopra,

$$M_x = \frac{wxL}{2} - \frac{wx^2}{2} - \frac{wL^2}{8h} \times \frac{4hx(L-x)}{L^2}$$
$$M_x = \frac{wxL}{2} - \frac{wx^2}{2} - \frac{wxL}{2} + \frac{wx^2}{2} \quad \Rightarrow \quad M_x = 0$$

Nota analogia con un cavo che supporta un carico uniforme, la sua forma è una parabola e non porta momento.

32.3 Arco di Parabolico

58 L'analisi degli archi parabolici è identica a quella della circolare, con la differenza evidente che è la forma. Inutile, ho optato per spostare a questa sezione gli esempi relativi a quelli parabolici.

59 Poiché i libri di testo molto fe affrontano gli archi parabolici, ho optato per inserire questa sezione qui.

Questa sezione sugli archi parabolici è tratta da Thandavamoothy, 2011 Structural Analysis

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

32.3.1 Esempi

32.3.1.1 Ex 32.6: Arco parabolico a tre cerniere

La sezione seguente è riprodotta da Thandavamoothy, 2011 Structural Analysis.

Un arco parabolico di equazione $y^{-}4hx^2/L^2$ con l'origine alla corona, con x-assi a destra e y-assi verso il basso ha una durata di 80 m e aumento di6m. Un semplice carico concentrato 20 kN agisce verso il basso a una distanza di 60 m dall'abbattimento sinistro, cerchiamo di determinare le reazioni al supporto e il momento risultante al carico. Da Eq. 32.1

$$V_A = \frac{20 \times 20}{80} = 5\text{kN and } V_B = \frac{20 \times 60}{80} = 15\text{kN}$$

Da Eq. 32.3

$$H = \frac{20 \times 20}{2 \times 6} = 33.33\text{kN}$$

Il momento di curvatura al carico concentrato di un fascio supportato smply è

$$M_o = \frac{Wab}{L} = \frac{20 \times 60 \times 20}{80} = 300\text{kNm}$$

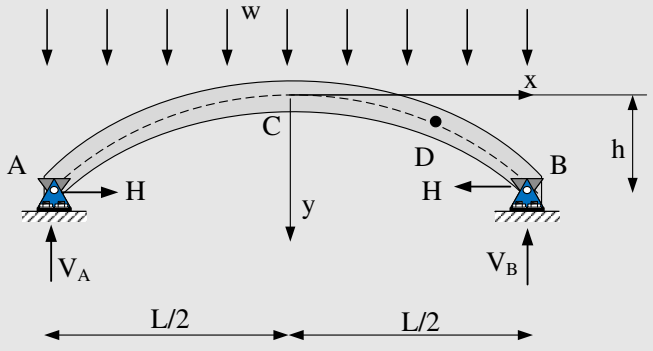
Fnally, l'altezza dell'asse arco al carico sopra la linea di molleggio è $(h - y)$. $x = 20$ m,

$$y = \frac{4 \times 6 \times 20^2}{80^2} = 1.5 \text{ m} \quad \therefore (h - y) = (6 - 1.5) = 4.5 \text{ m}$$

Il momento a causa della spinta è $H(h - y) = 33.33 \times 4.5 = 149.985$kNm. Il momento risultante al carico è $(300 - 149.985) = 150.015$kNm

Controllare il momento in corona è $(5 \times 40 + 20 \times 20 - 1.5 \times 40) = (200 + 400 - 600) = 0$.

32.3.1.2 Ex 32.7: Due arco a sezione trasversale variabile incernierata



Un arco simmetrico a due punte è sottoposto al carico verticale, per la simmetria dell'arco le reazioni orizzontali ai supporti sono uguali e opposte. H.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

La sezione seguente è riprodotta da Thandavamoothy, 2011 Structural Analysis.

Teoria

Lasciare la spinta H essere considerato un ridondante che deve essere valutato. Applicando il teorema di Castigliano (Eq. 48.36).

$$U^* = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}ds + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2}{AE}ds = 0 \tag{32.23}$$

e

$$\Delta = \frac{\partial U^*}{\partial H} = 0 \tag{32.24}$$

Il momento di piegatura che nasce da questa condizione semplicemente sostenuta è denotato come M_0 e la forza assiale corrispondente N_0. In termini di queste condizioni rilassate, il momento di piegatura e la forza assiale in una sezione a D nell'arco può essere espresso come

$$M - M_0 - H(h-y) \quad \text{and} \quad N = N_0 + H\cos\theta \tag{32.25}$$

dove h è l'ascesa dell'arco e θ è l'angolo del tangente alla linea centrale dell'arco a D con l'asse X. Sostituire Eq. 32.25 e loro derivati rispetto a H in 32.24,

$$-\int_0^l \frac{M_0 - H(h-y)}{EI}(h-y)ds + \int_0^l \frac{N_0 + H\cos\theta}{AE}\cos\theta ds = 0 \tag{32.26}$$

La soluzione di H è poi dato da

$$H = \frac{\int_0^l \left(\frac{M_0}{EI}\right)(h-y)ds - \int_0^l \left(\frac{N_0}{AE}\right)\cos\theta ds}{\int_0^l \left[\frac{(h-y)^2}{EI}\right]ds + \int_0^l \left[\frac{(\cos^2\theta)}{AE}\right]ds}$$

Questa equazione è valida per tutti gli archi a due cerniere simmetrici di qualsiasi forma e ogni condizione di carico. Il secondo termine del numeratore per le proporzioni ordinarie dell'arco è molto piccolo rispetto al primo (deformazione assiale molto più piccola di quelle flessografiche) e quindi può essere trascurato.

$$H = \frac{\int_0^l \left(\frac{M_0}{EI}\right)(h-y)ds}{\int_0^l \left[\frac{(h-y)^2}{EI}\right]ds + \int_0^l \left[\frac{(\cos^2\theta)}{AE}\right]ds}$$

La spinta H può essere valutato solo quando la relazione tra h e y Per un caso specifico di arco parabolico, l'equazione dell'asse d'arco che collega y e h è dato da

$$y = \frac{4hx^2}{L^2} \tag{32.27}$$

e

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + (8hx/L^2)^2}}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Si presume inoltre che l'area trasversale e il momento, di inerzia variano secondo la seguente espressione

$$A = \frac{A_c}{\cos\theta} \quad \text{and} \quad I = \frac{I_c}{\cos\theta}$$

dove A_c e I_c indicare la zona trasversale e il momento dell'inerzia alla corona C.

Per scoprire il valore di M_0, si nota che abbiamo un carico uniformemente distribuito di intensità w applicato verticalmente sull'arco, e che in un raggio semplicemente sostenuto il diagramma di momento di curvatura è una parabola con la magnitudine del momento massimo di $(wL^2/8)$ a metà della fascia. Pertanto, il momento di piegamento al punto D lontano dalla corona C a distanza x sarà

$$M_o = \frac{wL^2}{8}\left(1 - \frac{4x^2}{L^2}\right)$$

Sostituire,

$$H = \frac{\int_0^l \frac{\frac{wL^2}{8}\left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right)}{[EI_C]/\left[\sqrt{\left\{1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2\right\}}\right]}\left(h - \frac{4hx^2}{L^2}\right)ds}{\int_0^l \left[\left(\frac{h-\frac{4hx^2}{L^2}}{EI_C}\right)^2 \sqrt{\left(1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2\right)}\right]ds + \int_0^l \left[1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2 \frac{\sqrt{\left(1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2\right)}}{EA_C}\right]ds}$$

$$= \frac{\frac{wL^2h}{8EI_C}\int_0^1 \left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right)^2 ds}{\left[\frac{h^2}{EI_c}\int_0^l \left[\left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right)^2\right]ds + \frac{1}{EA_c}\int_0^l \left[1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2\right]ds\right]} \tag{32.28}$$

Per una lunghezza infinitesimale dell'asse arco, dal calcolo

$$ds = dx\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}$$

Differenza Eq. 32.27

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2}\,dx$$

Sostituire in Eq. 32.28

$$H = \frac{\frac{wL^2h}{8EI_C}\int_0^{L/2}(1-\frac{4x^2}{L^2})^2\sqrt{1+(\frac{8hx}{L^2})^2}dx}{[\frac{h^2}{EI_c}\int_0^{L/2}[(1-\frac{4x^2}{L^2})^2\sqrt{1+(\frac{8hx}{L^2})^2}dx] + \frac{1}{EA_c}\int_0^{L/2}[1+(\frac{8hx}{L^2})^2]\sqrt{1+(\frac{8hx}{L^2})^2}dx]}$$

or

$$H = \frac{\alpha_1\left[-\frac{wh^2}{I_C}\left(\frac{2L}{3}+\frac{L^3}{256}+\frac{19L^3}{384h^2}+\frac{L^5}{819h^2}\right)\right] + \alpha_2\left[\frac{wh^2}{I_C}\left(\frac{L^4}{128h^2}+\frac{L^6}{4{,}096h^4}+\frac{L^8}{26{,}244h^6}\right)\right]}{\alpha_1\left[-\frac{8h^2}{I_CL^2}\left(\frac{2L}{3}+\frac{L^3}{256}+\frac{19L^3}{3{,}844h^2}+\frac{L^5}{8{,}192h^2}\right)+\frac{8h}{A_CL^2}\left(L+\frac{Lh^2}{3}+\frac{L^3}{192}-\frac{L^5}{2{,}048h^2}\right)\right] + \alpha_2\left[\frac{8h^3}{I_CL^2}\left(\frac{L^4}{128h^2}+\frac{L^6}{4{,}096h^4}+\frac{L^8}{262{,}144h^6}\right)+\frac{8h}{A_CL^2}\left(\frac{L^4}{128h^2}+\frac{L^{15}}{41{,}943h^6}\right)\right]} \tag{32.29}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

erano

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{L^2}{4} + \left(\frac{L^2}{8h}\right)^2}, \quad \alpha_2 = \ln\left(\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + \left(\frac{L^2}{8h}\right)^2}\right) \tag{32.30}$$

Applicazione

Ora, prendere l'aumento di 10 m e la campa 60 m sottoposti to w di 25kN/m. Il momento dell'inerzia nella sezione corona è 1.14×10^{-3} m^4 e la zona della sezione trasversale è 6.75×10^{-2} m^2.

Da Eq. 32.30

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{60^2}{4} + \left(\frac{60^2}{8 \times 10}\right)^2} = 54.08; \alpha_2 = \ln\left(\frac{60}{2} + 54.08\right) = 4.43$$

Da Eq. 32.29

$$\begin{aligned}
H &= \frac{A}{B} \\
A &= 54.08\left[-\frac{25 \times 10^3}{1.14 \times 10^{-3}}\left(\frac{2 \times 60}{3} + \frac{60^3}{256} + \frac{19 \times 60^3}{384 \times 10^2} + \frac{60^5}{8,192 \times 10^2}\right)\right] \\
&\quad + 4.43\left[\frac{60 \times 10^2}{1.14 \times 10^{-3}}\left(\frac{60^4}{128 \times 10^2} + \frac{60^6}{4,096 \times 10^4} + \frac{60^8}{262,144 \times 10^6}\right)\right] \\
B &= 54.08\left[-\frac{8 \times 10^3}{1.14 \times 10^{-3} \times 60^2}\left(\frac{2 \times 60}{3} + \frac{60^3}{256} + \frac{19 \times 60^3}{384 \times 10^2} + \frac{60^5}{8,192 \times 10^2}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{8 \times 10}{6.75 \times 10^{-2}}\left(60 + \frac{60 \times 10^2}{3} + \frac{60^3}{192} - \frac{60^5}{2,048 \times 10^2}\right)\right] \\
&\quad + 4.43\left[\frac{8 \times 10^3}{1.14 \times 10^{-3}}\left(\frac{60^4}{128 \times 10^2} + \frac{60^6}{4,069 \times 10^4} + \frac{60^8}{262,144 \times 10^6}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{8 \times 10}{6.75 \times 10^2}\left(\frac{60^4}{128 \times 10^2} + \frac{60^{15}}{419,430 \times 10^6}\right)\right] \\
\Rightarrow H &= -13.18\text{kN}
\end{aligned}$$

Una sezione D una distanza x dalla corona C si considera l'espressione per il momento di piegatura ottenuta considerando l'equilibrio delle forze sul segmento giusto DB dell'arco. Come il momento è preso a sezione D, la cesoia e la forza normale fanno non dare luogo a momento.

$$M_x = \frac{w}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 - \frac{wL}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right) + H(h - y)$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Sostituire il valore del y da Eq. 32.27,

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{w}{2}\left(\frac{L}{2}-x\right)^2 - \frac{wL}{2}\left(\frac{L}{2}-x\right) + H\left(h - \frac{4hx^2}{L^2}\right) \\ &= -\frac{w}{2}\left(\frac{L^2}{4}-x^2\right) + Hh\left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right) \\ &= -\frac{2w}{L^2}\left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right) + Hh\left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right) \\ &= \left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right) \times \left(Hh - \frac{2w}{L^2}\right) \end{aligned}$$

Il momento è quindi anche parabolico: alla corona si trova il momento semplicemente impostando $x = 0$

$$M_C = \left(Hh - \frac{2w}{L^2}\right) = \left(-13.18 \times 10 - \frac{2 \times 25}{60^2}\right) = -131.81\text{kNm}$$

Quando $x = L/2$, il momento di supporto è ottenuto come 0. Quando $x = L/4$ il momento al punto di quarto è ottenuto dall'equazione precedente

$$M_{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4}\left(Hh - \frac{2w}{L^2}\right) = -98.86\text{kNm}$$

È abbastanza evidente che il contributo della spinta verso il momento di curvatura è più predominante di quello dovuto w

32.3.2 Arco fisso con carico simmetrico

60 Il momento di curvatura, la forza della mano e la forza normale in qualsiasi sezione dell'arco possono essere considerati ridondanti; tuttavia, la sezione trasversale alla corona è vantaggiosa e da considerare se l'arcata è simmetrica. il carico è simmetrico e distribuito, la forza di taglio alla corona scompare e alla fine rimangono solo due quantità ridondanti. M_C e la forza normale nella sezione corona come illustrato in Fig. 32.7.

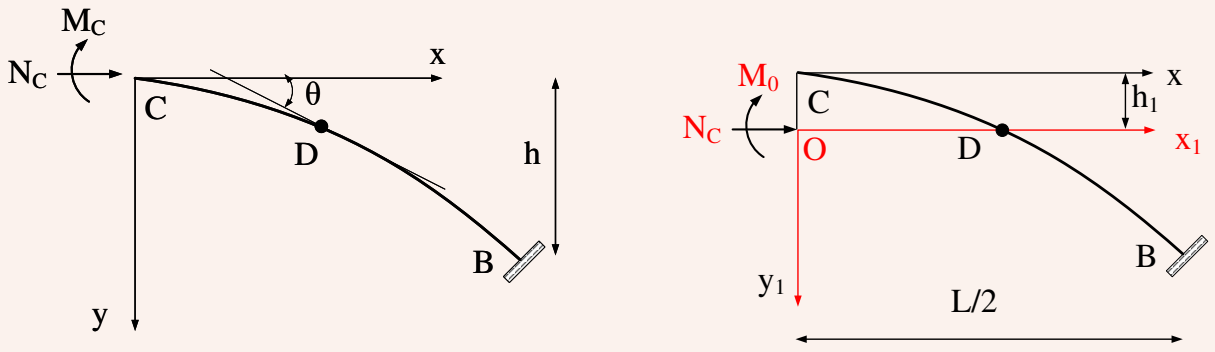


Figura 32.7: Arco parabolico senza cerniera; diagramma corpo libero

COPIA DI REVISIONE

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

61 Ancora una volta, usando il teorema di Castigliano (Eq. 48.36), la trasalazione e la rotazione C sono zero in virtù della simmetria. Così possiamo valutare le due forze ridondanti

$$\theta_C = \frac{\partial U^*}{\partial M_C} = 2\int_0^l \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_C}ds = 0 \tag{32.31}$$

$$\Delta_C = \frac{\partial U^*}{\partial N_C} = 2\int_0^l \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial N_C}ds + 2\int_0^l \frac{N}{AE}\frac{\partial N}{\partial N_C}ds \tag{32.32}$$

dove l è la lunghezza dell'arco CB, cioè la metà della lunghezza dell'asse dell'arco completo. Si noti che i lati della mano destra sono zero, in quanto lo spostamento/rotazione corrispondente è pari a zero in virtù della simmetria.

62 Lasciamo perdere. M_o e N_o sia il momento e la forza normale, rispettivamente, in qualsiasi sezione dell'arco indotta dai carichi applicati; poi il momento totale e la potenza assiale ad una tipica sezione trasversale D, può essere espresso come

$$M = M_C + N_C y + M_o \tag{32.33}$$

$$N = N_C \cos\theta + N_o \tag{32.34}$$

Differenziamento Eq. 32.33 con rispetto a M_C:

$$\frac{\partial M}{\partial M_C} = 1$$

Differenziando entrambi gli Eq. 32.33 e 32.34

$$\frac{\partial M}{\partial N_C} = y \tag{32.35}$$

$$\frac{\partial N}{\partial N_C} = \cos\theta \tag{32.36}$$

Sostituire in Eqs. 32.31 e 32.32

$$\int_0^l \frac{1}{EI}(M_C + N_C y + M_o)ds = 0 \Rightarrow M_C\int_0^l \frac{ds}{EI} + N_C\int_0^l \frac{yds}{EI} = \int_0^l \frac{M_o}{EI}ds \tag{32.37}$$

$$\int_0^l \frac{M_C + N_c y + M_o}{EI}yds = \int_0^l \frac{N_C\cos\theta + N_o}{AE}\cos\theta ds = 0$$

$$\Rightarrow M_C\int_0^l \frac{y}{EI}ds + N_C\int_0^l \frac{y^2}{EI}ds + N_C\int_0^l \frac{\cos^2\theta}{AE}ds = -\int_0^l \frac{M_o y}{EI}ds - \int_0^l \frac{N_o\cos\theta}{AE}ds \tag{32.38}$$

63 Equazioni 32.37 e 32.38 è un po' difficile da gestire, questo può essere ulteriormente semplificato se l'origine alla corona C, si sposta a un punto C a distanza di h_1 dalla corona C, poi le nuove ordinazioni con riferimento al punto O ora diventa, $y_1 = (y - h_1)$.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

64 La distanza viene selezionata in modo tale da soddisfare le seguenti condizioni

$$\int_0^l \frac{y_1}{EI} ds = \int_0^l \frac{y - h_1}{EI} ds = 0 \Rightarrow h_1 = \frac{\int_0^l \frac{y_1}{EI} ds}{\int_0^l \frac{ds}{EI}}$$

Il punto O così definito è chiamato *centro elastico dell'arco*.

65 Se il punto O viene utilizzato come origine delle coordinate, poi per y in Eqs. 32.37 e 32.38, $(y1 - h_1)$ è sostituito. In tal caso $\int_0^l (y_1/EI) ds$ diventa zero. Successivamente, le espressioni che ne derivano per il momento e la forza normale possono essere date da

$$M_{oo} = M_C + H_{oo} h_1 = \frac{\int_0^l \frac{M_o}{EI} ds}{\int_0^l \frac{ds}{EI}} \tag{32.39}$$

$$H_{00} = N_C = \frac{\int_0^l \frac{M_o y_1}{EI} ds + \int_0^l \frac{N_o \cos\theta}{AE} ds}{\int_0^l \frac{y_1^2}{EI} ds + \int_0^l \frac{\cos^2\theta}{AE} ds} \tag{32.40}$$

32.3.2.1 Ex 32.8: Arco parabolico senza cerniera

Cerchiamo di determinare il momento di curvatura e la forza assiale alla corona di un arco parabolico simmetrico di circa 40 m e sottoposto a carico non distribuito w di 20kN/m lungo il suo L'ascesa dell'arco è di 8 m. $E = 2 \times 10^5$ N/mm^2, $I = 1,5 \times 10^{-4}$ m^{4}e $A = 7.5 \times 10^{-2}$ m^2. Il centro elastico è al 1m sotto la corona. L'equazione dell'arco parabolico è

$$y = \frac{4hx^2}{L^2}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{8hx}{L^2} \tag{32.41}$$

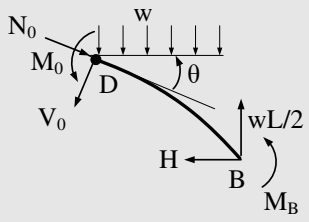
e

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2} dx \tag{32.42}$$

L'arco fisso con il carico applicato è mostrato nella figura; a causa della simmetria, sia in dimensioni che nel caricamento, i momenti fissi nei supporti sono uguali e di fronte, così anche i propulsori orizzontali.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



In primo luogo, l'espressione generale per varie forze è formulata e poi i valori specifici vengono sostituiti per valutare la grandezza di diverse forze. $M_A = M_B = M^F$ (in cui) M^F è il momento fisso a supporti); Allo stesso modo $H_A = H_B = H$. Prendere il momento delle forze circa $C, \sum M = 0$

$$\begin{aligned} -M_B - \frac{wL}{2}\frac{L}{2} + \frac{wL}{2}\frac{L}{4} + Hh = 0 \quad \text{or} \quad -M_B - \frac{wL^2}{8} + Hh = 0 \\ Hh = M_B + \frac{wL^2}{8} \quad \text{or} \quad H = \frac{1}{h}\left(M_B + \frac{wL^2}{8}\right) \end{aligned} \tag{32.43}$$

Il momento di piegatura M_0 in qualsiasi sezione

$$\begin{aligned} M_0 &= -M_B - \frac{wL}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right) + w\frac{\left(\frac{L}{2} - x\right)^2}{2} + H_B(h - y) \\ &= -M_B - \frac{wL^2}{4} + \frac{wLx}{2} + \frac{w}{2}\left(\frac{L^2}{4} - Lx + x^2\right) + H_B(h - y) \\ &= -M_B - \frac{wL^2}{4} + \frac{wLx}{2} + \frac{wL^2}{8} - \frac{wLx}{2} + \frac{wx^2}{2} + H_B(h - y) \\ &= -M_B - \frac{wL^2}{8} + \frac{wx^2}{2} + H_B(h - y) = -\left(M_B + \frac{wL^2}{8}\right) + \frac{wx^2}{2} + H_B(h - y) \end{aligned}$$

Usando Eq. 32.43 e 32.41, M_0 può essere riscritto come

$$\begin{aligned} M_0 &= -Hh + \frac{wx^2}{2} + H_B\left(h - \frac{4hx^2}{L^2}\right) \\ &= \frac{wx^2}{2} - \frac{4Hh}{L^2}x^2 \,(\because H_B = H) = x^2\left(\frac{w}{2} - \frac{4Hh}{L^2}\right) \end{aligned} \tag{32.44}$$

Le forze che agiscono su un corpo libero DB a sezione trasversale D

$$N_O = w\left(\frac{L}{2} - x\right)\cos\theta$$

Sostituire M_0 in Eq. 32.39

$$M_{OO} = \frac{\int_0^l \frac{1}{EI}\left(\frac{w}{2} - \frac{4Hh}{L^2}\right)x^2 ds}{\int_0^l \frac{ds}{EI}} \tag{32.45}$$

Sostituire per ds da Eq. 32.42

$$\begin{aligned} M_{oo} &= -\frac{\int_0^{L/2}\left(\frac{w}{2} - \frac{4Hh}{L^2}\right)x^2\sqrt{1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2}dx}{\int_0^{L/2}\sqrt{1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2}dx} \\ &= \frac{\left(4whL - \frac{32Hh^2}{L}\right)\left\{\alpha_1\left(\frac{1}{32} + \frac{L^2}{1024h^2}\right) - \frac{\alpha_2 L^5}{32{,}768h^4}\right\}}{\frac{2h}{L}\alpha_1 + \left(h + \frac{L^2}{16h}\right)\alpha_2} \end{aligned} \tag{32.46}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Valori sostitutivi di M_o da Eq. 32.44, $y_1 = (y - h_1)$e ds da Eq. 32.42 in Eq. 32.40

$$H_{oo} = \frac{\int_0^{L/2} \frac{1}{EI}\left(\frac{w}{2} - \frac{4Hh}{L^2}\right) x^2 \left(y - h_1\right) \sqrt{\left(1 + \frac{8hx}{L^2}\right)^2} dx + \int_0^{L/2} \frac{w\left(\frac{L}{2} - x\right)\cos^2\theta}{AE} \sqrt{\left(1 + \frac{8hx}{L^2}\right)^2} dx}{\int_0^{L/2} \frac{\left(y - h_1\right)^2}{EI} \sqrt{\left(1 + \frac{8hx}{L^2}\right)^2} dx + \int_0^{L/2} \frac{\cos^2\theta}{AE} \sqrt{\left(1 + \frac{8hx}{L^2}\right)^2} dx} \tag{32.47}$$

Ora per infinitamente piccola lunghezza di arco.

$$\cos\theta = \frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \cos^2\theta = \left[1 + \left(\frac{8hx^2}{L^2}\right)^2\right] \tag{32.48}$$

Substituting the value of $\cos^2\theta$ in Eq. 32.47, we get

$$H_{oo} = \frac{\int_0^{L/} \frac{1}{EI}\left(\frac{w}{2} - \frac{4Hh}{L^2}\right) x^2 \left(y - h_1\right) \sqrt{1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2} dx + \int_0^{L/2} \frac{w\left(\frac{L}{2} - x\right)}{AE} 1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2 \sqrt{1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2} dx}{\int_0^{L2} \frac{1}{EI}\left(\frac{4hx^2}{L^2} - h_1\right)^2 \sqrt{1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2} dx + \int_0^{L/2} \frac{1}{AE} 1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2 \sqrt{1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2} dx} \tag{32.49}$$

$$H_{oo} = -\frac{\begin{array}{c}\frac{1}{I}\left\{\alpha_1\left[(\frac{4wh}{L^2} - \frac{8h^2h_1}{L^2})\left\{\frac{4h}{L^2}\left(\frac{L^5}{192} + \frac{L^7}{12,288h^2} - \frac{L^9}{65,536h^2} + \frac{L^9}{131072h^4}\right)\right.\right.\right. \\ \left.\left.\left. -h_1\left(\frac{L^3}{32} + \frac{L^5}{1,024h^2}\right)\right\} - \frac{wL^2I}{8Ah}\right] + \alpha_2\left\{\left(\frac{4wh}{L^2} - \frac{8h^2h_1}{L^2}\right)\right. \\ \left.\left(\frac{L^{10}}{1,033,576h^5} + \frac{L^8h_1}{32,768h^4}\right)\right\}\Big\} + \alpha_3\frac{wL^3}{16Ah}\end{array}}{\begin{array}{c}\frac{1}{I}\left\{\alpha_1\left\{\frac{8h^3}{3L^3}\left(\frac{L^2}{4} + \frac{L^4}{64h^2}\right) - \frac{1}{8Lh^2}\left(\frac{L^2}{4} + \frac{L^4}{64h^2}\right) + \frac{L^3}{1,024h^4} + \frac{2hh_1}{L}\right\}\right. \\ \left. +\alpha_2\left\{\frac{L^{12}}{4,134,034h^6} + \frac{L^4}{64h^2}\right\}\right\} + \frac{L^2}{8Ah}\alpha_3\end{array}} \tag{32.50}$$

Dove?

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{L^2}{4} + \left(\frac{L^2}{8h}\right)^2}$$

$$\alpha_2 = \ln\left(\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + \left(\frac{L^2}{8h}\right)^2}\right)$$

$$\alpha_3 = \ln\left\{\frac{8h}{L^2}\left(\frac{L}{2} + \alpha_1\right)\right\}$$

Equazione 32.50 per H_{oo} dipende dalle dimensioni e dalle proprietà geometriche dell'arco, la sua portata e il caricamento. Sostituire i valori indicati in Eq. 32.47, H_{oo} può essere valutato. Una volta

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

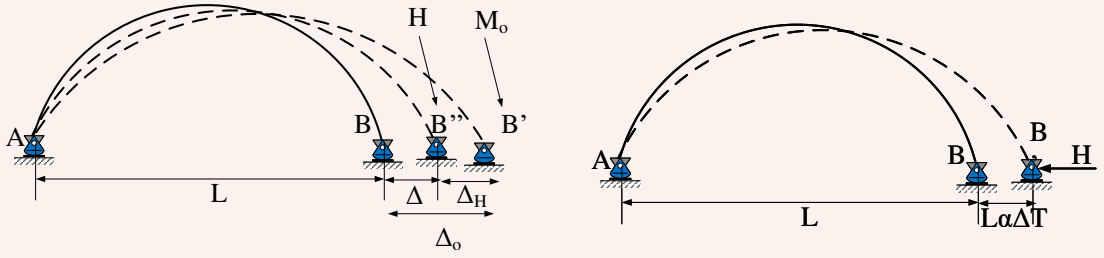
H_{oo} può essere determinato, quindi utilizzandolo in Eq. 32.46 sopra determina il valore del M_{oo} il momento al centro elastico. Con tutti i valori dati, l'espressione per H_{oo} dato in Eq. 32.50 is

$$\begin{aligned}
H_{oo}\frac{1}{1.5\times10^{-4}}&\left\{32.02\left[(\frac{4\times20\times8}{40^2}-\frac{8\times8^2\times1}{40^2})\left\{\frac{4\times8}{40}\left(\frac{40^5}{192}+\frac{40^7}{12288h^2}\right.\right.\right.\right.\\
&\left.\left.\left.\left.-\frac{40^9}{65536\times8^2}+\frac{40^5}{131072\times8^4}\right)-1\left(\frac{40^3}{32}+\frac{4}{1024\times8^2}\right)\right\}\right.\\
&\left.-\frac{20\times40^2\times1.5\times10^{-4}}{8\times8\times7.5\times10^{-2}}\right]+3.95\left\{\left(\frac{4\times20\times3}{40^2}-\frac{8\times8^2\times1}{40^2}\right)\right.\\
&\left.\left(\frac{40^{10}}{1033576\times8^5}+\frac{40^8\times1}{32768\times8^4}\right)\right\}\Bigg\}+\frac{0.733\times20\times40^3}{16\times8\times7.5\times10^{-2}}\\
=&-\frac{}{\frac{1}{1.5\times10^{-4}}\left\{32,02\left\{\frac{8\times8^3}{3\times40^3}\left(\frac{40^2}{4}+\frac{40^4}{64\times8^2}-\frac{1}{8\times40\times8^2}\left(\frac{40^2}{4}+\frac{40^4}{64\times8^2}\right)\right.\right.\right.}\\
&\left.\left.\left.+\frac{40^3}{1024\times8^4}+\frac{2\times8\times1}{40}\right\}+3.95\left\{\frac{40^{12}}{4134034\times8^6}+\frac{40^4}{64\times8^2}\right\}\right\}+\frac{40^2\times0.733}{8\times8\times7.5\times10^{-2}}\\
=&\ 32.08\text{kN}
\end{aligned}\tag{32.51}$$

Infine, Sostituire il valore del H_{oo} in Eq. 32.46, il momento

$$\begin{aligned}
M_{oo}=&-\frac{\left(4\times20\times8\times40-\frac{32\times32.08\times8^2}{40}\right)\left\{32.02\left(\frac{1}{32}+\frac{40^2}{1024\times8^2}\right)-\frac{3.95\times40^5}{32768\times8^4}\right\}}{\frac{2\times8}{40}\times32.02+\left(8+\frac{40^2}{16\times8}\right)3.95}\\
=&\ 314.98\text{kNm}
\end{aligned}$$

32.3.3 Effetti di regolamento e temperatura della Fondazione



(a) Sviluppi iniziali (b) Effetto di temperatura

Figura 32.8: Effetto di insediamento iniziale e cambiamento della temperatura

Resa

66 Let us now consider the effect of settlement or movement or yielding of supports on the value of H. In Fig. 32.8a, a two-hinged arch AB is shown. The end B is supported on roller.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

It is called a primary arch. Under external load the support B in primary structure moves to B' , Let M_0 be the moment in the primary structure due to some external load.

67 Applicare una forza orizzontale virtuale[1] risultati in un momento virtuale $\delta\overline{M} = 1 \times y$ dove y è l'ascesa dell'arco nella sezione dove viene calcolato il momento. Poi lo spostamento nell'arca

$$\begin{aligned}(1)BB' = (1)\Delta_o &= \int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}ds \\ &= \int y\frac{M_o}{EI}ds\end{aligned}$$

68 Se la grandezza della forza orizzontale applicata all'arco è H, allora questa forza induce un momento $M = Hy$. Lo spostamento orizzontale a causa di H

$$\begin{aligned}B'B'' = \Delta_H &= \int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}ds \\ &= \int y\frac{Hy}{EI}ds = H\int \frac{y^2}{EI}ds\end{aligned}$$

69 Presumiamo che il sostegno si arrenda di quantità Δ il supporto si muove da B to B'. Poi

$$\begin{aligned}\Delta_H = H\int y^2\frac{ds}{EI} &= \Delta_0 - \Delta \\ &= \int y\frac{M_o}{EI}ds - \Delta \\ \Rightarrow H &= \frac{\int y\frac{M_o}{EI}ds - \Delta}{\int \frac{y^2}{EI}ds}\end{aligned}$$

70 Se il supporto è elastico e si produce k a causa della forza orizzontale unità a livello di supporto, quindi $\Delta = k_s H$. In questo caso,

$$\begin{aligned}\Delta_H = H\int y^2\frac{ds}{EI} &= \Delta_0 - \Delta \\ = H\int y^2\frac{ds}{EI} &= \int y\frac{M_o}{EI}ds - k_s H \\ \Rightarrow H &= \frac{\int y\frac{M_o}{EI}ds}{\int \frac{y^2}{EI}ds + k_s}\end{aligned} \tag{32.52}$$

[1] In questa sezione useremo il metodo di forza virtuale al posto dell'uso finora da parte di Castigliano per gli archi parabolici.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

Temperatura

71 Rivolgiamo ora l'effetto delle variazioni di temperatura sulla forza orizzontale di un arco a due punte mostrato in Fig. 32.8b, La temperatura dell'arco aumenta di ΔT. Le cerniere alle estremità esercitano una spinta orizzontale sull'arco per evitare che le estremità si muovano quando la temperatura aumenta.

72 A causa di questa spinta orizzontale, ci sarà momento di piegatura in tutte le sezioni dell'arco. B con un rullo. B si muove verso l'esterno B'. Poi

$$BB' = L\alpha\Delta T$$

dove L è la durata dell'arco e α è il coefficiente di espansione termica.

73 Lasciamo perdere. H essere la spinta orizzontale indotta a causa dell'aumento della temperatura da ΔT. Questa forza orizzontale H consente all'arco di ripristinare la sua posizione originale, cioè, esso aiuta a riportare la fine B' to B Poi, dal teorema di Castigliano

$$\frac{dU^*}{dH} = L\alpha\Delta T$$

dove U^* è l'energia di tensione

$$U^* = \int \frac{M^2}{2EI} ds$$

In questo caso, il momento è dato da $M = -Hy$, così

$$\begin{aligned} M &= -Hy \\ \Rightarrow \quad L\alpha\Delta T = \frac{dU}{dH} &= \int \frac{d}{dH}\left(\frac{M^2}{2EI}\right) ds = \int \frac{M}{EI}\frac{dM}{dH} ds \\ &= \int (-Hy)(-y)\frac{ds}{EI} = H\int y^2 \frac{ds}{EI} \\ \Rightarrow H &= \frac{L\alpha\Delta T}{\int y^2 \frac{ds}{EI}} \end{aligned} \tag{32.53}$$

Questa equazione esprime la spinta orizzontale dovuta al cambiamento della temperatura nell'arco.

74 Se combiniamo gli effetti della resa delle fondamenta e del cambiamento di temperatura, la spinta orizzontale può essere ottenuta da Eqs 32.52 e 32.53

$$H = \frac{\int M_o y \frac{ds}{EI} + L\alpha\Delta T}{\int y^2 \frac{ds}{EI} + k_s} \tag{32.54}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

32.3.3.1 Ex 32.9: Carico termico su arco parabolico

Un arco parabolico a due punte di 50 m e un aumento di 5 m porta al corona un carico concentrato di 50 kN. Il supporto elastico dell'arco produce di 8000002 m/kN. $E = 200$ kN/mm^2, $I = 8^9$ mm^{4}e $\alpha = 20xlO^{-6}/°$C, cerchiamo di valutare la spinta orizzontale se la temperatura aumenta di 20°C Prendendo il supporto sinistro come origine l'equazione dell'arco parabolico è

$$y = \frac{4hx(L-x)}{L^2} = \frac{4\times 5\times x\times(L-x)}{50^2} = \frac{x(50-x)}{125}$$

$$\int_0^{50} y^2 ds = \int_0^{50} \frac{x^2(50-x)^2}{125^2} = \frac{1}{125^2}\int_0^{50}\left(2500x^2 - 100x^3 + x^4\right)dx$$

$$= \frac{1}{125^2}\left[2500\frac{x^3}{3} - 100\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_0^{50} = 666.67$$

- Un momento, $M_o = 25x$

$$\int_0^L M_o y\frac{dx}{EI} = 2\int_0^{25} 25x\frac{x}{125}(50-x)\frac{dx}{EI}$$

$$= \frac{2}{5EI}\int_0^{25}\left(50x^2 - x^3\right)dx = \frac{2}{5EI}\left[50\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{25} = \frac{65,104.17}{EI}$$

Now, $EI = 200\times 10^6\times 8\times 10^9\times 10^{-12} = 1,600,000\text{kNm}^2$. Substituting in Eq. 32.54, we get

$$H = \frac{\frac{65,104.17}{1,600,000} + 25\times 20\times 10^{-6}\times 20}{\frac{666.67}{1,600,000} + 0.0002} = 92.43\text{kN}$$

32.4 Travi curvate

75 I problemi in queste sezioni sono ispirati da quelli trovati in Gerstle, 1974 Basic Structural Analysis.

32.4.1 Trave ad arco

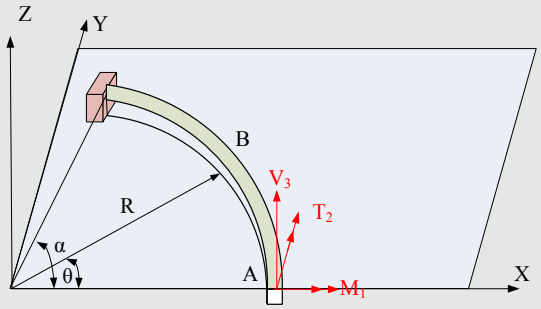
76 Una trave a prua non è altro che un fascio curvato nell'aereo caricato ortogonalmente. Sarà sottoposto a taglio, momento e torsione.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

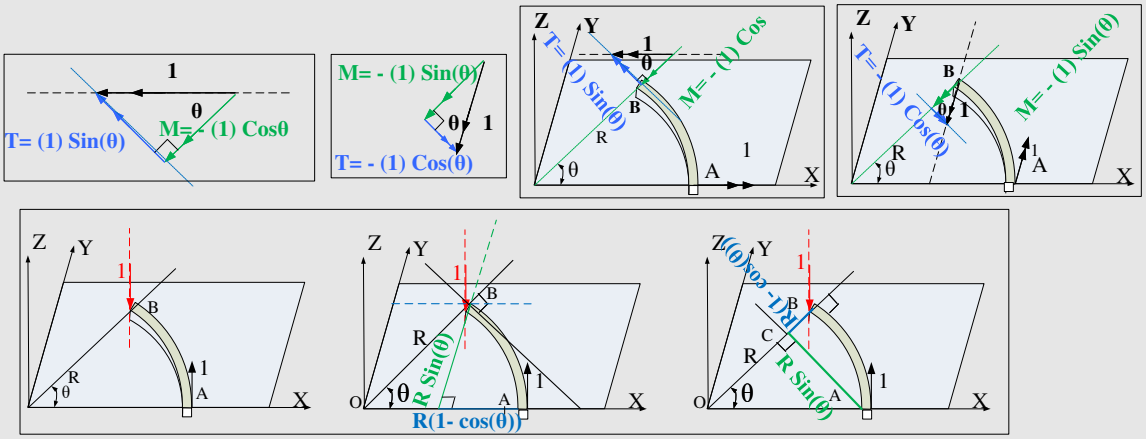
32.4.1.1 Ex 32.10: Trave ad arco

Cerchiamo di ricavare la matrice della flessibilità di una scatola circolare-girder del raggio R e angolo α. L'arco è fissato a un capo e libero all'altro (nota somiglianza con il problema precedente).



I movimenti e le torsioni dovuti a un'unità di momento esterno o alla torsione applicata in A possono essere facilmente ottenuti dalla geometria, quindi per l'unità esternamente applicata forza ad A, devono determinare dalla geometria i due bracci del momento. Attenzione, usare la figura destra, quella sinistra è sbagliata anche se produce risultati corretti.

$$
\begin{aligned}
AC &= R\sin(\theta) \\
M &= (1)R\sin(\theta) \\
BC &= R(1-\cos(\theta)) \\
T &= (1)R\,(1-\cos(\theta))
\end{aligned}
$$



dof:	$i=1$	$i=2$	$i=3$
	M_A=1	$T_A=1$	$V_A=1$
$V_i(\theta)$	0	0	-1
$M_i(\theta)$	-cos θ	$-\sin\theta$	-Rsin(θ)
$T_i(\theta)$	sin θ	$-\cos\theta$	$R(1-\cos(\theta))$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Noi useremo

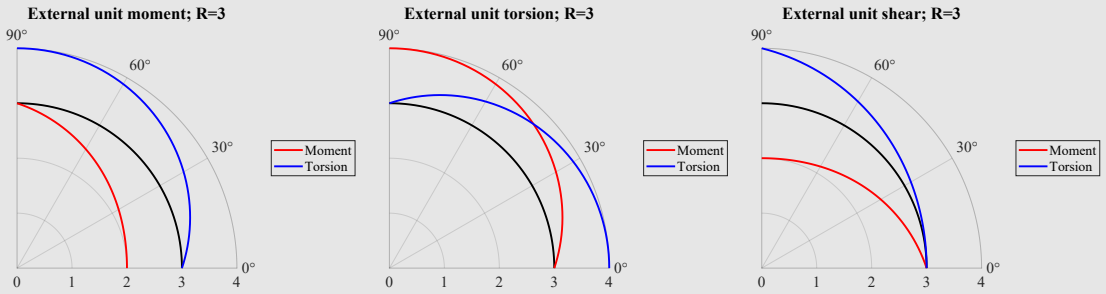
$$d_{ij} = \int_0^\alpha \delta\overline{M}_i(\theta)\frac{M_j(\theta)}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_i(\theta)\frac{T_j(\theta)}{EI}Rd\theta$$

dove $1 \le i, j \le 3$, cioè operiamo sulle linee 2 o 4. Così (segni di d_{x3} i risultati dell'integrazione potrebbero essere errati.:

$$\begin{aligned}
d_{11} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_1\frac{M_1}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta T_1\frac{T_1}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha -\cos\theta\frac{-\cos\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \sin\theta\frac{\sin\theta}{GJ}Rd\theta \\
&= \frac{R}{EI}\left(-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R}{GJ}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) \\
d_{12} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_1\frac{M_2}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_1\frac{T_2}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha -\cos\theta\frac{-\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \sin\theta\frac{-\cos\theta}{GJ}Rd\theta \\
&= \frac{R}{EI}\frac{\sin^2\alpha}{2} - \frac{R}{GJ}\frac{\sin^2\alpha}{2} \\
d_{13} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_1\frac{M_3}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_1\frac{T_3}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha \cos\theta\frac{R\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \sin\theta\frac{R(1-\cos\theta)}{GJ}Rd\theta \\
&= -\frac{R}{EI}\frac{\sin^2\alpha}{2} - \frac{R}{GJ}\left(\frac{1}{2} - \cos\alpha + \cos^2\alpha\right) \\
d_{22} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_2\frac{M_2}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_2\frac{T_2}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha -\sin\theta\frac{-\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha -\cos\theta\frac{-\cos\theta}{GJ}Rd\theta \\
&= \frac{R}{EI}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R}{GJ}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) \\
d_{23} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_2\frac{M_3}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_2\frac{T_3}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha \sin\theta\frac{R\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha -\cos\theta\frac{R(1-\cos\theta)}{GJ}Rd\theta \\
&= -\frac{R}{EI}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R}{GJ}\left(-\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) \\
d_{33} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_3\frac{M_3}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_3\frac{T_3}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha R\sin\theta\frac{R\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha R(1-\cos\theta)\frac{R(1-\cos\theta)}{GJ}Rd\theta \\
&= \frac{R^2}{EI}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R^2}{GJ}\left(\frac{3}{2}\alpha - 2\sin\alpha + \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right)
\end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



e osservare quanto segue

	Unità esterna					
	momento		Torsione		forza	
Int. Forza	Inizia	Fine	Inizia	Fine	Inizia	Fine
Momento	1	0	0	1	0	1
Torsione	0	1	1	0	0	1

32.4.2 Elicoidale

Adattato da Gerstle, 1974 Basic Structural Analysis.

32.4.2.1 Geometria

77 Perché le strutture spaziali (figura 32.9) può avere una geometria complicata, dobbiamo ricorrere all'analisi vettoriale[2] per determinare le forze interne.

78 In generale abbiamo sei forze interne (forze e momenti) che agiscono in qualsiasi sezione.

$$x = f_1(\theta); \qquad y = f_2(\theta); \qquad z = f_3(\theta) \tag{32.55}$$

79 Il sistema di coordinate globale è denotato da $X - Y - Z$, e i suoi vettori unitari sono denotati[3] $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. La sezione su cui sono necessarie le forze interne è tagliata e *Principali principali* gli assi sono identificati come $N - S - W$ che corrispondono alla forza normale, e gli assi pieganti rispetto al *Forte* e *Debole* axes. I vettori unitari corrispondenti sono $\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{w}$ (figura) 32.10).

80 Il vettore normale dell'unità (che è tangente alla curva) in qualsiasi sezione è dato da

$$\mathbf{n} = \frac{dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}}{ds} = \frac{dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{1/2}} \tag{32.56}$$

[2] A cui siete già stati esposti in una fase iniziale, ma hanno molto raramente utilizzato finora nella meccanica!

[3] Tutte le quantità vettoriali sono denotate da un carattere audace.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE



Figura 32.9: Scala a spirale al museo louvre (paris), e la cattedrale di sagrada familia (barcelona)

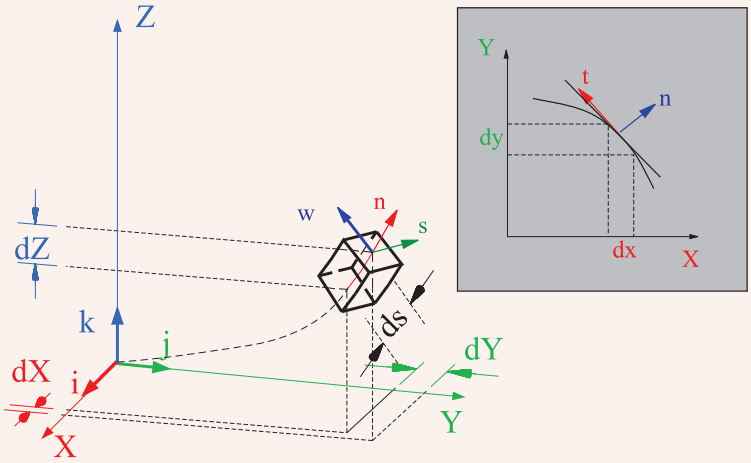


Figura 32.10: Geometria della struttura curva nello spazio

COPIA DI REVISIONE

81 Gli assi di piegatura principali devono essere definiti, cioè se l'asse di flessione forte è parallelo al XY piano, o orizzontale (come è generalmente il caso per carico di gravità), allora questo asse è normale a entrambi N e Z asce, e il suo vettore unità è

$$\mathbf{s} = \mathbf{n} \times \mathbf{k} \tag{32.57}$$

82 L'asse di flessione debole è normale a entrambi N e S, e quindi il suo vettore unitario è determinato da

$$\mathbf{w} = \mathbf{n} \times \mathbf{s} \tag{32.58}$$

Nota che ormai entrambi **n** e **s** sono stati normalizzati.

32.4.2.2 Equilibrio

83 Per le equazioni di equilibrio, consideriamo il diagramma del corpo libero (figura 32.11).

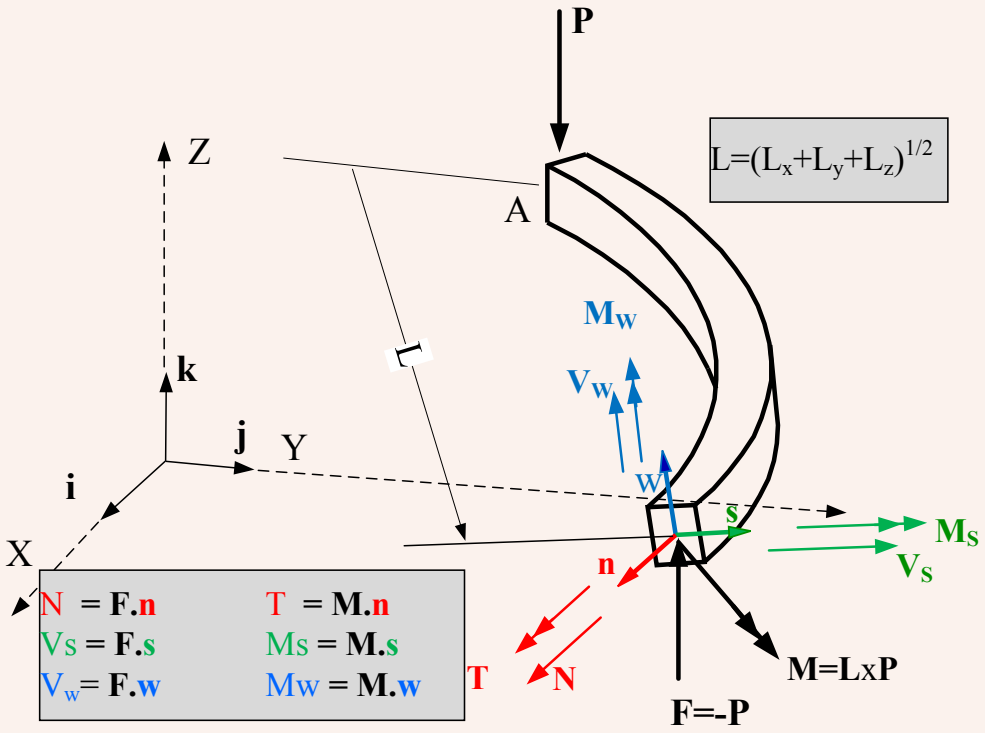


Figura 32.11: Schema corpo libero di una struttura curva nello spazio

84 Un carico applicato **P** sta agendo a punto A. Il vettore forza risultante **F** e vettore di momento risultante **M** recitazione nella sezione taglio B sono determinati dall'equilibrio

$$\Sigma \mathbf{F} = 0; \quad \mathbf{P} + \mathbf{F} = 0; \quad \mathbf{F} = -\mathbf{P} \tag{32.59}$$

$$\Sigma \mathbf{M}^B = 0; \quad \mathbf{L} \times \mathbf{P} + \mathbf{M} = 0; \quad \mathbf{M} = -\mathbf{L} \times \mathbf{P} \tag{32.60}$$

COPIA DI REVISIONE

dove **L** è il vettore del braccio di leva B to A. Le forze assiali e di taglio N, V_s e V_w sono tutti e tre i componenti del vettore di forza **F** lungo il $N, Se\ W$ asce e può essere trovato da prodotto punto con i vettori unità appropriati:

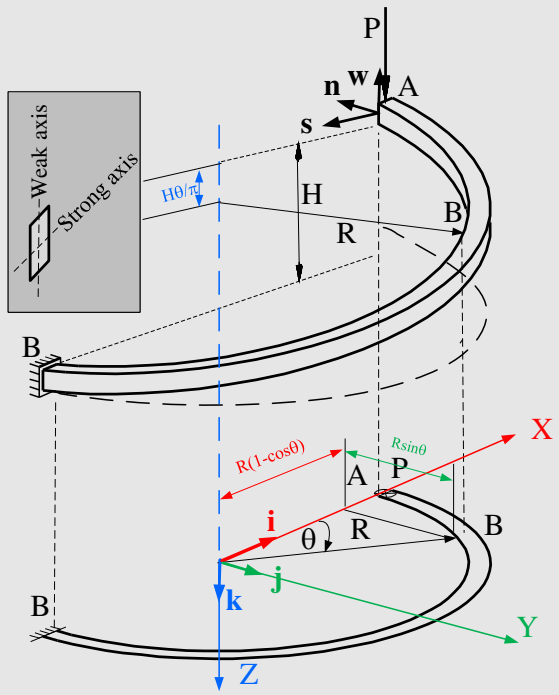
$$N = \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$$
$$V_s = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s}$$
$$V_w = \mathbf{F}\cdot\mathbf{w}$$

85 Analogamente i momenti torsionali e pieganti T, M_s e M_w sono anche componenti del momento vettoriale **M** e sono determinati da

$$T = \mathbf{M}\cdot\mathbf{n}$$
$$M_s = \mathbf{M}\cdot\mathbf{s}$$
$$M_w = \mathbf{M}\cdot\mathbf{w}$$

86 Pertanto, abbiamo un mezzo per determinare le forze interne. In caso di carichi applicati ci sommeremo e per carico distribuito integriamo.

32.4.2.2.1 Ex 32.11: Arco elicoidale; carico a punti



Cerchiamo di determinare le forze interne N, V_se V_w e i momenti interni T, M_s e M_w lungo la trave cantilevered elicoidale a causa di un carico verticale P alla sua estremità libera. Prima di tutto determina la geometria in termini di angolo θ

$$x = R\cos\theta; \qquad y = R\sin\theta; \qquad z = \frac{H}{\pi}\theta \tag{32.61}$$

Per determinare il vettore dell'unità **n** in qualsiasi momento abbiamo bisogno dei derivati:

$$dx = -R\sin\theta d\theta; \qquad dy = R\cos\theta d\theta; \qquad dz = \frac{H}{\pi}d\theta \tag{32.62}$$

e poi inserire in Eq. 32.56

$$\mathbf{n} = \frac{-R\sin\theta\mathbf{i} + R\cos\theta\mathbf{j} + H/\pi\mathbf{k}}{\left[R^2\sin^2\theta + R^2\cos^2\theta + (H/\pi)^2\right]^{1/2}}$$
$$= \underbrace{\frac{1}{\left[1 + (H/\pi R)^2\right]^{1/2}}}_{K}[-\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j} + (H/\pi R)\mathbf{k}]$$

Poiché il denominatore dipende solo dalla geometria, sarà designato da K.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

L'asse di flessione forte si trova in un piano orizzontale, e il suo vettore unità può essere così determinato da Eq. 32.57:

$$\mathbf{n}\times\mathbf{k} = \frac{1}{K}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin\theta & \cos\theta & \frac{H}{\pi R} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{32.63}$$

$$= \frac{1}{K}(\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}) \tag{32.64}$$

e la grandezza assoluta di questo vettore $|\mathbf{k}\times\mathbf{n}| = \frac{1}{K}$ e così

$$\mathbf{s} = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j} \tag{32.65}$$

Il vettore unitario lungo l'asse debole è determinato da Eq. 32.58

$$\mathbf{w} = \mathbf{s}\times\mathbf{n} = \frac{1}{K}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & \frac{H}{\pi R} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{K}\left(\frac{H}{\pi R}\sin\theta\mathbf{i} - \frac{H}{\pi R}\cos\theta\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$$

Con la definizione della geometria completata, esaminiamo ora le equazioni di equilibrio. 32.59 e 32.60.

$$\Sigma F = 0; \quad \mathbf{F} = -\mathbf{P}$$
$$\Sigma M_b = 0; \quad \mathbf{M} = -\mathbf{L}\times\mathbf{P}$$

dove

$$\mathbf{L} = (R - R\cos\theta)\mathbf{i} + (0 - R\sin\theta)\mathbf{j} + \left(0 - \frac{\theta}{\pi}H\right)\mathbf{k} \tag{32.66}$$

e

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}\times\mathbf{P} = R\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ (1-\cos\theta) & -\sin\theta & -\frac{\theta}{\pi}\frac{H}{R} \\ 0 & 0 & P \end{vmatrix}$$

$$= PR[-\sin\theta\mathbf{i} - (1-\cos\theta)\mathbf{j}]$$

e

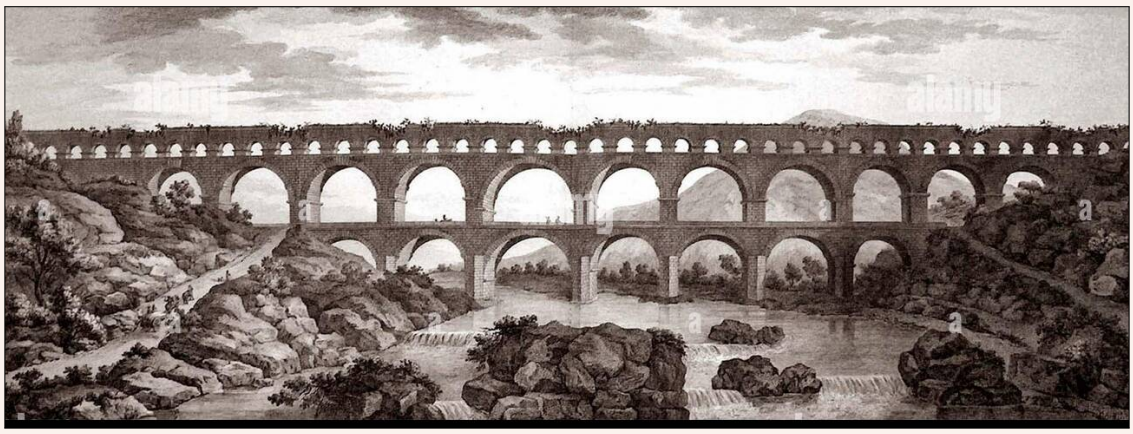
$$\mathbf{M} = PR[\sin\theta\mathbf{i} + (1-\cos\theta)\mathbf{j}] \tag{32.67}$$

I componenti della forza $\mathbf{F} = -P\mathbf{k}$ e il momento $\mathbf{M}$ sono ottenuti mediante prodotti di punti appropriati con i vettori unitari

$$N = \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = -\frac{1}{K}P\frac{H}{\pi R}$$
$$V_s = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} = 0$$
$$V_w = \mathbf{F}\cdot\mathbf{w} = -\frac{1}{K}P$$
$$T = \mathbf{M}\cdot\mathbf{n} = -\frac{PR}{K}(1-\cos\theta)$$
$$M_s = \mathbf{M}\cdot\mathbf{s} = PR\sin\theta$$
$$M_w = \mathbf{M}\cdot\mathbf{w} = \frac{PH}{\pi K}(1-\cos\theta)$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Pont du Gard, I secolo CE, Nîmes, Francia.

Esempio di costruzione dell'arco in cui la precisa disposizione dei voussoirs trasferisce efficacemente carichi, garantendo stabilità e distribuzione della spinta attraverso la sua struttura multi-tiered.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 33

Progettazione di un arco indeterminato staticamente

Abstract

Questo capitolo presenta due esempi dettagliati di analisi strutturale complesse applicate alle strutture reali, illustrando chiaramente come l'analisi e il design si informano a vicenda attraverso un processo iterativo. Viene analizzata una costola ad arco in acciaio saldato per un hangar aeronautico e viene analizzato un ponte ad arco legato a due anelli, dimostrando l'applicazione di metodi di compatibilità con strutture arcuate staticamente indeterminate.

33.1 Ex 33.1: Progettazione di un arco staticamente indeterminato 1267

33.2 Ex 33.2: Cambiamento di temperatura in un arco 1274

I due esempi seguenti si collocano tra le migliori illustrazioni di analisi complesse applicate alle strutture reali, rivelando chiaramente come l'analisi e il design si informano a vicenda attraverso un processo iterativo.

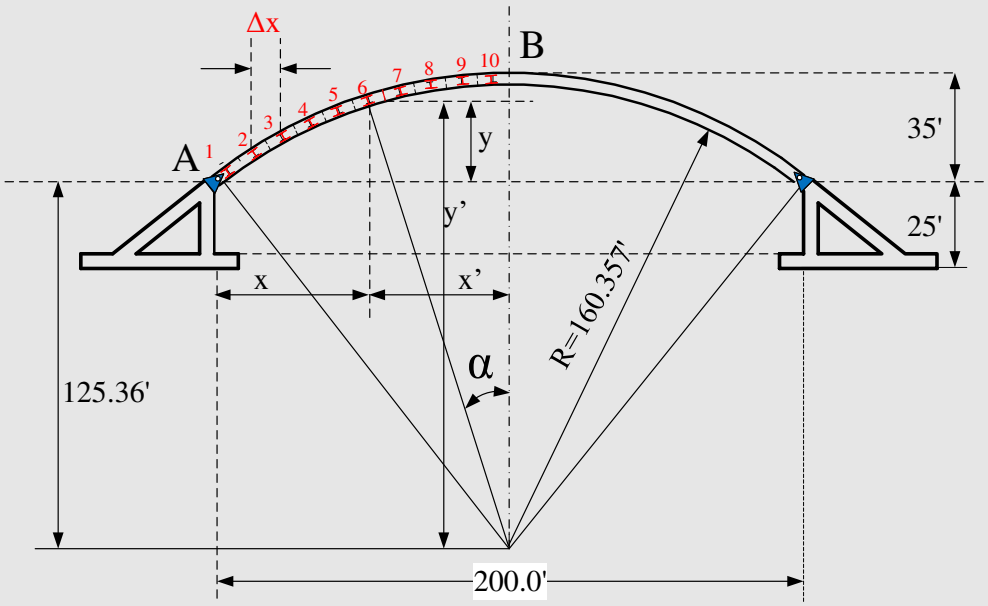
33.1 Ex 33.1: Progettazione di un arco staticamente indeterminato

La sezione seguente è riprodotta da Kinney, 1957 Indeterminate Structural Analysis.

Cerchiamo di progettare una costola a due cerniere, saldata in acciaio solido per un hangar. Il momento dell'inerzia della costa è quello di variare come necessario. L'arco, centro al centro delle

COPIA DI REVISIONE

cernieri, deve essere 200 ft. Le costole devono essere posizionate a 35 ft centro al centro, con un aumento di 35 piedi. Mazzo tetto, purlins e costa saranno assunti per peso 25 lb/ft^2 sulla superficie del tetto e la neve sarà assunta a 40 lb/ft^2 di questa superficie. Venti purlin saranno ugualmente distanziati intorno alla costola.



1. La linea centrale della costola sarà presa come il segmento di un cerchio. Con il calcolo del raggio di questo cerchio si trova a 160.357 ft, e la lunghezza di il $arc\ AB$ per essere 107.984 ft.
2. Per l'analisi l'arco AB sarà considerato diviso in dieci segmenti, ciascuno con una lunghezza di 10.798 ft. Così un carico concentrato viene applicato alla costola da i purlins che si inquadrano al centro di ogni segmento. (I segmenti numerati sono mostrati nella figura.
3. Poiché il carico totale di neve e morto è 65 lb/ft^2 di superficie del tetto, il valore ogni forza concentrata sarà
$$P = 10.798 \times 35 \times 65 = 24.565 \text{ k} \tag{33.1}$$
4. I calcoli necessari per valutare i coodinati dei centri vari segmenti, riferiti alla cerniera A, sono mostrati in Tabella 1. Anche mostrato sono i valori di Δx, la proiezione orizzontale della distanza tra i centri dei diversi segmenti.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Seg... >	α	sin α	cos α	$x' = R\sin\alpha$ (ft)	$y' = R\cos\alpha$ (ft)	$x = 100 - x'$ (ft)	$y = y' - 125.36$ (ft)	Δx (ft)
A	38°34′49″	0.62361	0.78173	100.000	125.36	0	0	
1	36°39′05″	0.59695	0.80229	95.725	128.65	4.275	3.29	4.275
2	32°47′36″	0.54161	0.84063	86.851	134.80	13.149	9.44	8.874
3	28°56′07″	0.48382	0.87516	77.584	140.34	22.416	14.98	9.267
4	25°04′38″	0.42384	0.90574	67.966	145.24	32.034	19.88	9.618
5	21°13′09″	0.36194	0.93220	58.040	149.48	41.960	24.13	9.926
6	17°21′40″	0.29840	0.95444	47.851	153.05	52.149	27.69	10.189
7	13°30′11″	0.23350	0.97236	37.443	155.92	62.557	30.57	10.408
8	09°38′42″	0.16754	0.98586	26.866	158.09	73.134	32.73	10.577
9	05°47′13″	0.10083	0.99490	16.169	159.54	83.831	34.18	10.697
10	01°55′44″	0.03367	0.99943	5.399	160.27	94.601	34.91	10.770
Corona					160.36	100.000	35.00	5.399

Tabella 1

5. Se manca l'esperienza e il tecnico di progettazione è quindi in perdita come alle presupposti iniziali per quanto riguarda la variazione sezionele lungo la costola, è raccomandata che la prima analisi si basi sull'assunzione di un momento costante anche l'ingegnere esperto spesso troverà che questo è il migliore procedura.
6. Il valore del H essendo così determinato, momenti e spinte assiali sono convogliato in tutta la costa. Le zone di sezione trasversale alle varie sezioni sono poi progettato per questi momenti e spinte assiali. Un nuovo valore per H, così come riveduta valori per momenti e spinta assiale lungo la costola, sono determinati per la nuova costola con la sezione trasversale variabile. Le stringhe sono controllate nella costola e l'intero processo si ripete se necessario, questa procedura sarà seguita nel caso presente.
7. Con il metodo generale, supponendo che la fine A è su rulli,

$$\Delta_{Ah} + H_A \delta_{AhAh} = 0 \tag{33.2}$$

8. Le deflettenze saranno calcolate dal lavoro virtuale, e così questa espressione diventa

$$\sum \delta\overline{M} \frac{M}{EI} \Delta S + H_A \sum \delta\overline{M} \frac{\overline{M}}{EI} \Delta S = 0 \tag{33.3}$$

9. Da E e ΔS sono costanti e, per la prima analisi, il momento dell'inerzia è costante, l'espressione finale per H_A is

$$H_A = -\frac{\sum M \delta\overline{M}}{\sum \delta\overline{M}\overline{M}} \tag{33.4}$$

Tutti i calcoli necessari per la prima valutazione H_A sono indicati nella tabella 2.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Segmento	(2) x (ft)	(3) $y = \delta\overline{M}$ (ft · k)	(4) Shear to destra (k)	(5) Δx (ft)	(6) M incremento (ft · k)	(7) M semplice raggio di raggi (ft· k)	(8) $M\delta\overline{M}$	(9) $\delta\overline{MM}$
A	0.0	0.0	245.650					
1	4.275	3.29	221.085	4.275	1,050	1,050	3,500	10.9
2	13.149	9.44	196.520	8.874	1,962	3,010	28,400	89.2
3	22.416	14.98	171.955	9.267	1,821	4,830	72,400	224.4
4	32.034	19.88	147.390	9.618	1,654	6,490	129,100	395.4
5	41.960	24.13	122.825	9.926	1,463	7,950	191,800	582.2
6	52.149	27.69	98.260	10.189	1,251	9,200	254,800	767.0
7	62.557	30.57	73.695	10.408	1,023	10,220	312,400	934.4
8	73.134	32.73	49.130	10.577	779	11,000	360,000	1,071.4
9	83.831	34.18	24.565	10.697	526	11,530	394,100	1,168.4
10	94.601	34.91	0.000	10.770	265	11,790	411,600	1,218.6
Corona	100.00	35.00	___	5.399	0	11,790		
Σ							2,158,100	6,461.9

Tabella 2

resa

$$H_A = -\frac{2\sum M\delta\overline{M}}{2\delta\overline{MM}} = -\frac{2 \times 2,158,100}{2 \times 6461.9} = -333.97\text{k} \tag{33.5}$$

10. I momenti nei centri dei vari segmenti della costola, utilizzando i valore approssimativo appena determinato per H_A, sono calcolati nella tabella 3, dove un momento è considerato positivo se tende per causare compressione sulla superficie superiore della costola.

Segmento	y (ft)	M semplice raggio di raggi (ft · k)	$H_A y$ (ft · k)	Totale M a segmento (ft · k)
A	0			
1	3.29	1,050	–1,100	–50
2	9.44	3,010	–3,150	–140
3	14.98	4,830	–5,000	–170
4	19.88	6,490	–6,640	–150
5	24.13	7,950	–8,060	–110
6	27.69	9,200	–9,250	–50
7	30.57	10,220	–10,210	+10
8	32.73	11,000	–10,930	+70
9	34.18	11,530	–11,420	+110
10	34.19	11,790	–11,660	+130
Corona	35.00	11,790	–11,690	+100

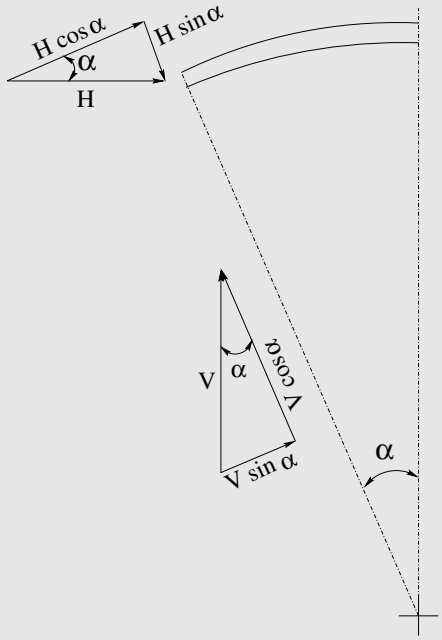
Tabella 3

11. La spinta N, normale alla sezione trasversale al centro di ogni segmento, deve essere calcolato prima che i requisiti di sezione possono essere determinati. Per quanto riguarda l'interesse, i vari valori di S, la cinghia totale sulla croce sezione, sarà anche calcolato per il centro di ogni segmento.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

12. N e S sono ottenuti combinando componenti di H e la verticale shear V al centro di ogni segmento, una combinazione che si mostra sotto



Da questa figura è evidente che

$$S = V \cos\alpha - H \sin\alpha$$
$$N = V \sin\alpha + G \cos\alpha$$

13. Valori di S e N sono calcolati in seguito, tabella 4 . I valori of S sono inclusi a sostegno della dichiarazione precedentemente fatta all'effetto che le forze di taglio sono piccole nella solita costola dell'arco.

Segmento	V (k)	V cos α	$-H$ sin α	$= S$ (k)	V sin α	$+H$ cos α	$= N$ (k)
A	245.6	192	-208	= -16	153	+ 261	= 414
1	221.1	177	-199	= -22	132	+268	= 400
2	196.5	165	-181	= -16	106	+281	= 387
3	172.0	150	-162	= -12	83	+292	= 375
4	147.4	133	-142	= -9	62	+303	= 365
5	122.8	114	-121	= -7	44	+311	= 355
6	98.3	94	-100	= -6	29	+319	= 348
7	73.7	72	-78	= -6	17	+325	= 342
8	49.1	48	-56	= -8	8	+329	= 337
9	24.6	244	-34	= -10	2	+332	= 334
10	0.0	0	-11	= -11	0	+334	= 334
Corona						+334	= 334

Tabella 4

14. Ispezione dei valori per il momento M nella tabella 3 e per la spinta N nella tabella 4 indicherà che il segmento 3 è critica nella regione del momento negativo e segmento 10 nella regione di momento positivo. Le sezioni necessarie per la costola, ai centri di questi due segmenti, devono essere determinati in conformità con le specifiche dell'americano Istituto di costruzione d'acciaio prima della tabella 5 può essere completato.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

15. Le flange sono 12 in. × 1 in., e lo stress per la piegatura ammissibile è F_B= 20 k/in^2. Lo spessore del web è $\frac{3}{4}$ in., e stress assiale ammissibile[a] is F_A=17,000-0.485 L/r.

Segmento	(2) Totale profondità (in.)	(3) Area (in^2)	(4) I (in^4)	(5) M (ft · k)	(6) Assilico spinta N (k)	(7) $f_a = \frac{N}{A}$ (k/in)^2)	(8) $f_b = \frac{Mc}{I}$ (k/in)^2)	(9) Consentibile F_a (k/in)^2)	(10) $\frac{f_a}{F_a}$	+ (11) $\frac{f_b}{F_b}$	= (12) Decimale of capacità di
A	23.00	39.75	3483		414	10.4		15.88	0.66		0.66
1	23.00	39.75	3483	50	400	10.1	2.0	15.88	0.63	0.10	0.73
2	23.00	39.75	3483	140	387	9.7	5.9	15.88	0.61	0.28	0.89
3	23.00	39.75	3483	170	375	9.4	6.8	15.88	0.60	0.34	0.94
4	22.07	39.05	3172	150	365	9.3	6.3	15.90	0.59	0.32	0.91
5	21.13	38.35	2865	110	355	9.2	4.9	15.92	0.58	0.24	0.82
6	20.20	37.65	2585	50	348	9.2	2.3	15.94	0.58	0.11	0.70
7	19.27	36.95	2329	10	342	9.3	0.5	15.96	0.58	0.02	0.61
8	18.32	36.24	2071	70	337	9.3	3.7	15.97	0.58	0.19	0.77
9	17.40	35.55	1838	110	334	9.4	6.3	15.99	0.59	0.31	0.90
10	16.47	34.85	1631	130	334	9.6	7.9	16.01	0.60	0.40	1.00
Corona	16.00	34.50	1527	100	334	9.7	6.3	16.03	0.60	0.32	0.92

Tabella 5

16. Spessore della flangia e delle targhe web e la larghezza dei piatti di rete sono questioni di giudizio. La profondità totale determinata per il centro del segmento 3 è utilizzata dal centro di questo segmento fino alla fine della costola. La profondità determinata per il centro segmento 10 è arbitrariamente usato per la profondità della costola alla corona. La profondità totale della costola dal centro del segmento 3 alla corona è fatta a variare linerarly. Le adeguatezze delle sezioni così determinate per i centri Diversi segmenti sono controllati nella tabella 5.
17. È necessario ricomputere il valore del H_A perché la costola ora ha momento di inerzia. Equazione 33.4 deve essere modificato per includere il I di ogni segmento e ora è scritto come

$$H_A = -\frac{\sum M\delta\overline{M}/I}{\sum \delta\overline{M}\overline{M}/I} \tag{33.6}$$

18. Il valore riveduto per H_A è facilmente determinato come mostrato in Tabella 6. Si noti che i valori nella colonna (2) sono trovati dividendo i valori di $M\delta\overline{M}$ per i segmenti corrispondenti nella colonna (8) di Tabella 2 per il totale I per ogni segmento come mostrato in Tabella 5. I valori nella colonna (3) della tabella 6 sono trovati in modo simile dai valori nella colonna (9) di Tabella 2. I semplici momenti di fascio nella colonna (5) della tabella 6 sono prelevati direttamente dalla colonna (7) della tabella 2.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

(1) Segmento	(2) $\frac{Mn}{I}$	(3) $\frac{m^2}{I}$	(4) Rivisto $H_A y$ (ft · k)	(5) M semplice raggio di raggi (ft · k)	(6) Rivisto momento (ft · k)
1	1.00	0.0031	1,100	1,050	-50
2	8.16	0.0256	3,160	3,010	-150
3	20.79	0.0644	5,020	4,830	-190
4	40.67	0.1247	6,660	6,490	-170
5	66.95	0.2032	8,080	7,950	-130
6	98.57	0.2967	9,270	9,200	-70
7	134.13	0.4012	10,240	10,220	-20
8	173.82	0.5174	10,960	11,000	+40
9	214.41	0.6357	11,450	11,530	+80
10	252.35	0.7472	11,690	11,790	+100
Corona			11,720	11,790	+70
$\sum$	1010.85	3.0192			

Tabella 6

19. Così la revisione H_A is

$$H_A = -\frac{2\sum M\delta\overline{M}/I}{2\sum \delta\overline{MM}/I} = -frac2 \times 1,010.852 \times 3.0192 = -334.81k \qquad (33.7)$$

20. I valori riveduti per la spinta assiale N ai centri dei vari segmenti sono calcolati nella tabella 7.

Segmento	$V \sin \alpha$	+	$H \cos \alpha$	=	Rivisto N (k)
A	153		262		415
1	132		269		401
2	106		282		388
3	83		293		376
4	62		303		365
5	44		312		356
6	29		320		349
7	17		326		343
8	8		330		338
9	2		333		335
10	0		335		335
Corona			335		335

Tabella 7

21. Le sezioni precedentemente progettate nei centri dei segmenti sono controllate per adeguatezza nella tabella 8. Da questa tabella risulta che tutto La Commissione ha proposto di adottare una decisione che consenta di applicare la

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

procedura di codecisione. fino a quando le sollecitazioni secondarie causate dalla deflezione della costola sono indagati.

Segmento	$\frac{N}{A}$ (k/in)^2)	$\frac{M_c}{I}$ (k/in)^2)	$\frac{N/A}{F_A}$	+	$\frac{M_c/I}{F_B}$	=	Decimale of capacità di
A	10.4		0.66				0.66
1	10.1	2.0	0.64		0.11		0.75
2	9.8	6.0	0.62		0.30		0.92
3	9.5	7.6	0.60		0.38		0.98
4	9.4	7.1	0.59		0.36		0.95
5	9.3	5.7	0.58		0.29		0.87
6	9,3	3.3	0.58		0.17		0.75
7	9.3	1.0	0.58		0.05		0.63
8	9.3	2.1	0.58		0.11		0.69
9	9.4	4.5	0.59		0.23		0.82
10	9.6	6.1	0.60		0.31		0.91
Corona	9.7	4.4	0.61		0.23		0.84

Tabella 8

[a] In questa equazione il valore di L è 10.798, dal momento che le costole sono successivamente braciate nei punti di inquadramento del purlin.

33.2 Ex 33.2: Cambiamento di temperatura in un arco

La sezione seguente è riprodotta da Kinney, 1957 Indeterminate Structural Analysis.

Determinare gli effetti di accorciamento delle costole e variazioni della temperatura nella costa dell'arco del precedente esempio.°F.

1. Per determinare gli effetti di accorciamento della costola è necessario prima trovare lo spostamento orizzontale della fine A che si tradurrà se le ceppi assiali elastiche, che si verificano nell'arco reale caricato, vengono introdotti nella costola mentre la fine A è su rulli. È quindi necessario trovare lo spostamento orizzontale di fine A, causata da una forza orizzontale di 1 k che agisce A, considerando sia flessorale che ceppi assiali nella costola. Lo spostamento orizzontale di A, derivante dalla costola accorciamento causato dai carichi reali, è dato da

$$\sum \frac{N\delta\overline{N}}{AE}\Delta L \tag{33.8}$$

dove N è la spinta assiale presa dalla tabella 7, $\delta\overline{N}$ è la spinta assiale causata da una forza

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

orizzontale fittizio 1 k che agisce A e pari a cos α nella tabella 1, ΔL è la lunghezza del ogni segmento, e A è l'area di sezione destra.

2. Lo spostamento orizzontale di A, derivante dall'ammortizzazione della costola causata da una forza orizzontale di 1 k che agisce A, è dato da

$$\sum \frac{\delta \overline{N}}{AE} \overline{N} \Delta L \tag{33.9}$$

3. I calcoli necessari per valutare queste due deflettori A sono indicati nella tabella 9.

Segmento	N (k)	$\delta\overline{N} = \cos\alpha$ (k)	A (in^2)	$\frac{N\delta\overline{N}}{A}$	$\frac{\delta\overline{N}^2}{A}$
1	401	0.8023	39.75	8.07	0.0162
2	388	0.8406	39.75	8.21	0.0178
3	376	0.8752	39.75	8.30	0.0193
4	365	0.9057	39.05	8.49	0.0210
5	356	0.9322	38.35	8.68	0.0227
6	349	0.9544	37.65	8.86	0.0242
7	343	0.9724	36.95	9.04	0.0256
8	338	0.9859	36.24	9.22	0.0268
9	335	0.9949	35.55	9.41	0.0286
10	335	0.9994	34.85	9.60	0.0278
Σ				87.88	0.2300

Tabella 9

4. Lo spostamento orizzontale di A, derivante dall'ammortizzazione della costola causata da il carico reale, è

$$\sum \delta\overline{N} \frac{N}{AE} \Delta L = \frac{2 \times 87.88 \times 10.798 \times 12}{30,000} = 0.760 \text{ in} \tag{33.10}$$

5. Ciò derivante dall'ammortizzazione della costola causata da un carico orizzontale di 1 k A is

$$\sum \delta\overline{N} \frac{\overline{N}}{AE} \Delta L = \frac{2 \times 0.2300 \times 10.798 \times 12}{30,000} = 0.002 \text{ in} \tag{33.11}$$

6. Il valore relativo dello spostamento orizzontale A, derivante dal sforzo flessorale causato da una forza orizzontale di 1 k A, è stato determinato in precedenza nella colonna (3) della tabella 6. Il valore assoluto di questo spostamento è

$$\frac{2 \times 3.019 \times 10.798 \times 1728 \times 1728}{30,000} = 3.755 \text{ in} \ . \tag{33.12}$$

7. Il valore totale per lo spostamento A a causa sia di flessione che assiale ceppi derivanti da una forza orizzontale 1 k A è dunque

$$3.755 + 0.002 = 3.757 \text{ in} \tag{33.13}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

8. La riduzione H_A a causa di accorciamento della costola è dato da

$$\frac{0.760}{3.757} = 0.20 \text{ k} \tag{33.14}$$

9. Una riduzione aggiuntiva H_A si tradurrà da qualsiasi goccia nella temperatura di la costola sotto quella temperatura a cui l'arco è eretto. perché un ulteriore accorciamento della costola si tradurrà. La diminuzione della lunghezza della proiezione orizzontale della costola risultante da una caduta di temperatura of 100°F sarà

$$\delta L = 0.0000065 \times 100 \times 200 \times 12 = 1.56 \text{ in} \tag{33.15}$$

10. La diminuzione risultante nel H_A sarà

$$\frac{1.56}{3.757} = 0.42 \text{ k} \tag{33.16}$$

11. La diminuzione totale H_A a causa sia di accorciamento costola e calo della temperatura è

$$0.20 + 0.42 = 0.62 \text{ k} \tag{33.17}$$

Questo avrà l'effetto di aumentare il momento vicino al centro della campata.

12. Ispezione della colonna (6) nella tabella (8) indica che il segmento 10 dovrebbe essere controllato per possibile sovrapprezzo a seguito di questo aumento. L'aumento del momento al segmento 10 sarà dato da

$$\Delta M = \Delta H_A(y\text{for segment}10) = 0.62 \times 34.91 = 21.6 \text{ ft} \cdot \text{k} \tag{33.18}$$

13. Il momento di 100 ft·k, come precedentemente determinato per il segmento 10, è esatto solo nei primi due posti, e quindi il momento totale revisionato per segmento 10 sarà

$$100 + 20 = 120 \text{ ft} \cdot \text{k} \tag{33.19}$$

14. La spinta di 335 k, precedentemente determinata per il segmento 10, è accurata a tre i luoghi. Il cambiamento nel H_A a causa di accorciamento della costola e il cambiamento di temperatura deve quindi essere arrotondato a 1 k per determinare la spinta corretta nel segmento 10. Questa spinta corretta sarà

$$335 - 1 = 334 \text{ k} \tag{33.20}$$

15. Lo stress estremo della fibra è

$$f = \frac{M_c}{I} = \frac{120 \times 8.23 \times 12}{1631} = 7.25 \text{ k/in}^2 \tag{33.21}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

16. La sezione al segmento 10 è controllata, come indicato nella tabella (8), by

$$\frac{N/A}{F_A} + \frac{M_c/I}{F_B} = \frac{334/34.85}{16.01} + \frac{7.25}{20} = 0.60 + 0.36 = 0.96 \tag{33.22}$$

    e ovviamente la sezione al segmento 10 è adeguata.
17. Non si è tenuto conto degli effetti di un aumento della temperatura, da quando tale un aumento può verificarsi solo durante i mesi estivi quando non è possibile caricare neve. Di conseguenza, questa fase del problema non ha alcun significato pratico.
18. Il metodo di analisi appena dimostrato si applica ugualmente bene ad un rinforzato cemento o un arco a due cerniere di legno. Come già detto, tuttavia molto pochi archi in cemento armato sono costruiti con due cerniere.
19. Di particolare attenzione è il fatto che, oltre alla tensione assiale e calo di temperatura, il restringimento del cemento in un calcestruzzo armato costola causerà anche l'ammortizzazione delle coste. Il coefficiente di restringimento dovrebbe essere determinato per il mix da utilizzare e applicato nell'analisi nello stesso modo generale di quanto dimostrato sopra per il coefficiente di temperatura.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 34

Piatti

Abstract

Questo capitolo sposta il focus di questo libro da elementi unidimensionali a piastre e deriva le corrispondenti equazioni differenziali. Concentrandomi sulla teoria, mi scopo di aiutare il lettore ad apprezzare sia la complessità geometrica delle piastre che la bellezza e la semplicità delle loro equazioni differenziali. Questo capitolo è una lettura essenziale per chiunque cerchi di modellare le piastre utilizzando il metodo degli elementi finiti, come spiega l'interazione delle forze interne complesse coinvolte.

34.1 Teoria di piatti spessi: reissner-mindlin 1279
34.1.1 Relazioni con i paesi in via di sviluppo 1279
34.1.2 Relazioni costitutive 1281
34.1.3 Equilibrio 1282
34.2 Teoria delle piastre sottili: Kirchhoff 1283
34.2.1 Relazioni fondamentali . . . 1284
34.2.2 Equazione differenziale . . . 1285
34.2.3 Tensioni 1286
34.2.4 Piastre circolari 1289
34.2.5 Formulazione variazionale . 1294
34.3 Riepilogo 1295

Per il contesto storico, consultare §10.3.2.5

La sezione seguente è riprodotta da Pilkey e Wunderlich, 1994 Mechanics of Structures, Variational and Computational Methods. L'assistenza Georg, R., 2014 è riconoscente.

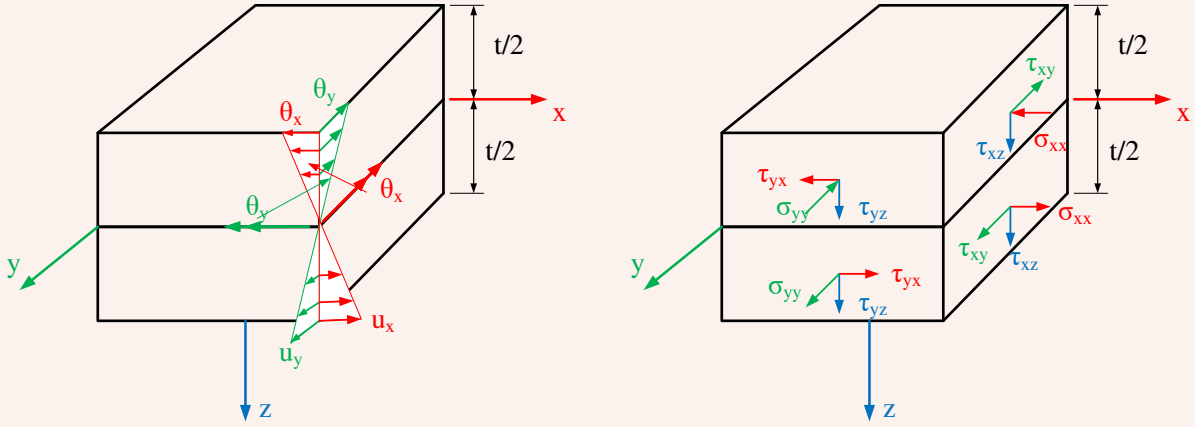
COPIA DI REVISIONE

34.1 Teoria di piatti spessi: reissner-mindlin

1 Cominciamo con la soluzione generale di una piastra spessa in cui sono presenti deformazione della tosapa.

34.1.1 Relazioni con i paesi in via di sviluppo

2 Da Fig. 34.1a abbiamo cinque spostamenti u, v, w, θ_{xx} e θ_{yy}. Tuttavia, due dei tre spostamenti, u, v può essere espresso in termini di θ_{xx} e θ_{yy} che sono le rotazioni della superficie media del piatto, con il terzo spostamento essendo quello trasversale w.



(a) Sviluppi

(b) Stresses

Figura 34.1: Slocazioni e sollecitazioni in un piatto

3 We will use a notation consistent with the traditional one adopted for plate bending, rather than one consistent with the coordinate directions as used in finite element. Since we are focusing on thin plates, the middle surface will be assumed to remain without strain, and the plane sections remain plane. Based on the plane section remaining plane assumption, we have,

$$\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \theta_{xx} \\ \theta_{yy} \\ w \end{array} \right\} \tag{34.1}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

4 Tuttavia, dalla meccanica del materiale, conosciamo la relazione $\varepsilon = Lu$ or

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

5 Since w corresponds to the transverse deflection of the middle surface, and does not vary with z, then $\varepsilon_{zz} = 0$. Substituting Eq. 34.1, we obtain

$$\left\{\begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \hline \gamma_{xy} \\ \hline \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} z\theta_{xx,x} \\ z\theta_{yy,y} \\ 0 \\ \hline z(\theta_{xx,y} + \theta_{yy,x}) \\ \hline (\theta_{xx} + w_{,x}) \\ (\theta_{yy} + w_{,y}) \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} z\kappa_{xx} \\ z\kappa_{yy} \\ 0 \\ \hline 2z\kappa_{xy} \\ \hline \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array}\right\} \tag{34.2}$$

Si noti che questa equazione assume che lo spostamento w è piccolo rispetto allo spessore della piastra, e la rotazione è piccola; perché la rotazione è piccola, il suo quadrato è trascurabile rispetto all'unità, e quindi la curvatura

$$\kappa = \frac{\frac{\partial \theta}{\partial x}}{(1+\theta^2)^{3/2}} \approx \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

is equal to the rate of change of rotation.

6 Da qui, relazione cinematica per lo spostamento trasversale di una piastra è

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \hline 2\kappa_{xy} \\ \hline \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\kappa}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \hline 1 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial}{\partial y} \end{array}\right]}_{\mathbf{L}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} \theta_{xx} \\ \theta_{yy} \\ \hline w \end{array}\right\}}_{\mathbf{u}}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

34.1.2 Relazioni costitutive

7 Per il continuum tridimensionale, la relazione tra sforzo e stress è

$$\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \hline \gamma_{xy}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{array}\right\} = \frac{1}{E}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\nu & -\nu & & & \\ -\nu & 1 & -\nu & & \mathbf{0} & \\ -\nu & -\nu & 1 & & & \\ \hline & & & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ & \mathbf{0} & & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ & & & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \hline \tau_{xy}\\ \tau_{xz}\\ \tau_{yz}\end{array}\right\}$$

8 Tuttavia da Eq. 34.2, $\varepsilon_{zz} = 0$. Therefore we can neglect σ_{zz} which is much smaller than the other stresses. Inverting the previous equation yields

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{xy}\\ \hline \tau_{xz}\\ \tau_{yz}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\frac{E}{1-\nu^2}\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & \nu & 0 & & \\ \nu & 1 & 0 & & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & & \\ \hline & & & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ & \mathbf{0} & & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{array}\right]}_{\mathbf{D}}\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\\ \hline \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{34.3}$$

Note that the shear modulus is $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

9 Ora cerchiamo di scrivere i momenti in termini delle curve, Fig. 34.2.

10 Introducendo gli stress di Eq. 34.3 in Eq. 34.5, e usando Eq. 34.2 noi abbiamo tratto il primo termine

$$\begin{aligned} M_{xx} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} z \mathrm{d}z = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) z \mathrm{d}z = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \frac{E}{1-\nu^2}(z\kappa_{xx} + \nu z\kappa_{yy}) z \mathrm{d}z \\ &= \frac{E}{1-\nu^2}(\kappa_{xx} + \nu\kappa_{yy}) \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 \mathrm{d}z = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_{xx} + \nu\kappa_{yy}) \end{aligned}$$

Following a similar procedure for the other two terms, we obtain the following moment-curvature relation

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\end{array}\right\}}_{\mathbf{M}} = \underbrace{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\left[\begin{array}{ccc} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{array}\right]}_{\mathbf{D}}\underbrace{\left\{\begin{array}{c} \kappa_{xx}\\ \kappa_{yy}\\ 2\kappa_{xy}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\kappa}} \tag{34.4}$$

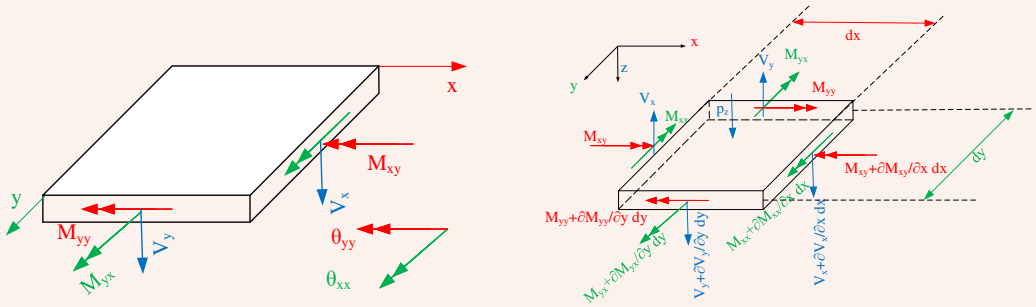
The $\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ term is referred to as the *flexural rigidity* and is analogous to the flexural stiffness EI of a beam (if the plate has unit width, and $\nu = 0$, then $EI = Et^3/12$).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

34.1.3 Equilibrio

11 The positive stress resultants are shown in Fig. 34.2a, while the free body diagram of an infinitesimal element is shown in Fig. 34.2b



(a) Positive Moments and Rotations (b) Free body diagram of a thin plate

Figura 34.2: Internal forces

12 The resultants, per unit width, are given by

$$
\begin{aligned}
\text{Membrane Force} \quad \mathbf{N} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma \mathrm{d}z \quad \begin{cases} N_{xx} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} \mathrm{d}z \\ N_{yy} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{yy} \mathrm{d}z \\ N_{xy} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xy} \mathrm{d}z \end{cases} \\
\text{Bending Moments} \quad \mathbf{M} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma z \mathrm{d}z \quad \begin{cases} M_{xx} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} z \mathrm{d}z \\ M_{yy} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{yy} z \mathrm{d}z \\ M_{xy} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xy} z \mathrm{d}z \end{cases} \\
\text{Transverse Shear Forces} \quad \mathbf{V} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau \mathrm{d}z \quad \begin{cases} V_x &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xz} \mathrm{d}z \\ V_y &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz} \mathrm{d}z \end{cases}
\end{aligned}
\tag{34.5}
$$

13 Note that in plate theory, we ignore the effect of the *membrane forces*. Those in turn will be accounted for in shells.

COPIA DI REVISIONE

14 The equation of equilibrium is derived by considering an infinitesimal element $tdxdy$ subjected to an applied transverse load p_z. We would have to consider three equations of equilibrium, Fig. 34.2b:

Summation of Forces in the z direction

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial V_y}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + p_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

or

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + p_z = 0$$

Summation of Moments about the x axis

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - V_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

or

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - V_y = 0$$

Summation of Moments about the y axis

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - V_x = 0$$

15 Since $M_{xy} = M_{yx}$, those equations can be expressed in matrix form as

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|cc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{array}\right]}_{\mathbf{L}^T} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ \hline V_x \\ V_y \end{array}\right\}}_{\mathbf{M}} + \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ p_z \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} \tag{34.6}$$

Note that the left matrix corresponds to L^T where the 1 term has been substituted by -1

34.2 Teoria delle piastre sottili: Kirchhoff

16 In the following section the derived equations from our fundamental relations will be applied to the plate theory of *Kirchhoff*.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

17 This theory ignores transverse shear deformations (thus right angles in the cross section are preserved). This formulation is analogous to the conventional Euler-Bernoulli beam theory[1].

34.2.0.1 Ex 34.1: Idealizzazione di piastra sottile e spessa

Two square concrete plates have the same side length $a = 1.0$ m, Young's modulus $E = 25$ GPa, and Poisson's ratio $\nu = 0.20$. The first plate has thickness $t = 20$ mm, while the second has thickness $t = 150$ mm. Determine whether a Kirchhoff thin-plate model is likely to be adequate in each case.

A useful first diagnostic is the span-to-thickness ratio

$$\lambda = \frac{a}{t}.$$

For the first plate,

$$\lambda_1 = \frac{1.0}{0.020} = 50.$$

For the second plate,

$$\lambda_2 = \frac{1.0}{0.150} = 6.67.$$

Thus,

$$\lambda_1 = 50, \qquad \boxed{\lambda_2 = 6.67}.$$

The first plate is slender, and the Kirchhoff assumption that transverse shear deformation is negligible is generally appropriate. The second plate is relatively thick; transverse shear deformation may contribute significantly to the total deflection, and a Reissner-Mindlin plate model is more appropriate.

This example does not replace a detailed convergence or validation study, but it shows why the distinction between Kirchhoff and Reissner-Mindlin plate theories is not merely formal. It is controlled in large part by the geometric slenderness of the plate.

34.2.1 Relazioni fondamentali

Kinematic Relations : Since shear deformations are neglected, $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ and thus the last two relation of Eq. 34.2 reduce to

$$\theta_{xx} = -w_{,x} \quad \text{and} \quad \theta_{yy} = -w_{,y}$$

and the first three strains become

$$\varepsilon_{xx} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \qquad \varepsilon_{yy} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \qquad \gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \tag{34.7}$$

[1] Shear deformation are accounted for in the *Mindlin* formulation.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

or

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\kappa_{xx}\\ \kappa_{yy}\\ 2\kappa_{xy}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\kappa}} = \underbrace{\left\{\begin{array}{c}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2}\\ -2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\end{array}\right\}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\{\, w \,\}}_{\mathbf{u}} \tag{34.8}$$

[18] The last term in the preceding equation corresponds to the *twist* with respect to the x and y axes of the middle surface.

Constitutive Relation : The constitutive relation of Eq. 34.4 still applies

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\end{array}\right\}}_{\mathbf{M}} = \underbrace{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\left[\begin{array}{ccc}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{array}\right]}_{\mathbf{D}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}\kappa_{xx}\\ \kappa_{yy}\\ 2\kappa_{xy}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\kappa}} \tag{34.9}$$

Equilibrium : The equilibrium equation, as expressed by Eq. 34.6 is also still valid. If we were to substitute the second and third relations into the first one, we would obtain the following equilibrium relation in terms of the moments

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + p_z = 0 \tag{34.10}$$

(Note the similarity with the corresponding equations for beam flexure $\frac{d^2M}{\mathrm{d}x^2} - V_x = 0$)

34.2.2 Equazione differenziale

[18] If we combine the kinematic and constitutive relation equations, 34.8 and 34.9, we obtain

$$\left\{\begin{array}{c}M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\end{array}\right\} = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\left[\begin{array}{c}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\\ (1-\nu)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\end{array}\right] \{\, w \,\} \tag{34.11}$$

[19] Finally, we substitute the equilibrium equation, 34.10, into the previous one,

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z}{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}}$$

or

$$\nabla^4 w = \frac{p_z}{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}}$$

Note the similarity with the corresponding equation for beams

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = p_z \quad \text{or} \quad \frac{\partial^4}{\partial x^4} = \frac{p_z}{EI}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

34.2.3 Tensioni

20 Combining the stress-strain relation of Eq. 34.3, with Eq. 34.7, and 34.11, the stresses can be expressed in terms of the moments

$$\sigma_{xx} = \frac{M_{xx}}{\frac{t^3}{12}} z; \qquad \sigma_{yy} = \frac{M_{yy}}{\frac{t^3}{12}} z; \qquad \tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{\frac{t^3}{12}} z$$

Again we note the analogy with the flexural stress expression in beams $\sigma = \frac{My}{I}$. Using the three dimensional equilibrium equation:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0
\end{aligned}$$

integrating the first equation yields

$$\begin{aligned}
\tau_{xz} &= -\int_{t/2}^{z} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \mathrm{d}z = \int_{z}^{t/2} \frac{12z}{t^3} \left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \mathrm{d}z \\
&= \frac{12}{t^3} \int_{z}^{t/2} z V_x \mathrm{d}z
\end{aligned}$$

21 Finally

$$\tau_{xz} = \frac{3V_x}{2t} \left[1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right] \quad \text{and} \quad \tau_{yz} = \frac{3V_y}{2t} \left[1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right]$$

22 Thus, the shear stress distribution across the plate thickness is parabolic (though they tend to be very small compared to τ_{xy}) and the peak shear stresses occur at the middle surface ($z = 0$) where

$$\tau_{xz}|_{max} = \frac{3}{2} \frac{V_x}{t} \quad \text{and} \quad \tau_{yz}|_{max} = \frac{3}{2} \frac{V_y}{t}$$

23 We note that the flexural stresses vary linearly from the middle surface; shear stresses τ_{xy} produced by bending also vary linearly from the middle surface; the shear stresses τ_{yz} and τxz are present and required for equilibrium, but their corresponding strains are assumed to be negligible; σ_{zz} varies cubically, Fig. 34.3.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

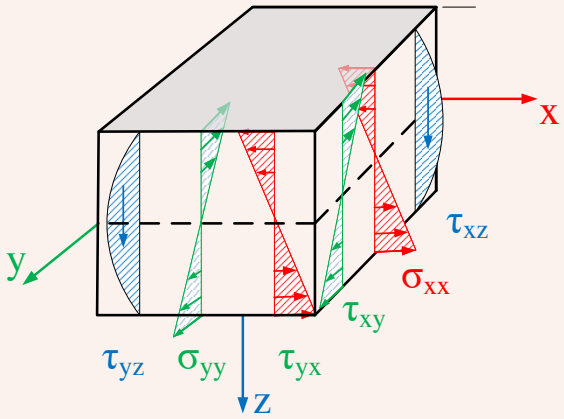


Figura 34.3: Stress distribution

34.2.3.1 Ex 34.2: Calcolo delle tensioni dai momenti risultanti della piastra

At a point in a plate, the bending and twisting moment resultants are

$$M_{xx} = 1.20 \text{ kN m/m}, \qquad M_{yy} = 0.80 \text{ kN m/m}, \qquad M_{xy} = 0.30 \text{ kN m/m}.$$

The plate thickness is $t = 25$ mm. Estimate the extreme-fiber stresses associated with these resultants.

For a linear stress distribution through the thickness, the extreme-fiber normal stresses associated with M_{xx} and M_{yy} are

$$\sigma_{xx} = \frac{6M_{xx}}{t^2}, \qquad \sigma_{yy} = \frac{6M_{yy}}{t^2}.$$

Similarly, the twisting moment resultant gives the corresponding extreme-fiber shear stress

$$\tau_{xy} = \frac{6M_{xy}}{t^2}.$$

Using $t = 0.025$ m,

$$\sigma_{xx} = \frac{6(1200)}{(0.025)^2} = 11.52 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 11.5 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{yy} = \frac{6(800)}{(0.025)^2} = 7.68 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 7.68 \text{ MPa},$$

and

$$\tau_{xy} = \frac{6(300)}{(0.025)^2} = 2.88 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 2.88 \text{ MPa}.$$

Therefore,

$$\sigma_{xx} = 11.5 \text{ MPa}, \qquad \sigma_{yy} = 7.68 \text{ MPa}, \qquad \tau_{xy} = 2.88 \text{ MPa}.$$

This example emphasizes that the plate solution gives stress resultants. The actual stresses are recovered only after using the assumed through-thickness stress distribution.

COPIA DI REVISIONE

34.2.3.2 Ex 34.3: Piastra quadrata semplicemente appoggiata sotto pressione uniforme

A simply supported square steel plate has side length $a = 2.0$ m and thickness $t = 20$ mm. The plate is subjected to a uniform transverse pressure $q = 5$ kPa. Let

$$E = 200 \text{ GPa}, \qquad \nu = 0.30.$$

Estimate the maximum deflection and the order of magnitude of the maximum bending stress.

First, the plate rigidity is

$$K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{(200\times10^9)(0.020)^3}{12(1-0.30^2)} = 1.465\times10^5 \text{ N m}.$$

For a simply supported square plate under a uniform load, a standard tabulated coefficient (for $\nu = 0.30$) gives

$$w_{\max} = 0.00406\frac{qa^4}{K}.$$

With $q = 5000$ N/m^2 and $a = 2.0$ m,

$$w_{\max} = 0.00406\frac{(5000)(2.0)^4}{1.465\times10^5} = 2.22\times10^{-3} \text{ m}.substituting$$

Thus,

$$w_{\max} = 2.22 \text{ mm}.$$

As an estimate of the maximum moment per unit width, use the corresponding tabulated coefficient (for $\nu = 0.30$)

$$M_{\max} \simeq 0.0479qa^2.$$

Hence,

$$M_{\max} \simeq 0.0479(5000)(2.0)^2 = 958 \text{ N m/m}.$$

The corresponding extreme-fiber bending stress is approximately

$$\sigma_{\max} \simeq \frac{6M_{\max}}{t^2} = \frac{6(958)}{(0.020)^2} = 14.4\times10^6 \text{ N/m}^2.$$

Therefore,

$$\sigma_{\max} \simeq 14.4 \text{ MPa}.$$

The example illustrates the two principal outputs of a plate solution: a displacement field, represented here by $w_{\max}$, and moment resultants, from which bending stresses can be recovered.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

34.2.3.3 Ex 34.4: Sensibilità della freccia della piastra allo spessore

Consider again the simply supported square plate of side length $a = 2.0$ m subjected to a uniform pressure $q = 5$ kPa. Suppose the thickness is increased from $t_1 = 20$ mm to $t_2 = 30$ mm, while the material and loading remain unchanged. Estimate the reduction in maximum deflection.

For a thin isotropic plate,

$$K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Thus, if E and ν are unchanged,

$$K \propto t^3.$$

Because deflection varies inversely with plate rigidity,

$$w \propto \frac{1}{K} \propto \frac{1}{t^3}.$$

Therefore,

$$\frac{w_2}{w_1} = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^3 = \left(\frac{20}{30}\right)^3 = 0.296.$$

If the 20 mm plate has maximum deflection

$$w_1 = 2.22 \text{ mm},$$

then the 30 mm plate has maximum deflection

$$w_2 = 0.296(2.22) = 0.657 \text{ mm}.$$

Thus,

$$w_2 \simeq 0.66 \text{ mm}.$$

A 50 percent increase in thickness has reduced the deflection to about 30 percent of its previous value. This is one of the most important practical consequences of the cubic dependence of K on t.

34.2.4 Piastre circolari

24 A particularly important special case of Kirchhoff plate theory is the *circular plate*. Circular plates occur in tank covers, diaphragms, slabs around circular openings, foundations, manhole covers, and pressure-vessel components. They are also valuable pedagogically: under axisymmetric loading and boundary conditions the two-dimensional biharmonic equation derived in Eq. 34.10 collapses to an *ordinary* differential equation in the single radial coordinate, so the solution can be obtained in closed form.

25 Consider a solid circular plate of radius a and constant thickness t. We adopt polar coordinates, with r the radial coordinate and θ the circumferential one. For an axisymmetric problem the transverse deflection depends on r alone,

$$w = w(r),$$

and, since nothing varies with θ, all derivatives with respect to θ vanish. Because w is

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

now a function of one variable only, we use total derivatives in r. The flexural rigidity is unchanged from the rectangular case,

$$K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}.$$

26 **Kinematics.** The two nonzero curvatures of an axisymmetric Kirchhoff plate are the radial and circumferential (hoop) curvatures

$$\kappa_{rr} = -\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2}, \qquad \kappa_{\theta\theta} = -\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}.$$

These are the polar counterparts of κ_{xx} and κ_{yy} in Eq. 34.8, and they carry the same leading negative sign. The radial curvature measures the bending of a radial fibre, exactly as $-\mathrm{d}^2 w/\mathrm{d}x^2$ does in one dimension. The hoop curvature is purely geometric: even a conical deflection with $\mathrm{d}^2 w/\mathrm{d}r^2 = 0$ stretches the circumferential fibres because their radius changes, and the term $-\dfrac{1}{r}\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}r$ captures precisely that effect. The twisting curvature vanishes,

$$\kappa_{r\theta} = 0,$$

because there is no variation with respect to θ.

27 **Constitutive relation.** Specialising the moment–curvature law of Eq. 34.9 to the polar curvatures gives the radial and hoop bending moment resultants per unit length of edge,

$$M_{rr} = K(\kappa_{rr} + \nu\kappa_{\theta\theta}), \qquad M_{\theta\theta} = K(\kappa_{\theta\theta} + \nu\kappa_{rr}),$$

or, in terms of the deflection,

$$M_{rr} = -K\left[\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\nu}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right], \qquad M_{\theta\theta} = -K\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} + \nu\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2}\right]. \tag{34.12}$$

Here M_{rr} is the radial bending moment and $M_{\theta\theta}$ the circumferential, or hoop, moment; they are the polar-coordinate counterparts of M_{xx} and M_{yy} (the per-unit-width resultants of §34.1.3). Note that both moments are generally nonzero even though w depends only on r, because both curvatures are present.

28 **Equilibrium.** Two equilibrium statements are needed. Moment equilibrium of an annular element bounded by the radii r and $r + \mathrm{d}r$ and the rays θ and $\theta + \mathrm{d}\theta$ relates the radial transverse shear resultant V_r to the moments, Fig. 34.4

$$V_r = \frac{\mathrm{d}M_{rr}}{\mathrm{d}r} + \frac{M_{rr} - M_{\theta\theta}}{r}. \tag{34.13}$$

The first term is the direct analogue of $\mathrm{d}M/\mathrm{d}x = V$ in beam theory. The second term, $(M_{rr} - M_{\theta\theta})/r$, has no one-dimensional counterpart: it arises because the two radial faces

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

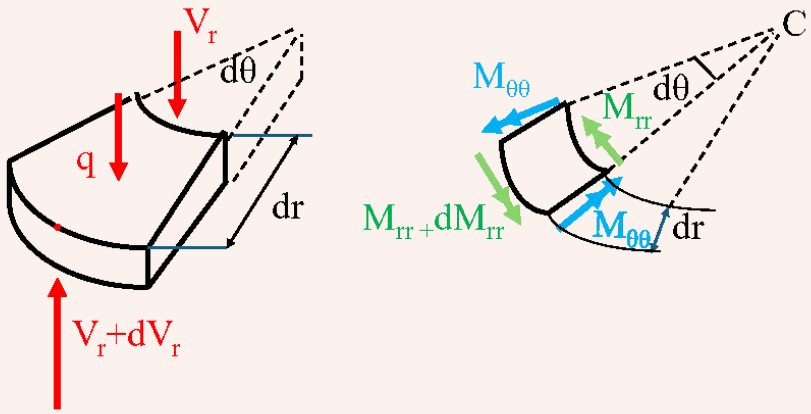


Figura 34.4: Equilibrium of a circular plate infinitesimal element

of the element are not parallel but converge toward the centre, so the hoop moment $M_{\theta\theta}$ acting on them has a net component in the radial-moment balance. Substituting Eq. 34.12 into Eq. 34.13 and simplifying gives the compact form

$$V_r = -K\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right] = -K\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\nabla^2 w\right).$$

Vertical equilibrium of the same element requires the net transverse shear to balance the applied pressure. The shear acts on the inner arc of length $r\,\mathrm{d}\theta$ and the outer arc of length $(r+\mathrm{d}r)\,\mathrm{d}\theta$; their difference is $\mathrm{d}(rV_r)\,\mathrm{d}\theta$, while the load contributes $p_z\, r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$. Dividing through by $r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$,

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(rV_r\right) + p_z = 0.$$

29 **Governing equation.** Combining Eqs. 34.2.4 and 34.2.4 yields the axisymmetric Kirchhoff plate equation

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left\{r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right]\right\} = \frac{p_z}{K},$$

which is simply the biharmonic equation $\nabla^4 w = p_z/K$ of Eq. 34.10 written for an axisymmetric field, where

$$\nabla^2 w = \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}.$$

30 **Boundary conditions.** At the centre of a solid plate, regularity supplies two conditions,

$$\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right|_{r=0} = 0, \qquad V_r(0) = 0.$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

The first is the symmetry of an axisymmetric deflection; the second states that no concentrated force is applied at the centre. At the edge $r = a$ the idealised conditions mirror those of a beam:

Clamped edge: displacement and rotation both prevented,

$$w(a) = 0, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right|_{r=a} = 0.$$

Simply supported edge: displacement prevented, rotation free,

$$w(a) = 0, \qquad M_{rr}(a) = 0.$$

Free edge: neither moment nor transverse shear,

$$M_{rr}(a) = 0, \qquad V_r(a) = 0.$$

31 **Uniform pressure.** For the important case of a uniform transverse pressure $p_z = q =$ const., Eq. 34.2.4 can be integrated directly. The general solution is the sum of the homogeneous solution of $\nabla^4 w = 0$ and a particular solution; for a uniform load,

$$w(r) = \underbrace{C_1 + C_2 r^2}_{\text{regular}} + \underbrace{C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r}_{=0 \text{ by regularity at } r=0} + \frac{q\, r^4}{64K}.$$

The two logarithmic terms produce unbounded deflection, slope, or shear at $r = 0$ and a concentrated central reaction; for a *solid* plate they are therefore discarded, leaving $w = C_1 + C_2 r^2 + q r^4/64K$. (For an annular plate, with a hole at the centre, these terms are retained and fixed by the inner-edge conditions.) The two surviving constants are determined by the edge conditions.

32 *Clamped plate.* Imposing $w'(a) = 0$ on $w' = 2C_2 r + q r^3/16K$ gives $C_2 = -q a^2/32K$, and then $w(a) = 0$ gives $C_1 = q a^4/64K$. Hence

$$w(r) = \frac{q}{64K}\left(a^2 - r^2\right)^2,$$

and the maximum deflection occurs at the centre,

$$w_{\max} = w(0) = \frac{q a^4}{64K}.$$

The corresponding moment resultants follow from Eq. 34.12,

$$M_{rr} = \frac{q}{16}\left[(1+\nu)a^2 - (3+\nu)r^2\right], \qquad M_{\theta\theta} = \frac{q}{16}\left[(1+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2\right].$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

At the centre both moments equal $q(1+\nu)a^2/16$, while at the clamped edge

$$M_{rr}(a) = -\frac{qa^2}{8}.$$

The sign change reflects the transition from sagging bending near the middle of the plate to hogging bending at the restrained boundary, where the largest moment occurs.

33 *Simply supported plate.* Applying $M_{rr}(a) = 0$ and $w(a) = 0$ to the same regular solution gives

$$C_2 = -\frac{qa^2}{32K}\frac{3+\nu}{1+\nu}, \qquad C_1 = \frac{qa^4}{64K}\frac{5+\nu}{1+\nu},$$

so that

$$w(r) = \frac{q}{64K}\left[r^4 - 2a^2\frac{3+\nu}{1+\nu}r^2 + a^4\frac{5+\nu}{1+\nu}\right],$$

and

$$w_{\max} = w(0) = \frac{qa^4}{64K}\left(\frac{5+\nu}{1+\nu}\right).$$

This deflection is larger than the clamped value of Eq. 34.2.4 by the factor $(5+\nu)/(1+\nu)$ – roughly four for typical ν – as expected, since the simply supported edge provides no rotational restraint.

34 These closed-form results are useful as *benchmarks* for verifying numerical solutions, including the finite element plate formulations discussed later. They also sharpen the physical interpretation of the two principal moment resultants: in a rectangular plate M_{xx} and M_{yy} describe bending about the Cartesian axes, whereas in an axisymmetric circular plate the analogous quantities are the radial moment M_{rr} and the hoop moment $M_{\theta\theta}$, both of which are present even when the deflection depends on r alone.

34.2.4.1 Ex 34.5: Piastra circolare incastrata sotto pressione uniforme

A circular aluminum plate has radius $a = 0.75$ m and thickness $t = 12$ mm. It is clamped along its edge and subjected to a uniform transverse pressure $q = 2$ kPa. Let

$$E = 70 \text{ GPa}, \qquad \nu = 0.33.$$

Estimate the maximum deflection.

The flexural rigidity, from Eq. 34.2.4, is

$$K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{(70\times10^9)(0.012)^3}{12(1-0.33^2)} = 1.131\times10^4 \text{ N m}.$$

For a clamped circular plate under uniform pressure the centre deflection is given by Eq. 34.2.4,

$$w_{\max} = \frac{qa^4}{64K}.$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

With $q = 2000\ \text{N/m}^2$ and $a = 0.75\ \text{m}$,

$$w_{\max} = \frac{(2000)(0.75)^4}{64(1.131 \times 10^4)} = 8.74 \times 10^{-4}\ \text{m}.$$

Thus,

$$w_{\max} = 0.874\ \text{mm}.$$

This small value is consistent with the thin-plate (small-deflection) assumption, since the deflection is well below the plate thickness,

$$\frac{w_{\max}}{t} = \frac{0.874}{12} = 0.073.$$

34.2.5 Formulazione variazionale

35 Prior to the finite element discretization, we seek to obtain from the previously derived relations a variational formulation of the problem.

36 The internal virtual work is given by

$$\delta W_i = -\int_A \delta\varepsilon^T \sigma \mathrm{d}A = -\int_A \delta\kappa^T M \mathrm{d}A$$

where $M = D\kappa$ is obtained from Eq. 34.9, and $\kappa = Lu$ is obtained from Eq. 34.8.

37 Accounting for the external virtual work, we obtain

$$\delta W = \delta W_i + \delta W_e = \underbrace{-\int_A \delta u^T (L^T D L) u \mathrm{d}A} + \underbrace{\int_A \delta u^T p_v \mathrm{d}A + \int_{\Gamma_p} u^T p \mathrm{d}\Gamma} = 0$$

where p_v contains the applied transverse loading p_z, and p the edge loading p_s.

38 Substituting for the $L^T D L$ terms (Eq. 34.8) we obtain

$$K^e = L^T D L = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2}{\partial y^2} & -2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$$= K \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + 2(1-\nu)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \right]$$

39 Finally, noting that $u = w$, the virtual work becomes

$$\delta W_e = -K\int_A \delta w \left(Lwp_z\right) \mathrm{d}A + \int_{\Gamma_p} \delta w p_s \mathrm{d}\Gamma = 0$$

where $K = Et^3/12(1-\nu^2)$.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

34.3 Riepilogo

Table 34.1 summarizes some of the major equations governing plate bending, and contrasts them with the equivalent elasticity ones. Now that we have fully reviewed the derivation of the beam and plate subjected to flexure, we can increase the difficulty one step farther and begin the discussion of thin shells.



Neue Nationalgalerie, Ludwig Mies van der Rohe, 1968, Berlin, Germany

An exemplary demonstration of plate structures, where the large, flat roof slab acts as a structural plate, spanning a vast open interior with minimal support.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 34.1: Comparison of governing equations in elasticity and plate bending (Pilkey e Wunderlich, 1994)

Elasticity	**Plate Theory** (Kirchhoff)
Kinematic	
$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{xx}\\ \hline \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \varepsilon_{xy}\\ \hline \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yz}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0\\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x}\\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y}\end{array}\right]}_{\mathbf{L}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}u_x\\ u_y\\ u_z\end{array}\right\}}_{\mathbf{u}}$	$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\kappa_{xx}\\ \kappa_{yy}\\ 2\kappa_{xy}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\kappa}} = \underbrace{\left\{\begin{array}{c}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2}\\ -2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\end{array}\right\}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}w\end{array}\right\}}_{\mathbf{u}}$
	$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\kappa_{xx}\\ \kappa_{yy}\\ 2\kappa_{xy}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\kappa}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc}\frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{array}\right]}_{\mathbf{L}_f} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}\theta_{xx}\\ \theta_{yy}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\theta}}; \underbrace{\left\{\begin{array}{c}\gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\gamma}} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc}\frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0\\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1\end{array}\right]}_{\mathbf{L}_s} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}w\\ \theta_{xx}\\ \theta_{yy}\end{array}\right\}}_{\mathbf{u}}$
Equilibrium	
$\underbrace{\left[\begin{array}{cccccc}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{array}\right]}_{\mathbf{L}^T} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{yz}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \underbrace{\left\{\begin{array}{c}b_x\\ b_y\\ b_z\end{array}\right\}}_{\rho\mathbf{b}} = 0$	$\underbrace{\left[\begin{array}{ccccc}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{array}\right]}_{\mathbf{L}^T} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\\ V_x\\ V_y\end{array}\right\}}_{\mathbf{M}} + \left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ p_z\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ 0\end{array}\right\}$
	$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc\|cc}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{array}\right]}_{\mathbf{L}^T=\lfloor\ \mathbf{L}_f^T\ \ \mathbf{L}_s^T\ \rfloor} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\\ \hline V_x\\ V_y\end{array}\right\}}_{\mathbf{M}} + \left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ p_z\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ 0\end{array}\right\}$
Constitutive	
$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \alpha \underbrace{\left[\begin{array}{cccccc}1 & \beta & \beta & 0 & 0 & 0\\ \beta & 1 & \beta & 0 & 0 & 0\\ \beta & \beta & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma\end{array}\right]}_{\mathbf{D}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \varepsilon_{xy}\\ \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$	$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\end{array}\right\}}_{\mathbf{M}} = K \underbrace{\left[\begin{array}{ccc}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{array}\right]}_{\mathbf{D}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}\kappa_{xx}\\ \kappa_{yy}\\ 2\kappa_{xy}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\kappa}}$
	$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\\ \hline V_x\\ V_y\end{array}\right\}}_{\mathbf{M}} = \underbrace{\left[\begin{array}{c\|c}K\left[\begin{array}{ccc}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{array}\right] & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{0} & \zeta\left[\begin{array}{cc}1 & 0\\ 0 & 1\end{array}\right]\end{array}\right]}_{\mathbf{D}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}\kappa_{xx}\\ \kappa_{yy}\\ 2\kappa_{xy}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\kappa}}$
$\alpha = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \beta = \frac{\nu}{1-\nu}; \gamma = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$	$K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}; \qquad \zeta = \frac{5}{6}\mu t$
Virtual Work	
$\delta\Pi = \int_\Omega \delta(\mathbf{Lu})^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T\hat{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma = 0$	$\delta W = -\int_A \delta w\left(KL w - p_z\right)\mathrm{d}A + \int_{\Gamma_p} \delta w p_s\,\mathrm{d}\Gamma = 0$
	$\delta W = -K\left[\int_A \delta\boldsymbol{\theta}^T\mathbf{K}_f^e\boldsymbol{\theta}\,\mathrm{d}A + \frac{6k_s(1-\nu)}{t^2}\int_A \delta\mathbf{u}^T\mathbf{K}_s^e\mathbf{u}\,\mathrm{d}A\right] + \int_A \delta\mathbf{u}^T\mathbf{p}_V\,\mathrm{d}A + \int_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\mathbf{p}\,\mathrm{d}\Gamma = 0$

Victor E. Saouma

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese, potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Capitolo 35

Conchiglie

Abstract

Questo capitolo è suddiviso in due sezioni principali: il primo inizia con la derivazione delle equazioni di equilibrio e compatibilità del governo per un elemento arbitrario della shell attraverso una geometria differenziale. Si specializza quindi in queste equazioni a gusci poco profondi e infine portare nella semplificazione della teoria delle membrane.

Queste equazioni vengono successivamente applicate a un guscio cilindrico circolare o semplicemente supportate su diaframmi finali, oppure sostenute da travi laterali.

Purtroppo, Shell Analysis è oggi molto raramente (se mai) insegnato nei programmi di laurea. Invece gli studenti sono esposti a un corso condensato di piatti e conchiglie, e più probabilmente con una copertura pesante dell'uso del metodo degli elementi finiti.

Vorrei sostenere che un ingegnere strutturale in procinto di progettare una shell (con il computer sempre presente), dovrebbe prima conoscere la sua / lui con i meccanismi sottostanti per sviluppare sufficiente comprensione essenziale per interpretare correttamente l'elemento finito risultati.

Infine, tra tutti i capitoli di questo libro, questo è probabilmente il più elegante *uno come combina geometria differenziale, calcolo, meccanica e (semi) matematica avanzata che porta alla comprensione di strutture veramente mozzafiato come quelle di Nervi e Torroja (Chapter 15).*

35.1 Teoria generale 1298
35.1.1 Definizioni 1298
35.1.2 Assunzioni 1300
35.1.3 Relazioni di spostamento della forza 1302
35.1.4 Semplificazioni 1317
35.2 Analisi di un singolo barile (copertura cilindrica circolare) 1327
35.2.1 Introduzione 1327
35.2.2 Teoria membranale 1329
35.2.3 Teoria dei gusci ribassati . . 1338
35.3 Gusci staticamente indeterminati . . 1353
35.3.1 Trave di bordo 1353
35.3.2 Trave di bordo precompressa 1357
35.3.3 Codice MATLAB®ed esempio numerico 1370

COPIA DI REVISIONE

La sezione seguente è riprodotta da *Thin Shell Concrete Structures*[a] by Billington, 1965 E le mie lezioni del corso del Prof. Richard Gallagher a Cornell.
L'assistenza Georg, R., 2014 è riconoscente

[a] Mentre il libro non introduce alcun nuovo metodo analitico, è una copertura molto elegante e leggibile dei metodi avviati da Love, 1927 e successivamente ampliato dalla "scuola tedesca" (migliore riassunto da Flügge, 1973) pur fornendo chiarimenti, figure e adattando la notazione al "moderno'. Timoshenko, Woinowsky-Krieger et al., 1959 è ingannevolemente limitato.

35.1 Teoria generale

35.1.1 Definizioni

1 Una sottile scocca è una superficie o un piatto curvati il cui spessore h è piccolo rispetto alle dimensioni e raggi di curvatura, r_x e r_y, della struttura conchiglia.

2 La superficie che bisect lo spessore della shell è chiamata *centro superficie*, e specificando la forma di questa superficie e lo spessore a ogni punto, definiamo completamente la geometria della shell.

3 Il *stress risultati* e *coppie di stress* sono integrati sullo spessore della shell e vengono definiti come forze totali e momenti che agiscono per lunghezza unitaria alla superficie centrale (il volto creato da bisecting lo spessore sottile della conchiglia).

4 Le stringhe sono mostrate in Fig. 35.1a, e risultati dello stress e coppie in Fig. 35.1b e più particolarmente il bordo lungo y asse.

5 Dall'equilibrio abbiamo

$$\underbrace{N_x r_y d\alpha_y}_{\text{Resultant force on neutral axis}} = \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x (r_y - z) d\alpha_y dz}_{\text{internal force}} \tag{35.1}$$

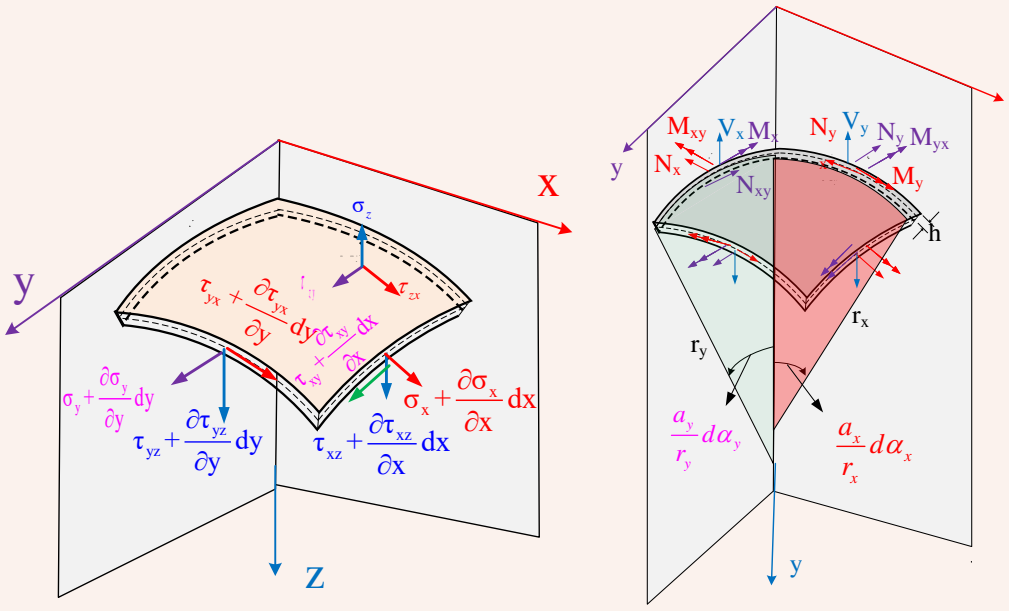
6 Dividere entrambi i lati da $r_y d\alpha_y$, otteniamo la forza della membrana che agisce lungo il x asse

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \tag{35.2}$$

7 Fig. 35.2 mostra la deformazione dell'elemento e possiamo visualizzare i termini a_x e a_y come raggi di curvatura, e $d\alpha_x$e $d\alpha_y$ come piccoli angoli, ma rigorosamente parlando, questi ultimi termini sono i parametri delle due famiglie di curve che definiscono le parti elementali e a_xe a_y sono *coefficienti* che convertono i parametri in lunghezze.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Stress interni (b) Geometria e forze interne

Figura 35.1: Elemento di conchiglia differenziale, geometria, sollecitazioni e loro risultati

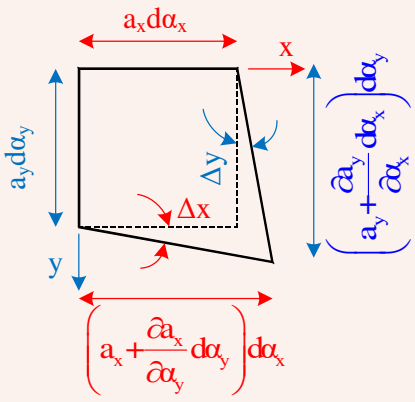


Figura 35.2: Kinematics di elemento differenziale

COPIA DI REVISIONE

8 Stress risultati e coppie di stress, Fig. 35.1a, sono dati da

$$
\begin{aligned}
&\text{Membrane Force}\\
\mathbf{N} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma}\left(1-\frac{z}{r}\right) dz
\end{aligned}
\qquad
\begin{cases}
N_x &= \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx}\left(1-\frac{z}{r_y}\right) dz\\
N_y &= \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{yy}\left(1-\frac{z}{r_x}\right) dz\\
N_{xy} &= \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy}\left(1-\frac{z}{r_y}\right) dz\\
N_{yx} &= \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy}\left(1-\frac{z}{r_x}\right) dz
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{Bending Moments}\\
\mathbf{M} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma} z\left(1-\frac{z}{r}\right) dz
\end{aligned}
\qquad
\begin{cases}
M_x &= \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx} z\left(1-\frac{z}{r_y}\right) dz\\
M_y &= \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{yy} z\left(1-\frac{z}{r_x}\right) dz\\
M_{xy} &= -\displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} z\left(1-\frac{z}{r_y}\right) dz\\
M_{yx} &= \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yx} z\left(1-\frac{z}{r_x}\right) dz
\end{cases}
\tag{35.3}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{Transverse Shear Forces}\\
\mathbf{V} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \boldsymbol{\tau}\left(1-\frac{z}{r}\right) dz
\end{aligned}
\qquad
\begin{cases}
\cancelto{0}{V_x} &= \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xz}\left(1-\frac{z}{r_y}\right) dz\\
\cancelto{0}{V_y} &= \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yz}\left(1-\frac{z}{r_x}\right) dz
\end{cases}
$$

9 I vettori di stress e le coppie di stress sono a loro volta mostrati in Fig. 35.3

10 La derivazione dei risultati dello stress e delle coppie di stress seguono la stessa formulazione della forza a membrana N_{xx} da Eq. 35.2.

35.1.2 Assunzioni

11 Ai fini della semplificazione, si considerano alcune ipotesi:

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

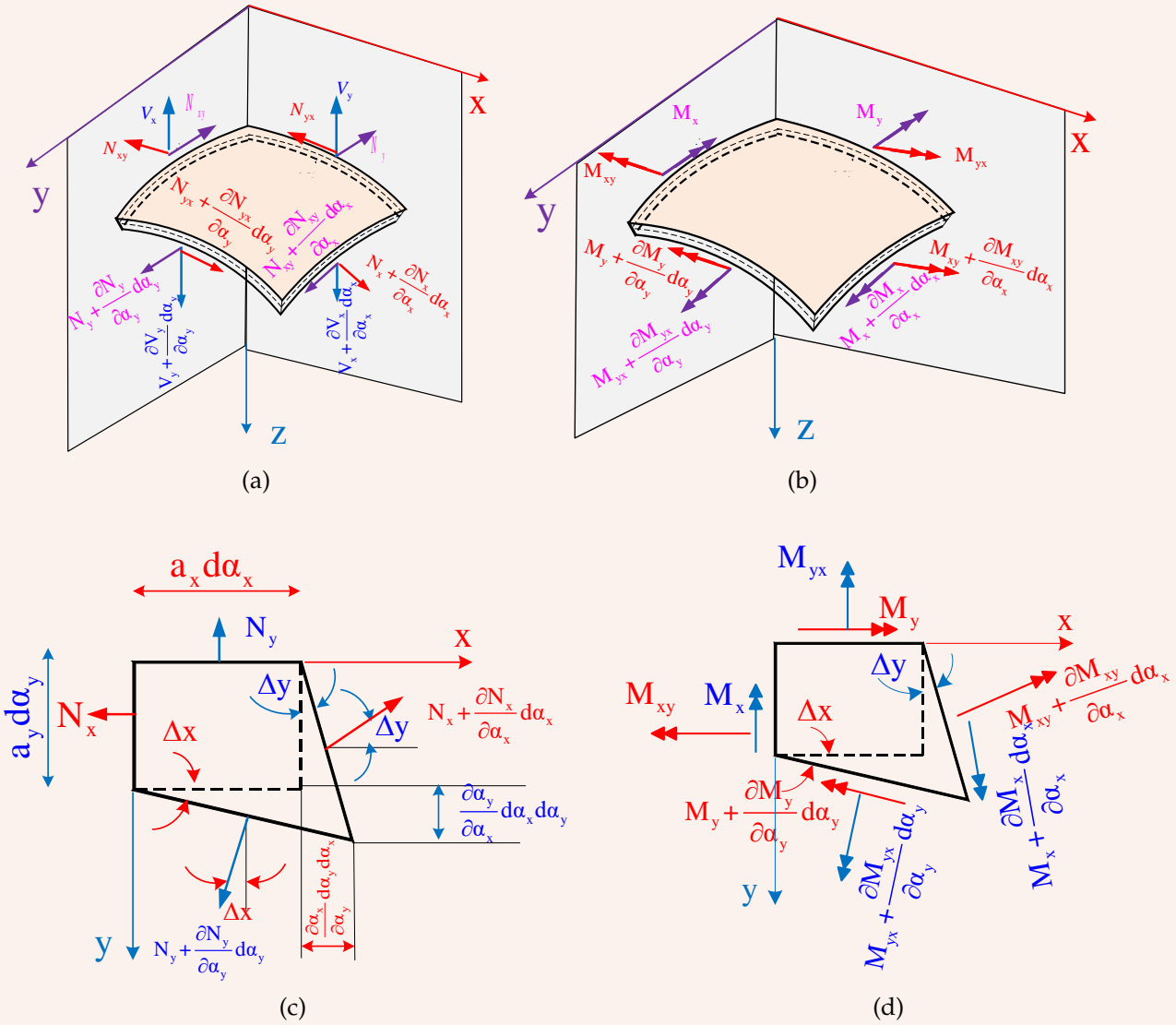


Figura 35.3: Equilibrio di elemento conchiglia differenziale

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Conchiglia sottile: Se i termini z/r_x e z/r_y sono trascurati quando comparire con l'unità, e con $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ poi

$$N_{xy} = N_{yx}$$
$$M_{xy} = -M_{yx}$$

Inoltre, σ_z è trascurato in quanto avrebbe effetti molto piccoliε_x e ε_y - E' un problema.

Piccola direttiva: i cambiamenti nella geometria non influenzeranno equilibrio statico.

Comportatore elastico lineare: relazioni lineari tra stress e tensione (o momento e curvatura).

Sistema conservatore: I punti sulle linee normali alla superficie centrale prima della deformazione rimangono su linee normali per la superficie media dopo la deformazione[1].

Deformazioni della ferita: Cesoie radiali V_x e V_y non sarà considerato[2].

35.1.3 Relazioni di spostamento della forza

12 Tutte le soluzioni meccaniche strutturali devono soddisfare tre requisiti essenziali:

Equilibrio di forze generalizzate

Compatibilità di ceppi e spostamenti

Stress-Strain relazioni[3]

Tali requisiti, combinati con le definizioni preliminari/supposti, ci consentiranno di ricavare una teoria generale delle gusci attraverso i seguenti passi conseguenti, Tabella 35.1:

1. Determinare il *equilibrio equilibrio equilibrio* di forze e momenti su un elemento differenziale (5 equazioni, 8 sconosciute).

   Nella teoria delle conchiglie di solito trascuriamo M_z perché τ_{xz} e τ_{yz} sono trascurati, quindi dobbiamo soddisfare 5 equazioni di equilibrio, Eq. 35.3, in termini di 8 forze generalizzate.
2. Stabilire la *compatibilità* (strain-splacement) relazioni (6 equazioni, 3 sconosciute).
3. Stabilire un *rapporto stress-strain* assumendo un set di proprietà elastiche (3 equazioni, 6 sconosciute).
4. Trasformare le relazioni forza-strain in *forza-spostamento* equazioni (6 equazione 3 sconosciute).
5. Ottenere un *formulazione completa* combinando le equazioni di spostamento della forza con le equità dell'equilibrio (11 equazione con 11 sconosciuti).

[1] Come nelle travi, le sezioni piane rimangono aeroplane (assunzione di Euler-Bernoulli).
[2] Proprio come noi ignoramo la deformazione della cesta nelle travi.
[3] Ricordate che l'integrazione degli stress darà le forze.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 35.1: Riassunto di equazioni e sconosciute in sottili gusci

Equazioni	(Sconosciuto) Variabili
1) Equilibrio (§35.1.3.1)	
5 Equazioni di Equilibrio	8 Forze interne
$\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma F_z, \Sigma M_x, \Sigma M_y$	$N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}$
2) Compatibilità (§35.1.3.3)	
6 Stratine	3 Sviluppi
$\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}, \gamma_{xy0}, \chi_x, \chi_y, 2\chi_{xy}$	u, v, w
3) Stress-Strain (§35.1.3.5)	
3 Stresse	6 Stratine
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	$\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}, \gamma_{xy0}, \chi_x, \chi_y, 2\chi_{xy}$
4) Dislocazione della forza (§35.1.3.6)	
5 Forze	3 Sviluppi
$N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}$	u, v, w
5) Finale	
5 Equilibrium, 6 ceppi	8 forze, 3 spostamento
$\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma F_z, \Sigma M_x, \Sigma M_y$ $\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}, \gamma_{xy0}, \chi_x, \chi_y, 2\chi_{xy}$	$N_x, N_y, N_{xy}, V_x, V_y, M_x, M_y, M_{xy}, u, v, w$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

35.1.3.1 Equilibrio

13 Con riferimento a Fig. 35.3, cerchiamo di stabilire le cinque equazioni dell'equilibrio $\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma F_z, \Sigma M_x, \Sigma M_y$. Ognuno sarà considerato separatamente.

14 Ancora una volta, considereremo il contributo di ogni termine separatamente, Tabella 35.2 e poi combinare tutti i componenti insieme per formare l'equazione di equilibrio completata.

Tabella 35.2: Contributo individuale alle equazioni di equilibrio in sottili gusci

Forze	$N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}, V_x, V_y, p_{ext}$
Momenti	$M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}, V_y$

15 Le coppie di stress non attribuiscono alcun componente della forza nella direzione x. Ogni componente sarà determinato moltiplicando il risultato dello sforzo, Fig. 35.1a, per la lunghezza del lato elemento su cui agisce.

1/5 $\Sigma F_x = 0$

16 Da Fig. 35.3cSi può notare una differenza di geometria dell'elemento differenziale, i lati dell' elemento che interseca l'origine hanno lunghezze curve di $a_x d\alpha_x$ e $a_y d\alpha_y$, mentre i bordi opposti hanno aumentato le lunghezze di $(a_x + \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y})d\alpha_x$ e $(a_y + \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x})d\alpha_y$.

Contributo da N_x:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x^{N_x} &= -N_x a_y d\alpha_y + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right)\left(a_y + \frac{\partial \alpha_y}{d\alpha_x} d\alpha_x\right) d\alpha_y \\ &= N_x \frac{\partial \alpha_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y + a_y \frac{\partial N_x}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y + \underbrace{\frac{\partial N_x}{\partial \alpha_x} d\alpha_x \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y}_{2^{nd} \text{ order effect}}\end{aligned}$$

By combining the first two terms and eliminating the third due to second order effects

$$\Sigma F_x^{N_x} = \frac{\partial (N_x a_y)}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y \tag{35.4}$$

Contributo da N_y: Prima di tutto si nota che in generale N_y non agisce perpendicolare al x asse ma ad angolo

$$\Delta_x = \frac{(\partial a_y / \partial \alpha_x) d\alpha_x d\alpha_y}{a_x d\alpha_x} = \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \frac{d\alpha_y}{a_x}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

così in x direzione, componente della forza totale $N_y a_x d\alpha_x$ is

$$\Sigma F_x^{N_y} = -N_y a_x d\alpha_x \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}\frac{d\alpha_y}{a_x} = -N_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y$$

Contributo da N_{xy}: Per quanto riguarda $N_x y$, questa forza ha anche una componente non perpendicolare ed è determinata lungo l'angolo Δ_y:

$$\Delta_y = \frac{(\partial a_x/\partial \alpha_y) d\alpha_y d\alpha_x}{a_y d\alpha_y} = \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}\frac{d\alpha_x}{a_y} \tag{35.5}$$

e la componente della forza totale $N_{xy} a_y d\alpha_y$ is

$$\Sigma F_x^{N_{xy}} = N_{xy} a_y d\alpha_y \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}\frac{d\alpha_x}{a_y} = N_{xy}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} d\alpha_y d\alpha_x \tag{35.6}$$

Contributo da N_{yx}: è simile a quello di N_x, Eq. 35.4

$$\Sigma F_x^{N_{yx}} = -N_{yx} a_x d\alpha_x + \left(N_{yx} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \alpha_y} d\alpha_y\right)\left(a_x + \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} d\alpha_y\right) d\alpha_x = \frac{\partial (N_{yx} a_x)}{\partial \alpha_y} d\alpha_x d\alpha_y \tag{35.7}$$

Contributo da V_x: La componente orizzontale del Forza totale sul lato inclinato, Fig. 35.4, is

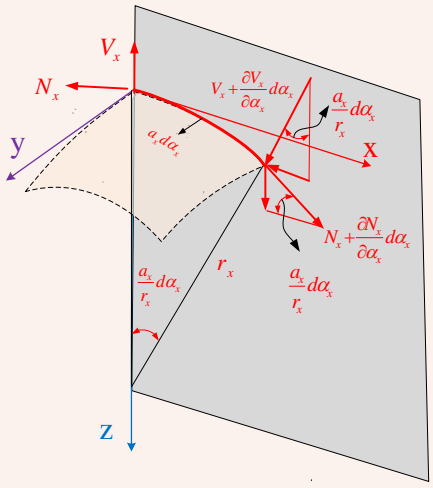


Figura 35.4: elemento di conchiglia differenziale, V_x stress risultati

$$\Sigma F_x^{V_x} = -\left(V_x + \frac{\partial V_x}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right)\left(a_y + \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right) d\alpha_y \frac{a_x}{r_x} d\alpha_x$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese, potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

dove $d\alpha_x \simeq \sin d\alpha_x$. Si noti che V_x non ha x componente Trascurare i termini di ordine più elevati, questo riduce a

$$\Sigma F_x^{V_x} = -V_x a_y d\alpha_y \frac{a_x}{r_x} d\alpha_x \tag{35.8}$$

Contributo da V_y: Il risultato dello stress contribuirà all'equilibrio nel x direzione solo se a_x e a_y non sono radii di principio della curvatura. In Fig. 35.5 l'elemento differenziale con curveture, che risultato in una distanza totale $z_x + z_y + z_{xy}$ all'angolo

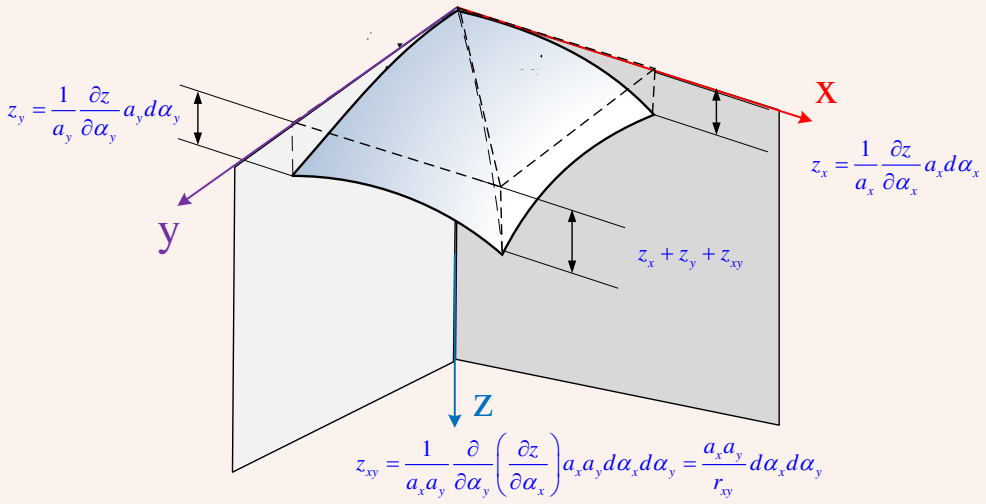


Figura 35.5: Elemento di conchiglia differenziale, curvature principali

opposto all'origine, è mostrato. z_x e z_y sono a causa delle piste $\partial z/\partial \alpha_x$ e $\partial z/\partial \alpha_y$. Il cambiamento nel pendio si traduce in

$$z_{xy} = \frac{1}{a_x a_y}\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y} a_x a_y d\alpha_x d\alpha_y = \frac{a_x a_y}{r_{xy}} d\alpha_x d\alpha_y$$

dove

$$\frac{1}{r_{xy}} = \frac{1}{a_x a_y}\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y}$$

e corrisponde alla torsione della superficie rispetto al x e y asce. Quindi, il pendio V_y is

$$\frac{z_{xy}}{a_x d\alpha_x} = \frac{a_y d\alpha_y}{r_{xy}}$$

COPIA DI REVISIONE

e la componente totale di V_y nel x direzione è

$$\begin{aligned}\Sigma F_x^{V_y} &= \left(V_y + \frac{\partial V_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right)\left(a_x + \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} d\alpha_y\right) d\alpha_x \frac{a_y}{r_{xy}} d\alpha_y \\ &= V_y a_x d\alpha_x \frac{a_y d\alpha_y}{r_{xy}}\end{aligned} \tag{35.9}$$

Questa espressione svanisce dove l'elemento è legato da linee di principio curvature r_x and r_y, $z_{xy} = 0$, the twist $r_{xy} = \infty$.

Contributo del carico esterno: Presumo che sia una pressione con componenti p_x, p_y e p_z agire sul differenziale element of an area $a_x d\alpha_x a_y d\alpha_y$:

$$\Sigma F_x^p = p_x a_x d\alpha_x a_y d\alpha_y \tag{35.10}$$

Infine, possiamo ora combinare il x componenti di N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}, V_x, V_y and the load from Eqs. 35.4, 35.1.3.1, 35.6, 35.7, 35.8, 35.9, e 35.10. Dopo aver annullato i moltiplicatori comuni $d\alpha_x d\alpha_y$, noi otteniamo

$$\frac{\partial (N_x a_y)}{\partial \alpha_x} - N_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + N_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + \frac{\partial (N_{yx} a_x)}{\partial \alpha_y} - V_y \frac{a_x a_y}{r_{xy}} - V_x a_y \frac{a_x}{r_x} + p_x a_x a_y = 0 \tag{35.11}$$

2/5 $\Sigma F_y = 0$

[17] Questa seconda equazione è esattamente la stessa di quella corrispondente a $\Sigma F_x = 0$ tranne che noi commutare il x e y termini di resa

$$\frac{\partial (N_y a_x)}{\partial \alpha_y} - N_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + N_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial (N_{xy} a_y)}{\partial \alpha_x} - V_x \frac{a_y a_x}{r_{yx}} - V_y a_x \frac{a_y}{r_y} + p_y a_x a_y = 0 \tag{35.12}$$

3/5 $\Sigma F_z = 0$

[18] Il z la direzione è sempre definita perpendicolare alla superficie media; quindi è sempre nella direzione dei raggi principali di curvatura, Fig. 35.4. Così si può fare l'ipotesi per piccoli angoli $\sin\theta \simeq \theta$.

Prodotti simili $\Sigma F_x = 0$, contributi dei risultati dello stress, N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}, N_{yx}, due forze radiali di taglio, V_x, V_y, e saranno considerate le pressioni esterne; le coppie di stress non attribuiscono alcun componente della forza nella direzione z. Ogni componente sarà determinato moltiplicando il fattore di stress, Fig. 35.1ao forza radiale, Fig. 35.4, per la lunghezza del lato elemento su cui agisce.

Contribution from N_x:

$$\Sigma F_z^{N_x} = N_x a_y d\alpha_y \underbrace{\frac{a_x}{r_x} d\alpha_x}_{\sin\theta \simeq \theta} + 2^{nd} \text{ order terms} \tag{35.13}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

[19] Tutte le seguenti espressioni saranno simili al layout del N_x formulazione modificando x e y variabili.

Contribution from N_y:

$$\Sigma F_z^{N_y} = N_y a_x d\alpha_x \frac{a_y}{r_y} d\alpha_y \tag{35.14}$$

Contribution from N_{xy}:

$$\Sigma F_z^{N_{xy}} = N_{xy} a_y d\alpha_y \frac{a_x}{r_{xy}} d\alpha_x \tag{35.15}$$

Contribution from N_{yx}:

$$\Sigma F_z^{N_{yx}} = N_{yx} a_x d\alpha_x \frac{a_y}{r_{xy}} d\alpha_y \tag{35.16}$$

Contribution from V_x:

$$\begin{aligned}\Sigma F_z^{V_x} &= -V_x a_y d\alpha_y + \left(V_x + \frac{\partial V_x}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right) \underbrace{\cos\left(\frac{a_x}{r_x} d\alpha_x\right)}_{\simeq 1} \left(a_y + \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right) d\alpha_y \\ &= \frac{\partial (V_x a_y)}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y \end{aligned} \tag{35.17}$$

Contribution from V_y: By analogy to V_x

$$\Sigma F_z^{V_y} = \frac{\partial (V_y a_x)}{\partial \alpha_y} d\alpha_y d\alpha_x \tag{35.18}$$

Contribution from the external load: From Eq. 35.10

$$\Sigma F_z^{p} = p_z a_x d\alpha_x a_y d\alpha_y \tag{35.19}$$

[19] Infine, possiamo ora combinare il z componenti di N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}, V_x, V_y and the load from Eq. 35.13, 35.14, 35.15, 35.16, 35.17, 35.18, e 35.19 rispettivamente. Ancora una volta, dopo aver annullato il common multipliers $d\alpha_x d\alpha_y$, we obtain

$$\frac{\partial (V_x a_y)}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial (V_y a_x)}{\partial \alpha_y} + N_x \frac{a_x}{r_x} a_y + N_{xy} \frac{a_x}{r_{xy}} a_y + N_{yx} \frac{a_y}{r_{xy}} a_x + N_y \frac{a_y}{r_y} a_x + p_z a_x a_y = 0 \tag{35.20}$$

4/5 $\Sigma M_x = 0$

[20] Le soluzioni per i momenti hanno componenti simili a quelle delle forze sopra viste, che mostrano differenze soprattutto con gli operatori del settore. V_y, è considerato. Tuttavia, ora le coppie di stress, M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}, componenti della forza di attributo nel x, ye z Ogni componente sarà determinato moltiplicando le coppie di stress, Fig. 35.3do forza radiale, Fig. 35.4, per la lunghezza del lato elemento su cui agisce.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Contributo da M_x: Ha un componente circa x asse analogo a quello di N_x nel y direzione (Eq. 35.4 con x e y ritorto)

$$\Sigma M_x^{M_x} = M_x a_y d\alpha_y \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}\frac{d\alpha_x}{a_y} = M_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} d\alpha_y d\alpha_x \tag{35.21}$$

Contribution from M_y: Come in Eq. 35.4, e con riferimento a Fig. 35.3d

$$\begin{aligned}\Sigma M_x^{M_y} &= M_y a_x d\alpha_x - \left(M_y + \tfrac{\partial M_y}{\partial \alpha_y} d\alpha_y\right)\left(a_x + \tfrac{\partial a_x}{d\alpha_y} d\alpha_y\right) d\alpha_x \\ &= -\tfrac{\partial (M_y a_x)}{\partial \alpha_y} d\alpha_y d\alpha_x\end{aligned} \tag{35.22}$$

Contributo da M_{xy}: è analogo a Eq. 35.22

$$\Sigma M_x^{M_{xy}} = -M_{xy} a_y d\alpha_y + \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right)\left(a_y + \frac{\partial a_y}{d\alpha_x} d\alpha_x\right) d\alpha_y = \frac{\partial (M_{xy} a_y)}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y \tag{35.23}$$

Contribution from M_{yx}:

$$\Sigma M_x^{M_{yx}} = -M_{yx} a_x d\alpha_x \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}\frac{d\alpha_y}{a_x} = -M_{yx}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y \tag{35.24}$$

Contribution from V_y:

$$\Sigma M_x^{V_y} = V_y a_x d\alpha_x a_y d\alpha_y \tag{35.25}$$

Infine, possiamo ora combinare l'effetto di tutti components M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}, and V_y Eq. 35.21, 35.22, 35.23, 35.24 e 35.25 rispettivamente. Dopo aver cancellato i moltiplicatori comuni $d\alpha_x d\alpha_y$, noi otteniamo

$$-\frac{\partial (M_y a_x)}{\partial \alpha_y} + M_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - M_{yx}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial (M_{xy} a_y)}{\partial \alpha_x} + V_y a_x a_y = 0 \tag{35.26}$$

5/5 $\Sigma M_y = 0$

Momenti circa il y asse dare la stessa espressione di Eq. 35.26 eccetto che x e y i sottoscritti capovolgono, e il segno delle coppie di twisting-stress sono invertiti.

$$-\frac{\partial (M_x a_y)}{\partial \alpha_x} + M_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + M_{xy}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{\partial (M_{yx} a_x)}{\partial \alpha_y} + V_x a_x a_y = 0 \tag{35.27}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

35.1.3.2 Sistema completo delle equazioni di equilibrio

21 Le 5 equazioni di equilibrio, Eq. 35.11, 35.12, 35.20, 35.26 e 35.27 sono riassunti di seguito

$$\Sigma F_x = \frac{\partial}{\partial\alpha_x}(N_x a_y) - N_y\frac{\partial a_y}{\partial\alpha_x} + N_{xy}\frac{\partial a_x}{\partial\alpha_y} + \frac{\partial}{\partial\alpha_y}(N_{yx}a_x) - V_y\frac{a_x a_y}{r_{xy}} - V_x a_y\frac{a_x}{r_x} + p_x a_x a_y = 0$$

$$\Sigma F_y = \frac{\partial}{\partial\alpha_y}(N_y a_x) - N_x\frac{\partial a_x}{\partial\alpha_y} + N_{yx}\frac{\partial a_y}{\partial\alpha_x} + \frac{\partial}{\partial\alpha_x}(N_{xy}a_y) - V_x\frac{a_y a_x}{r_{yx}} - V_y a_x\frac{a_y}{r_y} + p_y a_x a_y = 0$$

$$\Sigma F_z = \frac{\partial}{\partial\alpha_x}(V_x a_y) + \frac{\partial}{\partial\alpha_y}(V_y a_x) + N_x\frac{a_x}{r_x}a_y + N_{xy}\frac{a_x}{r_{xy}}a_y + N_{yx}\frac{a_y}{r_{xy}}a_x + N_y\frac{a_y}{r_y}a_x + p_z a_x a_y = 0$$

$$\Sigma M_x = -\frac{\partial}{\partial\alpha_y}(M_y a_x) + M_x\frac{\partial a_x}{\partial\alpha_y} - M_{yx}\frac{\partial a_y}{\partial\alpha_x} + \frac{\partial}{\partial\alpha_x}(M_{xy}a_y) + V_y a_x a_y = 0$$

$$\Sigma M_y = -\frac{\partial}{\partial\alpha_x}(M_x a_y) + M_y\frac{\partial a_y}{\partial\alpha_x} + M_{xy}\frac{\partial a_x}{\partial\alpha_y} - \frac{\partial}{\partial\alpha_y}(M_{yx}a_x) + V_x a_x a_y = 0 \tag{35.28}$$

35.1.3.3 Compatibilità

22 Poi consideriamo le equazioni di compatibilità, che riguardano gli spostamenti a tre per i ceppi.

1/4 ε_{x0}

Le relazioni di sviluppo delle varietà saranno successivamente derivate con riferimento al Fig. 35.6. L'elemento lineare della lunghezza $a_x d\alpha_x$ subisce tre variazioni di lunghezza:

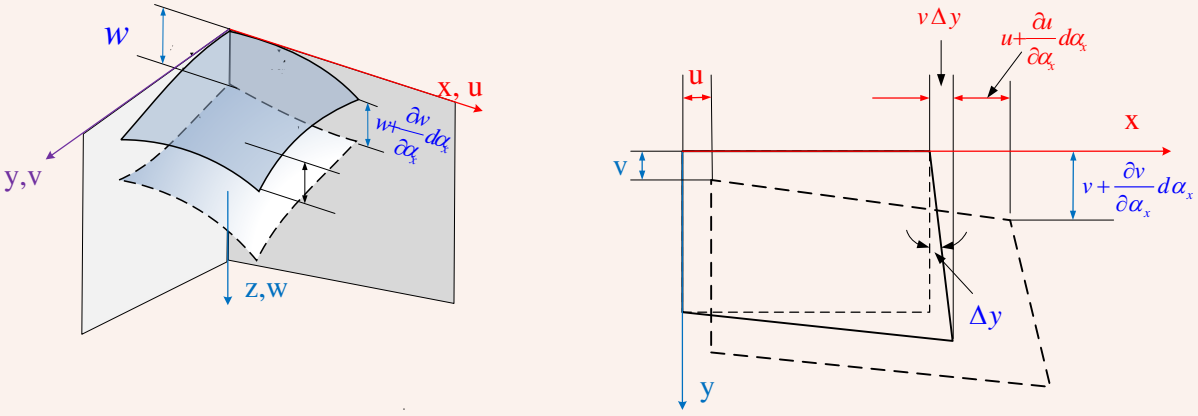


Figura 35.6: Differential shell element, initial and deformed state

Axial extension x axis of $\frac{\partial u}{\partial\alpha_x}d\alpha_x$

COPIA DI REVISIONE

Estensione laterale y: La forma originale non deformata del differenziale elemento non è rettangolare (a causa di $d\alpha_x$ e $d\alpha_y$), e l'angolo tra il positivo y il lato e vertical is (Eq. 35.5) $\Delta_y = \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}\frac{d\alpha_x}{a_y}$ (invece) 0); Così, una traduzione lungo il y asse, si tradurrà in traduzione lungo il x asse uguale a $v\Delta_y$.

Decrease in radius of curvature: $-w\frac{a_x}{r_x}d\alpha_x$

Riassumendo tutti questi termini, e dividendo per la lunghezza originale $a_x d\alpha_x$ yields

$$\varepsilon_{x0} = \frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} + \frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{w}{r_x} \tag{35.29}$$

dove 0 sottoscritto indica che la superficie centrale è in fase di elaborazione.

2/4 ε_{y0}

23 La tensione della superficie media lungo la y asse, per analogia, è ottenuto da invertire x e y variabili insieme a v e u nell'equazione precedente.

$$\varepsilon_{y0} = \frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y} + \frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_y} \tag{35.30}$$

3/4 γ_{xy0}

24 La ceppo di taglio, che rappresenta il cambiamento angolare totale tra $a_y d\alpha_y$ e $a_x d\alpha_x$, è anche un po 'complesso e i suoi tre componenti saranno derivati separatamente.

Difference in displacements: For the v term, Fig. 35.6, we have $(v + \frac{\partial v}{\partial \alpha_x}d\alpha_x) - v$. Se dividiamo per la lunghezza elementare, $a_x d\alpha_x$, e ripetere la stessa operazione per u dislocamento, otteniamo:

$$\gamma^I_{xy0} = \frac{1}{a_x}\frac{\partial v}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y}\frac{\partial u}{\partial \alpha_y} \tag{35.31}$$

Aumento della lunghezza dei lati positivi: Iniziamo determinando ΔsFico. 35.7.

$$\Delta s = \left(u + \frac{\partial u}{\partial \alpha_x}d\alpha_x\right)\Delta_y$$

dove Δ_y è stato derivato in Eq. 35.5 as

$$\Delta_y = \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}\frac{d\alpha_x}{a_y}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

hence,

$$\begin{aligned}\Delta s &= \left(u + \frac{\partial u}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right) \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \frac{d\alpha_x}{a_y} \\ &= u \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \frac{d\alpha_x}{a_y} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} d\alpha_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \frac{d\alpha_x}{a_y}}_{\text{Higher order term}}\end{aligned}$$

Dividendo Δs per la lunghezza dell'elemento, $a_x d\alpha_x$ e ripetendo la stessa operazione per l'altro lato, otteniamo

$$\gamma^{II}_{xy0} = -\frac{u}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{v}{a_x a_y} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \tag{35.32}$$

dove il segno negativo riflette il fatto che l'angolo tra $x = 0$ e $y = 0$ faces has decreased (originally was a right angle).

Twist of Surfaces: Con riferimento a Fig. 35.7, we have

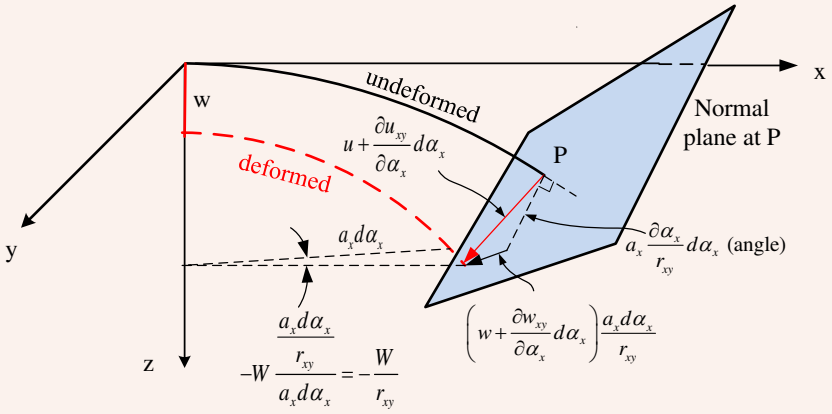


Figura 35.7: Elemento di conchiglia differenziale, stato iniziale e deformato; ceppo di taglio causato da aumento della lunghezza dei lati positivi

$$w^* = -w \frac{a_x d\alpha_x}{r_{xy}}$$

Diviso per lunghezza originale $a_x d\alpha_x$ e riconoscendo che abbiamo un termine simile per l'aereo $x = 0$, noi otteniamo

$$\gamma^{III}_{xy0} = -2 \frac{w}{r_{xy}} \tag{35.33}$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

Thus, summing all three components, Eq. 35.31, 35.32 and 35.33, we obtain

$$\gamma_{xy0} = \underbrace{\frac{1}{a_x}\frac{\partial v}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y}\frac{\partial u}{\partial \alpha_y}} - \underbrace{\frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}} - \underbrace{2\frac{w}{r_{xy}}} \tag{35.34}$$

4/4 $\chi_x, \chi_y, 2\chi_{xy}$

25 Considerare il $x - z$ aereo, Fig. 35.8e supponendo $w = 0$, le normali all'elemento

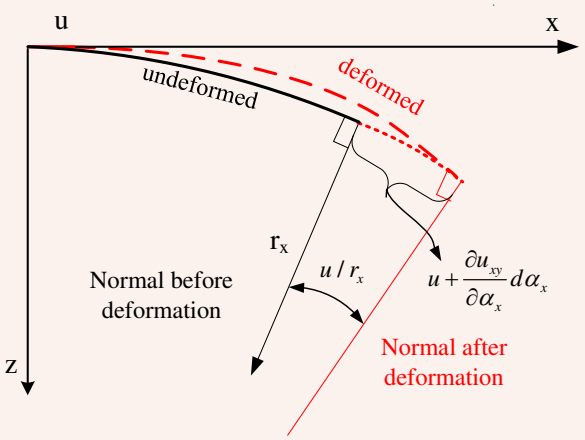


Figura 35.8: Differential shell element, initial and deformed state; rotation

differenziale sul volto positivo prima e dopo la deformazione fanno un angolo $\frac{u}{r_x}$.

26 Il termine convenzionale a causa di spostamento trasversale è $\frac{\partial w}{\partial s_{\alpha x}} = \frac{\partial w}{a_x \partial \alpha_x}$. Infine, anche per il termine di torsione otteniamo

$$\phi_x = \frac{u}{r_x} + \frac{\partial w}{a_x \partial \alpha_x} + \frac{v}{r_{xy}} \tag{35.35}$$

27 Similarly we obtain

$$\phi_y = \frac{v}{r_y} + \frac{\partial w}{a_y \partial \alpha_y} + \frac{u}{r_{xy}}$$

28 Il cambiamento di curvatura sarà così pari al cambiamento della rotazione $\partial\phi_x$ per arc length $a_x \partial \alpha_x$

$$\chi_x = \frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x}$$

COPIA DI REVISIONE

Inoltre, a causa dei lati non paralleli dell'elemento, perché dei valori mutevoli a_x e a_y, la rotazione ϕ_y nel y la direzione produrrà un componente nel x direzione.

$$\frac{\phi_y \Delta_y}{a_x \partial \alpha_x} = \frac{\phi_y}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}$$

29 Di qui le espressioni complete per i cambiamenti nella curvatura diventano

$$\begin{aligned}
\chi_x &= \frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x} + \frac{\phi_y}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \\
\chi_y &= \frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_y} + \frac{\phi_x}{a_y a_x}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \\
2\chi_{xy} &= \frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_y} + +\frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_x} - \frac{\phi_x}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{\phi_y}{a_y a_x}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}
\end{aligned}$$

35.1.3.4 Riepilogo

30 Ora riassumiamo tutte e sei le espressioni di ceppo in termini dei tre unknown displacements, Eq. 35.29, 35.30, 35.34 e il set precedente, abbiamo

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{x0} &= \frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} + \frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{w}{r_x} \\
\varepsilon_{y0} &= \frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y} + \frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_y} \\
\gamma_{xy0} &= \frac{1}{a_x}\frac{\partial v}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y}\frac{\partial u}{\partial \alpha_y} - \frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - 2\frac{w}{r_{xy}} \\
\chi_x &= \frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x} + \frac{\phi_y}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \\
\chi_y &= \frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_y} + \frac{\phi_x}{a_y a_x}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \\
2\chi_{xy} &= \frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_y} + \frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_x} - \frac{\phi_x}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{\phi_y}{a_y a_x}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}
\end{aligned} \tag{35.36}$$

where

$$\begin{aligned}
\phi_x &= \frac{u}{r_x} + \frac{\partial w}{a_x \partial \alpha_x} + \frac{v}{r_{xy}} \\
\phi_y &= \frac{v}{r_y} + \frac{\partial w}{a_y \partial \alpha_y} + \frac{u}{r_{xy}}
\end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

35.1.3.5 Tensioni-deformazioni-risultanti

35.1.3.5.1 Tensioni-deformazioni

31 La tensione ε_x a distanza z dalla superficie centrale, Fig. 35.9, è composto da un

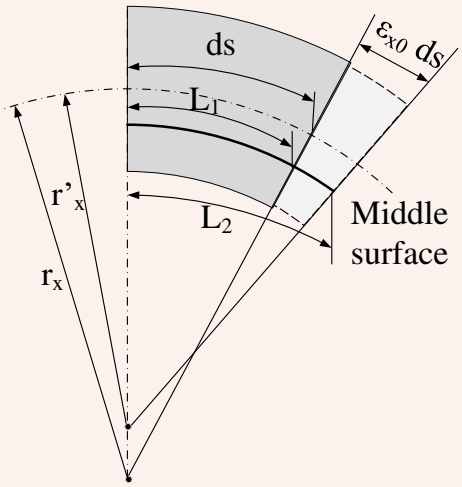


Figura 35.9: Middle surface of differential element

componente assiale ε_{x0} causata dall'estensione della superficie centrale, e un altro causato da flessione.

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{L_2 - L_1}{L1} \\ L_1 &= ds\left(1 - \frac{z}{r_x}\right) \\ L_2 &= ds(1+\varepsilon_{x0})\left(1 - \frac{z}{r'_x}\right) \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{(1+\varepsilon_{x0})(1 - z/r'_x) - (1 - z/r_x)}{1 - z/r_x} \\ &= \frac{1 - z/r'_x + \varepsilon_{x0}(1 - z/r'_x) - 1 + z/r_x}{1 - z/r_x} \end{aligned}$$

32 possiamo cadere il piccolo termine z/r'_x e z/r_x quando appaiono con unità,

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} - z\left(\frac{1}{r'_x} - \frac{1}{r_x}\right)$$

33 Ancora χ, riferendosi al cambiamento di curvatura, troviamo

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} - z\chi_x \tag{35.37}$$
$$\varepsilon_y = \varepsilon_{y0} - z\chi_y \tag{35.38}$$
$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy0} - 2z\chi_{xy} \tag{35.39}$$

COPIA DI REVISIONE

34 A questo punto non ignoreremo più le proprietà materiali del sistema, per ricavare il rapporto tra stress e resistenza, assumo che abbiamo un materiale elastico lineare, isotropico ed omogeneo. $\sigma_z = 0$, abbiamo una condizione di stress aereo e da meccanica dei materiali:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)\\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)\\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}\end{aligned}$$

dove il modulo di rigidità, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

35 Sostituire le espressioni effettive per i ceppi, Eqs. 35.37, 35.38e 35.39, noi otteniamo

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}[(\varepsilon_{x0} + \nu\varepsilon_{y0} - z(\chi_x + \nu\chi_y)]\\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}[(\varepsilon_{y0} + \nu\varepsilon_{x0} - z(\chi_y + \nu\chi_x)]\\ \tau_{xy} &= G(\gamma_{xy0} - 2z\chi_{xy})\end{aligned}$$

35.1.3.5.2 Tensioni-risultanti

36 Sostituire il precedente insieme di equazioni nelle espressioni per le relazioni forza-stress, Eq. 35.3, integrando oltre h e trascurare z/r_x e z/r_y termini quando appaiono accanto all'unità, otteniamo

$$\begin{aligned}N_x &= K(\varepsilon_{x0} + \nu\varepsilon_{y0}) \qquad (35.40)\\ N_y &= K(\varepsilon_{y0} + \nu\varepsilon_{x0})\\ N_{xy} &= N_{yx0} = Gh\gamma_{xy0}\\ M_x &= -D(\chi_x + \nu\chi_y)\\ M_y &= -D(\chi_y + \nu\chi_x)\\ M_{xy} &= -M_{yx} = \frac{Gh^3}{6}\chi_{xy} = D(1-\nu)\chi_{xy} \qquad (35.41)\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}K &= \frac{Eh}{1-\nu^2}\\ D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\end{aligned}$$

K è rigidità assiale e D la rigidità flessorale, corrispondente EA e EI per il problema unidimensionale equivalente.

37 Si noti che K e D sono più grandi delle costanti monodimensionali corrispondenti da un fattore $1-\nu^2$ che rappresenta l'aumento della rigidità causata dalla restrizione sulle tensioni laterali.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

35.1.3.6 Espressioni finali (forza in termini di spostamenti)

38 Ora sostituiamo le varietà assiali e flessografiche date da Eq. 35.36 into Eqs. 35.40 through 35.41 to obtain

$$\begin{aligned}
N_x &= K\left[\frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} + \frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{w}{r_x} + \nu\left(\frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y} + \frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_y}\right)\right] \\
N_y &= K\left[\frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y} + \frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_y} + \nu\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} + \frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{w}{r_x}\right)\right] \\
N_{xy} &= N_{yx} = Gh\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial v}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y}\frac{\partial u}{\partial \alpha_y} - \frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - \frac{2w}{r_{xy}}\right) \\
M_x &= -D\left[\frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x} + \frac{\phi_y}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + \nu\left(\frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_y} + \frac{\phi_x}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}\right)\right] \\
M_y &= -D\left[\frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_y} + \frac{\phi_x}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \nu\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x} + \frac{\phi_y}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}\right)\right] \\
M_{xy} &= -M_{yx} = \frac{D(1-\nu)}{2}\left(\frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_y} + \frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_x} - \frac{\phi_x}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{\phi_y}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}\right)
\end{aligned} \tag{35.42}$$

dove lo ricordiamo da Eq. 35.35

$$\begin{aligned}
\phi_x &= \frac{u}{r_x} + \frac{\partial w}{a_x \partial \alpha_x} + \frac{v}{r_{xy}} \\
\phi_y &= \frac{v}{r_y} + \frac{\partial w}{a_y \partial \alpha_y} + \frac{u}{r_{xy}}
\end{aligned}$$

39 Queste sei equazioni contengono tre fattori di stress (N_x, N_ye N_{xy}), tre coppie di stress (M_x, M_ye M_{xy}) e tre displacements (u, v and w).

40 Le cinque equazioni di equilibrio, Eq. 35.28, a sua volta contengono otto sconosciuti: cinque fattori di stress (N_x, N_y, N_{xy}, V_x e V_y), e tre coppie di stress (M_x, M_ye M_{xy}).

41 Quando questi due set di equazioni sono combinati insieme, abbiamo un totale di 11 equazione con 11 sconosciuti (N_x, N_y, N_{xy}, V_x, V_y, M_x, M_ye M_{xy}, u, v e w). Così il problema è definito correttamente e una soluzione completa è possibile.

42 Tabella 35.3 riassume alcune delle equazioni principali che governano le gusci sottili.

35.1.4 Semplificazioni

43 La derivazione dell'analisi discussa nella sezione precedente (11 equazioni - 11 sconosciute) può essere utilizzata per risolvere gli stress e le spostamenti di qualsiasi tipo di guscio elastico sottile. *estremamente complicato* per anche i più semplici sistemi di shell

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 35.3: Riassunto delle equazioni principali di governo in sottili gusci

Kinematic

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\frac{1}{a_x a_y} \begin{bmatrix} a_y \frac{\partial}{\partial \alpha_x} & \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} & -\frac{a_x a_y}{r_x} \\ \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} & a_x \frac{\partial}{\partial \alpha_y} & -\frac{a_x a_y}{r_y} \\ a_x \frac{\partial}{\partial \alpha_y} - \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} & a_y \frac{\partial}{\partial \alpha_x} - \frac{\partial a_y}{\partial \alpha)_x} & -\frac{2 a_x a_y}{r_{xy}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ 2\chi_{xy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\chi}} = \underbrace{\frac{1}{a_x a_y} \begin{bmatrix} a_y \frac{\partial}{\partial \alpha_x} & \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \\ \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} & a_x \frac{\partial}{\partial \alpha_y} \\ a_x \frac{\partial}{\partial \alpha_y} - \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} & a_y \frac{\partial}{\partial \alpha_x} - \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta_{xx} \\ \theta_{yy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\theta}}$$

Equilibrium

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha_x}(a_y) & -\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} & \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial}{\partial \alpha_y}(a_x) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} & \frac{\partial}{\partial \alpha_y}(a_x) & \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial}{\partial \alpha_x}(a_y) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_x}{r_x} a_y & \frac{a_y}{r_y} a_x & \frac{a_x}{r_{xy}} a_y + \frac{a_y}{r_{xy}} a_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} & -\frac{\partial}{\partial \alpha_y}(a_x) & \frac{\partial}{\partial \alpha_x}(a_y) - \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial \alpha_x}(a_y) & \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} & \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{\partial}{\partial \alpha_y}(a_x) \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}^T} \underbrace{\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{M}} + a_x a_y \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{r_x} & -\frac{1}{r_{xy}} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{r_{xy}} & -\frac{1}{r_y} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\partial}{\partial \alpha_x}(a_y) & \frac{\partial}{\partial \alpha_y}(a_x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \underbrace{\begin{Bmatrix} P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{zz} \\ V_{xx} \\ V_{yy} \end{Bmatrix}}_{\rho} = 0$$

Constitutive

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \beta \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & -z & -z\nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 & -z\nu & -z & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\beta} & 0 & 0 & \frac{-2z}{\beta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx0} \\ \varepsilon_{yy0} \\ \gamma_{xy0} \\ \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\kappa}}$$

$$\beta = \frac{E}{1-\nu^2}$$

Victor E. Saouma

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese, potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

sottili. Così, il design delle conchiglie ha spesso utilizzato due tipi di semplificazioni per facilitare l'analisi.

Mathematical Formulations Spesso si assume o si prova certi termini di relativa insignificante importanza e si eliminano questi termini dall'equazione di interesse. §35.1.3 trascurando i termini z/r quando appaiono con unità, insieme all'assunzione di stress aereo, $\sigma_z = 0$. Lo scopo di questa semplificazione è quello di ridurre il numero dei termini pur ottenendo una soluzione matematica ragionevole.

Physical Formulations Anche in questo caso, possiamo assumere una specifica azione strutturale per semplificare l'analisi: questa ipotesi può essere utilizzata per sostituire il sistema di conchiglia con una struttura più semplice equivalente.

44 Queste semplificazioni sono auspicabili per la progettazione di cemento armato, dove l'analisi precisa non è giustificata a causa della mancanza di accuratezza costruttiva. Anche così, è vitale per il progettista comprendere la reale azione strutturale ottenuta solo attraverso le caratteristiche fisiche del sistema e la corrispondente formulazione matematica.

45 Sono considerate due teorie semplificate di analisi, la teoria delle conchiglie basse e della teoria della membrana, che saranno presentate nelle sezioni da seguire.

35.1.4.1 Gusci ribassati

46 Le conchiglie superficiali sono la prima di due teorie semplificate delle conchiglia (l'altra è la teoria della membrana) che esamineremo.

35.1.4.1.1 Ipotesi

47 Shallow shell theory will utilize the following assumptions:

1. La pendenza della conchiglia è piccola rispetto ad un piano di riferimento (spesso il piano orizzontale per i tetti).
2. La curvatura superficiale è piccola.
3. I confini delle conchiglie sono tali che i carichi superficiali vengono trasportati da fattori di stress in-plano (N_x, N_y e N_{xy}). Pertanto le deflettenze trasversali saranno molto più grandi delle deflettori in-plano.
4. I cambiamenti nella curvatura della superficie sono piccoli.

35.1.4.1.2 Applicazione delle ipotesi

48 Ora applicheremo queste ipotesi a Eqs. 35.28 e 35.42.

- Assunzione 1 ci permette di trascurare la componente radiale del carico.
- Assunzione 2, i termini contenenti V nei primi due di Eq. 35.28 e N nel terzo di Eq. 35.28 sono piccole, questo vale anche per i termini con w nei primi tre di Eq. 35.42 e

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

la u e v termini negli ultimi tre 35.42. Tuttavia, non possiamo semplicemente cadere questi termini senza prima considerare la terza ipotesi.

- L'Assunzione 3 riguarda il guscio ad un arco piatto, che sotto carico uniforme, lo stress assiale e il controllo di spostamenti verticali. 35.28, non sono trascurabili nel confrontare il cambiamento del transverso shear risultante.
- Assunzione 4 ci permette di prendere a_x e a_y come costanti.

49 Combinando i presupposti 2 e 3 insieme, possiamo cadere V dai primi due termini di Eq. 35.28 ma non N dal terzo. 35.42 ci è permesso di far cadere l'effetto degli spostamenti in aereo (u e v termini) sulle coppie di stress ma non l'effetto dello spostamento (w termini) sui risultati dello stress in-plane.

50 Eqs. 35.28 e 35.42 può essere riscritto come:

$$\frac{1}{a_x}\frac{\partial N_x}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y}\frac{\partial N_{yx}}{\partial \alpha_y} + p_x = 0 \tag{35.43a}$$

$$\frac{1}{a_y}\frac{\partial N_y}{\partial \alpha_y} + \frac{1}{a_x}\frac{\partial N_{xy}}{\partial \alpha_x} + p_y = 0 \tag{35.43b}$$

$$\frac{1}{a_x}\frac{\partial V_x}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y}\frac{\partial V_y}{\partial \alpha_y} + \frac{N_x}{r_x} + \frac{2N_{xy}}{r_{xy}} + \frac{N_y}{r_y} + p_z = 0 \tag{35.43c}$$

$$-\frac{1}{a_y}\frac{\partial M_y}{\partial \alpha_y} + \frac{1}{a_x}\frac{\partial M_{xy}}{\partial \alpha_x} + V_y = 0 \tag{35.43d}$$

$$-\frac{1}{a_x}\frac{\partial M_x}{\partial \alpha_x} - \frac{1}{a_y}\frac{\partial M_{yx}}{\partial \alpha_y} + V_x = 0 \tag{35.43e}$$

and

$$N_x = K\left[\frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_x} + \nu\left(\frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y} - \frac{w}{r_y}\right)\right] \tag{35.44a}$$

$$N_y = K\left[\frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y} - \frac{w}{r_y} + \nu\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_x}\right)\right] \tag{35.44b}$$

$$N_{xy} = N_{yx} = Gh\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial v}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y}\frac{\partial u}{\partial \alpha_y} - \frac{2w}{r_{xy}}\right) \tag{35.44c}$$

$$M_x = -D\left(\frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_x^2} + \nu\frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_y^2}\right) \tag{35.44d}$$

$$M_y = -D\left(\frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_y^2} + \nu\frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_x^2}\right) \tag{35.44e}$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D(1-\nu)\left(\frac{1}{a_x a_y}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y}\right) \tag{35.44f}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

51 Osserviamo che abbiamo equazioni separate di travi e lastre, abbinate alle N termini in Eq. 35.43c e la w in termini 35.44a attraverso 35.44c.

- Eqs. 35.43a e 35.43b sono espressioni per un piatto caricato nel suo piano (*equazioni di raggio profondo*).
- Eqs. 35.44a attraverso 35.44c sono anche equazioni di raggio profondo, tranne per le w - Eqs. 35.44d attraverso 35.44f sono espressioni per una piastra caricata lateralmente (*lastra piegata*).
- Eqs. 35.43c attraverso 35.43e sono anche em equazioni di lastra ad eccezione della N in termini 35.43c.

35.1.4.1.3 Equazione della trave profonda

52 Ora uniamo le espressioni di cui sopra in una singola espressione superficiale del guscio, ma prima dobbiamo ricavare le equazioni profonde del fascio e della lastra. 35.44a, 35.44b e 35.44c

$$\begin{aligned} N_x - \nu N_y &= K(1-\nu^2)\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_x}\right) \\ N_y - \nu N_x &= K(1-\nu^2)\left(\frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y} - \frac{w}{r_y}\right) \\ 2(1+\nu)N_{xy} &= K(1-\nu^2)\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial v}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y}\frac{\partial u}{\partial \alpha_y} - \frac{2w}{r_{xy}}\right) \end{aligned}$$

53 Differenziato due volte e combinato, otteniamo

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2 (N_x - \nu N_y)}{\partial \alpha_y^2} - \frac{2(1+\nu)}{a_x a_y}\frac{\partial^2 N_{xy}}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y} + \frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2 (N_y - \nu N_x)}{\partial \alpha_x^2} \\ &= -K(1-\nu^2)\left[\frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_x^2}\left(\frac{w}{r_y}\right) - \frac{2}{a_x a_y}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y}\left(\frac{w}{r_{xy}}\right) + \frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_y^2}\left(\frac{w}{r_x}\right)\right] \end{aligned} \tag{35.45}$$

54 Quando r_x, r_y e r_{xy} sono assunti costanti, abbiamo impostato

$$\nabla_R^2 w = \left(\frac{1}{r_y a_x^2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_x^2} - \frac{2}{r_{xy} a_x a_y}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y} + \frac{1}{r_x a_y^2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_y^2}\right) w$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

55 Sostituzione dei risultati dello stress con le seguenti funzioni di stress

$$N_x = \frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_y^2} - \int p_x a_x d\alpha_x \tag{35.46}$$

$$N_y = \frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_x^2} - \int p_y a_y d\alpha_y \tag{35.47}$$

$$N_{xy} = -\frac{1}{a_x a_y}\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y} \tag{35.48}$$

e sostituire in Eq. 35.45, arriviamo alla nostra equazione differenziale per raggi profondi

$$\nabla^4 F + K(1-\nu^2)\nabla_R^2 w = \int \frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2 p_x}{\partial \alpha_y^2} a_x d\alpha_x + \int \frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2 p_y}{\partial \alpha_x^2} a_y d\alpha_y - \nu\frac{1}{a_x}\frac{\partial p_x}{\partial \alpha_x} - \nu\frac{1}{a_y}\frac{\partial p_y}{\partial \alpha_y} \tag{35.49}$$

where

$$\nabla^4 F = \left(\frac{1}{a_x^4}\frac{\partial^4}{\partial \alpha_x^4} + \frac{2}{a_x^2 a_y^2}\frac{\partial^4}{\partial \alpha_x^2 \partial \alpha_y^2} + \frac{1}{a_y^4}\frac{\partial^4}{\partial \alpha_y^4}\right) F$$

56 If $r_x = r_y = r_{xy} = \infty$, $a_x d\alpha_x = dx$e $a_y d\alpha_y = dy$e $p_x = p_y = 0$, Eq. 35.49 riduce a

$$\nabla^4 F = 0$$

35.1.4.1.4 Equazione della piastra

57 Nel derivare l'equazione della lastra, sostituiamo prima i valori di V_x e V_y da Eqs. 35.43d e 35.43e in Eq. 35.43c per creare l'equazione combinata

$$\frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2 M_x}{\partial \alpha_x^2} - 2\frac{1}{a_x a_y}\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y} + \frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2 M_y}{\partial \alpha_y^2} + \frac{N_x}{r_x} + \frac{2N_{xy}}{r_{xy}} + \frac{N_y}{r_y} + p_z = 0 \tag{35.50}$$

58 Eq sostitutivi. 35.44d, 35.44e e 35.44f in 35.50 per ottenere

$$-\nabla^4 w + \frac{1}{D}\left(\frac{N_x}{r_x} + \frac{2N_{xy}}{r_{xy}} + \frac{N_y}{r_y}\right) = -\frac{p_z}{D}$$

59 Ancora una volta, inseriremo le funzioni di stress di Eq. 35.46, 35.47 e 35.48 nella nostra equazione differenziale 35.1.4.1.4 generare l'equazione differenziale della lastra piegata

$$\nabla^4 w - \frac{1}{D}\nabla_R^2 F = \frac{p_z}{D} - \frac{1}{D}\left(\frac{1}{r_x}\int p_x a_x d\alpha_x + \frac{1}{r_y}\int p_y a_y d\alpha_y\right) \tag{35.51}$$

If $r_x = r_y = r_{xy} = \infty$, Eq. 35.51 reduces to

$$\nabla^4 w = \frac{p_z}{D}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

35.1.4.1.5 Equazione dei gusci ribassati

60 Le equazioni differenziali del fascio profondo (35.49) e lastra piegata (35.51) sono tenuti a risolvere il problema *gusci superficiali*. Le equazioni differenziali simultanee possono essere riscritte sotto forma di

$$\nabla^4 F + K(1-\nu^2)\nabla_R^2 w = f(p) \tag{35.52}$$

$$\nabla^4 w - \frac{1}{D}\nabla_R^2 F = f'(p) \tag{35.53}$$

dove $f(p)$ e $f'(p)$ sono i lati destro di Eqs. 35.49 e 35.51Se operiamo su Eq. 35.52 by ∇^4 e su Eq. 35.53 by $K(1-\nu^2)\nabla_R^2$e

61 Combinare otteniamo

$$\nabla^8 F + \frac{12(1-\nu^2}{h^2}\nabla_R^4 F = \nabla^4 f(p) + K(1-\nu^2)\nabla_R^2 f'p \tag{35.54}$$

62 Tuttavia, se operiamo su Eq. 35.52 by $(1/D)\nabla_R^2$ e su Eq. 35.53 by ∇^4 e combinare, otteniamo la soluzione per i gusci poco profondi

$$\nabla^8 w + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2}\nabla_R^4 w = \frac{1}{D}\nabla_R^2 f(p) + \nabla^4 f'(p)$$

35.1.4.2 Teoria membranale

La teoria del Membrane è il secondo metodo semplificato che esamineremo, ma ci concentreremo più sulle ipotesi e sulla teoria della metodologia.

35.1.4.2.1 Ipotesi

63 Membrane theory will utilize the following assumptions:

1. Tutto piegare nella shell è trascurato. Pertanto Eq. 35.28 diventa

$$\begin{aligned}
\Sigma F_x &= \frac{\partial(N'_x a_y)}{\partial \alpha_x} - N'_y\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + N'_{xy}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + \frac{\partial(N'_{yx}a_x)}{\partial \alpha_y} + p_x a_x a_y = 0\\
\Sigma F_y &= \frac{\partial(N'_y a_x)}{\partial \alpha_y} - N'_x\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + N'_{yx}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial(N'_{xy}a_y)}{\partial \alpha_x} + p_y a_x a_y = 0\\
\Sigma F_z &= \frac{N'_x}{r_x} + \frac{N'_{xy}}{r_{xy}} + \frac{N'_{yx}}{r_{xy}} + \frac{N'_y}{r_y} + p_z = 0
\end{aligned} \tag{35.55}$$

2. Da quando presumiamo $N_{xy} = N_{yx}$, le tre equazioni sopra hanno solo tre sconosciuti N'_x, N'_y e $N'_{xy} = N'_{yx}$. I segni principali indicano che i valori sono approssimativi.
3. Tutte le sollecitazioni a membrana agiscono nel piano della conchiglia.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

35.1.4.2.2 Teoria

64 La teoria della membrana può fornire una base di progettazione ragionevole se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

1. Lo spostamento dovuto ai risultati dello stress della membrana non aumenta sostanzialmente la flessione del guscio.
2. Una distribuzione uniforme del carico deve essere vista su tutta la superficie della shell.
3. I confini possono fornire le forze e permettere gli spostamenti richiesti dai risultati dello stress della membrana.

65 Di solito la teoria della membrana è insufficiente ma può essere trovato utile per tetti emisferici o serbatoi cilindrici.

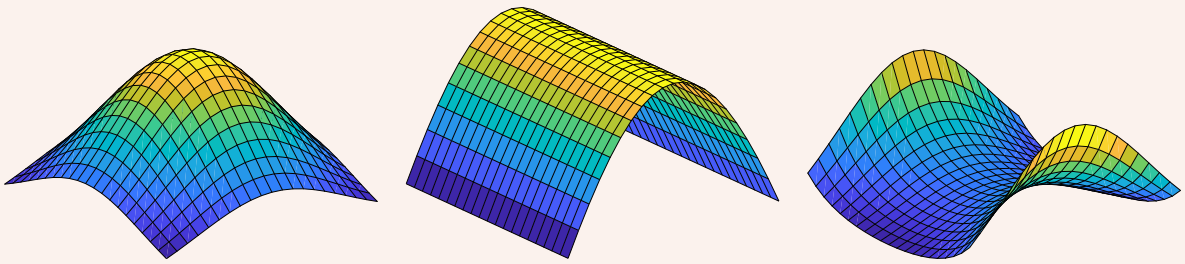
35.1.4.2.3 Classificazione

66 Le conchiglie sottili possono essere classificate in tre categorie principali. *curvatura gaussiana*Fico. 35.10.

Traduzione: le conchiglie sono quelle della curvatura gaussiana positiva e si formano da due famiglie di curve entrambe con la stessa direzione.

Monoclava le conchiglie sono quelle della curvatura gaussiana zero e si formano da una famiglia di curve.

Anticlastico le conchiglie sono quelle di curvatura negativa e si formano da due famiglie di curve di direzione opposta.



(a) Synclastic (dome) (b) Monoclastic (Barrel Vault) (c) Anticlastic (Hyperboloid-Paraboloid)

Figura 35.10: Classification of shells

67 La differenza di proprietà principale tra le tre categorie è la propagazione degli effetti dei bordi nelle conchiglie. Nelle conchiglia sinclastiche, gli effetti del bordo spesso umido

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

rapidamente e sono limitati a una zona stretta vicino al bordo. Questa proprietà permette un uso valido della teoria delle membrane in tutto il guscio, tranne che ai confini.

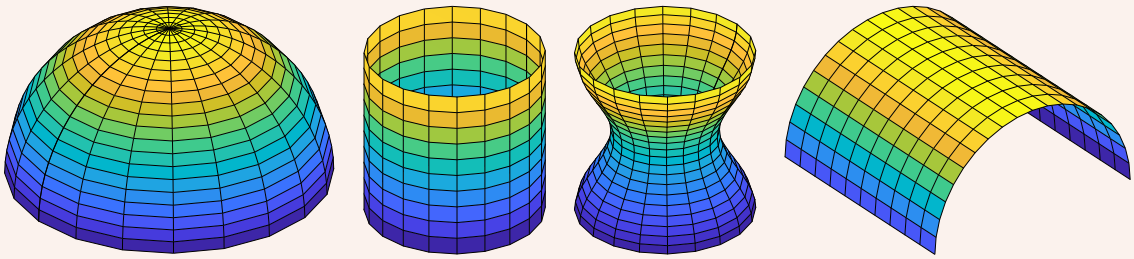
68 Nelle gusci singolarmente curve, gli effetti del bordo sono smorzati simili alla shell sincronica, ma si propagano più lontano nella conchiglia dal bordo. Nelle conchiglie anticlastiche, l'umidificazione è molto più piccola degli altri due che permettono effetti di confine per controllare la maggior parte della shell.

69 Un altro tipo di classificazione definisce i sistemi delle conchiglie come rotazionale o traduttiva. I domi e i serbatoi sono spesso classificati come sistemi rotazionali, mentre le botti cilindriche, i paraboloidi ellittici e i parabotolidi iperbolici sono considerati traduttivi.

70 Infine, non tutte le conchiglie sono analiticamente definite (non solo "meccanicamente" analizzate). Tali gusci (formazioni estremamente determinate) sono stati progettati da Isler (§15.5.2.2) e Musmeci (§15.5.2.3).

35.1.4.2.4 Specializzazione

71 L'assunzione della membrana può essere applicata all'analisi di una serie di gusci, Fig. 35.11.



(a) Dome (b) Shell Wall (c) Hyperboloid (d) Barrel

Figura 35.11: Esempi di conchiglie dove l'assunzione della membrana è (per lo più) valida

72 Tuttavia, ci si può aspettare di avere localizzato i momenti "parassitari" alla base.

73 In ciascuna di queste conchiglie, viene fatto un insieme di ipotesi e le equazioni di equilibrio governativo (Eq. 35.55), è ulteriormente semplificata, Tabella 35.4, e le equazioni derivano Fig. 35.12.

74 Di seguito, considereremo solo la derivazione delle equazioni associate al barile, altri possono essere trovati in (Billington, 1965 PDF).

COPIA DI REVISIONE

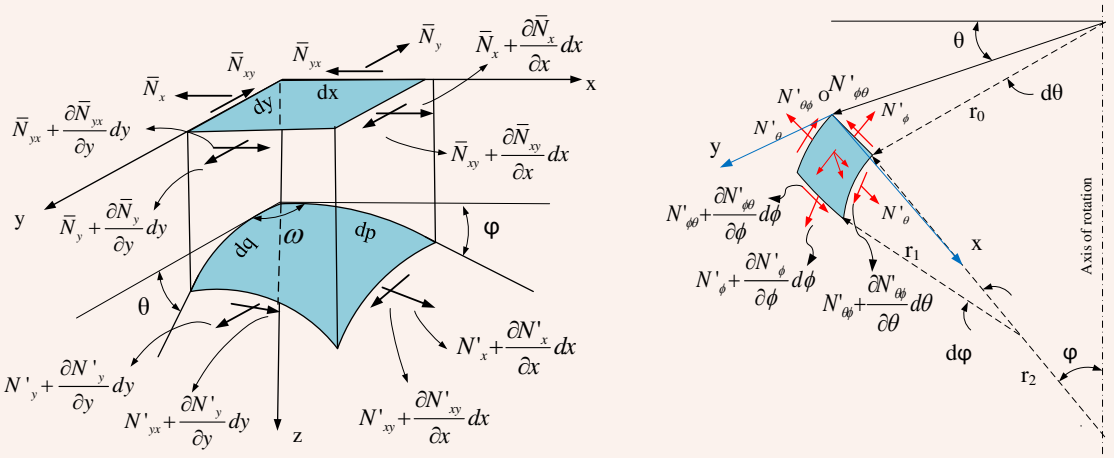
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 35.4: Assunzioni e equazioni di governo per le strutture a membrana

General Equations					
					$\frac{\partial(N'_x a_y)}{\partial \alpha_x} - N'_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + N'_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + \frac{\partial(N'_{yx} a_x)}{\partial \alpha_y} + p_x a_x a_y = 0$ $\frac{\partial(N'_y a_x)}{\partial \alpha_y} - N'_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + N'_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial(N'_{xy} a_y)}{\partial \alpha_x} + p_y a_x a_y = 0$ $\Sigma \frac{N'_x}{r_x} + \frac{N'_{xy}}{r_{xy}} + \frac{N'_{yx}}{r_{xy}} + \frac{N'_y}{r_y} + p_z = 0$
Dome					
$\alpha_x = \theta$ $\alpha_y = \phi$	$a_x = r_0$ $a_y = r_1$	$r_x = r_1$ $r_y = r_1$	$r_0 = r_2 \sin\phi$ $N'_x = N'\theta$	$N'_{xy} = N'_{\theta\phi}$ $N'_y = N'_\phi$	$\frac{dN'_\phi r_0}{d\phi} - N'_\theta \frac{dr_0}{d\phi} + p_\phi r_0 r_1 = 0$ $\frac{N'_\theta}{r_2} + \frac{N'_\phi}{r_1} + p_z = 0$
Shell Wall					
$\alpha_x = \theta$ $\alpha_y = y$	$a_x = r$ $a_y = 1$	$r_x = r$ $r_y = \infty$	$N'_x = N'_\theta$ $N'_{xy} = N'_{\theta y}$		$N'_\theta = -p_z r$ $N'_{y\theta} = -\int \left(\frac{1}{r}\frac{\partial N'_\theta}{\partial \theta} + p_\theta\right) dy + f_1(\theta)$ $N'_y = -\int \left(\frac{1}{r}\frac{\partial N'_{\theta y}}{\partial \theta} + p_y\right) dy + f_2(\theta)$
Hyperbolic Shell					
$\alpha_x = \theta$ $\alpha_y = y$	$a_x = r$ $a_y = 1$	$r_x = r$ $r_y = \infty$	$r_{xy} = \infty$		$\frac{dB_y}{dy} r + p_r = 0$ $\frac{dV_y}{dy} r + N_\theta + p_z r = 0$ $-\frac{dM_y}{dy} r + V_y r = 0$
Circular Cylindrical Shell					
$\alpha_x = x$ $\alpha_y = \phi$	$a_x = 1$ $a_y = r$	$r_x = \infty$ $r_y = r$	$N'_{xy} = N'_{x\phi}$ $N'_y = N'_\phi$		$N'_\phi = -p_z r$ $N'_{x\phi} = -\frac{1}{r}\int \frac{\partial N'_\phi}{\partial \phi} dx - \int p_\phi dx + f_1(\phi)$ $N'_x = -\frac{1}{r}\int \frac{\partial N'_{\phi x}}{\partial \phi} dx - \int p_x dx + f_2(\phi)$
Translation Shell Double Curvature					
$a_x = r_x$	$a_y = r_y$	$r_{xy} = \infty$	$\frac{\partial r_y}{\partial \alpha_x} = \frac{\partial r_x}{\partial \alpha_y} = 0$		$\frac{\partial N'_x}{\partial \alpha_x} r_y + \frac{\partial N'_{yx}}{\partial \alpha_y} r_x + p_x r_x r_y = 0$ $\frac{\partial N'_y}{\partial \alpha_y} r_x + \frac{\partial N'_{xy}}{\partial \alpha_x} r_y + p_y r_x r_y = 0$ $\frac{N'_x}{r_x} + \frac{N'_y}{r_y} + p_z = 0$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Hyperboloid (b) Dome

Figura 35.12: Gratuiti diagrammi del corpo di elemento iperboloide e cupola infinitesimale

35.2 Analisi di un singolo barile (copertura cilindrica circolare)

35.2.1 Introduzione

75 Questa sezione si concentra sull'analisi di un guscio cilindrico circolare utilizzando sia le teorie delle conchiglie basse che della teoria della membrana, e sarà limitata a una shell semplicemente sostenuta da due travi bordo. I risultati dello stress, le coppie di stress e gli spostamenti saranno prima derivati dalla teoria della membrana, e ripetuti utilizzando la teoria dei gusci poco profondi.

76 Questa sezione affronterà anche la teoria della flessione e ne deriveremo l'equazione differenziale dell'ottavo ordine di governo e discuteremo il cation delle otto costanti arbitrarie di integrazione. Queste costanti saranno a loro volta sostituite nelle equazioni per i risultati dello stress, le coppie e gli spostamenti.

77 Le coperture cilindriche circolari o le volte a botte sono spesso definite come una lastra curvata... tagliata da un cilindro completo. La lastra è curva in una sola direzione e può quindi essere classificata come una conchiglia singolamente curva, come si è discusso nella sezione precedente.

78 Le conchiglie cilindriche sono solitamente descritte sia lunghe, intermedie o corte, a seconda del rapporto di raggio trasversale r a lunghezza longitudinale L. Una classificazione (arbitraria):

COPIA DI REVISIONE

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

1. Long shells where $r/L < 0.4$
2. Intermediate shells where $0.4 < r/L < 2.0$
3. Short shells where $r/L > 2.0$

79 Nelle gusci lunghe, i carichi della linea producono solitamente forze interne di notevole grandezza in tutta la superficie del guscio e queste forze interne sono generalmente così grandi che i valori delle membrane diventano trascurabili dal confronto. Il sistema primario, quindi, non corrisponde strettamente al vero sistema. r/L diminuisce, il sistema reale si avvicina al comportamento di un fascio della sezione trasversale curva Fig. Il mio nome.

80 In brevi gusci la linea carichi producono forze interne nella shell che sono solitamente ristretti alla regione vicino ai bordi longitudinali. In effetti, come r/L aumenta, la maggior parte della conchiglia si comporta come assunto nel sistema primario, cioè con valori di membrana solo. In tali casi, le conchiglie corte sono come archi a botte sottili sostenuti vicino ai bordi longitudinali da diaframmi leggermente curvati. Questi diaframmi portano la spinta dell'arco ai telai trasversali da stress in-plano come fasci profondi.

81 Con riferimento alla definizione geometrica di un elemento arbitrario della shell in Fig. 35.13a, un arco circolare avrà

$$\begin{array}{llll} \alpha_x = \theta & a_x = r & r_x = r & N'_{xy} = N'_{\theta y} \\ \alpha_y = y & a_y = 1 & r_y = \infty & N'_x = N'_\theta \end{array} \tag{35.56}$$

dove r è una costante ϕ è misurato dal bordo longitudinale.

82 Il diagramma del corpo libero corrispondente di un elemento infinitesimale della shell è mostrato in Fig. 35.13c, e sarà citato di seguito nella derivazione.

83 Poiché la teoria della membrana è solo un'approssimazione, la procedura è come segue:

Sistema primario: Ciò si ottiene riducendo la teoria generale alla teoria della membrana, e attraverso la teoria delle membrane i carichi superficiali sono resistiti solo dai risultati dello stress.

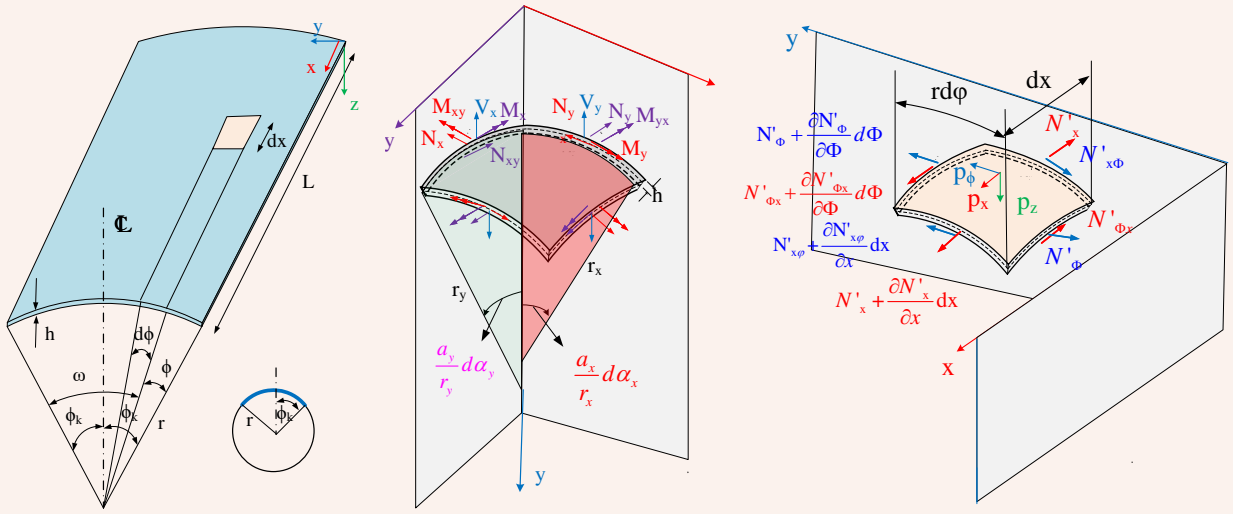
Errori: Questi corrispondono agli effetti del bordo incompatibili, o le forze richieste dalla teoria della membrana ai bordi liberi.

Correzioni: I carichi di linea (effetto bordo unico) vengono applicati lungo i bordi liberi.

Compatibilità: L'equilibrio può essere raggiunto determinando il numero di correzioni necessarie per rimuovere gli errori della teoria delle membrane. Nel nostro esempio, si impostano i carichi linea pari ai risultati dello stress a membrana lungo il bordo libero.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Shell (b) Arbitrary shell element (Fig. 35.1b for reference) (c) Element

Figura 35.13: Schema corpo libero di un elemento shell circolare infinitesimale

35.2.2 Teoria membranale

84 Prima di esaminare una completa analisi condotta attraverso gusci poco profondi, esamineremo prima la teoria della membrana. Tuttavia, ci concentreremo solo sulle derivazioni dei risultati dello stress e degli spostamenti.

35.2.2.1 Risultanti delle tensioni

Sistema primario

85 Con le ipotesi date da Eq. 35.56, Eq. 35.55 sono ora ridotti a:

$$\begin{aligned} N'_{\phi} &= -p_z r \\ N'_{x\phi} &= -\frac{1}{r}\int \frac{\partial N'_{\phi}}{\partial \phi} dx - \int p_{\phi} dx + f_1(\phi) \\ N'_{x} &= -\frac{1}{r}\int \frac{\partial N'_{\phi x}}{\partial \phi} dx - \int p_x dx + f_2(\phi) \end{aligned} \tag{35.57}$$

86 Si noti che i sottoscritti utilizzati sono tali da x è l'asse orizzontale, y l'asse verticale o tangenziale, e z l'asse radiale. p è misurato dal bordo longitudinale.

87 Le espressioni che ne derivano dallo stress sono ora scritte sotto forma di tre equazioni con tre forze sconosciute N'_{ϕ}, N'_{x} e $N'_{x\phi} = N'_{\phi x}$, e quindi si stabilisce un sistema primario.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

88 Questi fattori di stress possono essere facilmente calcolati per carichi distribuiti, come ad esempio i risultati dello sforzo dovuti al carico morto della shell saranno derivati. 35.5

89 Per un carico uniforme morto di shell P_d i componenti di carico sono:

$$\begin{aligned} p_z &= p_d \cos(\phi_k - \phi) \\ p_\phi &= -p_d \sin(\phi_k = \phi) \\ p_x &= 0 \end{aligned}$$

e N'_ϕ può essere ottenuto direttamente dalla prima equazione di 35.57

$$N'_\phi = -p_d r \cos(\phi_k - \phi) \tag{35.58}$$

90 Quando questa espressione N'_ϕ viene sostituito nel secondo di Eqs. 35.57

$$N'_{x\phi} = \frac{1}{r} \int \frac{\partial \left[p_d r \cos\left(\phi_k - \phi\right) \right]}{\partial \phi} dx + \int p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) dx + f_1(\phi)$$

Differenziando e integrando, otteniamo

$$N'_{x\phi} = p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) x + p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) x + f_1(\phi)$$

91 In un semplice raggio, $N'_{z\phi} = 0$ at $x = L/2$, da cui

$$f_1(\phi) = -p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) L$$

so that

$$N'_{x\phi} = 2p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) x - p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) L$$

or

$$N'_{x\phi} = -p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) L \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \tag{35.59}$$

92 Sostituire questo valore per $N'_{x\phi}$ nel terzo di Eq. 35.57 noi abbiamo

$$N'_x = -\frac{1}{r} \int \frac{\partial \left[-p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) L(1 - 2x/L) \right]}{\partial \phi} dx + f_2(\phi)$$

From which

$$N'_x = -p_d \frac{L}{r} \cos\left(\phi_k - \phi\right) \int \left(1 - \frac{2x}{L}\right) dx + f_2(\phi)$$

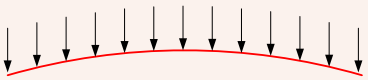
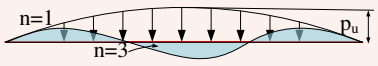
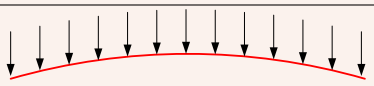
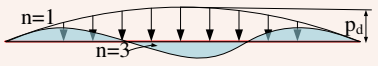
which gives

$$N'_x = -p_d \frac{L}{r} \cos\left(\phi_k - \phi\right) x \left(1 - \frac{x}{L}\right) + f_2(\phi)$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 35.5: Comparison of membrane stress resultant distributions under different loading

Membrane stress resultant Kips/ft	Load ksf	Shell constants ft	Transverse distributions	Longitudinal distributions
				
N'_ϕ $N'_{\phi x}$ N'_x	p_u p_u p_u	r $r(L/r)$ $r(L/r)^2$	$\cos^2(\phi_k-\phi)$ $\cos(\phi_k-\phi)\sin(\phi_k-\phi)$ $\cos^2(\phi_k-\phi)-\sin^2(\phi_k-\phi)$	1 $(3/2)(1-2x/L)$ $(3x/2L)(1-x/L)$
				
N'_ϕ $N_{\phi x}$ N'_z	p_d p_d p_d	r $r(L/r)$ $r(L/r)^2$	$\cos(\phi_k-\phi)$ $\sin(\phi_k-\phi)$ $\cos(\phi_k-\phi)$	1 $1-2x/L$ $(x/L)(1-x/L)$
				
N'_ϕ $N'_{\phi\pi}$ N''_π	p_u p_u p_u	r $r(L/r)$ $r(L/r)^2$	$\cos^2(\phi_k-\phi)$ $\cos(\phi_k-\phi)\sin(\phi_k-\phi)$ $\cos^2(\phi_k-\phi)-\sin^2(\phi_k-\phi)$	$(1/n)\sin(n\pi x/L)$ $(3/n^2\pi)\cos(n\pi x/L)$ $(3/n^3\pi^2)\sin(n\pi x/L)$
				
N'_ϕ $N'_{\phi x}$ N'_x	p_d p_d p_d	r $r(L/r)$ $r(L/r)^2$	$\cos(\phi_k-\phi)$ $\sin(\phi_k-\phi)$ $\cos(\phi_k-\phi)$	$(1/n)\sin(n\pi x/L)$ $(2/n^2\pi)\cos(n\pi x/L)$ $(2/n^3\pi^2)\sin(n\pi x/L)$

(all stress resultants have a negative sign)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

93 In a simple beam the longitudinal force N'_x must be zero at $x = 0$ and $x = L$, so that $f_2(\phi) = 0$ and

$$N'_x = -p_d \frac{L}{r} \cos(\phi_k - \phi)\, x \left(1 - \frac{x}{L}\right) \tag{35.60}$$

94 Tabella 35.5 queste equazioni sono separate in tre parti per sottolineare la distribuzione di stress della membrana provoca una conchiglia cilindrica. La prima parte di ogni equazione contiene termini che dipendono solo dalla grandezza del carico e dalle dimensioni della shell. Le parti seconda e terza di ogni equazione danno, rispettivamente, il trasverso e le distribuzioni longitudinali dei risultati dello stress. Le distribuzioni trasversali e longitudinali non sono interconnesse, in modo che dove due tipi di carichi superficiali hanno la stessa distribuzione trasversale ma diverse distrizioni longitudinali le distribuzioni transverse dei risultati dello stress saranno - Lo stesso.

95 I risultati di Eqs. 35.58 to 35.60 sono tracciati in Fig. 35.14 per un cilindro circolare completo semplicemente supportato.

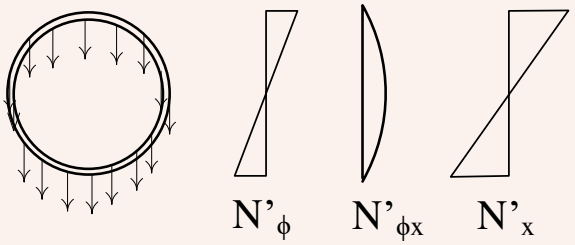


Figura 35.14: La distribuzione risultante di stringa in una shell circolare completa semplicemente supportata

96 La stessa distribuzione della forza può anche essere ottenuta considerando la conchiglia come un fascio circolare cavo, che si estende nella direzione del suo asse di rotazione.

97 Infatti, Eqs. 35.58 to 35.60 dare valori di $N'_\phi, N'_{x\phi}$ e N'_x che possono essere ottenuti direttamente dalle formule di trave ordinarie, in cui

$$\begin{aligned} f_\phi &= \frac{N'_\phi}{h} = -\frac{p_z T}{h} \\ v &= \frac{N'_{x\phi}}{h} = -\frac{VQ}{2Ih} \\ f_x &= \frac{N'_z}{h} = -\frac{My}{I} \end{aligned} \tag{35.61}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove, per una sezione circolare trasversale,

$$\begin{aligned} M &= p_d 2\pi r \left(\frac{Lx}{2} - \frac{x^2}{2}\right) \\ y &= r\cos\left(\phi_k - \phi\right) \\ I &= \pi h r^3 \\ V &= p_d 2\pi r \left(\frac{L}{2} - x\right) \\ Q &= 2hr^2 \sin\left(\phi_k - \phi\right) \end{aligned} \tag{35.62}$$

in modo che queste equazioni possano essere riscritte come

$$\begin{aligned} N'_\phi &= -p_d r\cos\left(\phi_k - \phi\right) \\ \frac{N'_{x\phi}}{h} &= -\frac{p_d 2\pi r[(L/2) - x]2hr^2 \sin\left(\phi_k - \phi\right)}{\pi h r^3 (2h)} \end{aligned} \tag{35.63}$$

which gives

$$N'_{z\phi} = -p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) L\left(1 - \frac{2x}{L}\right) \tag{35.64}$$

and

$$\frac{N'_z}{h} = -\frac{p_d 2\pi r\left[(Lx/2) - x^2/2\right] r\cos\left(\phi_i - \phi\right)}{\pi h r^3}$$

which gives

$$N'_x = -p_d \frac{L}{r}\cos\left(\phi_k - \phi\right) x\left(1 - \frac{x}{L}\right) \tag{35.65}$$

Si noti che Eq. 35.64 e 35.65 sono gli stessi di 35.59 e 35.60.

35.2.2.1.1 Errori

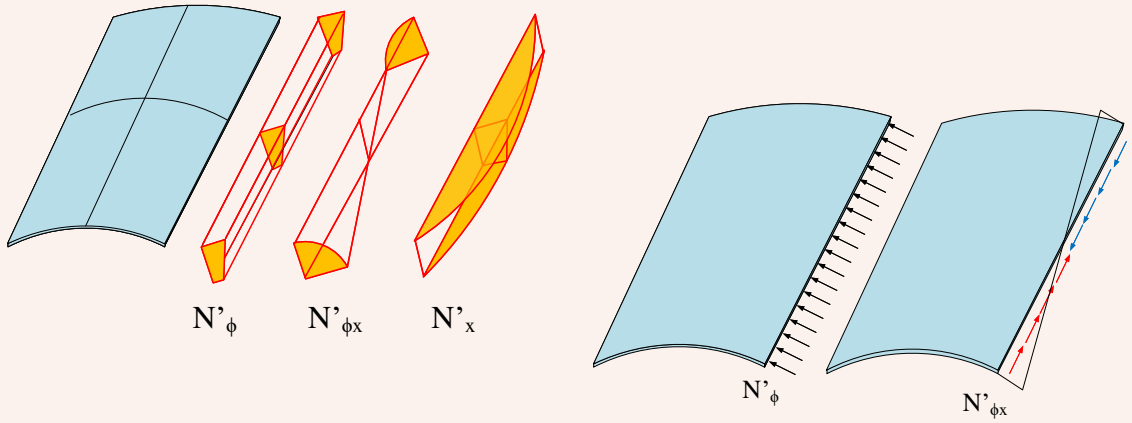
98 Le reazioni del bordo longitudinale devono essere uguali ai valori della membrana N'_ϕ e $N'_{x\phi}$ per la teoria della membrana di produrre i risultati dello stress interno corretti, ma ai bordi liberi del guscio queste reazioni sono zero.

99 Per la teoria della membrana di dare un quadro corretto dei risultati dello stress interno ci devono essere reazioni ai bordi longitudinali pari ai valori della membrana N'_ϕ e $N'_{z\phi}$.

100 La distribuzione dei valori della membrana in una conchiglia cilindrica è mostrata nella figura. 35.15a e le reazioni di bordo richieste in Fig. 35.15b.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Membrane forces (b) Required Edge Reactions

Figura 35.15: Edge effects

35.2.2.1.2 Correzione

101 Se la shell ha bordi liberi, queste reazioni sono zero. Per tener conto della mancanza di forze di reazione dei bordi libere, dobbiamo applicare correzioni o carichi di linea, $T_L = -N'_\phi$ e $S_L = -N'_{\phi x}$ che deve essere applicato per dare le vere reazioni risultante.

102 Teoria di Bending (§35.2.3) deve essere considerato per determinare gli spostamenti e le forze interne prodotte dai carichi di linea nella fase di correzione dell'analisi. Per semplicità, i carichi lineari distribuiti uniformemente possono essere assunti come una somma di carichi parziali e rappresentati da una serie Fourier. T_LFico. 35.16 può essere rappresentato da una serie Fourier.

$$(T_L)_x = \frac{4}{\pi} T_L \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L} \tag{35.66}$$

I carichi superficiali devono essere espressi anche da una serie Fourier per fornire forze e deformazioni compatibili lungo la lunghezza dei bordi liberi. Ad esempio, la serie Foureri per il carico uniforme della shell è

$$(p_d)_x = \frac{4}{\pi} p_d \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

I primi tre termini della serie sono tracciati e possono essere visti in Fig. 35.17Le tre onde si assimilano a un carico uniforme, il primo termine è spesso considerato sufficiente per le lunghe conchiglie; tuttavia i brevi gusci richiedono spesso l'aggiunta del secondo mandato. §35.2.3.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

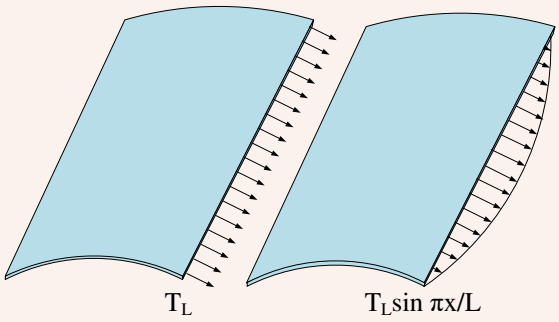


Figura 35.16: Corrective applied line load in circular shell

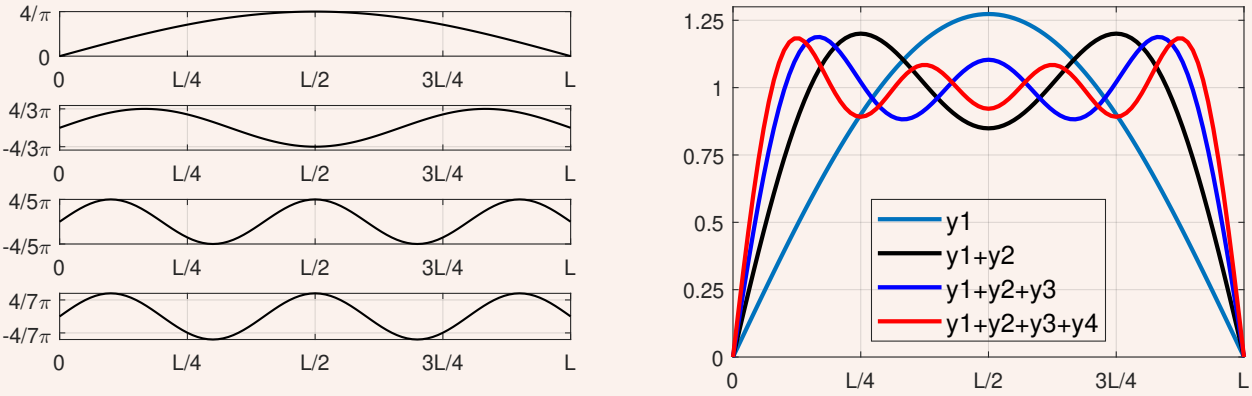


Figura 35.17: Sine series plot

35.2.2.2 Spostamenti

103 La derivazione delle equazioni di spostamento dalla teoria della membrana richiede richiamare le tensioni superficiali medie §35.1.3.3 (Eqs. 35.29, 35.30 e 35.31). Utilizzando le definizioni circolari delle conchiglie cilindriche (Eq.35.36), i ceppi possono essere riscritti come

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \varepsilon_\phi &= \frac{\partial v}{r\partial \phi} - \frac{w}{r} \\ \gamma_{x\phi} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{r\partial \phi} \end{aligned} \tag{35.67}$$

104 I ceppi possono essere riscritti ancora una volta per ospitare i risultati dello stress a membrana (§35.1.3.5.1)

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{Eh}\left(N'_x - \nu N'_\phi\right) \\ \varepsilon_y = \varepsilon_\phi = \frac{\partial v}{r\partial \phi} - \frac{w}{r} &= \frac{1}{Eh}\left(N'_\phi - \nu N'_x\right) \\ \gamma_{x\phi} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{r\partial \phi} &= \frac{2\left(1+\nu\right)}{Eh} N'_{x\phi} \end{aligned} \tag{35.68}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

105 Da v ha un impatto minimo sulle deformazioni, viene trascurato di semplificare le equazioni di spostamento. 35.68 è risolto per lo spostamento longitudinale

$$u = \frac{1}{Eh}\int N'_x dx + f_3(\phi) \tag{35.69}$$

Il terzo termine è risolto per l'equazione di spostamento tangenziale

$$v = -\frac{1}{r}\int \frac{\partial u}{\partial \phi} dx + \frac{2}{Eh}\int N'_{x\phi} dx + f_4(\phi) \tag{35.70}$$

106 Lo spostamento radiale è ottenuto dal secondo

$$w = \frac{\partial v}{\partial \phi} - \frac{rN'_\phi}{Eh} \tag{35.71}$$

107 Questi spostamenti possono essere valutati per qualsiasi tipo di carico, come esempio, consideriamo il caso della conchiglia sotto un carico uniformemente distribuito sulla superficie del guscio. La distribuzione uniforme longitudinale è approssimata dal primo termine di una serie Fourier da cui, con $k = n\pi/L, p = (4/\pi)p_d$e $n = 1$

$$\begin{aligned} p_x &= p\cos\left(\phi_k - \phi\right)\sin kx \\ p_\phi &= -p\sin\left(\phi_k - \phi\right)\sin kx \\ p_x &= 0 \end{aligned}$$

I risultati dello stress derivati da Eq. 35.57 diventare:

$$\begin{aligned} N'_\phi &= -pr\cos\left(\phi_k - \phi\right)\sin kx \\ N'_{x\phi} &= -\frac{2p}{k}\sin\left(\phi_k - \phi\right)\cos kx + f_1(\phi) \\ N'_x &= -\frac{2p}{rk^2}\cos\left(\phi_k - \phi\right)\sin kx - \frac{x}{r}\frac{\partial f_1(\phi)}{\partial \phi} + f_2(\phi) \end{aligned} \tag{35.72}$$

108 Quando Eq. 35.72 sono introdotti in Eqs. 35.69 to 35.71,

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

$$u = \frac{1}{Eh}\left[\frac{2p}{rk^8}\cos\left(\phi_k-\phi\right)\cos kx - \frac{x^2}{2r}\frac{\partial f_1(\phi)}{\partial\phi} + x f_2(\phi)\right] \tag{35.73}$$

$$\begin{aligned} v = &-\frac{1}{Ehr}\left[\frac{2p}{rk^8}\sin\left(\phi_k-\phi\right)\sin kx - \frac{x^3}{6r}\frac{\partial^2 f_1(\phi)}{\partial\phi^2} + \frac{x^2}{2}\frac{\partial f_2(\phi)}{\partial\phi}\right] \\ &- \frac{x}{r}\frac{\partial f_3(\phi)}{\partial\phi} - \frac{2}{Eh}\left[\frac{2p}{k^2}\sin\left(\phi_k-\phi\right)\sin kx - x f_1(\phi)\right] + f_4(\phi) \end{aligned} \tag{35.74}$$

$$\begin{aligned} w = &\frac{1}{Ehr}\left[\frac{2p}{rk^4}\cos\left(\phi_k-\phi\right)\sin lx + \frac{x^3}{6r}\frac{\partial^3 f_1(\phi)}{\partial\phi^3} - \frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 f_2(\phi)}{\partial\phi^2}\right] \\ &- \frac{x}{r}\frac{\partial^2 f_3(\phi)}{\partial\phi^2} + \frac{2}{Eh}\left[\frac{2p}{k^2}\cos\left(\phi_k-\phi\right)\sin kx + x\frac{\partial f_1(\phi)}{\partial\phi}\right] + \frac{\partial f_4(\phi)}{\partial\phi} \\ &+ \frac{pr^2}{Eh}\cos\left(\phi_k-\phi\right)\sin kx \end{aligned} \tag{35.75}$$

109 Nel caso di una shell semplicemente supportata,

$$f_1(\phi) = f_2(\phi) = f_3(\phi) = f_4(\phi) = 0$$

Eqs. 35.72 to 35.75 ridurre a:

$$u = \frac{2p}{Ehr}\frac{1}{k^3}\cos\left(\phi_k-\phi\right)\cos kx \tag{35.76}$$

$$v = -\frac{2p}{Eh}\left(\frac{1}{r^2}\frac{1}{k^4} + 2\frac{1}{k^2}\right)\sin\left(\phi_k-\phi\right)\sin kx \tag{35.77}$$

$$w = \frac{2p}{Ehr^2}\frac{1}{k^4}\left(1 + 2r^2k^2 + \frac{r^4k^4}{2}\right)\cos\left(\phi_k-\phi\right)\sin kx \tag{35.78}$$

110 È utile avere gli spostamenti verticali e orizzontali e questi sono facilmente ottenuti da Eq. 35.77 e 35.78 come segue:

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

$$\begin{aligned}
\Delta_V =& -v\sin\left(\phi_k-\phi\right)+w\cos\left(\phi_k-\phi\right)\\
=&\frac{2p}{Ehr^2}\frac{1}{k^4}\left[\left(1+2r^2k^2\right)\sin^2\left(\phi_k-\phi\right)+\left(1+2r^2k^2+\frac{r^4}{2}k^4\right)\cos^2\left(\phi_k-\phi\right)\right]\sin kx\\
=&\frac{2p}{Ehr^2}\frac{1}{k^4}\left[1+2r^2k^2+\frac{r^4}{2}k^4\cos^2\left(\phi_k-\phi\right)\right]\sin kx \qquad (35.79)\\
\Delta_H =&v\cos\left(\phi_k-\phi\right)+w\sin\left(\phi_k-\phi\right)\\
=&\frac{2p}{Ehr^2}\left(-\frac{1}{k^4}-2r^2\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^4}+2r^2\frac{1}{k^2}+\frac{r^4}{2}\right)\sin\left(\phi_k-\phi\right)\\
=&\frac{pr^2}{Eh}\sin\left(\phi_k-\phi\right)\cos\left(\phi_k-\phi\right)\sin kx \qquad (35.80)
\end{aligned}$$

dove Δ_V è positivo per lo spostamento verso il basso e Δ_H è positivo per lo spostamento verso l'interno.

35.2.3 Teoria dei gusci ribassati

35.2.3.1 Equazioni di equilibrio

111 Prima di eseguire l'analisi attraverso la teoria dei gusci superficiali, dobbiamo prima ridisegnare le equazioni dei risultati dello stress e delle coppie insieme alle equazione dell'equilibrio per ospitare le proprietà della shell cilindrica circolare. Le equazioni di equilibrio (35.28) sono stati precedentemente derivati per la teoria delle conchiglie basse in §35.1.4.1. Utilizzando la definizione di un guscio cilindrico (§35.2.2.1), le equazioni dell'equilibrio diventano

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_x}{\partial x}r+\frac{\partial_{\phi x}}{\partial\phi}+p_x r=0\\
\frac{\partial N_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x}r-V_\phi+p_\phi r=0\\
\frac{\partial V_x}{\partial x}r+\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}+N_\phi+p_x r=0 \qquad (35.81)\\
-\frac{\partial M_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial M_{x\phi}}{\partial x}r+V_\phi r=0\\
-\frac{\partial M_x}{\partial x}r-\frac{\partial M_{\phi x}}{\partial\phi}+V_x r=0
\end{aligned}$$

112 Si noti che gli stessi risultati sono ottenuti da Eq. 35.43a-35.43e per la teoria dei gusci

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

superficiali, tranne che il termine Q_ϕ nel secondo di Eq. 35.81 è trascurato per gusci poco profondi. I risultati dello stress e le coppie di stress sono ottenuti da Eq. 35.42 in cui

$$\phi_x = \frac{\partial w}{\partial x} \quad \phi_y = \frac{v}{r} + \frac{\partial w}{r\partial \phi} \quad \nu = 0$$

113 I risultati dello stress e le coppie di stress, Eq. 35.42, sono stati anche precedentemente derivati §35.1.4.1. Ancora una volta, le equazioni sono modificate per spiegare le proprietà della shell cilindrica

$$\begin{aligned}
N_x &= Eh\frac{\partial u}{\partial x} \\
N_\phi &= Eh\left(\frac{\partial v}{r\partial \phi} - \frac{w}{r}\right) \\
N_{x\phi} = N_{\phi x} &= \frac{Eh}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{r\partial \phi}\right) \\
M_x &= -\frac{Eh^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
M_\phi &= -\frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial v}{r^2\partial \phi} + \frac{\partial^2 w}{r^2\partial \phi^2}\right) \\
M_{x\phi} = -M_{\phi x} &= \frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial v}{2r\partial x} + \frac{\partial^2 w}{r\partial x\partial \phi}\right)
\end{aligned} \tag{35.82}$$

Questi risultati potrebbero essere stati ottenuti da Eq. 35.44a-35.44f per la teoria dei gusci superficiali, tranne che i termini con v negli ultimi due di Eq. 35.82 sono trascurati per gusci poco profondi.

35.2.3.2 Formulazione

114 Ora che abbiamo ridisegnato tutte le 11 equazioni, possiamo iniziare la derivazione dell'equazione parziale di un unico ottavo ordine utilizzando la teoria delle conchiglie basse. La soluzione procede attraverso i seguenti passaggi:

1. Richiamare le ipotesi per i conchiglie basse presentate in §35.1.4.1.1Tutte le coppie di stress devono essere espresse in termini di spostamento radiale, ciò si ottiene trascurando i termini con v in Eq. 35.82

$$\begin{aligned}
M_x &= -\frac{Eh^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
M_\phi &= -\frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial^2 w}{r^2\partial \phi^2}\right) \\
M_{x\phi} = -M_{\phi x} &= \frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial^2 w}{r\partial x\partial \phi}\right)
\end{aligned} \tag{35.83}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

2. I risultati dello stress radiale sono scritti in termini di w da Eq. 35.81

$$\begin{aligned} V_\phi &= -\frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial^3 w}{r^3\partial\phi^3} + \frac{\partial^3 w}{r\partial x^2\partial\phi}\right) \\ V_x &= -\frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{r^2\partial x\partial\phi^2}\right) \end{aligned} \tag{35.84}$$

   where h and r are constants.
3. Altri risultati di stress possono ora essere scritti in termini di w utilizzando i primi tre di Eq. 35.81. Sostituire Eq. 35.84 nel terzo 35.81 noi otteniamo

$$N_\phi = \frac{Eh^3}{12}\left(r\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial\phi^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial^4 w}{\partial\phi^4}\right) - p_z r \tag{35.85}$$

   A sua volta, sostituiamo N_ϕ nella seconda equazione di 35.81. Se ci lasciamo V_ϕ, a causa dell'assunzione 2, otteniamo

$$\frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} = -\frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial^5 w}{\partial x^4\partial\phi} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^5 w}{\partial x^2\partial\phi^3} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^5 w}{\partial\phi^5}\right) + \frac{\partial p_z}{\partial\phi} - p_\phi \tag{35.86}$$

   Quest'ultima espressione è prossimamente differenziata rispetto a ϕ per ottenere

$$\frac{\partial^2 N_{x\phi}}{\partial x\partial\phi}$$

   Infine, la prima equazione 35.81 è differenziato rispetto a x, e il derivato

$$\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 N_{\phi x}}{\partial\phi\partial x} - \frac{\partial p_x}{\partial x} \tag{35.87}$$

$$\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} = \frac{Eh^3}{12}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^6 w}{\partial x^4\partial\phi^2} + \frac{2}{r^3}\frac{\partial^6 w}{\partial x^2\partial\phi^4} + \frac{1}{r^5}\frac{\partial^6 w}{\partial\phi^6}\right] - \frac{\partial^2 p_z}{r\partial\phi^2} + \frac{\partial p_\phi}{r\partial\phi} - \frac{\partial p_x}{\partial x} \tag{35.88}$$

4. L'equazione di compatibilità è derivata dai primi tre di Eq.35.82 eliminando i termini in u e v:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{Eh}N_x \\ \frac{\partial v}{\partial\phi} &= \frac{r}{Eh}N_\phi + w \\ N_{x\phi} &= \frac{Eh}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\phi}\right) \end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Differentiating, we obtain

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial \phi^2} &= \frac{1}{Eh}\frac{\partial^4 N_x}{\partial x^2 \partial \phi^2} \\
\frac{\partial^5 v}{\partial x^4 \partial \phi} &= \frac{r}{Eh}\frac{\partial^4 N_\phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\
\frac{\partial^4 N_{x\phi}}{\partial x^3 \partial \phi} &= \frac{Eh}{2}\left(\frac{\partial^5 v}{\partial x^4 \partial \phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial \phi^2}\right) \\
\frac{\partial^4 N_{x\phi}}{\partial x^3 \partial \phi} &= \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial^4 N_\phi}{\partial x^4} + \frac{1}{r}\frac{\partial^4 N_x}{\partial x^2 \partial \phi^2}\right) + \frac{Eh}{2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}
\end{aligned} \tag{35.89}$$

5. I risultati dello stress derivati in Eqs. 35.85, 35.86 e 35.89 per completare la formulazione generale

$$\begin{aligned}
&\frac{r^2}{2}\frac{\partial^8 w}{\partial x^8} + \frac{\partial^8 w}{\partial x^6 \partial \phi^2} + \frac{1}{2r^2}\frac{\partial^8 w}{\partial x^4 \partial \phi^4} + \frac{1}{2r^2}\frac{\partial^8 w}{\partial x^4 \partial \phi^4} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^8 w}{\partial x^2 \partial \phi^6} + \frac{1}{2r^6}\frac{\partial^8 w}{\partial \phi^8} \\
&\qquad + \frac{\partial^8 w}{\partial x^6 \partial \phi^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^8 w}{\partial x^4 \partial \phi^4} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^8 w}{\partial x^2 \partial \phi^6} + \frac{6}{h^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\
&= \frac{12}{Eh^3}\left(\frac{r^2}{2}\frac{\partial^4 p_z}{\partial x^4} + \frac{1}{2r^2}\frac{\partial^4 p_z}{\partial \phi^4} - \frac{1}{2r^2}\frac{\partial^3 p_\phi}{\partial \phi^3} + \frac{1}{2r}\frac{\partial^3 p_x}{\partial x \partial \phi^2} + \frac{\partial^4 p_z}{\partial x^2 \partial \phi^2} - \frac{\partial^3 p_\phi}{\partial x^2 \partial \phi}\right)
\end{aligned} \tag{35.90}$$

Collecting terms we obtain

$$\begin{aligned}
r^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \phi^2}\right)^4 w + \frac{12}{h^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{12}{Eh^3}\Bigg[&r^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \phi^2}\right)^2 p_z \\
&-2\frac{\partial^3 p_\phi}{\partial x^2 \partial \phi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^8 p_\phi}{\partial \phi^3} + \frac{1}{r}\frac{\partial^3 p_z}{\partial x \partial \phi^2}\Bigg]
\end{aligned} \tag{35.91}$$

Utilizzo delle nozioni §35.1.4.1- Lo troviamo. 35.91 è proprio la stessa di Eq. 35.54 con $\nu = 0$:

Se ricordiamo la nostra equazione precedentemente derivata per i gusci poco profondi, Eq. 35.91, la nostra nuova equazione è della stessa forma quando ν uguale a zero.

$$\nabla^8 w + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2}\nabla_R^4 w = \frac{1}{D}\nabla_R^2 f(p) + \nabla^4 f'(p) \quad \text{(Eq. 35.54)} \tag{35.92}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

For circular cylindrical shells,

$$\nabla_R^4 w = \frac{\partial^4 w}{r^2 \partial x^4}$$
$$\nabla^8 w = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \phi^2} \right)^4 w$$
$$f(p) = \frac{1}{r^2} \int \frac{\partial^2 p_x}{\partial \phi^2} dx + r \int \frac{\partial^2 p_\phi}{\partial x^2} d\phi$$
$$f'(p) = \frac{p_z}{D} - \frac{1}{D} \int p_\phi d\phi$$

35.2.3.2.1 Soluzione particolare per carico uniforme

115 Se consideriamo il caso di un carico p distribuito uniformemente sulla superficie della conchiglia, cioè $p = 4/pip_d$Allora

$$\begin{aligned} p_z &= p \cos(\phi_k - \phi) \sin kx \\ p_\phi &= p \sin(\phi_k - \phi) \sin kx \\ p_x &= 0 \end{aligned} \tag{35.93}$$

116 Utilizzando il lato destro dell'equazione differenziale parziale (Eq. 35.92), determinamo la soluzione particolare.

$$\begin{aligned} &\frac{12}{Eh^3} \Big[r^2 k^4 p \cos(\phi_k - \phi) \sin kx + 2p(-\cos(\phi_k - \phi))(-\sin kx) k^2 \\ &+ \frac{1}{r^2} p \sin kx \cos(\phi_k - \phi) - 2k^2 p \cos\phi_k (-\sin kx) - \frac{1}{r^2} p \sin kx (-\cos(\phi_k - \phi)) \Big] \\ &= \frac{12}{Eh^3} \left(r^2 k^4 + 4k^2 + \frac{2}{r^2} \right) p \cos(\phi_k - \phi) \sin kx \end{aligned} \tag{35.94}$$

117 La soluzione particolare è determinata come

$$w = Cp \cos(\phi_k - \phi) \sin kx \tag{35.95}$$

Quando sostituito nel lato sinistro di Eq. 35.91 rendimenti

$$\begin{aligned} &r^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \phi^2} \right)^4 Cp \cos(\phi_k - \phi) \sin kx + \frac{12}{h^2} \frac{\partial^4 [Cp \cos(\phi_k - \phi) \sin kx]}{\partial x^4} \\ &= r^2 \left(k^2 + \frac{1}{r^2} \right)^4 Cp \cos(\phi_k - \phi) \sin kx + \frac{12}{h^2} k^4 Cp \cos(\phi_k - \phi) \sin kx \end{aligned} \tag{35.96}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

118 Equando i lati della mano sinistra e destra dell'equazione, risolviamo per la costante C della nostra soluzione particolare

$$C = \frac{1}{Eh}\left[\frac{r^2k^4 + 4k^2 + 2/r^2}{(r^2h^2/12)(k^2 + 1/r^2)^4 + k^4}\right] \tag{35.97}$$

Substituting into Eq. 35.95, we compute w at any point in terms of the load and dimensions of the shell.

119 Le coppie di stress, i risultati dello stress e lo spostamento sono ottenuti sostituendo w in Eq. 35.83 a Eq. 35.89.

35.2.3.2.2 Confronto: membrana *vs.* guscio ribassato

120 È utile confrontare i risultati della teoria delle membrane a quella dei gusci superficiali. 35.6.

121 Si noti che è consueta pratica trascurare l'effetto di piegare e utilizzare la teoria della membrana al posto dell'integrale particolare più rigoroso. P e B misurare l'accuratezza di questo approccio.

122 Per la soluzione particolare, sostituendo Eq. 35.93 in Eq. 35.57 otteniamo il risultato dello stress

$$N'_\phi = -pr\cos(\phi_k - \phi)\sin kx$$

123 Quando sostituiamo N'_ϕ nel secondo termine di Eq. 35.57 noi otteniamo

$$N'_{x\phi} = -\frac{1}{r}\int \frac{\partial[-pr\cos(\phi_k - \phi)\sin kx]}{\partial\phi}dx + \int p\sin(\phi_k - \phi)\sin kx dx + f_1(\phi)$$

After differentiation and integration, $N'_{x\phi}$ becomes

$$N'_{x\phi} = 2\frac{p}{k}\sin(\phi_k - \phi)\cos kx + f_1(\phi)$$

dove per una shell semplicemente supportata $f_1(\phi) = 0$.

124 Successivamente sostituiremo il termine appena derivato nel terzo mandato di Eq. 35.57. Ancora una volta attraverso la differenziazione e l'integrazione otteniamo

$$N'_x = -2\frac{p}{k^2 r}\cos(\phi_k - \phi)\sin kx + f_2(\phi)$$

dove per un raggio semplicemente supportato $N'_x = 0$ at $x = 0$ e $x = L$. $f_2(\phi)$ può essere calcolato come zero e abbandonato dall'equazione sopra.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

125 Successivamente si tradurranno gli spostamenti dalla teoria della membrana utilizzando i risultati dello stress sopra derivati ed Eqs. 35.69, 35.70e 35.71.

After substitution, we find

$$u = \frac{2}{Eh}\frac{p}{k^3 r}\cos(\phi_k - \phi)\cos kx$$
$$v = \frac{2}{Eh}\frac{p}{k^4 r^2}\left(1 + 2k^2 r^2\right)\sin(\phi_k - \phi)\sin kx$$
$$w = \frac{2}{Eh}\frac{pk^4}{r^2}\left(1 + 2k^2 r^2 + \frac{r^4 k^4}{2}\right)\cos(\phi_k - \phi)\sin kx$$

126 Si noti che lo spostamento calcolato tramite la soluzione particolare può essere riscritto come

$$u = u'(1 - P)$$
$$v = v'(1 - P)$$
$$w = w'\frac{1}{B + 1}$$

where

$$P = \frac{Eh^3}{24r^4}(1 + 2k^2 r^2 + k^4 r^4)C$$
$$B = \frac{h^2}{12r^6 k^4}(k^2 r^2 + 1)^4$$

e dalla tabella di confronto, $\phi_k = (\phi_k - \phi)$. P e B sono utilizzati per misurare l'accuratezza dell'approccio a membrana rispetto al metodo di shell superficiale.

127 Anche se la teoria della membrana può sembrare come la scelta facile per evitare l'equazione differenziale dell'ottavo ordine rigoroso, può solo fornire risultati ragionevoli se soddisfa determinati criteri. In primo luogo, i risultati di spostamento non devono aumentare la flessione della shell sostanzialmente poiché la metodologia trascura tutta la curvatura delle conchiglie. Infine, i confini devono fornire le forze e permettere gli spostamenti richiesti dalla teoria. Spesso la teoria della membrana non è consentita per l'uso di progettazione, ma nel caso di una circolare deve cilindrica, sembra utile accelerare il processo di progettazione.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 35.6: Confronto tra le soluzioni a membrana e conchiglia poco profonda per carico uniforme

Membrane Theory	Shallow Shell Theory
Stress Couples	
$M'_\phi = 0$ $M'_{x\phi} = 0$ $M'_x = 0$	$M_{\phi^p} = \frac{Eh^3}{12r^2} pC\cos(\phi_k)\sin kx$ $M_{x\phi^p} = \frac{Eh^3}{12r} kpC\sin(\phi_k)\cos kx$ $M_{x^p} = \frac{Eh^3}{12} k^2 pC\cos(\phi_k)\sin kx$
Stress Resultants	
$N'_\phi = -pr\cos(\phi_k)\sin kx$ $N'_{x\phi} = 2\frac{p}{k}\sin(\phi_k)\cos kx$ $N'_x = -\frac{2p}{k^2 r}\cos(\phi_k)\sin kx$	$N_{\phi^p} = -pr(1-2P)\cos(\phi_k)\sin kx$ $N_{x\phi^p} = 2\frac{p}{k}(1-P)\sin(\phi_k)\cos kx$ $N_{x^p} = -\frac{2p}{k^2 r}(1-P)\cos(\phi_k)\sin kx$
Displacements	
$u' = \frac{2}{Eh}\frac{p}{k^3 r}\cos(\phi_k)\cos kx$ $v' = \frac{2}{Eh}\frac{p}{k^4 r^2}(1+2k^2r^2)\sin(\phi_k)\sin kx$ $w' = \frac{2}{Eh}\frac{p}{k^4 r^2}\left(1+2k^2r^2+\frac{r^4k^4}{2}\right)$ $\cos(\phi_k)\sin kx$	$u^p = \frac{2}{Eh}\frac{p}{k^3 r}(1-P)\cos(\phi_k)\cos kx$ $= u'(1-P)$ $v^p = v-(1-P)$ $w^p = w'\frac{1}{B+1}$ $P = \frac{Eh^3}{24r^4}(1+2k^2r^2+k^4r^4)C$ $B = \frac{h^2}{12r^6k^4}(k^2r^2+1)^4$ C From Eq. 35.97

128 Ora che abbiamo esaminato i metodi di analisi della teoria delle conchiglie basse e della teoria della membrana, discuteremo brevemente la differenza tra le due metodologie e i risultati.

129 La teoria del membrane è un metodo approssimativo che spesso viene praticato per evitare l'approccio più rigoroso delle conchiglie poco profonde. La teoria del membrane

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

permette il calcolo dei risultati dello stress e degli spostamenti senza l'uso della piegatura, poiché tutta la flessione nella shell viene trascurata. Ciò è simile alla teoria delle conchiglie superficiali che richiede la portata superficiale da portare dalle sollecitazioni in-plane. Tuttavia, al contrario della teoria della membrana, la teoria dei gusci bassi rappresenta la flessione all'interno del guscio. La teoria assume che la curvatura superficiale del guscio, insieme al cambiamento di curvatura, sia piccola ma è ancora richiesta per scopi di analisi.

130 Ora vedremo due esempi, prima con la teoria della membrana e secondo con la tesi dei gusci superficiali, per confrontare i risultati di entrambi i metodi.

35.2.3.2.3 Ex 35.1: Confronto tra teoria membranale e guscio ribassato

Long Shell: Given

$$h = 3 \text{ in} = 0.25 \text{ ft} \quad r = 26.6 \text{ ft}$$
$$L = 66.5 \text{ ft} \quad \frac{h}{r} = \frac{1}{106}$$
$$\frac{r}{L} = 0.4 \quad k = \frac{\pi}{L}$$
$$E = 4.32 \times 10^5 \text{ksf} \quad \phi_k = 45°$$

L'esempio lungo della shell consente l'uso della teoria delle membrane in confronto alla teoria dei gusci superficiali basati sui seguenti valori:

$$C = 0.0284 \text{ ft}^3/\text{kip}$$
$$P = 0.00011$$
$$B = 0.000131$$

Chiaramente, la teoria della membrana può essere utilizzata al posto del particolare integrale in questo caso.

Short Shell: Given

$$h = 4 \text{ in} = 0.33 \text{ ft} \quad L = 30 \text{ ft}$$
$$r = 140 \text{ ft} \quad \frac{h}{r} = \frac{1}{420}$$
$$\frac{r}{L} = 4.67 \quad E = 4.32\text{x}10^5 \text{ ksf}$$
$$\phi_k = 45°$$

I risultati della breve custodia di conchiglia sono ancora ragionevoli e consentirebbero l'uso della teoria delle membrane.

$$C = 0.135 \text{ ft}^3/\text{kip}$$
$$P = 0.011$$
$$B = 0.024$$

35.2.3.3 Soluzione generale

131 Il sistema primario e gli errori risultanti possono essere ottenuti direttamente la determinazione delle correzioni non è così facile perché il problema difficile di risolvere la parte omogenea dell'Eq. 35.91 Poiché la conchiglia cilindrica circolare è uno dei pochi sistemi di conchiglie per i quali una soluzione è stata ben sviluppata, qui viene data una completa derivazione.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

132 L'equazione omogenea può essere scritta:

$$r^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{r^2\partial\phi^2}\right)^4 w+\frac{12}{h^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=0 \tag{35.98}$$

35.2.3.3.1 Spostamento w

La soluzione ha la forma di

$$w=\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} A_m e^{M\phi}\sin kx \tag{35.99}$$

dove A_m e M Le costanti sono basate sulle condizioni di confine longitudinali mentre le radici si basano esclusivamente sulle dimensioni della conchiglia.

Le radici M sono determinati sostituendo Eq. 35.99 in Eq. 35.98

$$r^2\left(-k^2+\frac{M^2}{r^2}\right)^4+\frac{12}{h^2}k^4=0$$

Substituting

$$Q^8=3(kr)^4\left(\frac{r}{h}\right)^2$$

we obtain

$$\left(M^2-(kr)^2\right)^4 A_m e^{M\phi}\sin kx+4Q^8 A_m e^{M\phi}\sin kx=0$$

che può essere riscritto come

$$\left[\frac{M^2-(kr)^2}{\sqrt{2}Q^2}\right]^4+1=0 \tag{35.100}$$

133 One additional substitution,

$$\gamma=\left(\frac{kr}{Q}\right)^2$$

Eq. 35.100 becomes

$$\frac{M^2}{Q^2}-\gamma=\sqrt[4]{-1}\sqrt{2} \tag{35.101}$$

134 Ora siamo lasciati con il termine immaginario $\sqrt[4]{-1}$ che è riscritto come

$$\sqrt[4]{-1}=\sqrt{\pm i}$$

dove $i=\sqrt{-1}$. Un numero complesso è scritto come

$$z=x+iy=\mathrm{R}e^{i\theta}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Quando $x = 0$, $y = 1$e $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ il numero complesso diventa

$$i = e^{i\theta}$$

where, from Euler's equation,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

e $\theta = \pi/2$ formando la complessa relazione di

$$i = e^{i\pi/2}$$

135 Ora che abbiamo derivato la relazione complessa, computo

$$\begin{aligned} \sqrt{i} = (i)^{\frac{1}{2}} &= e^{i\pi/4} \\ e^{i\pi/4} &= \cos\pi/4 + i \sin\pi/4 \\ e^{i\pi/4} &= \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{35.102}$$

If we substitute Eq. 35.102 into Eq. 35.101

$$M^2 = Q^2\left[\gamma \pm (1 \pm i)\right] \tag{35.103}$$

Le otto radici risultanti sono complesse e coniugate

$$M_1 = \pm(\alpha_1 \pm i\beta_1) \tag{35.104}$$
$$M_2 = \pm(\alpha_1' \pm i\beta_1') \tag{35.105}$$

where

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= Q\sqrt{\frac{\sqrt{(1+\gamma)^2+1}+(1+\gamma)}{2}} = Qm_1 \\ \beta_1 &= Q\sqrt{\frac{\sqrt{(1+\gamma)^2+1}-(1+\gamma)}{2}} = Qn_1 \\ \alpha_1' &= Q\sqrt{\frac{\sqrt{(1-\gamma)^2+1}-(1-\gamma)}{2}} = Qm_2 \\ \beta_1' &= Q\sqrt{\frac{\sqrt{(1-\gamma)^2+1}+(1-\gamma)}{2}} = Qn_2 \end{aligned} \tag{35.106}$$

136 Noi stabiliamo le otto costanti arbitrarie, A_m, espandendo Eq. 35.99.

$$w = \begin{bmatrix} A_1 e^{(\alpha_1+i\beta_1)\phi} + A_2 e^{(\alpha_1-i\beta_1)\phi} \\ A_3 e^{(\alpha_1'+i\beta_1')\phi} + A_4 e^{(\alpha_1'-i\beta_1')\phi} \\ A_5 e^{-(\alpha_1+i\beta_1)\phi} + A_6 e^{-(\alpha_1-i\beta_1)\phi} \\ A_7 e^{-(\alpha_1'+i\beta_1')\phi} + A_8 e^{-(\alpha_1'-i\beta_1')\phi} \end{bmatrix} \sin kx \tag{35.107}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

137 Come già detto, dall'equazione di Euler

$$e^{\pm i\beta_1\phi} = \cos\beta_1\phi \pm i\sin\beta_1\phi$$

che la prima fila della nostra matrice sia riscritta come

$$\left[(A_1 + A_2)\cos\beta_1\phi + i(A_1 - A_2)\sin\beta_1\phi\right] e^{\alpha_1\phi} \tag{35.108}$$

138 Per w per essere reale, le costanti A_1 e A_2 deve essere complesso coniugare le costanti.

$$A_1 + A_2 = 2a; \quad A_1 - A_2 = i2b \tag{35.109}$$

e riscritti sotto forma di

$$A_1 = a + ib; \quad A_2 = a - ib \tag{35.110}$$

Così, A_1 e A_2 sono complesse costanti coniugate come le altre coppie. Equazione 35.108 può essere semplificato sostituendo in 35.109 noi otteniamo

$$2(a\cos\beta_1\phi - b\sin\beta_1\phi)e^{\alpha_1\phi} \tag{35.111}$$

139 Quando confrontiamo l'espressione di cui sopra con il primo termine di Eq. 35.107

$$\begin{aligned} A_1 e^{(\alpha_1+i\beta_1)\phi} &= (a+ib)(\cos\beta_1\phi + i\sin\beta_1\phi)e^{\alpha_1\phi} \\ &= [a\cos\beta_1\phi - b\sin\beta_1\phi + i(b\cos\beta_1\phi + a\sin\beta_1\phi)]e^{\alpha_1\phi} \end{aligned} \tag{35.112}$$

Clearly Eq. 35.111 is twice the real part of 35.112 or $2\text{Re}\left(A_1 e^{M_1\phi}\right)$, hence

$$w = 2\text{Re}\begin{bmatrix} A_1 e^{M_1\phi} + A_3 e^{M_2\phi} \\ A_5 e^{-M_1\phi} + A_7 e^{-M_2\phi} \end{bmatrix} \sin kx \tag{35.113}$$

35.2.3.3.2 M_ϕ

140 Per scopi illustrativi, risolviamo per M_ϕ da Eq 35.83

$$\begin{aligned} M_\phi &= -\frac{Eh^3}{12r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\phi^2} \\ &= -\frac{Eh^3}{12r^2}2\text{Re}\begin{pmatrix} A_1 M_1^2 e^{M_1\phi} + A_3 M_2^2 e^{M_3\phi} \\ A_5 M_1^2 e^{-M_1\phi} + A_7 M_2^2 e^{-M_3\phi} \end{pmatrix} \sin kx \end{aligned}$$

141 I derivati parziali di w si ottengono facilmente

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial\phi} &= 2\text{Re}\begin{bmatrix} A_1 M_1 e^{MM_\phi\phi} + A_3 M_2 e^{M_\phi\phi} \\ A_5\left(-M_1\right)e^{-M_1\phi} + A_7\left(-M_2\right)e^{-M_\phi\phi} \end{bmatrix} \sin kx \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= 2\text{Re}(k)\begin{bmatrix} A_1 e^{M_1\phi} + A_3 e^{M_1\phi} \\ A_s e^{-M_1\phi} + A_2 e^{-M_2\phi} \end{bmatrix} \cos kx \\ etc. \end{aligned} \tag{35.114}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

e applicando successivamente Eq. 35.114 to 35.113 qualsiasi differenziale parziale w può essere ottenuto e sostituito 35.83, 35.84, or 35.85 e 35.86 per ottenere risultati di stress o coppie di stress.

142 From Eq. 35.103

$$M_1^2 = Q^2(\gamma + 1 + i)$$
$$M_2^2 = Q^2(\gamma - 1 + i)$$

e A_1 e A_2 sono dati da Eq. 35.110. Così,

$$M_\phi = -\frac{Eh^3}{6r^2}\mathrm{Re}\left[\begin{array}{l} +(a+ib)M_1^2\left(\cos\beta_1\phi + i\sin\beta_1\phi\right)e^{\alpha_1\phi} \\ +(c+id)M_2^2\left(\cos\beta_1'\phi + i\sin\beta_1'\phi\right)e^{\alpha_1'\phi} \\ +(e+if)M_1^2\left(\cos\beta_1\phi - i\sin\beta_1\phi\right)e^{-a_1\phi} \\ +(g+ih)M_2^2\left(\cos\beta_1' - i\sin\beta_1'\phi\right)e^{-\alpha_1'\phi} \end{array}\right]\sin kx$$

o in forma espansa, dopo aver lasciato cadere i termini immaginari che ne risultano, troviamo

$$M_\phi = -\frac{Eh^2}{6r^2}Q^2\left[\begin{array}{l} +\left\{[a(1+\gamma)-b]\cos\beta_1\phi - [a+b(1+\gamma)]\sin\beta_1\phi\right\}e^{\alpha_1\phi} \\ +\left\{[c(\gamma-1)-d]\cos\beta_1'\phi - [c+d(\gamma-1)]\sin\beta_1'\phi\right\}e^{\alpha_1'\phi} \\ +\left\{[e(1+\gamma)-f]\cos\beta_1\phi + [e+f(1+\gamma)]\sin\beta_1\phi\right\}e^{-\alpha_1\phi} \\ +\left\{[g(\gamma-1)-h]\cos\beta_1'\phi + [g+h(\gamma-1)]\sin\beta_1'\phi\right\}e^{-\alpha_1'\phi} \end{array}\right]$$

143 È conveniente misurare ϕ dalla linea centrale longitudinale o erown della conchiglia piuttosto che dal bordo come mostrato in Fig. 35.13. Poi troviamo per la geometria simmetrica e il caricamento che $a = e, b = f, c = g$e $d = h$. Per carichi non simmetrici su gusci simmetrici, possiamo combinare il caso simmetrico con uno antisimmetrale, dove $a = -e$, ecc. Ora riscriviamo M_ϕ per il caso simmetrico e sostituire i termini esponenziali con la loro forma iperbolica equivalente

$$e^{\alpha\phi} = \cosh\alpha\phi + \sinh\alpha\phi$$
$$e^{-\alpha\phi} = \cosh\alpha\phi - \sinh\alpha\phi$$

e ottenere (con ϕ, preso dalla corona):

$$M_\phi = -\frac{Eh^3}{3r^2}Q^2\left[\begin{array}{l} [a(1+\gamma)-b]\cos\beta_1\phi\cosh\alpha_1\phi - [a+b(1+\gamma)]\sin\beta_1\phi\sinh\alpha_1\phi \\ [c(\gamma-1)-d]\cos\beta_1'\phi\cosh\alpha_1'\phi - [c+d(\gamma-1)]\sin\beta_1'\phi\sinh\alpha_1'\phi \end{array}\right]\sin kx \tag{35.115}$$

35.2.3.3.3 Altri termini: procedura

144 Tutte le undici funzioni sono espresse in modo simile e riassunte nelle tabelle 35.7 e 35.7.

145 Il problema è ora di ottenere correzioni, cioè effetti bordo dovuti a carichi di bordi (cariche lineari). In generale, questi effetti sono ottenuti impostando tre condizioni limite

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

pari a zero e la quarta uguale ad uno; le quattro equazioni simultanee risultanti sono risolte per le quattro costanti arbitrarie a, b, ce d. Qualsiasi delle funzioni di tabelle 35.7 può essere risolto come funzione diretta del carico della linea dell'unità.

Tabella 35.7: Coefficienti di conchiglia (ϕ misurato dalla corona)

$$F = 2R\left[\begin{array}{l}(aB_1 - bB_2)\cos\beta_1\phi\cosh\alpha_1\phi - (aB_2 + bB_1)\sin\beta_1\phi\sinh\alpha_1\phi \\ (cB_3 - dB_4)\cos\beta_1'\phi\cosh\alpha_1'\phi - (cB_4 + dB_3)\sin\beta_1'\phi\sinh\alpha_1'\phi\end{array}\right]$$

F	R	B_1	B_2	B_3	B_4
M_ϕ	$-\frac{2D}{T^2}\sin kx$	$Q^2(1+\gamma)$	Q^2	$Q^2(\gamma-1)$	Q^2
M_z	$2Dk^2\sin kx$	1	0	1	0
Q	$-\frac{2Dk^3}{\gamma}\cos kx$	1	1	-1	1
N_ϕ	$\frac{4Drk^4}{\gamma^2}\sin kx$	0	1	0	-1
N_x	$-\frac{4Drk^4}{\gamma^2}\sin kx$	-1	$1+\gamma$	1	$1-\gamma$
Q_x'	$-\frac{2Dk^2}{\gamma}\cos kx$	$\gamma+2$	2	$\gamma-2$	2
u	$\frac{4Drk^2}{hE\gamma^2}\cos kx$	-1	$1+r$	1	$1-\gamma$
w	$2\sin kx$	1	0	1	0

$$F = 2R\left[\begin{array}{l}(aB_1 - bB_2)\cos\beta_1\phi\sinh\alpha_1\phi - (aB_2 + bB_1)\sin\beta_1\phi\cosh\alpha_1\phi \\ (cB_3 - dB_4)\cos\beta_1'\phi\sinh\alpha_1'\phi - (cB_4 + dB_3)\sin\beta_1'\phi\cosh\alpha_1'\phi\end{array}\right]$$

F	R	B_1	B_2	B_3	B_4
Q_ϕ	$-\frac{2Dk^3}{(\sqrt{\gamma})^3}\sin kx$	$m_1 - n_1$	$m_1 + n_1$	$-(m_2 + n_2)$	$m_2 - n_2$
Q_ϕ'	$-\frac{2Dk^3}{(\sqrt{\gamma})^3}\sin kx$	$m_1(1-\gamma) - n_1$	$m_1 + n_1(1-\gamma)$	$-m_2(1+\gamma) - n_2$	$m_2 - n_2(1+\gamma)$
$N_{x\phi}$	$\frac{4Drk^4}{(\sqrt{\gamma})^5}\cos kx$	$-n_1$	m_1	n_2	$-m_2$
v	$\frac{4Drk^3}{(\sqrt{\gamma})^7}\sin kx$	$m_1 + n_1(1-\gamma)$	$n_1 - m_1(1-\gamma)$	$-m_2 + n_2(1+\gamma)$	$-n_2 - m_2(1+\gamma)$
$\theta*$	$\sin kx$	$\frac{2\alpha_1}{r} + \frac{(R.B_1)_\mu}{r}$	$\frac{2\beta_1}{r} + \frac{(R.B_2)_\nu}{r}$	$\frac{2\alpha_1'}{r} + \frac{(R.B_3)_\nu}{r}$	$\frac{2\beta_1'}{r} + \frac{(R.B_4)_\nu}{r}$
$M_{x\phi}$	$\frac{2Dk}{r}\cos kx$	α_1	β_1	α_1'	β_1'

$\nu = 0$ thus $D = Eh^3/12$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

146 Per esempio, consideri il carico di linea $N_\phi = (4/\pi)(1)\sin kx$ applicato simmetricamente su ogni bordo longitudinale di una shell semplicemente sostenuta.

$$N_{\phi_k} = T_L = 8Dr\left(\frac{k^4}{\gamma^2}\right)\sin kx[\quad] = \frac{4}{\pi}\sin kx$$
$$M_\phi = -\frac{4D}{r^2}\sin kx[\quad] = 0$$
$$Q'_\phi = -\frac{4Dk^3}{\left(\sqrt{\gamma}\right)^3}\sin kx[\quad] = 0$$
$$N_{\phi_{kx}} = \frac{8Drk^4}{\left(\sqrt{\gamma}\right)^5}\cos kx[\quad] = 0$$

e risolti per le costanti arbitrarie. Se lo spostamento tangenziale v è desiderato per il caso di un carico linea unità $N_{\phi_k} = T_L$, i valori che ne risultano a, b, ce d sono sostituiti in

$$v = \frac{8Drk^3}{\left(\sqrt{\gamma}\right)^7}\sin kx[\quad]$$

147 Così le tabelle 2 e 3 di (Whitney et al., 1952) erano preparati[4]. Se i valori tabulati non sono disponibili, è spesso più conveniente calcolare le costanti arbitrarie direttamente per il carico effettivo e condizioni di bordo complete piuttosto che calcolare separatamente gli effetti del carico della linea.

148 Anche se il differenziale parziale di governo Eq. 35.91 è stato derivato da presupposti già dettagliatamente in §35.1.1, 35.1.2 e 35.2.3, la soluzione data da Eq. 35.99 porta la restrizione matematica aggiuntiva che tutte le funzioni contenenti $\sin kx$ svanire lungo i confini $x = 0$ e $x = L$. Quindi, valori contenenti $\sin kx$ in R Tabella 35.7 sono zero a entrambe le estremità del guscio.

149 Le principali restrizioni fisiche così imposte sono quelle che le cornici trasversali, che sostengono pienamente la conchiglia $x = 0$ e $x = L$, fornire: 1) rigidità completa nei loro piani verticali, cioè, $v_0 = W_0 = v_L = w_L = O$; e 2) completa flessibilità in piani paralleli alla superficie centrale della conchiglia, - Si'. $M_{x_0} = N_{x_0} = M_{x_L} = N_{x_L} = 0$. Idealmente, allora, la shell si presume sia sostenuta da una parete tanto profonda che non può verificarsi nessun spostamento in-plano e così sottile che nessuna cesoia o piegatura fuori piano può essere sviluppata. Anche se il guscio reale supporta deviare notevolmente da questo ideale, la teoria qui presentata è stata ampiamente utilizzata nella progettazione di molte strutture del tetto costruite con successo.

150 Eq. 35.99 è stato utilizzato principalmente per separare le variabili e trattare così la soluzione come quella di un'equazione differenziale ordinaria, allo stesso modo di una

[4]Questi sono a loro volta basati sul lavoro di (Finsterwalder, 1933); Nella tabella i termini seguenti T_s, S, T_ϕ, t, l, I corrisponde a N_z, $N_{zy} = N_{yz}$, N_ϕ, h, L, $h^3/12$ in this book.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

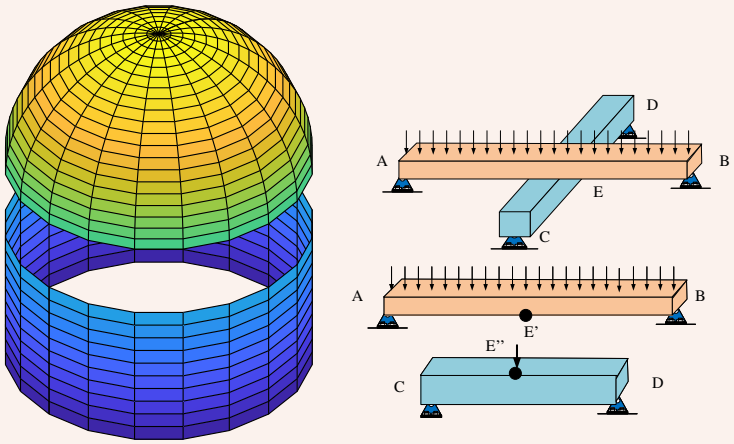
soluzione Levy-type per piastre. La restrizione su due dei quattro confini è il prezzo pagato per questa convenienza matematica.

151 Per ulteriori dettagli sulla procedura, il lettore dovrebbe consultare (Gibson, 1968 PDF) e (Portland Cement Association, 1954 PDF) che contiene esempi numerici. Su un registro separato, (Baker, Kovalevsky e Rish, 1972) è un "handbook' di soluzioni pubblicate in varie pubblicazioni (NASA, in particolare), che si concentra sulla progettazione delle strutture aerospaziali.

152 Si noti che le formulazioni per cupole e pareti (geometrie assisimmetrici) sono state semplificate, avendo a che fare solo con equazioni differenziali ordinarie ed evitato equazione differenziale parziale.

35.3 Gusci staticamente indeterminati

153 Un guscio può essere appoggiato (o supporto) su un elastico con diversa rigidità; in questo caso avremo sia lo spostamento che la forza di discontinuità tra i due, Fig. 35.18aQuesto è molto simile alle disposizioni delle travi indicate nella figura. 35.18b dove sul fascio è supportato da un altro con diversa rigidità.



(a) Dome on a Barrel (circular shell)

(b) Beam on beam

Figura 35.18: Statically indeterminate shell and beam analogies

35.3.1 Trave di bordo

154 Lo scopo del fascio di bordo è quello di irrigidire il bordo della shell e, insieme alla conchiglia, portare tensioni flessografiche. Due tipi di travi a spigolo verranno esaminati

COPIA DI REVISIONE

nell'analisi delle conchiglie, dei raggi verticali ed orizzontali, Figs. 35.19b e 35.19a. I raggi verticali sono generalmente impiegati per le conchiglie lunghe, dove l'azione strutturale principale è piegatura longitudinale. Le travi orizzontali vengono comunemente utilizzate con brevi gusci, dove la principale azione strutturale è l'arco trasversale.

155 L'analisi per entrambe le travi segue i tipici quattro passaggi:

Sistema primario: I carichi superficiali sono sostenuti da una conchiglia contenente bordi liberi. Anche ai bordi liberi, i membri dei bordi costituiti da semplici travi che trasportano il proprio peso morto sono presenti.

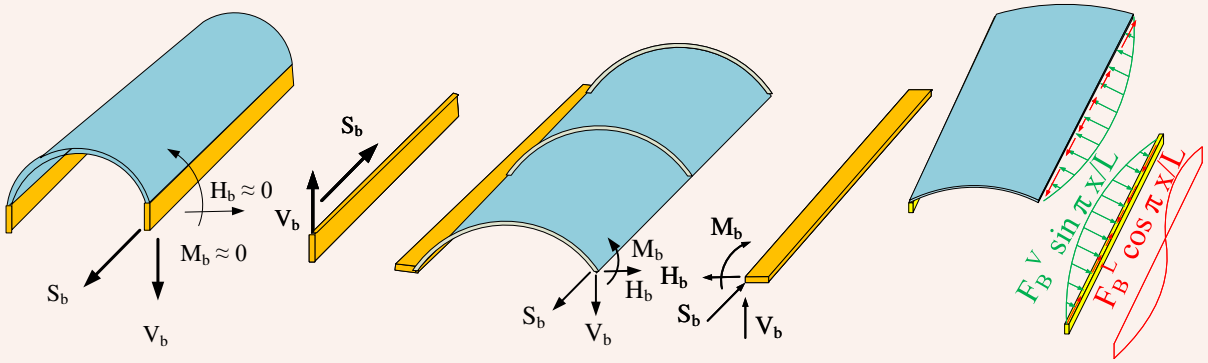
Errori: Due errori sono presentati dal sistema primario dei componenti della shell e del bordo. In primo luogo, la differenza nelle deflettori verticali del bordo libero della conchiglia e il fascio di bordo, $D^S_{10} + D^B_{10}$. Successivamente, la differenza nelle sollecitazioni longitudinali nel bordo della shell e nella parte superiore del fascio di bordi, $f^S_{20} + f^B_{20}$.

Correzioni: Una forza verticale, V_be forza di taglio, S_b sono applicati al fascio di bordo come visto in Fig. 35.19c. V_b agisce verso l'alto sulla conchiglia e verso il basso sul fascio riducendo la deflettorazione verticale e le sollecitazioni longitudinali nella shell. S_b agisce verso l'interno sulla conchiglia e verso l'esterno sul fascio riducendo la deviazione verticale e le sollecitazioni longitudinali nella shell.

Compatibilità: Vengono applicate due equazioni di compatibilità. Lo spostamento verticale e le sollecitazioni longitudinali vengono ripristinate come segue

$$X_1 \left(D^S_{11} + D^B_{11}\right) + X_2 \left(D^S_{12} + D^B_{12}\right) + D^S_{10} + D^B_{10} = 0 \tag{35.116}$$

$$X_1 \left(f^S_{21} + f^B_{21}\right) + X_2 \left(f^S_{22} + f^B_{22}\right) + f^S_{20} + f^B_{20} = 0 \tag{35.117}$$



(a) Vertical edge beam (b) Horizontal edge beam (c) Correction of vertical and shear forces

Figura 35.19: Circular shells resting on an elastic support

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

156 Gli spostamenti verticali sono positivi nella direzione di positivo V_b. Per le sollecitazioni, la tensione viene presa come positiva nella shell e compressione come positivo nel fascio.

157 I valori degli spostamenti e delle sollecitazioni della shell sono stati discussi in precedenza §35.2.3.2.2 e (Whitney et al., 1952) La teoria della membrana e la teoria delle conchiglie basse, i valori degli spostamenti dei fasci di bordo e gli stress saranno calcolati dal normale flessore sottostante.

35.3.1.1 Travi di bordo verticali

158 Per travi verticali, Fig. 35.19a carichi di linea T_L e S_L sono applicati in modo che le forze di bordo libere pari a zero. Lo scopo del fascio verticale è quello di resistere al movimento verticale(Δ_v) e ceppo longitudinale (N_x/Eh).

159 Se il fascio è snello, si presume che sia offerta una resistenza trascurabile alla rotazione e alla traduzione orizzontale, ciò significa che le forze di bordo non sono più né forze di confine nette e sconosciute. V_b e S_b La determinazione di questi valori dipende dalle proprietà del fascio di bordo e dalla sua capacità di resistere alla deviazione verticale e allo sforzo longitudinale.

160 Poiché i carichi della linea di conchiglia sono rappresentati dalla serie Fourier, la stessa rappresentazione deve essere richiesta per il carico del fascio del bordo al fine di raggiungere la compatibilità con la shell sull'intera lunghezza longitudinale.

161 La teoria flexural ordinaria utilizza i seguenti rapporti:

$$\begin{aligned} EI\frac{d^4y}{dx^4} &= w_x = \text{loading} \\ EI\frac{d^3y}{dx^3} &= -S_x = \text{shear} \\ EI\frac{d^2y}{dx^2} &= -M_x = \text{moment} \\ \frac{dy}{dx} &= -\int_0^L \frac{M_x}{EI}dx + f_1(x) = \theta = \text{slope} \\ y &= -\int_0^L \int \frac{M_x}{EI}dx + \int_0^L f_1(x)dx + f_2(x) = \text{deflection} \end{aligned} \tag{35.118}$$

162 La tranciatura, il momento, la pendenza e la deflettorazione sono tutti risolti da una cassa di carico nota e dall'integrazione di base. $V_b \sin \frac{n\pi x}{L}$ l'equazione di carico assume la forma

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w_s = Vb \sin kx$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

($k = n\pi/L$); Then from above

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -M = -Vb\sin kx$$
$$y = \frac{V_b}{EIk^4}\sin kx$$

163 Lo stress longitudinale nella parte superiore del fascio è calcolato come

$$f_t = \frac{M}{Z_t} = \frac{V_b}{Z_t}\frac{1}{k^2}\sin kx$$

164 Con una forza di taglio nota, $S_b \cos kx$, una spinta risultante al bordo del fascio è prodotta a qualsiasi distanza x dal supporto del fascio.

$$T = -\int_0^x S_b \cos\frac{n\pi x}{L}dx = -S_b\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

165 Questa spinta dà un momento di piegatura Te e un carico normale T. La deviazione verticale è calcolata da Eq. 35.118con $f_1(x) = f_2(x) = 0$ e lo stress longitudinale nella parte superiore del fascio è ricomputato come

$$y = -\left[\frac{S_b}{EI}\frac{1}{k^3}\sin kx\right]e \tag{35.119}$$

e lo stress longitudinale nella parte superiore del fascio è

$$f_t = \frac{T}{A} + \frac{Te}{Z_t} \tag{35.120}$$

166 Per una sezione trasversale rettangolare, le equazioni precedentemente discusse possono essere scritte in forma di matrice. $I = bd^3/12$, $Z = bd^2/6$ e $e = d/2$, le equazioni sono riassunte come si vede qui sotto. For $V_b = S_b = 1$:

$$D^B_{11} = \frac{L^4}{Ebd^3}\frac{12}{\pi^4 n^4}\sin kx = \frac{L^4}{Ebd^3}\frac{0.12319}{n^4}\sin kx \tag{35.121}$$
$$f^B_{21} = -\frac{L^2}{bd^2}\frac{6}{\pi^2 n^2}\sin kx = -\frac{L^2}{bd^2}\frac{0.60793}{n^2}\sin kx D^B_{12} \quad = -\frac{L^3}{Ebd^2}\frac{6}{\pi^3 n^3}\sin kx \tag{35.122}$$
$$f^B_{22} = \frac{L}{bd}\frac{4}{\pi n}\sin kx \tag{35.123}$$

167 Lo spostamento e lo stress del fascio a causa di carichi completi sul raggio da solo possono essere trovati da Eqs. 35.123. Utilizzando la rappresentazione della serie Fourier per il carico uniforme verticale

$$(w_{B+L})_x = -\frac{4}{\pi}w_{B+L}\sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin kx$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

we derive

$$D^B_{10} = -\frac{4}{\pi} w_{B+L} \frac{L^4}{Ebd^3} \frac{0.12319}{n^4} \sin kx \tag{35.124}$$

$$f^B_{20} = \frac{4}{\pi} w_{B+L} \frac{L^2}{bd^2} \frac{0.60793}{n^2} \sin kx \tag{35.125}$$

35.3.1.2 Travi di bordo orizzontali

168 Per il fascio orizzontale, Fig. 35.19a, il processo è quasi identico a quello del fascio verticale; tuttavia H_b sostituisce V_b in Eq. 35.118, allo stesso modo, d e b (termine di Eqs. 35.123) sono invertiti per rappresentare la larghezza e la profondità del fascio. Come il fascio verticale, si presume abbia una rigidità rotazionale e trasversale trascurabile.

169 La differenza primaria si trova nell'aggiunta di un carico verticale V_{B+L} e un momento di piegatura M_{B+L} al bordo della conchiglia.

$$V_{B+L} = w_{B+L} d$$

$$M_{B+L} = w_{B+L} \frac{d^2}{2}$$

170 Così, il fascio orizzontale bordo si presume che portare il proprio carico come un cantilever di span d, non come un raggio di sculacciata L. Rapporto di profondità b per la durata L per tutti i fasci di bordo non supereranno solitamente 1/3, così la teoria della flessione ordinaria può essere applicata.

35.3.2 Trave di bordo precompressa

171 Lo scopo di prestressare all'interno del fascio è quello di consentire una riduzione delle dimensioni del fascicolo. Seguiremo nuovamente la nostra procedura di analisi a quattro fasi ed è il seguente:

Sistema primario: Il sistema primario è costituito da due elementi separati, il primo è la shell senza carico con bordi liberi.Il secondo è il fascio di bordo analizzato come un semplice raggio soggetto al carico prestressante.

Errori: Due errori sono presentati dai sistemi primari dei componenti della shell e del bordo: 1) la differenza nelle deflettozioni verticali del bordo libero della conchiglia; 2) la differenza negli stress longitudinali nel bordo della scocca e nella parte superiore del fascio di bordi. Per entrambi i casi, la deviazione zero si verificherà al bordo della shell poiché la struttura del guscio viene scaricata.

Correzioni: Una forza verticale, V_be forza di taglio, S_b sono applicati al fascio di bordo come visto in §35.3.1. V_b agisce verso l'alto sulla conchiglia e verso il basso sul

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

fascio riducendo la deflettorazione verticale e le sollecitazioni longitudinali nella shell. S_b agisce verso l'interno sulla conchiglia e verso l'esterno sul fascio riducendo la deviazione verticale e le sollecitazioni longitudinali nella shell.

Compatibilità: Le equazioni di compatibilità sono le stesse di quelle date per §35.3.1 con l'eccezione dei termini di errore derivati in Eq. 35.125.

172 I nuovi termini di errore sono derivati da Eqs. 35.123. Se il fascio del bordo è considerato come un semplice raggio, un profilo di rinforzo parabolico provoca una deviazione verticale verso l'alto e uno stress longitudinale nella parte superiore del fascio.

$$D^B_{10} = -\int_0^L \int \frac{M_F}{EI} dx dx + \int_0^L f_1(x)dx + f_2(x) \tag{35.126}$$

$$f^B_{20} = \frac{F}{A} - \frac{M_F}{Z_t} \tag{35.127}$$

dove M_F è il momento di piegatura a causa dell'eccentricità del profilo tendine.

173 Le deflettori e gli stress causati da questo momento di flessione sono calcolati in tutto il membro, tranne che ai supporti erano il momento di piegatura è assunto zero. Il carico uniforme equivalente viene quindi utilizzato per calcolare le deviazioni e lo stress.

$$w_e = \frac{8Fe_c}{L^2}$$

che può essere nuovamente rappresentato dalla serie Fourier:

$$(w_e)_x = \frac{4}{\pi} w_e \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin kx$$

174 Se il fascio di bordo è di una sezione trasversale rettangolare, Eq. 35.126 è riscritto sotto forma di

$$D^B_{10} = \frac{4}{\pi} \frac{8Fe_c}{L^2} \frac{L^4}{Ebd^3} \frac{0.12319}{n^4} \sin kx \tag{35.128}$$

e il secondo termine di Eq. 35.127 come il secondo di Eq. 35.125

$$\frac{M_F}{Z_t} = \frac{4}{\pi} \frac{F}{bd} \sin kx - \frac{4}{\pi} \frac{8Fe_c}{L^2} \frac{L^2}{bd^2} (0.60793) \sin kx \tag{35.129}$$

175 Per il primo mandato di Eq. 35.127 la compressione uniforme è data dalla serie Fourier:

$$\left(\frac{F}{A}\right)_x = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin kx$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Sostituire le ultime due equazioni in Eq. 35.127 e utilizzando solo il primo termine della serie Fourier, otteniamo

$$f_{20}^{B} = \frac{4}{\pi}\frac{F}{bd}\sin kx - \frac{4}{\pi}\frac{8Fe_c}{L^2}\frac{L^2}{bd^2}(0.60793)\sin kx \tag{35.130}$$

176 V_b^F e S_b^F sono determinati inserendo Eq. 35.128 e 35.130 in 35.116-35.117.

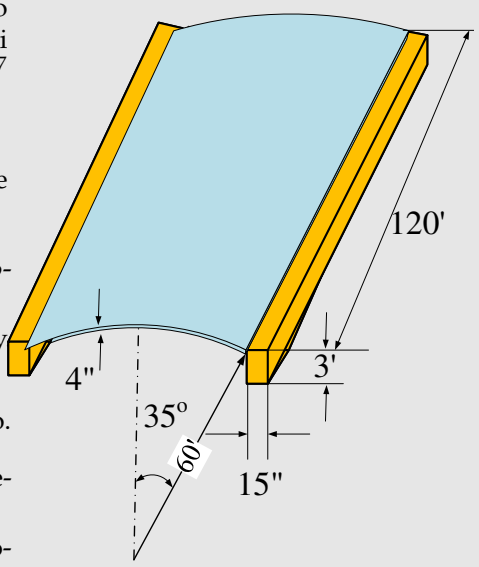
35.3.2.1 Ex 35.2: Progettazione di un guscio cilindrico

Personal Note: Questa è una soluzione per un compito di lavoro a casa per CE-720, un corso su *Analisi e progettazione di Shells* che è stato insegnato dal professor Richard Gallagher nella primavera del 1976.[a] 47 anni dopo, mi ritiro alla fine di quest'anno e sono lieto di inserire la mia soluzione in questo libro.

[a] Con cui ho preso anche Elemento Finito e Ottimizzazione Strutturale.

Un guscio cilindrico deve essere analizzato per un carico morto di 80 lb/ft^2. Assumere che i diaframmi sono presenti a ogni estremità che sono rigidi nei loro piani. $E = 3 \times 10^7$ psi, $\nu = 0$.
Procediamo come segue:

1. Analizzare la shell senza travi di bordo, ma supportate dai diaframmi finali solo utilizzando
   (a) Soluzione a membrana con la Tabella 2A (Appendice E); risultati tabulati e trama
   (b) Exact solution based on shallow shell theory Compare with membrane solution.
2. Considerare il guscio che poggia sul fascio del bordo.
   (a) Determinazione di spostamenti verticali e sollecitazioni conchiglia e trave
   (b) Scrivere un'equazione di compatibilità di spostamenti tra shell e beam, e risolvere
3. Determine final forces acting on the edge beams.



Guscio sostenuto dal solo diaframma

Soluzione membranale

In primo luogo, useremo l'approssimazione della membrana per analizzare la shell noting che $M_\phi = N_\phi = N_{\phi x}$ non sarà uguale a zero per l'approssimazione.

COPIA DI REVISIONE

Primary System I risultati dello stress saranno determinati dalla teoria della membrana come riassunto nella tabella 35.5.

Errors Dal momento che il sistema primario non ha considerato la presenza del fascio di bordo, avremo errori in N'_ϕ e $N''_{\phi x}$ per la teoria della membrana. Quindi, sostituendo p by $\frac{4}{\pi}p$ (da Eq. 35.66), $k = \frac{\pi}{L}$ Eq. 35.72 diventare

$$\begin{aligned} N'_\phi &= -\frac{4}{\pi} pr \cos(\phi_k - \phi) \sin kx \\ &= \frac{4}{\pi}(0.080)(60)\cos(35-0)\sin\frac{(1)\pi L}{L^2} \\ &= -5.006 \text{ k/ft at edge of the cylinder at } L/2 \\ N'_{\phi x} &= -\frac{8pL}{\pi^2}\sin(\phi_k - \phi)\cos kx \\ &= -\frac{(8)(0.08)(120)}{\pi^2}(0.5736)(0.9997) \\ &= -4.463 \text{ k/ft} \end{aligned}$$

Al bordo del cilindro con $x = 0$ or L.

Correzioni Per "constrain' lo stress derivante dalla teoria della membrana lungo i bordi, N'_ϕ e $N'_{\phi x}$ sono applicate e le tensioni risultanti sono calcolate dalla tabella 2 A (appendice E) definito in termini di

$$\begin{aligned} \frac{r}{h} &= \frac{60}{3.5/12} \simeq 200 \\ \frac{r}{L} &= \frac{60}{120} = 0.5 < 0.6 \\ \phi_k &= 35^\circ < 45^\circ \end{aligned}$$

Quindi il nostro guscio è un barile intermedio che può essere analizzato utilizzando la Tabella 2A (Appendix E).

Compatibility

$$\begin{aligned} V_L &= -N'_\phi \sin\phi_k = -(5.006)\sin 35^\circ = +2.871 \\ H_L &= -N'_\phi \cos\phi_k = -(-5.006)\cos 35^\circ = +4.101 \\ S_L &= -N'_{\phi k} = -4.463 \end{aligned}$$

Controllo dell'applicabilità della tabella 2A:

$$\begin{aligned} \frac{r}{h} &= \frac{60}{3.5/12} = 180 \simeq 200 \quad \text{so we can use table 2A} \\ \frac{r}{L} &= \frac{60}{120} = 0.5 < 0.6 \\ \phi_k &= 35^\circ < 45^\circ \end{aligned}$$

Quindi il nostro guscio è un barile intermedio che può essere analizzato utilizzando la Tabella 2A (Appendix E).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Loading	Multipliers	Angle ϕ measured from edge		
		35°	20°	0°
	$N_x = T_x;\ x = L/2$ k/ft			
Load‡	$C = \frac{2}{\pi^2} \sin\frac{\pi x}{L} \cos(\phi_k - \phi)$	-2.026	-0.1957	-0.1660
	$\frac{4}{\pi}(p)(r)\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-4.953	-4.784	-4.058
$V_L^\dagger$	Coefficient C (col 1)	+12.92	-8.763	+52.21
	$V_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	+148.4	-100.6	+599.6
$H_L^\dagger$	Coefficient C (col 5)	-7.760	+3.367	-22.16
	$H_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-127.3	+55.23	-363.5
$S_L^\dagger$	Coefficient C (col 9)	+0.0566	-0.1818	+2.374
	$S_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	+1.048	-3.367	+43.97
TOTAL		+17.19	53.52	+276.0
	$N_{\phi x} = S;\ x = 0$			
Load‡	$C = -\frac{2}{\pi} \cos\frac{\pi x}{L} \sin(\phi_k - \phi)$	0.0	-0.1648	-0.3651
	$\frac{4}{\pi}(p)(r)\left(\frac{L}{r}\right) C$	0.0	-2.014	-4.463
$V_L^\dagger$	Coefficient C (col 2)	0.0	+4.022	0.0
	$V_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	0.0	+23.09	0.0
$H_L^\dagger$	Coefficient C (col 6)	0.0	-3.036	0.0
	$H_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	0.0	-24.90	0.0
$S_L^\dagger$	Coefficient C (col 10)	0.0	-0.0966	+0.50
	$S_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	0.0	-0.8945	+4.630
TOTAL		0.0	-4.718	+0.10
	$N_\phi = T_\phi;\ x = L/2$			
Load‡	$C = -\sin\frac{\pi x}{L} \cos(\phi_k - \phi)$	-1.0	-0.9659	-0.8192

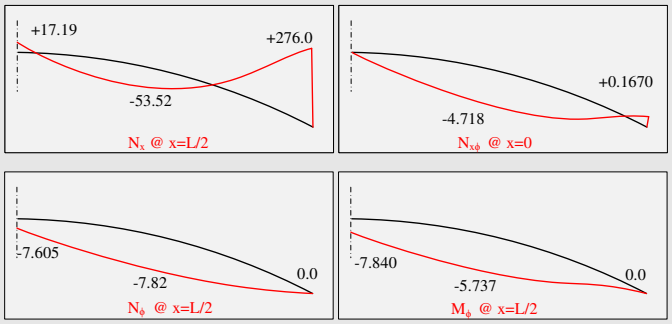
Continued on next page

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Loading	Multipliers	Angle ϕ measured from edge		
		35°	20°	0°
	$\frac{4}{\pi}(p)(r)\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-6.112	-5.903	-5.007
$V_L^\dagger$	Coefficient C (col 3)	+0.520	-2.425	+0.574
	$V_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	+1.493	-6.962	+1.648
$H_L^\dagger$	Coefficient C (col 7)	0.6687	+1.253	+0.8192
	$H_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-2.742	+5.138	+3.360
$S_L^\dagger$	Coefficient C (col 11)	-0.0528	-0.0204	0.0
	$S_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-0.2445	-0.0945	0.0
TOTAL		-7.605	-7.821	+0.001
	$M_\phi;\ x = L/2$			
$V_L^\dagger$	Coefficient C (col 4)	-0.1106	-0.1266	0.0
	$V_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-19.05	-21.81	0.0
$H_L^\dagger$	Coefficient C (col 8)	+0.0486	+0.0670	0.0
	$H_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	+1.96	+16.49	0.0
$S_L^\dagger$	Coefficient C (col 12)	-0.0027	-0.0015	0.0
	$S_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-0.7501	-0.4167	0.0
TOTAL		-7.840	-5.737	0.0

‡ Table 35.5; † Table 2A-l (E)



Ricordiamo che $M_\phi = N_\phi = N_{\phi x} \neq 0$ a causa delle ipotesi di membrana.

Soluzione a guscio ribassato

Qui cerchiamo la soluzione esatta utilizzando la soluzione analitica shell superficiale (§35.2.3).

1. Dimensions and loads: $L = 120'$, $r = 60'$, $h = 4''$, $\phi_k = 35°$, $p = 0.0$ ksf

COPIA DI REVISIONE

2. Shell constants

$$k = \frac{n\pi}{L} = 0.02618; \qquad n = 1$$
$$\gamma = \frac{rk}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\frac{h}{r}} = 0.08322$$
$$Q = \sqrt[8]{3}\sqrt[4]{\frac{r}{h}}\sqrt{rk} = 5.445$$

3. Roots (Eq 35.106)

$$m_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{(1+\gamma)^2+1}+(1+\gamma)}{2}} = 1.1308$$
$$n_1 = Q\sqrt{\frac{\sqrt{(1+\gamma)^2+1}-(1+\gamma)}{2}} = 0.4422$$
$$m_2 = Q\sqrt{\frac{\sqrt{(1-\gamma)^2+1}-(1-\gamma)}{2}} = 0.469$$
$$n_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{(1-\gamma)^2+1}+(1-\gamma)}{2}} = 1.0662$$

4. Coefficient of M_1 & M_2

$$\alpha_1 = Qm_1 = 6.1572$$
$$\beta_1 = Qn_1 = 2.407$$
$$\alpha_1' = Qm_2 = 2.5537$$
$$\beta_1' = Qn_1 = 5.8055$$

5. moltiplicatori trigonometrici e iperbolici per $\phi = -35° = 0.6108$ rad. da corona

$\cos\beta_1\phi$	$= +0.09929$	$\cos\beta_1'\phi$	$= -0.919$
$\sin\beta_1\phi$	$= -0.9950$	$\sin\beta_1'\phi$	$= +0.39382$
$\cosh\alpha_1\phi$	$= +21.5116$	$\cosh\alpha_1'\phi$	$= +2.4844$
$\sinh\alpha_1\phi$	$= +0.214884$	$\sinh\alpha_1'\phi$	$= -2.2742$
$\cos\beta_1\phi\cosh\alpha_1\phi$	$= +2.1466$	$\cos\beta_1\phi\sinh\alpha_1\phi$	$= -2.1443$
$\sin\beta_1\phi\sinh\alpha_1\phi$	$= +21.3812$	$\sin\beta_1\phi\cosh\alpha_1\phi$	$= -21.4043$
$\cos\beta_1'\phi\cosh\alpha_1'\phi$	$= -2.2836$	$\cos\beta_1'\phi\sinh\alpha_1'\phi$	$= +2.0904$
$\sin\beta_1'\phi\sinh\alpha_1'\phi$	$= -0.8956$	$\sin\beta_1'\phi\cosh\alpha_1'\phi$	$= +0.9784$

(35.131)

6. Condizioni di bordo della conchiglia (nota quelle non sono state esecutive dalla teoria della membrana)

$$M_\phi = 0$$
$$N_\phi = 0 = N_\phi' + T_L$$
$$Q_\phi' = Q_\phi + \frac{\partial M_{\phi x}}{\partial x} = 0 \quad \text{neglect the } n \text{ variation of } M_{\phi x}$$
$$N_{\phi x} = 0 = N_{\phi x}' + S_L$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

7. Equazioni per M_ϕ da Tabella 35.7

$$\begin{array}{llll} B_1 = Q^2(1+\gamma) & = +32.1153 & B_3 = Q^2(1-\gamma) & = -27.1807 \\ B_2 = Q^2 & = +29.6480 & B_4 = Q^2 & = 29.6480 \end{array}$$

Sostituire le equazioni corrispondenti nella tabella ed equivalere a zero

$$2R\Big[(32.1153Q-29.6480b)(2.1466)-(29.6480a+32.1153b)(21.3812)+(-27.1807c+29.6480d)(2.2836) + (29.6480c - 27.1807d)(0.8956)\Big] = 0 \quad (35.132)$$

Simplifying

$$-546.97a - 750.31b + 88.623c + 43.3612d = 0$$

8. Equazione per N_ϕ da Tabella 35.7

$$B_1 = 0; \quad B_2 = 1; \quad B_3 = 0; \quad B_4 = -1$$

Substituting

$$\frac{4D(60)(0.02618)^4}{0.08322^2}\left[(-b)(2.1466) - (a)(21.3812) + d(-2.2836) - (-c)(-0.8956)\right] - \frac{5.006}{2} = 0.0$$

$$\Rightarrow 0.348070a + 0.034945b + 0.014580c + 0.037125d = -\frac{2.503}{D} \quad (35.133)$$

9. Equazione per Q'_ϕ da Tabella 35.7

$$\begin{array}{ll} B_1 = m_1(1-\gamma) - n_1 = 0.59450 & B_3 = -m_2(1+\gamma) - n + 2 = -1.5742 \\ B_2 = m_1 + n_1(1-\gamma) = 1.5362 & B_4 = m_2 - n_2(1+\gamma) = 0.68593 \end{array}$$

Substituting

$$-\frac{-20(0.02618)^3}{(\sqrt{.08322})^3}\Big[(0.5945a - 1.53626b)(-2.1443) - (1.5362a + 0.5945b)(-21.4043) + (-1.5742c + 0.68593d)(2.0944) - (-0.68593c - 1.5747d)(0.9784)\Big] = 0.0 \quad (35.134)$$

or

$$31.6065a + 16.01893b - 2.6196c + 2.97410d = 0.0$$

10. Equazione per $N_{\phi x}$ da Tabella 35.7

$$\begin{array}{ll} B_1 = -n_1 = -0.4422 & B_3 = +n_2 = 1.0662 \\ B_2 = +m_1 = +1.1308 & B_4 = m_2 = -0.4690 \end{array}$$

Substituting

$$\frac{8D(60)(0.02618)^4}{(\sqrt{0.08322})^5}\Big[(-0.4422a - 1.1308b)(-2.443) - (1.1308a - 0.4422b)(-21.4043) + (1.0662c + 0.4690d)(2.0904) - (-0.4690c + 1.0662d)(0.9784)\Big] - 4.463 = 0.0 \quad (35.135)$$

or

$$2.8369a - 0.794561b + 0.30333c - 0.007045d = \frac{4.463}{D}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

11. Solution for arbitrary constants

$$-546.97a - 750.31b + 88.623c + 43.361d = 0$$
$$0.34807a + 034945b + 0.14580c + .037175d = -\frac{2.505}{D}$$
$$31.6065a + 16.01893b - 2.6196c + 2.9741d = 0.0$$
$$2.8369a - 0.794561b + 0.30333c - 0.007045d = \frac{4.463}{D}$$
$$\Rightarrow a = \frac{8.6097}{D}; \quad b = -\frac{26.4349}{D}; \quad c = \frac{-136.668}{D}; \quad d = \frac{-69.4923}{D};$$

12. From Table 35.7
$$D = \frac{Eh^3}{12} = \frac{(3\times 10^4)(4/12)^3}{12}(144) = 1.33\times 10^4$$
or
$$a = 6.4573\times 10^{-4}; \quad b = -0.0020; \quad c = -0.0103; \quad d = -0.0052;$$

13. Successivamente sostituiamo quei coefficienti e i coefficienti sono stati tabulati in Eq. 35.131 into Eq. 35.115 and obtain
$$N_x = 281.285 \text{ k/ft}$$

14. Dal momento che abbiamo calcolato le equazioni per $\phi = 35°$ da corona dove $M_\phi = N_\phi = N_{\phi x} = 0$; quindi l'unico confronto possibile è $N_x = 281.285$ K/ft rispetto a 276.0 k/ft dalla membrana approach. Pretty close!

Sistema guscio-trave

Sistema primario

I risultati finali della parte precedente costituiranno il sistema primario e le sollecitazioni che ne risulteranno saranno utilizzate per determinare gli spostamenti delle tabelle 2A e 2B nell'Appendice E

Errori

Sono dovuti a

1. Vertical deflections
2. Longitudinal stresses

lungo il bordo della conchiglia. Così, avremo discontinuità lungo i raggi.

La rigidità torsionale del fascio sarà considerata trascurabile.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Shell Membrane Vertical Displacement Lo spostamento verticale Δv è causato da risultati della membrana (Eq. 35.79) e dei carichi di bordo della tabella 2A (appendice E).

$$\Delta v^s = \frac{L^4}{r^3 hE}\left\{\underbrace{pr\left[\left(\frac{2r}{\pi L}\right)^2 + \frac{2}{\pi^4} + 0.50\left(\frac{r}{L}\right)^4\right]}_{\text{Membrane deflection}} + \underbrace{\text{Col}(1)V_L + \text{Col}(4)H_L + \text{Col}(7)S_L}_{\text{Edge load effects on deflections, Table 2B}}\right\}\sin kx$$

$$= \frac{(120)^4 L^2}{(60)^3(4/12)E}\left\{(0.08)(60)\left[\left(\frac{2(60)}{120\pi}\right)^2 + \frac{2}{\pi^4} + 0.50\left(\frac{60}{120}\right)^4\right]\right.$$
$$\left.+(486.24)(2.871) - (244.3)(4.101) + (8.309)(4.63)\right\}\sin kx$$
$$= \frac{L^2}{E}(86.76)\sin kx = D_{10}^S \quad (35.136)$$

dove il sottoscritto 1 corrisponde alla deflettorazione verticale, e 0 al carico morto applicato.

Membrane Edge Stress L'altra incompatibilità è per gli stress. $N_x = T_x = 2.76$ k/ft al $L/2$

$$\frac{N_x}{h} = \frac{2.76}{4/12} = 8.28 \text{ ksf} = f_{20}^S \quad \text{at } x = L/2$$

dove f_{20}^S il sottoscritto 2 e 0 corrispondono a sollecitazioni e carichi applicati rispettivamente.

Beam Vertical Displacement Per quanto riguarda il fascio, c'è una somiglianza tra D_{10}^B e f_{20}^b. Da Eq. 35.125, dove il peso del fascio è

$$w = \frac{15}{12}(3)(0.15) \text{ k/ft}^3 = 0.5625 \text{ k/ft}$$

$$D_{10}^B = -\frac{4}{\pi} w \frac{L^4}{Ebd^3}\frac{0.12319}{n^4}\sin kx$$
$$= -\frac{4}{\pi}(0.5625)\frac{(120)^2 L^2}{E\left(\frac{15}{12}\right)(3)^3}(0.123)\sin kx$$
$$= -37.586\frac{L^2}{E}\sin kx$$
$$f_{20}^B = \frac{4}{\pi} w \frac{L^2}{bd^2}\frac{0.60793}{n^2}\sin kx$$
$$= \frac{4}{\pi}(0.5625)\frac{(120)^2}{\left(\frac{15}{12}\right)(3)^2}(0.60793)\sin kx$$
$$= 557.37\sin kx$$

Incompatibilità

COPIA DI REVISIONE

Shell Displacements V_b e S_b sono anche applicati sul guscio. Come sopra

$$\begin{aligned}\Delta v &= \frac{L^4}{r^3 h E}\left((486.24)V_b + (8.309)S_b\right)\sin kx \\ &= \frac{L^2}{E}\frac{(120)^2}{(60)^3(4/12)}\left((486.24)V_b + (8.309)S_b\right)\sin kx \\ &= \frac{L^2}{E}\left(\underbrace{97.28}_{D^s_{11}}V_b + \underbrace{1.662}_{D^s_{12}}S_L\right)\sin kx\end{aligned}$$

Shell Stress

$$\begin{aligned}f^s &= \left(\frac{L}{r}\right)^2\frac{1}{h}\left(52.21V_b + 2.374S_b\right)\sin kx \\ &= \left(\frac{120}{60}\right)^2\left(\frac{12}{4}\right)\left(52.21V_b + 2.374S_b\right)\sin kx \\ &= \left(\underbrace{626.52}_{f^s_{21}}V_b + \underbrace{28.488}_{f^s_{22}}S_b\right)\sin k_x\end{aligned}$$

Beam Displacements (Eq. 35.123)

$$\begin{aligned}\Delta v^b &= \frac{L^4}{bd^3E}\left[(0.123)V_b - \frac{d}{L}(0.1935)S_b\right]\sin kx \\ &= \frac{L^2(120)^3}{(15/12)(3)^3E}\left[(0.123V_b - \frac{3}{120}(0.1935)S_b\right]\sin kx \\ &= \frac{L^2}{E}\left(\underbrace{52.48}_{D^b_{11}}V_b\underbrace{-2.064}_{D^b_{12}}S_b\right)\sin kx\end{aligned}$$

Beam stress

$$\begin{aligned}f^b_t &= \frac{L}{bd}\left(-0.608\frac{L}{d}V_b + 1.273S_b\right)\sin kx \\ &= \frac{120}{\left(\frac{15}{12}\right)(3)}\left(-0.608\frac{120}{3}V_b + 1.273S_b\right)\sin kx \\ &= \left(\underbrace{-778.24}_{f^b_{21}}V_b + \underbrace{40.736}_{f^b_{22}}S_b\right)\sin kx\end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Compatibilità

$$\begin{cases} \dfrac{L^2}{E}\left[\underbrace{(97.28}_{D_{11}^s}+\underbrace{52.48}_{D_{11}^b})V_b+(\underbrace{1.662}_{D_{12}^s}-\underbrace{2.064}_{D_{12}^b})S_b+(\underbrace{86.76}_{D_{10}^s}-\underbrace{37.586}_{D_{10}^b})\right]=0 \\ (\underbrace{626.52}_{f_{21}^s}-\underbrace{778.24}_{f_{21}^b})V_b+(\underbrace{28.488}_{f_{22}^s}+\underbrace{40.736}_{f_{22}^b})S_b+(\underbrace{828.0}_{f_{20}^s}+\underbrace{557.37}_{f_{20}^b})=0 \end{cases}$$

or

$$\begin{bmatrix} 149.76 & -0.402 \\ -151.72 & 69.224 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} V_b \\ S_b \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -49.174 \\ -1,385.37 \end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix} V_b \\ S_b \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -0.3839 \\ -20.85 \end{Bmatrix}$$

Valori finali della trave

Dall'alto, avevamo $N'_{\phi}=-5.006$ e $N'_{\phi x}=-4.463$

$$\begin{aligned} V_L &= -(-5.006)\sin 35^\circ = +2.871 \\ H_L &= -(-5.006)\cos 35^\circ = +4.101 \\ S_L &= -4.463 \end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Loading	Multipliers	Angle ϕ measured from edge		
		35°	20°	0°
$N_x = T_x;\ x = L/2$ k/ft				
Simple Shell		+17.19	-53.52	+276.0
V_L	Coefficient C (col 1)	+12.92	-8.763	+52.21
	$V_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-19.84	+13.46	-80.17
S_B	Coefficient C (col 9)	+0.0566	-0.1818	+2.374
	$S_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-4.72	+15.16	-198.0
TOTAL		-7.37	-24.9	-2.17
$N_{\phi x} = S;\ x = 0$				
Simple Shell		0.00	-4.718	+0.167
V_B	Coefficient C (col 2)	0.0	+4.022	0.0
	$V_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	0.0	-3.088	0.0
S_B	Coefficient C (col 10)	0.0	-0.0966	+0.50
	$S_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	0.0	+4.028	-20.85
TOTAL		0.0	-3.778	-20.68
$N_\phi = T_\phi;\ x = L/2$				
Simple Shell		-7.605	-7.821	0.0
V_B	Coefficient C (col 3)	+0.520	-2.425	+0.574
	$V_B C$	-0.199	+0.931	-0.220
S_B	Coefficient C (col 11)	-0.0528	-0.0204	0.0

Continued. . .

COPIA DI REVISIONE

Loading	Multipliers	Angle ϕ measured from edge		
		35°	20°	0°
	$S_B C$	+1.10	+0.425	0.0
TOTAL		-6.70	-6.46	-0.22
	$M_\phi;\ x = L/2$			
Simple Shell		-7.84	-5.737	0.0
V_B	Coefficient C(col 4)	-0.1106	-0.1266	0.0
	$V_B rC$	2.55	+2.92	0.0
S_B	Coefficient C (col 12)	-0.0027	-0.0015	0.0
	$S_B rC$	+3.38	+1.88	0.0
TOTAL		-1.91	-0.937	0.0

35.3.3 Codice MATLAB®ed esempio numerico

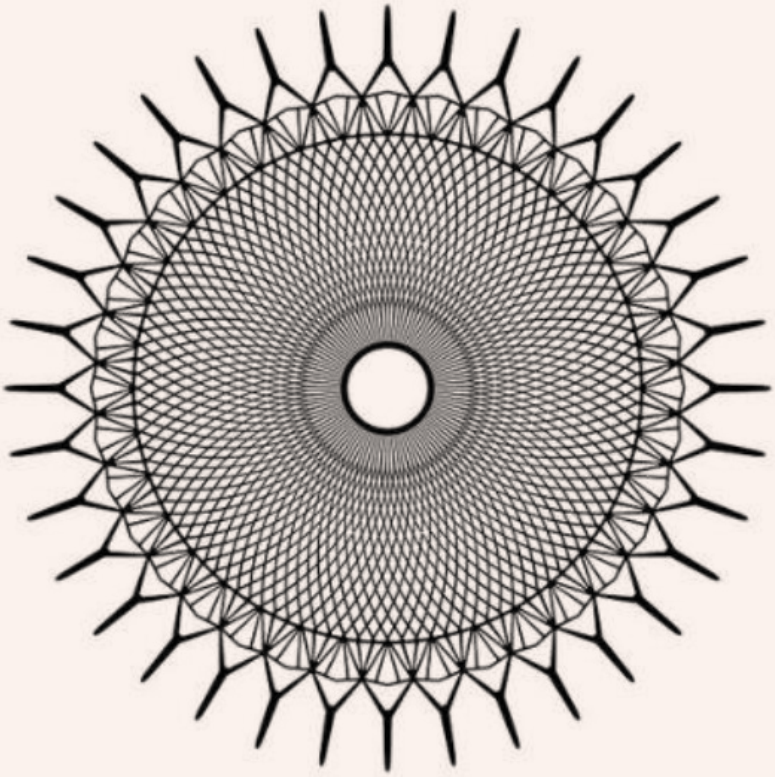
177 Un preliminare MATLAB®codice per la progettazione di conchiglie circolari è dato in Appendice I.2.1.

178 Un'ulteriore soluzione numerica alla conchiglia cilindrica si trova nell'Appendice F. È fornito da (Portland Cement Association, 1954), quale soluzione si basa su (Whitney et al., 1952) e quale soluzione è quasi identica a quella data da Billington, 1965.

179 Ulteriori informazioni si possono trovare nel libro seminale di Gibson, 1968.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Palazzetto dello Sport, Pier Luigi Nervi, 1957, Rome, Italy.

Exemplifies shell structures, where the thin, curved reinforced concrete shell efficiently carries loads through membrane action, minimizing bending stresses.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 36

Dinamica

Abstract

Questo capitolo sviluppa le basi della dinamica strutturale necessaria per un corso introduttivo, a partire dall'equazione del movimento e dal senso dell'inerzia e dell'umidificazione, tratta l'oscillatore monogrado di libertà in profondità: vibrazione libera (immortizzata e smorzata), eccitazione armonica e risonanza, e risposta transitoria al carico passivo, impulsivo e arbitrario (integrale di Duhamel). Il capitolo estende quindi la discussione a sistemi multi-grado di libertà a livello concettuale e analitico, sottolineando forme di modalità, decoupling modale, e l'interpretazione ingegneristica della risposta terremotata attraverso spettro di risposta. Nel corso dell'anno, l'accento è sulla comprensione fisica e sull'analisi orientata alla mano, preparando il terreno per i metodi computazionali presi in considerazione nel capitolo a livello di laurea.

36.1 Fondazioni filosofiche 1373
36.2 Quando è un'analisi dinamica 1374
36.3 Principi fondamentali 1375
36.3.1 Principio di d'Alembert e Equilibrio Dinamico 1375
36.3.2 L'Oscillatore monodegretario di libertà 1375
36.3.3 Frequenza naturale e periodo 1376
36.3.4 Damping e il rapporto di smorzamento 1377
36.4 Vibrazione gratuita 1379
36.4.1 Vibrazione libera non smorzata 1379
36.4.2 Vibrazione libera smorzata . 1380
36.4.3 Decreto logaritmico 1380
36.5 Vibrazione forzata: eccitazione armonica 1382
36.5.1 Risposta armonica non smorzata 1382
36.5.2 Risposta armonica smorzata 1383
36.6 Risposta al carico arbitrale 1385
36.6.1 Risposta Impulsa e impulso dell'unità 1385
36.6.2 Il Duhamel Integral 1386
36.6.3 Analisi e risposta alla frequenza di Fourier 1390
36.7 Supporto eccitazione e risposta del terremoto 1392
36.7.1 Equazione di movimento per l'eccitazione della base . . . 1392
36.7.2 Spettacolo di risposta 1393
36.8 Sistemi multi-disciplinari 1395
36.8.1 Equazioni di movimento . . 1395
36.8.2 Vibrazione libera senza smorzamento: Modalità naturali . 1396
36.8.3 Analisi dei metodi 1396
36.8.4 Partecipazione modulare alla risposta del terremoto . . 1397
36.9 Sistemi continui 1400
36.9.1 Vibrazione assiale di bar . . 1400

COPIA DI REVISIONE

36.9.2 Vibrazione trasversale delle fasci 1401
36.10 Dinamica non lineare 1403
36.10.1 Fonti di non linearità 1403
36.10.2 Isteresi e dissipazione energetica 1403
36.10.3 Dutility e Progettazione delle Capacità 1406
36.11 Considerazioni pratiche 1407
36.11.1 Smorzamento nelle strutture reali 1407
36.11.2 Interazione della struttura . 1408
36.11.3 Ammortizzatori di massa sintonizzati 1408
36.11.4 Ex 36.13: Progettazione di un ammortizzatore di massa sintonizzato per un edificio alto 1408
36.11.5 Isolamento di base 1410
36.11.6 Ex 36.14: Progettazione di un edificio ospedaliero isolato alla base 1410
36.12 Osservazioni di chiusura 1412
36.12.1 La cautela di un medico sui metodi dello spettro di risposta 1412
36.12.2 Nota di chiusura: limiti della teoria lineare 1412

✳ Questo capitolo è interamente scritto da Claude attraverso circa 60 richieste totali.

36.1 Fondazioni filosofiche

1 Nel corso dei capitoli precedenti, abbiamo trattato strutture come se esistessero in un equilibrio senza tempo–forze applicate istantaneamente e tenute per sempre, spostamenti che si verificano senza movimento, stress derivanti senza storia. Questa idealizzazione, pur potente per comprendere i rapporti fondamentali tra carico e risposta, rappresenta solo un caso limitato di comportamento strutturale. i carichi variano con il tempo, le masse possiedono inerzia e l'energia si dissipa attraverso l'umidità. è lo studio di come le strutture rispondono alle eccitazioni che si stanno diffondendo nel tempo, e forma il ponte essenziale tra l'analisi statica che abbiamo sviluppato e il comportamento effettivo delle strutture sotto vento, terremoto, impatto, vibrazioni dei macchinari e innumerevoli altri fenomeni a tempo dipendente.

2 La transizione dalle statiche alle dinamiche non è solo un'aggiunta di termini che dipendono dal tempo alle equazioni familiari, ma rappresenta uno spostamento fondamentale della prospettiva. «Qual è lo stato di stress e deformazione sotto un carico dato?» In dinamica, chiediamo: "Come si evolve la struttura nel tempo in risposta ad una eccitazione che va a lungo termine?" La risposta dipende non solo dalla rigidità della struttura (come negli statici) ma anche dalle caratteristiche di distribuzione e dissipazione dell'energia. Queste tre proprietà—stiffness, massa e smorzamento-formare la triade essenziale delle dinamiche strutturali.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

3 Lo sviluppo storico delle dinamiche strutturali parallela strettamente allo sviluppo della meccanica classica stessa.Le leggi di movimento di Newton, pubblicate nella *Principia* (1687), forniva la fondazione, le vibrazioni di corde e membrane occupavano Euler, d'Alembert, e Bernoullis nel corso del XVIII secolo. *Teoria del suono* (1877) sintetizzava gran parte del quadro matematico ancora oggi utilizzato. Il XX secolo ha portato la sfida dell'ingegneria del terremoto, a partire dal devastante terremoto di San Francisco nel 1906 e lo sviluppo dei metodi dello spettro di risposta, l'integrazione numerica del tempo e il design basato sulle prestazioni. Oggi, la dinamica strutturale costituisce un componente essenziale del kit di utensili di ogni ingegnere strutturale.

36.2 Quando è un'analisi dinamica

4 Una domanda che gli ingegneri sorprendentemente spesso lottano per rispondere chiaramente è ingannevole: quando è un'analisi dinamica realmente necessaria? La risposta, al suo nucleo, è semplice — un'analisi dinamica è necessaria quando la frequenza del carico applicato è dello stesso ordine di grandezza della frequenza naturale della struttura. Quando queste due frequenze si avvicinano l'un l'altro, il fenomeno della risonanza può verificarsi, potenzialmente amplificando la risposta strutturale ben oltre quello che un'analisi statica avrebbe previsto, a volte catastroficamente così.

5 Diverse conseguenze pratiche seguono questo principio. Una struttura flessibile — una con bassa frequenza naturale — è intrinsecamente più suscettibile all'eccitazione dinamica di quella rigida, perché la sua frequenza naturale è più probabile che cada nell'intervallo delle frequenze di carico comunemente incontrate, una struttura rigida, al contrario, ha un'alta frequenza naturale e risponderà quasi-staticamente alla maggior parte dei carichi, il che significa che un'analisi statica convenzionale è del tutto adeguata.

6 Più concretamente, si possono identificare quattro situazioni in cui l'analisi dinamica è giustificata: quando la struttura viene sottoposta a carichi rapidamente variabili come l'esplosione o l'impatto; quando supporta macchine rotanti la cui frequenza operativa può coincidere con una modalità strutturale; quando deve resistere all'eccitazione sismica, dal momento che i terremoti eccitano un'ampia banda di frequenze; e quando si tratta di una struttura snella o flessibile esposta al vento, dove il vortice spargimento o flutter può indurre la risonanza.

7 Una regola utile del pollice è che se la frequenza dominante del carico applicato supera approssimativamente un terzo della frequenza naturale fondamentale della struttura, gli effetti dinamici diventano non-negligibili e devono essere valutati. Sotto tale soglia, un'analisi statica con fattori di amplificazione appropriati è generalmente sufficiente.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

36.3 Principi fondamentali

36.3.1 Principio di d'Alembert e Equilibrio Dinamico

Per il contesto storico, consultare §6.7.4

8 La pietra angolare della dinamica strutturale è il principio di d'Alembert, pubblicato nel suo *Trait? de dinamique* (d'Alembert, 1743)d'Alembert ha riconosciuto che la seconda legge di Newton potrebbe essere riecheggiata come principio dell'equilibrio dinamico introducendo il concetto di un *forza inerziale*. Se un corpo di massa m esperienze un'accelerazione $\ddot{u}$, possiamo considerare il prodotto $-m\ddot{u}$ come forza fittizio che agisce sul corpo, tale che la somma di tutte le forze (compresa questa forza inerziale) uguale a zero. Questa semplice riformazione trasforma i problemi dinamici in problemi di equilibrio, permettendo l'applicazione dei potenti metodi delle statiche.

9 Per una particella di massa m sottomesso a una forza esterna $F(t)$, la seconda legge di Newton afferma:

$$F(t) = m\ddot{u}(t)$$

dove $\ddot{u}(t) = \mathrm{d}^2u/\mathrm{d}t^2$ è l'accelerazione.

$$F(t) - m\ddot{u}(t) = 0$$

Questo è il principio di d'Alembert: la forza applicata $F(t)$ è bilanciata dalla forza inerziale $F_I = -m\ddot{u}(t)$, dando equilibrio dinamico in ogni momento del tempo.

10 La profonda utilità del principio di d'Alembert risiede nella sua estensione ai sistemi continui e alle formulazioni virtuali di lavoro. Trattando le forze inerziali sullo stesso piano delle forze applicate, possiamo applicare il principio del lavoro virtuale, il principio di Hamilton e le equazioni di Lagrange per ricavare equazione di movimento per strutture arbitrariamente complesse. Il prezzo che paghiamo è che le nostre equazioni "equilibrio" diventano equazione differenziali nel tempo, richiedendo condizioni iniziali e integrazione per ottenere la risposta.

36.3.2 L'Oscillatore monodegretario di libertà

11 Il sistema monogrado di libertà (SDOF) è alle dinamiche strutturali quello che il raggio semplicemente sostenuto è all'analisi strutturale: l'esempio canonico attraverso cui si introducono e comprendono concetti fondamentali. m costretto a muoversi in una direzione, collegato ad un supporto fisso attraverso una molla di rigidità k e un ammortizzatore viscoso con coefficiente c. Quando la massa viene spostata $u(t)$ dalla sua posizione di equilibrio e sottoposta a una forza esterna $F(t)$, tre forze interne sorgono:

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

- Il **forza di ripristino elastica**: $F_S = ku(t)$, proporzionale allo spostamento e diretto verso l'equilibrio.
- Il **forza di smorzamento**: $F_D = c\dot{u}(t)$, proporzionale alla velocità e al movimento opposto.
- Il **forza inerziale**: $F_I = m\ddot{u}(t)$, proporzionale all'accelerazione.

12 Uno schema della massa idealizzata–spring– modello di ammortizzatore è mostrato in Figura 36.1.

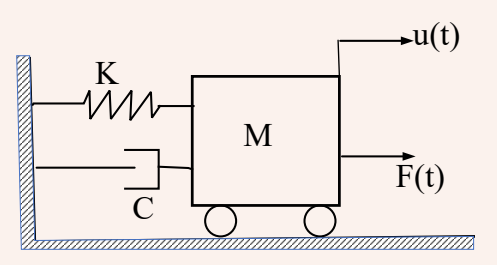


Figura 36.1: oscillatore monogrado di libero dominio

13 Applicando il principio di d'Alembert —la somma di tutte le forze equivale a zero—— si dice l'equazione fondamentale del movimento:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = F(t) \tag{36.1}$$

Questa equazione differenziale ordinaria lineare di secondo ordine governa la risposta del sistema SDOF a qualsiasi eccitazione $F(t)$. La sua soluzione richiede due condizioni iniziali: lo spostamento iniziale $u(0) = u_0$ e la velocità iniziale $\dot{u}(0) = v_0$.

14 L'equazione SDOF (36.1) è ingannevole nell'aspetto, ma racchiude la fisica essenziale dei sistemi vibranti. I tre termini sul lato sinistro rappresentano i tre meccanismi fondamentali con cui una struttura resiste al carico dinamico: inerzia (dipendente dall'accelerazione), smorzamento (dipendenza dalla velocità) e rigidità (dipendenti dallo spostamento). Le magnitudine relative di questi termini, e come variano con frequenza, determinano il carattere della risposta dinamica.

36.3.3 Frequenza naturale e periodo

15 Ogni struttura possiede proprietà dinamiche intrinseche che dipendono solo dalla sua massa e rigidità, non dal carico applicato. *frequenza naturale*, definito per un sistema SDOF non smorzato come:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(rad/s)}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Questa frequenza circolare ω_n rappresenta il tasso a cui oscilla il sistema non smorzato quando si sposta dall'equilibrio e libera.

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{(s)}$$

$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(Hz)}$$

36.3.3.1 Ex 36.1: Calcolo di ω_n, T_n e f_n per un sistema SDOF

Considerare una massa di pavimento $m = 2000$ kg supportato lateralmente da una rigidità equivalente $k = 800$ kN/m.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{800 \times 10^3}{2000}} = \sqrt{400} = 20 \text{ rad/s}$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{20} = 0.314 \text{ s}, \qquad f_n = \frac{1}{T_n} \approx 3.18 \text{ Hz}$$

16 La frequenza naturale è forse il parametro più importante nella dinamica strutturale, determina la frequenza in cui si verifica la risonanza, la risposta al carico impulsivo e la relazione di fase tra eccitazione e risposta. Fisicamente, un'alta frequenza naturale implica rigidità elevata o massa bassa (o entrambe); tali sistemi rispondono rapidamente e con piccoli spostamenti ai carichi applicati. tali sistemi rispondono lentamente e possono sperimentare grandi spostamenti.

17 Per la progettazione preliminare, gli ingegneri spesso stimano i periodi naturali utilizzando formule empiriche.

$$T_n \approx 0.1N \quad \text{(s)}$$

dove N Questa regola di pollice, mentre grezzo, cattura la scalatura essenziale: gli edifici più alti sono più flessibili e hanno periodi più lunghi. Le stime più raffinate rappresentano il tipo di sistema strutturale, materiale e configurazione.

36.3.4 Damping e il rapporto di smorzamento

18 Tutte le strutture reali dissipano l'energia durante la vibrazione. *smorzamento*, nasce da numerosi meccanismi: attrito interno all'interno dei materiali, attriti a connessioni e supporti, trascinamento aerodinamico e radiazione di energia nel mezzo circostante. Sebbene la fisica dell'umidificazione sia complessa e varia, le dinamiche strutturali adottano in genere un modello semplificato: *smorzamento viscoso*, in cui la forza di smorzamento è proporzionale alla velocità.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

19 Il coefficiente di smorzamento c ha unità di forza per velocità (N·s/m in unità SI), ma il suo valore assoluto è meno significativo del rapporto con un valore critico. *coefficiente di smorzamento critico* è definito come:

$$c_{cr} = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n$$

Un sistema con esattamente questo coefficiente di smorzamento ritorna all'equilibrio in tempo minimo senza oscillare. *rapporto di smorzamento* ζ esprime l'umidità reale come una frazione di critica:

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega_n}$$

20 Il rapporto di smorzamento è indissolubile e tipicamente piccolo per le strutture: $\zeta \approx 0.01$ to 0.05 (1% to 5% Nonostante la sua piccola magnitudine, l'umidità colpisce profondamente la risposta, particolarmente vicino alla risonanza dove limita l'amplificazione altrimenti non abboccata.

21 Esistono tre regimi di comportamento smorzato:

Sottocampo ($\zeta < 1$): Il sistema oscilla con ampiezza gradualmente diminuita, è il caso di quasi tutte le strutture.

Criticamente smorzato ($\zeta = 1$): Il sistema ritorna in equilibrio senza oscillazione nel tempo minimo. Utilizzato in alcuni dispositivi meccanici (chiudi a porta) ma raro nelle strutture.

Sovraccarico ($\zeta > 1$): Il sistema ritorna all'equilibrio senza oscillazione, ma più lentamente che critico.

22 La frequenza naturale umida per un sistema sotto-amped è:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

Per i tipici rapporti di smorzamento strutturale ($\zeta < 0.1$), $\omega_d \approx \omega_n$ con meno di 1% differenza. La distinzione diventa importante solo per sistemi fortemente smorzati.

Condizioni iniziali come variabili di stato

Nelle dinamiche, lo spostamento iniziale e la velocità iniziale non sono solo l'archiviazione; definiscono lo stato iniziale del sistema. $t = 0$, e possono dominare la risposta in anticipo anche in assenza di forza esterna; quando si utilizzano soluzioni analitiche, le costanti di integrazione sono fissate da queste condizioni iniziali; quando si utilizza l'integrazione numerica del tempo, le stesse informazioni entrano come vettore di stato iniziale.

Nota di modellazione su smorzamento

A differenza della rigidità e della massa, l'umidità è raramente conosciuta dai primi principi: l'umidazione viscosa viene introdotta principalmente come un modello efficace

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

che cattura la dissipazione dell'energia osservata in una forma matematica conveniente. I suoi parametri sono quindi tipicamente calibrati da esperimenti, misurazioni sul campo o giudizio ingegneristico e la sensibilità della risposta predetta al modello di smorzamento assunto dovrebbe sempre essere tenuto a mente.

36.4 Vibrazione gratuita

23 Vibrazione libera si verifica quando un sistema oscilla senza forza esterna, guidato solo dalle condizioni iniziali. Questo caso apparentemente semplice rivela il carattere dinamico fondamentale del sistema e costituisce la base per comprendere le vibrazioni forzate.

36.4.1 Vibrazione libera non smorzata

24 Per il caso non smorzato ($c = 0$), l'equazione del movimento riduce a:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0$$

Divisa da m e l'introduzione $\omega_n^2 = k/m$:

$$\ddot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = 0$$

Questa è l'equazione del semplice movimento armonico. La soluzione generale è:

$$u(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t)$$

dove A e B sono costanti determinate dalle condizioni iniziali. Con $u(0) = u_0$ e $\dot{u}(0) = v_0$:

$$u(t) = u_0\cos(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n}\sin(\omega_n t)$$

25 La soluzione può essere scritta in forma di ampiezza-fase:

$$u(t) = \rho\cos(\omega_n t - \phi)$$

dove l'ampiezza ρ e angolo di fase ϕ sono:

$$\rho = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2}, \qquad \tan\phi = \frac{v_0}{\omega_n u_0}$$

Il sistema non smorzato oscilla per sempre con ampiezza costante ρ, completando un ciclo nel tempo $T_n = 2\pi/\omega_n$.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

36.4.2 Vibrazione libera smorzata

26 Con l'umidità inclusa, l'equazione del movimento diventa:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0$$

Divisa da m e l'introduzione ζ e ω_n:

$$\ddot{u}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = 0$$

27 Cerchiamo soluzioni della forma $u(t) = Ce^{st}$. La sostituzione produce l'equazione caratteristica:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

con radici:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

28 Per la custodia sotto-ampio ($\zeta < 1$), le radici sono coniugate complesse:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d$$

dove $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ è la frequenza naturale umida. La soluzione generale è:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right]$$

Con le condizioni iniziali $u(0) = u_0$ e $\dot{u}(0) = v_0$:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[u_0\cos(\omega_d t) + \frac{v_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right]$$

29 La soluzione rappresenta l'oscillazione a frequenza ω_d, con l'ampiezza decadimento esponenzialmente al tasso $\zeta\omega_n$. La busta dell'oscillazione è $\pm\rho e^{-\zeta\omega_n t}$dove ρ Il sistema si riposerà, ma l'approccio all'equilibrio è oscillatorio.

36.4.3 Decreto logaritmico

30 Il decremento logaritmico fornisce un metodo pratico per determinare il rapporto di smorzamento dalla risposta alle vibrazioni libere misurate. t_1 e $t_2 = t_1 + T_d$dove $T_d = 2\pi/\omega_d$ è il periodo umido. Il rapporto di ampiezza è:

$$\frac{u(t_1)}{u(t_2)} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}}{e^{-\zeta\omega_n(t_1+T_d)}} = e^{\zeta\omega_n T_d}$$

Il decremento logaritmico δ è definito come logaritmo naturale di questo rapporto:

$$\delta = \ln\frac{u(t_1)}{u(t_2)} = \zeta\omega_n T_d = \zeta\omega_n\frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

31 Per piccolo smorzamento ($\zeta \ll 1$), questo semplifica:

$$\delta \approx 2\pi\zeta \quad \Rightarrow \quad \zeta \approx \frac{\delta}{2\pi} \tag{36.2}$$

In pratica, misurare oltre n i cicli migliorano l'accuratezza:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{u_1}{u_{n+1}} \tag{36.3}$$

36.4.3.1 Ex 36.2: Stima dello smorzamento mediante decremento logaritmico

Supponiamo che un sistema leggermente smorzato venga rilasciato dal riposo e le ampiezza di picco sono misurate come $u_1 = 10$ mm e $u_6 = 6$ mm- Sì, sì. $n = 5$ cicli. Usando Eq. (36.3):

$$\delta = \frac{1}{5} \ln\left(\frac{10}{6}\right) = \frac{1}{5}(0.5108) = 0.1022$$

Per piccoli smorzamenti, Eq. (36.2) dà:

$$\zeta \approx \frac{\delta}{2\pi} = \frac{0.1022}{6.283} = 0.0163 \approx 1.6\%$$

Supplemento: Vibrazione libera (abordo da ex appendice)

32 L'equazione governativa per la vibrazione libera (sondata) di una struttura è

$$\mathbf{M\ddot{u}} + \mathbf{Ku} = 0$$

dove la mozione è riferita ad essere libera poiché non ci sono carichi applicati.

33 Assumendo un movimento armonico

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi} \sin \omega t$$

le frequenze naturali, ω, e le forme di modalità corrispondenti, $\boldsymbol{\phi}$, può essere determinato dal problema generalizzato dell'autovalore

$$\omega^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\phi} = \mathbf{K}\boldsymbol{\phi}$$

or

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = 0$$

34 Da $\boldsymbol{\phi}$ è non banale,

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0$$

o con $\omega^2 = \lambda$

$$|\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}| = 0$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

che è l'equazione caratteristica; λ è chiamato l'igenvalore dell'equazione, e la struttura si dice rispondere nella modalità corrispondente a una particolare frequenza.

35 Per scopi computazionali, se premultiply ogni lato dell'equazione precedente da $\mathbf{M}^{-1}$Allora

$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{\phi} = 0$$

36 Va notato che un autovalore zero è ottenuto per ogni possibile movimento del corpo rigido di una struttura non completamente supportata (§45.1.1). A seconda della matrice di massa, si ottengono risultati leggermente diversi; in generale le matrici di massa lumped si avvicinano al valore esatto (matrice di massone coerente) dal basso.

37 Il modo forma, $\boldsymbol{\phi}$, sono "shapes' e danno una magnitudine relativa del DOF, non i valori assoluti (perché sono la soluzione ad un insieme di equazioni omogenee). Entrambe le frequenze naturali e forme di modalità forniscono una descrizione fondamentale della struttura vibrante.

36.5 Vibrazione forzata: eccitazione armonica

38 Quando una struttura è sottoposta a una forza periodica, alla fine si stabilisce in un'oscillazione dello stato costante alla frequenza di forzatura. Questa risposta armonica rivela il fenomeno fondamentale della risonanza e fonda la base per comprendere la risposta alle eccitazioni più complesse.

36.5.1 Risposta armonica non smorzata

39 Considerare il sistema non smorzato sottoposto a una forza sinusoidale $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$dove ω è la frequenza di eccitazione (non necessariamente uguale a quella del ω_n):

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = F_0 \sin(\omega t)$$

La soluzione completa consiste nella soluzione complementare (omogenea) più in una particolare soluzione. $\omega \neq \omega_n$, la soluzione particolare è:

$$u_p(t) = \frac{F_0/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin(\omega t)$$

40 Lo spostamento statico in vigore F_0 sarebbe $u_{st} = F_0/k$. Il rapporto tra spostamento dinamico e statico è il *fattore di amplificazione dinamica*:

$$D = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} = \frac{1}{1 - \beta^2}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove $\beta = \omega/\omega_n$ Questo fattore di amplificazione è la chiave per comprendere la risposta dinamica:

- Per $\beta \ll 1$ (eccitazione molto più lenta della frequenza naturale): $D \approx 1$. La risposta è quasi-statica; le forze inerziali sono trascurabili.
- Per $\beta \gg 1$ (eccitazione molto più veloce della frequenza naturale): $D \approx 0$. La massa non può seguire il rapido forcing; rimane quasi stazionario.
- Per $\beta \to 1$ (eccitazione vicino alla frequenza naturale): $|D| \to \infty$. Questo è *risonanza*.

41 Il fenomeno della risonanza—la crescita ineguagliata di risposta quando la frequenza dell'accitazione uguale alla frequenza naturale — è forse il concetto più importante nelle dinamiche strutturali. Spiega il crollo del Tacoma Narrows Bridge (1940), il fallimento dei supporti di macchinari e innumerevoli altri disastri ingegneristici. Ogni disegno dinamico deve garantire che le frequenze operative siano sufficientemente separate dalle frequenze naturali.

36.5.2 Risposta armonica smorzata

42 Con l'umidazione, l'equazione del movimento sotto forza armonica è:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = F_0 \sin(\omega t)$$

La soluzione transitoria (omogenea) si deteriora esponenzialmente, lasciando solo la particolare soluzione di stato stabile:

$$u_p(t) = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \sin(\omega t - \phi)$$

dove l'angolo di fase ϕ is:

$$\tan\phi = \frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2} \tag{36.4}$$

43 Il fattore di amplificazione dinamico per il sistema smorzato è:

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \tag{36.5}$$

La smorzamento limita l'amplificazione di risonanza ad un valore finito:

$$D_{\max} = \frac{1}{2\zeta} \quad \text{at} \quad \beta = \sqrt{1-2\zeta^2} \approx 1$$

Per $\zeta = 0.02$ (2% smorzamento), $D_{\max} = 25$per $\zeta = 0.05$ (5% smorzamento), $D_{\max} = 10$. Anche piccolo smorzamento riduce significativamente la risposta risonante.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

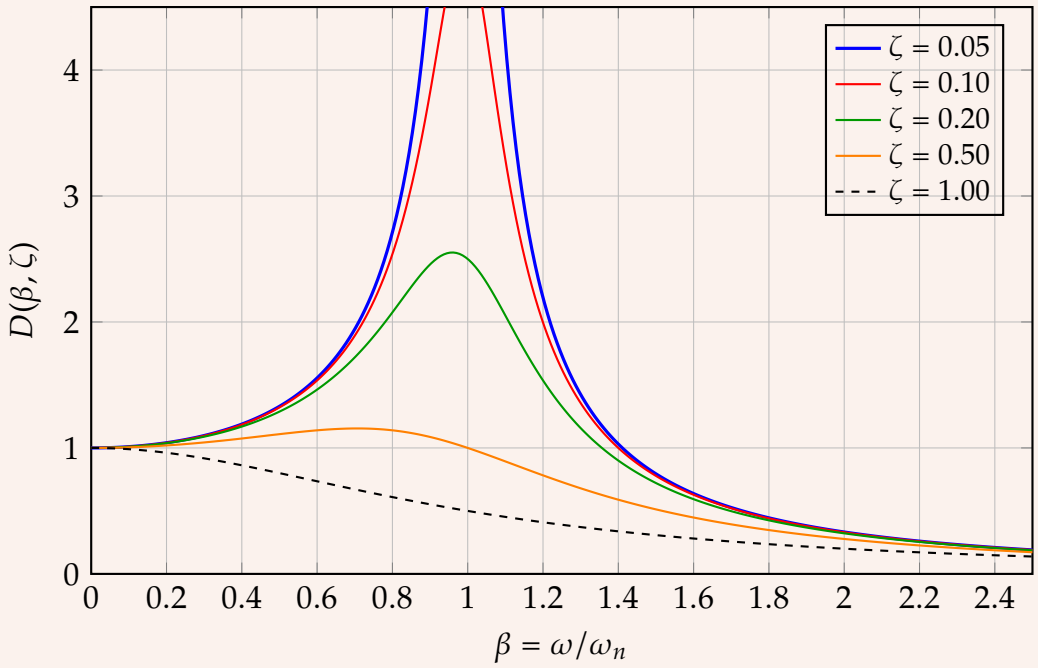


Figura 36.2: Curve di amplificazione dinamica concettuale per un oscillatore SDOF smorzato sotto forza armonica

44 Figura 36.2 schizzi il fattore di amplificazione dinamico D come funzione del rapporto di frequenza $\beta = \omega/\omega_n$ per diversi rapporti di smorzamento.

45 L'angolo di fase ϕ rappresenta il ritardo tra la forzatura e la risposta. A basse frequenze ($\beta \ll 1$), $\phi \approx 0$: la risposta è in fase con la forza.$\beta = 1$), $\phi = 90$?: la risposta è in ritardo di un ciclo trimestrale.$\beta \gg 1$), $\phi \to 180$?: la risposta è quasi opposta alla forza.

36.5.2.1 Ex 36.3: Risposta armonica: amplificazione e fase

Lasciare che un sistema SDOF umido abbia rigidità $k = 200$ kN/m e essere eccitato da una forza armonica con ampiezza $F_0 = 10$ kN. L'ampiezza di spostamento statico è $u_{st} = F_0/k = 10/200 = 0.05$ m.

Assumere un rapporto di frequenza $\beta = \omega/\omega_n = 0.9$ e rapporto di smorzamento $\zeta = 0.05$. Da Eq. (36.5):

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-0.81)^2 + (2\cdot 0.05\cdot 0.9)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.19^2 + 0.09^2}} \approx 4.76$$

Così l'ampiezza di spostamento dello stato stabile è $u_0 = D\, u_{st} \approx 4.76(0.05) = 0.238$ m.

Da Eq. (36.4):

$$\tan\phi = \frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2} = \frac{0.09}{0.19} = 0.474 \quad \Rightarrow \quad \phi \approx 25.4^\circ$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

36.6 Risposta al carico arbitrale

46 I carichi reali dinamici—gomme del vento, movimento terra del terremoto, forze d'impatto-sono raramente armoniche. Abbiamo bisogno di metodi per determinare la risposta alle forze arbitrarie che si stanno allontanando dal tempo. l'analisi integrale di Duhamel (dominio temporale) e Fourier (domino frequenza).

36.6.1 Risposta Impulsa e impulso dell'unità

47 La risposta ad un impulso unitario idealizzato fornisce il blocco dell'edificio per analizzare le eccitazioni arbitrarie. Un impulso è una forza molto grande applicata per un tempo molto breve, tale che il prodotto (forza × tempo) ha un valore finito chiamato *impulso*. La funzione delta Dirac $\delta(t-\tau)$ rappresenta un impulso unitario a tempo τ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\,\mathrm{d}t = 1, \qquad \delta(t-\tau) = 0 \text{ for } t \neq \tau$$

48 Quando un impulso di unità agisce su un sistema a riposo, l'impulso-momentum il teorema dà la velocità iniziale immediatamente dopo l'impulso:

$$m\Delta v = 1 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{1}{m}$$

La successiva vibrazione libera, con $u(0) = 0$ e $\dot{u}(0) = 1/m$, è il *funzione di risposta dell'impulso unitaria* $h(t)$:

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t), \quad t > 0 \tag{36.6}$$

Per il caso non smorzato:

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_n} \sin(\omega_n t), \quad t > 0 \tag{36.7}$$

36.6.1.1 Ex 36.4: Risposta dell'unità di impulso di un sistema SDOF umido

Un serbatoio d'acqua modellato come sistema SDOF ha massa $m = 500$ kg, rigidità laterale $k = 200$ kN/m, e rapporto di smorzamento $\zeta = 5\%$. Un tubo scoppia e fornisce una forza molo impulsiva che può essere idealizzata come impulso unitario ($\hat{F} = 1$ N·s) at $t = 0$. Determinazione: a) le proprietà dinamiche; (b) la funzione di risposta dell'impulso; (c) lo spostamento a $t = 0.10$ s; (d) lo spostamento di picco e il tempo in cui si verifica.

Soluzione.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

(a) Proprietà dinamiche.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200\,000}{500}} = 20.00 \text{ rad/s}, \qquad T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 0.314 \text{ s}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 20.00\sqrt{1-0.0025} = 19.975 \text{ rad/s}$$

b) Funzione di risposta dell'impulso.
Da Eq. (36.6)con $m = 500$ kg e $\omega_d = 19.975$ rad/s:

$$h(t) = \frac{1}{500 \times 19.975}\, e^{-0.05\times 20\, t} \sin(19.975\, t) = 1.0025 \times 10^{-4}\, e^{-t} \sin(19.975\, t) \quad \text{m/(N·s)}$$

Per un impulso unitario $\hat{F} = 1$ N·s, la risposta è semplicemente $u(t) = \hat{F}\, h(t) = h(t)$.

c) Sviluppi a $t = 0.10$ s.

$$u(0.10) = 1.0025 \times 10^{-4}\, e^{-1\times 0.10} \sin(19.975 \times 0.10)$$

$$= 1.0025 \times 10^{-4} \times 0.9048 \times \sin(1.9975 \text{ rad}) = 1.0025 \times 10^{-4} \times 0.9048 \times 0.9128 = 8.28 \times 10^{-5} \text{ m}$$

$$u(0.10) \approx 0.083 \text{ mm}$$

d) Sviluppi di picco.
Il picco del $h(t)$ si verifica quando $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t = 0$, che per piccolo smorzamento è approssimativamente a $\omega_d\, t_{\text{peak}} = \pi/2$:

$$t_{\text{peak}} = \frac{\pi/2}{\omega_d} = \frac{\pi/2}{19.975} = 0.0786 \text{ s}$$

$$h_{\text{peak}} = \frac{1}{m\omega_d}\, e^{-\zeta\omega_n t_{\text{peak}}} = 1.0025 \times 10^{-4}\, e^{-0.05\times 20\times 0.0786} = 1.0025 \times 10^{-4} \times e^{-0.0786} = 9.26 \times 10^{-5} \text{ m/(N·s)}$$

Lo spostamento di picco a causa di un impulso unitario è 0.0926 mm/(N·s). Per un impulso reale $\hat{F}$, le scale di picco linearmente: $u_{\text{peak}} = \hat{F}\, h_{\text{peak}}$.

36.6.2 Il Duhamel Integral

[49] Jean-Marie Duhamel (1797–1872) sviluppò l'integrale della convoluzione che porta il suo nome per risolvere l'equazione di calore, ma si applica ugualmente a La chiave è che una forza arbitraria $F(t)$ può essere visto come una sequenza di impulsi infinitesimali. τ, an impulso $F(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ agisce sul sistema. La risposta a questo impulso in un secondo momento t is $F(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$. Superare tutti questi contributi:

$$u(t) = \int_0^t F(\tau)\, h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin[\omega_d(t-\tau)]\,\mathrm{d}\tau \tag{36.8}$$

Questo è l'integrale di Duhamel (anche chiamato convoluzione integrale). Dà risposta a qualsiasi forzatura $F(t)$, se le condizioni iniziali non sono zero, deve essere aggiunta la risposta alle vibrazioni libere.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

50 L'integrale Duhamel è teoricamente potente ma spesso difficile valutare analiticamente. Per semplici funzioni di forzatura (passo, rampa, rettangolare per le eccitazioni complesse o misurate, esistono soluzioni di forma chiusa. è necessaria l'integrazione numerica.

36.6.2.1 Ex 36.5: Caricamento passo improvvisa: l'amplificazione dinamica fattore 2

Lo stesso sistema SDOF come esempio 36.6.1.1 ($m = 500$ kg, $k = 200$ kN/m) è sottoposto ad un forza costante improvvisamente applicata $F_0 = 10$ kN at $t = 0$ (un carico di passo), mantenuto indefinitamente. Il sistema inizia dal riposo. Determinazione: a) la risposta utilizzando l'integrale Duhamel per il non smorzato caso; b) lo spostamento massimo e il fattore di amplificazione dinamico; (c) l'effetto di 5% smorzando sulla cima.

Soluzione.

(a) Duhamel integrale per un carico di gradino, caso non smorzato.

Con $F(\tau) = F_0 = \text{const}$ e $\zeta = 0$ ($\omega_d = \omega_n$), Eq. (36.8) riduce a:

$$u(t) = \frac{F_0}{m\omega_n}\int_0^t \sin[\omega_n(t-\tau)]\,\mathrm{d}\tau$$

Valutazione dell'integrale con la sostituzione $s = t - \tau$:

$$u(t) = \frac{F_0}{m\omega_n}\int_0^t \sin(\omega_n s)\,\mathrm{d}s = \frac{F_0}{m\omega_n}\left[-\frac{\cos(\omega_n s)}{\omega_n}\right]_0^t = \frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[1-\cos(\omega_n t)\right]$$

Da $m\omega_n^2 = k$, questo semplifica a:

$$u(t) = \frac{F_0}{k}\left[1-\cos(\omega_n t)\right] \tag{36.9}$$

(b) Massimo spostamento e fattore di amplificazione dinamica.

Lo spostamento statico sotto F_0 is $u_{\text{st}} = F_0/k$. Numericamente:

$$u_{\text{st}} = \frac{10\,000}{200\,000} = 0.050 \text{ m} = 50 \text{ mm}$$

Da Eq. (36.9), $u(t)$ è massimo quando $\cos(\omega_n t) = -1$- Si'. at $t = \pi/\omega_n = T_n/2$:

$$u_{\max} = \frac{F_0}{k}\times 2 = 2\,u_{\text{st}} = 2\times 50 = 100 \text{ mm}$$

$$t_{\max} = \frac{\pi}{\omega_n} = \frac{\pi}{20} = 0.157 \text{ s} = \frac{T_n}{2}$$

Il fattore di amplificazione dinamica è esattamente 2. Questo è il fondamentale risultato per un carico di passo su un sistema non smorzato: una forza improvvisamente applicata prodotti *Due volte.* lo spostamento statico, non importa quanto lentamente o rapidamente il carico viene applicato fino a quando è applicato istantaneamente.

e) Effetto di 5% smorzante.

Con l'umidificazione della risposta a forma chiusa ad un carico di passo è:

$$u(t) = \frac{F_0}{k}\left[1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right)\right]$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Valutazione $t = 0.157$ s (vicino al picco non smorzato):

$$u(0.157) \approx 50\left[1 - e^{-0.05\times20\times0.157}\left(\cos(19.975\times0.157) + 0.0501\sin(19.975\times0.157)\right)\right] \approx 92.7 \text{ mm}$$

La smorzatura riduce il picco del primo ciclo da 100 da mm a 93 - Un modesto 7% riduzione per $\zeta = 5\%$. Oltre i cicli successivi le oscillazioni decadimento e la risposta si calma al valore statico $u_{st} = 50$ mm.

36.6.2.2 Ex 36.6: Carico impulsivo rettangolare e spettro d'urto

Il sistema SDOF ($m = 500$ kg, $k = 200$ kN/m, $\omega_n = 20$ rad/s, $T_n = 0.314$ s) è sottoposto a impulso rettangolare:

$$F(t) = \begin{cases} F_0 = 10 \text{ kN} & 0 \le t \le t_d \\ 0 & t > t_d \end{cases}$$

Per un sistema non smorzato, determinare: (a) la risposta a forma chiusa durante e dopo il polso; (b) lo spostamento dinamico massimo per tre impulsi durata $t_d/T_n = 0.25,\ 0.50,\ 1.00$; (c) l'ingegneria interpretazione in termini di impulsivo vs. carico quasistatico.

Soluzione.

(a) Risposta a forma chiusa.

Durante il polso ($0 \le t \le t_d$): il risultato del passo-carico di Eq. (36.9) si applica direttamente:

$$u(t) = \frac{F_0}{k}[1 - \cos(\omega_n t)] \tag{36.10}$$

Dopo il polso ($t > t_d$): il sistema subisce gratuitamente vibrazione dallo stato in $t = t_d$. Il risultato, ottenuto da sovrapporsi a due risposte passo (una che inizia $t = 0$, uno di fronte segno a partire da $t = t_d$), is:

$$u(t) = \frac{F_0}{k}[\cos\omega_n(t - t_d) - \cos\omega_n t] \tag{36.11}$$

L'ampiezza della vibrazione libera post-polso è:

$$A = \frac{F_0}{k}\,2\left|\sin\frac{\omega_n t_d}{2}\right| = 2\,u_{st}\left|\sin\frac{\pi t_d}{T_n}\right|$$

(b) Scarico massimo per tre durata di impulso.

Il fattore di amplificazione dinamica $D = u_{max}/u_{st}$ dipende da solo sul rapporto t_d/T_n:

t_d/T_n	t_d (s)	$A/u_{st} = 2\lvert\sin(\pi t_d/T_n)\rvert$	$D = u_{max}/u_{st}$
0.25	0.0785	$2\lvert\sin(\pi/4)\rvert = \sqrt{2} = 1.414$	1.41
0.50	0.1571	$2\lvert\sin(\pi/2)\rvert = 2.000$	2.00
1.00	0.3142	$2\lvert\sin(\pi)\rvert = 0.000$	1.00

Per $t_d/T_n = 0.25$: $u_{max} = 1.414\times50 = 70.7$ mm.

Per $t_d/T_n = 0.50$: $u_{max} = 2.000\times50 = 100$ mm (eguaglia il risultato del carico di gradino — il polso è abbastanza lungo per raggiungere la prima cima non smorzata prima che finisca).

Per $t_d/T_n = 1.00$: $u_{max} = 1.000\times50 = 50$ mm (l'ampiezza post-pulsiva è zero — il sistema ritorna esattamente a il suo stato iniziale $t = T_n$ e non vi è alcuna vibrazione libera residua).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

e) interpretazione dell'ingegneria.
Il rapporto t_d/T_n governa il carattere della risposta:

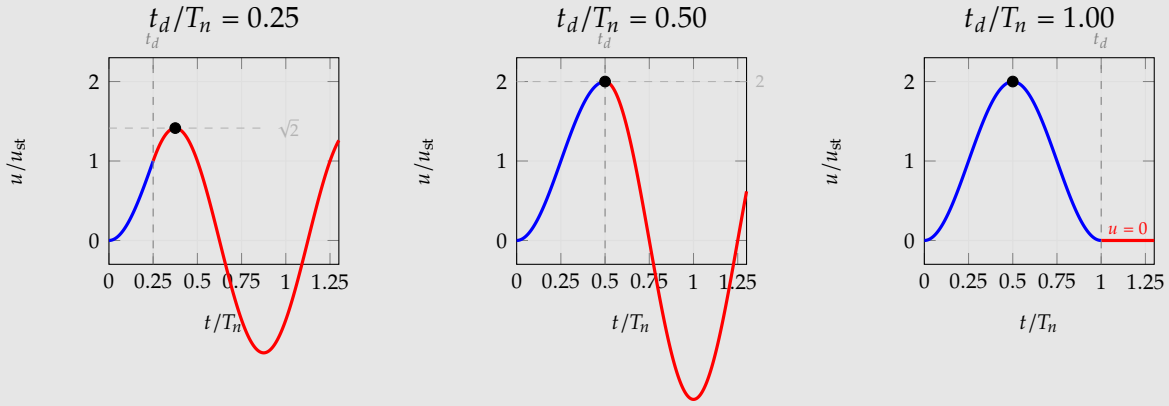
Regime impulsivo ($t_d/T_n \ll 1$): Il polso è così breve che la struttura si muove a malapena durante il carico; l'impulso $\hat{F} = F_0\, t_d$ determina la risposta. Il massimo displacement is $u_{\max} \approx \hat{F}/(m\omega_n) = F_0\, t_d/(m\omega_n)$, which grows linearly with t_d.

regime quasistatico ($t_d/T_n \gg 1$): Il polso dura molti periodi; la struttura risponde quasi staticamente e $D \to 1$ in media (oscillazione tra 0 e 2 mentre il carico è acceso, quindi liberamente).

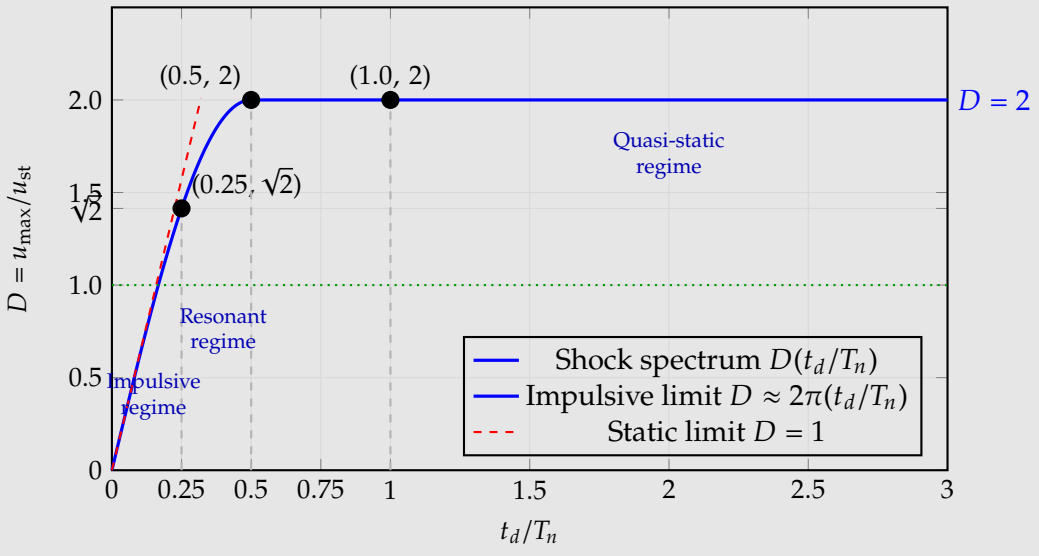
Regime di risonanza ($t_d/T_n \approx 0.5$): Il polso durata uguale metà del periodo naturale, producendo il massimo possibile amplificazione $D = 2$, identico al risultato del carico di step.

La trama completa di D vs. t_d/T_n — *shock spettro spettro spettro* or *spettro di risposta per carichi impulsivi* — è l'analogo temporale dell'armonica curva di amplificazione ed è utilizzato in alto, impatto e attrezzature design.

Risposta del polso rettangolare.



tempo di spostamento normalizzato storie u/u_{st} per tre lunghezze di impulso (blu = durante il polso, rosso = dopo l'impulso).



spettro

COPIA DI REVISIONE

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

di shock $D = u_{\max}/u_{\text{st}}$ come funzione di t_d/T_n. I tre cerchi riempiti corrispondono al casi calcolati nell'esempio. La linea rossa schiacciata è l'impulso Impossibile $D \approx 2\pi(t_d/T_n)$; la linea verde punteggiata è riferimento statico $D = 1$.

36.6.3 Analisi e risposta alla frequenza di Fourier

51 Un approccio alternativo utilizza l'analisi di Fourier per decomporre la forzatura in componenti armonici, determinare la risposta a ciascun componente utilizzando funzione di trasferimento armonico e sovrapponi. Per forzatura periodica con periodo T_p:

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

dove $\omega_0 = 2\pi/T_p$ la frequenza fondamentale. La risposta è:

$$u(t) = \frac{a_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left[a_n \cos(n\omega_0 t - \phi_n) + b_n \sin(n\omega_0 t - \phi_n)\right]/k$$

dove D_n e ϕ_n sono il fattore di amplificazione e la fase a frequenza $n\omega_0$.

52 Per la forzatura non periodica, la serie Fourier diventa il Fourier trasforma:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

Il *funzione di risposta della frequenza complessa* $H(\omega)$ riguarda input all'output nel dominio di frequenza:

$$H(\omega) = \frac{1/k}{(1-\beta^2) + i(2\zeta\beta)} \tag{36.12}$$

Lo spettro di risposta è $U(\omega) = H(\omega)F(\omega)$e la risposta time-domain è ottenuta da inversa trasformata Fourier.

36.6.3.1 Ex 36.7: Risposta di frequenza a una macchina periodica forza con due armoniche

Una fondazione di macchine (m = 500 kg, k = 200 kN/m, ζ = 5%, ω_n = 20 rad/s) è eccitato da una rotazione macchina che produce una forza periodica con frequenza fondamentale f_0 = 2 Hz ($\omega_0 = 4\pi$ rad/s, T_p = 0.5 s):

$$F(t) = F_1 \sin(\omega_0 t) + F_2 \sin(2\omega_0 t) = 2\,000 \sin(4\pi t) + 800 \sin(8\pi t) \quad \text{[N]}$$

Determinazione: a) i rapporti di frequenza per ogni armonico; (b) il ampiezza costante di ogni risposta modale utilizzando $H(\omega)$; (c) la risposta totale dello stato stabile.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Soluzione.

(a) Rapporto di frequenza.

$$\beta_1 = \frac{\omega_0}{\omega_n} = \frac{4\pi}{20} = \frac{12.566}{20} = 0.628 \qquad \beta_2 = \frac{2\omega_0}{\omega_n} = \frac{8\pi}{20} = \frac{25.133}{20} = 1.257$$

La prima armonica ($\beta_1 = 0.628$) is sotto la risonanza; la seconda armonico ($\beta_2 = 1.257$) è sopra la risonanza.

(b) Amplitudini dello Stato Steady.

L'ampiezza statica di spostamento per ogni armonico è $u_{\text{st},n} = F_n/k$. L'amplificazione dinamica e la fase seguono da Eq. (36.5) Eq. (36.4):

$$D(\beta,\zeta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}, \qquad \phi = \arctan\frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2}$$

Prima armonica ($F_1 = 2\,000$ N, $\beta_1 = 0.628$):

$$u_{\text{st},1} = \frac{2\,000}{200\,000} = 0.010 \text{ m} = 10 \text{ mm}$$

$$D_1 = \frac{1}{\sqrt{(1-0.628^2)^2 + (2\times 0.05\times 0.628)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(0.606)^2 + (0.0628)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.3672 + 0.00394}} = \frac{1}{0.608} = 1.644$$

$$\phi_1 = \arctan\frac{0.0628}{0.606} = \arctan(0.1036) = 5.9^\circ$$

$$u_1(t) = D_1\, u_{\text{st},1}\sin(\omega_0 t - \phi_1) = 1.644\times 10\times\sin(4\pi t - 5.9^\circ) = 16.4 \text{ mm}\times\sin(4\pi t - 5.9^\circ)$$

Seconda armonica ($F_2 = 800$ N, $\beta_2 = 1.257$):

$$u_{\text{st},2} = \frac{800}{200\,000} = 0.004 \text{ m} = 4 \text{ mm}$$

$$D_2 = \frac{1}{\sqrt{(1-1.257^2)^2 + (2\times 0.05\times 1.257)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(-0.580)^2 + (0.1257)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.3364 + 0.0158}} = \frac{1}{0.593} = 1.686$$

$$\phi_2 = \arctan\frac{0.1257}{1-1.580} = \arctan\frac{0.1257}{-0.580} = 180^\circ - 12.2^\circ = 167.8^\circ$$

(La fase supera) 90° perché $\beta_2 > 1$: i ritardi di risposta la forza di più di un quarto ciclo sopra risonanza.)

$$u_2(t) = 1.686\times 4\times\sin(8\pi t - 167.8^\circ) = 6.74 \text{ mm}\times\sin(8\pi t - 167.8^\circ)$$

(c) Risposta totale dello stato costante.

Per sovrapposizione:

$$u(t) = 16.4\sin(4\pi t - 5.9^\circ) + 6.74\sin(8\pi t - 167.8^\circ) \quad \text{[mm]}$$

Il picco di questo segnale combinato può essere limitato dalla somma di ampiezza: $u_{\max} \le 16.4 + 6.74 = 23.1$ mm. In pratica le vette delle due armoniche non coincidono e il massimo effettivo è un po' meno; valutazione numerica $u(t)$ di un periodo di tempo $u_{\max} \approx 18.5$ mm.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

- Commenta. Due osservazioni meritano l'enfasi.

1. Nonostante la seconda armonica avere solo 40% della forza primo-armonica ampiezza (800/2000 = 0.4), contribuisce 6.74/16.4 = 41% di ampiezza di spostamento perché il suo rapporto di frequenza $\beta_2 = 1.257$ è più vicino alla risonanza. Piccoli componenti di forza ad alta frequenza vicino la risonanza può dominare la risposta.
2. Il cambiamento di fase 167.8° per il secondo armonico significa che è quasi *avversario* la prima armonica vicino alle vette, ecco perché il vero massimo (18.5 mm) è molto meno della somma di ampiezza (23.1 mm). I metodi di frequenza-dominio rendono queste relazioni di fase esplicita e trattabile in modo che l'intuizione del tempo-dominio non lo faccia.

36.7 Supporto eccitazione e risposta del terremoto

53 In molte situazioni pratiche, soprattutto il movimento terra-morsale— l'eccitazione non è una forza applicata ma un moto prescritta del sostegno.

36.7.1 Equazione di movimento per l'eccitazione della base

54 Lasciamo perdere. $u_g(t)$ indicare lo spostamento del terreno (supporto) e $u_t(t)$ lo spostamento totale (assoluto) della massa. Lo spostamento relativo è:

$$u(t) = u_t(t) - u_g(t)$$

Le forze di molla e ammortizzatore dipendono da spostamenti e velocità relativi:

$$F_S = ku, \qquad F_D = c\dot{u}$$

La legge di Newton, tuttavia, comporta un'accelerazione assoluta:

$$m\ddot{u}_t = -F_S - F_D = -ku - c\dot{u}$$

Sostituire $\ddot{u}_t = \ddot{u} + \ddot{u}_g$:

$$m(\ddot{u} + \ddot{u}_g) + c\dot{u} + ku = 0$$

Rearrange:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t)$$

55 Questa è l'equazione fondamentale per l'analisi della risposta sismica. u è guidato da un *forza di terremoto efficace* $F_{\text{eff}} = -m\ddot{u}_g(t)$, che è il prodotto della massa e dell'accelerazione del terreno; la struttura risponde come se fissata alla sua base e sottoposta a questa forza efficace.

56 L'accelerazione assoluta della massa, necessaria per il calcolo delle forze inerziali e delle accelerazioni del pavimento, è:

$$\ddot{u}_t = \ddot{u} + \ddot{u}_g = -\frac{c}{m}\dot{u} - \frac{k}{m}u = -2\zeta\omega_n\dot{u} - \omega_n^2 u$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

36.7.2 Spettacolo di risposta

57 Lo spettro di risposta concept, sviluppato principalmente da Maurice Biot e George Housner negli anni '30 e '40, rivoluzionarono l'ingegneria del terremoto fornendo un mezzo pratico per caratterizzare il movimento terra e determinare la massima risposta strutturale senza eseguendo analisi di storia del tempo.

58 Uno spettro di risposta è un appezzamento della massima risposta di una serie di oscillatori SDOF, il tutto con lo stesso rapporto di smorzamento ma periodi naturali variabili, sottoposti ad uno specifico movimento terra. Per ogni oscillatore, l'equazione del movimento viene risolta e il valore assoluto massimo di una quantità di risposta (spostamento, velocità o accelerazione) è registrato.

59 Una forma tipica (smussata) dello spettro di risposta è abbozzata in Figura 36.3, che mostra lo spettro di risposta dell'accelerazione S_a come funzione di periodo naturale T_n, per vari smorzamento Le tre regioni — breve, intermedia e lungo periodo – corrispondono rispettivamente al comportamento controllato dall'accelerazione, controllato dalla velocità e controllato dallo spostamento.

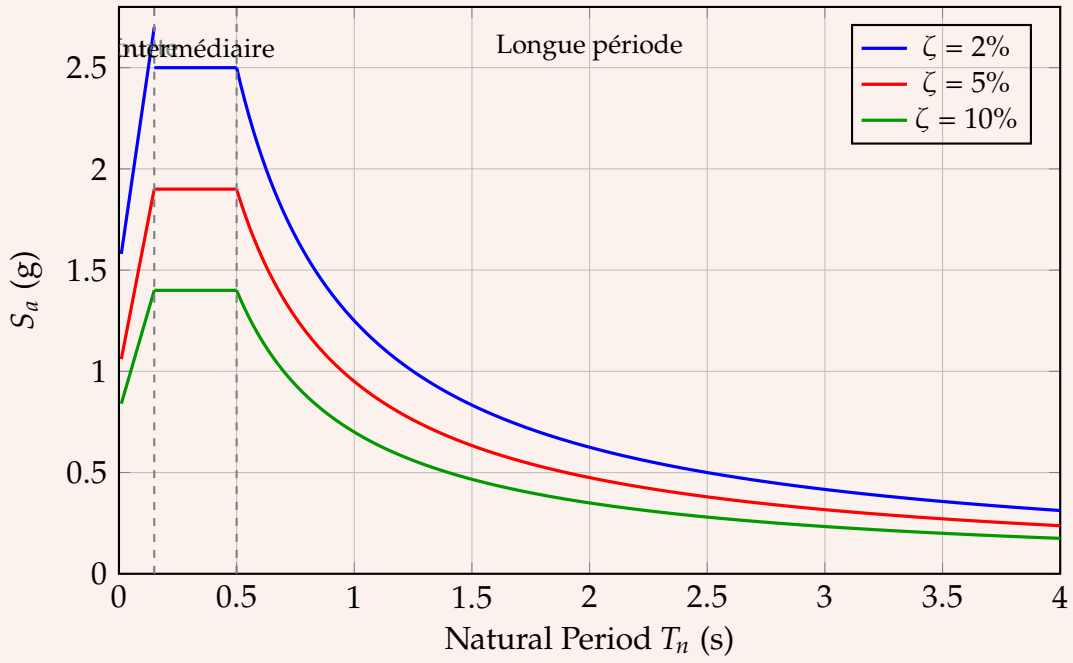


Figura 36.3: spettro di risposta accelerata S_a come funzione di periodo naturale T_n per vari rapporti di smorzamento.

60 Il *spostamento spettrale* S_d, *velocità spettrale* S_ve *accelerazione spettrale* S_a sono definiti come:

$$S_d(T_n, \zeta) = \max_t |u(t)| S_v(T_n, \zeta) \qquad = \max_t |\dot{u}(t)| S_a(T_n, \zeta) = \max_t |\ddot{u}_t(t)| \tag{36.13}$$

COPIA DI REVISIONE

dove $u(t)$ è la risposta relativa di spostamento al moto terra specificato.

61 Per i sistemi leggermente smorzati, le seguenti relazioni approssimative tengono:

$$S_v \approx \omega_n S_d, \qquad S_a \approx \omega_n S_v \approx \omega_n^2 S_d$$

Questi sono i *pseudo-spettrale* relazioni. L'accelerazione pseudo-spettrale S_a è particolarmente utile perché la massima cesoia di base è semplicemente:

$$V_{\max} = m S_a = \frac{W}{g} S_a \tag{36.14}$$

dove W è il peso e g è accelerazione gravitazionale.

36.7.2.1 Ex 36.8: Progettazione sismica di un telaio a singolo piano utilizzando uno spettro di risposta

Un telaio in cemento armato monostrato ha le seguenti proprietà:

- Peso totale sismico (tempi di massa g): $W = 4\,500$ kN
- La rigidità laterale della storia: $k = 180\,000$ kN/m
- Rapporto di smorzamento Viscoso: $\zeta = 5\%$

Lo spettro di risposta all'accelerazione del design (5% damping) è definito da

$$S_a(T_n) = \begin{cases} 0.40g\left(1 + \dfrac{T_n}{0.10}\right) & 0 \le T_n < 0.10 \text{ s} \\ 0.80g & 0.10 \text{ s} \le T_n \le 0.60 \text{ s} \\ \dfrac{0.48g}{T_n} & T_n > 0.60 \text{ s} \end{cases}$$

Determinazione: a) periodo fondamentale; b) accelerazione spettrale; c) la massima cesoia di base; d) lo spostamento laterale massimo.

Soluzione.

(a) Periodo naturale. La massa è $m = W/g = 4\,500/9.81 = 458.7$ t.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{180\,000}{458.7}} = 19.81 \text{ rad/s} \qquad T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{19.81} = 0.317 \text{ s}$$

(b) Accelerazione spettrale. Da $0.10 \text{ s} \le T_n = 0.317 \text{ s} \le 0.60$ s, il periodo cade nell'altopiano di accelerazione piana:

$$S_a = 0.80g = 0.80 \times 9.81 = 7.85 \text{ m/s}^2$$

(c) Portata massima base. Da Eq. (36.14):

$$V_{\max} = m\, S_a = 458.7 \times 7.85 = 3{,}601 \text{ kN} \quad \text{or equivalently} \quad V_{\max} = W\frac{S_a}{g} = 4{,}500 \times 0.80 = 3{,}600 \text{ kN}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

d) Massimo spostamento laterale. Utilizzo delle relazioni pseudo-spettrali $S_d \approx S_a/\omega_n^2$:

$$S_d = \frac{S_a}{\omega_n^2} = \frac{7.85}{(19.81)^2} = 0.020 \text{ m} = 20 \text{ mm}$$

Questo può essere verificato da $u_{\max} = V_{\max}/k = 3{,}600/180{,}000 = 0.020$ m✓.

- Commenta. Il calcolo è interamente algebrico una volta che il periodo naturale è noto. Lo spettro di risposta codifica l'effetto del movimento terra; l'ingegnere strutturale ha bisogno solo di leggere S_a at T_n e moltiplicarsi per la massa. La stima di spostamento laterale è utile per controllare i limiti della deriva della storia nei codici (tipicamente $u/h \leq 1/500$ to $1/200$ in base all'obiettivo di performance). Qui, per un'altezza della storia $h = 4$ m, il rapporto di deriva è $20/4000 = 1/200$, che si trova alla fine liberale dei limiti di codice tipici.

62 Gli spettri di risposta progettuale, come specificato nei codici edilizi, sono buste lisciate di spettro da terremoti registrati multipli, scalate per rappresentare un livello di rischio target. Questi spettri di codice costituiscono la base per l'equivalente procedura della forza laterale utilizzata nel disegno sismico di routine.

Riferimento in avanti. Le quantità deterministiche sviluppate qui forniscono la base dinamica per i quadri successivi basati sulle prestazioni; cfr. capitolo 72 per l'interpretazione probabilistica.

36.8 Sistemi multi-disciplinari

63 Le strutture reali hanno distribuito massa e rigidità, con conseguente infinite libertà.Per analisi, ci discostiamo in sistemi con un numero finito di DOFs. Le equazioni di movimento risultanti sono accoppiate equazione differenziale ordinarie che possono essere espresse in forma matrice.

36.8.1 Equazioni di movimento

64 Per un N- Sistema DOPF, le equazioni del movimento sono:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) \tag{36.15}$$

dove:

- $\mathbf{u}(t)$ è il $N \times 1$ vettore di spostamento
- $\mathbf{M}$ è il $N \times N$ matrice di massa (simmetrici, definite positive)
- $\mathbf{C}$ è il $N \times N$ matrice smorzante (simmetrici, positive semidefinite)
- $\mathbf{K}$ è il $N \times N$ matrice di rigidità (simmetrici, semidefinite positive)
- $\mathbf{F}(t)$ è il $N \times 1$ forza vettoriale

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

65 La matrice di massa $\mathbf{M}$ può essere *)* (diagonale, con masse concentrate a nodi) o *coerente* (Matrice completa derivata dalle stesse funzioni di forma utilizzate per la rigidità). $\mathbf{K}$ è la stessa dell'analisi statica, assemblata da matrici di rigidità degli elementi. $\mathbf{C}$ è la base fisica più problematica—la sua base è incerta, ed è spesso costruito matematicamente piuttosto che dai primi principi.

36.8.2 Vibrazione libera senza smorzamento: Modalità naturali

66 Impostazione $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, cerchiamo soluzioni della forma $\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\phi} e^{i\omega t}$:

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$$

Questo è il problema dell'autovalore generalizzato. Le soluzioni non banali richiedono:

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0$$

Questo rendimento N eigenvalori $\omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \cdots \leq \omega_N^2$ e corrispondenti autovettori $\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \ldots, \boldsymbol{\phi}_N$.

67 Gli autovalori danno le frequenze naturali: $\omega_n = \sqrt{\omega_n^2}$. Gli autovettori, chiamati *moda forme* or *modalità naturali*, descrivere il modello di deformazione ad ogni frequenza. Le forme della modalità hanno le proprietà ortogonali:

$$\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_j = 0, \qquad \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_j = 0 \quad \text{for } i \neq j$$

Queste condizioni di ortogonalità sono la chiave per decoupling delle equazioni del movimento.

68 Una semplice illustrazione dell'idea delle forme di modalità è mostrata in Figura 36.4 mostra $\phi_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ per $n = 1, 2, 3$. Modalità 1 non ha nodi interni; Modalità 2 ha un nodo a metà del tempo; Modalità 3 ha due nodi a $L/3$ e $2L/3$. Frequenze naturali soddisfano $\omega_n \propto n^2$.

36.8.3 Analisi dei metodi

69 Le forme di modalità costituiscono una base per lo spazio di spostamento; questo approccio è noto come *Analisi modale*. Qualsiasi spostamento può essere espresso come:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_n q_n(t) = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{q}(t)$$

dove $q_n(t)$ sono i *coordinate modali* (coordinate generalizzate) e $\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\phi}_1\ \boldsymbol{\phi}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\phi}_N]$ è la matrice modale.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

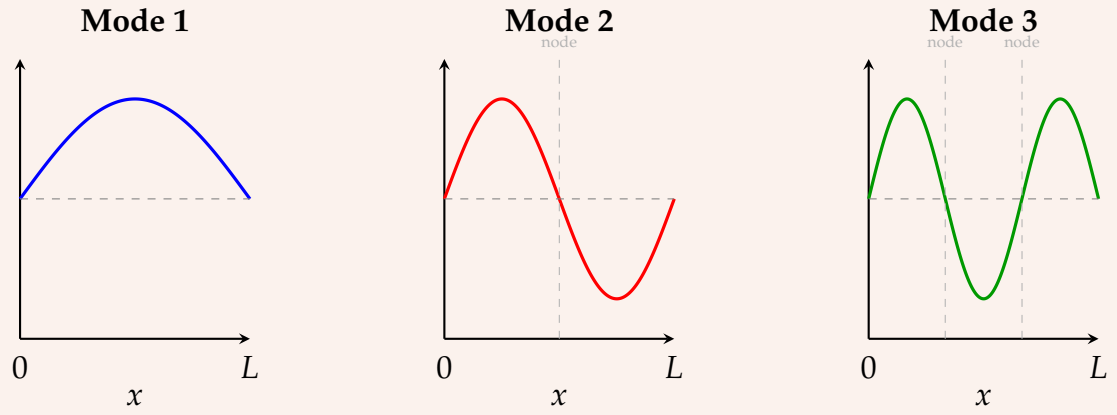


Figura 36.4: Le prime tre forme di modalità di un raggio semplicemente supportato

70 Sostituire l'equazione del movimento e premultiplicare mediante $\mathbf{\Phi}^T$:

$$\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Phi}^T\mathbf{C}\mathbf{\Phi}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Phi}^T\mathbf{K}\mathbf{\Phi}\mathbf{q} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{F}$$

Per ortogonalità, $\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi}$ e $\mathbf{\Phi}^T\mathbf{K}\mathbf{\Phi}$ sono diagonali. Se $\mathbf{C}$ ha la forma speciale (Rayleigh smorzamento):

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$$

poi $\mathbf{\Phi}^T\mathbf{C}\mathbf{\Phi}$ è anche diagonale, e le equazioni decouple in N equazioni SDOF indipendenti:

$$M_n\ddot{q}_n + C_n\dot{q}_n + K_n q_n = F_n(t), \quad n = 1, 2, \ldots, N$$

dove $M_n = \boldsymbol{\phi}_n^T\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_n$ è il *massa modale*, $K_n = \boldsymbol{\phi}_n^T\mathbf{K}\boldsymbol{\phi}_n$ è il *rigidità modale*e $F_n(t) = \boldsymbol{\phi}_n^T\mathbf{F}(t)$ è il *Forza modale*.

71 Ogni equazione modale è un'equazione SDOF che può essere risolta da qualsiasi metodo SDO F. La risposta fisica viene poi ricostruita dalla sovrapposizione:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_n q_n(t)$$

36.8.4 Partecipazione modulare alla risposta del terremoto

72 Per l'eccitazione del terremoto, $\mathbf{F}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{u}_g(t)$dove $\mathbf{r}$ è il vettore di influenza (tipicamente un vettore per moto orizzontale che interessa tutti i DOF allo stesso modo).

$$F_n(t) = -\boldsymbol{\phi}_n^T\mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{u}_g(t) = -L_n\ddot{u}_g(t)$$

dove $L_n = \boldsymbol{\phi}_n^T\mathbf{M}\mathbf{r}$ è il *fattore di partecipazione modale*.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

73 Il *efficace massa modale* is:

$$M_n^* = \frac{L_n^2}{M_n} = \frac{(\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M}\mathbf{r})^2}{\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n}$$

La somma delle masse modali efficaci è uguale alla massa totale:

$$\sum_{n=1}^{N} M_n^* = \mathbf{r}^T \mathbf{M}\mathbf{r}$$

Questa proprietà consente agli ingegneri di determinare quante modalità devono essere incluse per catturare una frazione specificata (spesso 90%) della risposta sismica totale.

36.8.4.1 Ex 36.9: Analisi modulare di un edificio a cesoia 3DOF sotto carico sismico

Un edificio a tre piani ha masse di pavimenti lumped e rigidità uniforme della storia:

$$m_1 = m_2 = m_3 = m = 100\ \text{t}, \qquad k_1 = k_2 = k_3 = k = 40\,000\ \text{kN/m}$$

La rigidità e le matrici di massa (solo DOF laterali, deformazione assiale trascurata) sono:

$$\mathbf{K} = k\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\ \text{kN/m}, \qquad \mathbf{M} = m\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\ \text{t}$$

Utilizzo dello spettro di risposta dell'esempio 36.7.2.1 (5% damping), determinare: (a) le frequenze naturali e forme di modalità; (b) i fattori di partecipazione modale; (c) le cesoie base modali di picco e la loro combinazione SRSS.

Soluzione.

(a) Frequenze naturali e forme di modalità.

Il problema dell'autovalore $(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$ con $\lambda = m\omega^2/k$ riduce a:

$$\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Espansione: $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda - 1 = 0$, con radici:

$$\lambda_1 = 0.198, \quad \lambda_2 = 1.555, \quad \lambda_3 = 3.247$$

Le frequenze circolari sono $\omega_n = \sqrt{\lambda_n k/m} = \sqrt{\lambda_n \times 400}$:

Modalità	λ_n	ω_n (rad/s)	T_n (s)
1	0.198	8.90	0.706
2	1.555	24.93	0.252
3	3.247	36.01	0.174

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Risolvere per le forme di modalità (mass-normalized in modo che $\phi_n^T \mathbf{M} \phi_n = m$) dà:

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 0.328 \\ 0.591 \\ 0.737 \end{Bmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 0.737 \\ 0.328 \\ -0.591 \end{Bmatrix}, \quad \phi_3 = \begin{Bmatrix} 0.591 \\ -0.737 \\ 0.328 \end{Bmatrix}$$

(le entrate normalizzate in modo che il componente più grande uguale circa 1 dopo la scalata $1/\sqrt{m}$; i valori sono indissolubili).

b) Fattori di partecipazione modulare.

Per movimento orizzontale del suolo il vettore di influenza è $\mathbf{r} = \{1, 1, 1\}^T$. Il fattore di partecipazione modale per la modalità n is:

$$\Gamma_n = \frac{\phi_n^T \mathbf{M}\, \mathbf{r}}{\phi_n^T \mathbf{M}\, \phi_n}$$

$$\Gamma_1 = \frac{m(0.328 + 0.591 + 0.737)}{m(0.328^2 + 0.591^2 + 0.737^2)} = \frac{1.656}{0.974} = 1.700$$

$$\Gamma_2 = \frac{m(0.737 + 0.328 - 0.591)}{m(0.737^2 + 0.328^2 + 0.591^2)} = \frac{0.474}{0.974} = 0.487$$

$$\Gamma_3 = \frac{m(0.591 - 0.737 + 0.328)}{m(0.591^2 + 0.737^2 + 0.328^2)} = \frac{0.182}{0.974} = 0.187$$

Le masse modali efficaci $M_n^* = \Gamma_n^2 M_n = \Gamma_n^2 m \times$ (normalization factor) espresso come frazioni di massa totale $3m$ sono circa 87%, 11%e 2% per le modalità 1, 2 e 3 rispettivamente. La modalità 1 cattura da sola 87% della massa sismica; compresa la modalità 2 porta il totale a 98%, ben al di sopra del 90% soglia tipicamente richiesta da codici.

(c) Cesoie base modale Peak e combinazione SRSS.

Per ogni modalità, l'accelerazione spettrale viene letta dallo spettro di progettazione T_n:

Modalità	T_n (s)	S_a	Portale base modale Peak V_n^*	Γ_n
1	0.706	$0.48g/0.706 = 0.680g$	$\Gamma_1\, \phi_1^T \mathbf{M}\mathbf{r}\, S_{a,1}$	1.700
2	0.252	$0.80g$ (plateau)	—	0.487
3	0.174	$0.80g$ (plateau)	—	0.187

La punta di base in modalità n is $V_n = M_n^*\, S_{a,n}$. $M_n^* \approx \{261, 33, 5\}$ t e $S_{a,n} = \{0.680g,\, 0.80g,\, 0.80g\}$:

$$V_1 = 261 \times 0.680 \times 9.81 = 1\,741 \text{ kN}, \quad V_2 = 33 \times 0.80 \times 9.81 = 259 \text{ kN}, \quad V_3 = 5 \times 0.80 \times 9.81 = 39 \text{ kN}$$

Poiché le vette modali non si verificano simultaneamente, sono combinate utilizzando il *radice quadrata della somma di quadrati* (SRSS) regola:

$$V_{\text{SRSS}} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2} = \sqrt{1741^2 + 259^2 + 39^2} = \sqrt{3{,}031{,}081 + 67{,}081 + 1{,}521} \approx 1{,}761 \text{ kN}$$

- Commenta. Molte osservazioni valgono la pena di notare.

1. Modalità 1 domina completamente: $V_1/V_{\text{SRSS}} \approx 99\%$Questo è tipico degli edifici a bassa velocità regolari in cui la modalità fondamentale cattura la maggior parte dell'energia sismica.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

2. La combinazione SRSS dà un risultato solo marginalmente più grande di V_1 da solo, confermando che le modalità più elevate sono trascurabili qui.
3. Le forze del pavimento possono essere recuperate da $\mathbf{f}_n = \Gamma_n \, \mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_n \, S_{a,n}$ per ogni modalità, poi combinata da SRSS — una procedura direttamente incorporata in moderno codice equivalente metodi di forza laterale.
4. Per strutture irregolari, edifici più alti o siti con effetti di quasi-fault, le modalità superiori diventano più importanti e la regola completa combinazione quadratica (CQC), che rappresenta la correlazione modale, dovrebbe sostituire SRSS.

36.9 Sistemi continui

74 Strutture con massa e rigidità distribuita—fasci, piastre, gusci— sono regolate da equazioni differenziali parziali. Sebbene i metodi numerici discretizzano in ultima analisi questi sistemi, la comprensione delle soluzioni analitiche fornisce informazioni sulle forme di modo e le frequenze naturali.

36.9.1 Vibrazione assiale di bar

75 Considerare un bar uniforme di lunghezza L, area trasversale A, modulo E, e la densità ρ. Lo spostamento assiale $u(x,t)$ soddisfa:

$$EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

o, definendo la velocità d'onda $c = \sqrt{E/\rho}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{36.16}$$

Questa è l'equazione d'onda unidimensionale.

76 Per la vibrazione libera, cerchiamo soluzioni della forma $u(x,t) = \phi(x)\sin(\omega t)$. Sostituzione dà:

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\phi = 0$$

con soluzione $\phi(x) = A\cos(\omega x/c) + B\sin(\omega x/c)$. Le condizioni di cottura determinano le frequenze e le forme delle modalità consentite. Per una barra fissata a entrambe le estremità:

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

36.9.2 Vibrazione trasversale delle fasci

77 L'equazione del fascio Euler-Bernoulli per le vibrazioni trasversali è:

$$EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q(x,t)$$

dove $v(x,t)$ è lo spostamento trasversale, EI è la rigidità flessorale, e $q(x,t)$ è il carico distribuito.

78 Per la vibrazione libera ($q = 0$), ricerca $v(x,t) = \phi(x)\sin(\omega t)$:

$$\frac{\mathrm{d}^4\phi}{\mathrm{d}x^4} - \beta^4\phi = 0, \qquad \beta^4 = \frac{\rho A\omega^2}{EI}$$

La soluzione generale è:

$$\phi(x) = C_1\cosh(\beta x) + C_2\sinh(\beta x) + C_3\cos(\beta x) + C_4\sin(\beta x)$$

Le condizioni di boundary a entrambe le estremità forniscono quattro equazioni per le quattro costanti, dando un problema di autovalore per β.

79 Per un raggio di lunghezza semplicemente supportato L:

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \qquad \phi_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}$$

Le frequenze naturali aumentano come n^2, rapidamente separando i modi più alti da quelli inferiori. La frequenza fondamentale ($n = 1$) is:

$$f_1 = \frac{\pi}{2L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

80 Per altre condizioni di confine (fissate, cantilever, ecc.), l'equazione della frequenza trascendente deve essere risolta numericamente; le tabelle dei coefficienti di frequenza sono disponibili in riferimenti standard.

36.9.2.1 Ex 36.10: Frequenza naturale di un ponte pedonale in acciaio e controllo della risonanza pedonale

Un ponte pedonale in acciaio semplicemente supportato ha le seguenti proprietà:

- Span: $L = 20$ m

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

- Sezione I: $I = 6.0 \times 10^{-4}$ m^4, $A = 1.0 \times 10^{-2}$ m^2
- Modulo di elasticità: $E = 210$ GPa
- Densità d'acciaio: $\rho = 7\,850$ kg/m^3
- Caricamento in corso (deck, ringhiere, surfacing): $m' = 600$ kg/m

Determinazione: a) la frequenza naturale fondamentale; (b) se la Commissione non ha la risonanza indotta dal pedone è una preoccupazione; e) l'effetto del raddoppio la durata della $L = 40$ m.

Soluzione.

(a) Frequenza naturale fondamentale.

La massa totale per unità di lunghezza combina la sezione in acciaio e il carico morto:

$$\bar{m} = \rho A + m' = 7\,850 \times 1.0 \times 10^{-2} + 600 = 78.5 + 600 = 678.5 \text{ kg/m}$$

The flexural rigidity is $EI = 210 \times 10^9 \times 6.0 \times 10^{-4} = 1.26 \times 10^8$ N·m^2. Applicare la formula del fascio semplicemente supportata con $n = 1$:

$$f_1 = \frac{\pi}{2L^2}\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}} = \frac{\pi}{2 \times 20^2}\sqrt{\frac{1.26 \times 10^8}{678.5}} = \frac{\pi}{800}\sqrt{185\,700} = \frac{\pi}{800} \times 430.9 = 1.69 \text{ Hz}$$

Il corrispondente periodo naturale è $T_1 = 1/f_1 = 0.59$ s.

(b) Controllo di risonanza pedonale.

La locomozione umana produce forze quasi periodiche. sono:

Attività	Frequenza dominante (Hz)
Slow walking	1.4–1.7
Camminare normale	1.7–2.3
Brisk walking / jogging	2.3–3.5
Corpo laterale	0.7–1.2

Con $f_1 = 1.69$ Hz, il ponte cade all'estremità superiore del band lento e la parte inferiore della banda normale. La risonanza con la caduta pedonale è una vera e propria preoccupazione di servibilità. È obbligatorio un controllo di accelerazione di picco: EN 1990 (European Committee for Standardization (CEN), 2010) limiti verticali accelerazione a 0.7 m/s^2 per passerelle all'aperto. Il Millennium Bridge di Londra (2000) è stato chiuso due giorni dopo l'apertura perché la sua frequenza laterale di 0.97 Hz coincide con sway pedonale, dimostrando che anche piccole forze dinamiche possono produrre risposta inaccettabile alla risonanza.

(c) Effetto del raddoppiamento dell'arco.

Da $f_1 \propto 1/L^2$ (a sezione costante e carico morto):

$$f_1(40 \text{ m}) = f_1(20 \text{ m}) \times \left(\frac{20}{40}\right)^2 = 1.69 \times 0.25 = 0.42 \text{ Hz}$$

I 40 ponte m scende bene sotto tutte le frequenze di marcia, così verticale la risonanza con il traffico dei piedi non è più una preoccupazione. frequenza laterale dello sway può ora cadere vicino 0.42 Hz, che è all'interno gamma di carico laterale della folla. Il $1/L^2$ la scalatura è uno dei più risultati importanti nelle dinamiche strutturali: raddoppiare i quarti di campata frequenza, e anche modesti aumenti di durata può spostare una struttura da sicuro per la risonanza-prone, o viceversa.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

36.10 Dinamica non lineare

81 Le sezioni precedenti hanno assunto un comportamento lineare: forze proporzionali allo spostamento e alla velocità. Strutture reali, soprattutto sotto forte agitazione del terremoto o carico estremo, mostrano risposta non lineare. La nonlinearità deriva dalla resa dei materiali, dagli effetti geometrici (grandi spostamenti), dal comportamento di contatto/gap e dall'attrito.

36.10.1 Fonti di non linearità

82 **Materiale non linearità** Quando la relazione tra stress e resistenza non è lineare, per l'acciaio il comportamento elastico iniziale dà modo di cedere quando lo sforzo supera la forza di resa. Il rapporto costitutivo deve essere modellato in modo appropriato (elastoplastica, danno, ecc.).

83 **Non linearità geometrica** Quando si verificano spostamenti abbastanza grandi che le equazioni di equilibrio devono essere scritte sulla configurazione deformata. P-Δ l'effetto in colonne—momento amplificazione a causa di forza assiale che agisce attraverso lo spostamento laterale — è un esempio comune.

84 **Contatto non linearità** si verifica in interfacce dove i componenti possono separare o entrare in contatto. I cuscinetti di isolamento base, le articolazioni di espansione e le sezioni crepeti mostrano tutto questo comportamento.

36.10.2 Isteresi e dissipazione energetica

85 Sotto carico ciclico, i materiali non lineari tracciano un percorso di spostamento del carico che differisce tra carico e scarico. Questo smorzamento isteretico è la fonte primaria di dissipazione dell'energia nelle strutture di resa durante i terremoti.

86 Un loop isteresi schematico e l'energia dissipata associata sono illustrati in Figura 36.5 dove frecce blu: carico e reload ramo; frecce rosse: scarico rami. L'area ombreggiata uguale l'energia dissipata per ciclo $W_D = \oint F \, \mathrm{d}u$. rigidità iniziale k_0 governa la pendenza elastica; la rigidità post-yield è ridotta. Forza di snervamento $\pm F_y$ e lo spostamento di picco $\pm u_{\max}$ sono indicati.

87 I modelli isterici comuni includono:

- **Elastoplastica**: Elastico fino alla resa, quindi costante forza con crescente spostamento. Lo scarico è parallelo al primo inclinamento elastico.
- **Bilinear**: Elastico fino alla resa, quindi ridotto (positivo o negativo) rigidità post-yield.
- **Degradazione della rigidità**: Lo scarico della rigidità diminuisce con danni accumulati. Modelli di comportamento concreto e murario.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

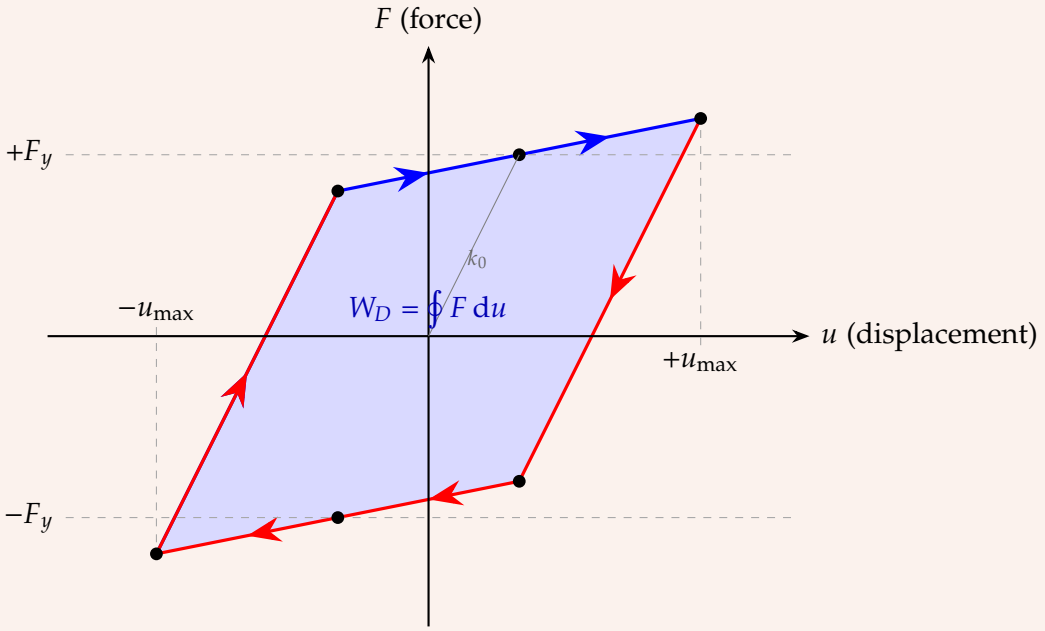


Figura 36.5: Ciclo elastoplastico bilineare isteresi sotto carico simmetrico ciclico.

- **Bouc-Wen**: Modello liscio, differenziabile in grado di rappresentare una gamma di comportamenti isterici.

36.10.2.1 Ex 36.11: Smorzamento viscoso equivalente da un ciclo isteretico bilineare

Un telaio in acciaio strutturale a bracci presenta un elastoplastic bilineare loop isteresi (come in Figura 36.5) con la i seguenti parametri misurati da un test ciclico:

- Irrigidimento iniziale (elastico): $k_0 = 50$ kN/mm
- Forza di risanamento: $F_y = 400$ kN
- Massimo spostamento nel ciclo di prova: $u_{\max} = 20$ mm
- Rapporto di rigidità post-yield: $\alpha = k_1/k_0 = 0.05$ (5% indurimento cinematico)

Determinazione: a) lo spostamento dei rendimenti e la duttilità di spostamento; (b) l'energia dissipata per ciclo; (c) l'energia di deformazione al massimo dislocamento; d) il rapporto equivalente viscoso di smorzamento da parte del Jacobsen formula; (e) l'interpretazione ingegneristica.

Soluzione.

(a) Sostituzioni e duttilità dei reflui.

$$u_y = \frac{F_y}{k_0} = \frac{400}{50} = 8 \text{ mm} \qquad \mu = \frac{u_{\max}}{u_y} = \frac{20}{8} = 2.5$$

b) Energia dissipata per ciclo.

COPIA DI REVISIONE

Per un loop bilineare simmetrico l'energia dissipata per ciclo completo è l'area del parallelogramma chiuso. Per un anello elastoplastico (segreteria di limitazione) $\alpha \to 0$) il risultato esatto è:

$$W_D = 4\,F_y\,(u_{\max} - u_y)$$

Per un loop bilineare con indurimento cinetico ($\alpha > 0$) escursioni post-sinistra aggiungere zona, ma per un ciclo simmetrico con uguale ampiezza positiva e negativa i contributi indurenti annullano e la stessa formula si applica.

$$W_D = 4 \times 400 \times (20 - 8) = 4 \times 400 \times 12 = 19\,200 \text{ kN·mm} = 19.2 \text{ kN·m}$$

e) Energia disinfettante al massimo spostamento.

L'energia elastica di deformazione immagazzinata $u_{\max}$ (computato utilizzando il la rigidità iniziale come riferimento) è:

$$W_s = \frac{1}{2}\,k_0\,u_{\max}^2 = \frac{1}{2} \times 50 \times 20^2 = 10\,000 \text{ kN·mm} = 10.0 \text{ kN·m}$$

d) Rapporto di smorzamento viscoso equivalente (progetto Jacobsen).

La formula Jacobsen (1960) equa l'energia dissipata per ciclo di un oscillatore viscoso lineare equivalente a quello del nonlineare sistema alla stessa ampiezza:

$$\zeta_{\text{eq}} = \frac{W_D}{4\pi\,W_s} = \frac{19.2}{4\pi \times 10.0} = \frac{19.2}{125.7} = 0.153 \quad (15.3\%)$$

(e) interpretazione ingegneristica.

Il solo ciclo di isteresi contribuisce a 15.3% equivalente viscoso smorzamento a duttilità $\mu = 2.5$. Combinato con l'umidità strutturale intrinseca ($\zeta_s \approx 2$–5% per l'acciaio), il totale efficace smorzamento supera 17%, ecco perché le strutture che producono sopravvivono ai terremoti più grande della loro capacità elastica implicava. vale la pena notare.

1. *La duttilità fa smorzare.* Riscrivete la formula:

$$\zeta_{\text{eq}} = \frac{4F_y(u_{\max} - u_y)}{4\pi \cdot \frac{1}{2}k_0 u_{\max}^2} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - 1/\mu}{\mu} \times \frac{F_y/u_y}{F_y/u_y} = \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\frac{1}{\mu} \cdot \mu$$

   Più semplicemente: ζ_{eq} aumenta con la domanda di duttilità fino a un altopiano, spiegando perché i sistemi ad alta duttilità sono così efficiente nell'assorbimento dell'energia sismica.
2. *Connessione al codice R-fattori.* La base fisica del fattore di riduzione della forza $R = \mu$ è proprio questo smorzamento isteretico: una cornice che sostiene $\mu = 4$ dissipazioni tanta energia che può resistere ai movimenti di terra quattro volte più grande della sua forza di resa sarebbe altrimenti consentire.
3. *Limitazioni.* La formula Jacobsen è un'approssimazione. Presuppone la risposta a stato costante ed è più preciso per moderata duttilità ($\mu \le 4$). Per sistemi altamente non lineari o degradanti, analisi diretta non lineare della storia del tempo è più affidabile.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

36.10.3 Dutility e Progettazione delle Capacità

88 Il *dislocamento duttilità* μ è definito come il rapporto di spostamento massimo per lo spostamento dei rendimenti:

$$\mu = \frac{u_{\max}}{u_y}$$

Le strutture progettate per produrre e deformare inelastica possono sopravvivere ai terremoti molto più forti di quanto suggerisse la loro capacità elastica. *progettazione della capacità*: accettare la resa in regioni accuratamente dettagliate, proteggendo gli elementi fragili.

89 Il rapporto tra riduzione della forza e domanda di duttilità è catturato dalla R-μ-T per strutture con periodi nella gamma di velocità-sensibili:

$$R \approx \mu$$

Questa regola di "equal spostamento" afferma che lo spostamento massimo della struttura cedente equivale a quello di una struttura elastica con lo stesso periodo—ilding riduce la domanda di forza senza aumentare lo spostamento.

36.10.3.1 Ex 36.12: Domanda di duttilità e riduzione della forza per una telaio in cemento armato

Un telaio di momento in cemento armato monostrato è da progettare per una zona sismica il cui spettro di progettazione segue la forma tripartita Esempio 36.7.2.1 ($S_a = 0.80g$ per $T \le 0.60$ s). Le proprietà della cornice sono:

- Massa sismica: $m = 300$ t
- Periodo fondamentale: $T_n = 0.40$ s (in altopiano)
- Altezza della storia: $h = 3.5$ m
- Duttilità di spostamento disponibile: $\mu = 4$ (RC duttile ben dettagliato per codici moderni)

Utilizzando la regola di eguaglianza, determinare: (a) la base elastica domanda; b) la cesoia di base di design ridotta; (c) la resa e il massimo dislocazioni; d) il rapporto storia deriva e controllo delle prestazioni.

Soluzione.

(a) Guarnizione elastica di base (senza riduzione della duttilità).

$$V_{\text{el}} = m\, S_a = 300 \times 0.80 \times 9.81 = 2\,354 \text{ kN}$$

(b) Guarnizione base di progettazione ridotta.

Per periodi nella gamma sensibile alla velocità la regola di eguaglianza dà $R \approx \mu$, così il fattore di riduzione della forza $R = 4$:

$$V_y = \frac{V_{\text{el}}}{R} = \frac{2\,354}{4} = 589 \text{ kN}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Il telaio deve essere progettato per produrre a questo livello di forza. per V_y invece di V_{el} riduce la struttura richiesta forza — e quindi costa — da un fattore di quattro.

(c) Spostamento dei redditi e spostamento massimo.
La rigidità laterale segue da periodo e massa:

$$k = \omega_n^2\, m = \left(\frac{2\pi}{T_n}\right)^2 m = \left(\frac{2\pi}{0.40}\right)^2 \times 300 = 246.7 \times 300 = 74\,022 \text{ kN/m}$$

Slocamento di rendimento:

$$u_y = \frac{V_y}{k} = \frac{589}{74\,022} = 7.95 \text{ mm}$$

Per la regola dello spostamento uguale, il massimo spostamento inelastico uguale allo spostamento spettrale elastico:

$$u_{\max} = S_d = \frac{S_a}{\omega_n^2} = \frac{0.80 \times 9.81}{246.7} = 31.8 \text{ mm}$$

Verifica: $\mu = u_{\max}/u_y = 31.8/7.95 = 4.0$. ✓
Slocamento di plastica richiesto oltre la resa:

$$u_p = u_{\max} - u_y = 31.8 - 8.0 = 23.8 \text{ mm}$$

(d) rapporto di derivazione e controllo delle prestazioni.

$$\frac{u_{\max}}{h} = \frac{31.8}{3\,500} = 0.91\%$$

La maggior parte dei codici permette un rapporto massimo di storia deriva 2% per la sicurezza della vita e 0,5% per l'immediata occupazione.% deriva dalla è accettabile per l'obiettivo di prestazioni di sicurezza della vita, ma non soddisfarebbe requisito immediato di occupazione. I numeri incapsulano i fondamentali scambio di informazioni in ingegneria sismica: accettando 24 mm di plastica la deformazione della forza di progettazione è ridotta da un fattore di quattro. la struttura sosterrà danni riparabili nel terremoto di progettazione ma non collasserà — che è proprio l'intento dei codici moderni. Se la stessa cornice è stata progettata elasticamente ($\mu = 1$, $R = 1$), richiederebbe quattro volte la forza, ma non avrebbe sofferto strutturale danni.

36.11 Considerazioni pratiche

36.11.1 Smorzamento nelle strutture reali

90 I rapporti di smorzamento misurati per le strutture dipendono dal materiale, dall'ampiezza delle vibrazioni e dalla tipologia di costruzione.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tipo di struttura	Rapporto di campionamento ζ
Acciaio, saldato, pre-yield	0.01–0.02
Acciaio, bullone, pre-yield	0.02–0.03
cemento armato, non graffiato	0.01–0.02
cemento armato, cracked	0.03–0.05
Prestressed cemento	0.01–0.02
Masonry, non graffiato	0.02–0.03
Strutture in legno	0.05–0.10

Questi sono valori di ordinazione della grandezza; l'umidità effettiva dipende dai dettagli e deve essere misurata quando possibile.

36.11.2 Interazione della struttura

91 La risposta dinamica di una struttura dipende non solo dalla struttura stessa ma anche dal suolo di sostegno. *Interazione delle strutture del suolo* (SSI) può influenzare in modo significativo sia il movimento di ingresso che le frequenze del sistema. I suoli flessibili aumentano il periodo effettivo del sistema e introducono ulteriori smorzamenti attraverso la radiazione dell'energia nel terreno. Per strutture rigide su suolo morbido, gli effetti SSI possono essere sostanziali; per le strutture flessibili sulla roccia sono trascurabili.

36.11.3 Ammortizzatori di massa sintonizzati

92 Un ammortizzatore di massa sintonizzato (TMD) è un sistema secondario di smorzamento a massa, attaccato alla struttura primaria e sintonizzato ad una frequenza specifica. Quando la struttura primaria vibra alla sua frequenza naturale, il TMD oscilla in opposizione, riducendo la risposta primaria. I TMD sono utilizzati in edifici alti (ad esempio Taipei 101) e ponti a lunga durata per ridurre le vibrazioni causate dal vento e sismiche.

93 L'ottimizzazione di un TMD per una struttura primaria non smorzata è:

$$\frac{\omega_d}{\omega_n} = \frac{1}{1+\mu_m}, \qquad \zeta_d = \sqrt{\frac{3\mu_m}{8(1+\mu_m)^3}}$$

dove $\mu_m = m_d/m$ è il rapporto di massa (tipicamente 0,01 a 0.05), ω_d è la frequenza TMD, e ζ_d è il rapporto di smorzamento TMD.

36.11.4 Ex 36.13: Progettazione di un ammortizzatore di massa sintonizzato per un edificio alto

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Una sottile torre in acciaio ha le seguenti proprietà dinamiche nella sua modalità fondamentale:

- Massa totale: $M = 800$ t
- Frequenza naturale: $\omega_n = 2.094$ rad/s ($T_n = 3.0$ s, $f_n = 0.333$ Hz)
- Sfornamento strutturale: $\zeta = 1\%$ (acciaio leggermente smorzato)

Un TMD deve essere installato in cima alla torre con un rapporto di massa $\mu_m = m_d/M = 0.02$ (2%). Determinazione: a) la massa TMD; b) l'ottimale Frequenza e rigidità di molla TMD; (c) il rapporto ottimale di smorzamento TMD e coefficiente di ammortizzatore; (d) la riduzione dell'ampiezza risonante dello stato costante.

Soluzione.

(a) massa TMD.

$$m_d = \mu_m \, M = 0.02 \times 800 = 16 \text{ t}$$

(b) Frequenza ottimale TMD e rigidità di molla.

Dalla formula di sintonia ottimale Den Hartog:

$$\frac{\omega_d}{\omega_n} = \frac{1}{1+\mu_m} = \frac{1}{1.02} = 0.9804$$

$$\omega_d = 0.9804 \times 2.094 = 2.053 \text{ rad/s} \qquad f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = 0.327 \text{ Hz}$$

La rigidità della molla TMD è:

$$k_d = m_d \, \omega_d^2 = 16 \times (2.053)^2 = 67.5 \text{ kN/m}$$

(c) Rapporto di smorzamento ottimale TMD e coefficiente di ammortizzatore.

$$\zeta_d = \sqrt{\frac{3\mu_m}{8(1+\mu_m)^3}} = \sqrt{\frac{3 \times 0.02}{8 \times (1.02)^3}} = \sqrt{\frac{0.060}{8.489}} = \sqrt{0.00707} = 0.0841 \quad (8.4\%)$$

Il coefficiente di ammortizzatore viscoso:

$$c_d = 2 \, \zeta_d \, m_d \, \omega_d = 2 \times 0.0841 \times 16 \times 2.053 = 5.53 \text{ kN·s/m}$$

d) Riduzione dell'ampiezza di risonanza.

Per una struttura primaria non smorzata ($\zeta = 0$), il TMD riduce la fattore di amplificazione dinamica risonante dal valore incompiuto al circa:

$$D_{\text{TMD}} \approx \sqrt{\frac{2+\mu_m}{\mu_m}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2.02}{0.02}} = \frac{1}{2}\sqrt{101} = 5.02$$

rispetto a $D = 1/(2\zeta_{\text{struct}})$ senza la TMD. Per l'effettiva smorzamento strutturale $\zeta = 1\%$il amplificazione risonanza è $D_0 = 1/(2 \times 0.01) = 50$. La TMD riduce quindi la risposta di picco da un fattore approssimativamente 50/5 = 10, o per circa 90%.

- Commenta. Il rapporto di massa $\mu_m = 2\%$ è rappresentativo delle installazioni reali: Taipei 101 utilizza un 660 t pendolo TMD contro una massa di edificio di circa 30,000 t ($\mu_m \approx 2.2\%$). Il rapporto di smorzamento ottimale di 8.4% è notevolmente più alto rispetto alla struttura smorzamento, per questo è necessario un ammortizzatore viscoso dedicato all'interno del TMD. Tre punti pratici meritano l'accento:

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

1. Le formule Den Hartog assumono una struttura primaria non smorzata; piccola smorzamento strutturale ($\zeta \leq 2\%$) ha un effetto trascurabile parametri ottimali.
2. Detuning — un cambiamento nel ω_n a causa di cambiamenti di rigidità, aggiunto massa, o temperatura — degrada l'efficacia TMD in modo significativo. I meccanismi regolabili di molla o ammortizzatore sono talvolta inclusi per ri-tuning in servizio.
3. I TMD sono efficaci solo vicino alla frequenza sintonizzata. risposta in altre modalità, motivo per cui più TMD o banda larga i dispositivi vengono utilizzati quando diverse modalità contribuiscono alla risposta.

36.11.5 Isolamento di base

94 Isolamento di base introduce uno strato flessibile (portanti elastomerici o sistemi scorrevoli) tra la struttura e la fondazione. La struttura isolata ha un periodo molto più lungo, allontanandolo dal contenuto ad alta energia dei tipici movimenti di terra del terremoto. Lo strato di isolamento fornisce anche un ulteriore smorzamento. L'isolamento della base è particolarmente efficace per le strutture rigide e a corto raggio ed è ampiamente utilizzato per gli ospedali, i servizi di emergenza e gli edifici storici.

36.11.6 Ex 36.14: Progettazione di un edificio ospedaliero isolato alla base

Un edificio ospedaliero a due piani deve essere retrofitto con un piombo-gomma sistema di isolamento del cuscinetto (LRB). La struttura della base fissa ha il seguente proprietà:

- Peso sismico: $W = 12\,000$ kN (Maschio) $M = W/g = 1\,223$ t)
- Periodo fondamentale fisso: $T_{\text{fb}} = 0.30$ s
- Fisso-base rigidità laterale: $K_{\text{fb}} = 537\,000$ kN/m
- Sfornamento strutturale: $\zeta_s = 5\%$

Lo spettro di accelerazione del design (5% smorzamento) segue la forma tripartita di Esempio 36.7.2.1:

$$S_a(T) = \begin{cases} 0.80g & T \leq 0.60 \text{ s} \\ \dfrac{0.48g}{T} & T > 0.60 \text{ s} \end{cases}$$

Il sistema di isolamento è progettato per raggiungere un periodo isolato target $T_{\text{iso}} = 2.50$ s con un'efficace smorzamento $\zeta_{\text{iso}} = 15\%$. Determinazione: a) la rigidità dell'isolamento richiesta; b) il disegno spostamento degli isolatori; (c) la base con e senza d) il fattore di riduzione dell'accelerazione.

Soluzione.

(a) Requisito rigidità dell'isolamento.

Il periodo isolato è regolato dalla rigidità dello strato di isolamento K_{iso} da solo (la sovrastruttura si assume rigida rispetto agli isolatori):

$$T_{\text{iso}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K_{\text{iso}}}} \quad \Rightarrow \quad K_{\text{iso}} = M\left(\frac{2\pi}{T_{\text{iso}}}\right)^2 = 1\,223 \times \left(\frac{2\pi}{2.50}\right)^2 = 1\,223 \times 6.317 = 7\,726 \text{ kN/m}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Questo è circa 1.4% della rigidità del fondo fisso, confermando che lo strato di isolamento è molto flessibile rispetto alla sovrastruttura.

b) Sviluppi di progettazione degli isolatori.

Lo spostamento spettrale $T_{\text{iso}} = 2.50$ s si ottiene in primo luogo, leggere l'accelerazione spettrale at T_{iso} (che si trova nel ramo lungo periodo):

$$S_a(2.50) = \frac{0.48g}{2.50} = 0.192g = 1.883 \text{ m/s}^2$$

Un fattore di correzione smorzante η rappresenta l'umidità dell'isolamento superiore ($\zeta_{\text{iso}} = 15\%$) relativo al riferimento 5%:

$$\eta = \sqrt{\frac{0.10}{0.05 + \zeta_{\text{iso}}}} = \sqrt{\frac{0.10}{0.05 + 0.15}} = \sqrt{\frac{0.10}{0.20}} = 0.707$$

L'accelerazione e lo spostamento spettrale corretti da smorzamento sono:

$$Sa^* \eta \, Sa = 0.707 \times 1.883 = 1.332 \text{ m/i}^2$$

$$S_d = \frac{S_a^*}{\omega_{\text{iso}}^2} = \frac{S_a^*}{(2\pi/T_{\text{iso}})^2} = \frac{1.332}{(2\pi/2.50)^2} = \frac{1.332}{6.317} = 0.211 \text{ m} \approx 211 \text{ mm}$$

Questo è lo spostamento di progettazione che ogni unità isolatrice deve ospitare. Tipici isolatori LRB possono sostenere 200-400 mm di spostamento laterale, così il design è fattibile.

(c) Portabasso con e senza isolamento.

Base fissa (senza isolamento, $T_{\text{fb}} = 0.30$ s, 5% smorzamento, regione dell'altopiano):

$$V_{\text{fb}} = M \, S_a(0.30) = 1\,223 \times 0.80 \times 9.81 = 9\,597 \text{ kN} \approx 0.80\,W$$

Isolato a base ($T_{\text{iso}} = 2.50$ s, 15% smorzamento, corretto):

$$V_{\text{iso}} = M \, S_a^* = 1\,223 \times 1.332 = 1\,629 \text{ kN} \approx 0.136\,W$$

d) Fattore di riduzione dell'accelerazione.

$$\mathcal{R} = \frac{V_{\text{fb}}}{V_{\text{iso}}} = \frac{9\,597}{1\,629} = 5.89 \approx 6$$

L'isolamento di base riduce la cesoia sismica da un fattore approssimativamente 6, da 80% del peso dell'edificio a 14%.

- Commenta. Molte caratteristiche di questo risultato meritano attenzione.

1. *Il turno di periodo è il meccanismo primario.* Trasferirsi da $T = 0.30$ s to $T = 2.50$ s turni la struttura fuori dall'altopiano di accelerazione ad alta energia e profondo nella coda di lunga durata, a bassa accelerazione dello spettro. ulteriore smorzamento ($\eta = 0.707$) contribuisce ad un ulteriore fattore $\sqrt{2}$ riduzione, ma il turno di periodo fa la maggior parte del lavoro.
2. *Le accelerazioni di sovrastruttura sono quasi uniformi.* Perché lo strato di isolamento si concentra quasi tutte le deformazioni la base, la sovrastruttura si muove essenzialmente come un corpo rigido. Le accelerazioni del pavimento sono approssimativamente uguali a tutti i livelli e chiudono to $S_a^*/g \approx 0.136g$ — un vantaggio critico per l'ospedale dove le attrezzature, i soffitti e componenti non strutturali devono rimanere funzionale dopo il terremoto.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

3. *Lo spostamento di isolamento deve essere alloggiato.* Il 211 lo spostamento di progettazione mm richiede un fossato (lavaggio sismico) di a meno quella larghezza intorno all'intero perimetro dell'edificio, e tutto le utilità che attraversano il piano di isolamento devono essere dotate di flessibilità connessioni.
4. *Applicabilità.* L'isolamento di base è più efficace per le strutture rigide e a corto raggio per strutture flessibili (lungo T_{fb}) il turno di periodo è più piccolo, e per terreni morbidi il lungo-periodo energia di movimento terra può negare il beneficio del tutto.

36.12 Osservazioni di chiusura

36.12.1 La cautela di un medico sui metodi dello spettro di risposta

Prof. Edward L. Wilson on the Response Spectrum Method

"Ray Clough e mi dispiace abbiamo creato il metodo approssimativo dello spettro di risposta per l'analisi sismica delle strutture nel 1962. . . A quel tempo molti membri della professione utilizzavano la somma dei valori assoluti dei valori modali per stimare le forze massime degli associati. Ray suggeriva di usare il metodo SRSS per combinare i valori modale. Tuttavia, sono io che ho messo il metodo approssimativo in molti programmi di analisi dinamica che hanno permesso agli ingegneri di produrre numeri positivi senza senso di poco o nessun valore. . . Dopo aver lavorato con la RSM per oltre 50 anni, lo consiglio di non essere utilizzato per l'analisi sismica.

95 Questa riflessione candida da uno dei creatori del metodo è un promemoria sano che convenienza e rigore non sono sempre la stessa cosa. Il metodo dello spettro di risposta rimane ampiamente usato nei codici e nella pratica, ma i suoi limiti — le approssimazioni della combinazione modale, l'incapacità di catturare il comportamento non lineare, e la dipendenza dalle ipotesi di forma spettrale – devono essere compresi. Per le strutture critiche o per una risposta fortemente non lineare, l'analisi della storia del tempo non lineari è lo strumento appropriato, come sviluppato nel capitolo 53.

36.12.2 Nota di chiusura: limiti della teoria lineare

Quasi tutti i risultati analitici in questo capitolo si basano su presupposti lineari: forze di ripristino elastiche lineari, piccoli spostamenti e (quando utilizzati) smorzamento viscoso lineare. Quando sono violati (materiale cedente, cinematica di grande spostamento, contatto o fortemente non lineare smorzamento), la risposta deve generalmente essere calcolata da poco tempo integrazione. Questi argomenti computazionali e avanzati sono sviluppati nel capitolo di livello universitario 53.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 37

Elementi di progettazione strutturale

Abstract

L'analisi strutturale non è mai una fine in sé, ma uno strumento essenziale per la valutazione del rischio e della sicurezza di una struttura nuova o esistente, sia che si tratti di un edificio, di un aereo o di un osso.

È quindi importante che l'analista strutturale, nel contesto di questo libro completo, abbia una breve comprensione (sebbene superficiale) del processo progettuale e della sua relazione con l'analisi. Questo capitolo metterà in evidenza alcune considerazioni chiave e paradigmi delle procedure di analisi strutturale.

Coprerò brevemente il progetto di Stress (ASD) e la progettazione del fattore di carico e resistenza (LRFD), insieme a diversi esempi illustrativi. Inoltre, Performance Based Engineering (PBE) sarà brevemente evidenziato, anche se verrà coperto in dettaglio nei capitoli successivi.

Questo capitolo è particolarmente rilevante per l'introduzione successiva di analisi non lineare delle strutture (capitolo 56), dove l'analisi e il design devono essere strettamente intrecciati.

37.1 Introduzione 1414
37.1.1 Analisi e progettazione; un processo iterativo 1414
37.1.2 Sicurezza 1415
37.2 Progettazione alle tensioni ammissibili (ASD) 1416
37.2.1 Ex 37.1: ASD: elemento inflesso 1417
37.3 Progettazione del fattore di carico e resistenza (LRFD) 1417
37.4 Esempi di codici di progettazione basati su gleba 1420
37.4.1 Applicazione: resistenza plastica delle sezioni del fascio R/C 1421
37.4.2 Applicazione: resistenza plastica delle colonne R/C . . . 1430
37.4.3 Calcestruzzo precompresso . 1439
37.5 Ingegneria basata sulle prestazioni (PBE) 1443

COPIA DI REVISIONE

37.1 Introduzione

37.1.1 Analisi e progettazione; un processo iterativo

1 L'analisi non è mai una fine per se stessa, il suo scopo ultimo è quello di progettare una nuova struttura (soprattutto in conformità con la prevalente *codici di progettazione*), o per valutare la sicurezza di una struttura (di solito al di fuori del reale dei codici).

2 L'analisi cerca di fornire agli ingegneri del design lo spostamento, gli stress, le forze (reazioni) per il progetto stesso.

3 Poiché non si può analizzare una struttura virtuale o parametrizzata, dobbiamo iniziare con un progetto preliminare, analizzare, controllare e poi affinare quante volte ci vuole fino a raggiungere la convergenza. 37.1 che concettualizza il processo come due operatori: Analisi e Design.

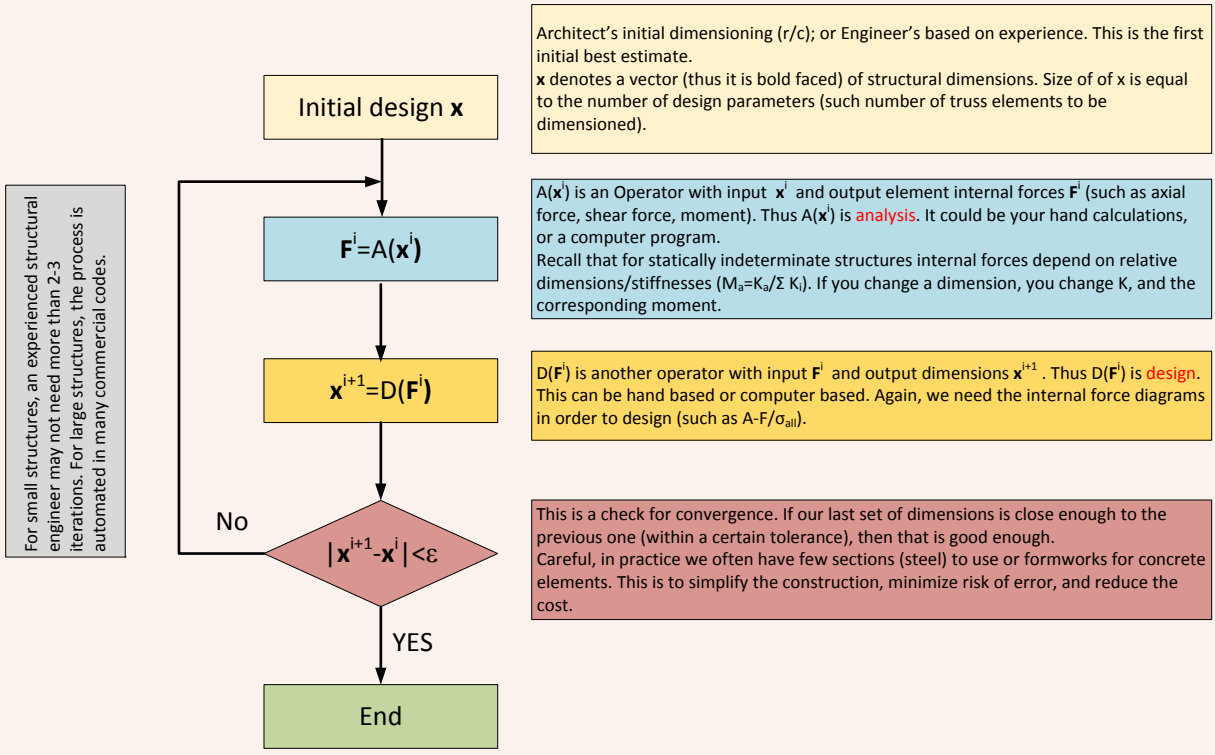


Figura 37.1: Interazioni iterative dell'ingegnere architettonico

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

37.1.2 Sicurezza

4 Nel design strutturale, denotiamo la capacità di una struttura per resistere a un carico dato da C e la domanda di carico esterno da D. Avrebbero unità in termini di F, FL, or F/L^2 (forza, momento, stress).

5 Ad esempio, in un fascio la domanda è determinata dal diagramma del momento, mentre la capacità si basa sul momento interno che può essere mobilitato (una funzione delle proprietà di sezione trasversale e curva dello stress-strain), Fig. 37.2.

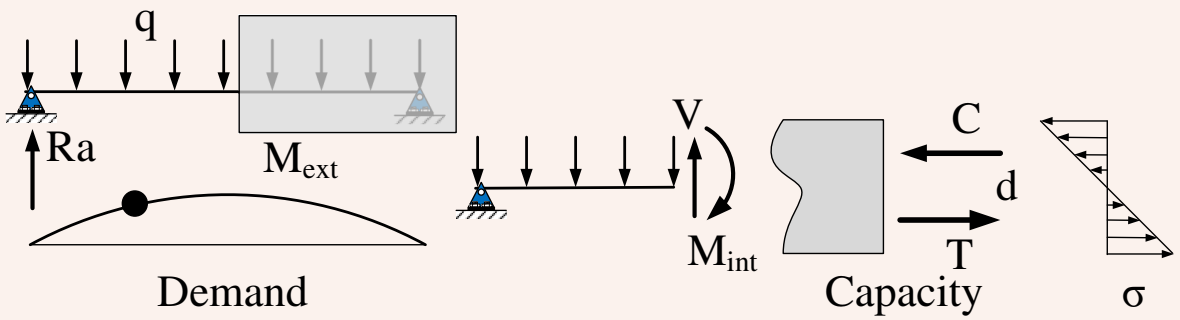


Figura 37.2: Domanda e capacità in un fascio

6 Naturalmente, la capacità dovrebbe superare la domanda, ma la questione chiave è di quanto e con i cui calcoli. 37.3 Identifichiamo 4 zone. Nessuno di loro è definito bruscamente tranne il limite inferiore del primo.

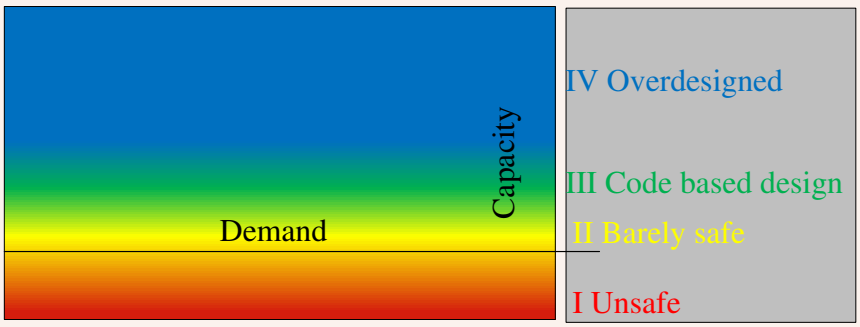


Figura 37.3: Sicurezza

Ignorabile Queste strutture possono resistere per tempi molto limitati e il collasso può verificarsi anche prima del completamento.

II A malapena sicuro Sono strutture che il fattore di sicurezza supera appena uno, sono rappresentative della costruzione predating codici moderni (e noi non sappiamo

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

davvero il loro vero fattore di protezione). Queste stesse strutture possono rimanere erette fino a subire un raro evento di carico (tipicamente, ma non solo terremoto). Il Partenone è stato distrutto da polvere da sparo immagazzinata dagli Ottomani. Il faro di Alessandria, il Colosso di Rodi, Lisbona e la città di Basilea furono tutti distrutti dai terremoti. Si deve notare che anche in tempi moderni alcune strutture poco progettate sono state distrutte da terremoti (il terremoto del 1989 Loma Prieta a San Francisco ha distrutto numerosi ponti e viadotti). *carichi verticali* ma non per *carichi laterali*Quindi, Fig. 37.3 potrebbe essere raffinato per distinguere tra carichi verticali e laterali.

III Sicuro per codici moderni Queste sono strutture progettate da codici di design moderni (ad esempio post ca 1960).

IV Overdesigned Queste sono strutture che sono molto più progettate, possono essere strutture scarsamente progettate dai non ingegneri in tempi moderni o dagli ingegneri in un momento precedente quando l'analisi strucgtural non era ancora maturata. Esempio FOr, l'Empire State Building, la diga Hoover sono esempi di strutture sovraprogettate.

7 I codici moderni hanno cercato di fornire un rigoroso sottoporsi alla sicurezza.

1. Progettazione di corde ammesse
2. Progettazione di fattori di carico e resistenza
3. Ingegneria basata sulle prestazioni

ciascuno sarà brevemente affrontato separatamente.

37.2 Progettazione alle tensioni ammissibili (ASD)

8 Nel metodo Consentibile Stress Design (ASD) semplicemente immettiamo

$$D < \frac{C}{SF}$$

dove SF è un fattore di sicurezza ($\sim 1.5 - 2$)

9 In questo approccio si riduce solo la capacità (a causa di incertezze), d'altra parte, si presume implicitamente che la domanda sia puramente deterministica.

10 Storicamente questa era la strategia di progettazione espoused, ma è stato sostituito dal successivo nel 1970.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

37.2.1 Ex 37.1: ASD: elemento inflesso

Un fascio semplicemente sostenuto con una campata di 15 piedi è sottoposto ad un carico uniforme di 400 libbre a piedi. Il fascio è realizzato in acciaio con uno stress da resa di 36,000 psi. Dobbiamo determinare se la sezione del fascio con un momento di inerzia $I = 80\,\text{in}^4$ e una sezione modulo $S = 16\,\text{in}^3$ è sufficiente considerando un fattore di sicurezza di 1.75.

Lo stress ammissibile σ_{allow} considerando che il fattore di sicurezza è dato da:

$$\sigma_{\text{allow}} = \frac{\sigma_{\text{yield}}}{\text{Safety Factor}}$$

dove: $\sigma_{\text{yield}} = 36,000\,\text{psi}$ e il fattore di sicurezza = 1.75 Sostituire i valori:

$$\sigma_{\text{allow}} = \frac{36,000\,\text{psi}}{1.75} = 20,571.43\,\text{psi}$$

Per un raggio semplicemente supportato con carico uniforme, il momento di curvatura massimo si verifica al punto centrale ed è dato da:

$$M_{\text{max}} = \frac{wL^2}{8}$$

dove: $w = 400$ sterline a piedi e $L = 15$ piedi Ora, calcolare il momento di curvatura massimo:

$$M_{\text{max}} = \frac{400\,\text{lb/ft} \times (15 \times 12)^2\,\text{in}^2}{8 \times 12} = \frac{400 \times 32400}{96} = 135,000\,\text{lb-in}$$

Il modulo di sezione richiesto per resistere al momento della curvatura senza superare lo stress ammissibile è dato da:

$$S_{\text{required}} = \frac{M_{\text{max}}}{\sigma_{\text{allow}}}$$

dove: $\sigma_{\text{allow}} = 20,571.43\,\text{psi}$
Sostituto

$$S_{\text{richiesto}} = \frac{135,000\,\text{Lb-in}}{20,571.43\,\text{p)}} \approx 6.56\,\text{in}^3$$

Sezione di riferimento modulus $S = 16\,\text{in}^3$ Since $S_{\text{provided}} = 16\,\text{in}^3$ is greater than $S_{\text{required}} = 6.56\,\text{in}^3$, the section is adequate.

37.3 Progettazione del fattore di carico e resistenza (LRFD)

11 In LRFD, sia la capacità che la domanda sono considerate variabili casuali con le proprie funzioni di distribuzione delle probabilità.

12 Il carico stesso è avvolta tra il carico morto (DL), il carico vivo (LL), il caricamento del vento (WL) ecc. A sua volta sarà moltiplicato per un fattore $\alpha > 1$ in conformità con (ASCE-7) (ASCE/SEI 7-16, 2017) e considereremo la resistenza nominale finale (plastica) (ridotta da Φ)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

13 α e Φ sono determinati in modo tale che la probabilità di fallimento non superi un certo valore. Quindi, LRFD è generalmente espresso come

$$\Phi C_n \geq \Sigma \alpha_i D_i$$

Ad esempio nel codice di progettazione ACI-318 avremmo $D = 1.4DL + 1.7LL$ e $\phi = 0.9$ per flessore.

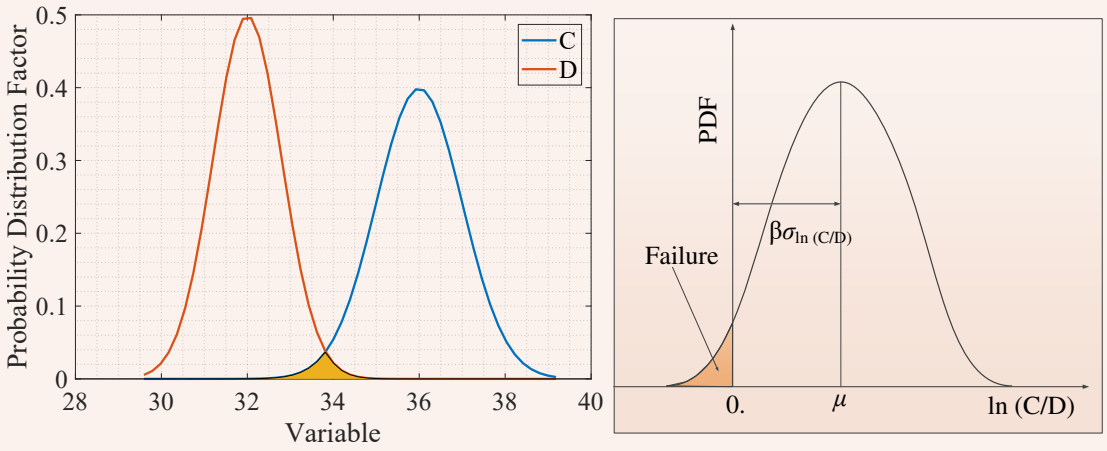
14 Lo stato limite è generalmente determinato dalla capacità di plastica *determinato senza* un'analisi non lineare, solo una supposizione che si applica l'elastico lineare.

15 LRFD cerca di avere un indice di affidabilità, §N tale $\beta >\sim 3.5$.

16 Le limitazioni del paradigma di progettazione LRFD sono discusse in §66.1 attraverso l'introduzione alla Performance Based Earthquake Engineering one (chapter 72).

L'indice di affidabilità è un indicatore "universale" sull'adeguatezza di una struttura, e può essere utilizzato come metrica a 1) valutare la salute di una Struttura, e 2) confrontare diverse strutture mirate per possibile risanamento.

17 Come risultato delle distribuzioni normali assunte di entrambi C e D, ci sarà sempre una probabilità di fallimento, Fig. 37.4a.



(a) Distribuzioni di capacità e domanda (b) Definizione dell'indice di affidabilità

Figura 37.4: Funzioni di distribuzione probabili C e D

18 Possiamo normalizzare la capacità con la domanda, Fig. 37.4b, e definire un cosiddetto *indice di affidabilità* attraverso uno dei due approcci:

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Appracide

$$
\begin{aligned}
M &= C - D \\
\mu_M &= \mu_C - \mu_D \\
\sigma_M &= \sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_D^2} \\
\beta &= \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{\mu_C - \mu_D}{\sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_D^2}}
\end{aligned}
$$

Appracide II

$$
\begin{aligned}
M &= \ln C - \ln D \\
\mu_M &= \mu_C - \mu_D \quad \text{First order} \\
\sigma_M &= \sqrt{\frac{\sigma_C^2}{\mu_C^2} + \frac{\sigma_D^2}{\mu_D^2}} = \sqrt{V_C^2 + V_D^2} \\
\beta &= \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{\ln \mu_C - \ln \mu_D}{\sqrt{V_C^2 + V_D^2}} = \frac{\ln \mu_C/\mu_D}{\sqrt{V_C^2 + V_D^2}}
\end{aligned}
$$

19 β è selezionato per riflettere le conseguenze di guasto, Tabella 37.1.

Tabella 37.1: Valori di destinazione dell'indice di affidabilità

Tipo di carico/membro	β
AISC*	
DL + LL; Membri	3.0
DL + LL; Collegamenti	4.5
DL + LL + WL; Membri	3.5
DL + LL +EL; Membri	1.75
ACI	
Insufficienza duttile	3-3.5
Brevi fallimenti	3.5-4

* Istituto americano di costruzione d'acciaio

20 La probabilità di fallimento P_f è pari al rapporto tra l'area ombreggiata e la superficie totale sotto la curva (Fig 37.4b) e viene data da $\Phi(-\beta)$ dove Φ è la normale funzione di probabilità cumulativa standard

$$
\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2}\left[1 + erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]
$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

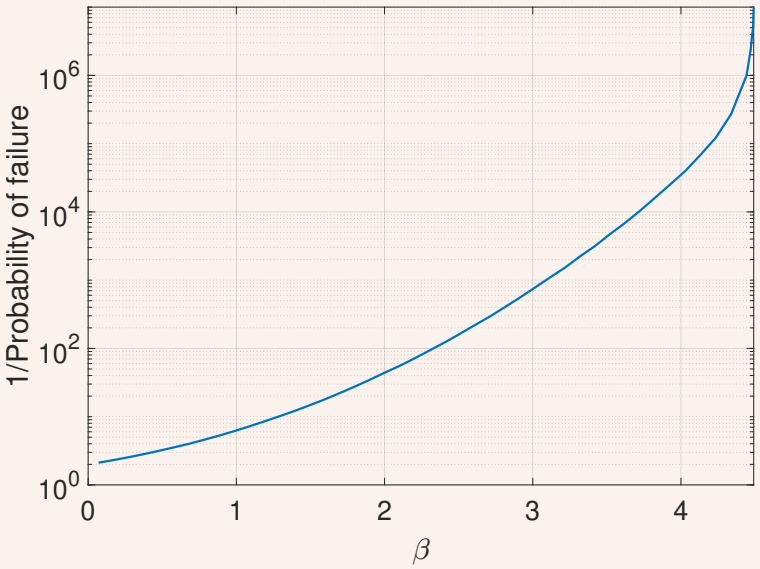


Figura 37.5: Probabilità del fallimento in termini di β

21 Infine, l'indice di affidabilità può essere direttamente correlato alla probabilità di fallimento, Fig. 37.5

22 Alcune delle principali limitazioni di LRFD includono:

1. Inconsistente: Analisi lineare, ma progettazione plastica.
2. Ignora la ridistribuzione del carico vicino al fallimento (anche se ACI implicitamente ne rappresenta alcuni attraverso riduzione di momenti negativi).
3. Rivolge un solo livello di pericolo: fallimento di una componente strutturale (e non dell'intero sistema), ma come circa la quantificazione dei danni dovuti a eventi più frequenti?

37.4 Esempi di codici di progettazione basati su gleba

23 Una volta forze interne (come momenti e cesoie), la *componente sezione* può essere progettato in conformità con il prevalente locale *codice di progettazione*. La maggior parte delle città/stato accettano quelle sviluppate a livello nazionale come l'American Concrete Institute *Requisiti del codice di costruzione per cemento strutturale* (ACI 318.2-14, 2014) o l'American Institute of Steel Design (American Institute of Steel Construction, 2016).

24 Tali codici vengono regolarmente aggiornati ogni due anni per riflettere le decisioni consensuali di modifica basate sulle ultime ricerche.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

25 Esempi dell'American Concrete Institute *Requisiti del codice di costruzione per cemento strutturale* (ACI 318.2-14, 2014).

9.5.1.1 Per ogni combinazione di carico fattore applicabile, la forza di progettazione in tutte le sezioni deve soddisfare $\phi S_n \geq U$ incluso...
22.2.2 *Presupposti di progettazione per calcestruzzo*
22.2.2.1 Cessione massima alla compressione estrema del calcestruzzo fibra deve essere assunto pari a 0.003.
22.2.2.2 La resistenza alla trazione del cemento è trascurata Calcoli di resistenza flessorale e assiale.
22.2.2.3 Il rapporto tra compressione concreta stress e tensione devono essere rappresentati da una rettangolare, trapezoidale, parabolica, o altra forma che si traduce in previsione di forza in accordo sostanziale con i risultati completi - Test.
22.2.2.4.1 Stress concreto di $0.85 f_c'$ si deve presumere uniformemente distribuito su una zona di compressione equivalente delimitato da bordi della sezione trasversale e una linea parallela all'asse neutro situato a distanza dalla fibra di massima tensione di compressione, come calcolato da: $a = \beta_1 c$ (22.2.2.4.1)
22.2.2.4.2 Distanza dalla fibra della massima compressione tensione all'asse neutro, c, è misurato perpendicolare all'asse neutro.

37.4.1 Applicazione: resistenza plastica delle sezioni del fascio R/C

26 Per esempio, per l'analisi/design della sezione plastica, consideriamo una sezione in cemento armato, Fig.37.6. Poiché la resistenza alla trazione in calcestruzzo è molto inferiore alla sua forza di compressione, la sezione viene decisa fino al suo asse neutro. La compressione dei reist in cemento e (solo) l'acciaio resiste alla tensione.

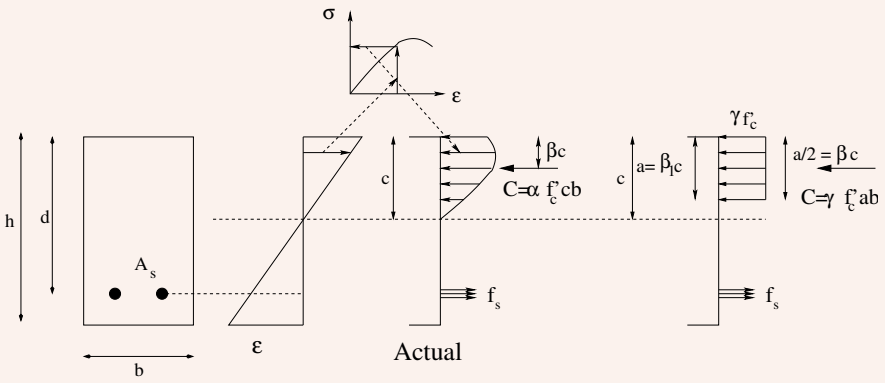


Figura 37.6: Analisi di stato limite di una sezione in cemento armato cracked

27 In caso di guasto (stato limite) abbiamo una distribuzione lineare tra i ceppi (assunzione

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Bernoulli), (ACI 10.2.2), e dal momento che curva di sforzo per cemento è non lineare, avremo una distribuzione dello stress non lineari.

28 Per l'analisi abbiamo due opzioni:

1. Espressione analitica $\sigma \Rightarrow$ integrazione esatta
2. Sostituire diagramma di stress esatto con uno più semplice ed equivalente, (ACI 10.2.6)

Secondo approccio adottato dalla maggior parte dei codici, il primo approccio sarà illustrato nell'esempio 37.4.1.4.

29 Per la distribuzione equivalente dello stress, tutto dobbiamo sapere che C & la sua posizione, quindi α e β.

30 Adottiamo uno stress rettangolare, con profondità $a = \beta_1 c$, e lo stress uguale a $\gamma f'_c$ (ACI 10.2.7.1) Questa distribuzione rettangolare dello stress è chiamata *Blocco di stress Whitney*.

$$C = \alpha f'_c bc = \gamma f'_c ab$$
$$\alpha = \frac{f_{av}}{f'_c}$$
$$a = \beta_1 c$$

Così

$$\gamma = \frac{\alpha}{\beta_1}$$

Ma la posizione delle forze risultante deve essere lo stesso, quindi

$$\beta_1 = 2\beta$$

31 Da Esperimenti:

f'_c (psi)	<4,000	5,000	6,000	7,000	8,000
α	.72	.68	.64	.60	.56
β	.425	.400	.375	.350	.325
$\beta_1 = 2\beta$	.85	.80	.75	.70	.65
$\gamma = \alpha/\beta_1$	0.85	0.85	0.85	0.86	0.86

32 Così abbiamo (ACI-318 10.2.7.3):

$$\begin{aligned} \beta_1 &= .85 && \text{if } f'_c \le 4,000 \\ &= .85 - (.05)(f'_c - 4,000)\frac{1}{1,000} && \text{if } 4,000 < f'_c < 8,000 \end{aligned}$$

33 Quindi, il fallimento può verificarsi da entrambi

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

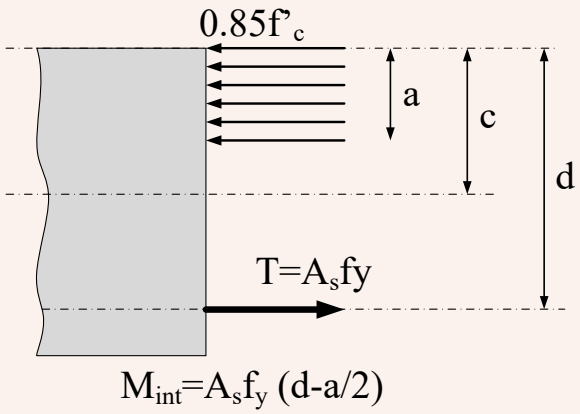


Figura 37.7: Blocco di stress Whitney

- Resa di acciaio: $\varepsilon_s = \varepsilon_y$; Progressi
- Schiacciatura di cemento: $\varepsilon_c = .003$; Sudden; **(ACI 10.3.2)**.

Idealmente, le due modalità di guasti dovrebbero verificarsi contemporaneamente. Ciò si verificherebbe quando la razione del rinforzo $\rho = A_s/bd = \rho_b$ in un *design equilibrato*.

Modalità di guasto Determinamo le due possibili modalità di guasto:

Insufficienza di tensione:

$$\left.\begin{aligned} f_s &= f_y \\ A_s f_s &= .85 f_c' ab = .85 f_c' b \beta_1 c \\ \rho &= \frac{A_s}{bd} \end{aligned}\right\} c = \frac{\rho f_y}{.85 f_c' \beta_1} d$$

Insufficienza di compressione:

$$\begin{aligned} \varepsilon_c &= .003 \\ \varepsilon_s &= \frac{f_s}{E_s} \\ \frac{c}{d} &= \frac{.003}{.003 + \varepsilon_s} \Rightarrow c = \frac{.003}{\frac{f_s}{E_s} + .003} d \end{aligned}$$

Design bilanciato: si verifica se abbiamo simultaneamente la resa dell'acciaio e la frantumazione del cemento, quindi semplicemente equando le due precedenti equazioni

$$\left.\begin{aligned} \frac{\rho f_y}{.85 f_c' \beta_1} d &= \frac{.003}{\frac{f_s}{E_s} + .003} d \\ \rho &= \rho_b \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} \frac{\rho b f 2 d}{.85 f_c' \beta_1} &= \frac{.003}{\frac{f_s}{E - s} + .003} d \\ E_s &= 29,000 \text{ ksi} \end{aligned}\right\} \rho_b = .85 \beta_1 \frac{f_c'}{f_y} \frac{87,000}{87,000 + f_y}$$
(ACI 8.4.3)

COPIA DI REVISIONE

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Guasto di resa forzato che è graduale (al contrario di improvvisa guasto della compressione)

$$\rho < .75\rho_b$$

Requisiti di resistenza ACI

$$U = 1.4D + 1.7L \quad \textbf{(ACI 9.2.1)}$$
$$U = 0.75(1.4D + 1.7L + 1.7W) \quad \textbf{(ACI 9.2.2)}$$
$$M_d = M_u = \phi M_n \quad \textbf{(ACI 9.1.1)}$$
$$\phi = .90 \quad \textbf{(ACI 9.3.2.2)}$$

Recensione del design esistente: - Si'. b, d, A_s, f_c', f_y, cerchiamo di determinare la capacità del momento M.

$$\rho_{act} = \frac{A_s}{bd}$$
$$\rho_b = (.85)\beta_1 \frac{f_c'}{f_y} \frac{87}{87 + f_y}$$

- $\rho_{act} < \rho_b$: Inadempimento da parte della Comunità e

$$a = \frac{A_s f_y}{.85 f_c' b} \qquad \Sigma F_x = 0$$
$$M_d = \phi A_s f_y (d - \frac{a}{2}) \quad \Sigma M = 0$$

- $\rho_{act} > \rho_b$ non è consentito dal codice, in questo caso abbiamo un extra sconosciuto f_s.

[34] Ora abbiamo un altro sconosciuto f_se avremo bisogno di equazione aggiuntiva (da diagramma di tensione).

$$c = \frac{A_s f_s}{.85 f_c' b \beta_1} \qquad \Sigma F_x = 0$$
$$\frac{c}{d} = \frac{.003}{.003 + \varepsilon_s} \qquad \text{From strain diagram}$$
$$M_d = \phi A_s f_s (d - \frac{\beta_1 c}{2}) \qquad \Sigma M = 0$$

Possiamo risolvere da iterazione, o sostituzione e soluzione di un quadratico equazione.

Design

[35] In situazioni di progettazione, o dobbiamo determinare b, d e A_s per resistere a un momento di progettazione esterno (Demand); o ci viene dato b, d, e cercare di determinare A_s.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

I b d e A_s, sconosciuto; M_d noto; Dal momento che il guasto di progettazione è innescato da $f_s = f_y$

$$\left.\begin{array}{rl} \Sigma F_x = 0 a = \dfrac{A_s f_y}{0.85 f_c' b} & a = \dfrac{\rho f_y}{0.85 f_c'} d \\ \rho = \dfrac{A_s}{bd} & M_d = A_s f_y \left(d - \dfrac{a}{2}\right) \end{array}\right\} M_d = \Phi \underbrace{\rho f_y \left(1 - .59 \rho \frac{f_y}{f_c'}\right)}_{R} bd^2$$

dove ρ è specificato dal designer; o

$$R = \rho f_y \left(1 - .59 \rho \frac{f_y}{f_c'}\right)$$

che non dipende da quantità sconosciute. Poi per la risoluzione bd^2:

$$bd^2 = \frac{M_d}{\Phi R}$$

Risolvere per b e d (questo richiederà un'ipotesi su uno dei due, o sul loro rapporto), e poi

$$A_s = \rho b d$$

II b, d & M_d siamo conosciuti, cerchiamo di determinare A_s. Tuttavia, non c'è alcuna certezza che possiamo avere un design con ρ_b Se la sezione è troppo piccola, allora richiederà troppa acciaio che si traduce in una sezione sovra-rinforzata.

[36] In questo caso dovremo seguire un approccio iterativo

(a) Poiché non sappiamo se l'acciaio sarà cedente o no, uso f_s.
(b) Assumere un valore iniziale per a (un buon inizio è $a = \frac{d}{5}$)
(c) Assumere inizialmente che $f_s = f_y$
(d) Controllare l'equilibrio dei momenti ($\Sigma M = 0$)

$$A_s = \frac{M_d}{\Phi f_s \left(d - \frac{a}{2}\right)}$$

(e) Controllare l'equilibrio delle forze nel x direzione ($\Sigma F_x = 0$)

$$a = \frac{A_s f_s}{.85 f_c' b}$$

(f) Verificare l'assunzione di f_s con il confronto ρ con ρ_b, o dal diagramma di tensione

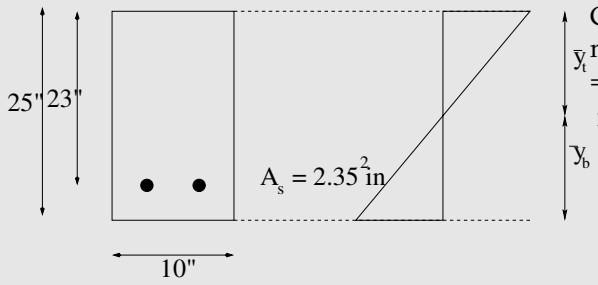
$$\frac{\varepsilon_s}{d - c} = \frac{.003}{c} \Rightarrow f_s = E_s \frac{d - c}{c} .003 < f_y$$

dove $c = \frac{a}{\beta_1}$.
(g) Iterate fino a quando non è raggiunta la convergenza.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

37.4.1.1 Ex 37.2: Resistenza ultima: verifica



Cerchiamo di determinare la capacità massima del momento della sezione trasversale seguente con $f_c' = 4.000$ psi; $f_t' = 475$ psi; $f_y = 60.000$ psi; $A_s = 2.35\ in^2$

$$\rho_{act} = \frac{A_s}{bd} = \frac{2.35}{(10)(23)} = .0102$$

$$\rho_b = .85\beta_1 \frac{f_c'}{f_y}\frac{87}{87+f_y} = (.85)(.85)\frac{4}{60}\frac{87}{87+60} = .0285 > \rho_{act} \checkmark$$

$$a = \frac{A_s f_y}{.85 f_c' b} = \frac{(2.35)(60)}{(.85)(4)(10)} = 4.15 \text{ in}$$

$$M_n = A_s f_y \left(d - \frac{a}{2}\right) = (2.35)(60)\left(23 - \frac{4.15}{2}\right) = 2,950 \text{ k.in}$$

$$M_d = \phi M_n = 0.9(2,950) = 2,660 \text{ k.in}$$

Nota:

1. From equilibrium, $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow c = \frac{A_s f_y}{.85\beta_1 b f_c'} = \frac{(2.35)(60)}{(.85)(.85)(4)(10)} = 4.87$ in
2. Soluzione alternativa:

$$M_n = \rho_{act} f_y b d^2 (1 - .59\rho_{act}\frac{f_y}{f_c'})$$
$$= A_s f_y d(1 - 59\rho_{act}\frac{f_y}{f_c'})$$
$$= (2.35)(60)(23)[1 - (.59)\frac{60}{4}(.0102)] = 2,950 \text{ k.in} = 245 \text{ k.ft}$$
$$M_d = \phi M_n = (.9)(2,950) = 2,660 \text{ k.in}$$

37.4.1.2 Ex 37.3: Resistenza ultima: progetto I

COPIA DI REVISIONE

Progettare un raggio R/C con $L = 15$ ft; DL = 1.27 k/ft; LL = 2.44 k/ft; $f'_c = 3.000$ psi; $f_y = 40$ ksi; il peso del fascio trascurato; Selezionare $\rho = 0.75\rho_b$

$$w_u = 1.4(1.27) + 1.7(2.44) = 5.92 \text{ k/ft} \quad \text{Factored load}$$

$$M_d = \frac{w_u L^2}{8} = \frac{(5.92)(15)^2}{8} = 166.5 \text{ k.ft}(12) \text{ in/ft} = 1,998 \text{ k.in}$$

$$\rho = 0.75\rho_b = (0.75)(0.85)\beta_1 \frac{f'_c}{f_y} \frac{87}{87 + f_y}$$

$$= (0.75)(.85)^2 \frac{3}{40} \frac{87}{87 + 40} = .0278$$

$$R = \rho f_y \left(1 - .59\rho \frac{f_y}{f'_c}\right)$$

$$= (.0278)(40)\left(1 - (0.59)(.0278)\frac{40}{3}\right) = 0.869 \text{ psi}$$

$$bd^2 = \frac{M_d}{\phi R} = \frac{1,998}{(0.9)(0.869)} = 2,555 \text{ in}^3$$

Take $b = 10$ in, $d = 16$ in $\Rightarrow A_s = (.0278)(10)(16) = 4.45$ in^2 $\Rightarrow$ use 3 # 11

37.4.1.3 Ex 37.4: Resistenza ultima: progetto II

Progettare un raggio R/C per $b = 11.5$ in; $d = 20$ in; $f'_c = 3$ ksi; $f_y = 40$ ksi; $M_d = 1,600$ k.in

Assumere $a = \frac{d}{5} = \frac{20}{5} = 4$ in

$$A_s = \frac{M_d}{\phi f_y (d - \frac{a}{2})} = \frac{(1,600)}{(.9)(40)(20 - \frac{4}{2})} = 2.47 \text{ in}^2$$

controllare l'assunzione,

$$a = \frac{A_s f_y}{(.85) f'_c b} = \frac{(2.47)(40)}{(.85)(3)(11.5)} = 3.38 \text{ in}$$

Così $a = 3.3$ in.

$$A_s = \frac{(1,600)}{(.9)(40)(20 - \frac{3.3}{2})} = 2.42 \text{ in}^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{(2.42)(40)}{(.85)(3)(11.5)} = 3.3 \text{ in} \checkmark$$

$$\rho_{act} = \frac{2.42}{(11.5)(20)} = .011$$

$$\rho_b = (.85)(.85)\frac{3}{40}\frac{87}{87 + 40} = .037$$

$$\rho_{max} = .75\rho_b = .0278 > \rho_{act} \checkmark$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

37.4.1.4 Ex 37.5: Analisi esatta

Come ingegnere che mette in discussione la validità dell'equazione ACI per l'ultima capacità flessorale di raggi R/C, si determina sperimentalmente la seguente curva di sforzo per cemento:

$$\sigma = \frac{2\frac{f_c'}{\varepsilon_{max}}\varepsilon}{1+\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}}\right)^2}$$

dove f_c' corrisponde a ε_{max}.

Cerchiamo di

1. Determinare l'esatto rapporto di acciaio bilanciato per un fascio R/C con $b = 10''$, $d = 23''$, $f_c' = 4,000$ psi, $f_y = 60$ - Ok. $\varepsilon_{max} = 0.003$.
2. L'equazione per la distribuzione esatta dello stress sulla sezione.
3. Determinare la forza di compressione totale C, e la sua posizione, in termini di localizzazione dell'asse neutro c.
4. Confronta con ACI 318.

La soluzione procede come segue

1. Stress-Strain:
$$\sigma = \frac{2\frac{4,000}{.003}\varepsilon}{1+\left(\frac{\varepsilon}{.003}\right)^2} = \frac{2.667\times 10^6\varepsilon}{1+1.11\times 10^5\varepsilon^2}$$
2. Assumere schiacciare a fallimento, quindi la distribuzione di tensione sarà data da
$$\varepsilon = \frac{0.003}{c}y$$
3. Combinate queste due equazioni:
$$\sigma = \frac{8,000\frac{y}{c}}{1+\left(\frac{y}{c}\right)^2}$$
4. La forza di compressione totale è data da
$$\begin{aligned} F &= \int_0^c dF = b\int_0^c \sigma dy = b\int_0^c \frac{8,000\frac{y}{c}}{1+\left(\frac{y}{c}\right)^2}dy = b\frac{8,000}{c}\int_0^c \frac{y}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2}dy \\ &= 8,000\frac{b}{c}\frac{1}{2\left(\frac{1}{c}\right)^2}\ln\left[1+\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]\Big|_0^c = 8,000\frac{b}{c}\frac{c^2}{2}\ln\left[1+\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]\Big|_0^c \\ &= 4,000bc\ln(2) = 2,773bc \end{aligned}$$
5. Equilibrio richiede che $T = C$
$$2,773bc = A_s f_y$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Dal diagramma di deformazione:

$$\frac{.003}{c} = \frac{\varepsilon_y + .003}{d} \Rightarrow c = \frac{(.003)d}{\varepsilon_y + .003}$$

$$c = \frac{(.003)(23)}{\frac{60}{29{,}000} + .003} = 13.6 \text{ in}$$

6. Combinando le ultime due equazioni

$$A_s = \frac{(2{,}773)(10)(13.6)}{60{,}000} = 6.28 \text{ in}^2$$

7. Per determinare il momento, dobbiamo prima determinare il centroide della forza di compressione misurato dall'asse neutro

$$\overline{y} = \frac{\int y dA}{A} = \frac{b\int y\sigma dy}{2{,}773bc} = \frac{b\int_0^c \frac{8{,}000\frac{y^2}{c}}{1+(y/c)^2}dy}{2{,}773bc} = \frac{8{,}000b}{2{,}773bc^2}\int_0^c \frac{y^2}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2 y^2}dy$$

$$= \frac{2.885}{c^2}\int_0^c \frac{y^2}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2 y^2}dy = \frac{2.885}{(13.61)^2}\left[\frac{y}{\left(\frac{1}{c}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{c}\right)^2}\int_0^c \frac{dy}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2 y^2}\right]$$

$$= .01557\left[yc^2 - c^2\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c^2}}}\tan^{-1} y\sqrt{\frac{1}{c^2}}\right]\right]\Bigg|_0^c$$

$$= .01557\left[c^3 - c^3\tan^{-1}(1)\right] = (.01557)(13.61)^3(1-\tan^{-1}(1)) = 8.43 \text{ in}$$

8. Il prossimo risolviamo per il momento

$$M = A_s f_y(d - c + \overline{y}) = (6.28)(60)(23 - 13.61 - 8.43) = 6{,}713 \text{ k.in}$$

9. Utilizzo del Codice ACI

$$\rho_b = .85\beta_1\frac{f'_c}{f_y}\frac{87}{87+60} = (.85)^2\frac{4}{60}\frac{87}{147} = .0285$$

$$A_s = \rho_b bd = (.0285)(10)(23) = 6.55 \text{ in}^2$$

$$a = \frac{A_s f_y}{.85 f'cb} = \frac{(6.55)(60)}{(.85)(4)(10)} = 11.57 \text{ in}$$

$$M = A_s f_y\left(d - \frac{a}{2}\right) = (6.55)(60)\left(23 - \frac{11.57}{2}\right) = 6{,}765 \text{ k.in}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{11.57}{.85} = 13.61$$

10. Riassumiamo

	Esatto	ACI
A_s	6.28	6.55
c	13.6	13.6
$\overline{y}'$	5.18	5.78
M	6,713	6,765

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

37.4.2 Applicazione: resistenza plastica delle colonne R/C

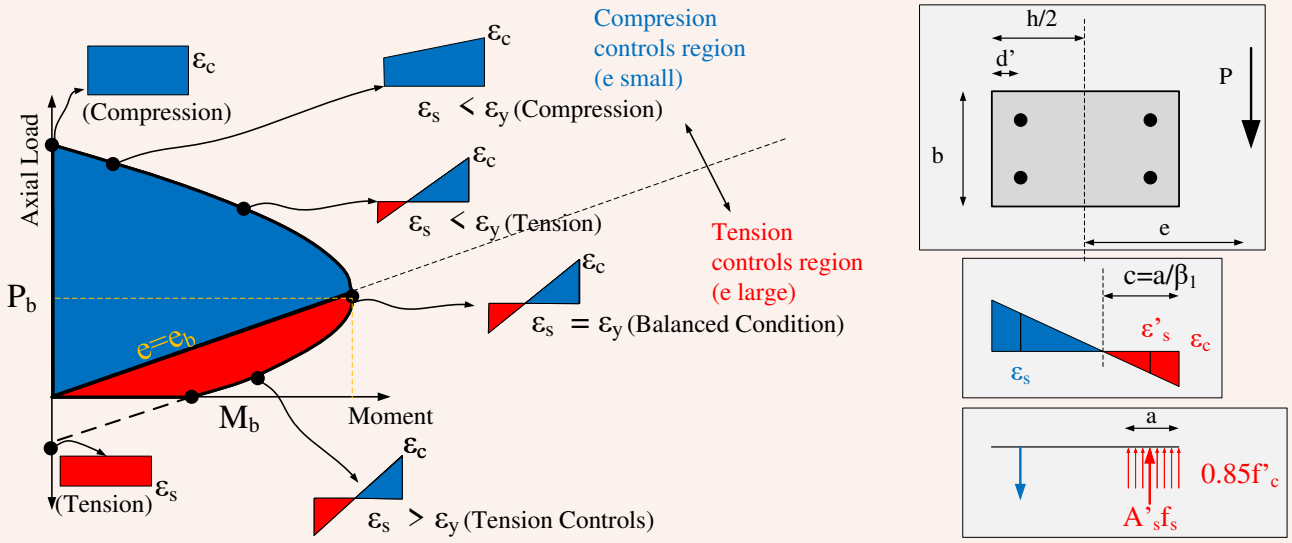
34 Colonne, o più accuratamente *colonne di trave* sono travi con forza assiale e flessore causati dall'eccentricità della forza applicata.

35 A seconda dell'eccentricità della forza assiale, avremo tre possibili modalità di fallimento, Fig. 37.8a

1. Grande eccentricità di carico ⇒ guasto mediante la resa di acciaio (essenzialmente un fascio).
2. Piccola eccentricità di carico ⇒ fallimento schiacciando di cemento
3. Condizione bilanciata in cui abbiamo un fallimento simultaneo mediante frantumazione di cemento e resa d'acciaio.

36 Poiché il fallimento è causato da una combinazione di flexure e forza assiale, avremo un involucro o "yield condition" (simile a quelli discussi in §55.2) che in questo caso è chiamato *diagramma di interazione*.

37 Il diagramma di interazione è mostrato in Fig. 37.8a e sarà meglio compreso una volta che passiamo attraverso i dettagli delle tre modalità di fallimento.



(a) Schema di interazione

(b) Schema corpo libero

Figura 37.8: Colonna corpo libero e diagrammi di interazione

38 Assunzioni $A'_s = A_s; \rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{A'_s}{bd}; f'_s = f_y$

Condizione bilanciata

COPIA DI REVISIONE

39 C'è una specifica eccentricità $e_b = \frac{M}{P}$ tale da insuccesso sarà innescato da una resa simultanea dell'acciaio e schiacciamento del calcestruzzo.

40 Dal diagramma di ceppo (e dalla compatibilità delle varietà in cemento e acciaio), Fig. 37.8b

$$\begin{aligned}\varepsilon_c &= .003\\ \varepsilon_y &= \frac{f_y}{E_s}\\ c &= \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_u + \varepsilon_y} d = \frac{.003}{\frac{f_y}{E_s} + .003} d\end{aligned}$$

che portano a

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon'_s}{c - d'} &= \frac{\varepsilon_c}{c}\\ \Rightarrow \varepsilon'_s &= \frac{c - d'}{c}\varepsilon_c\end{aligned}$$

così l'acciaio di compressione sarà cedente (cioè. $\varepsilon'_s = \varepsilon_y$) per $\varepsilon_c = .003$

41 Dall'equilibrio

$$\left.\begin{array}{lll} P_n & = .85 f'_c ab + A'_s f'_y - A_s f_s & \\ f_s & = f_y & \\ A_s & = A'_s & \end{array}\right\} \left.\begin{array}{lll} a & = \frac{P_n}{.85 f'_c b} & \\ a & = \beta_1 c_b & \\ c_b & = \frac{.003}{\frac{f_y}{E_s} + .003} d & \end{array}\right\} P_{n,b} = .85\beta_1 f'_c bd \frac{.003}{\frac{f_y}{E_s} + .003}$$

or

$$P_{nb} = .85\beta_1 f'_c bd \frac{87,000}{f_y + 87,000}$$

42 Per ottenere M_{nb} prendiamo momento circa centroid di tensione acciaio A_s di forze interne, questo deve essere uguale e opposto all'esterno momento applicato, Fig. 37.9.

$$M_{nb} = \underbrace{P_{nb} e_b}_{M_{ext}} = \underbrace{.85 f'_c ab(d - \frac{a}{2}) + A'_s f_y (d - d')}_{M_{int}}$$

43 Nota: Momenti interni dovuti a $A_s f_y$ e $A'_s f_y$ annullarsi a vicenda per colonne simmetriche.

Insufficienza di tensione

44 Dovremmo considerare due scenari

Caso I, e è conosciuto e $e > e_b$
In questo caso a e P_n sono sconosciuti, e per non attivato da f_y in A_s noi dobbiamo avere $e > e_b$.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

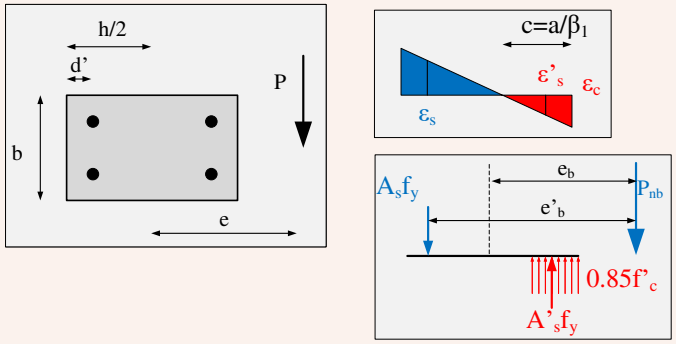


Figura 37.9: Colonna corpo libero, stato equilibrato

Può ancora assumere $A_s f_y = A'_s f_y$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow P_n = .85 f'_c ab \Rightarrow a = \frac{P_n}{.85 f'_c b}$$
$$\Sigma M = 0 \Rightarrow P_n e' = P_n (d - \frac{a}{2}) + A'_s f'_y (d - d')$$

Ancora una volta, due approcci

1. Risolvere interattivamente per queste due equazioni
   (a) Assumere a ($a < \frac{h}{2}$)
   (b) Da risolvere la compatibilità di ceppo f_{sc}, centro stress in acciaio se applicabile.
   (c) $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$ per la risoluzione P_n
   (d) $\Sigma M = 0$ rispetto al rinforzo di trazione,$\Rightarrow$ per la risoluzione P_n
   (e) Se non si verifica una convergenza tra i due P_n, iterate risolvendo per a da $\Sigma F_y = 0$
2. Combinali in un'equazione quadratica P_n

$$P_n = .85 f'_c bd \left\{ -\rho - (\frac{e'}{d} - 1) + \sqrt{\left(1 - \frac{e'}{d}\right)^2 + 2\rho \left[\mu \left(1 - \frac{d'}{d}\right) + \frac{e'}{d} \right]} \right\}$$

dove

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{A'_s}{bd}$$
$$\mu = \frac{f_y}{.85 f'_c}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Causa 2/80: Commissione c è conosciuto e $c < c_b$; P_n è sconosciuto
In questo caso, abbiamo solo due sconosciuti. P_n e f_s'.

$$\begin{aligned}
a &= \beta_1 c \\
f_s &\overset{\text{def}}{=} f_y \\
f_s' &= \varepsilon_u E_s \frac{c - d'}{c} \qquad \leq f_y \\
C &= 0.85 f_c' a b \\
P_n &= C + A_s' f_s' - A_s f_y \\
M_n &= C\frac{h-a}{2} + A_s' f_s' \left(\frac{h}{2} - d'\right) + A_s f_s \left(d - \frac{h}{2}\right) \\
e &= \frac{M_n}{P_n}
\end{aligned}$$

Notare questo approccio è favorito quando si determina il diagramma di interazione.

Insufficienza di compressione

45 Ancora una volta, consideriamo due casi distinti:

Causa I e è conosciuto e $e < e_b$; P_n, a e f_s sono sconosciuti
Insufficienza di compressione si verifica se $e' < e_b' \Rightarrow \varepsilon_u = .003$, supporre $f_s' = f_y$e $f_s < f_y$

Dalla geometria

$$\begin{aligned}
c &= \frac{\varepsilon_u}{\frac{f_s}{E_s} + \varepsilon_u} d \\
\Rightarrow f_s &= E_s \varepsilon_u \frac{d - c}{c} \\
&= E_s \varepsilon_u \frac{d - \frac{a}{\beta_1}}{\frac{a}{\beta_1}} \\
P_n &= .85 f_c' a b + A_s' f_y - A_s f_s \\
P_n e' &= .85 f_c' a b (d - \frac{a}{2}) + A_s' f_y (d - d')
\end{aligned}$$

questo avrebbe dato un'equazione cubica P_n, che può essere risolto analiticamente o con iterazione.

1. Assumere a ($a \simeq h$)
2. Risolvere per $\Sigma M = 0$ rispetto al rinforzo trazione & per la risoluzione P_n
3. Da risolvere la compatibilità di ceppo f_s
4. Controlla che $\Sigma F_y = 0$ & per la risoluzione a

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

5. If $a^{i+1} \neq a^i$ vai al passo 2

Causa II: c è conosciuto e $c > c_b$; f_s, f_s' e P_n sono sconosciuti
In questo caso

$$
\begin{aligned}
a &= \beta_1 c \\
f_s &= \varepsilon_c E_s \frac{d-c}{c} \quad \leq f_y \\
f_s' &= \varepsilon_c E_s \frac{c-d'}{c} \quad \leq f_y \\
C &= 0.85 f_c' a b \\
P_n &= C + A_s f_s + A_s' f_s' \\
M_n &= C\frac{h-a}{2} + A_s' f_s' \left(\frac{h}{2} - d'\right) + A_s f_s \left(d - \frac{h}{2}\right)
\end{aligned}
$$

37.4.2.1 Ex 37.6: Colonna R/C, c conosciuto

Una colonna da 12 a 20 in. è rinforzata con una No. 4 barre di area 1.0 in^2 ad ogni angolo. $f_c' = 3.5$ ksi, $f_y = 50$ ksi, $d' = 2.5$ in. Determinazione: 1) P_b e M_b; 2) Il carico e il momento per $c = 5$ in; 3) carico e momento per $c = 18$ in; 4) diagramma di interazione della trama

Condizioni di equilibrio è derivato rivisitando il fondamentale equazioni, piuttosto che una semplice sostituzione in precedenti derivate equazione.

$$
\begin{aligned}
d &= h - d' = 20 - 2.5 = 17.5 \text{ in} \\
c_b &= \frac{.003}{\frac{f_y}{E_s} + .003} d = \frac{.003}{\frac{50}{29{,}000} + .003} 17.5 = 11.1 \text{ in} \\
a &= \beta_1 c_b = (0.85)(11.1) = 9.44 \text{ in} \\
f_s &\overset{\text{def}}{=} f_y = 50 \text{ ksi} \\
f_s' &= E_s \frac{c-d'}{c} \varepsilon_c = (29{,}000)\left(\frac{11.1-2.5}{11.1}\right)(0.003) = 67.4 \text{ ksi} > f_y \Rightarrow f_s' = 50 \text{ ksi} \\
C &= 0.85 f_c' a b = (0.85)(3.5)(9.44)(12) = 337 \text{ k} \\
P_{nb} &= C + A_s f_s - A_s' f_s = 337 + (2.0)(50) + (2.0)(-50) = 337 \text{ k} \\
M_{nb} &= .85 f_c' a b \left(d - \frac{a}{2}\right) + A_s' f_y (d - d') \\
&= 337\left(17.5 - \frac{9.44}{2}\right) + (2.0)(50)(17.5 - 2.5) = 5{,}807 \text{ k.in} = 484 \text{ k.ft} \\
e_b &= \frac{5{,}807}{337} = 17.23 \text{ in}
\end{aligned}
$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Insufficienza di tensione, $c = 5$ in

$$
\begin{aligned}
f_s &\overset{\text{def}}{=} f_y = 50 \text{ ksi} \\
f'_s &= \varepsilon_c E_s \frac{c - d'}{c} \qquad \leq f_y \\
&= (0.003)(29,000)\frac{5.0 - 2.5}{5.0} = 43.5 \text{ ksi} \\
a &= \beta_1 c = 0.85(5.0) = 4.25 \text{ in} \\
C &= 0.85 f'_c ab \\
&= (0.85)(3.5)(4.25)(12) = 152 \text{ k} \\
P_n &= C + A'_s f'_s - A_s f_y \\
&= 152 + (2.0)(43.5) - (2.0)(50) = 139 \text{ k} \\
M_n &= .85 f'_c ab(d - \frac{a}{2}) + A'_s f_y (d - d') \\
&= 152\left(17.5 - \frac{4.25}{2}\right) + (2.0)(50)(17.5 - 2.5) = 3,638 \text{ k.in} = 303 \text{ k.ft} \\
e &= \frac{3,638}{139} = 26.3 \text{ in}
\end{aligned}
$$

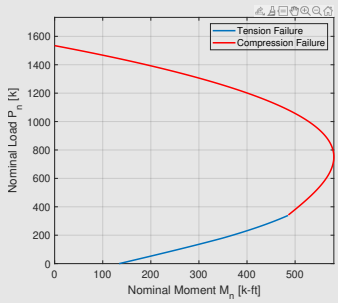
Insufficienza di compressione, $c = 18$ in

$$
\begin{aligned}
a &= \beta_1 c = 0.85(18) = 15.3 \text{ in} \\
f_s &= \varepsilon_c E_s \frac{d - c}{c} \qquad \leq f_y \\
&= (0.003)(29,000)\frac{17.5 - 18.0}{18.0} = -2.42 \text{ ksi} \;\; A_s \text{ is under compression} \\
f'_s &= \varepsilon_c E_s \frac{c - d'}{c} \qquad \leq f_y \\
&= (0.003)(29,000)\frac{18.0 - 2.5}{18.0} = 75 \text{ ksi} > f_y \Rightarrow f'_s = 50 \text{ ksi} \\
C &= 0.85 f'_c ab = (0.85)(3.5)(15.3)(12) = 546 \text{ k} \\
P_n &= C + A'_s f'_s - A_s f_s \\
&= 546 + (2.0)(50) - (-2.42)(2) = 650 \text{ k} \\
M_n &= .85 f'_c ab(d - \frac{a}{2}) + A'_s f_y (d - d') \\
&= 546\left(17.5 - \frac{15.3}{2}\right) + (2.0)(50)(17.5 - 2.5) = 6,880 \text{ k.in} = 573 \text{ k.ft} \\
e &= \frac{5,809}{650} = 17.2 \text{ in}
\end{aligned}
$$

Diagramma di interazione MATLAB®elenco è dato in Appendice I.2.13.

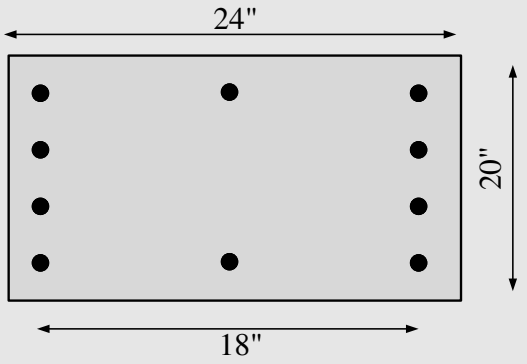
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



37.4.2.2 Ex 37.7: Colonna R/C, e conosciuto

Per la colonna seguente, determinare e_b, P_b, M_b; P_n e M_n per $e = 0.1h$ e $e = h$. $f'_c = 3,000$ psi e $f_y = 40,000$ psi. L'area di ogni bar è 1.56 in^2.



Condizione bilanciata:

$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{40}{29,000} = .001379$$

$$c_b = \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_u + \varepsilon_y} d = \frac{.003}{.003 + .001379}.003 = 14.4 \text{ in}$$

$$a = \beta_1 c_b = (.85)(14.4) = 12.2 \text{ in}$$

$$C_c = .85 f'_c ab = (.85)(3)(12.2)(20) = 624 \text{ k}$$

$$\varepsilon_{sc} = \frac{c - h/2}{c}\varepsilon_u = \frac{14.4 - 12}{14.4}.003 = .0005$$

$$f_{sc} = (29,000)(.0005) = 15 \text{ ksi} \quad \text{center bars}$$

$$C_s = (.0005)(29,000)(2)(1.56) = 46.8 \text{ k}$$

$$P_{nb} = 624 + 46.8 = 670.8 \text{ k}$$

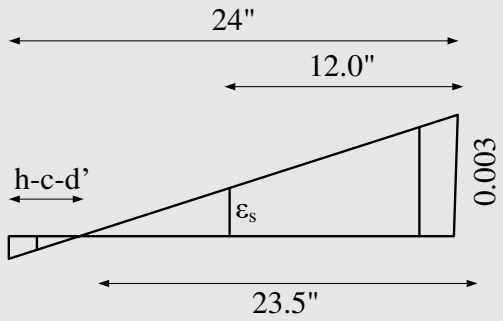
Si noti che l'acciaio di compressione sta cedendo perché $d' > 2''$ e $c > 6''$ (come già dimostrato)

COPIA DI REVISIONE

Prendere momento circa centroid di sezione

$$\begin{aligned}
M_{nb} &= P_{nb}e \\
&= .85f'_c ab\left(\frac{h}{2}-\frac{a}{2}\right)+A_s f_y\left(\frac{h}{2}-d'\right)+A'_s f_y\left(\frac{h}{2}-d'\right) \\
&= (.85)(3)(12.2)(20)\left(12-\frac{12.2}{2}\right)+4(1.56)(9)(40)+4(1.56)(40-.85\times 3)(12-3) \\
&= 3,671+2,246+2,246 \\
&= 8,164 \text{ k.in}; 680 \text{ k.ft} \\
e_b &= \frac{8,164}{670.8} = 12.2 \text{ in}
\end{aligned}$$

E' un problema. $e = (.1)(24) = 2.4$ in $< e_b \Rightarrow$ guasto da compressione. P_n, a e f_s sono sconosciuto. Equazioni disponibili: 1) $\Sigma F = 0$; 2) $\Sigma M = 0$; e 3) diagramma di sforzo; Risolvi le iterazioni.



1. Assumere $a = 20$ in

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{20}{.85} = 23.5 \text{ in}$$

2. Per l'acciaio centrale (da geometria)

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon_{sc}}{c-\frac{h}{2}} &= \frac{.003}{c} \\
\Rightarrow \varepsilon_{sc} &= \frac{c-\frac{h}{2}}{c}.003 \\
f_{sc} &= E_s\varepsilon_{sc} \\
&= E_s\frac{c-\frac{h}{2}}{c}.003 \\
&= 29,000\frac{23.5-12}{23.5}.003 = 42.5 \text{ ksi} > f_y \Rightarrow f_{sc} = f_y
\end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

3. Prendere momento circa centroid di barra d'acciaio trazione

$$P_n e' = 0.85 f_c' ab(d - \frac{a}{2}) + A_s' f_y (h - 2d') + A_{sc} f_y (\frac{h}{2} - d')$$
$$P_n(9 + 2.4) = (.85)(3)(20)(20)(21 - \frac{20}{2}) + 4(1.56)(40)(24 - 6) + 2(1.56)(40)(9)$$
$$= 11,220 + 4,493 + 259.7$$
$$\Rightarrow P_n = 1,476 \text{ k}$$

4. - Vai! ε_s in barra di tensione (da diagramma di sforzo)

$$\frac{\varepsilon_s}{h - d' - 23.5} = \frac{.003}{c}$$
$$\Rightarrow \varepsilon_s = \frac{.003}{23.5}(24 - 3 - 23.5)$$
$$= -.000319$$
$$f_s = E\varepsilon_s = (29,000)(0.000319) = 9.25 \text{ ksi}$$

5. Prendi. $\Sigma F = 0$ per verificare l'assunzione di a

$$P_n = 0.85 f_c' ab + A_s' f_y + A_{sc} f_{sc} + A_s f_y$$
$$1,476 \text{ k} = (.85)(3)(a)(20) + (4)(1.56)(40) + (2)(1.56)(40) + (4)(1.56)(9.25)$$
$$1,476 = 51a + 432.1$$
$$\Rightarrow a = 20.4 \text{ in} \checkmark$$
$$P_n = 1,476 \text{ k}$$
$$M_n = (1,476)(2.4) = 3,542 \text{ k.in} = 295 \text{ k.ft}$$

e=h

1. In questo caso $e = 24$ in $> e_b \Rightarrow$ insufficienza per tensione. P_n e a sono sconosciuti. Abbiamo due equazioni: 1) $\Sigma F = 0$, e 2) $\Sigma M = 0$.
2. Assumere $a = 7.9$ in $\Rightarrow c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{7.9}{.85} = 9.3$ in
3. Stress in acciaio al centroide

$$\frac{c}{.003} = \frac{12 - c}{\varepsilon_{sc}}$$
$$\Rightarrow \varepsilon_{sc} = \frac{12 - 9.3}{9.3}.003 = .00087$$
$$\Rightarrow f_{sc} = (29,000)(0.00087) = 25.3 \text{ ksi}$$

4. Iterate

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow P_n = (.85) f_c' ab + A_{sc} f_{sc}$$
$$= (.85)(3)(7.9)(20) - 2(1.56)(25.3)$$
$$= 403 - 79 = 324 \text{ k}$$
$$\Sigma M = 0 \Rightarrow P_n(e + h/2 - d') = .85 f_c' ab(d - \frac{a}{2}) + A_s' f_y (d - d') - A_{sc} f_{sc} (\frac{d - d'}{2})$$
$$P_n(24 + 9) = (.85)(3)(7.9)(20)(21 - \frac{7.9}{2}) + 4(1.56)(40)(21 - 3)$$
$$+ 2(1.56)(25.3)(9)$$
$$P_n(33) = 6,870 + 4,493 - 710 = 10,653 \text{ k.in}$$
$$\Rightarrow P_n = 323 \text{ k} \checkmark$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

5. Determinazione M_n

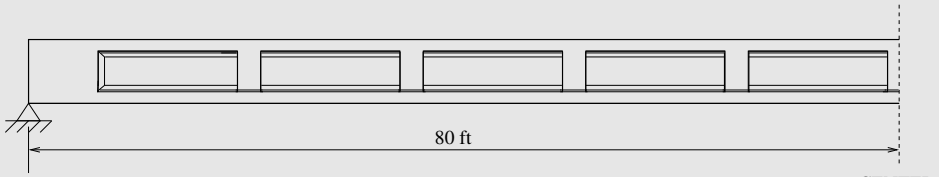
$$M_n = P_n e = (323)(24) = 7,752 \text{ k.in} = 646 \text{ k.ft}$$

37.4.3 Calcestruzzo precompresso

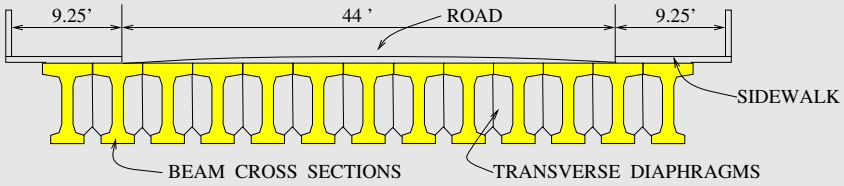
37.4.3.1 Ex 37.8: Caso di studio: ponte in legno

La sezione seguente è riprodotta da Billington, 1983 Structural Studies.

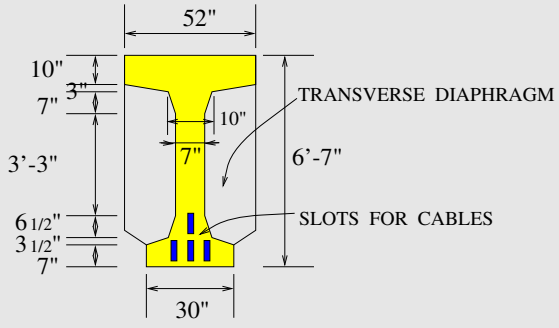
Lo storico ponte di Noce Lane (primo importante ponte pre-stressato in cemento nel USA) è fatto di tre campate, due laterali con lunghezze di 74 ft e una media di lunghezza 160 piedi. Tredici travi in cemento prestressato sono posizionati lato per compensare una larghezza totale di 44 fet di strada e due 9.25 piedi di marciapiede. Tra le travi, e gettato con loro, sono irrigidimenti trasversali che collegano le travi lateralmente.



ELEVATION OF BEAM HALF



CROSS - SECTION OF BRIDGE

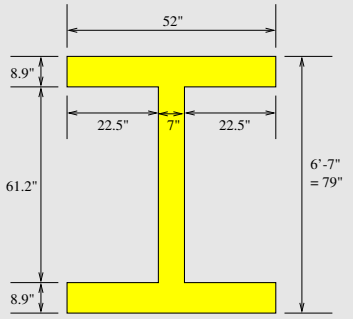


CROSS - SECTION OF BEAM

COPIA DI REVISIONE

Proprietà di sezione trasversale

La sezione trasversale del fascio è mostrata qui sotto ed è semplificata



SIMPLIFIED CROSS - SECTION OF BEAM

$$A_c = 2(8.9)(52) + (7)(61.2) = 1,354 \text{ in}^2$$

$$I = 2\left[\frac{(52)(8.9)^3}{12} + (52)(8.9)\left(\frac{79}{2} - \frac{8.9}{2}\right)^2\right] + \frac{(7)(61.2)^3}{12}$$

$$== 1,277 \times 10^3 \text{ in}^4$$

$$c_1 = c_2 = \frac{h}{2} = \frac{79}{2} = 39.5 \text{ in}$$

$$S_1 = S_2 = \frac{I}{c} = \frac{1,277 \times 10^3}{39.5} = 32,329 \text{ in}^3$$

$$r^2 = \frac{I}{A} = \frac{1,277 \times 10^3}{1,354} = 943. \text{ in}^2$$

Precompressione

Ogni fascio è prestressato da due cavi parabolici centrali, e due quelli orizzontali esterni lungo Tutti e quattro hanno circa la stessa eccentricità a metà dell'arco di 2,65 ft o 31,8 pollici.

Ogni cavo prestressante è composto da 64 fili ciascuno con un diametro di L'area totale dell'acciaio pre-stressante è quindi data da:

$$A_{wire} = \pi(d/2)^2 = 3.14(\frac{0.276 \text{ in}}{2})^2 = 0.0598 \text{ in}^2$$

$$A_{cable} = 64(0.0598) \text{ in}^2 = 3.83 \text{ in}^2$$

$$A_{total} = 4(3.83) \text{ in}^2 = 15.32 \text{ in}^2$$

Mentre la resistenza massima della trazione dell'acciaio utilizzato è di 247 ksi, i cavi sono stati ha sottolineato solo a 131 ksi, così la forza iniziale di prestressing P_i è uguale a

$$P_i = (131) \text{ ksi}(15.32) \text{ in}^2 = 2,000 \text{ k}$$

Le perdite sono riportate di 13%, così la forza efficace è

$$P_e = (1 - 0.13)(2,000) \text{ k} = 1,740 \text{ k}$$

Carico

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Il peso del fascio è $q_0 = 1.72$ k/ft. Il cemento (densità=.15 k/ ft^3) strada ha uno spessore di 0,45 piedi. Così per una larghezza di 44 piedi, il carico totale su un singolo fascio è

$$q_{r,tot} = \frac{1}{13}(44)\text{ ft}(0.45)\text{ ft}(0.15)\text{ k/ ft}^3 = 0.23\text{ k/ft}$$

Analogamente per i marciapiedi che sono largo 9.25 piedi e spessore di 0,6 piedi:

$$q_{s,tot} = \frac{1}{13}(2)(9.25)\text{ ft}(0.60)\text{ ft}(0.15)\text{ k/ ft}^3 = 0.13\text{ k/ft}$$

Si noti che il peso può essere uniformemente diffuso sopra le 13 travi a causa del lato diaframmi.

Il carico totale è morto

$$q_{DL} = 0.23 + 0.13 = 0.36\text{ k/ft}$$

Il carico vivo è creato dal traffico, e si stima che sia 94 psf, così su una larghezza di 62,5 piedi questo dà un carico live uniforme di

$$w_{LL} = \frac{1}{13}(0.094)\text{ k/}ft^2(62.5)\text{ ft} = 0.45\text{ k/ft}$$

Infine, il carico vivo e morto combinato per fascio è

$$w_{DL+LL} = 0.36 + 0.45 = 0.81\text{ k/ft}$$

Tensioni flessionali

1. Forza prestressante, P_i solo

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{P_i}{A_c}\left(1 - \frac{ec_1}{r^2}\right) \\ &= -\frac{(2\times 10^6)}{1,354}\left(1 - \frac{(31.8)(39.5)}{943.}\right) = 490.\text{ psi} \\ f_2 &= -\frac{P_i}{A_c}\left(1 + \frac{ec_2}{r^2}\right) \\ &= -\frac{(2\times 10^6)}{1,354}\left(1 + \frac{(31.8)(39.5)}{943.}\right) = -3,445.\text{ psi} \end{aligned}$$

2. P_i e il peso del fascio M_0 (che deve essere accolta per il momento trave a cambers dovuto prestressing)

$$M_0 = \frac{(1.72)(160)^2}{8} = 5,504\text{ k.ft}$$

Le tensioni flessografiche saranno così uguali a:

$$f_{1,2}^{w_0} = \mp\frac{M_0}{S_{1,2}} = \mp\frac{(5,50.4)(12,000)}{943.} = \mp 2,043\text{ psi}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

$$
\begin{aligned}
f_1 &= -\frac{P_i}{A_c}\left(1 - \frac{ec_1}{r^2}\right) - \frac{M_0}{S_1} \\
&= 490 - 2,043 = -1,553 \text{ psi} \\
f_{ti} &= 3\sqrt{f'_c} = +190\checkmark \\
f_2 &= \frac{P_i}{A_c}\left(1 + \frac{ec_2}{r^2}\right) + \frac{M_0}{S_2} \\
&= -3,445 + 2,043 = -1,402. \text{ psi} \\
f_{ci} &= .6f'_c = -2,400\checkmark
\end{aligned}
$$

3. P_e e M_0. Se abbiamo 13% perdite, quindi la forza efficace P_e è uguale a $(1 - 0.13)(2 \times 10^6) = 1.74 \times 10^6$ lbs

$$
\begin{aligned}
f_1 &= -\frac{P_e}{A_c}\left(1 - \frac{ec_1}{r^2}\right) - \frac{M_0}{S_1} \\
&= -\frac{1.74 \times 10^6}{1,354}\left(1 - \frac{(31.8)(39.5)}{943.}\right) - 2,043. = -1,616 \text{ psi} \\
f_2 &= \frac{P_e}{A_c}\left(1 + \frac{ec_2}{r^2}\right) + \frac{M_0}{S_2} \\
&= -\frac{1.74 \times 10^6}{1,354}\left(1 + \frac{(31.8)(39.5)}{943.}\right) + 2,043. = -954. \text{ psi}
\end{aligned}
$$

4. P_e e $M_0 + M_{DL} + M_{LL}$

$$M_{DL} + M_{LL} = \frac{(0.81)(160)^2}{8} = 2,592 \text{ k.ft}$$

e le tensioni corrispondenti

$$f_{1,2} = \mp\frac{(2,592)(12,000)}{32,329} = \mp 962. \text{ psi}$$

Così,

$$
\begin{aligned}
f_1 &= -\frac{P_e}{A_c}\left(1 - \frac{ec_1}{r^2}\right) - \frac{M_0 + M_{DL} + M_{LL}}{S_1} \\
&= -1,616 - 962. = -2,578. \text{ psi} \\
f_{cs} &= .45f'_c = -2,700\checkmark \\
f_2 &= \frac{P_e}{A_c}\left(1 + \frac{ec_2}{r^2}\right) + \frac{M_0 + M_{DL} + M_{LL}}{S_2} \\
&= -954 + 962. = +8. \text{ psi} \\
f_{ts} &= 6\sqrt{f'_c} = +380\checkmark
\end{aligned}
$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

37.5 Ingegneria basata sulle prestazioni (PBE)

46 PBE è definita come costituita dalla selezione dei criteri di progettazione, sistemi strutturali appropriati, layout, proporzionalizzazione e dettaglio per una struttura e i suoi componenti e contenuti non strutturali, nonché la garanzia e il controllo della costruzione qualità e manutenzione a lungo termine, tale che ai livelli specificati di tutta l'eccitazione e con livelli definiti di affidabilità, la struttura o la struttura non saranno danneggiate oltre determinati stati limite. PBE è un processo che inizia con i primi concetti di un progetto e dura per tutta la vita della struttura (Bertero e Bertero, 2002).

47 Il design sismico basato sulle prestazioni valuta esplicitamente come un edificio possa svolgere, dato il potenziale pericolo che è probabile sperimentare, considerando le incertezze inerenti alla quantificazione dei potenziali rischi e delle incertezza valutazione della risposta reale dell'edificio.

48 Contrariamente a LRFD, non si limita ad un livello di pericolo, ma più.

49 Le prestazioni sono misurate in termini di probabilità di perdite, costi di riparazione e sostituzione, tempo di riparazione, e il placarding non sicuro.

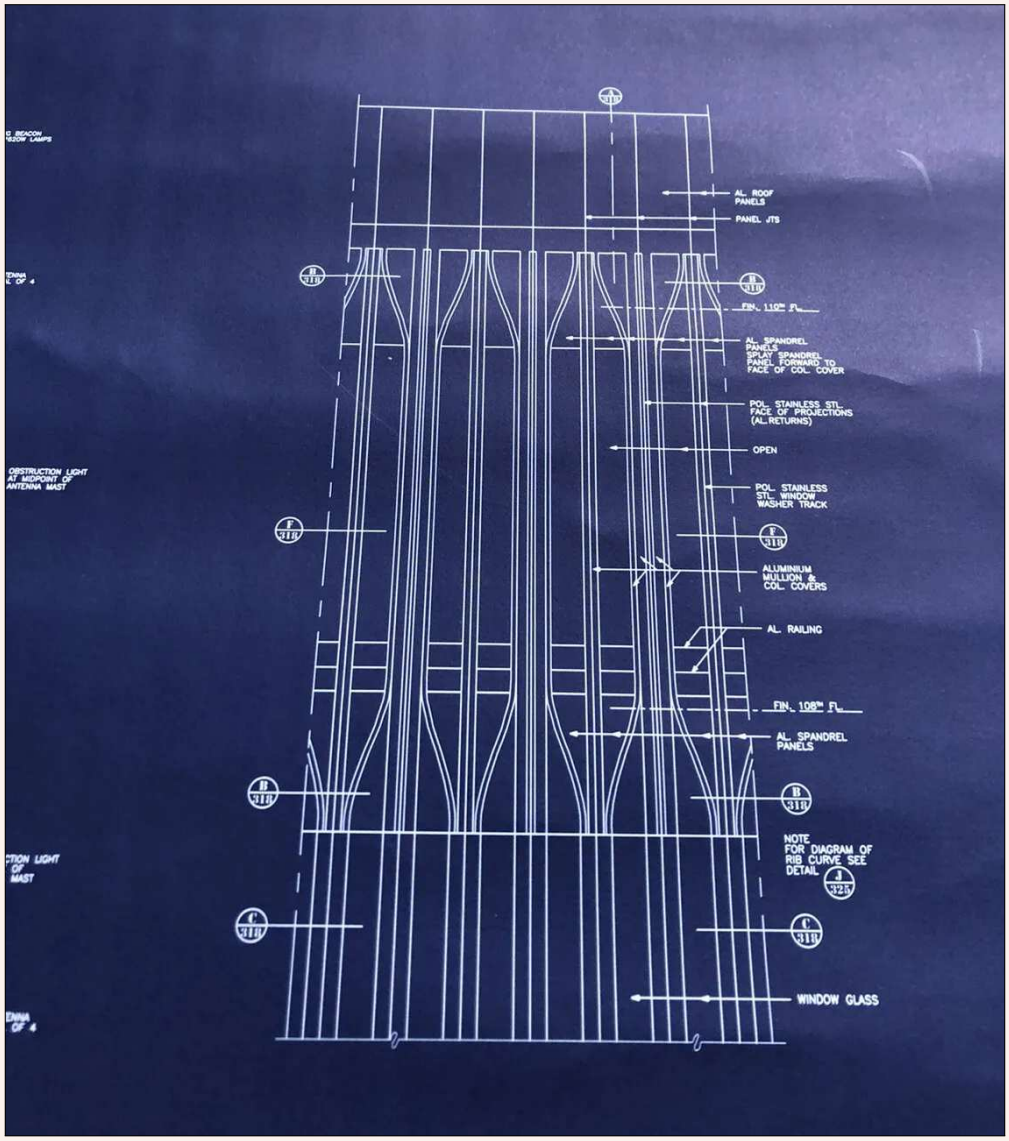
50 Le prestazioni possono essere valutate per uno scenario o intensità del terremoto particolare, oppure considerando tutti i terremoti che potrebbero verificarsi e la probabilità di ciascuno, durante un determinato periodo di tempo.

51 Prestazioni espresse in termini di una serie di livelli di performance discreti identificati come Occupazione Operativa, Immediata, Sicurezza della Vita e Prevenzione del Collapse.

52 PBEE trascende la progettazione e l'analisi singolarmente, e sarà coperto in molti più dettagli nel capitolo 72

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Le stampe del World Trade Center

Un progetto rappresenta la teoria del design illustrando la traduzione di idee concettuali in rappresentazioni precise e tecniche.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 38

Soluzioni di Fermi (Analisi approssimative)

Abstract

Gli ingegneri e gli architetti esperti spesso affrontano la sfida di eseguire rapidi, approssimativi "back dei calcoli della busta'. Combinando abilmente equazioni fondamentali da meccanica e statica con un diagramma disegnato accurato della forma defletta, possono trasformare una struttura staticamente indeterminata in una determinata da risolvere per le forze interne. Allo stesso modo, gli edifici possono essere semplificati per determinare le reazioni di base e i principali spostamenti laterali. Il capitolo inizia a disegnare un'analogia tra analisi approssimative e i cosiddetti problemi Fermi. Esplora quindi l'analisi approssimativa della risposta di semplici travi e cornici sottoposti a carichi verticali ed orizzontali per determinare le forze interne in strutture altrimenti altamente indeterminate. A seguire si esamina la risposta strutturale approssimativa dei sistemi a parete e albero, determinando reazioni di base e spostamenti superiori (drift).

38.1 Forze interne 1446
38.1.1 Forme definite & Punti di inflessione 1446
38.1.2 Momenti di vapore in termini di rigidità di sostegno . . 1449
38.1.3 Metodi di analisi 1451
38.2 Ricorso strutturale 1470
38.2.1 Sottosistema di albero 1470
38.2.2 Muro di taglio 1472
38.2.3 Muro di taglio intagliato . . 1474
38.2.4 Deflettori laterali 1476

[1] A *Fermi!* Il problema è una stima basata su una soluzione di back-of-the-envelope a un problema complesso, che comporta fare ipotesi sulle quantità e non cerca una soluzione esatta (l'ordine di grandezza è spesso sufficiente).

[2] Si dice che, mentre assisteva alla detonazione della prima bomba atomica, Fermi ha ideato un metodo semplice per indovinare la forza della bomba. Ha trovato 10 chili in più, con un ordine di grandezza del valore accettato di 21 kg.

COPIA DI REVISIONE

3 Questa era la genesi del cosiddetto problema di Fermi che richiede ragionevoli presupposti e stime su una situazione per trovare una risposta approssimativa.

4 Questo è lo scopo di questo capitolo, possiamo fare ipotesi ragionevoli e approssimative per stimare l'entità delle forze interne in una struttura. Tale approccio è sempre auspicabile prima di intraprendere un'analisi complessa per almeno sostenere la soluzione.

5 Questo è davvero perfetto *Problema di Fermi*.

38.1 Forze interne

6 Iniziamo esaminando il processo di trasformazione di una cornice statically indeterminate in una determinata, semplicemente stimando la posizione del punto di inflessione nella forma deformata.

38.1.1 Forme definite & Punti di inflessione

7 Ricalcolo (§22.3) che

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho}$$

dove ρ è il raggio di curvatura. e di conseguenza, zero momento si verificherebbe in un *punto di inflessione*, e più breve il raggio di curvatura maggiore è il momento.

8 Quindi, dobbiamo individuare i punti di zero momenti, quelli a loro volta trasformeranno un problema staticamente indeterminato in uno statico semplicemente aggiungendo equazioni di condizioni (§19.1.3).

9 Ma prima dobbiamo schizzare correttamente la forma defletta di una struttura sotto un carico dato.

10 Per tracciare correttamente la forma deformata, seguiremo alcune regole di base:

1. Ignora deformazione assiale che sono trascurabili rispetto a quelle flessografiche (§53.2.1)
2. Se abbiamo un carico laterale, applicare una piccola spostamento laterale.
3. Ci dovrebbe essere la compatibilità di rotazioni d'angolo (cioè le curve di 90 gradi rimangono a 90 gradi; le estremità fissa restano fisse).
4. La deformazione è liscia (escluse le cerniere interne).

11 La deformazione della struttura può essere decomposta in quelle di

Nodi di angolo Fig. 38.1, dove distinguono tre modalità: a) apertura, b) chiusura e c) miscelato.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

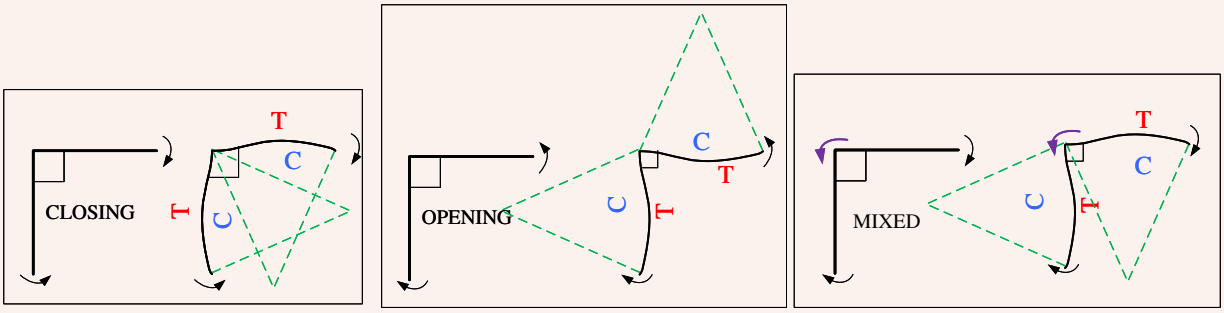


Figura 38.1: Rotture d'angolo compatibili

- Le api come illustrato in Fig. 38.2.

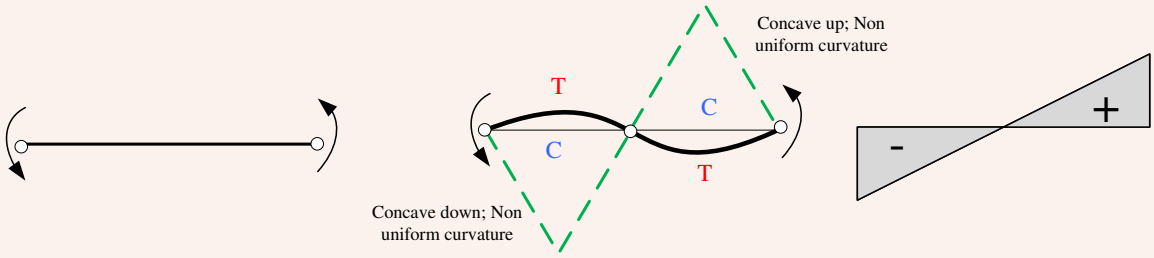


Figura 38.2: Sfiorazione di un semplice fascio

Cornici Distinguono tra due serie di carichi:

Caricamento verticale richiederà un'attenzione particolare, poiché la forma deflетta dipenderà notevolmente dalle rigidità relative delle colonne e dei raggi (§27.3.1). Quindi considereremo

- Colonne rigide, Fig. 38.3. Notare il più breve raggio, maggiore è il momento.
- Trave rigida: avremo una piccola flessione in travatura e grandi forze assiali nelle colonne
- Situazione intermedia Fig. 38.4

Caricamento laterale come mostrato in Fig. 38.5a. Notare gli spostamenti laterali degli angoli superiori, Fig. 38.5b.

Disegnamo le forme deflette della colonna di sinistra tenendo presente:

- Il tangente inferiore è 90 ^{o}.
- La tensione deve essere all'esterno (quindi concava dentro).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

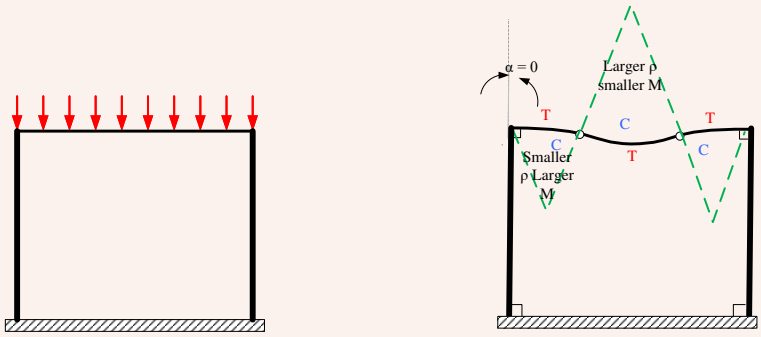


Figura 38.3: Sfiorazione del telaio portale con colonne rigide sotto carico verticale

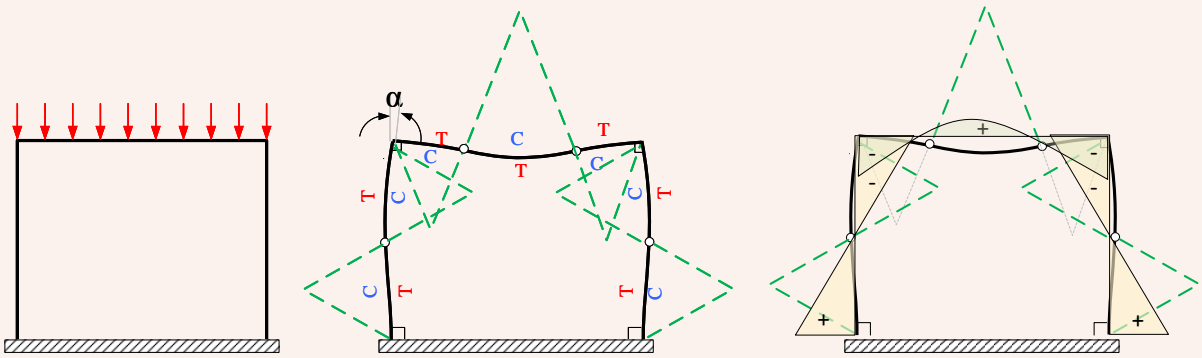
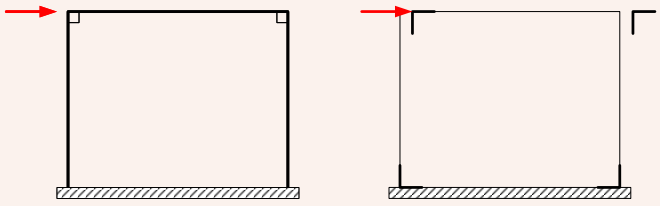


Figura 38.4: Sfiorazione del telaio portale sotto carico verticale



(a) Telaio sottoposto a carico laterale (b) Nodi di angolo sostituiti

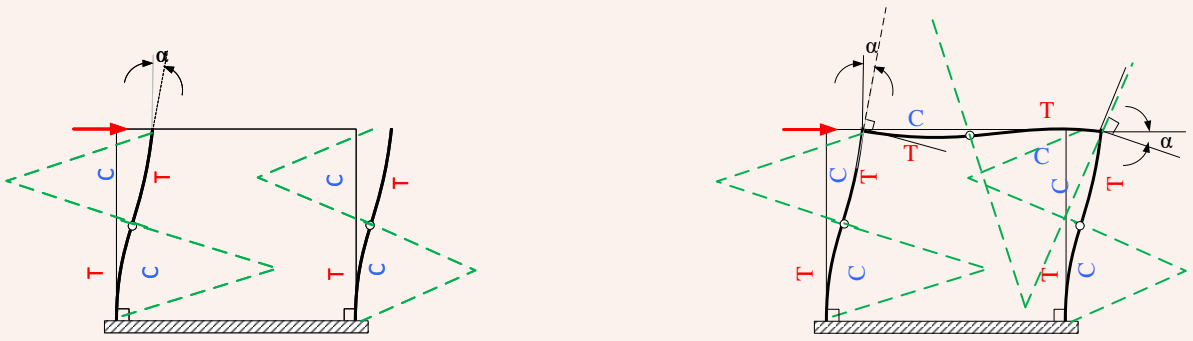
Figura 38.5: Esempio di telaio portale soggetto a carico laterale

COPIA DI REVISIONE

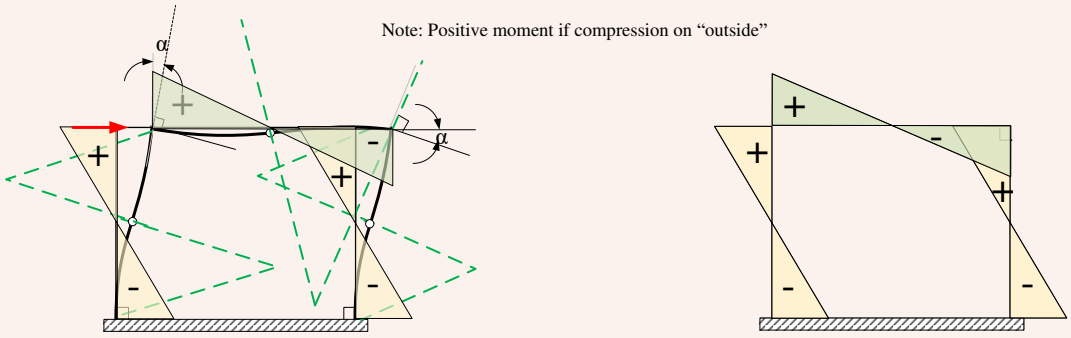
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

- La colonna è contenuta nella parte superiore. Se il fascio trasversale è
  - Infinito rigido: il tangente alla parte superiore della colonna sarebbe anche 90^o. (ci sarà un punto di inflessione)
  - Molto flessibile: non ci sarà alcun punto di inflessione, e la concavità sarà interamente all'interno.
  - rigidità finita: rotazione non zero in alto, e un punto di inflessione.

La colonna a destra avrà la forma identica, e la forma defletta è mostrata in Fig. 38.6a.



(a) Forma definita



(b) Schema del movimento

Figura 38.6: Forma e diagramma di momento scelti; telaio portale con carico laterale

38.1.2 Momenti di vapore in termini di rigidità di sostegno

12 Considerando che spesso consideriamo le travi completamente fisse o libere alle loro estremità, spesso la situazione è più complessa e garantisce un'attenzione speciale[1]

[1] La modellazione numerica dei travi collegati a molle elastiche è separatamente coperta in §46.6.2.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

13 Se infatti il fascio è collegato ad una colonna molto rigida, che per tutti gli scopi pratici possiamo assumerlo la connessione rigidamente alla fine. Allo stesso modo, se il fascio è collegato a colonne relativamente flessibili, allora il raggio può essere assunto per avere supporti liberi.

14 Questo è illustrato graficamente in Fig. 38.7. e come il supporto passa da flessibile

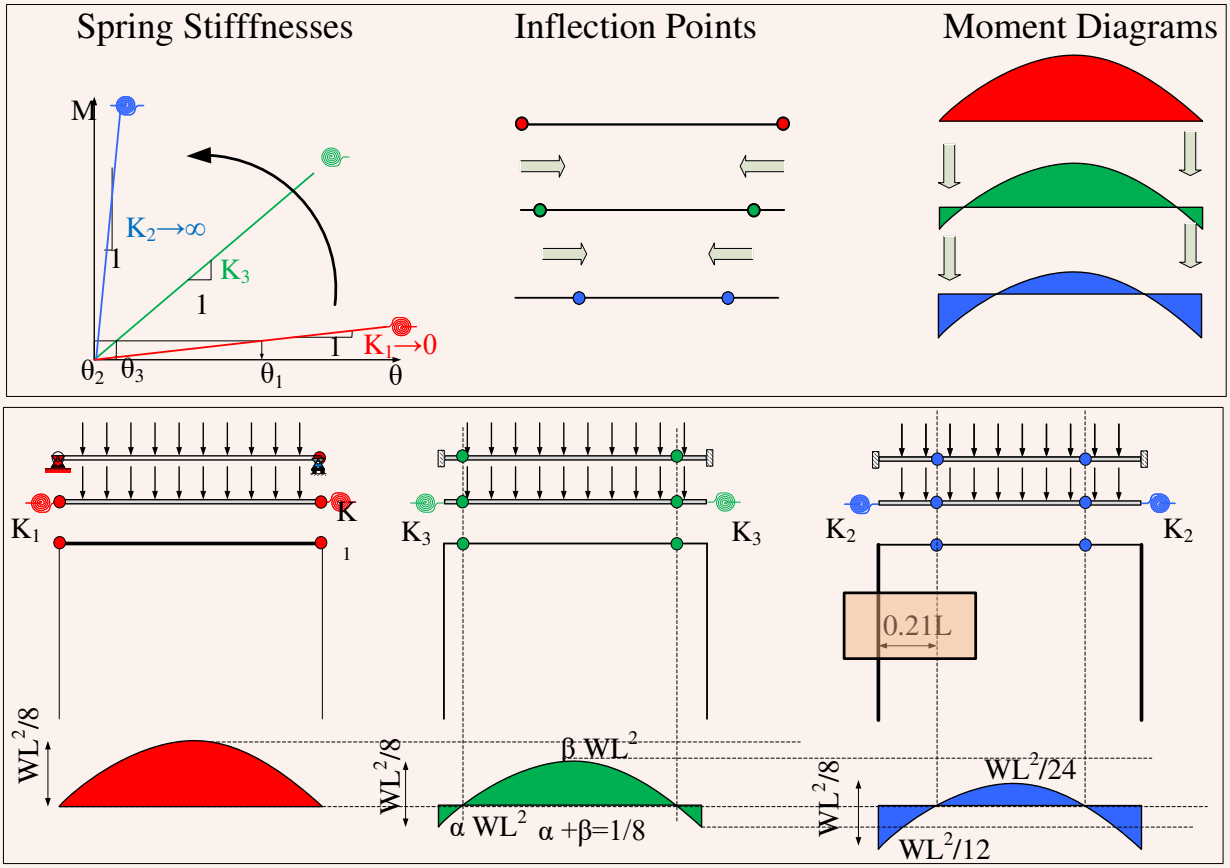


Figura 38.7: Deflettori di vapore in termini di rigidità di sostegno

(rosso) a rigido (blu), i punti di inflessione si spostano verso circa $0.21L$, e il diagramma del momento è tirato giù ad un minimo $wL^2/12$ al supporto. I valori intermedi sono indicati in verde.

15 Così data la posizione del punto di inflessione, possiamo dividere il fascio in tre segmenti: 2 estremità della lunghezza massima di ciascuna non superiore a $0.21L$ e centrale. Ognuna è una struttura statisticamente determinata e può essere analizzata in quanto tale.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

38.1.3 Metodi di analisi

16 La dimensionamento preliminare di un edificio rettangolare, o una parte posteriore della verifica dell'involucro di un'analisi del computer può essere facilmente eseguita attraverso l'analisi approssimativa degli edifici.

17 I carichi verticali e orizzontali dovrebbero essere maneggiati separatamente. Per i carichi orizzontali due metodi:

Metodo del portale per edifici a basso livello dove l'altezza è almeno più piccola della dimensione orizzontale, la forma defletta è caratterizzata da deformazioni di taglio.

Metodo di Cantilever per edifici ad alto livello dove l'altezza è più volte maggiore della sua dimensione meno orizzontale, la forma defletta è dominata dalla deformazione flexural generale.

18 Ci sono tre tipi principali di sistemi edilizi:

Subsytem della parete: in cui pareti molto rigide costituite da legno massiccio di muratura, pannelli o brasati, o capriate d'acciaio costituiscono un sottosistema rigido, che è sufficiente solo per piccoli edifici di aumento.

Rasoi verticali: costituito da quattro pareti solide o troncate una struttura tubolare dello spazio. struttura può essere interno (ascensore, scale) e/o esterno. Più efficiente per edifici di elevato livello.

Cornice rigida: che consiste di componenti verticali lineari (colonne) rigidamente collegato a quelli orizzontali rigidi (fascio e travi) non è una forma strutturale molto efficiente per resistere ai carichi laterali (vento/guarnito).

38.1.3.1 Carico verticale

19 Per un telaio multi-bay/multi-storey, si presume che le travi siano continue e le colonne sono atte a resistere ai momenti sbilanciati derivanti dalle traverse.

1. Le travi a ogni piano agiscono come fasci continui che sostengono un carico uniforme.
2. Punti di inflessione (Fig. 38.8) si presume che sia
   (a) Un decimo della durata da entrambe le estremità di ogni trave.
   (b) - A metà altezza delle colonne.
3. Ignora gli effetti assiali.
4. I momenti di fine sbilanciati dalle travi in ogni articolazione sono distribuiti alle colonne sopra e sotto.

20 Poi, tutte le travi sono staticamente determinate e hanno una campata, L_s pari a 0,8 la lunghezza originale della trave, L. Questo presuppone che il punto di inflessione sia

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

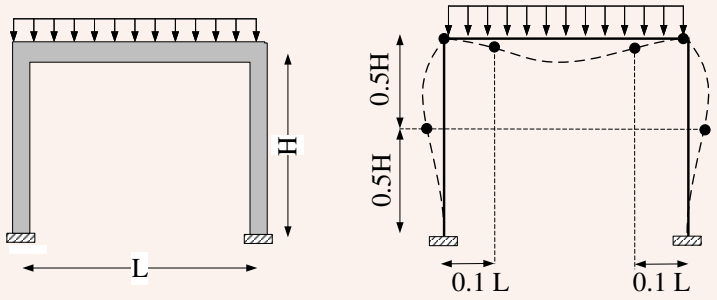


Figura 38.8: Telaio sotto carico verticale; posizione approssimativa dei punti di inflessione

a $0.1L$ che è tra 0 per il raggio semplicemente supportato, e $0.21L$ per travi rigidamente connesse(figura 38.9).

21 Sequenza di calcolo (molto importante)

1. Girder momento positivo
2. Girder momento negativo
3. Guarnizione da giuntura
4. Forze assiali della colonna
5. Momenti di colonna
6. Cesoie a colonna
7. Forze assiali Girder

22 La procedura è descritta di seguito, non c'è bisogno di memorizzare qualsiasi equazione, basta usare le equazioni di equilibrio e diagrammi corpo libero dove tutti i membri finali cesoie e momenti sono considerati positivi.

1. Girder momento positivo

23 Per analogia a Fig. 38.7, e supponendo che i punti di inflezione siano $0.1L$ dal supporto, consideriamo Fig. 38.9 e decomporre la trave in tre parti.

24 Il momento massimo positivo sarà semplicemente

$$M^{+} = \frac{1}{8} w L_s^2 = w \frac{1}{8} (0.8)^2 L^2 = 0.08 w L^2$$

25 Si noti che nel cse di supporto completamente fisso, e punti inflessione a $0.21L$, il momento massimo sarebbe $wL^2/24 = 0.041667$.

2. Girder momento negativo

26 The maximum negative moment at the girder ends, again from Fig. 38.9, will be

$$M^{left} = M^{rgt} = -\frac{w}{2}(0.1L)^2 - \frac{w}{2}(0.8L)(0.1L) = -0.045 w L^2$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

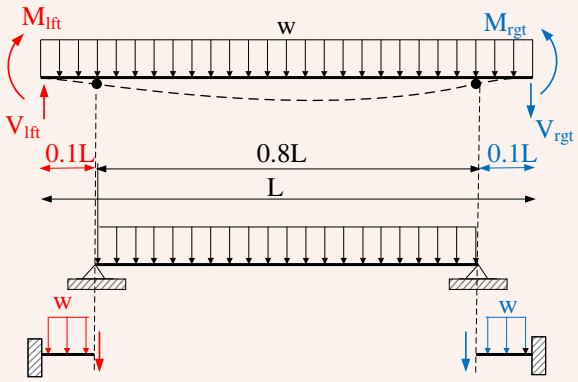


Figura 38.9: analisi approssimativa dei frame sottoposti a carichi verticali; momenti traversi

3. Guarnizione da giuntura

27 Ancora, da Fig. 38.9 la cinghia è prontamente ottenuta da

$$V^{lft} = \frac{wL}{2} \qquad V^{rgt} = -\frac{wL}{2}$$

28 Notare le direzioni delle forze di taglio. Graficamente, saranno sempre mostrati positivi.

4. Forza assiale della colonna

29 Le forze assiali della colonna sono semplicemente ottenute sommando tutte le traverse collegate alla colonna, Fig. 38.10.

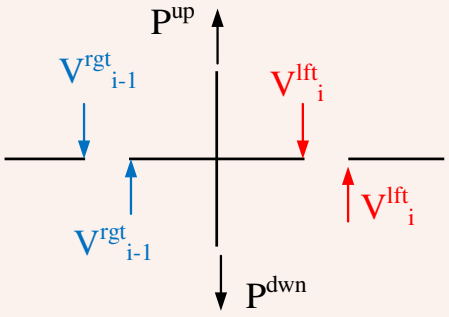


Figura 38.10: Analisi approssimativa dei telai sottoposti a carichi verticali; forze assiali della colonna

$$P^{dwn} = P^{up} + V^{rgt}_{i-1} - V^{lft}_{i}$$

COPIA DI REVISIONE

5. Momento della colonna

30 I momenti di colonna sono determinati dal diagramma del corpo libero delle articolazioni, Fig. 38.11). Da simmetria, i momenti di sinistra e destra sono uguali e opposti, quindi

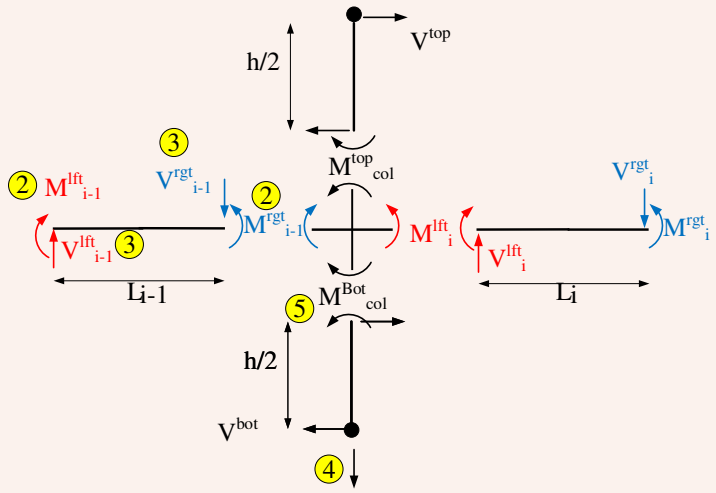


Figura 38.11: analisi approssimativa dei frame sottoposti a carichi verticali

$$M^{bot} = -M^{top}$$

6. Porta colonna

31 Poiché abbiamo assunto i punti di inflessione per essere a metà altezza, con possibile eccezione quando le colonne al primo piano sono bloccate alla base, abbiamo

$$V = \frac{M^{top}}{\frac{h}{2}}$$

7. Forze assiali Girder

32 Le forze assiali travestite sono trascurabili e saranno ignorate.

38.1.3.2 Carico orizzontale

38.1.3.2.1 Metodo del portale

33 Gli edifici a basso livello sotto carichi laterali subiscono deformazioni prevalentemente di taglio, in quanto tali possono essere facilmente eseguite con le seguenti ipotesi:

1. Da Fig. 38.6b, possiamo assumere punti di inflezione a, Fig. 38.12:
   (a) Metà altezza di tutte le colonne sopra il secondo piano.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

(b) Metà altezza delle colonne del pavimento se il supporto rigido, o alla base se incernierata.

(c) Al centro di ogni trave.

2. Totale orizzontale shear a metà altezza di tutte le colonne a qualsiasi livello del pavimento sarà distribuito tra queste colonne in modo che ciascuna delle due colonne esterne porti la metà tanto taglio orizzontale come ogni colonna interna della cornice.

34 Quindi, la sequenza di calcoli sarà

1. Portacandele
2. Momenti di colonna
3. Momenti di gita
4. Cesoie da crociera
5. Forza assiale colonna
6. Forza assiale Girder

Nota che è il *ordine inverso* della custodia di carico verticale.

1. Colonna di taglio

35 Le cesoie sono determinate passando una sezione orizzontale attraverso la metà dell'altezza delle colonne a ogni piano e scrivendo un'equazione di equilibrio delle forze laterali.

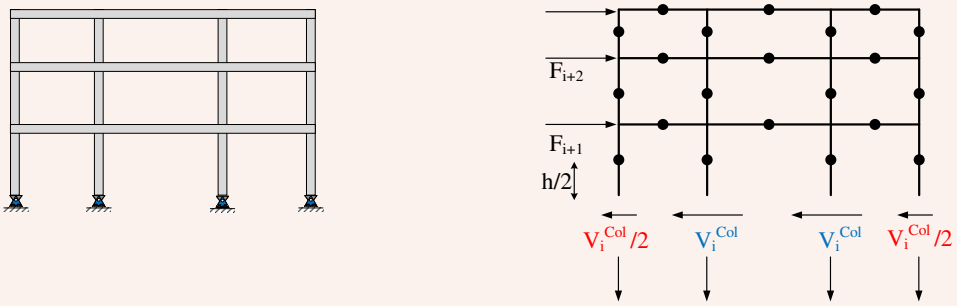


Figura 38.12: Analisi approssimativa dei telai sottoposti a carichi laterali; cesoia della colonna

$$V_{ext}^{col} = \frac{\sum F^{lateral}}{2 \text{ No. of bays}}; \qquad V_{int}^{col} = 2V_{ext}^{col}$$

2. Momenti di colonna

36 Il momento alla fine di ogni colonna è uguale al taglio ai tempi della colonna metà dell'altezza della colonna corrispondente, Fig. 38.13.

$$M_{col}^{top} = V^{col}\frac{h}{2} \qquad M^{bot} = -M^{top}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

Attenta colonne esterne, i momenti sono metà di quelle dell'interno.

3. Momenti di Girder

37 I momenti di girder sono semplicemente determinati dal diagramma del corpo libero della connessione, Fig. 38.13.

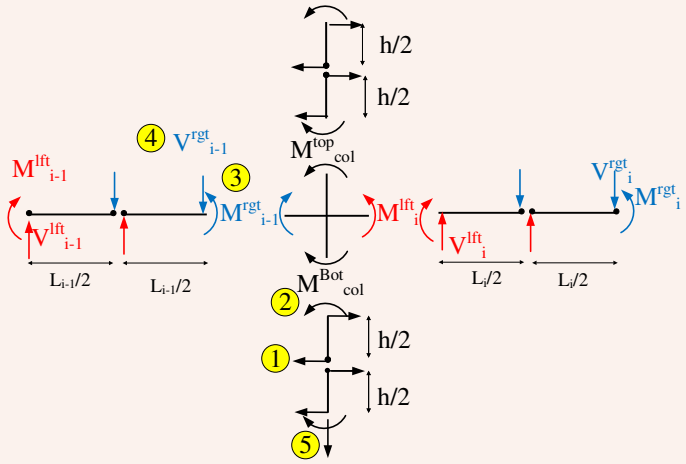


Figura 38.13: analisi approssimativa dei frame sottoposti a carichi laterali; momento trave

$$M_i^{lft} = M_{col}^{Top} - M_{col}^{Bot} + M_{i-1}^{rgt}; \qquad M_i^{rgt} = -M_i^{lft}$$

4. Girder Shears

38 Poiché c'è un punto di inflessione al centro della trave, la cinghia è ottenuta considerando la somma dei momenti su quel punto

$$V^{lft} = -\frac{2M}{L} \qquad V^{rgt} = V^{lft}$$

5. Forza assiale della colonna

39 Le forze assiali della colonna sono ottenute mediante la somma delle cesoie a trave e della forza assiale dalla colonna sopra

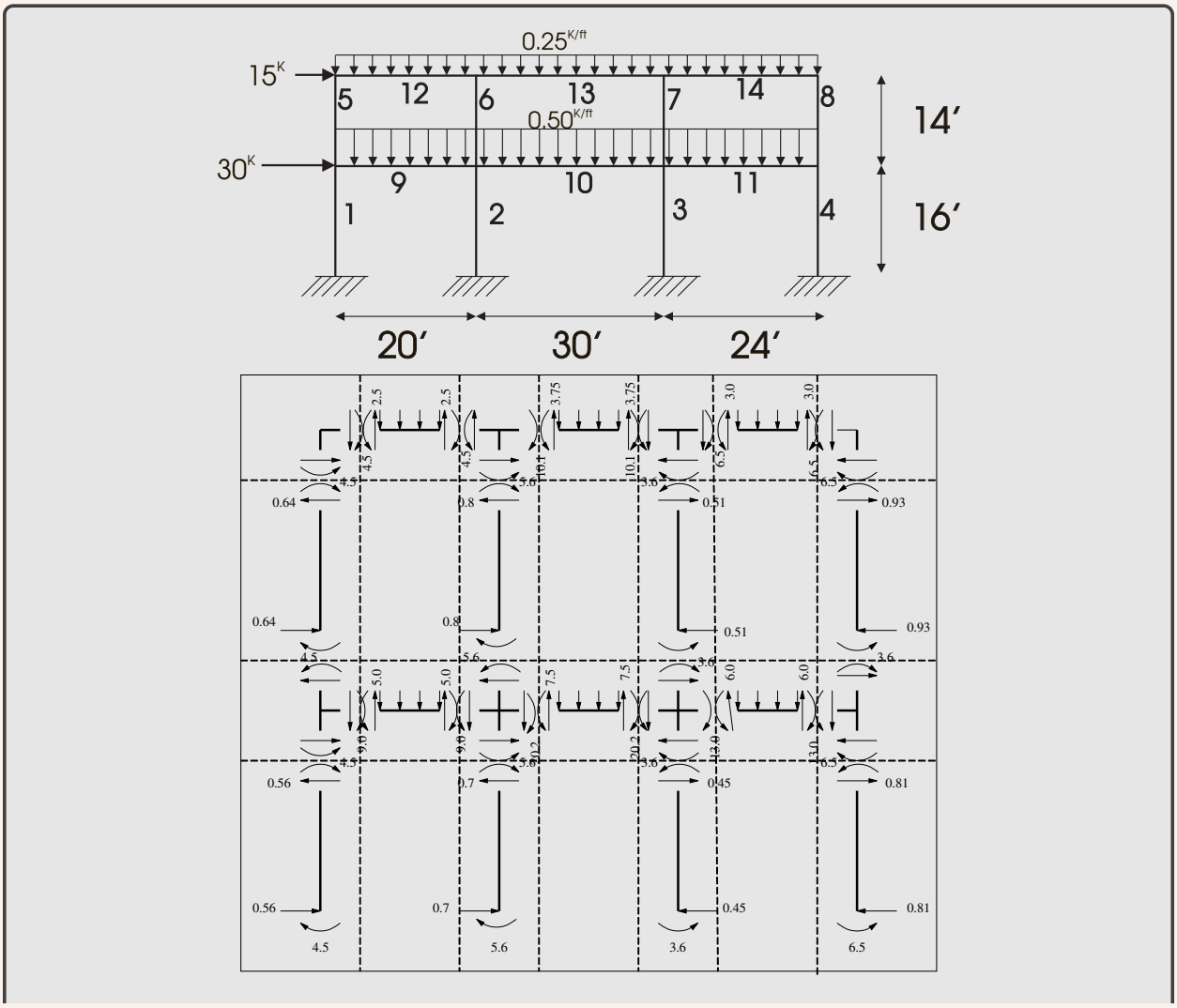
$$P = P^{above} - P^{rgt} + P^{lft}$$

6. Forza assiale Girder

40 Le forze assiali di Girder sono considerate trascurabili.

COPIA DI REVISIONE

38.1.3.2.1.1 Ex 38.1: Metodo del portale; edificio a basso aumento



COPIA DI REVISIONE

Caricamento verticale

I migliori momenti di girder

$$
\begin{aligned}
M_{12}^{lft} &= -0.045 w_{12} L_{12}^2 = -(0.045)(0.25)(20)^2 &&= -4.5 \text{ k.ft} \\
M_{12}^{cnt} &= 0.08 w_{12} L_{12}^2 = (0.08)(0.25)(20)^2 &&= 8.0 \text{ k.ft} \\
M_{12}^{rgt} &= M_{12}^{lft} &&= -4.5 \text{ k.ft} \\
M_{13}^{lft} &= -0.045 w_{13} L_{13}^2 = -(0.045)(0.25)(30)^2 &&= -10.1 \text{ k.ft} \\
M_{13}^{cnt} &= 0.08 w_{13} L_{13}^2 = (0.08)(0.25)(30)^2 &&= 18.0 \text{ k.ft} \\
M_{13}^{rgt} &= M_{13}^{lft} &&= -10.1 \text{ k.ft} \\
M_{14}^{lft} &= -0.045 w_{14} L_{14}^2 = -(0.045)(0.25)(24)^2 &&= -6.5 \text{ k.ft} \\
M_{14}^{cnt} &= 0.08 w_{14} L_{14}^2 = (0.08)(0.25)(24)^2 &&= 11.5 \text{ k.ft} \\
M_{14}^{rgt} &= M_{14}^{lft} &&= -6.5 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$

Momenti di Girder inferiore

$$
\begin{aligned}
M_{9}^{lft} &= -0.045 w_{9} L_{9}^2 = -(0.045)(0.5)(20)^2 &&= -9.0 \text{ k.ft} \\
M_{9}^{cnt} &= 0.08 w_{9} L_{9}^2 = (0.08)(0.5)(20)^2 &&= 16.0 \text{ k.ft} \\
M_{9}^{rgt} &= M_{9}^{lft} &&= -9.0 \text{ k.ft} \\
M_{10}^{lft} &= -0.045 w_{10} L_{10}^2 = -(0.045)(0.5)(30)^2 &&= -20.3 \text{ k.ft} \\
M_{10}^{cnt} &= 0.08 w_{10} L_{10}^2 = (0.08)(0.5)(30)^2 &&= 36.0 \text{ k.ft} \\
M_{10}^{rgt} &= M_{11}^{lft} &&= -20.3 \text{ k.ft} \\
M_{11}^{lft} &= -0.045 w_{12} L_{12}^2 = -(0.045)(0.5)(24)^2 &&= -13.0 \text{ k.ft} \\
M_{11}^{cnt} &= 0.08 w_{12} L_{12}^2 = (0.08)(0.5)(24)^2 &&= 23.0 \text{ k.ft} \\
M_{11}^{rgt} &= M_{12}^{lft} &&= -13.0 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$

Top Colonna Momenti

$$
\begin{aligned}
M_{5}^{top} &= +M_{12}^{lft} &&= -4.5 \text{ k.ft} \\
M_{5}^{bot} &= -M_{5}^{top} &&= 4.5 \text{ k.ft} \\
M_{6}^{top} &= -M_{12}^{rgt} + M_{13}^{lft} = -(-4.5) + (-10.1) &&= -5.6 \text{ k.ft} \\
M_{6}^{bot} &= -M_{6}^{top} &&= 5.6 \text{ k.ft} \\
M_{7}^{top} &= -M_{13}^{rgt} + M_{14}^{lft} = -(-10.1) + (-6.5) &&= -3.6 \text{ k.ft} \\
M_{7}^{bot} &= -M_{7}^{top} &&= 3.6 \text{ k.ft} \\
M_{8}^{top} &= -M_{14}^{rgt} = -(-6.5) &&= 6.5 \text{ k.ft} \\
M_{8}^{bot} &= -M_{8}^{top} &&= -6.5 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$

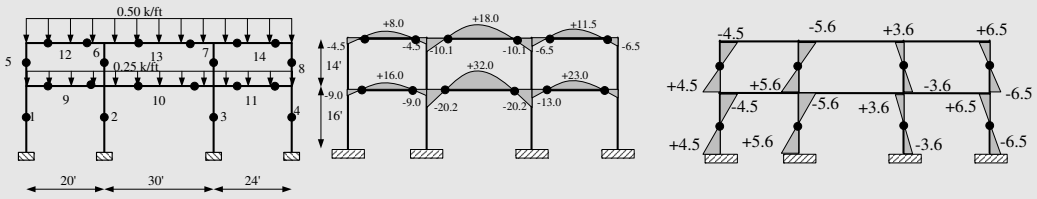
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Momenti della colonna inferiore

$$
\begin{aligned}
M_1^{top} &= +M_5^{bot} + M_9^{lft} = 4.5 - 9.0 && = -4.5 \text{ k.ft} \\
M_1^{bot} &- M_1^{top} && = 4.5 \text{ k.ft} \\
M_2^{top} &= +M_6^{bot} - M_9^{rgt} + M_{10}^{lft} = 5.6 - (-9.0) + (-20.3) && = -5.6 \text{ k.ft} \\
M_2^{bot} &= -M_2^{top} && = 5.6 \text{ k.ft} \\
M_3^{top} &= +M_7^{bot} - M_{10}^{rgt} + M_{11}^{lft} = -3.6 - (-20.3) + (-13.0) && = 3.6 \text{ k.ft} \\
M_3^{bot} &= -M_3^{top} && = -3.6 \text{ k.ft} \\
M_4^{top} &= +M_8^{bot} - M_{11}^{rgt} = -6.5 - (-13.0) && = 6.5 \text{ k.ft} \\
M_4^{bot} &= -M_4^{top} && = -6.5 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$

Diagrammi di momento



Top Girder Shear

$$
\begin{aligned}
V_{12}^{lft} &= \frac{w_{12}L_{12}}{2} = \frac{(0.25)(20)}{2} && = 2.5 \text{ k} \\
V_{12}^{rgt} &= -V_{12}^{lft} && = -2.5 \text{ k} \\
V_{13}^{lft} &= \frac{w_{13}L_{13}}{2} = \frac{(0.25)(30)}{2} && = 3.75 \text{ k} \\
V_{13}^{rgt} &= -V_{13}^{lft} && = -3.75 \text{ k} \\
V_{14}^{lft} &= \frac{w_{14}L_{14}}{2} = \frac{(0.25)(24)}{2} && = 3.0 \text{ k} \\
V_{14}^{rgt} &= -V_{14}^{lft} && = -3.0 \text{ k}
\end{aligned}
$$

Piuma di giunzione

$$
\begin{aligned}
V_9^{lft} &= \frac{w_9 L_9}{2} = \frac{(0.5)(20)}{2} && = 5.00 \text{ k} \\
V_9^{rgt} &= -V_9^{lft} && = -5.00 \text{ k} \\
V_{10}^{lft} &= \frac{w_{10}L_{10}}{2} = \frac{(0.5)(30)}{2} && = 7.50 \text{ k} \\
V_{10}^{rgt} &= -V_{10}^{lft} && = -7.50 \text{ k} \\
V_{11}^{lft} &= \frac{w_{11}L_{11}}{2} = \frac{(0.5)(24)}{2} && = 6.00 \text{ k} \\
V_{11}^{rgt} &= -V_{11}^{lft} && = -6.00 \text{ k}
\end{aligned}
$$

COPIA DI REVISIONE

Trafora della colonna

$$V_5 = \frac{M_5^{top}}{\frac{H_5}{2}} = \frac{-4.5}{\frac{14}{2}} = -0.64 \text{ k}$$

$$V_6 = \frac{M_6^{top}}{\frac{H_6}{2}} = \frac{-5.6}{\frac{14}{2}} = -0.80 \text{ k}$$

$$V_7 = \frac{M_7^{top}}{\frac{H_7}{2}} = \frac{3.6}{\frac{14}{2}} = 0.52 \text{ k}$$

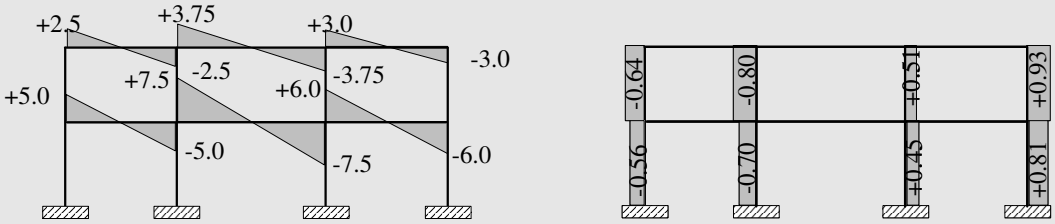
$$V_8 = \frac{M_8^{top}}{\frac{H_8}{2}} = \frac{6.5}{\frac{14}{2}} = 0.93 \text{ k}$$

$$V_1 = \frac{M_1^{top}}{\frac{H_1}{2}} = \frac{-4.5}{\frac{16}{2}} = -0.56 \text{ k}$$

$$V_2 = \frac{M_2^{top}}{\frac{H_2}{2}} = \frac{-5.6}{\frac{16}{2}} = -0.70 \text{ k}$$

$$V_3 = \frac{M_3^{top}}{\frac{H_3}{2}} = \frac{3.6}{\frac{16}{2}} = 0.46 \text{ k}$$

$$V_4 = \frac{M_4^{top}}{\frac{H_4}{2}} = \frac{6.5}{\frac{16}{2}} = 0.81 \text{ k}$$



Forza assiale della colonna superiore

$$P_5 = V_{12}^{lft} = 2.50 \text{ k}$$

$$P_6 = -V_{12}^{rgt} + V_{13}^{lft} = -(-2.50) + 3.75 = 6.25 \text{ k}$$

$$P_7 = -V_{13}^{rgt} + V_{14}^{lft} = -(-3.75) + 3.00 = 6.75 \text{ k}$$

$$P_8 = -V_{14}^{rgt} = 3.00 \text{ k}$$

Forza assiale della colonna inferiore

$$P_1 = P_5 + V_9^{lft} = 2.50 + 5.0 = 7.5 \text{ k}$$

$$P_2 = P_6 - V_{10}^{rgt} + V_9^{lft} = 6.25 - (-5.00) + 7.50 = 18.75 \text{ k}$$

$$P_3 = P_7 - V_{11}^{rgt} + V_{10}^{lft} = 6.75 - (-7.50) + 6.0 = 20.25 \text{ k}$$

$$P_4 = P_8 - V_{11}^{rgt} = 3.00 - (-6.00) = 9.00 \text{ k}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

VERTICAL LOADS

Height	Span	L1	L2	L3
		20	30	24
14	Load	0.25	0.25	0.25
16	Load	0.5	0.5	0.5

MOMENTS

	Bay 1				Bay 2				Bay 3			
Col	Beam			Column	Beam			Column	Beam			Col
	Lft	Cnt	Rgt		Lft	Cnr	Rgt		Lft	Cnt	Rgt	
	-4.5	8.0	-4.5		-10.1	18.0	-10.1		-6.5	11.5	-6.5	
-4.5				-5.6				3.6				6.5
4.5				5.6				-3.6				-6.5
	-9.0	16.0	-9.0		-20.3	36.0	-20.3		-13.0	23.0	-13.0	
-4.5				-5.6				3.6				6.5
4.5				5.6				-3.6				-6.5

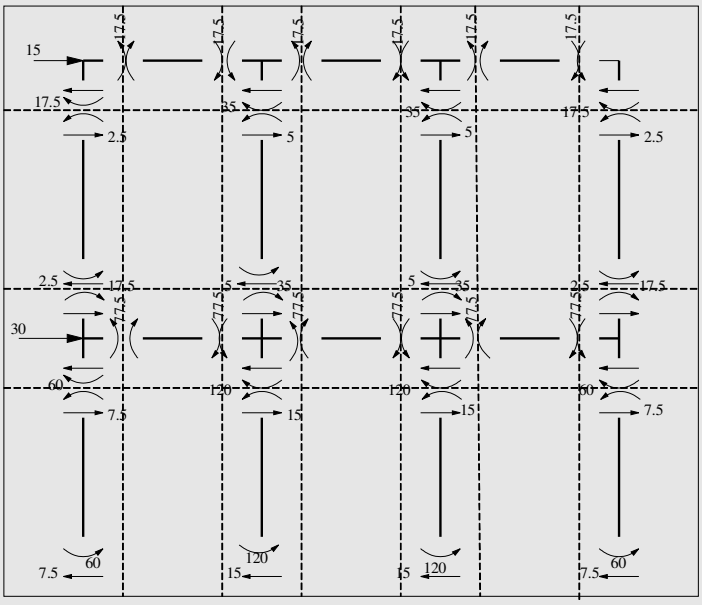
SHEAR

	Bay 1				Bay 2				Bay 3			
Col	Beam			Column	Beam			Column	Beam			Col
	Lft		Rgt		Lft		Rgt		Lft		Rgt	
	2.50		-2.50		3.75		-3.75		3.00		-3.00	
-0.64				-0.80				0.52				0.93
	5.00		-5.00		7.50		-7.50		6.00		-6.00	
-0.56				-0.70				0.46				0.81

AXIAL FORCE

	Bay 1		Bay 2		Bay 3	
Col	Beam	Column	Beam	Column	Beam	Col
	0.00		0.00		0.00	
2.50		6.25		6.75		3.00
	0.00		0.00		0.00	
7.50		18.75		20.25		9.00

Carico orizzontale



COPIA DI REVISIONE

Trafora della colonna

$$\begin{aligned}
V_5 &= \frac{15}{(2)(3)} && = 2.5 \text{ k} \\
V_6 &= 2(V_5) = (2)(2.5) && = 5 \text{ k} \\
V_7 &= 2(V_5) = (2)(2.5) && = 5 \text{ k} \\
V_8 &= V_5 && = 2.5 \text{ k} \\
V_1 &= \frac{15+30}{(2)(3)} && = 7.5 \text{ k} \\
V_2 &= 2(V_1) = (2)(7.5) && = 15 \text{ k} \\
V_3 &= 2(V_1) = (2)(2.5) && = 15 \text{ k} \\
V_4 &= V_1 && = 7.5 \text{ k}
\end{aligned}$$

Top Colonna Momenti

$$\begin{aligned}
M_5^{top} &= \frac{V_1 H_5}{2} = \frac{(2.5)(14)}{2} && = 17.5 \text{ k.ft} \\
M_5^{bot} &= -M_5^{top} && = -17.5 \text{ k.ft} \\
M_6^{top} &= \frac{V_6 H_6}{2} = \frac{(5)(14)}{2} && = 35.0 \text{ k.ft} \\
M_6^{bot} &= -M_6^{top} && = -35.0 \text{ k.ft} \\
M_7^{top} &= \frac{V_7^{up} H_7}{2} = \frac{(5)(14)}{2} && = 35.0 \text{ k.ft} \\
M_7^{bot} &= -M_7^{top} && = -35.0 \text{ k.ft} \\
M_8^{top} &= \frac{V_8^{up} H_8}{2} = \frac{(2.5)(14)}{2} && = 17.5 \text{ k.ft} \\
M_8^{bot} &= -M_8^{top} && = -17.5 \text{ k.ft}
\end{aligned}$$

Momenti della colonna inferiore

$$\begin{aligned}
M_1^{top} &= \frac{V_1^{dwn} H_1}{2} = \frac{(7.5)(16)}{2} && = 60 \text{ k.ft} \\
M_1^{bot} &= -M_1^{top} && = -60 \text{ k.ft} \\
M_2^{top} &= \frac{V_2^{dwn} H_2}{2} = \frac{(15)(16)}{2} && = 120 \text{ k.ft} \\
M_2^{bot} &= -M_2^{top} && = -120 \text{ k.ft} \\
M_3^{top} &= \frac{V_3^{dwn} H_3}{2} = \frac{(15)(16)}{2} && = 120 \text{ k.ft} \\
M_3^{bot} &= -M_3^{top} && = -120 \text{ k.ft} \\
M_4^{top} &= \frac{V_4^{dwn} H_4}{2} = \frac{(7.5)(16)}{2} && = 60 \text{ k.ft} \\
M_4^{bot} &= -M_4^{top} && = -60 \text{ k.ft}
\end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

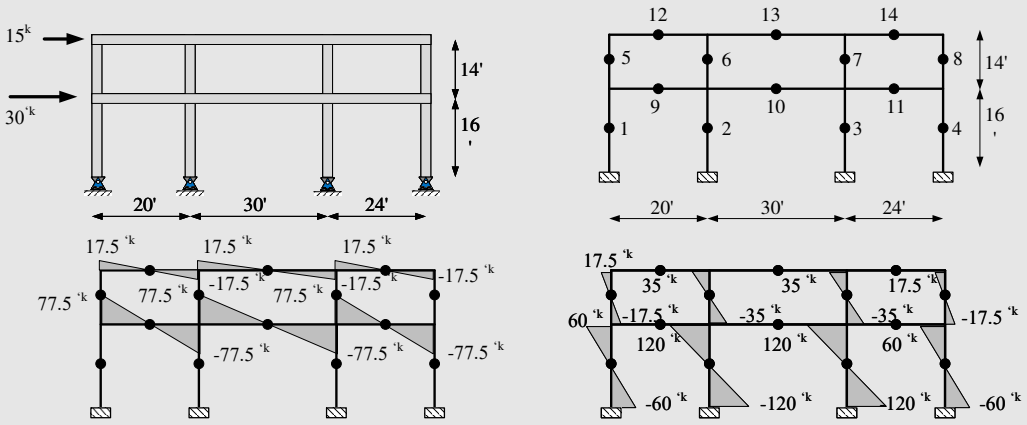
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

I migliori momenti di girder

$$
\begin{aligned}
M_{12}^{lft} &= M_{5}^{top} && = 17.5 \text{ k.ft} \\
M_{12}^{rgt} &= -M_{12}^{lft} && = -17.5 \text{ k.ft} \\
M_{13}^{lft} &= M_{12}^{rgt} + M_{6}^{top} = -17.5 + 35 && = 17.5 \text{ k.ft} \\
M_{13}^{rgt} &= -M_{13}^{lft} && = -17.5 \text{ k.ft} \\
M_{14}^{lft} &= M_{13}^{rgt} + M_{7}^{top} = -17.5 + 35 && = 17.5 \text{ k.ft} \\
M_{14}^{rgt} &= -M_{14}^{lft} && = -17.5 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$

Momenti di Girder inferiore

$$
\begin{aligned}
M_{9}^{lft} &= M_{1}^{top} - M_{5}^{bot} = 60 - (-17.5) && = 77.5 \text{ k.ft} \\
M_{9}^{rgt} &= -M_{9}^{lft} && = -77.5 \text{ k.ft} \\
M_{10}^{lft} &= M_{9}^{rgt} + M_{2}^{top} - M_{6}^{bot} = -77.5 + 120 - (-35) && = 77.5 \text{ k.ft} \\
M_{10}^{rgt} &= -M_{10}^{lft} && = -77.5 \text{ k.ft} \\
M_{11}^{lft} &= M_{10}^{rgt} + M_{3}^{top} - M_{7}^{bot} = -77.5 + 120 - (-35) && = 77.5 \text{ k.ft} \\
M_{11}^{rgt} &= -M_{11}^{lft} && = -77.5 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$



COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Top Girder Shear

$$V_{12}^{lft} = -\frac{2M_{12}^{lft}}{L_{12}} = -\frac{(2)(17.5)}{20} = -1.75 \text{ k}$$
$$V_{12}^{rgt} = +V_{12}^{lft} = -1.75 \text{ k}$$
$$V_{13}^{lft} = -\frac{2M_{13}^{lft}}{L_{13}} = -\frac{(2)(17.5)}{30} = -1.17 \text{ k}$$
$$V_{13}^{rgt} = +V_{13}^{lft} = -1.17 \text{ k}$$
$$V_{14}^{lft} = -\frac{2M_{14}^{lft}}{L_{14}} = -\frac{(2)(17.5)}{24} = -1.46 \text{ k}$$
$$V_{14}^{rgt} = +V_{14}^{lft} = -1.46 \text{ k}$$

Piuma di giunzione

$$V_{9}^{lft} = -\frac{2M_{12}^{lft}}{L_{9}} = -\frac{(2)(77.5)}{20} = -7.75 \text{ k}$$
$$V_{9}^{rgt} = +V_{9}^{lft} = -7.75 \text{ k}$$
$$V_{10}^{lft} = -\frac{2M_{10}^{lft}}{L_{10}} = -\frac{(2)(77.5)}{30} = -5.17 \text{ k}$$
$$V_{10}^{rgt} = +V_{10}^{lft} = -5.17 \text{ k}$$
$$V_{11}^{lft} = -\frac{2M_{11}^{lft}}{L_{11}} = -\frac{(2)(77.5)}{24} = -6.46 \text{ k}$$
$$V_{11}^{rgt} = +V_{11}^{lft} = -6.46 \text{ k}$$

Forza assiale della colonna superiore (+ve tensione, -ve compressione)

$$P_5 = -V_{12}^{lft} = -(-1.75) \text{ k}$$
$$P_6 = +V_{12}^{rgt} - V_{13}^{lft} = -1.75 - (-1.17) = -0.58 \text{ k}$$
$$P_7 = +V_{13}^{rgt} - V_{14}^{lft} = -1.17 - (-1.46) = 0.29 \text{ k}$$
$$P_8 = V_{14}^{rgt} = -1.46 \text{ k}$$

Forza assiale della colonna inferiore (+ve tensione, -ve compressione)

$$P_1 = P_5 + V_{9}^{lft} = 1.75 - (-7.75) = 9.5 \text{ k}$$
$$P_2 = P_6 + V_{10}^{rgt} + V_{9}^{lft} = -0.58 - 7.75 - (-5.17) = -3.16 \text{ k}$$
$$P_3 = P_7 + V_{11}^{rgt} + V_{10}^{lft} = 0.29 - 5.17 - (-6.46) = 1.58 \text{ k}$$
$$P_4 = P_8 + V_{11}^{rgt} = -1.46 - 6.46 = -7.66 \text{ k}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

# of Bays	3

# of Storeys					2
		Force		Shear	
	H	Lat.	Tot	Ext	Int
H1	14	15	15	2.5	5
H2	16	30	45	7.5	15

HORIZONTAL LOAD

	L1			L2			L3		
	20			30			24		
MOMENTS									
	Bay 1			**Bay 2**			**Bay 3**		
Col	Beam		Column	Beam		Column	Beam		Col
	Lft	Rgt		Lft	Rgt		Lft	Rgt	
	17.5	-17.5		17.5	-17.5		17.5	-17.5	
17.5			35.0			35.0			17.5
-17.5			-35.0			-35.0			-17.5
	77.5	-77.5		77.5	-77.5		77.5	-77.5	
60.0			120.0			120.0			60.0
-60.0			-120.0			-120.0			-60.0

SHEAR									
	Bay 1			**Bay 2**			**Bay 3**		
Col	Beam		Column	Beam		Column	Beam		Col
	Lft	Rgt		Lft	Rgt		Lft	Rgt	
	-1.75	-1.75		-1.17	-1.17		-1.46	-1.46	
2.50			5.00			5.00			2.50
2.50			5.00			5.00			2.50
	-7.75	-7.75		-5.17	-5.17		-6.46	-6.46	
7.50			15.00			15.00			7.50
7.50			15.00			15.00			7.50

AXIAL FORCE						
Bay 1			**Bay 2**		**Bay 3**	
Col	Beam	Column	Beam	Column	Beam	Col
	0.00		0.00		0.00	
1.75		-0.58		0.29		-1.46
	0.00		0.00		0.00	
9.50		-3.17		1.58		-7.92

Caricamento combinato

Sulla base delle due analisi approssimative, del carico verticale e laterale, ora cerchiamo i parametri di progettazione per il telaio.

Colonne

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

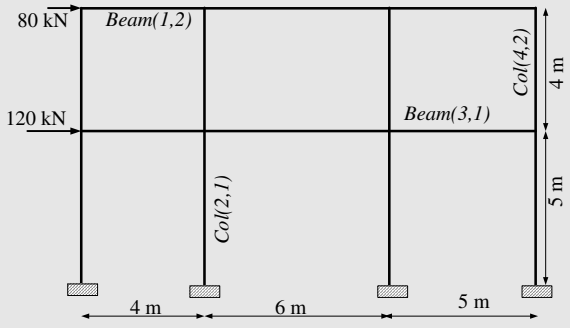
COLUM				
Mem.		Vert.	Hor.	Design Valori
1	Momento	4.50	60.00	64.50
	Assilico	7.50	9.50	17.00
	Shear	0.56	7.50	8.06
2	Momento	5.60	120.00	125.60
	Assilico	18.75	15.83	34.58
	Shear	0.70	15.00	15.70
3	Momento	3.60	120.00	123.60
	Assilico	20.25	14.25	34.50
	Shear	0.45	15.00	15.45
4	Momento	6.50	60.00	66.50
	Assilico	9.00	7.92	16.92
	Shear	0.81	7.50	8.31
5	Momento	4.50	17.50	22.00
	Assilico	2.50	1.75	4.25
	Shear	0.64	2.50	3.14
6	Momento	5.60	35.00	40.60
	Assilico	6.25	2.92	9.17
	Shear	0.80	5.00	5.80
7	Momento	3.60	35.00	38.60
	Assilico	6.75	2.63	9.38
	Shear	0.51	5.00	5.51
8	Momento	6.50	17.50	24.00
	Assilico	3.00	1.46	4.46
	Shear	0.93	2.50	3.43

- Le api

COPIA DI REVISIONE

BEAUT				
Mem.		Vert.	Hor.	Design Valori
9	-ve Moment	9.00	77.50	86.50
	+ve Momento	16.00	0.00	16.00
	Shear	5.00	7.75	12.75
10	-ve Moment	20.20	77.50	97.70
	+ve Momento	36.00	0.00	36.00
	Shear	7.50	5.17	12.67
11	-ve Moment	13.0	77.50	90.50
	+ve Momento	23.00	0.00	23.00
	Shear	6.00	6.46	12.46
12	-ve Moment	4.50	17.50	22.00
	+ve Momento	8.00	0.00	8.00
	Shear	2.50	1.75	4.25
13	-ve Moment	10.10	17.50	27.60
	+ve Momento	18.00	0.00	18.00
	Shear	3.75	1.17	4.92
14	-ve Moment	6.50	17.50	24.00
	+ve Momento	11.50	0.00	11.50
	Shear	3.00	1.46	4.46

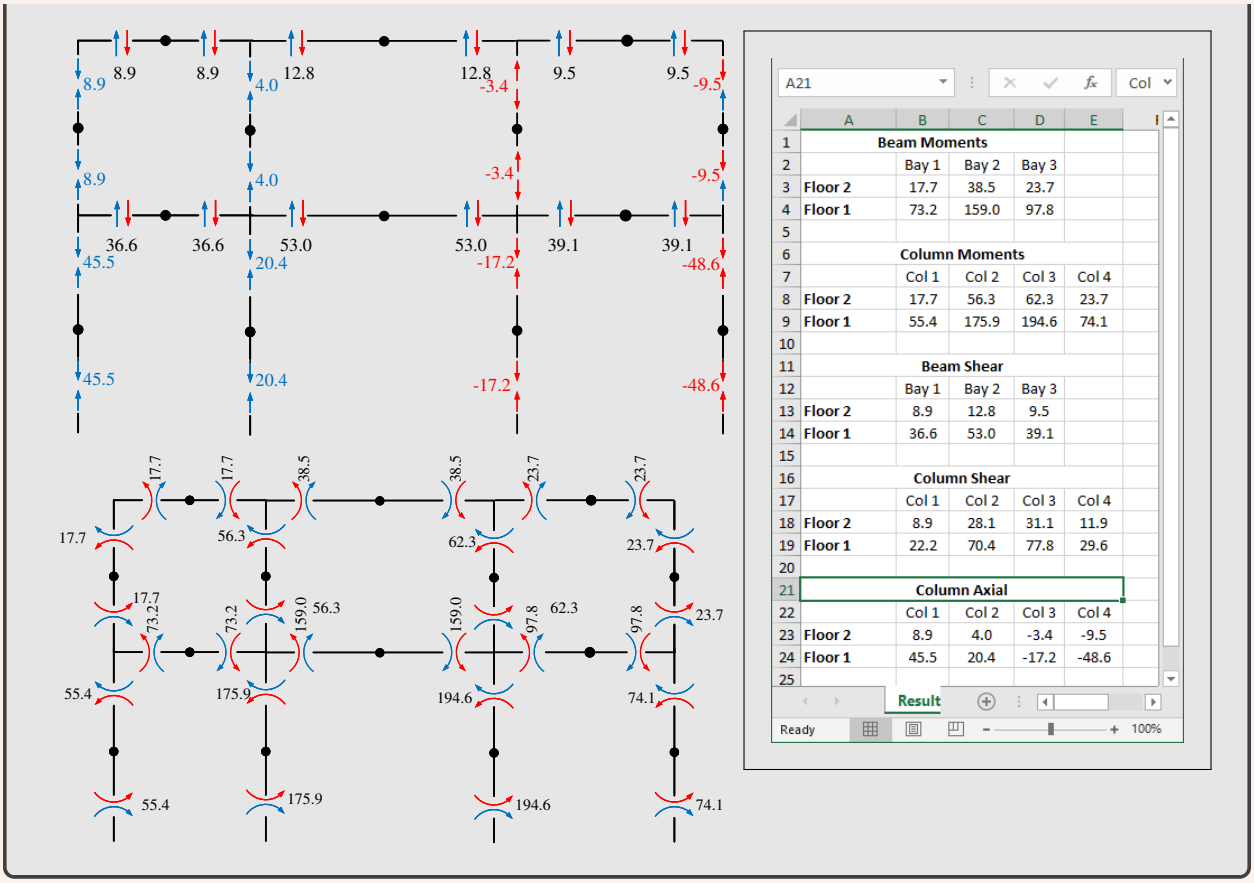
38.1.3.2.1.2 Ex 38.2: Soluzione Matlab



Il MATLAB®codice elencato in §I.2.2 è stato utilizzato per analizzare la cornice adiacente. I lettori sono incoraggiati a risolvere manualmente questo problema e confrontare i loro risultati con quelle figure.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



38.1.3.2.2 Metodo a mensola

41 Il metodo si basa sull'ipotesi che il telaio stia agendo come un fascio di cantilever con la colonna attraversa le aree sezionali come le fibre in un fascio. Più specificamente:

1. Il punto di inflessione si trova all'altezza media della colonna in ogni piano e al centro di ciascuna trave.
2. La forza assiale in ogni colonna è proporzionale alla sua distanza dal centro di gravità delle aree del gruppo della colonna a quel livello.

42 Procedura di analisi

1. Determinare il centro di gravità dei gruppi di colonne da aree di colonne (area colonna può essere assunto l'unità)
2. Considerare l'equilibrio del particolare piano al punto di inflessione nelle colonne. Le forze assiali della colonna sono espresse in termini di una forza assiale a colonna sconosciuta, poiché si assumono proporzionali alla distanza dal centro di gravità. forze in colonne su qualsiasi punto alla sezione, le forze sconosciute nella le colonne sono valutate.

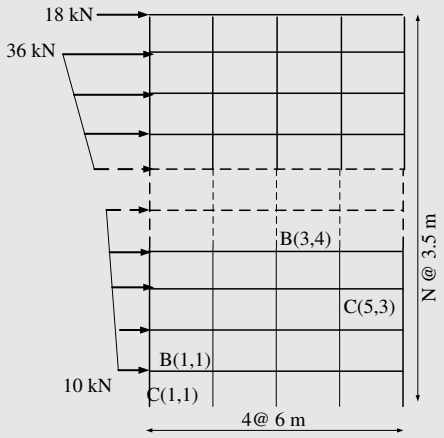
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

3. La trave è calcolata utilizzando la condizione, $\sum F_y = 0$ a ciascuna articolazione separatamente. La forza assiale della colonna è nota dal passaggio precedente.
4. Il momento alla fine del fascio è la trave moltiplicata per metà della lunghezza del fasci, poiché il punto di inflessione si presume sia al centro del fanale.
5. I momenti della colonna sono determinati considerando la condizione $\sum M_z = 0$ at Ogni giunto separatamente. Il momento alle estremità dei raggi è noto dal passaggio precedente.
6. Per saperne di più $\sum F_x = 0$ e $\sum F_y = 0$ ai supporti.

43 A MATLAB®codice per l'analisi approssimativa del telaio utilizzando il metodo cantilever è dato in §I.2.2.

38.1.3.2.2.1 Ex 38.3: Metodo a mensola: edificio multipiano



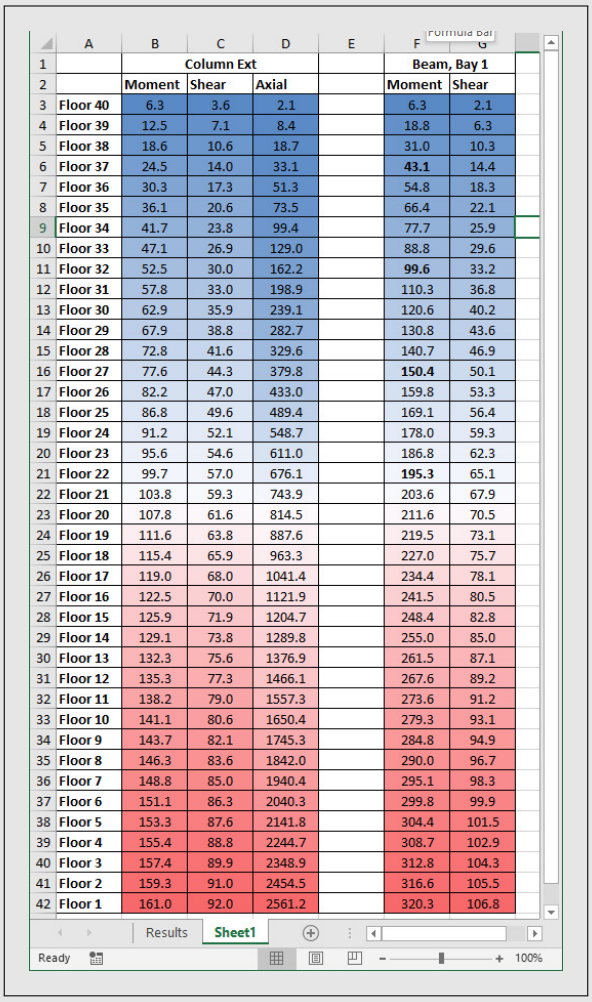
Usare di nuovo il MATLAB®codice (§I.2.2) analizziamo l'edificio adiacente ad alto livello composto da 4 baie e 50 piani. Questo esempio illustra la flessibilità della MATLAB®codice nell'appendice.

UsiamoUtilizzando MATLAB®Codice.

```
nBays=4;BaySpac=[6 6 6 6];CArea=[1 1 1 1 1];
nFloors=40;HeightCol=3.5*ones(40,1);
idf=0:39;HorLoad=10+26*idf/39;
```

e i risultati per la colonna 1 e l'alloro 1 sono tabulati qui sotto.

COPIA DI REVISIONE



		Column Ext				Beam, Bay 1	
		Moment	Shear	Axial		Moment	Shear
3	Floor 40	6.3	3.6	2.1		6.3	2.1
4	Floor 39	12.5	7.1	8.4		18.8	6.3
5	Floor 38	18.6	10.6	18.7		31.0	10.3
6	Floor 37	24.5	14.0	33.1		**43.1**	14.4
7	Floor 36	30.3	17.3	51.3		54.8	18.3
8	Floor 35	36.1	20.6	73.5		66.4	22.1
9	Floor 34	41.7	23.8	99.4		77.7	25.9
10	Floor 33	47.1	26.9	129.0		88.8	29.6
11	Floor 32	52.5	30.0	162.2		**99.6**	33.2
12	Floor 31	57.8	33.0	198.9		110.3	36.8
13	Floor 30	62.9	35.9	239.1		120.6	40.2
14	Floor 29	67.9	38.8	282.7		130.8	43.6
15	Floor 28	72.8	41.6	329.6		140.7	46.9
16	Floor 27	77.6	44.3	379.8		**150.4**	50.1
17	Floor 26	82.2	47.0	433.0		159.8	53.3
18	Floor 25	86.8	49.6	489.4		169.1	56.4
19	Floor 24	91.2	52.1	548.7		178.0	59.3
20	Floor 23	95.6	54.6	611.0		186.8	62.3
21	Floor 22	99.7	57.0	676.1		**195.3**	65.1
22	Floor 21	103.8	59.3	743.9		203.6	67.9
23	Floor 20	107.8	61.6	814.5		211.6	70.5
24	Floor 19	111.6	63.8	887.6		219.5	73.1
25	Floor 18	115.4	65.9	963.3		227.0	75.7
26	Floor 17	119.0	68.0	1041.4		234.4	78.1
27	Floor 16	122.5	70.0	1121.9		241.5	80.5
28	Floor 15	125.9	71.9	1204.7		248.4	82.8
29	Floor 14	129.1	73.8	1289.8		255.0	85.0
30	Floor 13	132.3	75.6	1376.9		261.5	87.1
31	Floor 12	135.3	77.3	1466.1		267.6	89.2
32	Floor 11	138.2	79.0	1557.3		273.6	91.2
33	Floor 10	141.1	80.6	1650.4		279.3	93.1
34	Floor 9	143.7	82.1	1745.3		284.8	94.9
35	Floor 8	146.3	83.6	1842.0		290.0	96.7
36	Floor 7	148.8	85.0	1940.4		295.1	98.3
37	Floor 6	151.1	86.3	2040.3		299.8	99.9
38	Floor 5	153.3	87.6	2141.8		304.4	101.5
39	Floor 4	155.4	88.8	2244.7		308.7	102.9
40	Floor 3	157.4	89.9	2348.9		312.8	104.3
41	Floor 2	159.3	91.0	2454.5		316.6	105.5
42	Floor 1	161.0	92.0	2561.2		320.3	106.8

Results Sheet1 Ready 100%

38.2 Ricorso strutturale

44 iniziare esaminando la risposta strutturale di edifici sotto carichi laterali, concentrandosi su tre tipi distinti di disegni strutturali: subsistema albero, parete cesoia e muro a taglio troncato. Per ciascuno, discuteremo le loro funzionalità, vantaggi e svantaggi, Tabella 38.1.

38.2.1 Sottosistema di albero

45 Questa struttura centralizzata trasferisce carichi laterali attraverso diaframmi del pavimento, agendo come un cantilever verticale resiste a momenti di taglio e flessione. Fornisce inoltre un'eccellente resistenza ai carichi torsionali grazie alla sua posizione centrale, e la

COPIA DI REVISIONE

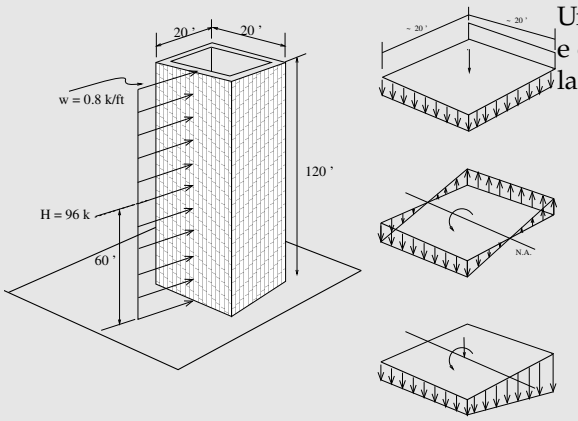
sua elevata rigidità riduce significativamente la deflettorazione degli edifici sotto i carichi laterali.

46 In termini di funzionalità, ospita la circolazione verticale (ascensore, scale) e servizi essenziali. Il nucleo centrale è spesso situato al centro, migliorando la stabilità e fornendo un sistema centralizzato di resistenza al carico.

47 I principali vantaggi includono elevata rigidità, che riduce la deflettorazione laterale, forte resistenza torsionale e la capacità di combinare ruoli strutturali e funzionali. Tuttavia, i principali svantaggi sono la complessità del design, in quanto l'integrazione di servizi e elementi strutturali può essere intricata, e un significativo utilizzo dello spazio, che possono influenzare il layout architettonico.

38.2.1.1 Ex 38.4: Sottosistema di albero

Adattato da Lin e Stotesbury, 1981 Structural Concepts and Systems for Architects and Engineers.



Un albero in cemento armato è alto 20 ft, 120 piedi e con pareti spesse 1 ft. È sottoposto a una forza laterale di 0,8 k/ft. Determinare gli stress.

1. Confrontando questa struttura con quella analizzata in setto. 38.2.2.1 il carico verticale totale che agisce sulla base è ora aumentato a

$$V = 4(400) = 1,600 \text{ k}$$

2. Come in precedenza, il momento massimo e la cinghia sono 5,760 k.ft e 96 k rispettivamente.
3. Il momento dell'inerzia per una sezione tubolare è

$$I = \Sigma \frac{bd^3}{12} = \frac{(20)(20)^3}{12} - \frac{(18)(18)^3}{12} = 4,600 \text{ ft}^4$$

4. Le tensioni flessografiche massime:

$$\sigma_{fl} = \pm \frac{MC}{I} = \pm \frac{(5,760) \text{ k.ft}(20/2) \text{ ft}}{(4,600) \text{ ft}^4} = \pm 12.5 \text{ ksf} = \pm 87 \text{ psi}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

5. Lo stress medio della cesoia è

$$\tau = \frac{V}{A} = \frac{(96)\text{ k}}{2(20)(1)\text{ ft}^2} = 2.4\text{ ksf} = 17\text{ psi}$$

6. Il carico verticale di 1.600 k produce uno stress assiale

$$\sigma_{ax} = \frac{P}{A} = \frac{-(1{,}600)\text{ k}}{(4)(20)(1)\text{ ft}^2} = -20\text{ ksf} = -140\text{ psi}$$

7. Le tensioni totali sono quindi

$$\sigma = \sigma_{ax} + \sigma_{fl}$$
$$\sigma_1 = -140 + 87 = -53\text{ psi}$$
$$\sigma_2 = -140 - 87 = -227\text{ psi}$$

così non abbiamo alcun stress trasile, e quelle sollecitazioni sono molto meglio di quelli ottenuti da un unico muro di taglio.

38.2.2 Muro di taglio

48 I carichi laterali vengono trasferiti attraverso diaframmi a parete verticali, resistendo efficacemente alle forze della taglio e ai momenti di piegatura. Questo disegno fornisce anche una sostanziale rigidità per controllare le deflettenze laterali.

49 Le pareti funzionano principalmente come elementi strutturali, ma possono incorporare funzioni minori come partizioni. La flessibilità di posizionamento consente la posizione della parete al perimetro dell'edificio o internamente.

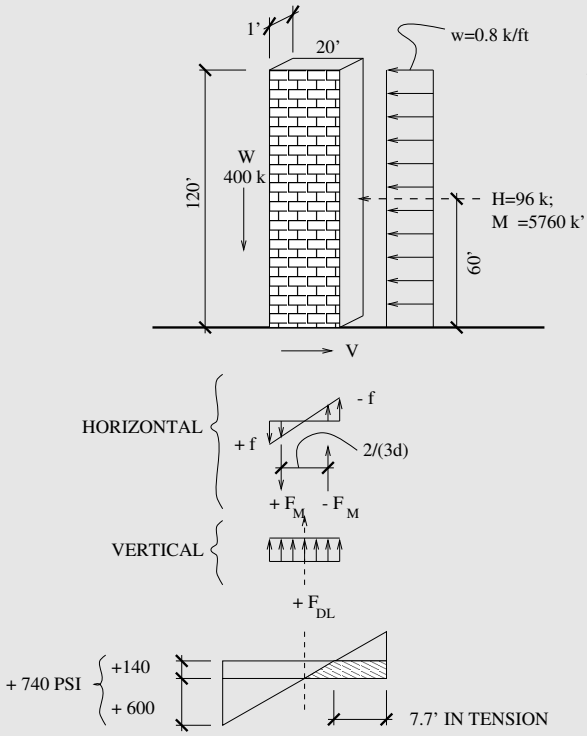
50 I suoi vantaggi includono una resistenza efficiente alle forze laterali, semplicità nella progettazione e costruzione rispetto ai sistemi più complessi, e la flessibilità da posizionare strategicamente per ottimizzare la resistenza al carico e l'utilizzo dello spazio. Tuttavia, gli svantaggi includono potenziali limitazioni sui posizionamenti delle finestre e delle porte e la resistenza limitata torsionale a meno che non si trovi in posizione centrale.

38.2.2.1 Ex 38.5: Cesoia in cemento

Adattato da Lin e Stotesbury, 1981 Structural Concepts and Systems for Architects and Engineers.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Consideriamo una parete in cemento armato larga 20 ft, spessa 1 ft e alta 120 piedi con un carico verticale di 400 k che agisce sulla base. Come risultato del vento, assumiamo una forza orizzontale uniforme di 0,8 kip/ft di altezza verticale che agiscono sul muro. È necessario calcolare le tensioni flessografiche e gli stress di taglio nella parete per resistere al carico del vento.

1. Massima forza di taglio e momento di piegatura alla base

$$V_{max} = wL = (0.8)\text{ k.ft}(120)\text{ ft} = 96\text{ k}$$

$$M_{max} = \frac{wL^2}{2} = \frac{(0.8)\text{ k.ft}(120)^2\text{ ft}^2}{2} = 5,760\text{ k.ft} \tag{38.1}$$

2. L'eccentricità risultante è

$$e_{\text{Actual}} = \frac{M}{P} = \frac{(5,760)\text{ k.ft}}{(400)\text{ k}} = 14.4\text{ ft}$$

3. L'eccentricità critica è

$$e_{cr} = \frac{L}{6} = \frac{(20)\text{ ft}}{6} = 3.3\text{ ft} < e_{\text{Actual}} N.G.$$

così ci sarà tensione alla base.

4. Il momento dell'inerzia del muro è

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(1)\text{ ft}(20)\text{ ft}^3}{12} = 667\text{ ft}^4$$

5. Le tensioni di flessione massima saranno

$$\sigma_{max} = \pm\frac{Mc}{I} = \frac{(5,760)\text{ k.ft}(10)\text{ ft}}{(667)\text{ ft}^4} = \pm(86.5)\text{ ksf} = \pm(600)\text{ psi}$$

6. Lo stress medio di taglio è

$$\tau = \frac{V}{A} = \frac{(96)\text{ k}}{(1)(20)\text{ ft}^2} = 4.8\text{ ksf} = 33.3\text{ psi}$$

Un cemento con rinforzo nominale della cinghia può trasportare almeno 100 psi in shear, quelle strisce di taglio calcolate sono ammissibili.

7. Alla base della parete, le sollecitazioni assiali saranno

$$\sigma = \frac{-(400)\text{ k}}{(1)(20)\text{ ft}^2} = (20)\text{ ksf} = \approx -140\text{ psi}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

8. Le sollecitazioni massime saranno così:

$$\sigma_1 = -140 + 600 = 460 \text{ psi} \quad \text{(Tension)}$$
$$\sigma_2 = -140 - 600 = -740 \text{ psi} \quad \text{(Compression)}$$

9. Lo stress della compressione 740 psi può essere facilmente sostenuta dal cemento, come allo stress trasile di 460 psi, dovrebbe essere resistito da qualche rinforzo d'acciaio.
10. Dato che tali stress sono *servizio* stress e non fattori, adottiamo l'approccio WSD e usiamo uno sforzo ammissibile di 20 ksi, che a sua volta sarà aumentato da 4/3 per carico sismico e vento,

$$\sigma_{all} = \frac{4}{3}(20) = 26.7 \text{ ksi}$$

11. La distribuzione dello stress è lineare, la compressione ad un'estremità, e tensione all'altra. La lunghezza della zona di tensione è data da (triangoli simili)

$$\frac{x}{460} = \frac{20}{460+740} \Rightarrow x = \frac{460}{460+740}(20) = 7.7 \text{ ft}$$

12. La forza di trazione totale all'interno di questo blocco triangolare è

$$T = \frac{1}{2}(460) \text{ ksi}(7.7 \times 12) \text{ in} \underbrace{(12) \text{ in}}_{\text{width}} = 250 \text{ k}$$

13. La quantità totale di rinforzo in acciaio necessaria è

$$A_s = \frac{(250) \text{ k}}{(26.7) \text{ ksi}} = 9.4 \text{ in}^2$$

Questa quantità di rinforzo dovrebbe essere fornita a entrambe le estremità della parete dal momento che la vento o terremoto possono agire in qualsiasi direzione. Inoltre, le fondamenta dovrebbero essere progettato per resistere alle forze di sollevamento trazione (forse utilizzando pile).

38.2.3 Muro di taglio intagliato

51 I carichi laterali vengono trasferiti attraverso diaframmi a pavimento agli elementi troncati, combinando la forza delle pareti della taglio con l'efficienza delle capriate nella resistenza alle forze assiali. Questa configurazione fornisce elevata rigidità, riducendo efficacemente le deflettenze.

52 Ottimizza i percorsi di carico attraverso bracci diagonali, creando più efficienti percorsi di distribuzione della forza.

53 La parete a taglio troneggiata combina i vantaggi delle pareti e delle travature di taglio, migliorando l'efficienza della distribuzione del carico e fornendo prestazioni sismiche migliorate attraverso le sue capacità di duttilità e dissipazione dell'energia. Tuttavia, il design può essere complesso, richiedendo un'attenta pianificazione e dettaglio. Inoltre

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

gli elementi di frenatura possono imporre vincoli architettonici, limitando l'utilizzo dello spazio e la flessibilità progettuale architettonica.

Tabella 38.1: Confronto del sottosistema dell'albero, parete della cinghia e muro di taglio trussed

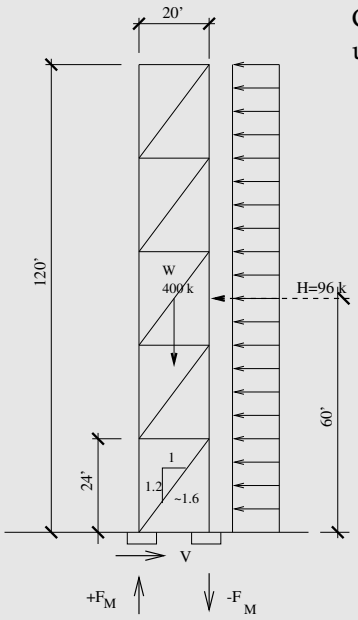
Caratteristica	Sistema di alberi	Muro di taglio	Trussed Shear Wall
Risposta strutturale	Alta rigidità, ottima resistenza torsionale, trasferimento di carico centralizzato	Alta rigidità, resistenza efficace della cinghia e del momento	Alta rigidità, piste di carico efficienti, maggiore resistenza al taglio e al momento
Funzionalità	Multifunzionale (strutturali + servizi)	Struttura primaria, partizionamento	Struttura primaria con una maggiore distribuzione del carico
Vantaggi	Alta resistenza torsionale, multiuso, stabilità centralizzata	Efficace resistenza al carico, semplicità, flessibilità di posizionamento	Maggiore rigidità e resistenza, distribuzione efficiente del carico, prestazioni sismiche migliorate
Svantaggi	Complessità progettuale, utilizzo di spazi	vincoli architettonici, resistenza meno torsionale	Progettazione e costruzione complessi, vincoli architettonici

38.2.3.1 Ex 38.6: Muro di taglio intagliato

Adattato da Lin e Stotesbury, 1981 Structural Concepts and Systems for Architects and Engineers.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Consideriamo lo stesso problema precedentemente analizzato, ma utilizzare un parete di taglio trussed invece di una concreta.

1. Utilizzo del momento massimo 5,760 kip-ft (Eq. 38.1), possiamo calcolare la compressione e la tensione nelle colonne per un braccio leva di 20 ft.

$$F = \pm \frac{(5,760)\ \text{k.ft}}{(20)\ \text{ft}} = \pm 288\ \text{k}$$

2. Se ora aggiungiamo l'effetto del carico verticale di 400 kip, le forze sarebbero be

$$C = -\frac{(400)\ \text{k}}{2} - 288 = -488\ \text{k}$$
$$T = -\frac{(400)\ \text{k}}{2} + 288 = 88\ \text{k}$$

3. La forza nella diagonale che deve resistere a una base di taglio 96 kip è (triangoli simili)

$$\frac{F}{96} = \frac{\sqrt{(20)^2 + (24)^2}}{20} \Rightarrow F = \frac{\sqrt{(20)^2 + (24)^2}}{20}(96) = 154\ \text{k}$$

4. Il disegno potrebbe essere modificato per non avere forze di trazione nelle colonne aumentando la larghezza della base (attualmente a 20 ft).

38.2.4 Deflettori laterali

Sezione adattata Lin e Stotesbury, 1981 Structural Concepts and Systems for Architects and Engineers.

54 Anche a fasi di progettazione schematiche o preliminari, è importante stimare le deflettenze laterali degli edifici alti per i seguenti motivi

1. Le deflettori laterali sono spesso limitate da requisiti di codice, ad esempio $\Delta < h/500$ dove h è l'altezza della storia o dell'edificio. è importante perché gli occupanti non devono sperimentare movimenti orizzontali scomodi.
2. Un edificio che deflette gravemente sotto forze laterali può avere problemi di danno associato alle vibrazioni (come con deflettori verticali di travi).
3. Attraverso la valutazione della deflettorazione, si può anche avere un'idea del carico orizzontale relativo trasportato dai vari sottosistemi verticali in un edificio (cioè quanto è portato dall'albero rispetto ai frame). Poiché tutti i sistemi sono collegati,

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

devono muoversi insieme e attraverso la loro rigidità (deformazione per carico unitario) possiamo determinare il contributo di ogni sottosistema.

38.2.4.1 Corto parete

55 In strutture corte (come con raggi corti), deviazioni di taglio, Fig. 38.14 domina. Per un

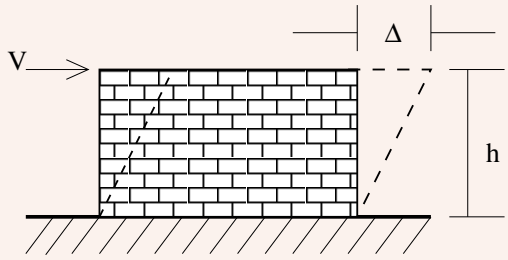


Figura 38.14: Deformazione della cesoia in un edificio breve,(Lin e Stotesbury, 1981)

carico concentrato (da Eq. 23.7)

$$\Delta \approx \frac{1.2Vh}{GA}$$

dove per cemento e acciaio $G \approx \frac{2}{5}E$.

38.2.4.2 Tallaggio parete

56 In alternativa, in un edificio alto deformazioni flessografiche, Fig. 38.15, sono predominanti.

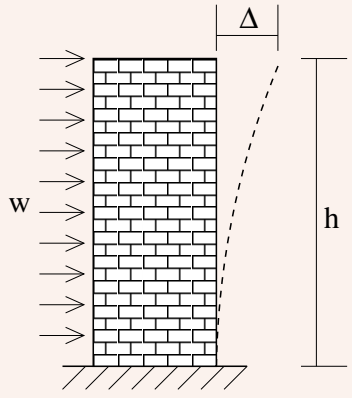


Figura 38.15: Deformazione flessorale in un edificio alto, (Lin e Stotesbury, 1981)

$$\Delta \approx \frac{wh^4}{8EI}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

e il momento dell'inerzia $I = \frac{bh^3}{12}$ per sezioni rettangolari. Questo è semplicemente lo spostamento alla punta di un fascio a baldacchino sottoposto ad un carico uniforme.

38.2.4.3 Mura e lintel

57 Quando due pareti sottili sono collegate da (pesanti) lintels, l'intero sottosistema può essere fatto per agire come un cantilever sostenuto dalle fondamenta e deflettori sarà piccolo. Tuttavia, se abbiamo dei linteli leggeri, la loro deformazione è più grande di quelle delle pareti, Fig. 38.16.

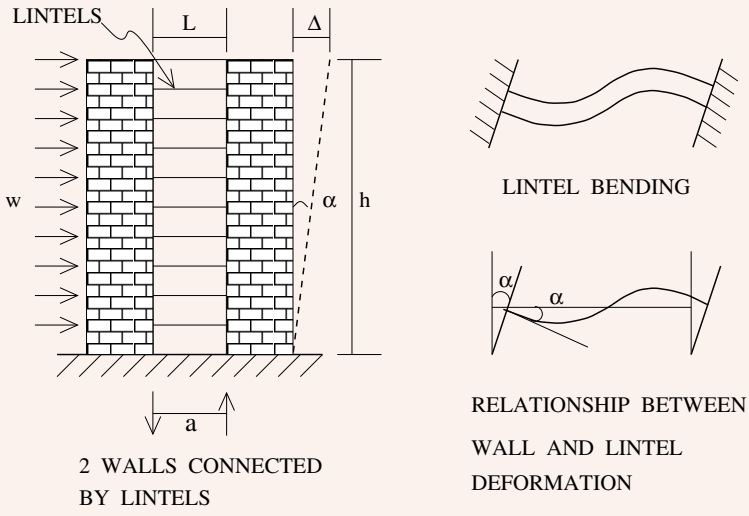


Figura 38.16: Diffusore in una struttura di costruzione composta da due pareti e rivestimenti snelle, (Lin e Stotesbury, 1981)

58 In questo caso si possono stimare deflezioni da:

$$M_{max} = \frac{wh^2}{2}$$
$$T = C = \frac{M}{a}$$
$$V/\text{Lintel} \approx \frac{T}{\#\text{ of Lintels}}$$
$$\alpha_{\text{wall}} = \alpha_{\text{lintel}} \approx \frac{VL^2}{12EI}$$

e

$$\delta \approx \alpha h$$

COPIA DI REVISIONE

38.2.4.4 Cornici

59 La dissoluzione di un telaio rigido è essenzialmente causata dalla tranciatura fra storie che producono cesoie verticali nelle traverse. 38.17.

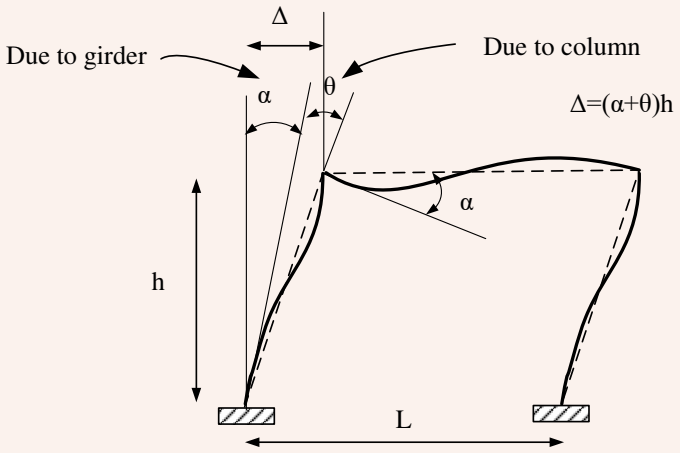


Figura 38.17: Deformazione di un piegato (Lin e Stotesbury, 1981)

60 La deformazione per la prima storia all'articolazione esterna può essere approssimata da

$$\Delta_{col} = \frac{V_{col_E} h^3}{12 E I_{col_E}}$$

$$\Delta_{gdr} = \frac{V_{gdr} L^2 h}{12 E I_{gdr}} = \frac{2 V_{col_E} L h^2}{12 E I_{gdr}}$$

$$\Delta_{tot_E} = \Delta_{col_E} + \Delta_{gdr} = \frac{V_{col_E} h^2}{12E} \left[\frac{h}{I_{col_E}} + \frac{2L}{I_g dr} \right]$$

61 Per l'articolazione interna:

$$\Delta_{col} = \frac{V_{col_I} h^3}{12 E I_{col_I}}$$

$$\Delta_{gdr} = \frac{V_{gdr} L^2 h}{12 E I_{gdr}} = \frac{2 V_{col_I} L h^2}{12 E I_{gdr}}$$

$$\Delta_{tot_I} = \Delta_{col_I} + \Delta_{gdr} = \frac{V_{col_I} h^2}{12E} \left[\frac{h}{I_{col_I}} + \frac{L}{I_g dr} \right]$$

Dove sottoscritto E e I si riferiscono a colonne esterne e interne. Lo spostamento totale sarà

$$\Delta_{tot} = n \frac{\Delta_{tot}}{2}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove n è il numero di storie, e Δ_{tot} è per le giunzioni interne o esterne.

62 Le due principali fonti di deflettorazione laterale sono la flessione colonna in resistenza alla tranciatura orizzontale e travi a resistono al taglio verticale, Fig. 38.18.

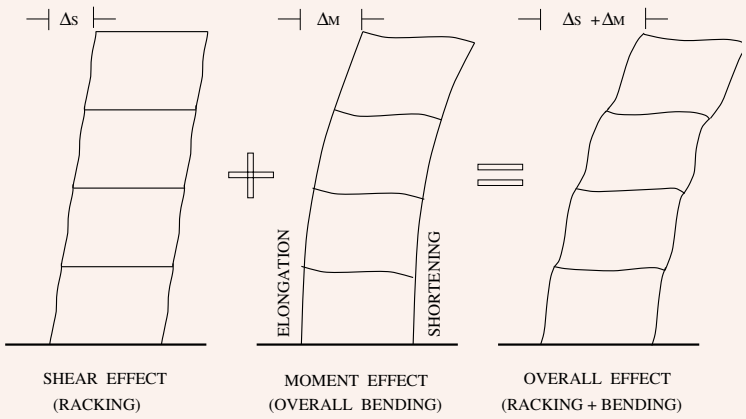


Figura 38.18: Sfilettatura della cinghia e flessorale di un sottosistema rigido del telaio, (Lin e Stotesbury, 1981)

63 Un carico verticale non simmetrico causerà deflezione laterale in cornici, Fig. 38.19.

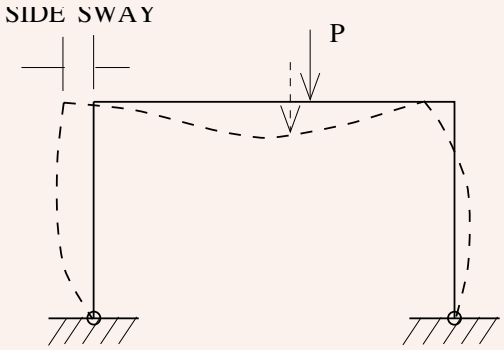


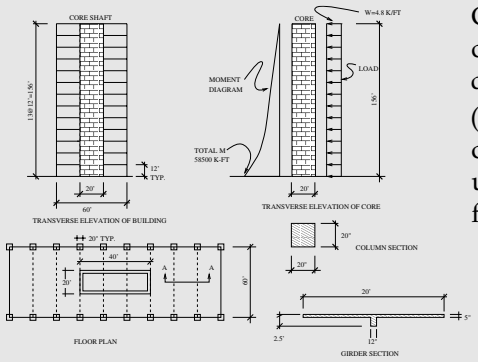
Figura 38.19: Sflessione laterale da carico verticale non simmetrico, (Lin e Stotesbury, 1981)

38.2.4.4.1 Ex 38.7: Sfilettatura approssimativa trasversale

Adattato da Lin e Stotesbury, 1981 Structural Concepts and Systems for Architects and Engineers.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Gli elementi di ridimensionamento laterali sono l'albero centrale del cemento (20ft×40 piedi in sezione e composto da quattro pareti 12-in) e le cornici di cemento armato prefornite (composte da 12in×30in T travi, $I_{gdr} = 3.64$ ft^4, e colonne di cemento rinforzate quadrate da 20 pollici). Consideriamo un carico di vento di 4,8 k/ft nella direzione trasversale e facciamo le seguenti ipotesi:

1. Le colonne sono di proprietà e altezza setali uniformi per tutte le storie.
2. Le pareti degli alberi sono di spessore uniforme per tutte le storie.
3. Il carico del vento è uniforme sopra l'altezza dell'edificio.

La soluzione procede come segue:

1. Determinare la deformazione flessorale della parte superiore dell'albero (possiamo trascurare deformazioni della cinghia poiché l'albero è snello):

$$\Delta = \frac{wh^4}{8EI}$$

$$I = \frac{b_1 d_1^3 - b_2 d_2^3}{12}$$

$$= \frac{(41)(21)^3 - (39)(19)^3}{12} = 9,400 \text{ ft}^4$$

$$E = 3 \times 10^6 \text{ psi} = 432,000 \text{ ksf}$$

$$\Delta = \frac{(4.8) \text{ k.ft}(156)^4 \text{ ft}^4}{8(432,000) \text{ ksf}(9,400) \text{ ft}^4} = 0.087 \text{ ft}$$

$$\frac{\Delta}{h} = \frac{0.087}{156} = \frac{1}{1,800} \checkmark$$

Il $\frac{\Delta}{h}$ Il rapporto è molto meno di 1/500 come consentito nella maggior parte dei codici edili, e si trova all'interno dell'indice abituale per edifici in cemento, che varia tra 1/1.000 e 1/2.500.

Se lo spessore della parete è ridotto, e se le aperture delle porte sono considerate, la deflezione sarà corrispondentemente più piccola.

La deviazione a causa del momento aumenta rapidamente in cima, il valore di 1/1.800 indica solo *media media* indice deriva per l'intero edificio, mentre il *storia* indice deriva può essere più alto, soprattutto per il piano superiore.

COPIA DI REVISIONE

2. Se si considera la deviazione della parte superiore del telaio, si presume che ogni fotogramma prenda 1/9 del carico totale e della cinghia, trascurando l'innesto delle colonne, quindi:

$$\Delta = \frac{V_{col_E} h^2}{12E}\left[\frac{h}{I_{col_E}} + \frac{2L}{I_g dr}\right]$$
$$I_{col} = \frac{bh^3}{12} = \frac{(20/12)(20/12)^3}{12} = 0.64 \text{ ft}^4$$
$$I_{gdr} = 3.64 \text{ ft}^4$$
$$V_{col_I}^{\text{ground}} = \frac{(4.8) \text{ k.ft}(156) \text{ ft}}{(2)(9)} = 41.7 \text{ k/col}$$
$$\Delta = \frac{(41.7) \text{ k}(12)^2}{12(432,000) \text{ ksf}}\left[\frac{(12) \text{ ft}}{(0.64) \text{ ft}^4} + \frac{2(60) \text{ ft}}{(3.46) \text{ ft}^4}\right]$$
$$= 0.00116(18.8 + 34.7) = 0.062 \text{ ft}$$

3. Poiché la storia deriva varia con la cesoia nella storia, che diminuisce linearmente alla parte superiore, la deriva media sarà 0.062/2 = 0.31 ft per storia e la deviazione in cima all'edificio è approssimativamente

$$\Delta = (13)(0.031) = 0.40\text{ft}$$

che indica un rapporto di derivazione

$$\text{Drift Ratio for Building} = \frac{(0.4) \text{ ft}}{(156) \text{ ft}} = \frac{1}{400}$$
$$\text{Drift Ratio for Ground Floor} = \frac{(0.062) \text{ ft}}{(12) \text{ ft}} = \frac{1}{194}$$

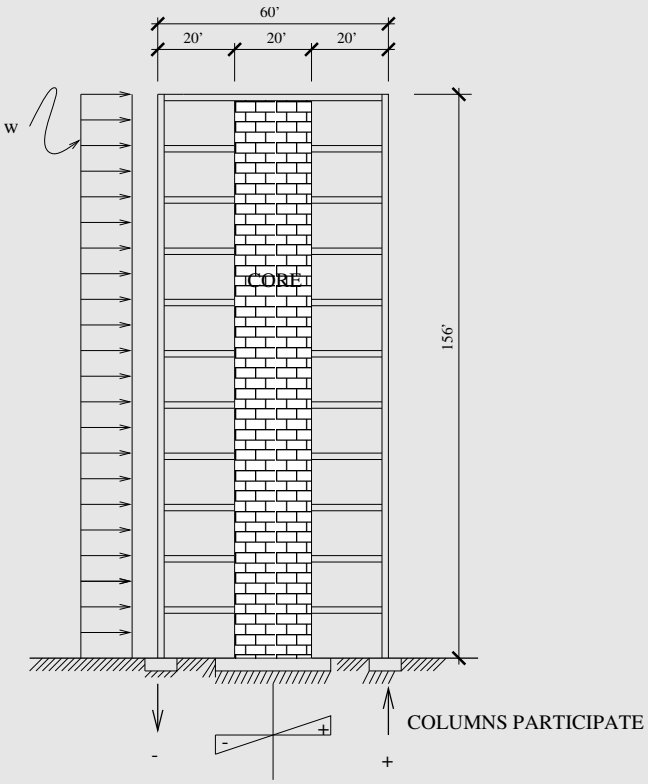
4. Comparare la deflezione del telaio 0.40 ft con la deflezione dell'albero 0.087 ft, si vede che il telaio è circa cinque volte più flessibile dell'albero; inoltre la cornice non sarebbe abbastanza rigida da trasportare tutto il carico laterale da sé. Proporzionando il carico laterale alle relative rigidità, la struttura avrebbe portato circa 1/6 del carico e i restanti 5/6 saranno trasportati dall'albero.

   Aumentare la dimensione della colonna irrigiderà il telaio, ma per essere veramente efficace, anche la rigidità del trave dovrà essere aumentata, dal momento che le travi contribuiscono circa 2/3 della deflettorazione. Si noti che le forme deflette dell'albero e dei telai sono abbastanza differenti, in modo che il confronto semplice sopra di deflettori superiori non è una valutazione accurata.

   Infine, non abbiamo studiato l'effetto dell'albero irrigidito dall'asta colonne esterne, rigidamente collegate alle pareti dell'albero e agiranno con l'asta come unità.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Questo sarebbe abbastanza efficace come i diaframmi del pavimento orizzontale si terrà e costringerli a deflettare insieme.

5. In sintesi, questo sembra essere un layout abbastanza efficiente, ulteriori analisi ne affinare e ottimizzare.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



L'elencolia di Albrecht Dürer *di nuovo (1514)*

Melencolia I serve come metafora dell'analisi approssimativa, dove l'intuizione, la stima e il ragionamento geometrico giocano un ruolo cruciale nella risoluzione dei problemi.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 39

Progetti preliminari

Abstract

Attraverso questo capitolo, prendiamo pausa e applichiamo alcuni dei concetti (a volte molto semplici) precedentemente affrontati per eseguire l'analisi parziale preliminare/design di alcune strutture iconiche.

Ciascuno di questi studi è stato tratto dalla letteratura disponibile, e adattato (adattando la notazione) per le esigenze di questo libro.

39.1 Ex 39.1: Aeroporto di Dulles 1485
39.2 Ex 39.2: Torre Eiffel 1492
39.3 Ex 39.3: Magazzini Generali 1500
39.4 Ex 39.4: Ponte George Washington . 1504
39.5 Ex 39.5: Progettazione di un arco a due punte 1511
39.6 Ex 39.6: Cambiamento di temperatura in un arco 1519
39.7 Ex 39.7: Arco di Parabolico con variazione del secant *I* 1522

39.1 Ex 39.1: Aeroporto di Dulles

Adattato da Howard, 1966 Structure: An Architect's Approach e Whitehead, 2020 «*Sarinen's Shells: The Evolving Influence of Engineering and Construction*».

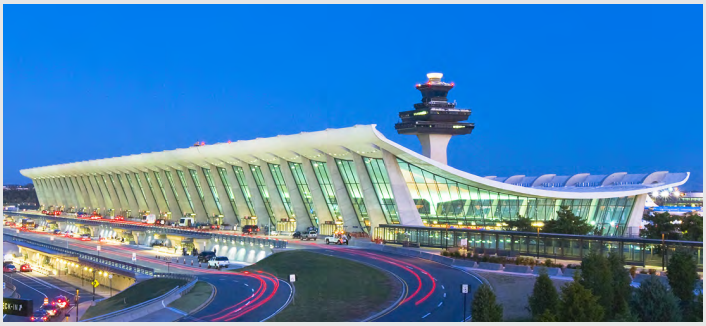
Questa iconica struttura americana, progettata da Eero Saarinen (che ha anche progettato St Louis Gateway Arch quasi allo stesso tempo), coniuga grande estetica con funzionalità strutturali.

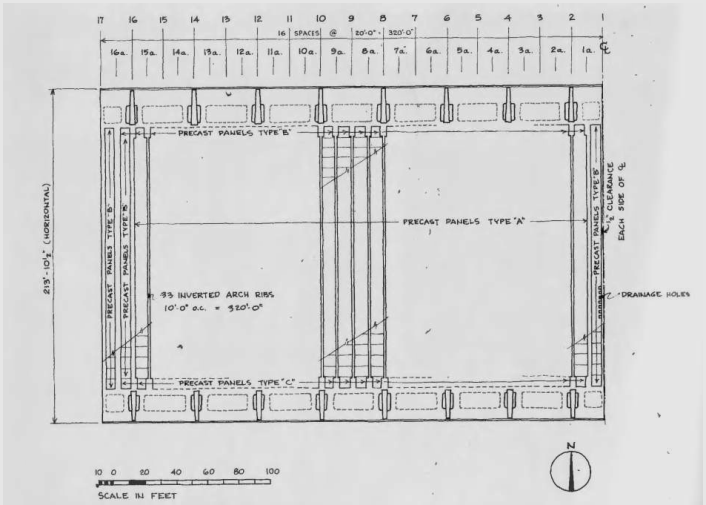
COPIA DI REVISIONE

Designazione delle merci

La struttura ha 16 colonne su ogni lato della stanza aperta, distanziate 40 piedi (12 m) a parte, sporgenti verso l'esterno con grandi basi per contribuire a resistere contro la spinta e il tetto. Diverse altezze della colonna hanno creato un tetto curvato appeso che ha coperto l'intera superficie di 90.000 piedi quadrati (8,361 m^2), con una geometria che è stata definita dalla curva catenaria di cavi a sospensione uniformemente caricati.

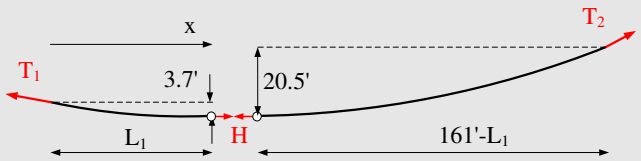
I cavi pensili sono stati sospesi tra i due piani a spigolo, curvati verso l'alto, in posizione di fusione e lastre di cemento che si collegavano alle colonne. Ad ogni 10 piedi (3 m) di lunghezza lungo il perimetro della lastra bordo, due coppie di cavi in acciaio da 1 pollice (2.54 cm) sono stati sospesi 160 piedi (48.8 m) attraverso l'arco all'altro fascio del bordo. Successivamente, 1800 pannelli prefabbricati leggeri con piccoli ganci metallici sui lati sono stati posizionati uno dopo l'altro sui cavi. I cavi erano pretensionati alla geometria funicolare esatta, poi il tetto è stato pesato giù da sacchetti di sabbia fino a quando entrambi i cavi (nel divario tra i pannelli) e la piastra di topping sui pannelli potrebbe essere racchiusa in un leggero cemento versato. Non c'era alcuna formatura necessaria sotto il tetto — in modo da dire, i pannelli erano la struttura e le forme per la lastra di topping.





COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Piano parziale del tetto

Tensione

Data la piccola tazza, possiamo *supporre* che abbiamo una forma parabolica. Al punto del massimo sag (ancora da determinare), la tensione nel cavo è semplicemente uguale a h. Considerando i diagrammi del corpo liberi di sinistra e destra, e prendendo momenti rispetto ai supporti:

$$3.7H = w\frac{L_1^2}{2}$$
$$20.5H = w\frac{(161 - L_1)^2}{20.5}$$

Equando, otteniamo $L_1 = 48.0'$ e $H = 311w$

Ai supporti gli angoli sono

$$\alpha = \arctan\frac{V}{H} = \arctan\frac{48w}{311w} = 8.77°$$
$$\beta = \arctan\frac{V}{H} = \arctan\frac{(161-48)w}{311w} = 19.97°$$

Le tensioni di sinistra e destra sarebbero così

$$T_1 = \frac{H}{\cos\alpha} = \frac{311w}{\cos 8.77°} = 315w$$
$$T_2 = \frac{H}{\cos\beta} = \frac{311w}{\cos 19.97°} = 331w$$

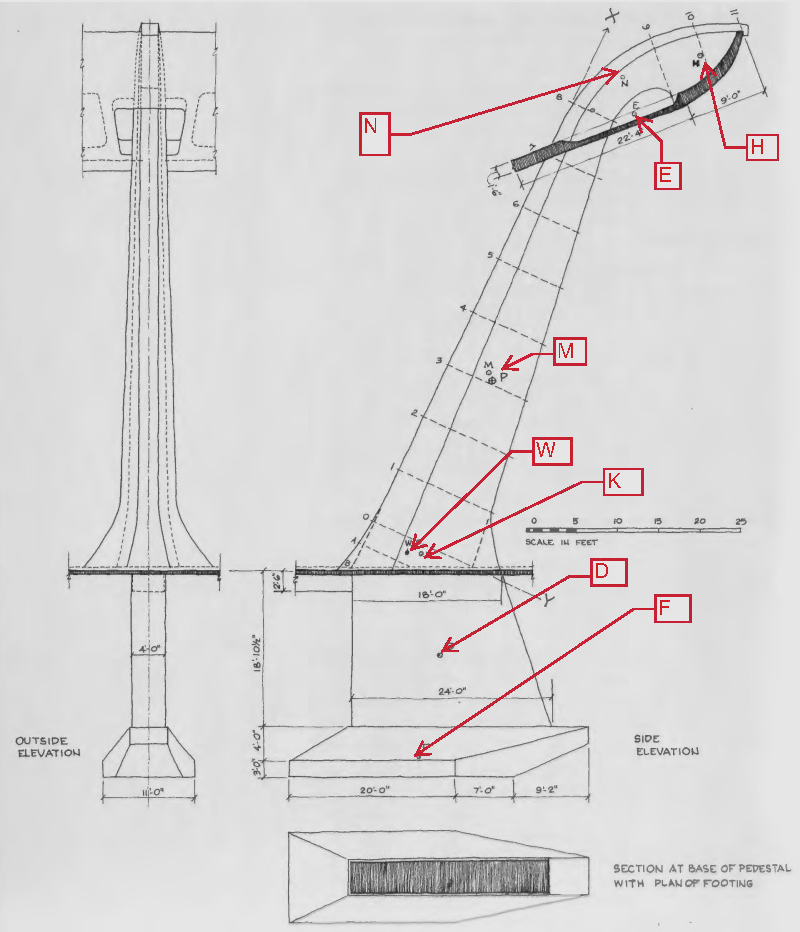
Il peso w è 0.33 kip/ft di span. Così la tensione massima sarà $T_{max} = (331)(0.33) = 109$ kips. Durante la costruzione questo sarebbe circa il carico trasportato dai due ciondoli di ponte di 1-in diametro, che sono buoni per 122 kips ciascuno, dando un fattore di sicurezza di 244/109, or 2.25.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Pesi e Centroidi

Non calcoliamo i momenti e le cesoie nel fascio del bordo, perché non influiscono sull'immagine generale della cornice principale che stiamo analizzando. Tuttavia, le loro proporzioni per il lato nord, si estende a 40 ft; profondità 32 ft, misurata parallela alla linea di forza principale) li qualifica come *travi profonde*.
I componenti orizzontali e verticali del tetto sospeso sono ora noti (ma devono essere moltiplicati per 4 perché i telai sono 40 ft, le costole solo 10 ft.c.). Abbiamo bisogno dei pesi e centriidi della trave di bordo e telaio per completare l'immagine[a]. Il materiale è in pietra di cemento che pesa 0,15 kip/ft^3. Le dimensioni principali sono riportate di seguito.
Non calcoliamo i momenti e le cesoie nel fascio del bordo, perché non influiscono sull'immagine generale della cornice principale che stiamo analizzando.



[a]Di seguito, faccio rapporto ai calcoli eseguiti dall'ingegnere strutturale negli anni '60, oggi il programma CAD si sarebbe facilmente eseguito tali compiti. Tuttavia, dopo il calcolo è una buona revisione dell'integrazione numerica e delle statiche di base.

Tuttavia, le loro proporzioni per il lato nord, la portata di 40 ft; profondità 32 ft, misurata parallela alla linea della forza principale) li qualificano come *travi profonde*. I componenti orizzontali e verticali del tetto sospeso sono ora noti (ma devono essere moltiplicati per 4 perché i telai sono 40 ft, le costole solo 10 piedi o.c.). Abbiamo bisogno dei pesi e centriidi del fascio bordo e della cornice per completare l'immagine. Il materiale è in pietra di cemento che pesa 0,15 kip/ft^3. Le dimensioni principali sono riportate di seguito. Il fascio del bordo:

$$(22.3)(1.5) + (9.0)(1.3) = 45.1 \text{ ft}^2 \times 37 \text{ ft} = 1,670 \text{ ft}^3$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Substrato:

Hole around column	(15)(5)(1.5)	= – 112
Recess	(28)(14)(1.0)	= – 392
Total		= – 504

Total weight

$$1,670 - 504 = 1,166 \text{ ft}^3 \times 0.15 \text{ kip/ft}^3 = 175 \text{ kip}$$

Il centroide è stimato a punto E. La struttura, o la colonna, è più noiosa. Può essere divisa in cinque parti: l'albero principale, piramide più o meno troncata; una cuneo sul fondo; una gonna, o un flare, nella parte inferiore del collo; e la testa. Il volume dell'albero principale può essere trovato abbastanza accuratamente dalla formula prismoidale

$$\frac{1}{4}h(A_0 + 4A_4 + A_8)$$

che in questo caso dà 2,220 ft^{3}Ma abbiamo anche bisogno della posizione del centroide.

La regola di Simpson è un metodo numerico che approssima il valore di un componente definito utilizzando funzioni quadratiche.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

Dividiamo così la lunghezza dell'albero in otto parti uguali di nove sezioni 7 ft o.c. Le aree delle sezioni 0, 4 e 8 sono calcolate, le altre interpolate. Il centroide si trova con riferimento agli assi X e Y. Poiché i centroidi delle sezioni si trovano approssimativamente in una linea retta, non è necessario calcolare la distanza Y.

Section (1)	Area ft^2 (2)	Simpson Multiplier (3)	$f(Vol)$ (2)(3) (4)	Moment arm (5)	$f(M)_y$ (4)(5) (6)
0	68.7	1	68.7	0	0
1	60.6	4	242.4	1	242.4
2	52.7	2	105.4	2	210.8
3	45.2	4	180.8	3	542.4
4	38.3	2	76.6	4	306.4
5	32.1	4	128.4	5	642.0
6	26.5	2	53.0	6	318.0
7	21.3	4	85.2	7	596.4
8	16.4	1	16.4	8	131.2
Σ			956.2		2,989.6

Per una spaziatura s di 7 ft, il volume è

$$\text{Volume} = f(vol) \times \frac{s}{3} = 956.9 \text{ ft}^2 \times \frac{7}{3} \text{ ft} = 2,210 \text{ ft}^3$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Il centroide sarà così

$$\overline{X} = \frac{(s^2/3)\Sigma f(M)_y}{(s)\Sigma f(vol)} = 7.0 \times \frac{2,989.6}{956.9} = 21.9 \text{ ft}$$

Il volume della cuneo in fondo si trova calcolando l'area di sezione A e utilizzando la formula psichica.

$$V = \frac{h}{6}(A_0 + 4A_A + A_B) = \frac{6.0}{6}(68.7 + 4(42.0) + 0) = 237 \text{ ft}^3$$

e il centroide è a punto W.

Il volume della gonna è approssimativamente trovato moltiplicando l'area di un triangolo alto 8,5 ft, base da 2,5 piedi per un perimetro di 48.0 ft. [3] e il centroide a K

Al to, il volume del collo è approssimativamente l'area della sezione 8 moltiplicata per una lunghezza d'arco di 10.7 che dà 176 ft^3 e un centroide a N. La testa è calcolata dalle aree di sezioni A_9 = 22.8; A_{10} = 18.7; A_{11} = 3.2 e la formula prismoidale darà

$$\frac{10.8}{6}(22.8 + 4(18.7) + 3.2) = 182 \text{ ft}^3$$

Il centroide è stimato in H

Combinando questi volumi per trovare il totale del telaio fino al livello principale,

		Vol ft^3	$\overline{X}$	Vol $\times\overline{X}$ ft^4	$\overline{Y}$	Vol $\times\overline{Y}$ ft^4
Skirt	K	510	-1.0	-510	6.8	3,470
Wedge	W	237	-1.8	-427	5.2	1,234
Main Shaft	M	2,210	21.9	48,400	4.8	10,670
Neck	N	176	61.2	10,800	4.3	760
Head	H	182	67.5	12,280	11.5	2,090
		3,315		70,543		18,224

Hence,

$$\begin{aligned} \text{Total weight} &= 3,315 \times 0.5 = 497 \text{ k} \\ \overline{X}\text{for whole frame} &= \frac{70,543}{3,315} = 21.3 \text{ ft} \\ \overline{Y}\text{for whole frame} &= \frac{18,224}{3,315} = 5.51 \text{ ft} \end{aligned}$$

Il centroide è a P. Il peso del piedistallo è

$$\frac{18+24}{2}(19.0)(4.0) = 1,600 \text{ ft}^3 \times (0.15) \text{ k/ ft}^3 = 240 \text{ k}$$

e il centroide è a D.

Infine, il peso di piè di piede è circa 225 kips e il suo centroide è a F.

Riepilogo delle forze

Qui vengono mostrate le forze e i loro luoghi. $\Sigma F_y = 0$, la reazione verticale dello scisto deve essere 1286 kips, che si trova al centroide della zona del piè di pagina. Supponendo che la reazione

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

orizzontale dalla scistola agisce al centroide dell'elevazione di estremità proiettata del piè, si possono misurare le braccia del momento e l'ampiezza di questa reazione orizzontale calcolata dalla condizione $\Sigma M_O = 0$ con O il punto di intersezione della linea centrale dello strut e la linea d'azione della reazione verticale (In realtà le linee di azione delle reazioni verticali e orizzontali non possono agire attraverso i punti che abbiamo assunto. Se il risultante della reazione verticale si sposta a sinistra, la reazione orizzontale sarà più piccola e così la forza nello strut. Ciò che la figura mostra, quindi, è solo una prima approssimazione. La direzione e la natura delle forze è corretta; le loro linee di azione e magnitudine possono essere un po' diverse.)

Element	Force (Kips)	Moment arm (ft)	M (k-ft)
Footing F	225	2.0	450
Pedestal D	240	4.8	1,152
Pylon P	497	10.8	5,362
Edge beam E	175	28.0	4,900
Vertical roof L_V	149	13.2	1,966
Summation	$R_V = 1,286$		13,830
Horizontal roof L_H	410	49.5	-19,295

Il momento della reazione orizzontale R_H deve bilanciare questo

$$21R_H = 19,295 - 13,830 = 5,465 \Rightarrow R_H = 260 \text{ k}$$

E da allora $\Sigma F_H = 0$, il montante deve fornire una forza orizzontale $260 + 410 = 670$ kips.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Osserviamo che nonostante la ripida inclinazione dei piloni (non solo per ragioni estetiche), questo non era sufficiente a consentire al peso dei pilone di bilanciare il tiraggio dei cavi ed eliminare il momento alla loro base.

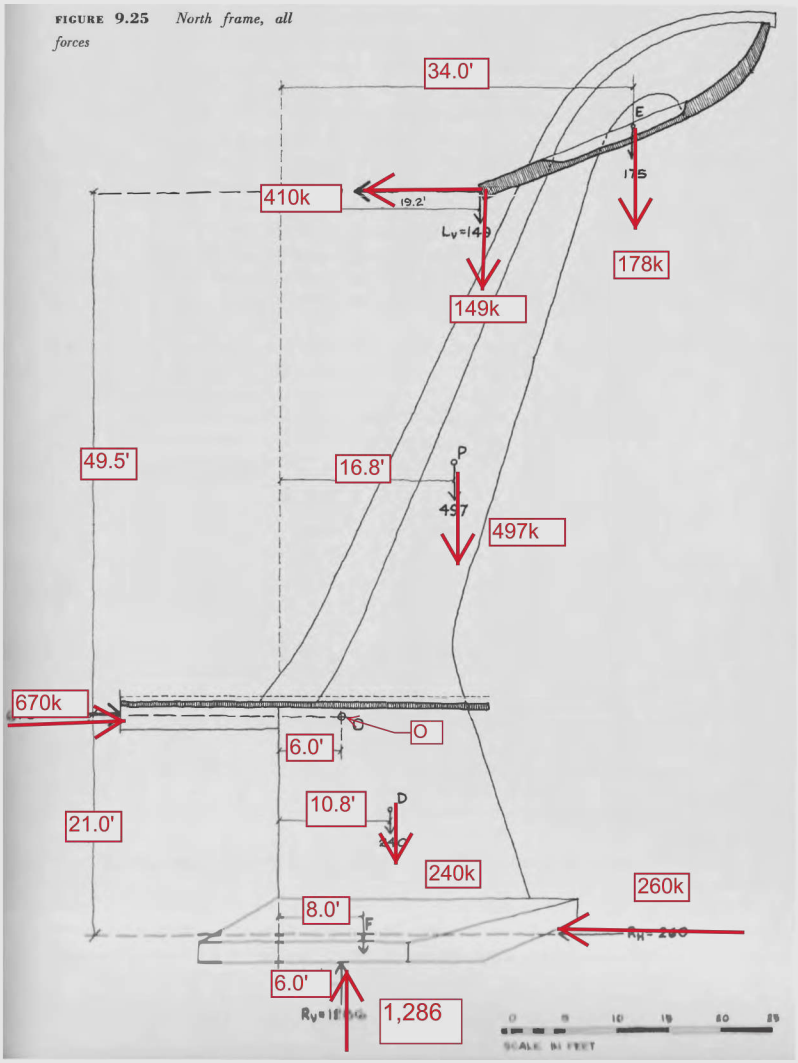


FIGURE 9.25 *North frame, all forces*

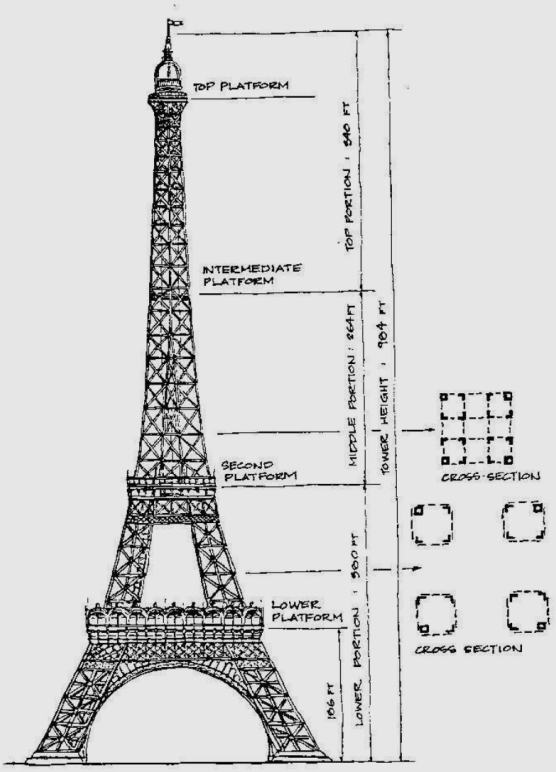
39.2 Ex 39.2: Torre Eiffel

La sezione seguente è riprodotta da Billington, 1983 Structural Studies.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Materiali e geometria



La torre è stata costruita in ferro battuto, meno costoso dell'acciaio e Eiffel ha avuto più esperienza con questo materiale. La struttura è essenzialmente una torre, sottoposta a gravità e carico del vento. Si tratta di una struttura relativamente "light', quindi il carico morto è piccolo rispetto al carico del vento.

Per evitare il ribaltamento $\frac{M^{\text{gravity}}}{M^{\text{wind}}}$ doveva essere molto più alto di 1.

Questo può essere raggiunto sia da:

1. Aumentare il peso di sé (come nel monumento di Washington)
2. Aumentare la larghezza della base
3. Design support to resist tension.
4. Post-tension the support.

La torre è alta 984 piedi e larga 328 piedi alla base. fornire una stabilità adeguata in presenza di carico del vento.

Possiamo presumere che la forma della torre sia parabolica. x asse da essere lungo asse verticale di simmetria e y la metà larghezza, allora sappiamo che $x = 984$ la larghezza (mezza) $y = 0$ e a $x = 0$ la larghezza di mezzo è $328/2 = 164$, così l'equazione del la larghezza di metà è data da

$$y = \underbrace{164\left(\frac{984-x}{984}\right)^2}_{av(x)^2}$$

Ricordiamo dal calcolo che per $y = v(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}ax^2 = 2ax$$

Thus for our problem

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{2(164)\frac{984-x}{984}}_{\frac{dy}{dv}}\underbrace{\left(-\frac{1}{984}\right)}_{\frac{dv}{dx}}$$

$$= \frac{984-x}{2,952}$$

Also

$$\frac{dy}{dx} = \tan\beta \Rightarrow \beta = \tan^{-1}\frac{dy}{dx}$$

COPIA DI REVISIONE

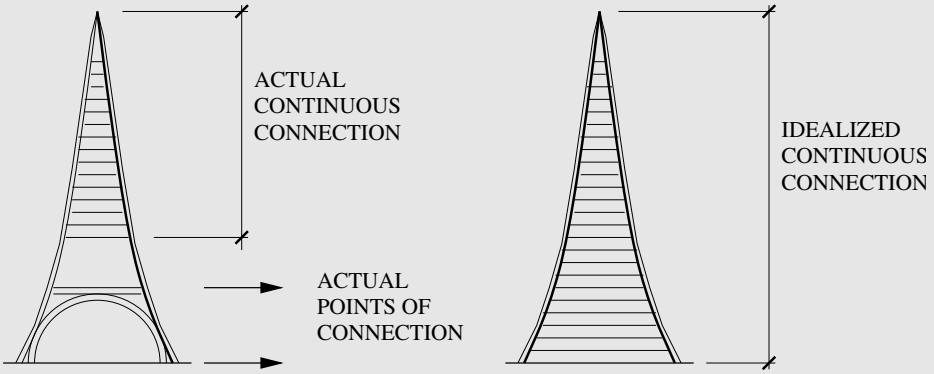
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove β è l'angolo misurato dal x asse al tangente alla curva.

Ora possiamo tabulare la larghezza e il pendio a varie altezze

			Width			
Location	Height	Width/2	Estimated	Actual	$\frac{dy}{dx}$	β
Support	0	164	328		.333	18.4^o
First platform	186	108	216	240	.270	15.1^o
second platform	380	62	123	110	.205	11.6^o
Intermediate platform	644	20	40		.115	6.6^o
Top platform	906	1	2		.0264	1.5^o
Top	984	0	0		0.000	0^o

La torre è sostenuta da quattro supporti inclinati, ciascuno con una sezione trasversale di 800 in^2. Una idealizzazione della torre è mostrata di seguito

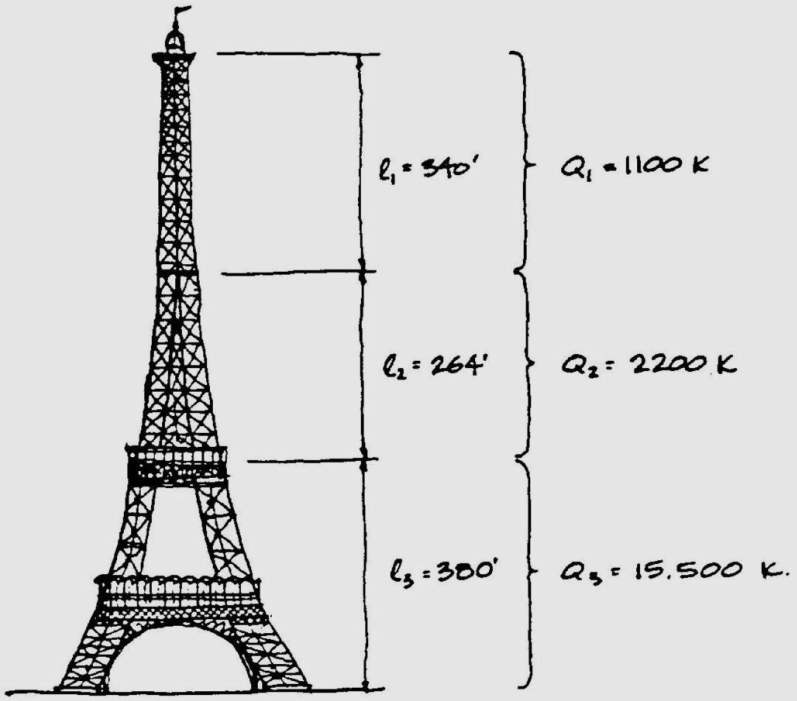


COPIA DI REVISIONE

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Carichi

Il peso totale della torre è 18,800 k. Il carico morto non è uniformemente distribuito, ed è approssimato come segue



Location	Height	Dead Weight
Ground- second platform	380 ft	15,500 k
Second platform-intermediate platform	264 ft	2,200 k
intermediate platform - top	340 ft	1,100 k
Total	984 ft	18,800 k

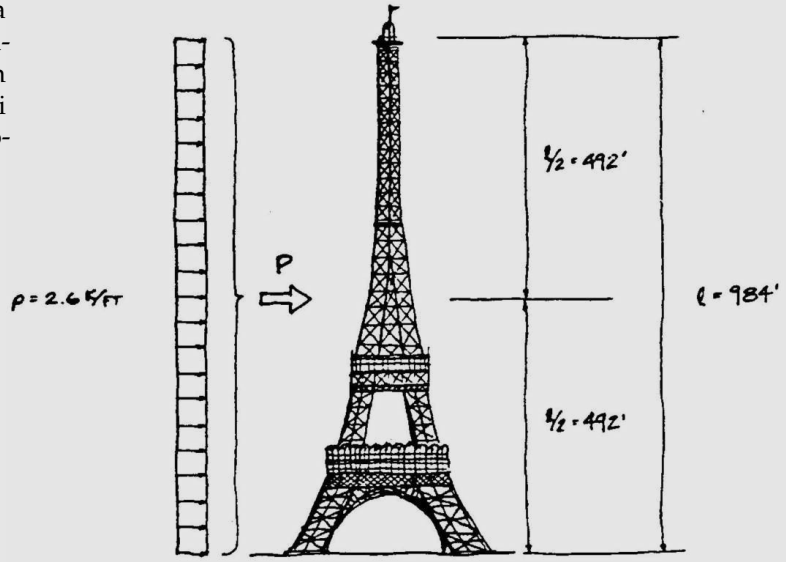
Dalla larghezza effettiva delle due piattaforme inferiori possiamo stimare i carichi vivi (la piattaforme intermedie e top avrebbero LL trascurabile in confronto:

1st platform:	$(50)\ \text{psf}(240)^2\ \text{ft}^2 \frac{kip}{(1{,}000)\ \text{lbs}}$	2,880 k
2nd platform:	$(50)\ \text{psf}(110)^2\ \text{ft}^2 \frac{\text{k}}{(1{,}000)\ \text{lbs}}$	600 k
Total:		3,480 k

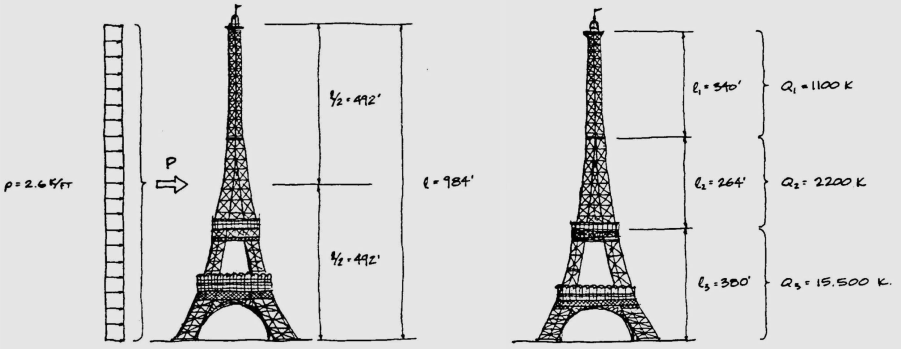
Quindi il carico verticale totale è $P_{\text{vert}} = DL + LL = 18{,}800 + 3{,}480 = 22{,}280$ k.

COPIA DI REVISIONE

La pressione del vento è nota per avere anche una distribuzione parabolica (massimo in cima), la area trasversale su cui il vento agisce è anche parabolico (massimo alla base).



Quindi semplificamo la nostra analisi considerando una *equivalente* forza eolica ottenuta da a *costante* pressione del vento (forza/lunghezza) e *sezione trasversale costante* La pressione è assunta da 2,6 k/ft, quindi la forza vento laterale è



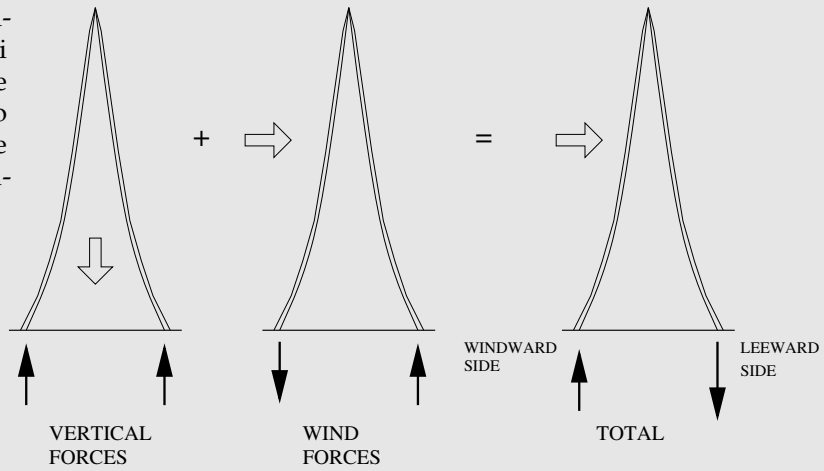
$$P_{\text{lat}} = (2.6)\ \text{k/ft}(984)\ \text{ft} = 2,560\ \text{k} \ \text{ acting at } \frac{984}{2} = 492\ \text{ft}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Reazioni

Semplificando la struttura tridimensionale con 4 supporti in una bidimensionale con due supporta, le reazioni possono essere facilmente determinate per questa struttura statisticamente determinata.



Gravity Load

$$P_{\text{vert}} = 22,280 \downarrow$$
$$R_{\text{vert}}^{\text{grav}} = \frac{22,280}{2} = 11,140 \text{ k} \uparrow$$

Lateral Load

Momento laterale (in sostanza abbiamo un raggio di trasporto sottoposte a carico uniforme). Il momento a distanza x dal supporto lungo il fascio a trave intagliato sottoposto ad un'uniforme pressure p is given by

$$M_{\text{lat}} = \underbrace{p(L-x)}_{\text{Force}} \underbrace{\frac{L-x}{2}}_{\text{Moment arm}} = p\frac{(L-x)^2}{2}$$

Così il momento laterale causato dal vento è parabolico. Alla base ($x = 0$), il momento massimo è pari

$$M_{\text{lat}} = p\frac{(L-x)^2}{2} = (2.6) \text{ k/ft}\frac{(984-0)^2}{2} \text{ ft}^2 = 1,260,000 \text{ k.ft}$$

Osserviamo che la forma del diagramma di momento è anche parabolica, proprio come la torre stessa. Non è accidentale, poiché le strutture quasi ottimali hanno una forma che si avvicina il loro diagramma di momento (come la profondità variabile dei ponti a lunga durata continua).

Per determinare le forze interne risultanti causate dal momento laterale (vento) e poiché abbiamo due supporti (uno sotto tensione e l'altro sotto compressione) usiamo

$$R_{\text{vert}}^{\text{wind}} = \pm\frac{M}{d} = \frac{1,260,000 \text{ k.ft}}{328 \text{ ft}} = \pm 3,850 \text{ k} \uparrow\downarrow$$

COPIA DI REVISIONE

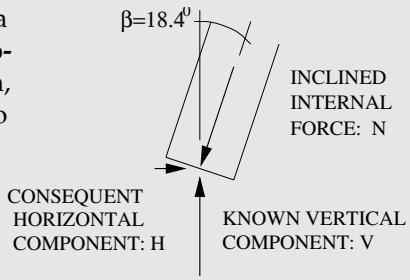
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

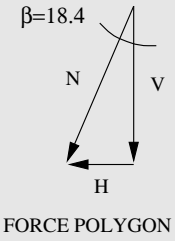
Forze Laterali per essere resistito da ciascuna delle due coppie. la forza sarà ugualmente divisa tra le due coppie di supporti e sarà uguale a

$$R_{\text{lat}}^{\text{wind}} = \frac{(2,560)\text{ k}}{2} = 1,280\text{ k} \leftarrow$$

Forze interne

Le forze interne sono determinate per la prima volta alla base. **Carico gravitazionale** sono considerati per la prima volta, ricordi che questi sono causati dal carico morto e il live load





FORCE POLYGON

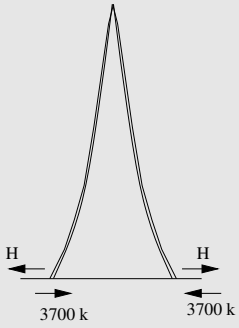
$$\cos\beta = \frac{V}{N} \Rightarrow \qquad N = \frac{V}{\cos\beta}$$

$$N = \frac{11,140\text{ k}}{\cos 18.4^o} \qquad = 11,730\text{ k}$$

$$\tan\beta = \frac{H}{V} \Rightarrow \qquad H = V\tan\beta$$

$$H = 11,140\text{ k}(\tan 18.4^o) \qquad = 3,700\text{ k}$$

Le forze orizzontali che devono essere resistite dalle fondamenta



Poiché il carico verticale diminuisce con altezza, la forza assiale diminuirà anche con l'altezza.

Alla seconda piattaforma, il carico verticale totale è $Q = 1,100 + 2,200 = 3,300$ k e a quell'altezza l'angolo è 11.6^o così la forza assiale (per coppia di colonne) sarà

$$N_{\text{vert}} = \frac{\frac{3,300\text{ k}}{2}}{\cos 11.6^o} = 1,685\text{ k}$$

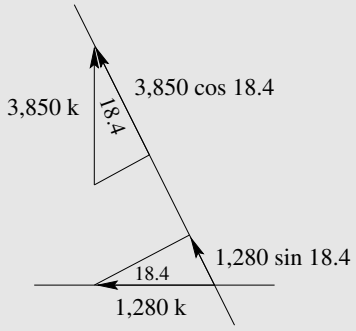
$$H_{\text{vert}} = \frac{3,300\text{ k}}{2}(\tan 11.6^o) = 339\text{ k}$$

Si noti che questo è circa sette volte più piccolo della forza assiale alla base, che per una data forza, avrebbe portato il progettista a ridurre (o taper) la sezione trasversale.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

La forza orizzontale sarà resistita dalle forze assiali nella seconda piattaforma stessa. **Caricamento del vento:** Ora abbiamo determinato a ogni coppia di sostegno le forze verticali e orizzontali causate per il carico del vento, la fase successiva è determinare i loro componenti assiali lungo la gamba inclinata,



$$N_c = -R_{\text{vert}}^{\text{wind}} \cos\beta - R_{\text{lat}}^{\text{wind}} \sin\beta = -(3,850)\ \text{k}(\cos 18.4^o) - (1,280)\ \text{k}(\sin 18.4^0)$$
$$= -4,050\ \text{k Leeward}$$
$$N_t = -R_{\text{vert}}^{\text{wind}} \cos\beta + R_{\text{lat}}^{\text{wind}} \sin\beta = (3,850)\ \text{k}(\cos 18.4^o) + (1,280)\ \text{k}(\sin 18.4^0)$$
$$= 4,050\ \text{kip Winward}$$

Tensioni interne

Ora si possono determinare le forze totali causate da entrambe le forze laterali e gravitazionali:

$$N_L^{\text{Total}} = \underbrace{-(11,730)\ \text{k}}_{\text{gravity}} \underbrace{-(4,050)\ \text{k}}_{\text{lateral}} = -15,780\text{kip Leeward side}$$
$$N_W^{\text{Total}} = \underbrace{-(11,730)\ \text{k}}_{\text{gravity}} \underbrace{+(4,050)\ \text{k}}_{\text{lateral}} = -7,630\text{kip Winward side}$$

Osserviamo che anche sotto carico del vento, il lato vento è ancora sotto compressione. Nell'idealizzazione della geometria della torre, l'area di ogni coppia delle colonne semplificate è $1,600\ \text{in}^2$. e quindi le sollecitazioni massime saranno determinate da

$$\sigma_{comp} = \frac{N_L^T}{A} = \frac{-15,780\ \text{k}}{1,600\ \text{in}^2} = -9.9\ \text{ksi}$$

La forza del ferro battuto è di 45 ksi, quindi il fattore di sicurezza è

$$\text{Safety Factor} = \frac{\text{ultimate stress}}{\text{actual stress}} = \frac{45\ \text{ksi}}{9.9\ \text{ksi}} = 4.5$$

COPIA DI REVISIONE

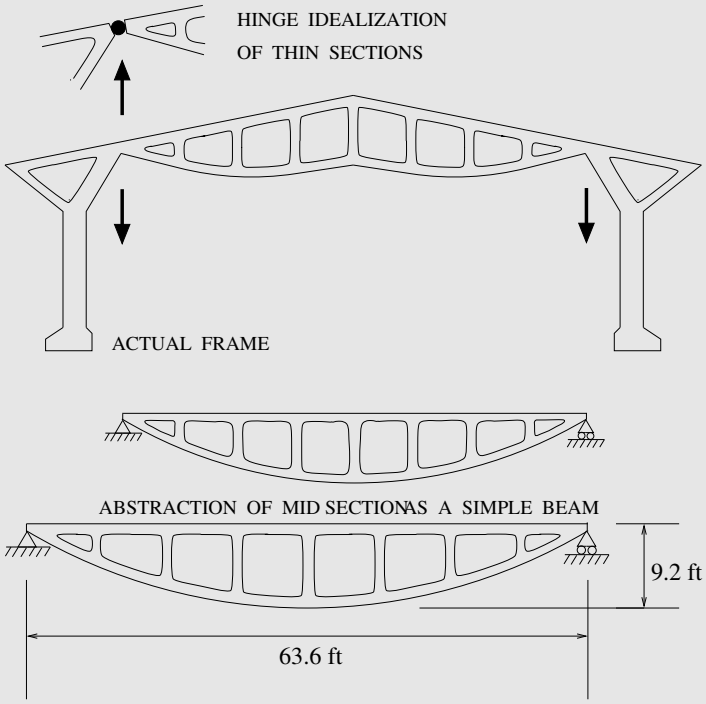
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

39.3 Ex 39.3: Magazzini Generali

La sezione seguente è riprodotta da Billington, 1983 Structural Studies.

Geometria

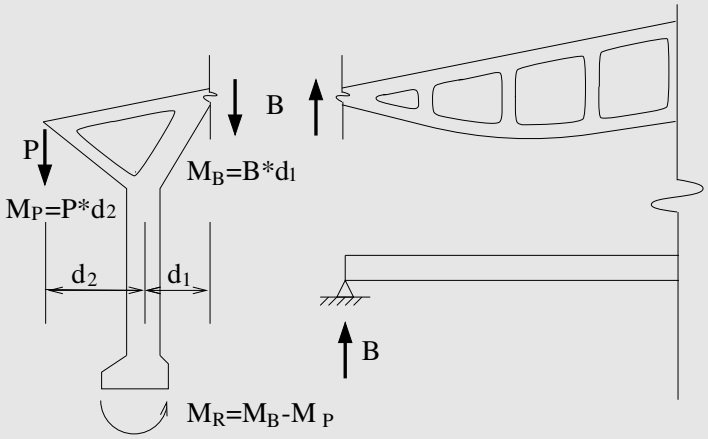
Questa casa sotrage, costruita da Maillart a Chiasso nel 1924, fornisce un buon esempio del matrimonio tra estetica e ingegneria. La caratteristica più strking dei Magazini Generali non è la struttura stessa, ma piuttosto la forma dei suoi telai di supporto interni.



Il telaio può essere idealizzato come un fascio semplicemente supportato appeso a due cantilever mentre il fascio stesso è una semplice idealizzazione strutturale, lo strapiombo è progettato in modo da minimizzare il momento netto da trasmettere supports (foundations).

COPIA DI REVISIONE

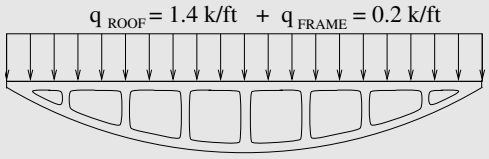
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Carichi

Il carico applicato sul telaio è dai pesi della lastra del tetto, e il telaio stesso. Data lo spazio tra i telai adiacenti è di 14,7 ft, e che il carico del tetto è 98 psf, e che il peso complessivo della cornice è di 13.6 kips, il carico totale uniforme diventa.

$$q_{roof} = (98)\ \text{psf}(14.7)\ \text{ft} = 1.4\ \text{k/ft}$$
$$q_{frame} = \frac{(13.6)\ \text{k}}{(63.6)\ \text{ft}} = 0.2\ \text{k/ft}$$
$$q_{total} = 1.4 + 0.2 = 1.6\ \text{k/ft}$$



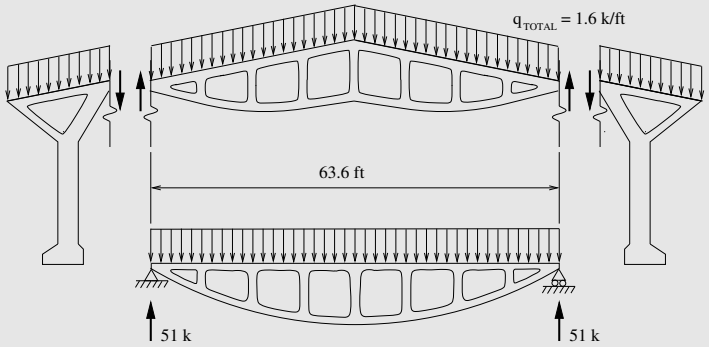
q_{ROOF} = 1.4 k/ft
+ q_{FRAME} = 0.2 k/ft
q_{TOTAL} = 1.6 k/ft

Reazioni

Le reazioni per il fascio sono determinate prima sfruttando la simmetria.

$$W = (1.6)\ \text{k/ft}(63.6)\ \text{ft} = 102\ \text{k}$$
$$R = \frac{W}{2} = \frac{102}{2} = 51\ \text{k}$$

COPIA DI REVISIONE

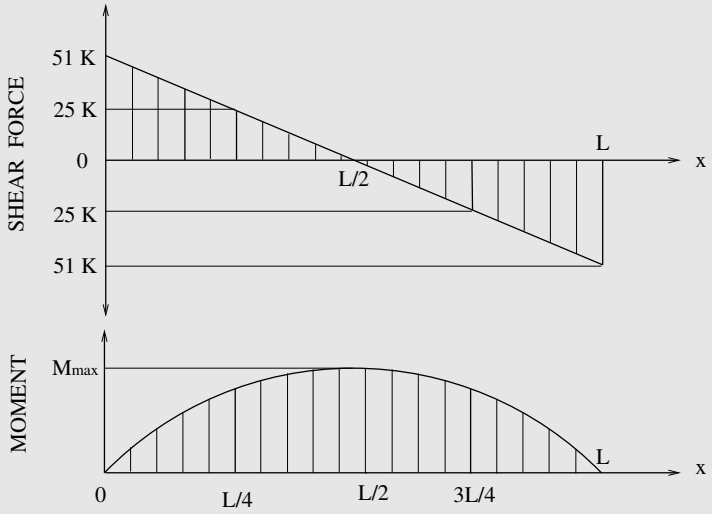


Si nota che queste reazioni sono fornite dalle forze interne della tosapa.

Forze

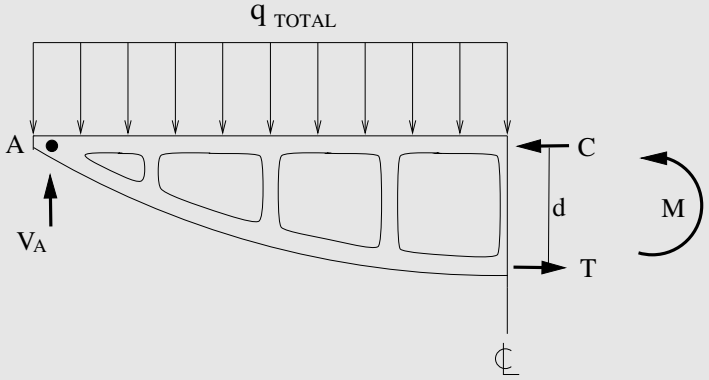
Le forze interne sono pimarily la cesoia e i momenti. una trave semplicemente caricata uniformemente. La cinghia varia linearmente da 51 kip a -51 kip con zero al centro, e il diagramma del momento è parabolico con maximum moment at the centeris equal to:

$$M_{max} = \frac{qL^2}{8} = \frac{(1.6)\ \text{k/ft}(63.6)\ \text{ft}^2}{8} = 808\ \text{k.ft}$$



Il momento indotto esternamente a metà della superficie deve essere resistito da un pari e opposto momento interno. Questo può essere raggiunto attraverso una combinazione di forza di compressione sulla fibre superiori e traslitte inferiori. Così la forza assiale netta è zero, tuttavia là è una coppia interna netta.

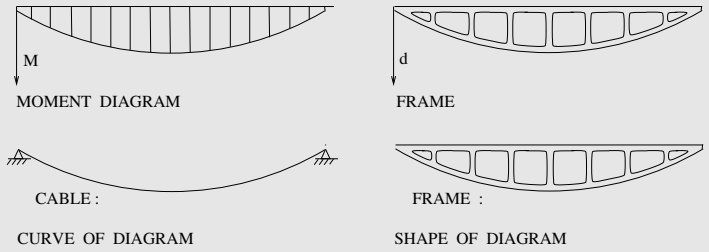
COPIA DI REVISIONE



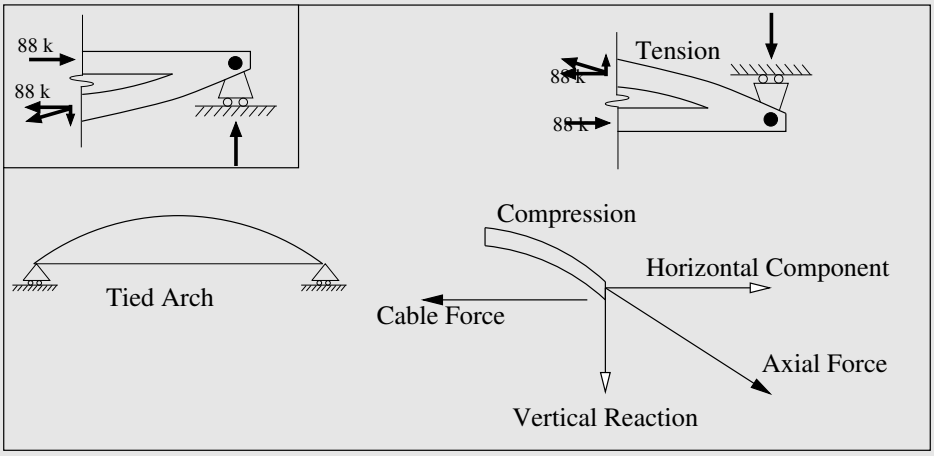
$$M_{ext} = Cd \Rightarrow C = \frac{M_{ext}}{d}$$

$$T = C = \frac{(808)\ \text{k.ft}}{(9.2)\ \text{ft}} = \pm 88\ \text{k}$$

Perché la forma della cornice (e così $d(x)$) è approssimativamente parabolica, e il momento è anche parabolica, poi le forze assiali sono costanti lungo l'intero telaio.



La forza assiale alla fine del fascio non è bilanciata, e la compressione 88 kip deve essere trasmesso al basso accordo.

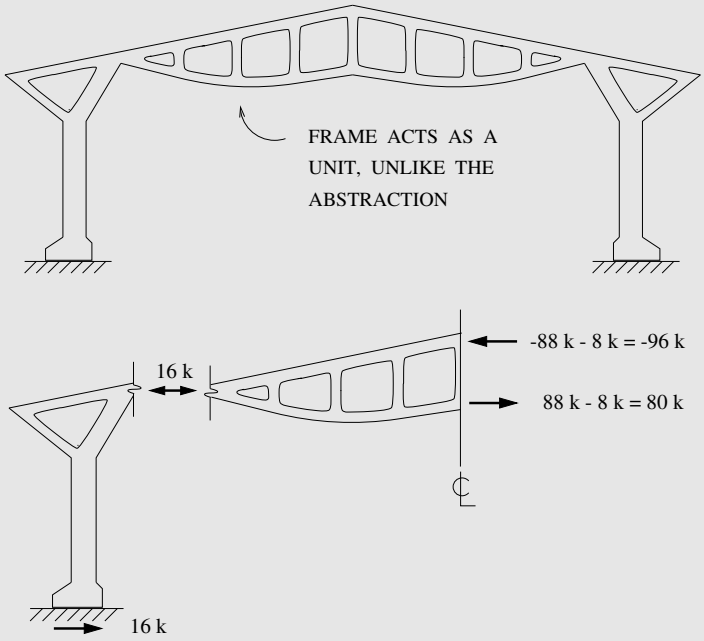


Questo è analogo alle forze trasmesse al sostegno da un arco legato.

Va ricordato che quando è stata eseguita una rigorosa analisi del computer, è stato determinato che i supporti stanno contribuendo a una forza di compressione di circa 8 kips che devono essere sovrapposti ai valori centrali.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Tensioni interne

Lo stress netto di compressione, per un accordo superiore con una superficie trasversale di 75 in^2 is equal to

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{(88)\text{ k}}{(75)\text{ in}^2} = 1.17 \text{ ksi}$$

questo è molto più basso rispetto allo stress di compressione consentibile del calcestruzzo che è about 1,350 ksi. Se la cornice è stata colata con il tetto (monolitico costruzione), che questo stress sarebbe ancora più basso.

39.4 Ex 39.4: Ponte George Washington

La sezione seguente è riprodotta da Billington, 1983 Structural Studies.

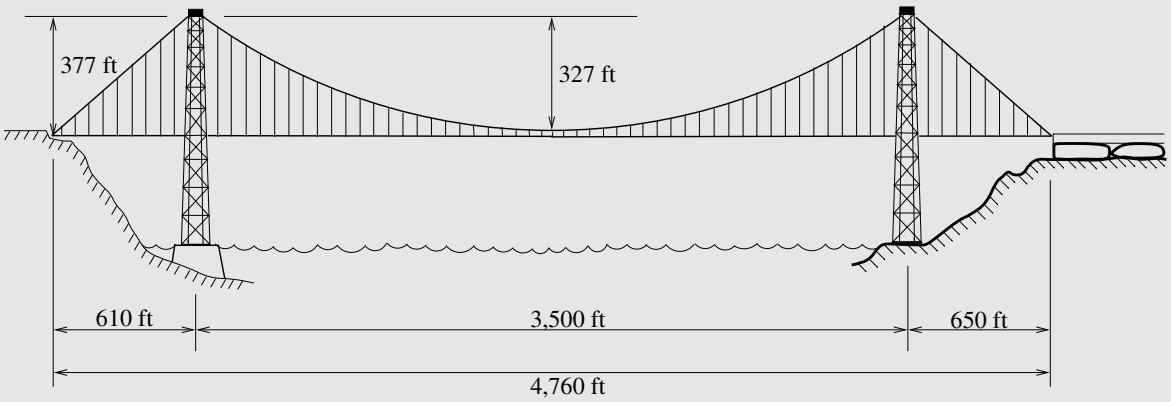
Il ponte George Washington è un ponte sospeso che attraversa il fiume Hudson da New York City a New Jersey. nel 1931 con una fascia centrale di 3.500 ft (all'epoca Il ponte è stato progettato da O.H. Amman, che aveva emigrato dalla Svizzera. Nel 1962 il ponte è stato irrigidito con aggiunta di un ponte inferiore.

COPIA DI REVISIONE

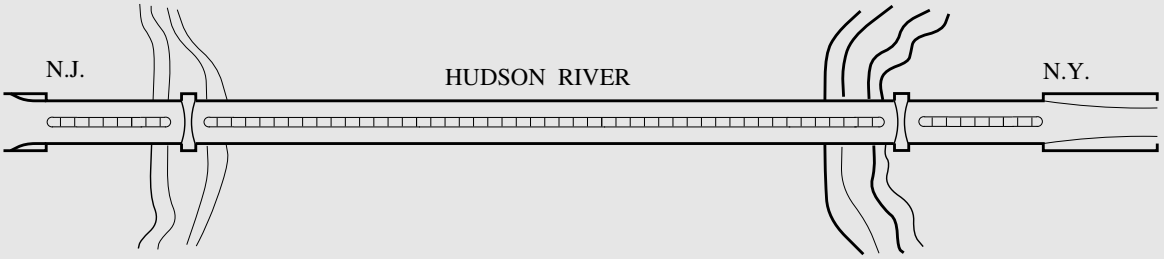
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Geometria

Un'elevazione longitudinale e planametrica del ponte è mostrata sotto



ELEVATION



PLAN

Per semplicità, presumiamo nella nostra analisi che i due le campate si avvicinano sono pari a 650 ft.

Ci sono due cavi di diametro tre piedi su ogni lato del ponte. I centri di ogni coppia sono a 9 ft di distanza, e le coppie si sono a 106 piedi di distanza. Assumeremo una larghezza di campata di 100 ft.

I cavi sono idealizzati come supportati da rulli in cima alla le torri, da qui i componenti orizzontali delle forze in ogni lato del cavo deve essere uguale (i loro componenti verticali aggiungeranno up).

I cavi supportano il ponte stradale che è appeso da sospenders i cavi sono realizzati in 26.474 fili d'acciaio, ogni 0,196 pollici di diametro. Sono continui sopra la torre supporti e sono saldamente ancorati in entrambe le banche da blocchi enormi concrete, the anchors.

Perché i cavi sono molto più lunghi di quanto siano spessi (piccoli $\frac{I}{L}$), possono essere idealizzati come membri perfettamente flessibili senza resistenza alla taglio/bending ma con elevata resistenza assiale.

Le torri sono alte 578 ft e poggiano su caissons in cemento a causa della nostra supposizione per quanto riguarda il supporto del rullo i cavi, le torri saranno sottoposte solo a forze assiali.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

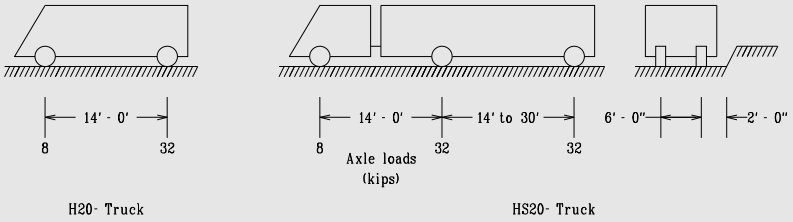
Carichi

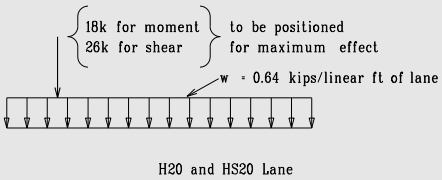
Il carico morto è composto dal peso del ponte e dal cavi e si stima a 390 e 400 psf rispettivamente per il rispettivamente, con una larghezza media di 100 ft, questo sarebbe equivalente a

$$DL = (390)\ \text{psf}(100)\ \text{ft}\frac{\text{k}}{(1,000)\ \text{lbs}} = 39\ \text{k/ft}$$

per la portata principale e 40 k/ft for the side ones.

Per i ponti autostradali, i carichi di design sono dati dall'ASHTO (Association of American State Highway Transportation Officials). Il camion HS-20 è spesso utilizzato per la progettazione di ponti sul principale highways.Sia il camion di progettazione con carichi e spaziatura specificati dell'asse deve essere utilizzato **or** il carico uniforme equivalente e carico concentrato. Questo carico deve essere posto tale che le sollecitazioni massime sono prodotte.





Con due mazzi, si stima che ci sia un totale di 12 corsie or

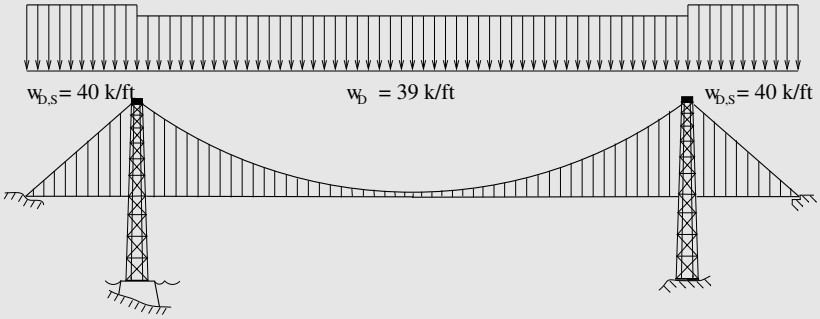
$$LL = (12)\text{Lanes}(.64)\ \text{k/ ft/Lane} = 7.68\ \text{k/ft} \approx 8\ \text{k/ft}$$

Non consideriamo il terremoto, o carichi di vento in questa analisi.

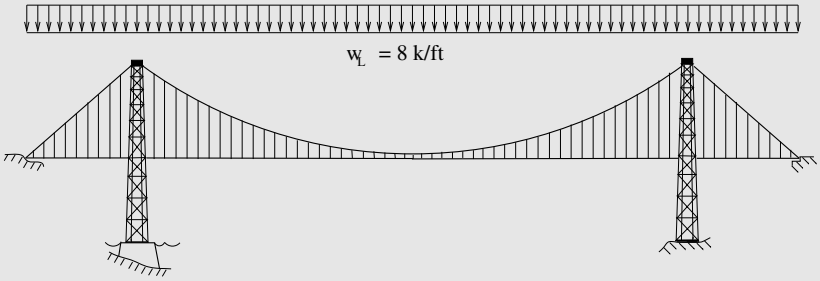
DL finale e LL sono $TL = 39 + 8 = 47\ \text{k/ft}$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



DEAD LOADS



Forze nei cavi

La spinta H (che è la componente orizzontale del cavo forza) è determinata da Eq. 30.11

$$\begin{aligned} H &= \frac{wL_{cs}^2}{8h} \\ &= \frac{(47)\text{ k/ft}(3,500)^2\text{ ft}^2}{(8)(327)\text{ ft}} \\ &= 220,000\text{ k} \end{aligned}$$

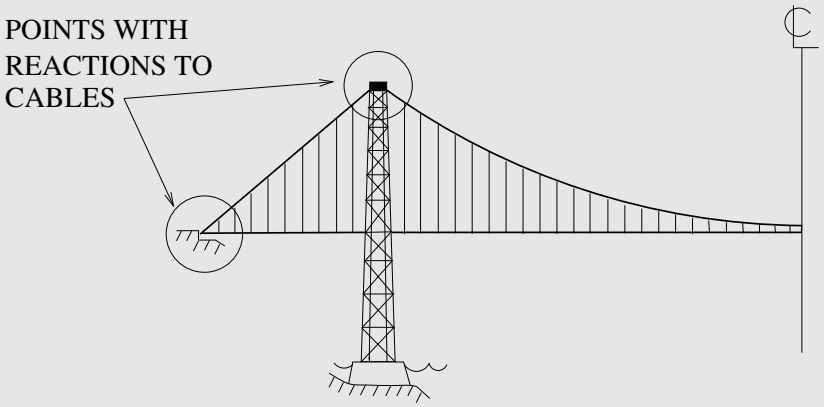
Da Eq. 30.44 la massima tensione is

$$\begin{aligned} r &= \frac{h}{L_{cs}} = \frac{327}{3,500} = 0.0934 \\ T_{max} &= H\sqrt{1+16r^2} \\ &= (220,000)\text{ k}\sqrt{1+(16)(0.0934)^2} \\ &= (220,000)\text{ k}(1.0675) = 235,000\text{ k} \end{aligned}$$

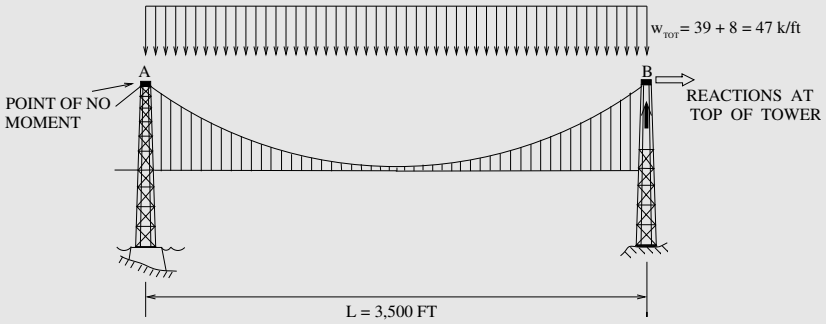
Reazioni

Cable reactions are shown below

COPIA DI REVISIONE



La forza verticale nelle colonne a causa della portata centrale (cs) è semplicemente la reazione di supporto.



$$V_{\text{cs}} = \frac{1}{2} w L_{\text{cs}} = \frac{1}{2}(47)\ \text{k/ft}(3,500)\ \text{ft} = 82,250\ \text{k}$$

Nota che possiamo controllare questo determinando la somma vettoriale di H e V che dovrebbe essere uguale a T_{max}:

$$\sqrt{V_{\text{cs}}^2 + H^2} = \sqrt{(82,250)^2 + (220,000)^2} = 235,000\ \text{k} \checkmark$$

Lungo le campate laterali (ss), il carico totale è $TL = 40 + 8 = 48$ k/ft. Determinamo la reazione verticale V_{SS} prendendo il sommazione di momenti rispetto all'ancora sinistra:

$$\Sigma M_D = 0; \circlearrowleft +; h_{\text{ss}} H + (w_{\text{ss}} L_{\text{ss}}) \frac{L_{\text{ss}}}{2} - V_{\text{ss}} L_{\text{ss}} = 0$$

$$= (377)\ \text{ft}(220,000)\ \text{k} + (48)\ \text{k/ft}(650)\ \text{ft} \frac{(650)\ \text{ft}}{2} - 650 V_{\text{ss}} = 0$$

$$V_{\text{ss}} = 143,200\ \text{k}$$

Note: that we have equilibro usato per determinare la componente verticale del cavo forza. Sarebbe stato sbagliato determinare V_{ss} da $V_{ss} = 220,000 \frac{377}{650}$ come abbiamo fatto nell'esempio precedente,

COPIA DI REVISIONE

perché il cavo è ora caricato e non è più dritto. forma del cavo e tangente al supporto. Inizio con Eq. 30.7:

$$-Hy = \frac{1}{2}wx^2 + C_1x + C_2$$
$$-y = \frac{w}{H}\frac{x^2}{2} + \frac{C_1}{H}x + \frac{C_2}{H}$$

At $x = 0$, $y = 0$, così $C_2 = 0$; $x = 650$, $y = -377$; $H = 220,000$ k and $w = 48$

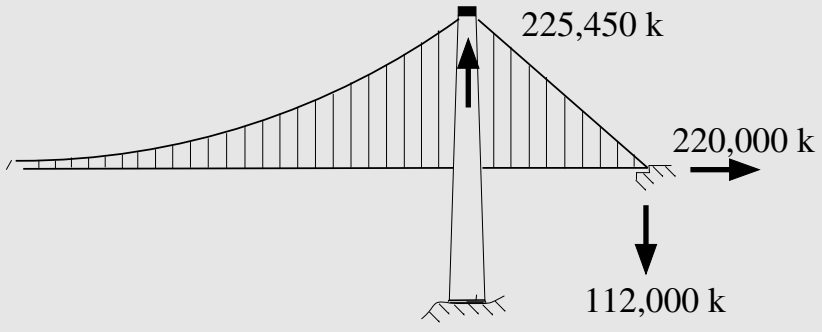
$$y = -\frac{(48)\text{ k}}{\text{ft}(220,000)\text{ k}}x^2 - \frac{C_1}{(220,000)\text{ k}}x$$
$$= -1.091 \times 10^{-4}x^2 - 4.545 \times 10^{-6}C_1x$$
$$y\big|_{x=650} = -377 = -1.091 \times 10^{-4}(650)^2 - 4.545 \times 10^{-6}C_1(650)$$
$$C_1 = 112,000$$
$$y = -1.091 \times 10^{-4}x^2 - 0.501x$$
$$\frac{dy}{dx} = -2.182 \times 10^{-4}x - 0.501$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=650} = -0.1418 - 0.501 = -0.6428 = \frac{V}{H}$$
$$V = (220,000)(0.6428) = 141,423\text{ k}$$

which is only 1% different. Quindi la forza assiale totale applicata sulla colonna è

$$V = V_{cs} + V_{ss} = (82,250)\text{ k} + (143,200)\text{ k} = 225,450\text{ k}$$

La reazione verticale all'ancora è data dalla somma di le forze nelle y direzione

$$(+\uparrow)\Sigma F_y = 0; (w_{ss}L_{ss}) + V_{ss} + R_{anchor} = 0$$
$$-(48)\text{ k/ft}(650)\text{ ft} + (143,200)\text{ k} + R_{anchor} = 0$$
$$R_{anchor} = 112,000\text{ k}\downarrow$$



La forza assiale nel cavo laterale è determinata la somma vettoriale delle reazioni orizzontali e verticali.

$$T^{ss}_{anchor} = \sqrt{R^2_{anchor} + H^2} = \sqrt{(112,000)^2 + (220,000)^2} = 247,000\text{ k}$$
$$T^{ss}_{tower} = \sqrt{V^2_{ss} + H^2} = \sqrt{(143,200)^2 + (220,000)^2} = 262,500\text{ k}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Le sollecitazioni del cavo sono determinate duramente

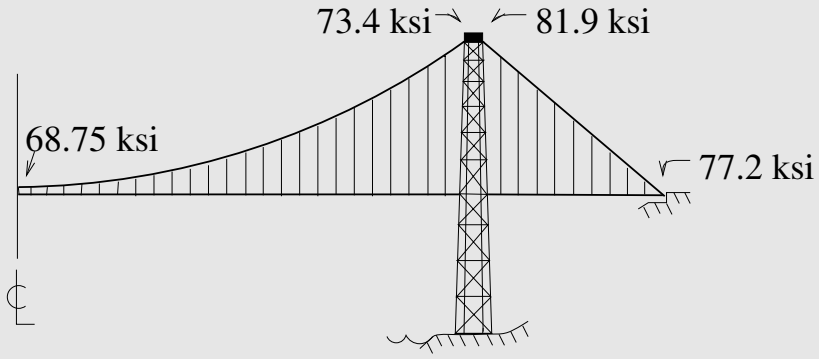
$$A_{wire} = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{(3.14)(0.196)^2}{4} = 0.03017 \text{ in}^2$$

$$A_{total} = (4)\text{cables}(26,474)\text{wires/cable}(0.03017) \text{ in}^2\text{/wire} = 3,200 \text{ in}^2$$

$$\text{Central Span } \sigma = \frac{H}{A} = \frac{(220,000) \text{ k}}{(3,200) \text{ in}^2} = 68.75 \text{ ksi}$$

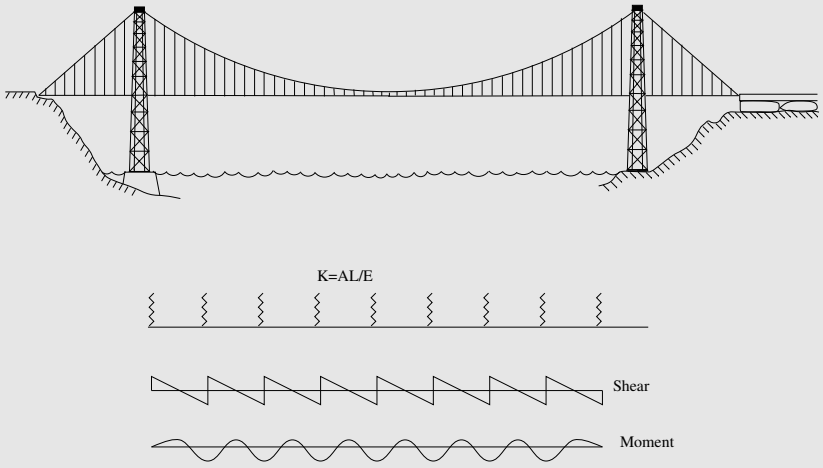
$$\text{Side Span Tower } \sigma^{ss}_{tower} = \frac{T^{ss}_{tower}}{A} = \frac{(262,500) \text{ k}}{(3,200) \text{ in}^2} = 82 \text{ ksi}$$

$$\text{Side Span Anchor } \sigma^{ss}_{tower} = \frac{T^{ss}_{anchor}}{A} = \frac{(247,000) \text{ k}}{(3,200) \text{ in}^2} = 77.2 \text{ ksi}$$



Se i cavi dovevano essere ancorati a un blocco di cemento, il volume of the block should be at least equal to $V = \frac{(112{,}000) \text{ k}(1{,}000) \text{ lbs/ k}}{150 \text{ lbs/ft}^3} = 747,000 \text{ ft}^3$ or a cube of approximately 91 ft

Il ponte, per tutti gli scopi pratici può essere trattato come un fascio continuo sostenuto da molle elastiche con rigidità $K = AL/E$ (in cui) L è la lunghezza del cavo di supporto). idealizzato come un fascio su fondazioni elastiche, e la conseguente shear e diagrammi di momento per questa idealizzazione sono mostrati qui sotto.

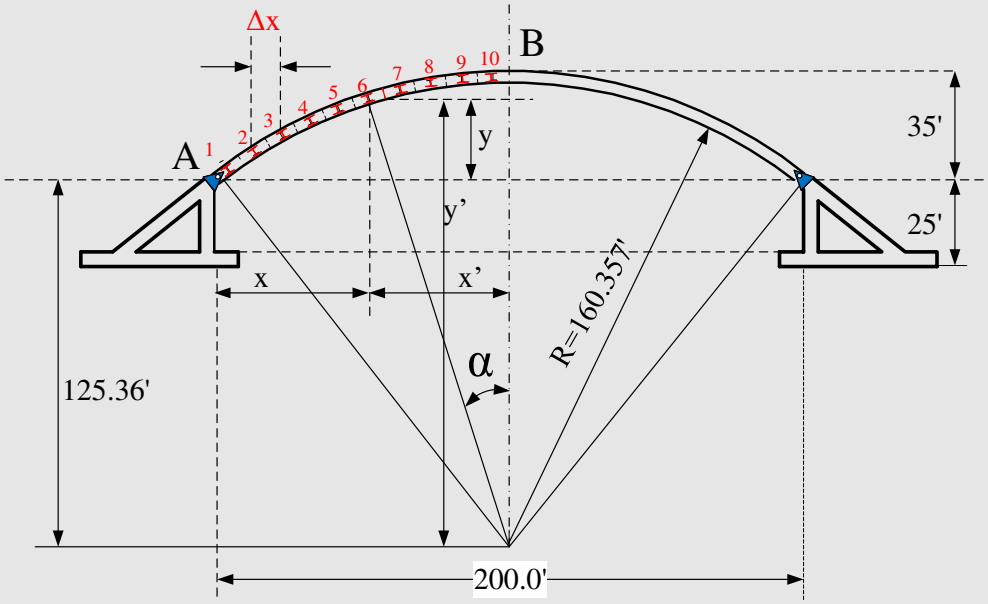


COPIA DI REVISIONE

39.5 Ex 39.5: Progettazione di un arco a due punte

La sezione seguente è riprodotta da Kinney, 1957 Indeterminate Structural Analysis.

Cerchiamo di progettare un *due cerniere*, costola ad arco saldata solida per un hangar. Assume $F_y = 30$ ksi. Il momento di inerzia della costola è quello di variare come necessario. La campata, centro al centro delle cerniere, deve essere 200 ft. Le coste devono esser poste 35 piedi centro a centro, con un aumento del 35 ft. Mazzo tetto, purlins e costole saranno assunti a peso 25 lb/ft^2 sulla superficie del tetto e la neve sarà assunta a 40 lb/ft^2 di questa superficie. Venti purlin saranno ugualmente distanziati intorno alla costola.



Geometria

La linea centrale della costola sarà presa come il segmento di un cerchio. Il raggio di questo cerchio è

$$(R - 35)^2 + (100)^2 = R^2 \Rightarrow R = 160.357 \text{ ft}$$

La lunghezza dell'arco è

$$\theta = \arcsin \frac{100}{160.357} = 38.580^\circ \Rightarrow S = 160.357 \times \frac{\pi}{180} 38.580 = 107.98 \text{ ft}$$

Per l'analisi l'arco AB sarà considerato diviso in dieci segmenti, ciascuno con una lunghezza di

$$\Delta S = \frac{S}{10} = \frac{107.980}{10} = 10.798 \text{ ft}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Così un carico concentrato viene applicato alla costola dai purlins che inquadrano al centro di ogni segmento.

Poiché il carico totale di neve e morto è 65 lb/ft^2 di superficie del tetto, il valore di ogni forza concentrata sarà

$$\Delta P = 10.798 \times 35 \times 65 = 24.565 \text{ k}$$

(dove 35 corrisponde alla distanza delle costole)

I calcoli necessari per valutare le coordinate dei centri dei vari segmenti, riferiti alla cerniera A, sono mostrati qui sotto. Anche mostrato sono i valori di Δx, la proiezione orizzontale della distanza tra i centri dei diversi segmenti.

Segment	α	$\sin\ \alpha$	$\cos\ \alpha$	$x' = R\sin\alpha$ (ft)	$y' = R\cos\alpha$ (ft)	$x = 100 - x'$ (ft)	$y = y' - 125.36$ (ft)	Δx (ft)
A	38°34′49″	0.62361	0.78173	100.000	125.36	0	0	
1	36°39′05″	0.59695	0.80229	95.725	128.65	4.275	3.29	4.275
2	32°47′36″	0.54161	0.84063	86.851	134.80	13.149	9.44	8.874
3	28°56′07″	0.48382	0.87516	77.584	140.34	22.416	14.98	9.267
4	25°04′38″	0.42384	0.90574	67.966	145.24	32.034	19.88	9.618
5	21°13′09″	0.36194	0.93220	58.040	149.48	41.960	24.13	9.926
6	17°21′40″	0.29840	0.95444	47.851	153.05	52.149	27.69	10.189
7	13°30′11″	0.23350	0.97236	37.443	155.92	62.557	30.57	10.408
8	09°38′42″	0.16754	0.98586	26.866	158.09	73.134	32.73	10.577
9	05°47′13″	0.10083	0.99490	16.169	159.54	83.831	34.18	10.697
10	01°55′44″	0.03367	0.99943	5.399	160.27	94.601	34.91	10.770
Crown					160.36	100.000	35.00	5.399

Table 1

Progetto iniziale

Se manca l'esperienza e il tecnico di progettazione è quindi in perdita rispetto alle ipotesi iniziali relative alla variazione sezionale lungo la costola, si raccomanda che la prima analisi sia basata sull'assunzione di un momento costante di Anche l'ingegnere esperto spesso troverà che questa è la procedura migliore.

Se il valore del H è determinato, momenti e spinte assiali possono essere calcolati lungo la costola. Le aree di sezione trasversale nelle varie sezioni sono poi progettate per questi momenti e propulsori assiali. H, così come i valori revisionati per momenti e la spinta assiale lungo tutta la costola, sono determinati per la nuova costola con la sezione trasversale variabile. Le stringhe vengono controllate nella costoletta, e l'intero processo viene ripetuto se necessario. Questa procedura sarà seguita nel caso in esame.

Spinta orizzontale

Applicando il metodo di flessibilità, rilasciamo la reazione orizzontale a A

$$\Delta_{Ah} + H_A \delta_{AhAh} = 0$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Le deflezioni sono calcolate in seguito dal lavoro virtuale, per questa sezione curva si sostituisce:

$$\int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx \quad \text{by} \quad \sum \delta\overline{M}\frac{M}{EI}\Delta S$$

e così questa espressione diventa

$$\sum \delta\overline{M}\frac{M}{EI}\Delta s + H_A \sum \delta\overline{M}\frac{\overline{M}}{EI}\Delta S = 0$$

Da E e ΔS sono costanti e, per la prima analisi, il momento dell'inerzia è costante, l'espressione finale per H_A is

$$H_A = -\frac{\sum M\delta\overline{M}}{\sum \delta\overline{M}M}$$

Computazioni necessarie per la prima valutazione H_A sono mostrati qui sotto

Segment	(2) x (ft)	(3) $y = \delta\overline{M}$ (ft · k)	(4) Shear to right (k)	(5) Δx (ft)	(6) M increment (ft · k)	(7) M simple beam (ft· k)	(8) $M\delta\overline{M}$	(9) $\delta\overline{M}M$
A	0.0	0.0	245.650					
1	4.275	3.29	221.085	4.275	1,050	1,050	3,500	10.9
2	13.149	9.44	196.520	8.874	1,962	3,010	28,400	89.2
3	22.416	14.98	171.955	9.267	1,821	4,830	72,400	224.4
4	32.034	19.88	147.390	9.618	1,654	6,490	129,100	395.4
5	41.960	24.13	122.825	9.926	1,463	7,950	191,800	582.2
6	52.149	27.69	98.260	10.189	1,251	9,200	254,800	767.0
7	62.557	30.57	73.695	10.408	1,023	10,220	312,400	934.4
8	73.134	32.73	49.130	10.577	779	11,000	360,000	1,071.4
9	83.831	34.18	24.565	10.697	526	11,530	394,100	1,168.4
10	94.601	34.91	0.000	10.770	265	11,790	411,600	1,218.6
Crown	100.00	35.00	___	5.399	0	11,790		
Σ							2,158,100	6,461.9

Table 2

where

$$R_A = 100\Delta P = (100)(24.565) = 245.650$$
$$\delta\overline{M} = (1)(y) = 3.29$$
$$245.65 - 24.565 = 221.085$$
$$(245.65)(4.275) = 1,050$$
$$1,050 + 1,962 \simeq 3,010$$

yielding

$$H_A = -\frac{2\sum M\delta\overline{M}}{2\delta\overline{M}M} = -\frac{2 \times 2,158,100}{2 \times 6461.9} = -333.97\text{k} \tag{39.1}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Momenti

I momenti nei centri dei vari segmenti della costola, utilizzando il valore approssimativo appena determinato per H_A, sono calcolati in basso, dove un momento è considerato positivo se tende a causare la compressione sulla superficie superiore della costola.

Segment	y (ft)	M simple beam (ft · k)	$H_A \cdot y$ (ft · k)	Total M at segment (ft · k)
A	0			
1	3.29	1,050	-1,100	-50
2	9.44	3,010	-3,150	-140
3	14.98	4,830	-5,000	-170
4	19.88	6,490	-6,640	-150
5	24.13	7,950	-8,060	-110
6	27.69	9,200	-9,250	-50
7	30.57	10,220	-10,210	+10
8	32.73	11,000	-10,930	+70
9	34.18	11,530	-11,420	+110
10	34.19	11,790	-11,660	+130
Crown	35.00	11,790	-11,690	+100

Table 3

where

$$-333.97(9.44) \simeq -3,150$$
$$3,010 - 3,150 = -140$$

COPIA DI REVISIONE

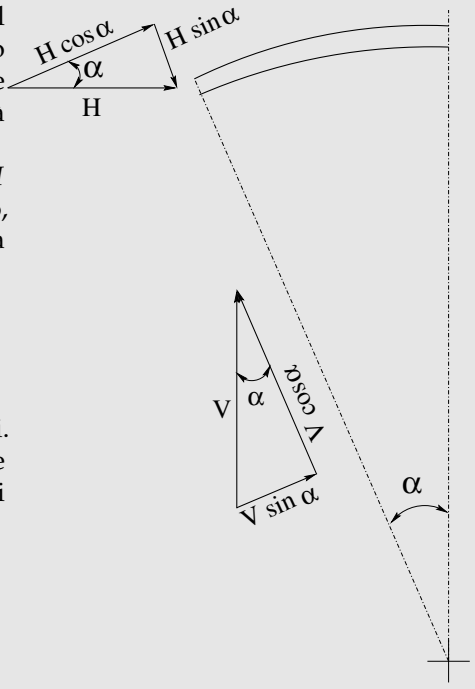
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Forze normali e di taglio

La spinta N, normale alla sezione trasversale al centro di ogni segmento, deve essere calcolato prima che i requisiti della sezione possano essere determinati. S, la parte totale della trazione, sarà anche calcolata per il centro di ogni segmento.
N e S sono ottenuti combinando componenti di H e la trancia verticale V al centro di ogni segmento, una combinazione che si mostra qui sotto. Da semplice trigonometria abbiamo

$$S = V \cos\alpha - H \sin\alpha$$
$$N = V \sin\alpha + G \cos\alpha$$

Valori di S e N sono calcolati i valori seguenti. of S sono inclusi a sostegno della dichiarazione precedentemente fatta all'effetto che le forze di taglio sono piccole nella solita costola dell'arco.



Segment	V (k)	$V \cos\alpha$	$H \sin\alpha$	$= S$(k)	$V \sin\alpha$	$+H \cos\alpha$	$= N$ (k)
A	245.6	192	-208	= -16	153	+ 261	= 414
1	221.1	177	-199	= -22	132	+268	= 400
2	196.5	165	-181	= -16	106	+281	= 387
3	172.0	150	-162	= -12	83	+292	= 375
4	147.4	133	-142	= -9	62	+303	= 365
5	122.8	114	-121	= -7	44	+311	= 355
6	98.3	94	-100	= -6	29	+319	= 348
7	73.7	72	-78	= -6	17	+325	= 342
8	49.1	48	-56	= -8	8	+329	= 337
9	24.6	244	-34	= -10	2	+332	= 334
10	0.0	0	-11	= -11	0	+334	= 334
Crown						+334	= 334

Table 4

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

where

$$(221.1)(0.80229) = 177$$
$$(333.97)(0.59695) = -199$$
$$177 - 199 = -22$$
$$(221.1)(0.59695) = 132$$
$$(333.97)(0.80229) = +268$$
$$132 + 268 = 400$$

Primo progetto

Ispezione dei valori per il momento M e per la spinta N nelle due tabelle precedenti indica che il segmento 3 è critico nella regione del momento negativo e segmento 10 nella regione di momento positivo. Le sezioni necessarie per la costola, ai centri di questi due segmenti, devono essere determinate in conformità con le specifiche dell'American Institute of Steel Construction (AISC) prima che il tavolo possa essere completato.

Le flange sono 12 in. $\times$ 1 in., e lo stress per la piegatura ammissibile è $F_B = 0.6F_y = (0.6)(30) = 20k/in^2$ (arrotondato per AISC). Lo spessore del web è $\frac{3}{4}$ in., e lo stress assiale ammissibile è F_A=17,000-0.485 L/r^2 (La formula parabolica di Johnson per $L/r > 120$)in psi. L'equazione di Kiney ha lasciato cadere il quadrato in r e non sembra applicare la condizione a L/r. Ci prenderemo $L = \Delta S = 10.798$, poiché le costole sono successivamente braciate al punto di inquadramento del purlin.

La spessore della flangia e delle targhe web e la larghezza dei piatti web sono questioni di giudizio.La profondità totale determinata per il centro del segmento 3 viene utilizzata dal centro di questo segmento alla fine della costola. La profondità determinata per il centro del segmento 10 è arbitrariamente utilizzata per la profondità della costola alla corona.La profondità totale della costoletta dal centro del tratto 3 alla corona è fatta a variare linearmente. Le adeguatezze delle sezioni così determinate per i centri dei diversi segmenti sono controllate di seguito.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Seg.	(2) Total depth (in.)	(3) Area (in^2)	(4) I (in^4)	(5) M (ft-k)	(6) Axial thrust N (k)	(7) $f_a = \frac{N}{A}$ (ksi)	(8) $f_b = \frac{M_c}{I}$ (ksi)	(9) Allow. F_a (ksi)	(10) $\frac{f_a}{F_a}$ +	(11) $\frac{f_b}{F_b}$ =	(12) Decimal of capacity
A	23.00	39.75	3,483		414	10.4		15.88	0.66		0.66
1	23.00	39.75	3,483	50	400	10.1	2.0	15.88	0.63	0.10	0.73
2	23.00	39.75	3,483	140	387	9.7	5.9	15.88	0.61	0.28	0.89
3	23.00	39.75	3,483	170	375	9.4	6.8	15.88	0.60	0.34	0.94
4	22.07	39.05	3,172	150	365	9.3	6.3	15.90	0.59	0.32	0.91
5	21.13	38.35	2,865	110	355	9.2	4.9	15.92	0.58	0.24	0.82
6	20.20	37.65	2,585	50	348	9.2	2.3	15.94	0.58	0.11	0.70
7	19.27	36.95	2,329	10	342	9.3	0.5	15.96	0.58	0.02	0.61
8	18.32	36.24	2,071	70	337	9.3	3.7	15.97	0.58	0.19	0.77
9	17.40	35.55	1,838	110	334	9.4	6.3	15.99	0.59	0.31	0.90
10	16.47	34.85	1,631	130	334	9.6	7.9	16.01	0.60	0.40	1.00
Crown	16.00	34.50	1,527	100	334	9.7	6.3	16.03	0.60	0.32	0.92

Table 5

where

$$23 - (23 - 16.47) * (7 - 3)/(10 - 3) = 19.27$$

$$2(12)(1) + 0.75(19.27 - 2) = 36.95$$

$$\underbrace{2(\underbrace{(12)(1)^3/12}_{bh^3/12} + \underbrace{(12)(1)(17.27/2 + 0.5)^2}_{Ad^2})}_{\text{Flange}} + \underbrace{\underbrace{0.75(17.27/2)^3/12}_{bh^3/12} + \underbrace{0.75(17.27/2)(17.27/4)^2)}_{Ad^2}}_{\text{Web}} = 2,329$$

$$343/36.95 = 9.3$$

$$(120)(19.27)/(2)(2329) = 0.5$$

$$(17,000 - 0.485 \times 10.798 \times 12/(2329/36.95))/1000 = 17.0 \neq 15.96$$

$$9.3/15.96 = 0.58$$

$$0.5/20 = 0.02$$

$$0.58 + 0.02 = 0.61$$

Valori aggiornati della spinta orizzontale

Ora che abbiamo un momento diverso di inerzia, è necessario ricomputare il valore del H_A. Ora dobbiamo usare

$$H_A = -\frac{\sum M\delta\overline{M}/I}{\sum \delta\overline{M}M/I}$$

Il valore riveduto per H_A è facilmente determinato come mostrato di seguito. Nota che i valori nella colonna (2) sono trovati dividendo i valori dei $M\delta\overline{M}$ per i segmenti corrispondenti nella colonna (8) della tabella 2 dal totale I Per ciascun segmento come indicato nella tabella 5. I valori della colonna (3)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

della Tabella 6 sono analoghi a quelli riportati nella colonna (9) della tabella 2. I semplici momenti di fascio nella colonna (5) della tabella 6 vengono prelevati direttamente dalla rubrica (7) della tabella 2:

(1) Segment	(2) $\frac{M\delta\overline{M}}{I}$	(3) $\frac{\delta\overline{M}^2}{I}$	(4) Revised $H_A y$ (ft · k)	(5) M simple beam (ft · k)	(6) Revised moment (ft · k)
1	1.00	0.0031	1,100	1,050	-50
2	8.16	0.0256	3,160	3,010	-150
3	20.79	0.0644	5,020	4,830	-190
4	40.67	0.1247	6,660	6,490	-170
5	66.95	0.2032	8,080	7,950	-130
6	98.57	0.2967	9,270	9,200	-70
7	134.13	0.4012	10,240	10,220	-20
8	173.82	0.5174	10,960	11,000	+40
9	214.41	0.6357	11,450	11,530	+80
10	252.35	0.7472	11,690	11,790	+100
Crown			11,720	11,790	+70
$\sum$	1010.85	3.0192			

Table 6

Thus the revised H_A is

$$H_A = -\frac{2\sum M\delta\overline{M}/I}{2\sum \delta\overline{M}\overline{M}/I} = -\frac{2\times 1,010.85}{2\times 3.0192} = -334.81k$$

I valori riveduti per la spinta assiale N ai centri dei vari segmenti sono calcolati

Segment	V sin α	+	H cos α	=	Revised N (k)
A	153		262		415
1	132		269		401
2	106		282		388
3	83		293		376
4	62		303		365
5	44		312		356
6	29		320		349
7	17		326		343
8	8		330		338
9	2		333		335
10	0		335		335
Crown			335		335

Table 7

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Le sezioni precedentemente progettate nei centri dei segmenti sono controllate per l'adeguatezza. Da questa tabella risulta che tutte le sezioni della costola sono soddisfacenti, ma questo non può essere assolutamente concluso fino a quando non vengono esaminati gli stress secondari causati dalla deflezione della costoletta.

Segment	$\frac{N}{A}$ (k/in^2)	$\frac{M_c}{I}$ (k/in^2)	$\frac{N/A}{F_A}$	+	$\frac{M_c/I}{F_B}$	=	Decimal of capacity
A	10.4		0.66				0.66
1	10.1	2.0	0.64		0.11		0.75
2	9.8	6.0	0.62		0.30		0.92
3	9.5	7.6	0.60		0.38		0.98
4	9.4	7.1	0.59		0.36		0.95
5	9.3	5.7	0.58		0.29		0.87
6	9,3	3.3	0.58		0.17		0.75
7	9.3	1.0	0.58		0.05		0.63
8	9.3	2.1	0.58		0.11		0.69
9	9.4	4.5	0.59		0.23		0.82
10	9.6	6.1	0.60		0.31		0.91
Crown	9.7	4.4	0.61		0.23		0.84

Table 8

39.6 Ex 39.6: Cambiamento di temperatura in un arco

La sezione seguente è riprodotta da Kinney, 1957 Indeterminate Structural Analysis.

Determinare gli effetti di accorciamento delle costole e variazioni della temperatura nella costola dell'arco del precedente esempio (§39.5). Considerare una calo di temperatura di 100°F.

Spostamento orizzontale

Per determinare gli effetti di accorciamento della costola è necessario prima trovare lo spostamento orizzontale dell'estremità A che si tradurrà se i ceppi assiali elastici, che avvengono nell'arco carico effettivo, vengono introdotti nella costola mentre la fine A è su rulli.

È quindi necessario trovare lo spostamento orizzontale di fine A, causata da una forza orizzontale di 1 k che agisce A, considerando sia le tensioni flessografiche che assiali nella costola. A, derivante dal accorciamento della costola causato dai carichi reali, è dato da

$$\sum \frac{N\delta\overline{N}}{AE}\Delta L$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove N è la spinta assiale presa dalla tabella 7 (esempio precedente), $\delta\overline{N}$ è la spinta assiale causata da una forza orizzontale fittizio 1 k che agisce A e pari a cos α nella tabella 1, ΔL è la lunghezza di ogni segmento, e A è l'area di sezione destra.

Lo spostamento orizzontale di A, derivante dall'ammortizzazione della costola causata da una forza orizzontale di 1 k che agisce A, is given by

$$\sum \frac{\delta\overline{N}^2}{AE}\Delta L \tag{39.2}$$

I calcoli necessari per valutare queste due deflettori A sono mostrati qui sotto.

Segment	N (k)	$\delta\overline{N} = \cos\alpha$ (k)	A (in^2)	$\frac{N\delta\overline{N}}{A}$	$\frac{\delta\overline{N}^2}{A}$
1	401	0.8023	39.75	8.07	0.0162
2	388	0.8406	39.75	8.21	0.0178
3	376	0.8752	39.75	8.30	0.0193
4	365	0.9057	39.05	8.49	0.0210
5	356	0.9322	38.35	8.68	0.0227
6	349	0.9544	37.65	8.86	0.0242
7	343	0.9724	36.95	9.04	0.0256
8	338	0.9859	36.24	9.22	0.0268
9	335	0.9949	35.55	9.41	0.0286
10	335	0.9994	34.85	9.60	0.0278
Σ				87.88	0.2300

Table 9

Così, lo spostamento orizzontale di A, derivante dal accorciamento della costola causato dal carico reale, è

$$\sum \delta\overline{N}\frac{N}{AE}\Delta L = \frac{2\times 87.88\times 10.798\times 12}{30,000} = 0.760 \text{ in}$$

e che derivano dal accorciamento della costola causato da un carico orizzontale 1 k a A is

$$\sum \delta\overline{N}\frac{\overline{N}}{AE}\Delta L = \frac{2\times 0.2300\times 10.798\times 12}{30,000} = 0.002 \text{ in}$$

Il valore relativo dello spostamento orizzontale A, derivante dalla tensione flessorale causata da una forza orizzontale di 1 k A, è stato precedentemente determinato nella colonna (3) della tabella 6. Il valore assoluto di tale spostamento è

$$\frac{2\times 3.019\times 10.798\times 1728\times 1728}{30,000} = 3.755 \text{ in} .$$

Il valore totale per lo spostamento A a causa di ceppi sia flessori che assiali derivanti da una forza orizzontale 1 k A è dunque

$$3.755 + 0.002 = 3.757 \text{ in}$$

Riduzione di H_A

Per un sistema elastico lineare, la riduzione H_A a causa di accorciamento della costola sarà

$$\frac{0.760}{3.757} = 0.20 \text{ k}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Una riduzione aggiuntiva H_A si tradurrà da qualsiasi goccia nella temperatura della costola sotto quella temperatura a cui l'arco è eretto. Questo avviene, naturalmente, perché un ulteriore accorciamento della costoletta risulterà. La diminuzione della lunghezza della proiezione orizzontale della costola risultante da una calo di temperatura di 100°F sarà

$$\delta L = \underbrace{0.0000065}_{\alpha} \times 100 \times 200 \times 12 = 1.56 \text{ in} \tag{39.3}$$

La diminuzione risultante nel H_A sarà

$$\frac{1.56}{3.757} = 0.42 \text{ k}$$

E te totale diminuzione H_A a causa sia di accorciamento costola e calo della temperatura è

$$0.20 + 0.42 = 0.62 \text{ k}$$

Questo avrà l'effetto di aumentare il momento vicino al centro della campata.

Incremento del momento

L'ispezione della colonna (6) nella tabella 8 indica che il segmento 10 dovrebbe essere controllato per un possibile sovraffollamento a seguito di tale aumento.

L'aumento del momento al segmento 10 sarà dato da

$$\Delta M = \Delta H_A((y \text{ for segment } 10) = 0.62 \times 34.91 = 21.6 \text{ ft} \cdot \text{k}$$

Il momento di 100 ft·k, come precedentemente determinato per il segmento 10, è esatto solo nei primi due posti, e quindi il momento totale revisionato per il settore 10 sarà

$$100 + 20 = 120 \text{ ft} \cdot \text{k}$$

La spinta di 335 k, precedentemente determinata per il segmento 10, è accurata a tre posti. H_A a causa di accorciamento del costo e cambiamento della temperatura deve essere quindi arrotondata a 1 k per determinare la spinta corretta nel segmento 10. Questa spinta corretta sarà

$$335 - 1 = 334 \text{ k}$$

Tensioni estreme

Lo stress estremo della fibra è

$$f = \frac{M_c}{I} = \frac{120 \times 8.23 \times 12}{1631} = 7.25 \text{ k/in}^2$$

La sezione al segmento 10 è controllata, come indicato nella tabella 8, by

$$\frac{N/A}{F_A} + \frac{M_c/I}{F_B} = \frac{334/34.85}{16.01} + \frac{7.25}{20} = 0.60 + 0.36 = 0.96$$

e ovviamente la sezione al segmento 10 è adeguata.

Non si è tenuto conto degli effetti di un aumento della temperatura, poiché tale aumento può avvenire solo durante i mesi estivi quando non è possibile caricare la neve.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

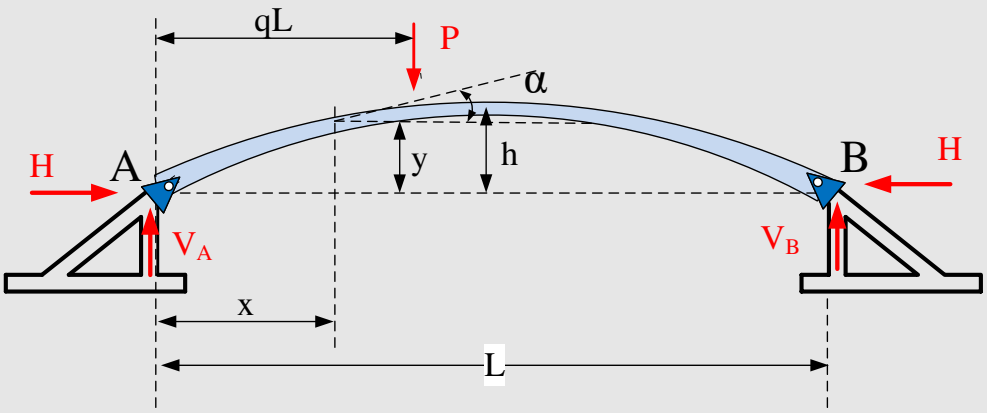
Il metodo di analisi appena dimostrato si applicherà ugualmente bene ad un cemento armato o a un arco biforato in legno. Come già detto, tuttavia pochissimi archi in calcestruzzo rinforzato sono costruiti con due cerniere.

Di particolare rilievo è il fatto che, oltre alla caduta assiale della tensione e della temperatura, il restringimento del cemento in una costola di cemento armato causerà anche l'ammortizzazione delle costole. Il coefficiente di restringimento deve essere determinato per il mix da utilizzare e applicato nell'analisi nello stesso modo generale come dimostrato sopra per il coefficiente della temperatura.

39.7 Ex 39.7: Arco di Parabolico con variazione del secant *I*

La sezione seguente è riprodotta da Kinney, 1957 Indeterminate Structural Analysis.

Un arco parabolico a due cerniere con una variazione di secant dell'inerzia, un metodo per la progettazione di una costola ad arco a due punte è stato dimostrato in §39.5. Si è suggerito in tal modo che la prima analisi per il ridondante H può essere molto bene basato sull'assunzione di un momento costante di inerzia per la costola. Un approccio alternativo al problema è disponibile a causa del fatto che è possibile ideare una espressione piuttosto semplice per il valore di H a condizione che due requisiti siano imposti alla forma e alle proporzioni della costola, i quali sono in primo luogo parabolica la curva dell'asse della costoletta; e, secondo, che il momento di inerzia della costola in qualsiasi sezione particolare deve essere uguale al momento dell'inerzia alla corona moltiplicato per il secente dell'angolo αdove α è l'angolo tra il orizzontale e il tangente all'asse dell'arco in quella particolare sezione.



Considerando la costola caricata con l'unica concentrazione P. Possiamo presumere che il momento dell'inerzia della costola varia in modo che

$$I = I_c \sec \alpha$$

COPIA DI REVISIONE

dove I_c è il momento dell'inerzia alla corona e I il momento dell'inerzia in qualsiasi sezione. L'asse a arco è parabolico. L'equazione per la parabola A, is

$$y = 4h\left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right)$$

Supponiamo che la fine A è su rulli.

$$H = -\frac{\Delta_{Ah}}{\delta_{AhAh}} = -\frac{\int M\delta\overline{M}ds/EI}{\int \delta\overline{M}^2 ds/EI}$$

dove Δ_{Ah} è la deflezione orizzontale A come causato da Pe δ_{aAhAh} è la deflezione orizzontale A derivante dall'azione di una forza orizzontale da 1 k che agisce a sinistra A. Il momento in costola a qualsiasi sezione (con fine A su rulli) come causato da P è rappresentato da Me $\delta\overline{M}$ è il momento causato dalla forza orizzontale 1 k A.

Nell'equazione sopra le seguenti relazioni si applicano:

$$m = y, \qquad ds = \sec\alpha dx, \qquad I = I_c \sec\alpha$$

Quando queste sostituzioni sono fatte, l'espressione sopra per H riduce a

$$H = -\frac{\int Mydx}{\int y^2 dx}$$

and

$$\begin{aligned}&\text{For } x < qLM = P(l-q)x\\ &\text{For } x > qLM = P(l-q)x - P(x-qL) = Pq(L-x)\end{aligned}$$

Quando i valori per M e y sono sostituiti nell'equazione sopra per H e l'integrazione indicata eseguita, il risultato è

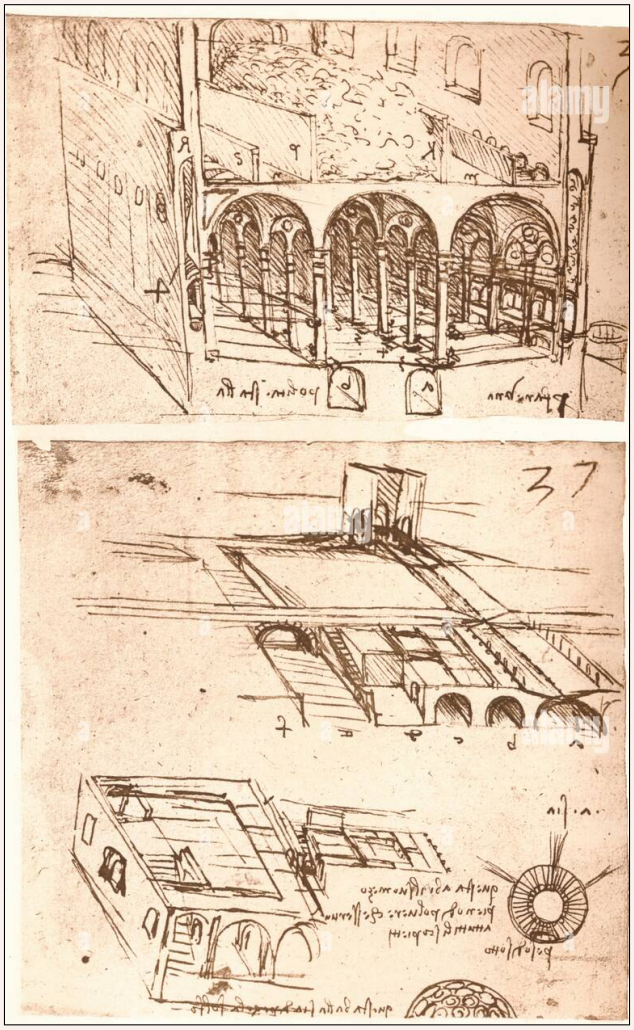
$$H = \frac{5PL}{8h}(q - 2q^3 + q^4)$$

Sebbene l'equazione sopra sia derivata per il particolare tipo di costola come descritto in precedenza, è di qualche valore nell'analisi preliminare delle costole solide a due punte con curve assiali diverse dal parabolico e avendo I variazioni diverse da proporzionali al secondo α. I valori che ne risultano H se, per esempio, l'equazione precedente viene applicata alla costola caricata di Esempio §39.5, il valore calcolato del H sarà 339.14 k. Il valore corretto è stato trovato essere 334.81 k.

Notare che se una linea di influenza per H è richiesto, allora P è preso come unità e valori di q sono sostituiti che corrispondono alle varie sezioni per le quali si desidera influenzare le ordinazioni della linea.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Architectural Sketches, Leonardo da Vinci, late 15th century.

Epitoma la fase di progettazione preliminare, dove le idee iniziali vengono tradotte in concetti visivi attraverso disegni spontanei e investigativi.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Parte III

Intermedio: metodi numerici

A differenza del precedente libro, che si è concentrato sulle soluzioni analitiche, questo libro predefinisce gli approcci numerici e può essere giustamente intitolato "Finite Element Analysis of Skeletal Structures".

Il libro inizia con un'introduzione al metodo di rigidità diretta, utilizzando elementi derivati dalle relazioni di forza-slocamento nelle strutture scheletriche. In seguito, il metodo variazionale viene formalmente introdotto, a partire dall'equazione Euler, portando al quadro completo del metodo degli elementi finiti.

Nel corso del libro vengono discusse varie considerazioni relative a questi metodi (come l'analisi dinamica, la formulazione dell'elemento isoparametrico).

La portata è limitata alle strutture elastiche lineari.

COPIA DI REVISIONE

Capitolo 40

Introduzione al metodo diretto della rigidezza

Abstract

Il primo capitolo del Libro III porrà le basi per l'analisi numerica delle strutture scheletriche, rivisitando alcuni concetti precedentemente definiti ma dispersi. La sezione finale, soprattutto, contestualizza l'analisi strutturale come un problema di valore limite.

40.1 Perché l'analisi strutturale matrice? . 1526
40.2 Idealizzazione strutturale 1528
40.3 Convegno di firma 1530
40.4 Sistemi di coordinamento 1530
40.5 Flessibilità *vs.* Stiffa 1531
40.6 Gradi di libertà 1532
40.7 Statistiche *vs.* Indeterminanza cinematica 1534
40.8 Analisi strutturale/meccanica; problema del valore limite 1535

40.1 Perché l'analisi strutturale matrice?

1 Nella maggior parte del curriculum di ingegneria civile, gli studenti sono tenuti per seguire corsi in: Statici, Forza dei materiali, Struttura di base Analisi. Quest'ultimo corso è fondamentale che introduce le basi analisi strutturale (determinazione delle reazioni, deflettori e forze interne) sia staticamente determinate che indeterminate strutture.

2 Anche i metodi di energia sono introdotti, e la maggior parte se non tutti sono due elementi dimensionali, poiché l'accento è sulla soluzione a mano, molto raramente sono tre strutture dimensionali analizzate. I metodi coperti, per la maggior parte si prestano

COPIA DI REVISIONE

per "back delle soluzioni della busta' e non necessariamente per l'implementazione del computer.

3 Gli studenti che vogliono perseguire una specializzazione in struttura ingegneria / meccanica, prendere corsi più avanzati come Matrix Analisi strutturale e/o analisi degli elementi finiti.

4 Analisi strutturale della matrice, o analisi strutturali avanzate, o Introduzione all'ingegneria strutturale Elemento finito, si basa sul corso di analisi introduttiva per concentrarsi su quei metodi che si prestano all'implementazione del computer. In questo modo, ci metteremo enfasi uguale sia sulle strutture bidimensionali che tridimensionali, e sviluppare una comprensione approfondita dell'analisi computerizzata delle strutture.

5 Questo è essenziale, come nella pratica più, se non tutti, l'analisi strutturale sono fatti dal computer ed è imperativo che come ingegneri strutturali capisci cosa c'è dentro quelle "scatole nere" autoassicurazione per essere in grado di aprirli e modificarli per eseguire alcuni compiti specifici, e soprattutto per capire il loro limitazioni.

6 Con l'enfasi recentemente posta sul metodo degli elementi finiti nella maggior parte scuole di specializzazione, molti studenti sono stati tentati di saltare un corso come questo e si precipita in un elemento finito uno. Quindi è importante che si capisce il legame e il ruolo di quei due corsi. Il metodo Elemento Finito affronta l'analisi di due o tre continuum dimensionale. Come tale, gli sconosciuti primari sono $\mathbf{u}$ il nodale dislocazioni e le "forze" interne sono solitamente limitate allo stress σ. L'unica struttura analoga una dimensione è la tregua.

7 considerando che il continuum bidimensionale e tridimensionale sono essenziali per la civile ingegneria per modellare strutture come dighe, conchiglie e fondazione, la maggior parte delle strutture di ingegneria civile sono costituite da "rod' elementi unidimensionali come travi, traverse o colonne. elementi, "displacements' e 'forces' interni sono in qualche modo più complesso di quelli incontrati in elementi finiti continuum.

8 Quindi, in contraria all'elemento finito continuum dove lo spostamento è per lo più sinonimo di traduzione, in elementi dimensionali e a seconda della il tipo di struttura, spostamenti generalizzati possono includere la traduzione, e/o rotazione flessorale e/ o torsione. Allo stesso modo, "forze interne" non sono stress, ma piuttosto forze assiali e di taglio, e/o flessorale o momenti torsionali, questi concetti sono molto più rilevanti nel analisi/progettazione della maggior parte delle strutture di ingegneria civile.

9 Quindi, Matrix Structural Analysis è davvero un percorso di ponte tra analisi introduttiva e corsi di elementi finiti. La rigidità dell'elemento matrice $[\mathbf{k}]$ sarà prima derivato utilizzando metodi introdotti nella base analisi strutturale e in seguito utilizzando concetti basati sull'energia. l'approccio è quello utilizzato esclusivamente nel metodo degli elementi finiti.

10 Un componente importante di questo corso è la programmazione del computer. Una volta che la teoria e gli algoritmi sono spiegati a fondo, sarà previsto programmarli in

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Matlab. Il programma sarà eseguire l'analisi di 2 e 3 truffe dimensionali e telaio strutture, e molti studenti hanno successivamente utilizzato nel loro attività professionali.

11 Ci sarà un compito del computer in cui sarete si prevede di eseguire semplici manipolazioni simboliche utilizzando *Mathematica*.

40.2 Idealizzazione strutturale

12 Prima dell'analisi, una struttura deve essere idealizzata per un adatto rappresentazione matematica. Dal momento che è praticamente impossibile (e la maggior parte spesso inutili) per modellare ogni singolo dettaglio, le ipotesi devono essere fatte. Quindi, l'idealizzazione strutturale è tanto un'arte quanto una scienza. *Alcuni* delle domande che affrontano l'analista includono:

1. Due dimensionali contro tre dimensioni; Dovremmo modellare un singolo baia di un edificio, o l'intera struttura?
2. Cornice o tregua, possiamo trascurare rigidità flessorale?
3. Collegamenti rigidi o semirigidi (più importanti nelle strutture in acciaio)
4. Supporti rigidi o fondazioni elastiche (sono le fondamenta sopra roccia solida, o sopra argilla che possono consolidare nel tempo)
5. Includere o non membri secondari (come le parentesi diagonali in tre analisi dimensionale).
6. Analisi dinamica? quando la frequenza del carico applicato (eccitazione) di una struttura è inferiore a circa un terzo della sua minore frequenza naturale di vibrazione, allora possiamo trascurare gli effetti inerziali e trattare il problema come quasi-statico, altrimenti dinamica Per una struttura molto flessibile, anche un carico applicato lentamente può richiedere un'analisi dinamica.
7. Ceppi a carico di tempo? come il calcestruzzo, Fig. 40.1, o il rilassamento dei cavi prestressanti, o altri effetti a carico del tempo (come corrosione o fatica)

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

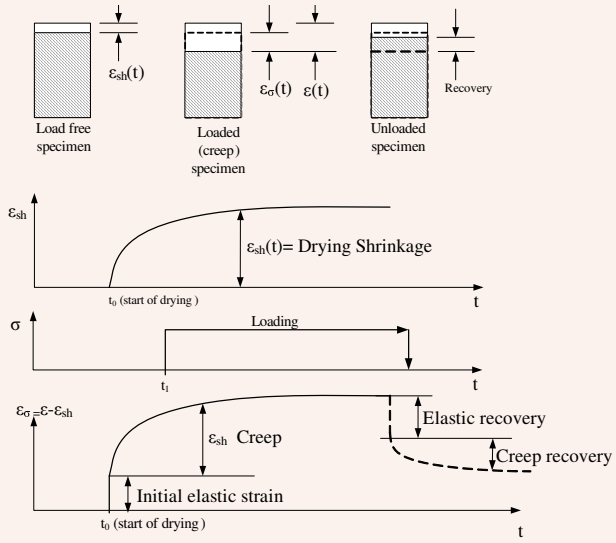


Figura 40.1: Ceppo dipendente dal tempo; strisciamento e restringimento

8. Effetti della temperatura: ad esempio, le temperature della pelle dell'edificio possono essere considerate, Fig. 40.2 come causerebbe carico non simmetrico.

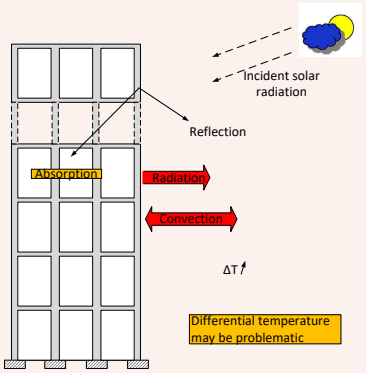


Figura 40.2: Carico termico per la costruzione

9. Includiamo o non deformazione assiale (può trascurare la rigidità assiale di un fascio in un edificio?)
10. Proprietà sezionali della croce (che è il momento dell'inerzia di un trave in cemento armato?), §46.6.3.
11. Negli ultimi anni, i paesi dell'Est hanno un tasso di disoccupazione superiore a quello del Nord. momenti negativi)
12. Analisi lineare o non lineare (l'analisi lineare non può prevedere carico di picco o guasto, e sottovaluterà le deformazioni).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

13. Small deformation ($\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$) or large deformation ($\varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2$, P-$\Delta$ effects), chapter 29. Note that in the analysis of a high rise building subjected to wind load, the moments should be amplified by the product of the axial load times the lateral deformation, $P - \Delta$ effects).
14. Collasso parziale o resa locale (potrebbe essere il fallimento di un singolo elemento innescare il fallimento dell'intera struttura?).
15. Carico del vento (la deriva laterale di un edificio ad alto livello sottoposto a carico del vento, è spesso la principale limitazione alle strutture più elevate).
16. Stress secondari (causato dalla saldatura. Presente nella maggior parte staticamente strutture indeterminate).

40.3 Convegno di firma

13 La convenzione dei segni nell'analisi strutturale è completamente diverso da quello precedentemente adottato in struttura analisi/design, Fig. 40.3 (dove ci siamo concentrati soprattutto sulla flessione e abbiamo definito un momento positivo come uno che causa "tensione qui sotto'. Questo sarebbe imbarazzante programmare!).

14 In matrice analisi strutturale, la convenzione dei segni adottata è coerente con il sistema di coordinate prevalente. Quindi, definiamo un positivo il momento come uno che è in senso antiorario.

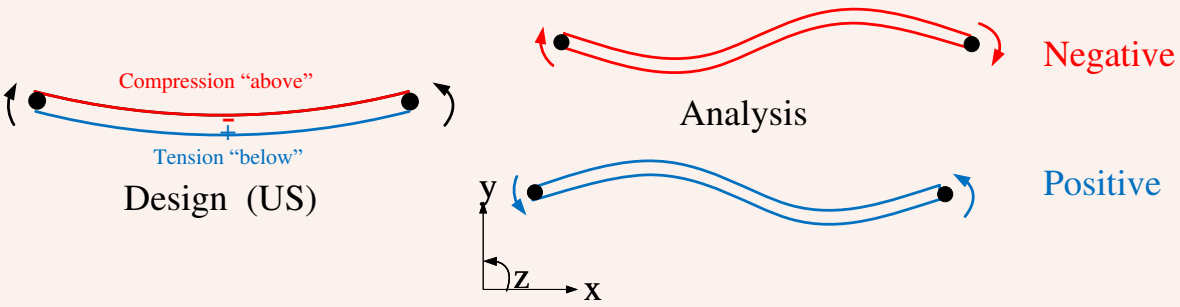


Figura 40.3: Firma Convenzione, Design e Analisi (Fig. 26.1)

40.4 Sistemi di coordinamento

15 Dovremmo differenziare tra 2 sistemi di coordinate:

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

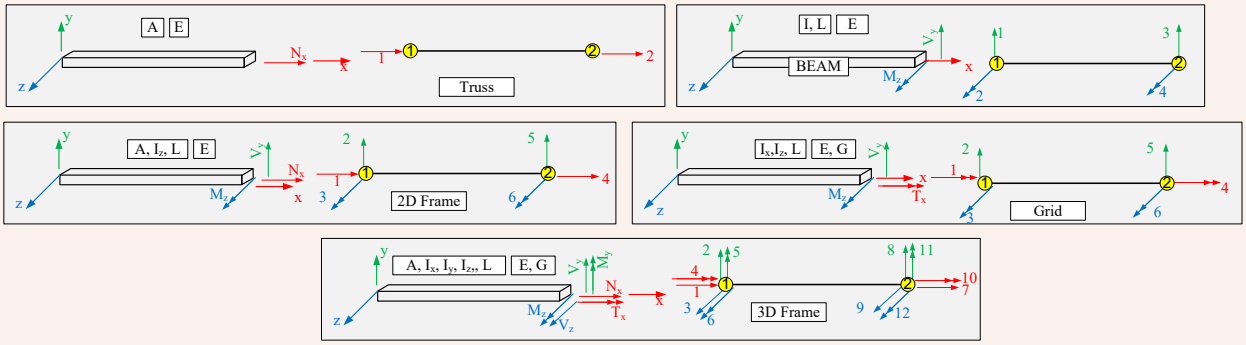


Figura 40.4: Elementi forze interne e dof locali

Globale: per descrivere le coordinate nodali della struttura. Questo sistema può essere selezionato arbitrariamente a condizione che sia un lato destro (RHS) uno, e noi associamo etichette per asse della cassa superiore, X, Y, ZFico. 40.7 o 1,2,3 (indici di esecuzione all'interno di un programma per computer).

Locale: sistema è associato a ogni elemento e viene utilizzato per descrivere le forze interne dell'elemento. etichette di asse del caso inferiore, x, y, z (o 1,2,3), Fig. 40.4.

16 Il x-assi si presume essere lungo il membro, e la direzione è scelto tale che indica dal primo nodo al secondo nodo, Fig. 40.4.

40.5 Flessibilità *vs.* Stiffa

17 In §26.1, abbiamo già evidenziato le differenze chiave tra i metodi di flessibilità (forza) e rigidità (slocamento), che completano la copertura.

18 Nel metodo di flessibilità, abbiamo fatto una struttura *staticamente determinato* e analizzato l'intera struttura. Nel metodo di rigidità, faremo la struttura (elemento o tutta la struttura) *la definizione di* by

1. Applicare uno spostamento di unità ad ogni dof (§40.6) j (mentre restringono tutti gli altri ad essere zero)
2. Determinazione delle reazioni associate a tutte le altre dof i:

Così, $k_i j$ corrisponderà alla reazione a dof i a causa di una deformazione unitaria (traduzione o rotazione) a dof j.

19 Nel metodo di flessibilità cerchiamo spostamenti in termini delle forze applicate esternamente ($\mathbf{\Delta}(\mathbf{F})$). Derivati per una struttura; d'altra parte nel metodo di rigidità, cerchiamo le forze interne in termini di spostamenti esterni ($\mathbf{F}(\mathbf{\Delta})$).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

20 Questi erano già derivati per elementi (capitolo 26), e poi gettato in forma matrice (capitolo 41).

40.6 Gradi di libertà

Definition 40.1: Grado di libertà

Un grado di libertà (dof) è un nodale generalizzato indipendente lo spostamento o la forza a un nodo.

21 Gli spostamenti devono essere linearmente indipendenti e quindi non sono legati l'uno all'altro. Ad esempio, un supporto a rulli su una inclinazione aereo avrebbe tre spostamenti (rotazione θe due traduzioni u e v), tuttavia poiché i due spostamenti sono cinematicamente vincolato, abbiamo solo due spostamenti indipendenti. Fig. 40.5.

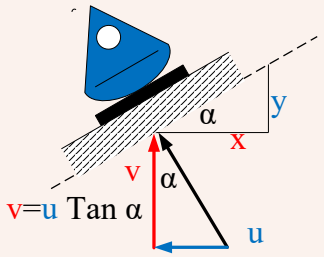


Figura 40.5: Sviluppi indipendenti

22 Un dof di elementi è definito dal proprio sistema di coordinate locali, un dof strutturale viene definito con un sistema globale di coordinate Fig. 40.6.

23 Si noti che ci siamo riferiti *generalizzato* a seconda del tipo di struttura, non ci può essere nessuno, uno o più di un tale spostamento. È deplorevole che nella maggior parte dei corsi introduttivi nell'analisi strutturale, sia stata posta troppa enfasi su strutture bidimensionali e non sufficiente su quelle tridimensionali o di due dimensioni con torsione.

24 Nella maggior parte dei casi, c'è lo stesso numero di d.o.f nelle coordinate locali come nel sistema di coordinate globale. Una eccezione notevole è la tromba elemento. Nella coordinate locali possiamo avere solo una deformazione assiale, mentre nelle coordinate globali ci sono due o tre traduzioni in 2D e 3D rispettivamente per ogni nodo.

25 È quindi essenziale che comprendiamo i gradi di libertà che possono essere associati ai vari tipi di strutture costituite da elementi asta dimensionali.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

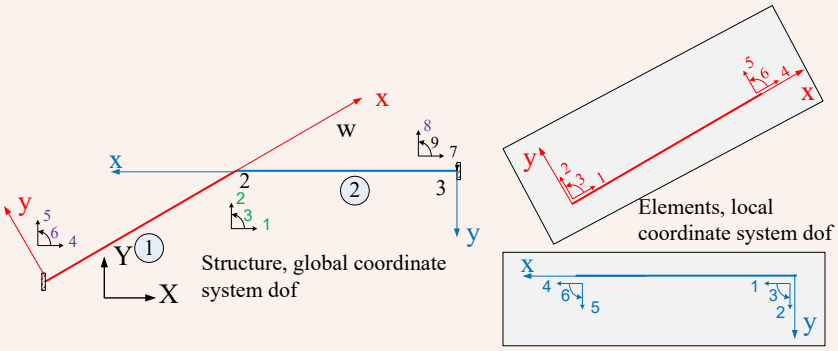


Figura 40.6: Sistema di coordinate locali e globali/dof

Definition 40.2: Gradi di libertà di diversi elementi

.

Type		Node 1	Node 2	$[\mathbf{k}^{(e)}]$ (Locale)	$[\mathbf{K}^{(e)}]$ (Global)
1 Dimensione					
Signora	$\{\mathbf{p}\}$	F_{y1}, M_{z2}	F_{y3}, M_{z4}	4×4	4×4
	$\{\delta\}$	v_1, θ_2	v_3, θ_4		
2 Dimensione					
Truss	$\{\mathbf{p}\}$	F_{x1}	F_{x2}	2×2	4×4
	$\{\delta\}$	u_1	u_2		
Telaio	$\{\mathbf{p}\}$	$F_{x1}, F_{y2}, M_{z3},$	$F_{x4}, F_{y5}, M_{z6},$	6×6	6×6
	$\{\delta\}$	$u_1, v_2, \theta_3,$	$u_4, v_5, \theta_6,$		
Griglia	$\{\mathbf{p}\}$	T_{x1}, F_{y2}, M_{z3}	$T_{x4}, F_{y5}, M_{z6},$	6×6	6×6
	$\{\delta\}$	θ_1, v_2, θ_3	$\theta_4, v_5, \theta_6,$		
3 Dimensione					
Truss	$\{\mathbf{p}\}$	$F_{x1},$	F_{x2}	2×2	6×6
	$\{\delta\}$	$u_1,$	u_2		
Telaio	$\{\mathbf{p}\}$	$F_{x1}, F_{y2}, F_{y3},$ $T_{x4}\ M_{y5}, M_{z6}$	$F_{x7}, F_{y8}, F_{y9},$ $T_{x10}\ M_{y11}, M_{z12}$	12×12	12×12
	$\{\delta\}$	$u_1, v_2, w_3,$ $\theta_4, \theta_5, \theta_6,$	$u_7, v_8, w_9,$ $\theta_{10}, \theta_{11}, \theta_{12},$		

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

26 Dovremmo distinguere tra locale e globale - E' il mio amico. Il regime di numerazione segue le seguenti regole semplici:

Locale: dof per un dato elemento: Inizia con il primo nodo, numera la dof locale nello stesso ordine di i sottoscritti del relativo sistema di coordinate locali, e ripeti per il secondo nodo, Fig. 40.4.

Globale: dof per l'intera struttura: A partire dal primo nodo, numerare tutti i dof globali non frenati, e poi passare al prossimo fino a quando tutto il d.o.f globale è stato numerato, Fig. 40.7.

40.7 Statistiche *vs.* Indeterminanza cinematica

27 Il grado di indeterminanza statica è stato definito prima, il numero di forze sconosciute che non possono essere determinate dalle equazioni appropriate ed equilibrio (più le equazione delle condizioni).

28 Per analogia, il *grado di indeterminanza cinematica* è il *totale* Il concetto è fondamentale per comprendere correttamente il metodo di spostamento che sarà coperto nei capitoli successivi.

29 Con riferimento a Fig. 40.7, i gradi di indeterminanza statica e cinemeatica sono mostrati nella tabella 40.1.

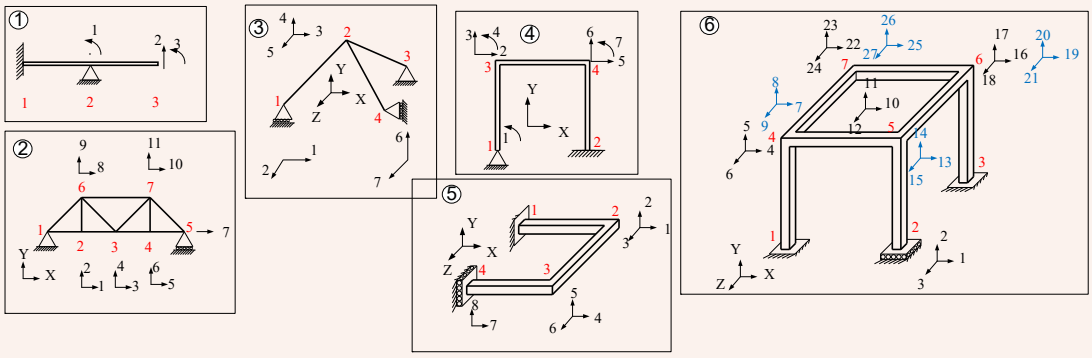


Figura 40.7: Gradi di indeterminatezza statica e cinematica

COPIA DI REVISIONE

Tabella 40.1: Gradi di indeterminatezza statica e cinematica

ID	Statistiche Indeterminanza	Kinematico Indeterminanza
1	1	3
2	0	11
3	0	7
4	2	7
5	2	6
6	9	27

40.8 Analisi strutturale/meccanica; problema del valore limite

30 L'analisi di una struttura è essenzialmente risolvere un problema di valore limite (governato da un'equazione differenziale sul volume Ωe sottoposte a condizioni di confine spazio/temporale lungo il confine Γ).

31 Nel nostro caso stiamo discostando la nostra struttura, e l'equazione differenziale di governo (equilibrio) è incorporata in $\mathbf{K\Delta} = \mathbf{P}$E il confine può essere decomposto in $\Gamma = \Gamma_t \bigcup \Gamma_u$ Tabella 40.2. Questo sarà dettagliato 47.2.6 .

Tabella 40.2: Condizioni di confine essenziali e naturali

Γ	Trazione	Centrale.	Matematica.	- Struct.	DOF
Γ_t	$\mathbf{P}_t^{\checkmark}$	$\mathbf{\Delta}_t^{?}$	Neuman	Essential	Free
Γ_u	$\mathbf{R}_u^{?}$	$\mathbf{\Delta}_u^{\checkmark}$	Dirichlet	Natural	Fixed/Constrained

32 Esempi del problema dei limiti discreti sono mostrati in Fig. 40.8 Per il fascio e la diga, dobbiamo determinare gli spostamenti lungo Γ_t e le forze (reazioni) lungo Γ_u.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

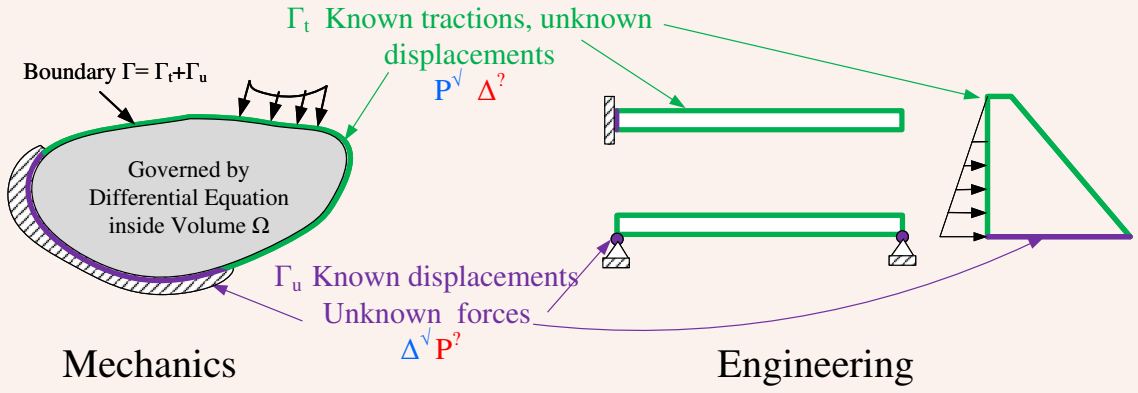
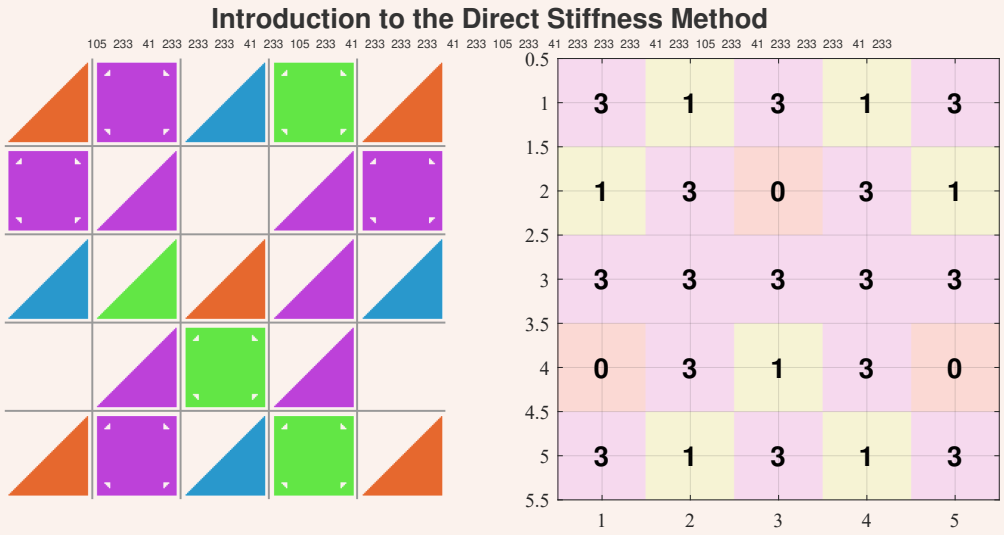


Figura 40.8: Problema di valore boundario



Identicona specifica del capitolo, chapter H

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 41

Matrici di rigidezza dell'elemento $\mathbf{k}^{(e)}$

Abstract

Nel capitolo 26 Abbiamo derivato espressioni per forze (in equilibrio) in termini di spostamenti (compatibili), molti (ma non tutti) di queste espressioni sono stati utilizzati nel capitolo successivo (slope-deflection e distribuzione del momento). In preparazione al metodo di rigidità diretta, dovremo riorganizzare quelle espressioni in forma matrice, più specificamente metteremo insieme le matrici di rigidezza degli elementi per diversi tipi di elementi. Questo sarà ampliato per includere St Venant e Vlasov torsion, così come le travi Timoshenko.

41.1 Definizione del termine di stiffamento . . . 1537
41.2 Elemento di truss 1539
41.3 Signora: Euler-Bernoulli 1539
41.4 Elemento telaio 2D (elemento trave-colonna) 1540
41.5 Elemento di griglia 1540
41.6 Elemento di trave 3D 1541
41.7 Trave di Timoshenko 1543
41.7.1 Deformazione aggiuntiva . . 1543
41.7.2 Modifica della matrice di rigidità dell'elemento 1545
41.8 Torsione di Vlasov 1546

41.1 Definizione del termine di stiffamento

[1] Rivisiteremo le varie espressioni delle forze in termini di spostamenti noti derivati nel capitolo 26, e riscriverli in forma matrice. Ciò provocherà il cosiddetto *coefficienti di rigidità* k_{ij} che corrispondono alla forza in grado di libertà i a causa di un'unità spostamento in grado di libertà jFico. 41.1

COPIA DI REVISIONE

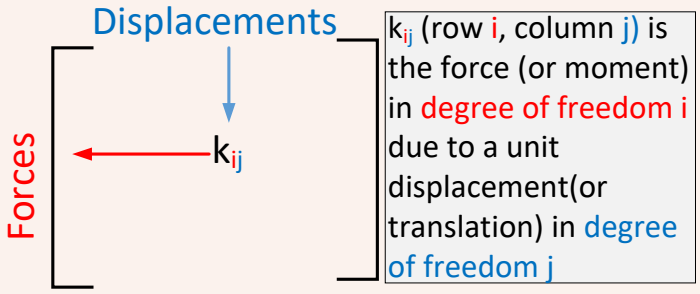


Figura 41.1: Definizione del termine di rigidità K_{ij}

2 I coefficienti per diversi tipi di elementi sono indicati in Fig. 41.2.

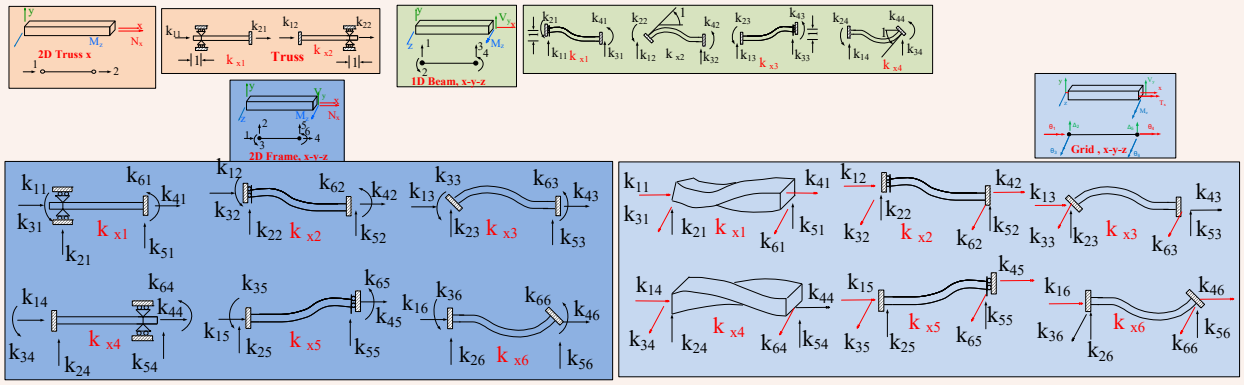


Figura 41.2: Coefficienti di stiffamento per vari tipi di elementi

e corrispondono alle forze indicate di seguito.

Definition 41.1: Forze interne per diversi tipi di elementi

	Forze			Momenti		
	x	y	z	x	y	z
Signora		V_y				M_z
Telaio 2D	N_x	V_y				M_z
Griglia		V_y		T_x		M_z
Telaio 3D	N_x	V_y	V_z	T_x	M_y	M_z

3 Pertanto, questo capitolo raccoglierà i coefficienti di rigidità degli elementi del Capitolo26, e conservarli in forme matrici: elementi rigidità matrice.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

41.2 Elemento di truss

4 L'elemento di travatura reticolare (sia in 2D sia in 3D) ha un solo grado di libertà associato a ciascun nodo. Pertanto, dall'Eq. 26.1, si ha

$$\mathbf{k}^{\mathrm{t}} = \begin{matrix} \\ p_1 \\ p_2 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} u_1 & u_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

41.3 Signora: Euler-Bernoulli

5 Utilizzo delle equazioni 26.4, 26.5, 26.8 e 26.9 possiamo determinare le forze associate a ogni spostamento dell'unità.

$$\mathbf{k}^{\mathrm{b}} = \begin{matrix} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} v_{1y} & \theta_{1z} & v_{2y} & \theta_{2z} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \text{Eq. } 26.8(v_1=1) & \text{Eq. } 26.8(\theta_1=1) & \text{Eq. } 26.8(v_2=1) & \text{Eq. } 26.8(\theta_2=1) \\ \text{Eq. } 26.4(v_1=1) & \text{Eq. } 26.4(\theta_1=1) & \text{Eq. } 26.4(v_2=1) & \text{Eq. } 26.4(\theta_2=1) \\ \text{Eq. } 26.9(v_1=1) & \text{Eq. } 26.9(\theta_1=1) & \text{Eq. } 26.9(v_2=1) & \text{Eq. } 26.9(\theta_2=1) \\ \text{Eq. } 26.5(v_1=1) & \text{Eq. } 26.5(\theta_1=1) & \text{Eq. } 26.5(v_2=1) & \text{Eq. } 26.5(\theta_2=1) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

6 Sostituire

$$\mathbf{k}^{\mathrm{b}} = \begin{matrix} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} v_{1y} & \theta_{1z} & v_{2y} & \theta_{2z} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{41.1}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

41.4 Elemento telaio 2D (elemento trave-colonna)

7 Gli elementi in cornice 2D sono elementi di trave con rigidità assiale simile a quella di una tregua. $\mathbf{k}^{\text{2dfr}} = \mathbf{k}^{\text{b}} \cup \mathbf{k}^{\text{t}}$. Si noti che non c'è alcun accoppiamento tra le forze assiali e la cinghia / movimento.

$$\mathbf{k}^{\text{2dfr}} = \begin{array}{c} \\ N_{1x} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ N_{2x} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_{1x} & v_{1y} & \theta_{1z} & u_{2x} & v_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} k^{\text{t}}_{11} & 0 & 0 & k^{\text{t}}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & k^{\text{b}}_{11} & k^{\text{b}}_{12} & 0 & k^{\text{b}}_{13} & k^{\text{b}}_{14} \\ 0 & k^{\text{b}}_{21} & k^{\text{b}}_{22} & 0 & k^{\text{b}}_{23} & k^{\text{b}}_{24} \\ k^{\text{t}}_{21} & 0 & 0 & k^{\text{t}}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & k^{\text{b}}_{31} & k^{\text{b}}_{32} & 0 & k^{\text{b}}_{33} & k^{\text{b}}_{34} \\ 0 & k^{\text{b}}_{41} & k^{\text{b}}_{42} & 0 & k^{\text{b}}_{43} & k^{\text{b}}_{44} \end{bmatrix} \end{array}$$

8 Sostituire

$$\mathbf{k}^{\text{2dfr}} = \begin{array}{c} \\ N_{1x} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ N_{2x} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_{1x} & v_{1y} & \theta_{1z} & u_{2x} & v_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \end{array} \tag{41.2}$$

41.5 Elemento di griglia

9 La matrice di stiffness dell'elemento griglia è molto analoga a quella del telaio 2D, tranne che il componente assiale viene sostituito da quello torsionale.

$$\mathbf{k}^{\text{g}} = \begin{array}{c} \\ T_{1x} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ T_{2x} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \alpha_{1x} & v_{1y} & \beta_{1z} & \alpha_{2x} & v_{2y} & \beta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \text{Eq. 23.13} & 0 & 0 & -\text{Eq. 23.13} & 0 & 0 \\ 0 & k^{\text{b}}_{11} & k^{\text{b}}_{12} & 0 & k^{\text{b}}_{13} & k^{\text{b}}_{14} \\ 0 & k^{\text{b}}_{21} & k^{\text{b}}_{22} & 0 & k^{\text{b}}_{23} & k^{\text{b}}_{24} \\ -\text{Eq. 23.13} & 0 & 0 & \text{Eq. 23.13} & 0 & 0 \\ 0 & k^{\text{b}}_{31} & k^{\text{b}}_{32} & 0 & k^{\text{b}}_{33} & k^{\text{b}}_{34} \\ 0 & k^{\text{b}}_{41} & k^{\text{b}}_{42} & 0 & k^{\text{b}}_{43} & k^{\text{b}}_{44} \end{bmatrix} \end{array}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

10 Sostituire

$$[\mathbf{k}^{\mathrm{g}}] = \begin{array}{c} \\ T_{1x} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ T_{2x} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \alpha_{1x} & v_{1y} & \beta_{1z} & \alpha_{2x} & v_{2y} & \beta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \end{array}$$

41.6 Elemento di trave 3D

11 Per l'elemento di trave 3D, ricordiamoci i 12 gradi di libertà, Fig. 41.3

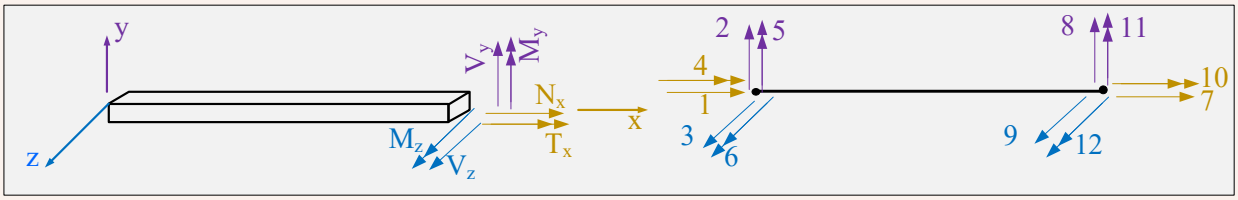


Figura 41.3: Gradi di libertà dell'elemento trave 3D

+

12 Ora possiamo ricostruire la matrice di rigidità dell'elemento da termini già introdotti in quelli di altri elementi più semplici.

$$\mathbf{k}^{\mathrm{3dfr}} = \begin{array}{c} \\ N_{x1} \\ V_{y1} \\ V_{z1} \\ T_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ N_{x2} \\ V_{y2} \\ V_{z2} \\ T_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} u_{1x} & v_{1y} & w_{1z} & \theta_{1x} & \theta_{1y} & \theta_{1z} & u_{2x} & v_{2y} & w_{2z} & \theta_{2x} & \theta_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} k^{\mathrm{t}}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{t}}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{11} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{12} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{13} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{14} \\ 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{11} & 0 & -k^{\mathrm{b}}_{12} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{13} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{g}}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{g}}_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{21} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{22} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{12} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{24} & 0 \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{21} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{22} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{23} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{24} \\ k^{\mathrm{t}}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{t}}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{31} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{32} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{33} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{34} \\ 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{31} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{42} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{33} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{g}}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{g}}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k^{\mathrm{b}}_{41} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{32} & 0 & 0 & 0 & -k^{\mathrm{b}}_{43} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{44} & 0 \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{41} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{42} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{43} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{44} \end{bmatrix} \end{array}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

13 Sostituire, otteniamo

$$\mathbf{k}^{\text{3dfr}} = \begin{array}{c} \\ N_{x1} \\ V_{y1} \\ V_{z1} \\ T_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ N_{x2} \\ V_{y2} \\ V_{z2} \\ T_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} u_{1x} & v_{1y} & w_{1z} & \theta_{1x} & \theta_{1y} & \theta_{1z} & u_{2x} & v_{2y} & w_{2z} & \theta_{2x} & \theta_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_z & 0 & 0 & 0 & \gamma_z & 0 & -\beta_z & 0 & 0 & 0 & \gamma_z \\ 0 & 0 & \beta_y & 0 & -\gamma_y & 0 & 0 & 0 & -\beta_y & 0 & -\gamma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_y & 0 & 2\delta_y & 0 & 0 & 0 & \gamma_y & 0 & \delta_y & 0 \\ 0 & \gamma_z & 0 & 0 & 0 & 2\delta_z & 0 & -\gamma_z & 0 & 0 & 0 & \delta_z \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_z & 0 & 0 & 0 & -\gamma_z & 0 & \beta_z & 0 & 0 & 0 & -\gamma_z \\ 0 & 0 & -\beta_y & 0 & \gamma_y & 0 & 0 & 0 & \beta_y & 0 & \gamma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_y & 0 & \delta_y & 0 & 0 & 0 & \gamma_y & 0 & 2\delta_y & 0 \\ 0 & \gamma_z & 0 & 0 & 0 & \delta_z & 0 & -\gamma_z & 0 & 0 & 0 & 2\delta_z \end{bmatrix} \end{array}$$

dove

$$\alpha = \frac{EA}{L}; \quad \beta_i = \frac{12EI_i}{L^3}; \quad \gamma_i = \frac{6EI_i}{L^2}; \quad \delta_i = \frac{2EI_i}{L}; \quad \varepsilon = \frac{GI_x}{L};$$

e $i = [y|z]$

14 I coefficienti di rigidità sono indicati nella figura. 41.4

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

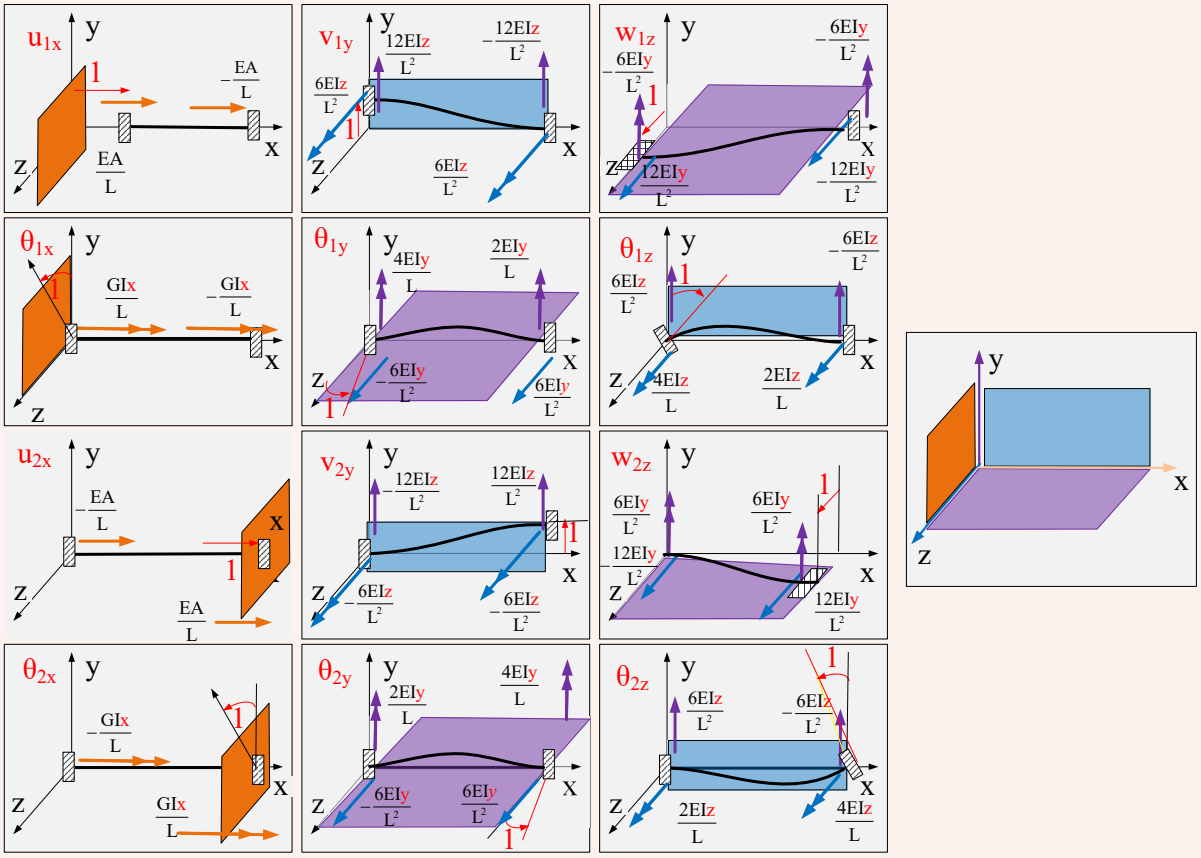


Figura 41.4: Termini di rigidità individuale in un elemento 3D

41.7 Trave di Timoshenko

15 In §23.1 Abbiamo derivato le espressioni per la deformazione aggiuntiva "parassita" introdotta dalle deformazioni delle cesoie, che li tratterà regolando l'originale (Euler-Bernoulli) formulazione del fascio.

41.7.1 Deformazione aggiuntiva

16 Nello spirito del metodo di rigidità, immettiamo uno spostamento unitario (traduzione o rotazione) al corrispondente grado di libertà mentre tutti gli altri sono tenuti a zero.§26.3), non abbiamo considerato la deformazione della cesoia, che a sua volta getterà alcuni termini "parassitari" alle forze ottenute.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Traslazione Per una traslazione unitaria imposta, iniziamo definendo *arbitrariamente*[1]

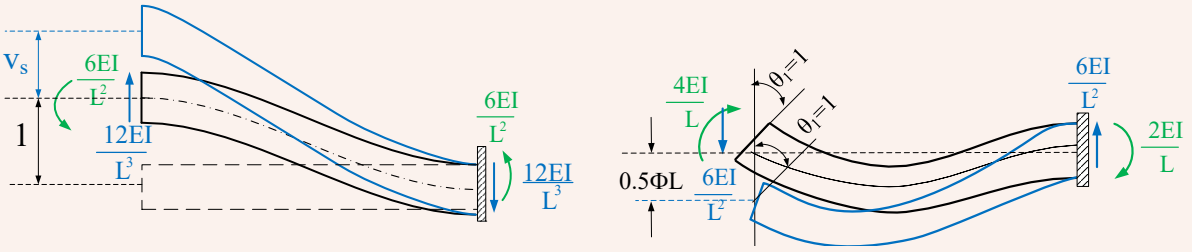
$$\Phi \overset{\text{def}}{=} \frac{12EI}{GA_sL^2} = 24(1+\nu)\frac{A}{A_s}\left(\frac{r}{L}\right)^2$$

Sarà mostrato in seguito che v_s (Eq. 23.11) è correlato a Φ. Ricordate che $A_s = A/\lambda_s$ (Eq. 23.4), poi a causa di un *unità traduzione verticale*, la forza di taglio finale è ottenuta da Eq. 26.8 e impostazione $v_1 = 1$ e $\theta_1 = \theta_2 = v_2 = 0$, or $V = \frac{12EI_z}{L^3}$. At $x = 0$ abbiamo (Eq. 23.11)

$$\left.\begin{aligned} v_s &= \tfrac{VL}{GA_s} \\ V &= \tfrac{12EI_z}{L^3} \end{aligned}\right\} v_s = \underbrace{\frac{12EI}{GA_sL^2}}_{\Phi}$$

Così, la deformazione della tosaia ha aumentato la traduzione totale da 1 a $1 + \Phi$.

Rotazione Allo stesso modo, ora cerchiamo di determinare la deformazione parassita associata a una rotazione dell'unità imposta. Anche se una rotazione θ_1 si applica,



(a) Traduzione di un'unità

(b) Rotazione unità

Figura 41.5: Deformazione parassita della cesoia causata da deformazioni imposte

viene indotta una forza parassita interna di taglio e ciò a sua volta darà luogo alle deformazioni delle cesoie (traduzione) che devono essere cancellate (di nuovo, permettiamo solo un grado di libertà di deformare, rotazione in questo caso, e tutti gli altri deve rimanere zero). La forza di taglio è ottenuta da Eq. 26.8 e impostazione $\theta_1 = 1$ e $\theta_2 = v_1 = v_2 = 0$, or $V = \frac{6EI_z}{L^2}$. At $x = 0$noi avremo

$$\left.\begin{aligned} v_s &= \tfrac{VL}{A_sG} \\ V &= \tfrac{6EI_z}{L^2} \\ \Phi &= \tfrac{12EI}{GA_sL^2} \end{aligned}\right\} v_s = 0.5\Phi L$$

Quindi, la deformazione della cesoia ha spostato la fine del fascio (che doveva avere una traduzione zero) *giù* di $0.5\Phi L$.

[1] Si ricordi che $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$ e $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

41.7.2 Modifica della matrice di rigidità dell'elemento

17 Se le deformazioni della tosapa sono presenti, dobbiamo alterare la rigidità Matrix Eq. 41.1 per questi due effetti:

Traduzione: dividere (o normalizzare) i coefficienti del primo e terzo colonne della matrice di rigidità da $1+\Phi$ in modo che la rete traduzione a entrambe le estremità è unità altrimenti spostamento sarebbe $1+\Phi$ invece of 1.

Rotazione e l'effetto della deformazione delle cesoie

1. Le forze indotte alle estremità a causa di una rotazione unitaria alla fine 1 (seconda colonna) trascurando deformazioni della tosapa, sono

$$V_1 = -V_2 = \frac{6EI}{L^2}; \quad M_1 = \frac{4EI}{L}; \quad M_2 = \frac{2EI}{L}$$

2. C'è una traduzione netta positiva di $0.5\Phi L$ alla fine 1 quando noi ha applicato una rotazione dell'unità, nessuna forza aggiuntiva indotta.
3. Per una rotazione dell'unità, tutti gli altri spostamenti dovrebbero essere zero $\Rightarrow$. Quindi, dovrebbe contrastare questa deformazione parassita della cesoia da una uguale e opposta $\Rightarrow$ applicare un ulteriore Δ spostamento verticale. $-0.5\Phi L$ e le forze aggiuntive indotte alle estremità (prima colonna) sono date da

$$\Delta V_1 = -\Delta V_2 \underbrace{\frac{12EI}{L^3}}_{k^b_{11}} \frac{1}{1+\Phi} \underbrace{(-0.5\Phi L)}_{v_s}$$

$$\Delta M_1 = \Delta M_2 \underbrace{\frac{6EI}{L^2}}_{k^b_{21}} \frac{1}{1+\Phi} \underbrace{(-0.5\Phi L)}_{v_s}$$

I disinfestanti sono già stati suddivisi per $1+\Phi$ in k^b.

4. Riassumendo tutte le forze, abbiamo indotto le forze a causa di una rotazione unitaria solo quando gli effetti delle deformazioni sia pieganti che taglio sono inclusi.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

$$V_1 = -V_2 = \underbrace{\frac{6EI}{L^2}}_{\substack{\text{Due to a}\\ \text{unit rotation}}} + \underbrace{\underbrace{\frac{12EI}{L^3}}_{k^t_{11}} \frac{1}{1+\Phi} \underbrace{(-0.5\Phi L)}_{v_s}}_{\text{Parasitic shear}} = -\frac{6EI}{L^2}\frac{1}{1+\Phi}$$

$$M_1 = \underbrace{\frac{4EI}{L}}_{\substack{\text{Due to a}\\ \text{unit rotation}}} + \underbrace{\underbrace{\frac{6EI}{L^2}}_{k^t_{21}} \frac{1}{1+\Phi} \underbrace{(-0.5\Phi L)}_{v_s}}_{\text{Parasitic shear}} = \frac{4+\Phi}{1+\Phi}\frac{EI}{L}$$

$$M_2 = \underbrace{\frac{2EI}{L}}_{\substack{\text{Due to a}\\ \text{unit rotation}}} + \underbrace{\underbrace{\frac{6EI}{L^2}}_{k^t_{21}} \frac{1}{1+\Phi} \underbrace{(-0.5\Phi L)}_{v_s}}_{\text{Parasitic shear}} = \frac{2-\Phi}{1+\Phi}\frac{EI}{L}$$

18 Element stiffness matrix given in Eq. 41.1 becomes

$$\mathbf{k}^{\text{bv}} = \begin{array}{c} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_{1y} & \theta_{1z} & v_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3(1+\Phi_y)} & \frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} & -\frac{12EI_z}{L^3(1+\Phi_y)} & \frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} \\ \frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} & \frac{(4+\Phi_y)EI_z}{(1+\Phi_y)L} & -\frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} & \frac{(2-\Phi_y)EI_z}{L(1+\Phi_y)} \\ -\frac{12EI_z}{L^3(1+\Phi_y)} & -\frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} & \frac{12EI_z}{L^3(1+\Phi_y)} & -\frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} \\ \frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} & \frac{(2-\Phi_y)EI_z}{L(1+\Phi_y)} & -\frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} & \frac{(4+\Phi_y)EI_z}{L(1+\Phi_y)} \end{bmatrix} \end{array}$$

41.8 Torsione di Vlasov

19 Eq. 23.2.2 ha fornito la torsione e il bimomento in termini di rotazione del nodale finale.

20 Applicare le seguenti condizioni di confine delle forze, (Bhatt, 1986)

$$\begin{array}{lll} \text{End 1} & x = 0, & T = -T_1, \quad B = -B_1, \\ \text{End 2} & x = L, & T = T_2, \quad\ \ B = B_2, \end{array}$$

Otteniamo la matrice di rigidità dell'elemento per un elemento torsione con il deformazione, Fig. 41.6

$$\begin{Bmatrix} T_{x1} \\ B_{y1} \\ T_{x2} \\ B_{y2} \end{Bmatrix} = \frac{GJ}{L} \underbrace{\begin{bmatrix} TW_{11} & TW_{12} & -TW_{11} & TW_{12} \\ & TW_{22} & -TW_{12} & TW_{24} \\ & & TW_{11} & -TW_{12} \\ & & & TW_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}^{\text{V}}} \begin{Bmatrix} \beta_{x1} \\ \beta'_{y1} \\ \beta_{x2} \\ \beta'_{y2} \end{Bmatrix} \tag{41.3}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

and

$$
\begin{aligned}
TW_{11} &= SpLD \\
TW_{12} &= L(C-1)D \\
TW_{22} &= L^2\left(C - \frac{S}{pL}\right)D \\
TW_{24} &= L^2\left(\frac{S}{pL} - 1\right)D \\
D &= \frac{1.0}{\left[2(1-C) + SpL\right]}
\end{aligned}
$$

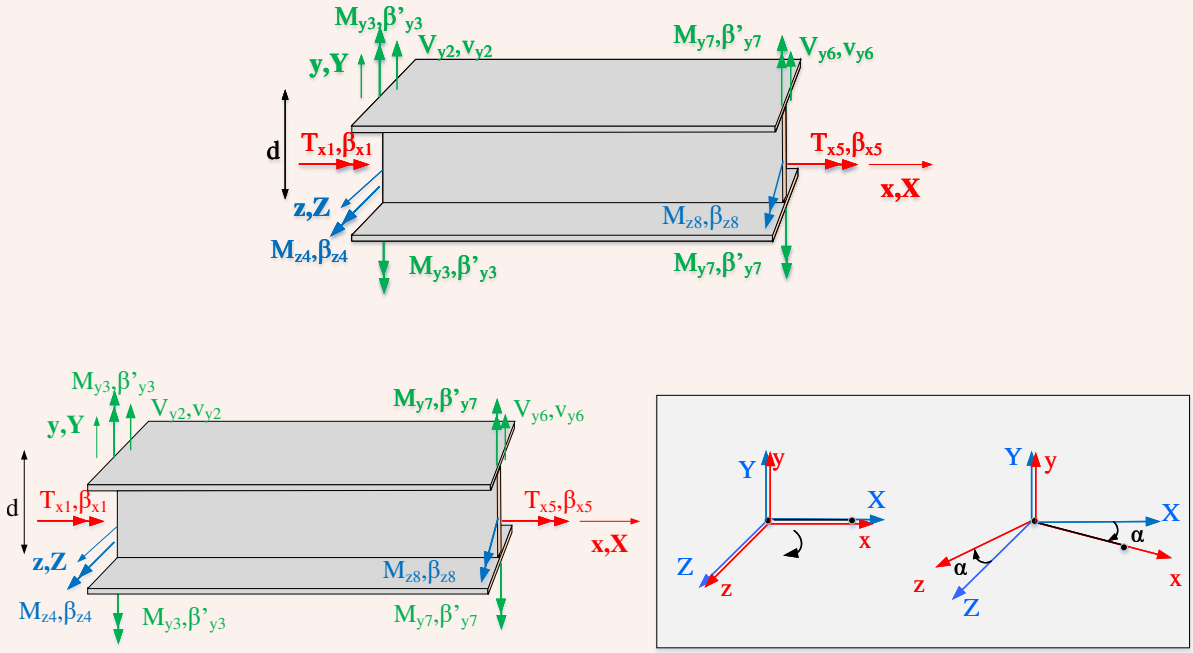


Figura 41.6: Forze di fine e spostamenti di un elemento torsione con la resistenza di curvatura

21 Nota: $B_1 = M_{y1}d$ e $B_2 = M_{y2}d$ (Eq. 23.14)

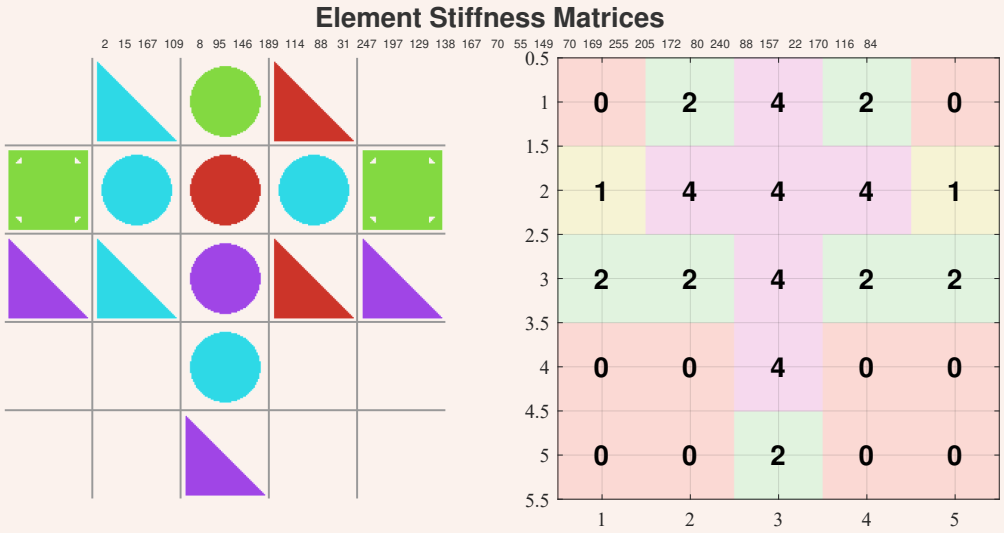
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

22 Tuttavia questa non è la matrice completa di rigidità dell'elemento, come abbiamo bisogno di aggiungere i Termini di Venant ($\mathbf{k}^{gw} = \mathbf{k}^{g} \cup bk^{V}$)

$$\begin{Bmatrix} T_{x1} \\ V_{y2} \\ M_{y3} \\ M_{z4} \\ T_{x5} \\ V_{y6} \\ M_{y7} \\ M_{z8} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_{x1} & v_{y1} & \beta'_{y1} & \beta_{z1} & \beta_{x2} & v_{y2} & \beta'_{y2} & \beta_{z2} \\ TW'_{11} + \frac{GJ}{L} & 0 & TW'_{12} & 0 & -TW'_{11} - \frac{GJ}{L} & 0 & TW'_{12} & 0 \\ & \frac{12EI}{L^2} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12}{EI}L^2 & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ & & TW'_{22} & 0 & -TW'_{12} & TW'_{24} & 0 & 0 \\ & & & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ & & & & TW'_{11} + \frac{GJ}{L} & 0 & -TW'_{12} & 0 \\ & & & & & \frac{12EI}{L^2} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ & & & & & & TW'_{22} & 0 \\ & & & & & & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}^{gw}} \begin{Bmatrix} \beta_{x1} \\ v_{y2} \\ \beta'_{y3} \\ \beta_{z4} \\ \beta_{x5} \\ v_{y6} \\ \beta'_{y7} \\ \beta_{z8} \end{Bmatrix}$$

where $TW'_{ij} = \frac{GJ}{L} TW_{ij}$.



Chapter-specific identicon, chapter H

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 42

Metodo della rigidezza: strutture ortogonali

Abstract

Ora si comprende il concetto di matrice di rigidità degli elementi, e quindi bisogna estendere questo concetto a una matrice strutturale di rigidezza e analizzare una struttura completa. Tuttavia, affronteremo la sfida di regolare la matrice della rigidità dell'elemento per allineare con il sistema globale delle coordinate della struttura. Anche se questo compito può sembrare semplice, è lasciato per il prossimo capitolo. In questo capitolo, semplificamo il problema limitandoci alle strutture ortogonali, permettendoci di regolare la matrice della rigidità dell'elemento mediante un semplice controllo. Attraverso questa semplificazione, introdurremo delicatamente un metodo sistematico per determinare l'equilibrio per tutta la struttura. Una volta che gli spostamenti vengono calcolati, recuperaremo le forze interne all'interno degli elementi. Pertanto, questo capitolo è fondamentale per presentare un metodo programmabile che estende i calcoli basati sulla mano per la distribuzione del momento o metodi di deflettorazione dei pendi introdotti nel Capitolo 27.

42.1 Introduzione 1550
42.2 Teoria 1550
42.2.1 Flessibilità rivisitata 1550
42.2.2 Metodo di rigidità diretto . . 1551
42.2.3 Dall'elemento alla struttura . 1552
42.3 Esempi 1553
42.3.1 Ex 42.1: Trave ortogonale . . 1553
42.3.2 Ex 42.2: Cornice ortogonale . 1555
42.3.3 Ex 42.3: Griglia 1562
42.3.4 Ex 42.4: Cornice ibrida . . . 1566
42.3.5 Ex 42.5: Griglia ibrida 1570

COPIA DI REVISIONE

42.1 Introduzione

1 Nel capitolo precedente abbiamo prima derivato le relazioni di forza di spostamento per diversi tipi di elementi 1D o asta, e poi utilizzato tali rapporti per definire matrici di rigidità degli elementi nelle coordinate locali per singoli elementi.

2 In questo capitolo, cerchiamo di eseguire operazioni simili, ma per una struttura ortogonale in coordinate globali.

3 Nel capitolo precedente il nostro punto di partenza era le relazioni fondamentali con la forza dello spostamento che hanno portato a matrici di rigidità degli elementi [**k**].

4 In questo capitolo, il nostro punto di partenza sono quelle stesse rigidità degli elementi matrici [**k**], e il nostro obiettivo è quello di determinare la matrice della struttura rigidità [**K**], che quando invertito, avrebbe dato gli spostamenti nodali.

5 Le matrici di rigidità degli elementi sono state ricavate per una totale tenuta elementi.

6 Questo capitolo sarà limitato alle strutture ortogonali, e La generalizzazione sarà discussa più tardi, le matrici di rigidità saranno limitate ai livelli indiretti della libertà.

7 Da questi esempi, le interrelazioni tra matrice di rigidità della struttura, spostamenti nodali e azioni a fine fissa diventeranno evidenti. 44 descrivere un algoritmo che può automatizzare l'assemblaggio della struttura matrice di rigidità globale in termini di uno dei suoi elementi individuali.

42.2 Teoria

8 Come "veicolo" per l'introduzione al metodo di rigidità consideriamo il problema in Fig 42.1, e riconoscere che ci sono solo due spostamenti sconosciuti, o più precisamente, due d.o.f globali: θ_1 e θ_2.

9 Semplicemente mettere:

Flessibilità: Quali sono le forze (reazioni) che garantiranno la compatibilità (di spostamenti in dof liberato?

Stiffness: Quali sono gli spostamenti] che garantirà l'equilibrio?

42.2.1 Flessibilità rivisitata

10 Se dovessimo analizzare questo problema con il metodo forza (o flessibilità), allora

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

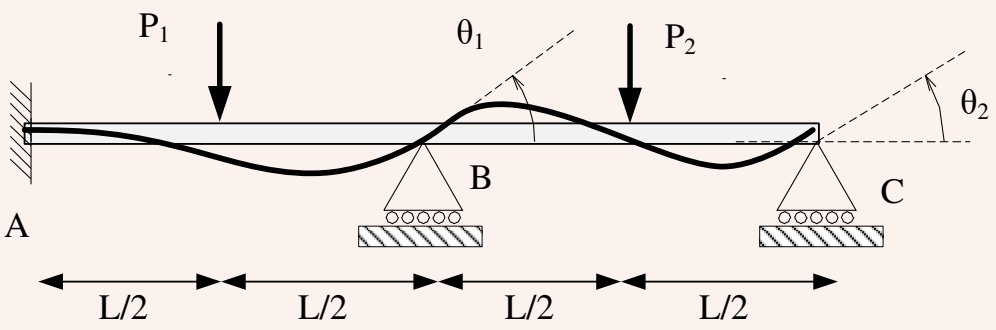


Figura 42.1: Esempio di confronto tra flessibilità e rigidità

1. Facciamo la struttura in modo statistico determinato rimuovendo *arbitrariamente* due reazioni (finché la struttura rimane stabile), e il fascio è ora staticamente determinato.
2. Supponendo che si rimuovino i due supporti a rulli, allora determinamo le deflettenze corrispondenti dovute al carico effettivo (Δ_B e Δ_C).
3. Applicare un carico unitario al punto Be poi Ce calcolare le deflettenze f_{ij} a nota i a causa di una forza unitaria al nodo j.
4. Scrivere la compatibilità dell'equazione di spostamento

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_B \\ R_C \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

5. Invertire la matrice e risolvere le reazioni

42.2.2 Metodo di rigidità diretto

Per il contesto storico, consultare §12.2.5

11 Nella nostra discorizzazione, non risolviamo il problema come un continuo attraverso la soluzione di una equazione differenziale parziale, ma piuttosto come un problema discretizzato tramite l'algebra lineare. La discorsizzazione si concentrerà sulle quantità nodali, e se ci sarà un carico lungo l'elemento, dovremmo calcolare il carico equivalente nodale corrispondente (analogo alle azioni di fine fissa, ma segno opposto).

1. Il primo passo consiste nel renderlo kinematicamente determinato (come in questo caso, la determinazione della cieca significa semplicemente restringere tutta la dof e quindi prevenire la rotazione delle articolazioni, Fig 42.2.
2. Quindi, determinamo le azioni di fine fissa causate dal carico dell'elemento e li invieremo per ogni dof: la somma del carico equivalente nodale ΣNEL_1 e ΣNEL_2.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

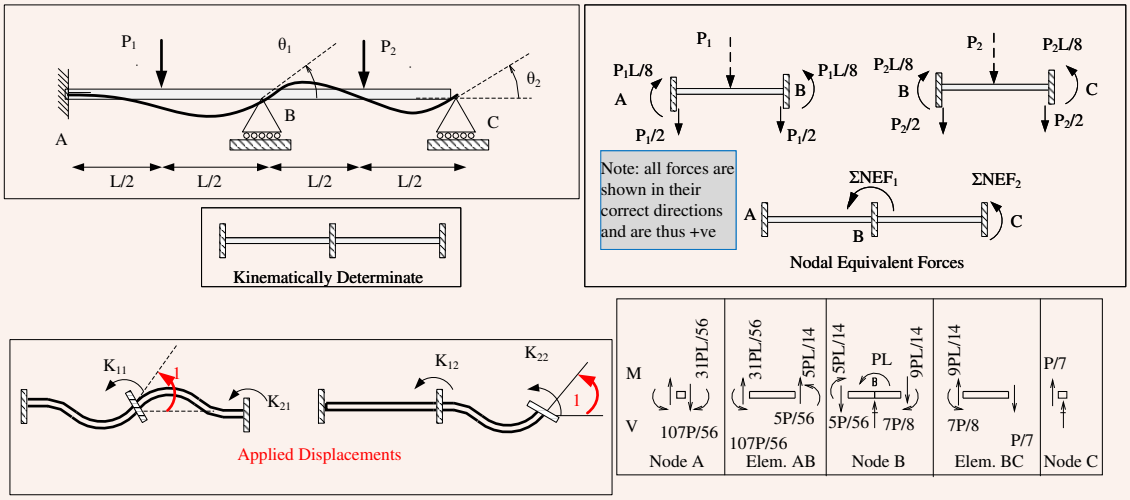


Figura 42.2: Esempio di fascio per determinare il grado di indeterminanza cinematica

3. Nel terzo passo, applichiamo uno spostamento unitario (rotazione in questo caso) a ogni grado di libertà alla volta e in ogni caso determineremo le forze di reazione interne, K_{11}, K_{21}e K_{12}, K_{22} Nota che usiamo **[K]**, piuttosto che **[k]** Poiché queste sono forze nel sistema di coordinate globale, si noti ancora una volta che ci concentriamo solo sulle forze di reazione corrispondenti a un livello globale di libertà. non stanno tentando di determinare la reazione al nodo A.
4. Infine, scriviamo l'equazione dell'equilibrio a ogni nodo:

$$\left\{ \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \Sigma \text{NEL}_1 \\ \Sigma \text{NEL}_2 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \end{array} \right\}$$

12 Si noti che il FEM è sul lato destro, sono determinati come le reazioni al carico applicato. Rigorosamente parlando, è un carico che dovrebbe apparire sul lato sinistro dell'equazione e sono i carichi equivalenti nodali al carico degli elementi (più di questo più avanti).

13 Come con la matrice di rigidità dell'elemento, ogni voce nella matrice globale della rigidezza K_{ij}, corrisponde alla forza interna lungo dof i a causa di un'unità di spostamento (generalizzato) lungo dof j (entrambi nei sistemi di coordinate globali).

42.2.3 Dall'elemento alla struttura

14 Matrice di stiffness dei singoli elementi sono stati precedentemente derivati in sistema di coordinate locali, e assegnate lettere minuscole **k**.

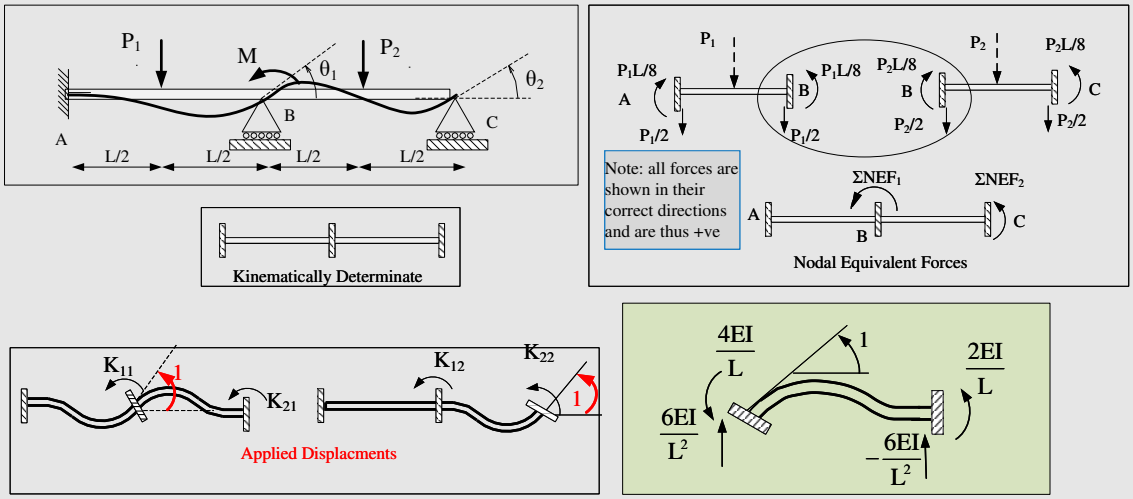
15 Ora, avremo bisogno di ricavare la matrice rigidità di una struttura in sistema di coordinate globale e userà la parte superiore **K**. Questo capitolo riguarda solo le strutture ortogonali, tali da consentire la trasformazione **k** to **K** è intuitivo (altrimenti per forze e spostamenti).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

42.3 Esempi

42.3.1 Ex 42.1: Trave ortogonale



Per $P_1 = 2P$, $M = PL$ e $P_2 = P$, cerchiamo di risolvere per gli spostamenti.

1. Il grado di indeterminanza cinematica è 2.
2. Utilizzando la convenzione di segnale precedentemente definita, determinare il carico equivalente nodale (al carico applicato lungo il membro)

$$\Sigma\text{NEF}_1 = \underbrace{\frac{P_1 L}{8}}_{BA} - \underbrace{\frac{P_2 L}{8}}_{BC} = \frac{2PL}{8} - \frac{PL}{8} = \frac{PL}{8}$$

$$\Sigma\text{NEF}_2 = \underbrace{\frac{PL}{8}}_{CB}$$

3. Se occorre $\frac{4EI}{L}\left(k_{44}^{BA}\right)$ per ruotare BA e $\frac{4EI}{L}\left(k_{22}^{BC}\right)$ per ruotare BC, occorre una forza totale di $\frac{8EI}{L}$ per ruotare simultaneamente BA e BC. La somma delle rigidezze rotazionali al grado di libertà globale 1 è $K_{11} = \frac{8EI}{L}$;
4. Similarly, $K_{21} = \frac{2EI}{L}\left(k_{42}^{BC}\right)$. Se ora ruotamo dof 2 da un angolo di unità, avremo $K_{22} = \frac{4EI}{L}\left(k_{22}^{BC}\right)$ e $K_{12} = \frac{2EI}{L}\left(k_{42}^{BC}\right)$. Equazione dell'equilibrio:

$$\underbrace{\underbrace{\begin{Bmatrix} PL \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{p}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{PL}{8} \\ \frac{PL}{8} \end{Bmatrix}}_{NEF}}_{P_{ext}} - \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta_1^? \\ \theta_2^? \end{Bmatrix}}_{\mathbf{\Delta}}}_{P_{int}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

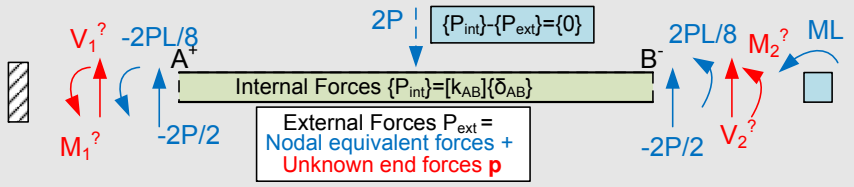
Nota che abbiamo $P_{ext} - P_{int} = 0$ e non $P_{ext} + P_{int} = 0$ perché le forze esterne devono essere resistite da quelle interne in una direzione uguale e opposta.

$$\begin{Bmatrix} PL + \frac{PL}{8} \\ +\frac{PL}{8} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1^? \\ \theta_2^? \end{Bmatrix}$$

5. Invertire i due da due matrice

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} PL + \frac{PL}{8} \\ +\frac{PL}{8} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{17}{112}\frac{PL^2}{EI} \\ -\frac{5}{112}\frac{PL^2}{EI} \end{Bmatrix}$$

6. Successivamente dobbiamo determinare le forze interne
7. Richiamo che per ogni elemento $\{\mathbf{p}\} = [\mathbf{k}]\{\boldsymbol{\delta}\}$e in questo caso $\{\mathbf{p}\} = \{\mathbf{P}\}$ e $\{\boldsymbol{\delta}\} = \{\boldsymbol{\Delta}\}$ per elemento AB. La matrice di rigidità dell'elemento è stata precedentemente derivata, e in questo caso il dof globale e locale sono gli stessi. Poi, dobbiamo calcolare le forze interne dell'elemento.
8. Equazione di equilibrio per l'elemento AB, a livello dell'elemento, può essere scritta come (nota che dobbiamo includere i carichi equivalenti nodali per mantenere l'equilibrio):



$$\underbrace{\underbrace{\begin{Bmatrix} V_1^? \\ M_1^? \\ V_2^? \\ M_2^? \end{Bmatrix}}_{\{\mathbf{p}\}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -\frac{2P}{2} \\ -\frac{2PL}{8} \\ -\frac{2P}{2} \\ \frac{2PL}{8} \end{Bmatrix}}_{\text{NEF}}}_{p_{ext}} - \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{k}^{AB}]} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{17}{112}\frac{PL^2}{EI} \end{Bmatrix}}_{\{\boldsymbol{\delta}^{AB}\}}}_{p_{int}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

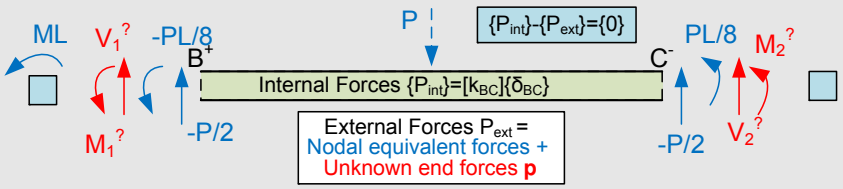
Questo passo si chiama Ricupero della forza, cioè noi determiniamo le forze interne dagli spostamenti nodali. Risolvere

$$\lfloor\ V_1 \quad M_1 \quad V_2 \quad M_2\ \rfloor = \lfloor\ \frac{107}{56}P \quad \frac{31}{56}PL \quad \frac{5}{56}P \quad \frac{5}{14}PL\ \rfloor$$

9. Analogamente, per elemento BC:

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



$$\underbrace{\underbrace{\begin{Bmatrix} V_1^? \\ M_1^? \\ V_2^? \\ M_2^? \end{Bmatrix}}_{\{\mathbf{p}\}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -\frac{P}{2} \\ -\frac{PL}{8} \\ -\frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \end{Bmatrix}}_{\text{NEF}}}_{P_{ext}} - \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{k}^{BC}]} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{17}{112}\frac{PL^2}{EI} \\ 0 \\ -\frac{5}{112}\frac{PL^2}{EI} \end{Bmatrix}}_{\left\{\boldsymbol{\delta}^{BC}\right\}}}_{P_{int}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

or

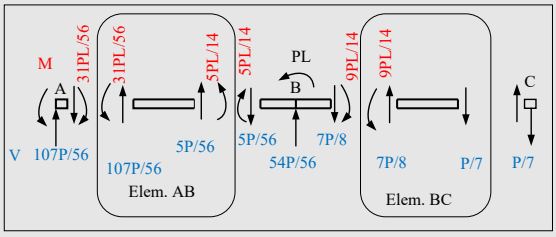
$$\lfloor\ p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4\ \rfloor = \lfloor\ \tfrac{7}{8}P \quad \tfrac{9}{14}PL \quad -\tfrac{P}{7} \quad 0\ \rfloor$$

10. Questo semplice esempio richiede le seguenti osservazioni:

    (a) Node A ha contributi da elemento AB solo, mentre il nodo B ha contributi da entrambi AB e BC.

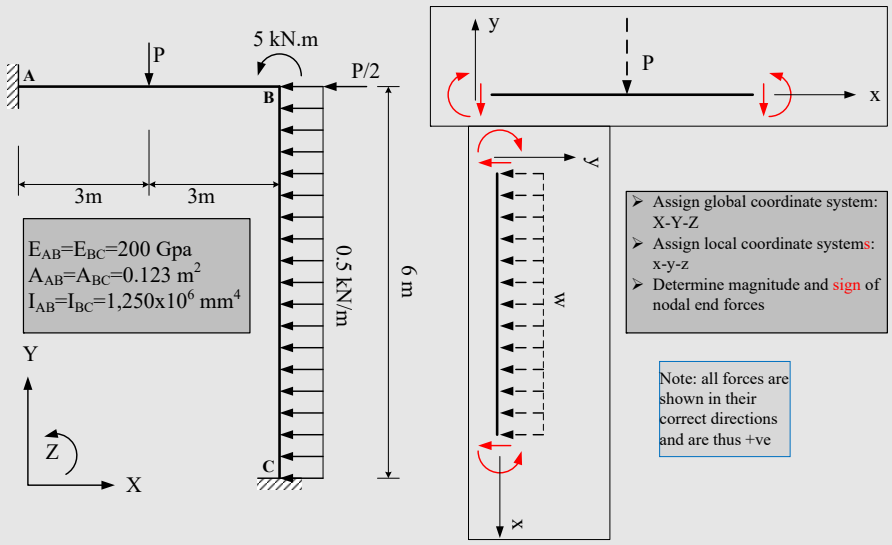
    (b) Osserviamo che $p_3^{AB} \neq p_1^{BC}$ anche se entrambi corrispondono a una forza di taglio al nodo B, la differenza tra loro è uguale alla reazione a B. Allo stesso modo, $p_4^{AB} \neq p_2^{BC}$ a causa del momento applicato esternamente al nodo B.

    (c) Deve concludere con il corpo libero, la cesoia e diagrammi di momento,



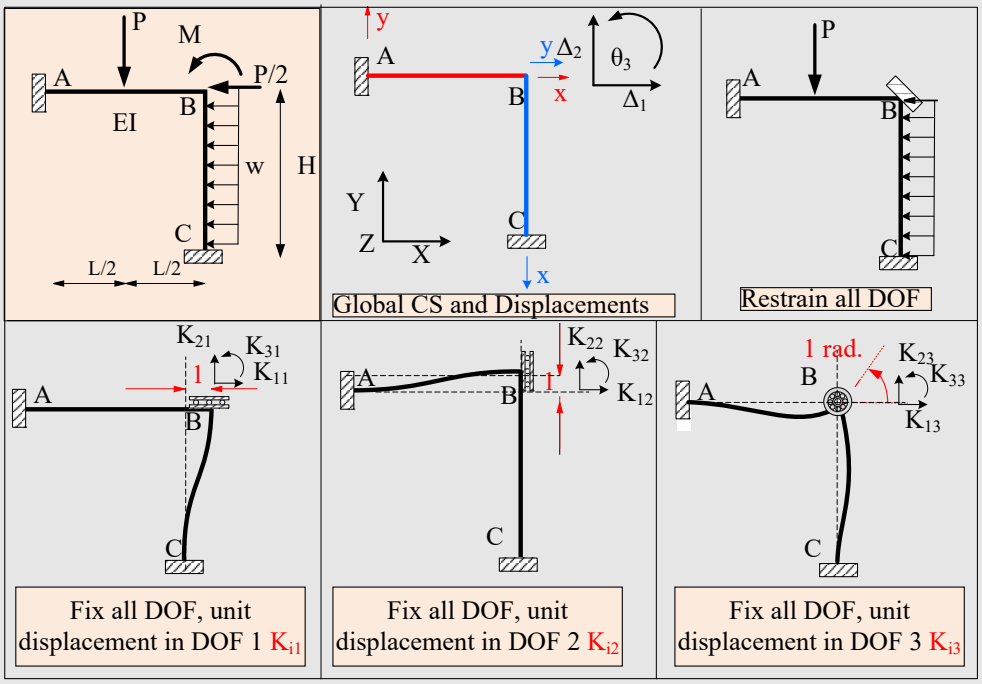
42.3.2 Ex 42.2: Cornice ortogonale

COPIA DI REVISIONE



$P = 2$ kN, $L = H = 6$ m, $M = 5$ - No. $w = 0.5$ KN/m, $E = 2 \times 10^8$ KPa, $A = 0.123$ m^{2}e $I^b = I^c = 0.00125$ m^4.

1. Riferiamo alla figura seguente

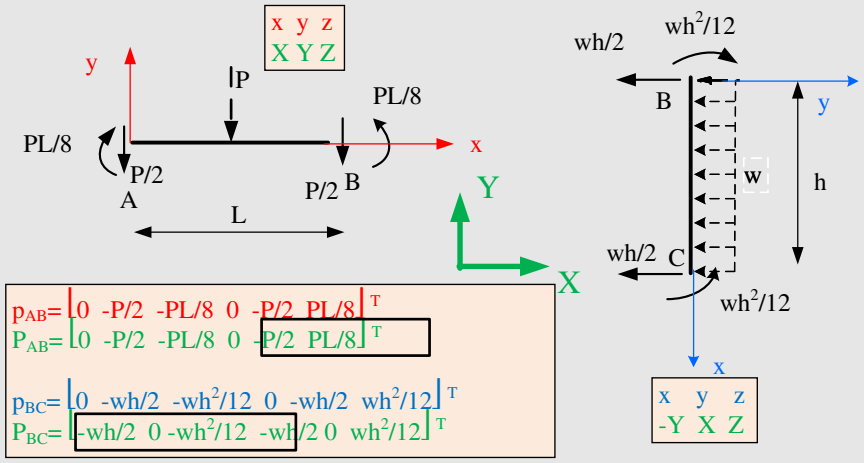


2. Supponendo deformazioni assiali, abbiamo tre gradi globali di libertà, Δ_1, Δ_2e θ_3.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

3. Contrascina tutti i gradi di libertà, e quindi rendere la struttura in modo cinematico determinato.
4. Determinare i carichi equivalenti nodali per ogni elemento nel sistema di coordinate locale nel proprio sistema di coordinamento locale (l'elemento 1 è ritenuto essere definito da A to B, e l'elemento 2 da B to C)



$$\underbrace{\lfloor\, p_1^A \quad p_2^A \quad p_3^A \,|\, p_4^B \quad p_5^B \quad p_6^B \,\rfloor}_{AB} = \lfloor\, 0 \quad -\tfrac{P}{2} \quad -\tfrac{PL}{8} \,|\, 0 \quad -\tfrac{P}{2} \quad \tfrac{PL}{8} \,\rfloor$$

$$= \lfloor\, 0 \quad -\tfrac{2}{2} \quad -\tfrac{(2)(6)}{8} \,|\, 0 \quad -\tfrac{2}{2} \quad \tfrac{(2)(6)}{8} \,\rfloor$$

$$= \lfloor\, 0 \quad -1.0 \quad -1.5 \,|\, 0 \quad -1.0 \quad 1.5 \,\rfloor$$

$$\underbrace{\lfloor\, p_1^B \quad p_2^B \quad p_3^B \,|\, p_4^C \quad p_5^C \quad p_6^C \,\rfloor}_{BC} = \lfloor\, 0 \quad -\tfrac{wH}{2} \quad -\tfrac{wH^2}{12} \,|\, 0 \quad -\tfrac{wH}{2} \quad \tfrac{wH^2}{12} \,\rfloor$$

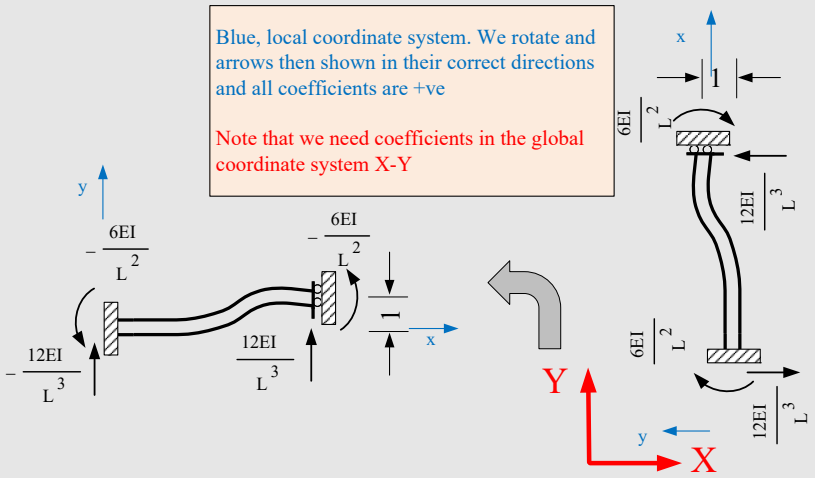
$$= \lfloor\, 0 \quad -\tfrac{(0.5)(6)}{2} \quad -\tfrac{(0.5)(6)^2}{12} \,|\, 0 \quad -\tfrac{(0.5)(6)}{2} \quad \tfrac{(0.5)(6)^2}{12} \,\rfloor$$

$$= \lfloor\, 0 \quad -1.5 \quad -1.5 \,|\, 0 \quad -1.5 \quad 1.5 \,\rfloor$$

e le forze equivalenti nodali al nodo B dovrebbero essere riassunte.

5. Applicare un spostamento unità in ciascuno dei 3 gradi globali di libertà, per determinare la struttura globale matrice di rigidità. Ogni voce K_{ij} della matrice di rigidità globale corrisponderà alla forza interna in grado di libertà i, a causa di un'unità di spostamento in grado di libertà j.
6. Ricordando le relazioni di spostamento della forza derivate in precedenza, possiamo assemblare la matrice globale di rigidità in termini di contributi sia da AB che BC

COPIA DI REVISIONE



7. È necessario completare la seguente tabella in cui le colonne corrispondono a spostamenti imposti su dof j, e le file corrispondono alle forze interne indotte corrispondenti in ciascuno degli elementi in dof iEntrambi sono nel sistema di coordinate globale.

   - $K_{1,2}$ è zero perché uno spostamento imposto lungo dof 2 (orizzontale), mentre bloccando tutti gli altri spostamenti, non induce una forza interna in uno dei due elementi.
   - K_{31} sono le forze interne (momenti qui) derivanti da un'unità dislocamento imposta in dof 1 (orizzontale). Questo non "mobilizzare' AB, ma attiverà la flessore per BC. Per BC dalla figura seguente (già mostrato sopra)
   - Si noti che tutti i termini diagonali sono +ve, e che la tabella è simmetrica.

		K_{i1} Δ_1	K_{i2} Δ_2	K_{i3} θ_3
K_{1j} (F_X)	AB BC	$\frac{EA}{L}$ $\frac{12EI^c}{H^3}$	0 0	0 $\frac{6EI^c}{H^2}$
K_{2j} (F_Y)	AB BC	0 0	$\frac{12EI^b}{L^3}$ $\frac{EA}{H}$	$-\frac{6EI^b}{L^2}$ 0
K_{3j} (M_Z)	AB BC	0 $\frac{6EI^c}{H^2}$	$-\frac{6EI^b}{L^2}$ 0	$\frac{4EI^b}{L}$ $\frac{4EI^c}{H}$

COPIA DI REVISIONE

8. Riassumendo, la struttura matrice di rigidità globale **[K]** is:

$$\begin{aligned}\mathbf{[K]} &= \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ M_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \Delta_1 & \Delta_2 & \theta_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} k_{44}^{AB}+k_{22}^{BC} & k_{45}^{AB}+k_{21}^{BC} & k_{46}^{AB}+k_{23}^{BC} \\ k_{54}^{AB}+k_{12}^{BC} & k_{55}^{AB}+k_{11}^{BC} & k_{56}^{AB}+k_{13}^{BC} \\ k_{64}^{AB}+k_{32}^{BC} & k_{65}^{AB}+k_{31}^{BC} & k_{66}^{AB}+k_{33}^{BC} \end{bmatrix} \end{array} \\ &= \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ M_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \Delta_1 & \Delta_2 & \theta_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{L}+\frac{12EI^c}{H^3} & 0 & \frac{6EI^c}{H^2} \\ 0 & \frac{12EI^b}{L^3}+\frac{EA}{H} & -\frac{6EI^b}{L^2} \\ \frac{6EI^c}{H^2} & -\frac{6EI^b}{L^2} & \frac{4EI^b}{L}+\frac{4EI^c}{H} \end{bmatrix} \end{array}\end{aligned}$$

9. Sostituire

$$\mathbf{[K]} = 10^6 \begin{bmatrix} 4.1139 & 0 & 0.0417 \\ 0 & 4.1139 & -0.0417 \\ 0.0417 & -0.0417 & 0.3333 \end{bmatrix}$$

Nota che la rigidità assiale (EA/L) is 4.1×10^6, mentre quello flessore ($12EI/H^3$) is 0.0071×10^6. La rigidità assiale è sempre molto più alta della rigidità flessorale. Dobbiamo avere P_{ext} nel sistema di coordinate globale. Dalle equazioni precedenti: noi avessimo

$$\underbrace{\left\lfloor \begin{array}{ccc|ccc} p_1^A & p_2^A & p_3^A & p_4^B & p_5^B & p_6^B \end{array} \right\rfloor}_{AB} = \left\lfloor \begin{array}{ccc|ccc} 0 & -\frac{P}{2} & -\frac{PL}{8} & 0 & -\frac{P}{2} & \frac{PL}{8} \end{array} \right\rfloor$$

$$\underbrace{\left\lfloor \begin{array}{ccc|ccc} p_1^B & p_2^B & p_3^B & p_4^C & p_5^C & p_6^C \end{array} \right\rfloor}_{BC} = \left\lfloor \begin{array}{ccc|ccc} 0 & -\frac{wH}{2} & -\frac{wH^2}{12} & 0 & -\frac{wH}{2} & \frac{wH^2}{12} \end{array} \right\rfloor$$

Inserimento del sistema di coordinate globale, che sarà

$$\underbrace{\left\lfloor \begin{array}{ccc|ccc} P_1^A & P_2^A & P_3^A & P_4^B & P_5^B & P_6^B \end{array} \right\rfloor}_{AB} = \left\lfloor \begin{array}{ccc|ccc} 0 & -\frac{P}{2} & -\frac{PL}{8} & 0 & -\frac{P}{2} & \frac{PL}{8} \end{array} \right\rfloor$$

$$\underbrace{\left\lfloor \begin{array}{ccc|ccc} P_1^B & P_2^B & P_3^B & P_4^C & P_5^C & P_6^C \end{array} \right\rfloor}_{BC} = \left\lfloor \begin{array}{ccc|ccc} -\frac{wH}{2} & 0 & -\frac{wH^2}{12} & -\frac{wH}{2} & 0 & \frac{wH^2}{12} \end{array} \right\rfloor$$

10. L'equazione globale dell'equilibrio può ora essere scritta (nota che per scopi illustrativi abbiamo mantenuto w e un momento M a nodo B).

$$\underbrace{\underbrace{\begin{Bmatrix} -\frac{P}{2} \\ 0 \\ M \end{Bmatrix}}_{} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -\frac{wH}{2} \\ -\frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8}-\frac{wH^2}{12} \end{Bmatrix}}_{NEL}}_{P_{ext}} - \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{EA}{L}+\frac{12EI^c}{H^3} & 0 & \frac{6EI^c}{H^2} \\ 0 & \frac{12EI^b}{L^3}+\frac{EA}{H} & -\frac{6EI^b}{L^2} \\ \frac{6EI^c}{H^2} & -\frac{6EI^b}{L^2} & \frac{4EI^b}{L}+\frac{4EI^c}{H} \end{bmatrix}}_{\mathbf{[K]}} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}}_{P_{int}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

11. Sostituire:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 5 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -1.5 \\ -0.5 \\ -0.75 \end{Bmatrix}}_{NEL}}_{} = \underbrace{10^6 \begin{bmatrix} 4.1139 & 0 & 0.0417 \\ 0 & 4.1139 & -0.0417 \\ 0.0417 & -0.0417 & 0.3333 \end{bmatrix}}_{\mathbf{[K]}} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

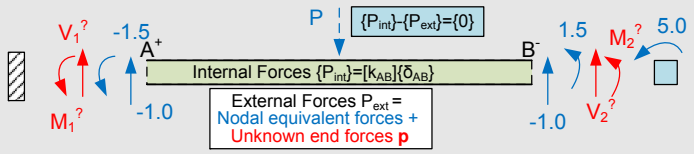
12. Risolvere per gli spostamenti

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 4.1139 & 0 & 0.0417 \\ 0 & 4.1139 & -0.0417 \\ 0.0417 & -0.0417 & 0.3333 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -2 \\ -0.5 \\ 4.25 \end{Bmatrix}$$

or

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = 10^{-6} \begin{Bmatrix} -0.61 \text{ m} \\ 0.0084 \text{ m} \\ 12.82 \text{ radian} \end{Bmatrix}$$

13. Per ottenere il elemento forze interne, moltiplicare ogni elemento matrice rigidità per locali dislocazioni. Per l'elemento AB, le coordinate locali e globali corrispondono



$$\underbrace{\begin{Bmatrix} p_1^? \\ p_2^? \\ p_3^? \\ \hline p_4^? \\ p_5^? \\ p_6^? \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{P}{2} \\ -\frac{PL}{8} \\ 0 \\ -\frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \end{Bmatrix}}_{P_{ext}} - \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \delta_1 \\ \delta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}}_{P_{int}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} p_1^? \\ p_2^? \\ p_3^? \\ \hline p_4^? \\ p_5^? \\ p_6^? \end{Bmatrix} = \underbrace{10^6 \left[\begin{array}{ccc|ccc} - & - & - & -4.1\times10^6 & 0 & 0 \\ - & - & - & 0 & -13,889. & 41,667. \\ - & - & - & 0 & -41,667. & 83,333. \\ - & - & - & 4.1\times10^6 & 0 & 0 \\ - & - & - & 0 & 13,889. & -41,667 \\ - & - & -. & 0 & -41,667 & 166,667. \end{array}\right]}_{\mathbf{k}^{AB}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.61 \\ 0.0084 \\ 12.82 \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\delta}^{AB}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ -0.5 \\ -0.75 \\ 0 \\ -0.5 \\ 0.75 \end{Bmatrix}}_{NEL^{AB}}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

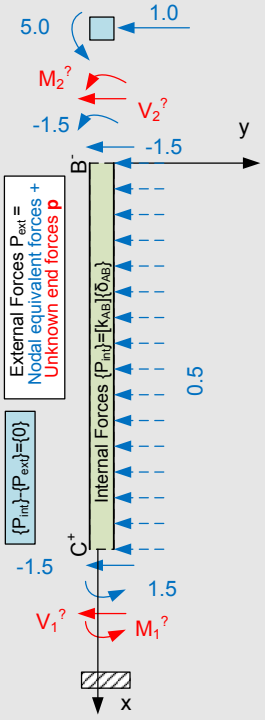
or

$$\left\{\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \hline p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ \hline N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 2.52\ \text{kN} \\ 1.03\ \text{kN} \\ 1.82\ \text{kN.m.} \\ \hline -2.52\ \text{kN} \\ -0.034\ \text{kN} \\ 1.39\ \text{kN.m} \end{array}\right\}$$

14. Per l'elemento BC, le coordinate locali e globali non corrispondono, quindi dovremo trasformare gli spostamenti dal loro globale ai componenti di coordinate locali. Per ispezione

Locale locale	x	y	z
Globale	$-Y$	$+X$	$+Z$

15. Di qui le forze interne per l'elemento BC sono date da:



COPIA DI REVISIONE

$$\begin{Bmatrix} p_1^? \\ p_2^? \\ p_3^? \\ \hline p_4^? \\ p_5^? \\ p_6^? \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \delta_4 \\ \delta_5 \\ \theta_6 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \underbrace{10^6 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4.1\times10^6 & 0 & 0 & - & - & - \\ 0 & 13,888.9 & 41,666.7 & - & - & - \\ 0 & 41,666.7 & 16,6667. & - & - & - \\ -4.1\times10^6 & 0 & 0 & - & - & - \\ 0 & -13,888.9 & -41,666.7 & - & - & - \\ 0 & 41,666.7 & 83,333.3 & - & - & - \end{array}\right]}_{\mathbf{k}^{BC}}$$

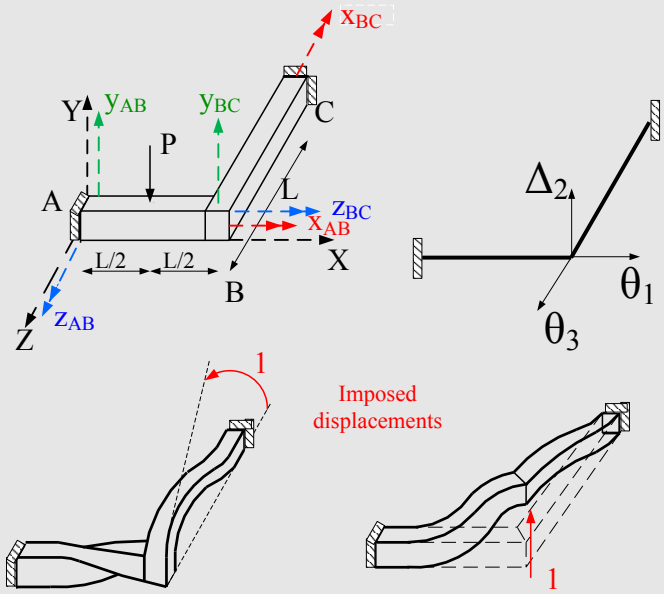
$$\underbrace{\begin{Bmatrix} -0.0084 \\ -0.61 \\ 12.82 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\delta}^{BC}} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 1.5 \\ -1.5 \\ 0 \\ -1.5 \\ 1.5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ \hline N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.034 \text{ kN} \\ 2.026 \text{ kN} \\ 3.612 \text{ kN.m} \\ 0.0344 \text{ kN} \\ 0.974 \text{ kN} \\ -0.456 \text{ kN.m} \end{Bmatrix}$$

A MATLAB®codice per questo esempio è dato in §I.2.4

42.3.3 Ex 42.3: Griglia

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



I due elementi hanno rigidità flessorale e torsionale identica, EI e GJ.

1. Identificare i tre gradi di libertà, θ_1, Δ_2e θ_3.
2. Limitare tutti i gradi di libertà e determinare i carichi equivalenti nodali:

$$\left\{ \begin{array}{c} T_1 \\ V_2 \\ M_3 \end{array} \right\} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{P}{2} \\ -\frac{PL}{8} \end{array} \right\}}_{\text{@node A}} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \end{array} \right\}}_{\text{@node B}}$$

3. Applicare uno spostamento di unità lungo ciascuno dei tre gradi di libertà, e determinare le forze interne:

Dof 1

(a) AB (Torsione) $K_{11}^{AB} = \frac{GJ}{L}$, $K_{21}^{AB} = 0$, $K_{31}^{AB} = 0$
(b) BC (Flexure) $K_{11}^{BC} = \frac{4EI}{L}$, $K_{21}^{BC} = \frac{6EI}{L^2}$, $K_{31}^{BC} = 0$

Gglobal dof 2

(a) AB (Flexure): $K_{12}^{AB} = 0$, $K_{22}^{AB} = \frac{12EI}{L^3}$, $K_{32}^{AB} = -\frac{6EI}{L^2}$
(b) BC (Flexure): $K_{12}^{BC} = \frac{6EI}{L^2}$, $K_{22}^{BC} = \frac{12EI}{L^3}$, $K_{32}^{BC} = 0$

Dof 3 globale

(a) AB (Flexure): $K_{13}^{AB} = 0$, $K_{23}^{AB} = -\frac{6EI}{L^2}$, $K_{33}^{AB} = \frac{4EI}{L}$
(b) BC (Torsion): $K_{13}^{BC} = 0$, $K_{23}^{BC} = 0$, $K_{33}^{BC} = \frac{GJ}{L}$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

4. Assemblare la matrice di rigidità della struttura

$$
\begin{aligned}
2\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} k_{44}^{AB}+k_{33}^{BC} & k_{45}^{AB}+k_{32}^{BC} & k_{46}^{AB}+k_{31}^{BC} \\ k_{54}^{AB}+k_{23}^{BC} & k_{55}^{AB}+k_{22}^{BC} & k_{56}^{AB}+k_{21}^{BC} \\ k_{64}^{AB}+k_{13}^{BC} & k_{55}^{AB}+k_{12}^{BC} & k_{66}^{AB}+k_{11}^{BC} \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}_{AB}]} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GJ}{L} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}_{BC}]} \\
&= \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} \alpha L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6L \\ 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} + \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 4L^2 & 6L & 0 \\ 6L & 12 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha L^2 \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} (4+\alpha)L^2 & 6L & 0 \\ 6L & 24 & -6L \\ 0 & -6L & (4+\alpha)L^2 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}_{Structure}]}
\end{aligned}
$$

dove $\alpha = \frac{GJ}{EI}$, e nell'ultima equazione si presume che per l'elemento BC, il nodo 1 corrisponde a C e 2 a B.

5. L'equazione di equilibrio della struttura in forma matrice:

$$
\underbrace{\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\{\mathbf{P}_{nodes}\}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \end{Bmatrix}}_{P_{el}^{B}}}_{\mathbf{P}_{ext}} - \underbrace{\underbrace{\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} (4+\alpha)L^2 & 6L & 0 \\ 6L & 24 & -6L \\ 0 & -6L & (4+\alpha)L^2 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta_1^? \\ \Delta_2^? \\ \theta_3^? \end{Bmatrix}}_{\{\mathbf{\Delta}\}}}_{\mathbf{P}_{int}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

6. Invertire e risolvere gli spostamenti

$$
\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{PL^2}{16EI}\frac{5+2\alpha}{(1+\alpha)(4+\alpha)} \\ -\frac{PL^3}{96EI}\frac{5+2\alpha}{1+\alpha} \\ -\frac{3PL^2}{16EI}\frac{1}{(1+\alpha)(4+\alpha)} \end{Bmatrix}
$$

7. Mappa tra dof locale e globale

$$
\text{AB}\begin{Bmatrix} x & \leftarrow & X \\ y & \leftarrow & Y \\ z & \leftarrow & Z \end{Bmatrix}; \qquad \text{BC}\begin{Bmatrix} x & \leftarrow & -Z \\ y & \leftarrow & Y \\ z & \leftarrow & X \end{Bmatrix}
$$

8. Determinare le forze interne moltiplicando ogni elemento matrice di rigidità **[k]** dal vettore di spostamento nodale $\{\delta\}$Entrambi dovrebbero essere nel sistema di coordinate locale.

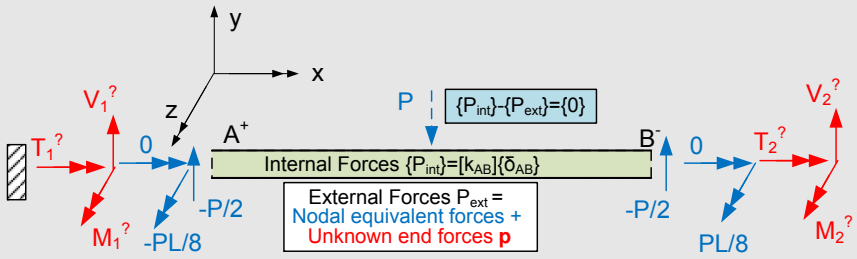
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

AB e BC il vettore di spostamenti nodali sono

$$\left\{\begin{array}{c}\delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\\ \hline \delta_4\\ \delta_5\\ \delta_6\end{array}\right\} = \underbrace{\left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ 0\\ \hline \theta_1\\ \Delta_2\\ \theta_3\end{array}\right\}}_{AB} = \underbrace{\left\{\begin{array}{c}-\theta_3\\ \Delta_2\\ \theta_1\\ \hline 0\\ 0\\ 0\end{array}\right\}}_{BC}$$

AB

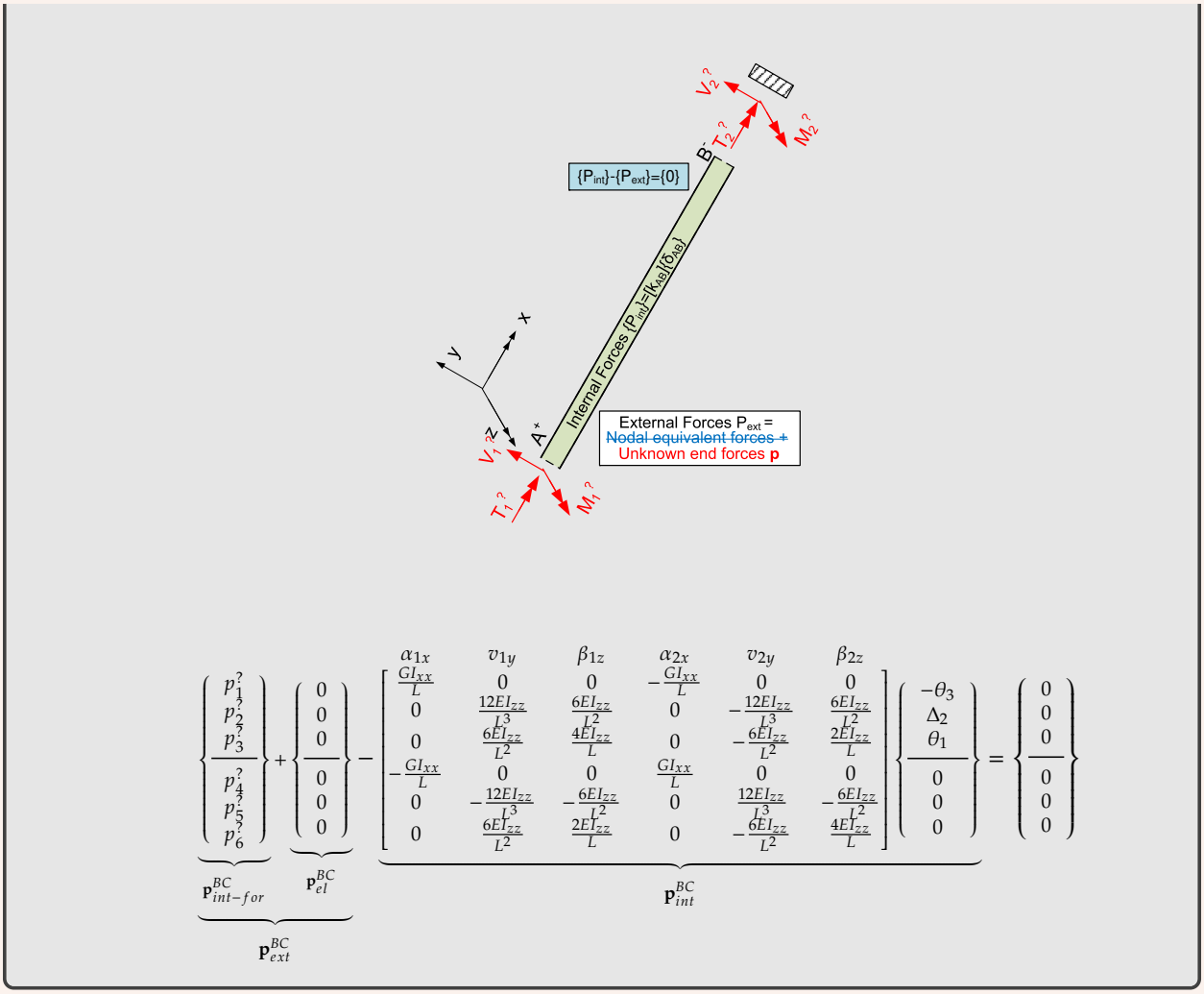


$$\underbrace{\underbrace{\left\{\begin{array}{c}p_1^?\\ p_2^?\\ p_3^?\\ \hline p_4^?\\ p_5^?\\ p_6^?\end{array}\right\}}_{\mathbf{p}^{AB}_{int-for}} + \underbrace{\left\{\begin{array}{c}0\\ -P/2\\ -PL/8\\ \hline 0\\ -P/2\\ PL/8\end{array}\right\}}_{\mathbf{p}^{BC}_{el}}}_{\mathbf{p}^{AB}_{ext}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{1x} & v_{1y} & \beta_{1z} & \alpha_{2x} & v_{2y} & \beta_{2z} \\ \frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 & -\frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{zz}}{L^3} & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_{zz}}{L^3} & \frac{6EI_{zz}}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{4EI_{zz}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{2EI_{zz}}{L} \\ -\frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 & \frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_{zz}}{L^3} & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & 0 & \frac{12EI_{zz}}{L^3} & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{2EI_{zz}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{4EI_{zz}}{L} \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}^{AB}_{int}} \left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ 0\\ \hline \theta_1\\ \Delta_2\\ \theta_3\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ 0\\ \hline 0\\ 0\\ 0\end{array}\right\}$$

BC

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



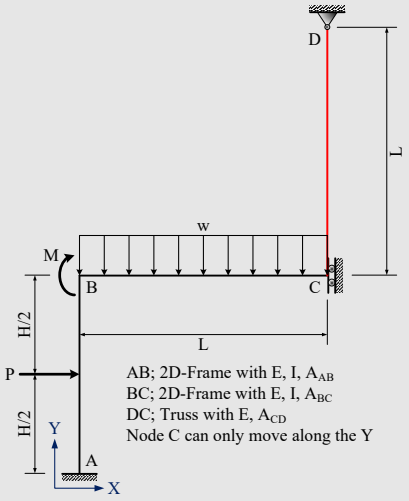
$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} p_1^? \\ p_2^? \\ p_3^? \\ \hline p_4^? \\ p_5^? \\ p_6^? \end{array}\right\}}_{\mathbf{p}_{int-for}^{BC}} + \underbrace{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}}_{\mathbf{p}_{el}^{BC}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{1x} & v_{1y} & \beta_{1z} & \alpha_{2x} & v_{2y} & \beta_{2z} \\ \frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 & -\frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{zz}}{L^3} & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_{zz}}{L^3} & \frac{6EI_{zz}}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{4EI_{zz}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{2EI_{zz}}{L} \\ -\frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 & \frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_{zz}}{L^3} & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & 0 & \frac{12EI_{zz}}{L^3} & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{2EI_{zz}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{4EI_{zz}}{L} \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}_{int}^{BC}} \left\{\begin{array}{c} -\theta_3 \\ \Delta_2 \\ \theta_1 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

$\mathbf{p}_{ext}^{BC}$

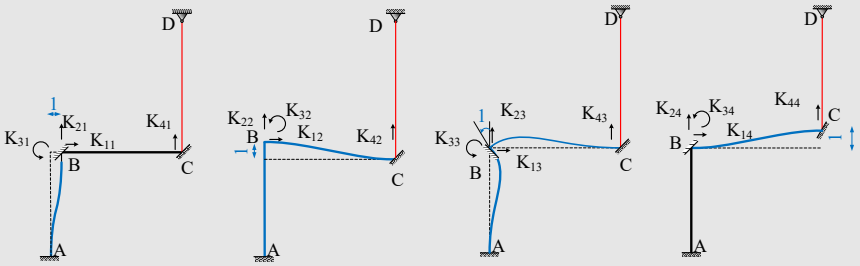
42.3.4 Ex 42.4: Cornice ibrida

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

Cerchiamo di analizzare questo frame per $E = 200$ GPa, $I = 200 \times 10^6$ mm^4, $L_{AB} = H = 8$m, $L_{BC} = L_{DC} = 10$ m, $A_{AB} = A_{BC} = 5,000$ mm^2, $A_{DC} = 100$ mm^2, $P = 10$ kN, $M = P \cdot L_{BC}$ e $w = 1$kN/m. Utilizzare GPa, kN e mm.



1. The global dof are $\Delta_1^{BH}, \Delta_2^{BV}, \Delta_3^{BZ}, \Delta_4^{CV}$
2. Identificare le dof globali e disegnare la deformazione corrispondente



3. Tabulare le forze reali associate a ogni spostamento di unità.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

		K_{i1}	K_{i2}	K_{i3}	K_{i4}
		Δ_1	Δ_2	θ_3	Δ_4
K_{1i}	AB	$\frac{12EI}{L_{AB}^3}$	0	$\frac{6EI}{L_{AB}^2}$	0
	BC	$\frac{EA_{BC}}{L_{BC}}$	0	0	0
	DC	0	0	0	0
K_{2i}	AB	0	$\frac{EA_{AB}}{L_{AB}}$	0	0
	BC	0	$\frac{12EI}{L_{BC}^3}$	$\frac{6EI}{L_{BC}^2}$	$-\frac{12EI}{L_{BC}^3}$
	DC	0	0	0	0
K_{3i}	AB	$\frac{6EI}{L_{AB}^2}$	0	$\frac{4EI}{L_{AB}}$	0
	BC	0	$\frac{6EI}{L_{BC}^2}$	$\frac{4EI}{L_{BC}}$	$-\frac{6EI}{L_{BC}^2}$
	DC	0	0	0	0
K_{4i}	AB	0	0	0	0
	BC	0	$-\frac{12EI}{L_{BC}^3}$	$-\frac{6EI}{L_{BC}^2}$	$\frac{12EI}{L_{BC}^3}$
	DC	0	0	0	$\frac{EA_{DC}}{L_{DC}}$

4. Assemblare analiticamente la matrice di rigidità globale, scrivere l'equilibrio equazione globale.

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -PL_{BC} \\ 0 \end{Bmatrix}}_{NF} + \underbrace{\begin{Bmatrix} P/2 \\ -wL_{BC}/2 \\ PL_{AB}/8 - wL_{BC}^2/12 \\ -wL_{BC}/2 \end{Bmatrix}}_{NEF}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L_{AB}^3} + \frac{EA_{BC}}{L_{BC}} & 0 & \frac{6EI}{L_{AB}^2} & 0 \\ 0 & \frac{EA_{AB}}{L_{AB}} + \frac{12EI}{L_{BC}^3} & \frac{6EI}{L_{BC}^2} & -\frac{12EI}{L_{BC}^3} \\ \frac{6EI}{L_{AB}^2} & \frac{6EI}{L_{BC}^2} & \frac{4EI}{L_{AB}} + \frac{4EI}{L_{BC}} & -\frac{6EI}{L_{BC}^2} \\ 0 & -\frac{12EI}{L_{BC}^3} & -\frac{6EI}{L_{BC}^2} & \frac{12EI}{L_{BC}^3} \frac{EA_{DC}}{L_{DC}} \end{bmatrix}}_{K_{tt}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix}}_{\Delta}$$

dove, NF è forze nodali e NEF equivalente nodale. To determine Δ,

$$\Delta = [K_{tt}]^{-1}(NF + NEF)$$

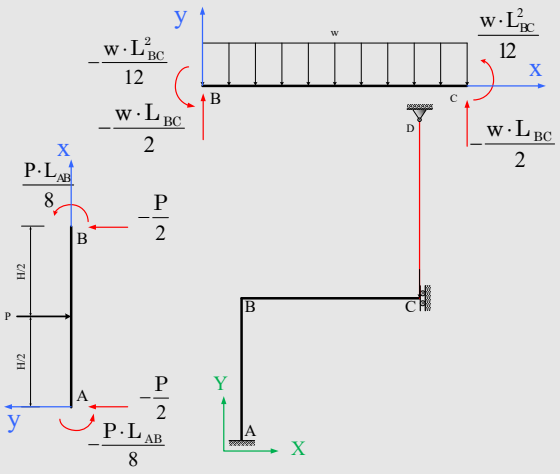
5. Nodal end forces. But first, map local and global coordinate systems

Global	X	Y	Z
AB	-y	x	z
BC	x	y	z

Local	x	y	z
AB	Y	-X	Z
BC	X	Y	Z

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



$$\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -PL_{BC} \\ 0 \end{Bmatrix}}_{NF} + \underbrace{\begin{Bmatrix} P/2 \\ -wL_{BC}/2 \\ PL_{AB}/8 - wL_{BC}^2/12 \\ -wL_{BC}/2 \end{Bmatrix}}_{NEF}$$

6. Sostituto con $E = 200GPa$, $I = 200 \times 10^6 mm^4$, $L_{AB} = H = 8m$, $L_{BC} = L_{DC} = 10m$, $A_{AB} = A_{BC} = 5,000mm^2$, $A_{DC} = 100mm^2$, $P = 10kN$, $M = P \cdot L_{BC}$ e $w = 1kN/m$. Determinare le forze nodali finali, e poi risolvere per gli spostamenti nodali. MATLAB®lo script è in §I.2.5

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.1640\ [mm] \\ -2.36 \times 10^{-5}\ [mm] \\ -0.00308\ [radian] \\ -4.999\ [mm] \end{Bmatrix}$$

7. Determinare le forze interne in tutti i membri.
8. Collect element nodal displacements and equivalent loads:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta}_{AB} &= \lfloor\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \Delta_2 \quad -\Delta_1 \quad \theta_3\ \rfloor^T \\
&= \lfloor\ 0.0 \quad 0.0 \quad 0.00 \quad -23.6e-006 \quad -164.03e-003 \quad -3.08e-003\ \rfloor^T \\
\boldsymbol{NEF_{AB}} &= \lfloor\ 0 \quad -P/2 \quad -PL_{AB}ab/8; 0 \quad -P/2 \quad PL_{AB}/8\ \rfloor^T \\
&= \lfloor\ 0.0 \quad -5.0 \quad -10,000.0 \quad 0.0 \quad -5.0 \quad 10,000\ \rfloor^T \\
\boldsymbol{\delta}_{BC} &= \lfloor\ \Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \theta_3 \quad 0 \quad \Delta_4 \quad 0\ \rfloor^T \\
&= \lfloor\ 164.03e-003 \quad -23.6e-006 \quad -3.08e-003 \quad 0.0 \quad -5.00 \quad 0.0\ \rfloor^T \\
\boldsymbol{NEF_{BC}} &= \lfloor\ 0 \quad -wL_{BC}/2 \quad -wL_{BC}^2/12 \quad 0 \quad -wL_{BC}/2 \quad wL_{BC}^2/12\ \rfloor^T \\
&= \lfloor\ 0.0 \quad -5.0 \quad -8,333 \quad 0.0 \quad -5.0 \quad 8,333\ \rfloor^T
\end{aligned}$$

9. Compute internal forces from

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} p_1^? \\ p_2^? \\ p_3^? \\ \hline p_4^? \\ p_5^? \\ p_6^? \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} NEF_1 \\ NEF_2 \\ NEF_3 \\ \hline NEF_4 \\ NEF_5 \\ NEF_6 \end{Bmatrix}}_{P_{ext}} - \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \hline \delta_4 \\ \delta_5 \\ \theta_6 \end{Bmatrix}}_{P_{int}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

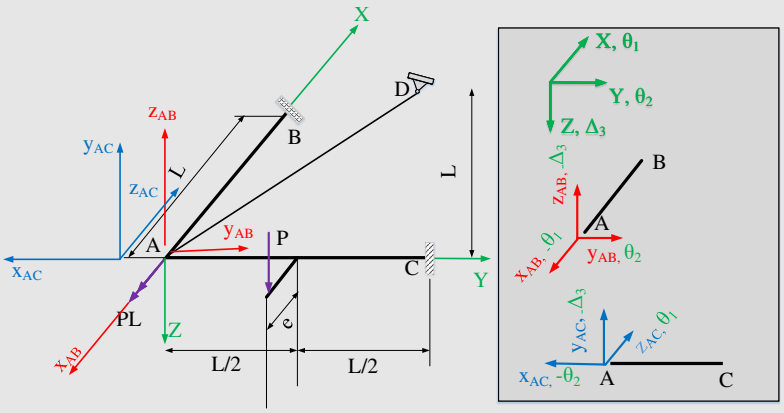
10. Substituting

$$\mathbf{p}_{AB} = \left\{ \begin{array}{c} P_A^x \\ V_A^y \\ M_A^z \\ \hline P_B^x \\ V_B^y \\ M_B^z \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0.00295\ [kN] \\ -6.403\ [kN] \\ -20,203.\ [kN \cdot mm] \\ \hline -0.00295\ [kN] \\ 16.403\ [kN] \\ -71,021.\ [kN \cdot mm] \end{array} \right\}; \mathbf{p}_{BC} = \left\{ \begin{array}{c} P_B^x \\ V_B^y \\ M_B^z \\ \hline P_C^x \\ V_C^y \\ M_C^z \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 16.403\ [kN] \\ 0.00295\ [kN] \\ -28,979.\ [kN \cdot mm] \\ \hline -16.403\ [kN] \\ 9.997\ [kN] \\ -20,991.\ [kN \cdot mm] \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{p}_{DC} = \left\{ \begin{array}{c} P_D^x \\ P_C^x \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -9.997\ [kN] \\ 9.997\ [kN] \end{array} \right\} \text{ (Tension)}$$

42.3.5 Ex 42.5: Griglia ibrida

Analyze the following grid

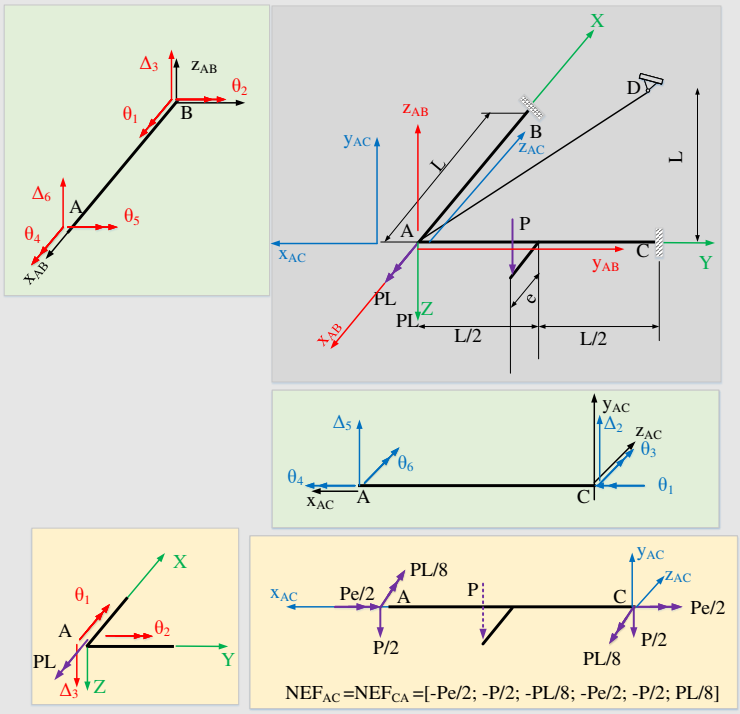


Nota membro AD è un cavo caratterizzato da A e E e sta nel $Y-Z$ Alcuni degli assi di coordinate locali per i due membri sono mostrati in rosso e blu. Uso L=10 m; E=200 GPa; $I = 200 \times 10^6 \text{mm}^4$; $J = I_{xx} = 4 \times 10^6$ mm^4, $A_{AD} = 100$ mm^2, e = 1m, e P= 10 kN. Utilizzare GPa, KN e mm.

1. I tre gradi globali di libertà sono θ_1^X, θ_2^Y e Δ_3^Z.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



2. (a) Il carico di punta causerà un momento e una torsione di taglio a ciascuna delle due estremità, da cui le forze equivalenti nodali (nel sistema locale di coordinate) sono

$$\begin{aligned}
NEF_{CA} &= \lfloor\ -Pe/2 \quad -P/2 \quad -PL/8 \mid -Pe/2 \quad -P/2 \quad PL/8\ \rfloor^T \text{ Nodes C and A}\\
&= \lfloor\ -5,000 \quad -5 \quad -12,500 \mid -5,000 \quad -5 \quad 12,500\ \rfloor^T\\
NEF_{AB} &= \lfloor\ 0 \quad 0 \quad 0 \mid 0 \quad 0 \quad 0\ \rfloor^T \text{ Nodes A and B}\\
NF &= \lfloor\ -PL \quad 0 \quad 0\ \rfloor^T\\
&= \lfloor\ -100,000 \quad 0 \quad 0\ \rfloor^T
\end{aligned}$$

(b) Unit rotation at dof 1

AB	Torsion	$K_{11} = \frac{GJ}{L}$	$K_{21} = 0$	$K_{31} = 0$
AC	Flexure	$K_{11} = \frac{4EI}{L}$	$K_{21} = 0$	$K_{31} = \frac{6EI}{L^2}$

(c) Unit rotation at dof 2

AB	Flexure	$K_{12} = 0$	$K_{22} = \frac{4EI}{L}$	$K_{32} = -\frac{6EI}{L^2}$
AC	Torsion	$K_{12} = 0$	$K_{22} = \frac{GJ}{L}$	$K_{32} = 0$

(d) Unit displacement at dof 3

AB	Flexure	$K_{13} = 0$	$K_{23} = -\frac{6EI}{L^2}$	$K_{33} = \frac{12EI}{L^3}$
AC	Flexure	$K_{13} = \frac{6EI}{L^2}$	$K_{23} = 0$	$K_{33} = \frac{12EI}{L^3}$
Cable			$K_{33} = \frac{AE}{\sqrt{2}L} \underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{AE}{2L}$	

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

(e) Local coordinate system for each element

(f) Scrivere l'equazione dell'equilibrio (notare il riallineamento del carico equivalente nodale nel sistema di coordinate globali).

$$\begin{Bmatrix} -PL \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} PL/8 \\ Pe/2 \\ P/2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} (4+\eta)L^2 & 0 & 6L \\ 0 & (4+\eta)L^2 & -6L \\ 6L & -6L & 24+\frac{AE}{2L}\xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix}$$

where $\eta = \frac{GJ}{EI}$ and $\xi = \frac{L^3}{EI}$.

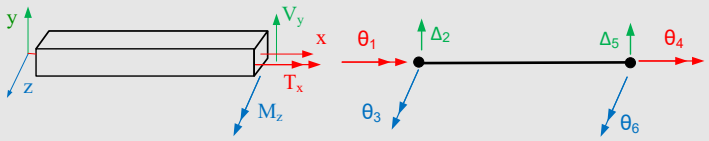
or

$$\begin{Bmatrix} -100,000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 12,500 \\ 5,000 \\ 5,000 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1.6032\times10^7 & 0. & 2400. \\ 0. & 1.6032\times10^7 & -2400. \\ 2400. & -2400. & 1.\times10^8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix}$$

or

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.23752\times10^{-8} & -2.24103\times10^{-16} & -1.49701\times10^{-12} \\ -2.24103\times10^{-16} & 6.23752\times10^{-8} & 1.49701\times10^{-12} \\ -1.49701\times10^{-12} & 1.49701\times10^{-12} & 1\times10^{-8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -87,500 \\ 5,000 \\ 5,000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.00545784 \\ 0.000311884 \\ 0.0000501385 \end{Bmatrix}$$

3. Per determinare le forze interne, ricordate che abbiamo usato i seguenti locali x, y, z



4. Per recuperare le forze interne per l'elemento AB, mappamo gli spostamenti globali con quello locale

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \Delta_3 \\ \hline \theta_4 \\ \theta_5 \\ \Delta_6 \end{Bmatrix} \leftarrow \begin{Bmatrix} -\theta_1 \\ \theta_2 \\ -\Delta_3 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

può essere derivato dalla matrice di rigidità dell'elemento precedente come il sistema di coordinate corrisponde $(\theta_{1x}; \Delta_{2y}; \theta_{3z};)$

$$\begin{Bmatrix} T_A \\ V_A \\ M_A \\ \hline T_B \\ V_B \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\theta_1 \\ \theta_2 \\ -\Delta_3 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Substituting

$$\left\{\begin{array}{c} T_A \\ V_A \\ M_A \\ \hline T_B \\ V_B \\ M_B \end{array}\right\} = \begin{bmatrix} 32000 & 0 & 0 & -32,000 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{25} & 2,400 & 0 & -\frac{12}{25} & 2,400 \\ 0 & 2,400 & 16,000,000 & 0 & -2400 & 8,000,000 \\ -32,000 & 0 & 0 & 32,000 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{25} & -2,400 & 0 & \frac{12}{25} & -2,400 \\ 0 & 2400 & \frac{2}{25} & 0 & -2,400 & 16,000,000 \end{bmatrix} \left\{\begin{array}{c} -0.00545784 \\ 0.000311884 \\ 0.0000501385 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} -174.651 \\ 0.120482 \\ 802.965 \\ \hline 174.651 \\ -0.120482 \\ 0.748526 \end{array}\right\}$$

5. Ripeto la stessa procedura per l'elemento CA. Inizia mappando gli spostamenti globali con quello locale

$$\left\{\begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \Delta_3 \\ \hline \theta_4 \\ \theta_5 \\ \Delta_6 \end{array}\right\} \leftarrow \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline -\theta_2 \\ -\Delta_3 \\ \theta_1 \end{array}\right\}$$

può essere derivato dalla matrice di rigidità dell'elemento precedente come il sistema di coordinate corrisponde $(\theta_{1x}; \Delta_{2y}; \theta_{3z};)$

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} T_A \\ V_A \\ M_A \\ \hline T_B \\ V_B \\ M_B \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} -Pe/2 \\ -P/2 \\ -PL/8 \\ \hline -Pe/2 \\ -P/2 \\ PL/8 \end{array}\right\}}_{P_{ext}} = \begin{bmatrix} \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline -\theta_2 \\ -\Delta_3 \\ \theta_1 \end{array}\right\}$$

COPIA DI REVISIONE

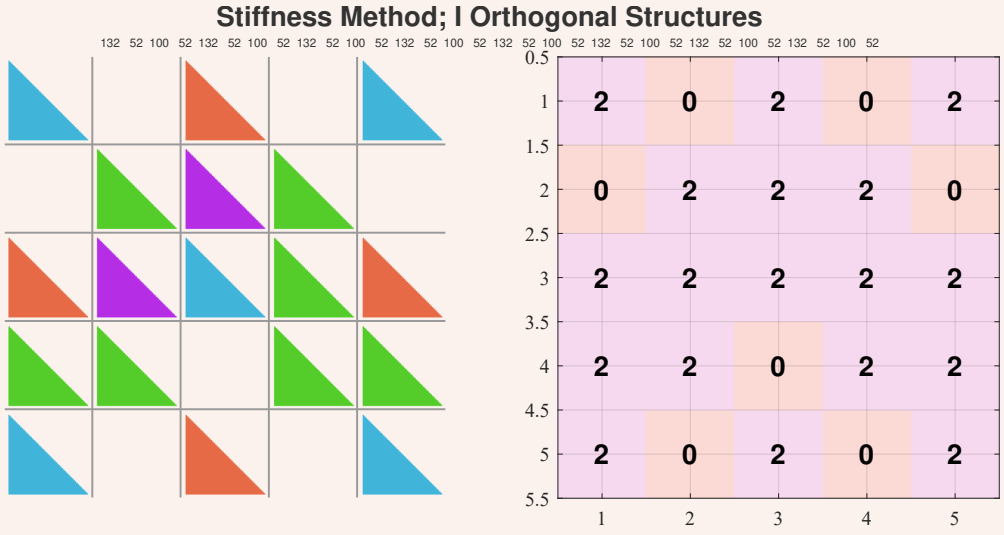
I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Substituting

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} T_C \\ V_C \\ M_C \\ \hline T_A \\ V_A \\ M_A \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} -5,000 \\ -5 \\ -12,500 \\ \hline -5,000 \\ -5 \\ 12,500 \end{array}\right\}}_{P_{ext}}$$

$$-\underbrace{\left[\begin{array}{cccccc} 32000 & 0 & 0 & -32,000 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{25} & 2,400 & 0 & -\frac{12}{25} & 2,400 \\ 0 & 2,400 & 16,000,000 & 0 & -2400 & 8,000,000 \\ -32,000 & 0 & 0 & 32,000 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{25} & -2,400 & 0 & \frac{12}{25} & -2,400 \\ 0 & 2400 & \frac{2}{25} & 0 & -2,400 & 16,000,000 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline -0.0003118 \\ -0.00005013 \\ -0.005457 \end{array}\right\}}_{P_{int}} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} T_C \\ V_C \\ M_C \\ \hline T_A \\ V_A \\ M_A \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 5,009.98 \\ -8.09879 \\ -31,162.6 \\ \hline 4,990.02 \\ 18.0988 \\ -99,825.3 \end{array}\right\}$$



Chapter-specific identicon, chapter H

COPIA DI REVISIONE

Capitolo 43

Matrici di trasformazione

Abstract

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto il metodo di rigidità diretta attraverso l'analisi delle strutture ortogonali, e ci siamo quindi affidati a molto semplici 90° rotazione per assemblare prima la matrice di rigidità globale (andando da sistemi di coordinate locali a globali), e poi dal globale al locale per il recupero della forza. È evidente che questo è impossibile per le strutture generali, e dobbiamo introdurre una matrice di trasformazione per eseguire quelle operazioni. Mentre questo può essere elementare per i membri semplici (come il telaio 2D), diventa più complesso per le griglie, e molto più complesso di elementi in cornice 3D. Le espressioni matematiche delle matrici di trasformazione per elementi diversi sono oggetto del presente capitolo.

43.1 Introduzione 1575
43.2 Alcune teorie 1577
43.2.1 $[\mathbf{k}^e]$ $[\mathbf{K}^e]$ relazione 1577
43.2.2 Direzione cose 1577
43.3 Matrici di trasformazione per elementi quadro 1580
43.3.1 2 casi 1580
43.3.2 Telaio 3D 1583
43.3.3 Rotture euleriane 1584
43.3.4 Torsione dell'asse degli elementi 1586
43.3.5 Trucchi 3D 1588

43.1 Introduzione

1 Nel capitolo precedente, in cui ci siamo concentrati sulle strutture ortogonali, l'assemblaggio della matrice rigidità della struttura $[\mathbf{K}^e]$ in termini di matrici di rigidità dell'elemento era relativamente dritto-avanti.

2 La determinazione della matrice di rigidità degli elementi nelle coordinate globali, dalla matrice della rigidezza dell'elemento nelle coordinate locali richiede Fig. 43.1 l'introduzione di una matrice di trasformazione.

COPIA DI REVISIONE

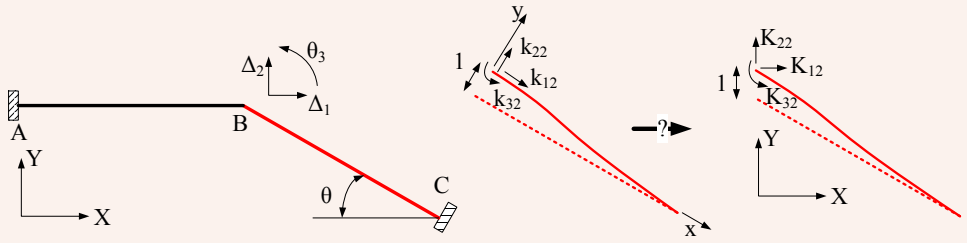


Figura 43.1: Locale (in inglese)$\mathbf{k}^e$) e globale ($\mathbf{K}^e$) Matrici di rigidità degli elementi

3 Sicuramente per un membro semplice (come un elemento di cornice), questo può essere facilmente realizzato, Fig. 43.2Tuttavia, cerchiamo di ricavare razionalmente matrici di trasformazione per diversi tipi di membri (il telaio 3D è il più impegnativo).

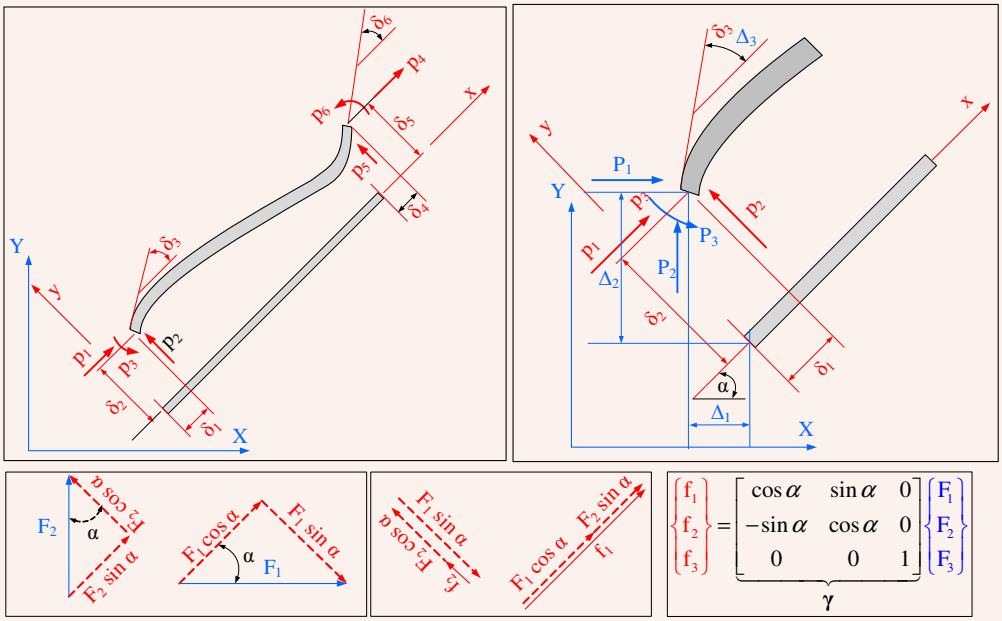


Figura 43.2: Matrice di trasformazione per una trave 2D

4 Questo capitolo esaminerà le trasformazioni 2D e 3D necessarie per ottenere una matrice di rigidità degli elementi nel sistema di coordinate globali prima dell'assemblaggio (come discusso nel prossimo capitolo).

COPIA DI REVISIONE

43.2 Alcune teorie

43.2.1 $[\mathbf{k}^e]$ $[\mathbf{K}^e]$ relazione

Richiamo

$$\begin{aligned}\mathbf{p}^{(e)} &= \mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\delta}^{(e)}\\ \mathbf{P}^{(e)} &= \mathbf{K}^{(e)}\boldsymbol{\Delta}^{(e)}\end{aligned}$$

Definiamo una matrice di trasformazione vettoriale $[\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}]$ tale che:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}^{(e)} &\overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{\Gamma}^{(e)}\boldsymbol{\Delta}^{(e)}\\ \mathbf{p}^{(e)} &\overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{\Gamma}^{(e)}\mathbf{P}^{(e)}\end{aligned} \tag{43.1}$$

Sostituire Eq. 43.1 in Eq. 43.2.1

$$\mathbf{p}^{e} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)}\mathbf{P}^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}\boldsymbol{\Delta}^{(e)}$$

premultiplying by $\boldsymbol{\Gamma}^{(e)^{-1}}$

$$\mathbf{P}^{(e)} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)^{-1}}\mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}\boldsymbol{\Delta}^{(e)}$$

Ma visto che la matrice di rotazione è ortogonale, abbiamo $\boldsymbol{\Gamma}^{(e)^{-1}} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)^{T}}$ (and $\boldsymbol{\Delta}^{(e)} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)^{T}}\boldsymbol{\delta}^{(e)}$)

$$\mathbf{P}^{(e)} = \underbrace{\boldsymbol{\Gamma}^{(e)T}\mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}}_{\mathbf{K}^{(e)}}\boldsymbol{\Delta}^{(e)}$$

or

$$\mathbf{K}^{(e)} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)^{T}}\mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}$$

che è il rapporto generale tra matrice di rigidità degli elementi in locale e coordinate globali.

43.2.2 Direzione cose

Il prodotto punto di due vettori

$$\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}} = |\mathbf{A}|.|\mathbf{B}|\cos\alpha = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

dove $|\mathbf{A}|$ è la norma (lunghezza) di $\vec{\mathbf{A}}$e α è l'angolo tra i due vettori.

Un vettore $\vec{\mathbf{V}}$

$$\vec{\mathbf{V}} = V_x\vec{\mathbf{i}} + V_y\vec{\mathbf{j}} + V_z\vec{\mathbf{k}}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

può essere normalizzato

$$\vec{\mathbf{V}}_n = \frac{V_x}{|V|}\vec{\mathbf{i}} + \frac{V_y}{|V|}\vec{\mathbf{j}} + \frac{V_z}{|V|}\vec{\mathbf{k}} = \frac{x_2 - x_1}{L}\vec{\mathbf{i}} + \frac{y_2 - y_1}{L}\vec{\mathbf{j}} + \frac{z_2 - z_1}{L}\vec{\mathbf{k}}$$

dove $L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ e quindi per ottenere le tre direttrici di vettori $\vec{\mathbf{V}}$ prendiamo semplicemente il prodotto del punto della sua forma normalizzata con i tre vettori unità che formano il sistema di coordinate ortogonali

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{V}}_n \cdot \vec{\mathbf{i}} &= \frac{x_2 - x_1}{L} = l_{vx} \\
\vec{\mathbf{V}}_n \cdot \vec{\mathbf{j}} &= \frac{y_2 - y_1}{L} = l_{vy} \\
\vec{\mathbf{V}}_n \cdot \vec{\mathbf{k}} &= \frac{z_2 - z_1}{L} = l_{vz}
\end{aligned}$$

Si noti che poiché entrambi i vettori sono normalizzati, il prodotto punto è uguale alla direzione del coseno.

11 Il problema che ci affronta è la trasformazione generale di un vettore $\mathbf{V}$ da $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ coordinare il sistema a $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$Fico. 43.3: dove:

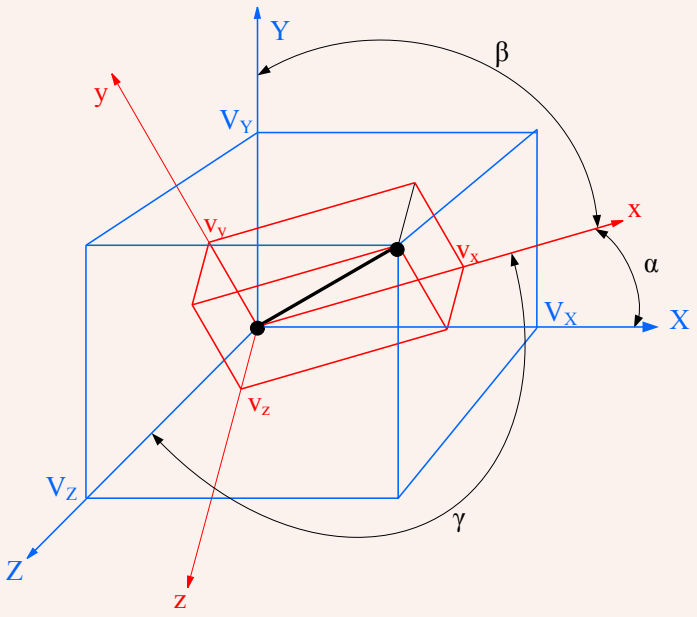


Figura 43.3: Trasformazione vettoriale 3D arbitraria

COPIA DI REVISIONE

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_{xX} & l_{xY} & l_{xZ} \\ l_{yX} & l_{yY} & l_{yZ} \\ l_{zX} & l_{zY} & l_{zZ} \end{bmatrix}}_{\gamma} \begin{Bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{Bmatrix} \tag{43.2}$$

dove l_{ij} è il *coseno direttore* dell'asse i rispetto all'asse j, $l_{xX} = \cos(\alpha)$ e $l_{xY} = \cos(\beta)$. (Richiamalo) $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$, quindi la direzione dell'angolo è irrilevante).

12 Quindi, γ ci porta dal globale ai sistemi di coordinate locali.

$$\begin{aligned} V_x &= V_X l_{xX} + V_Y l_{xY} + V_Z l_{xZ} \\ &= V_X \cos\alpha + V_Y \cos\beta + V_Z \cos\gamma \end{aligned}$$

13 I cosni di direzione sono vettori ortogonali unitari che soddisfano i seguenti rapporti:

$$\sum_{j=1}^{3} l_{ij} l_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, 3$$

I.e:

$$l_{11}^2 + l_{12}^2 + l_{13}^2 = 1 \text{ or } \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 = \delta_{11}$$

e

$$\sum_{j=1}^{3} l_{ij} l_{kj} = 0 \begin{cases} i = 1, 2, 3 \\ k = 1, 2, 3 \\ i \neq k \end{cases}$$

$$l_{11} l_{21} + l_{12} l_{22} + l_{13} l_{23} = 0 = \delta_{12}$$

14 Con moltiplicazione diretta $[\gamma]^T$ e $[\gamma]$ può essere mostrato che: $[\gamma]^T [\gamma] = [\mathbf{I}] \Rightarrow [\gamma]^T = [\gamma]^{-1} \Rightarrow [\gamma]$ è una *matrice ortogonale* (ossia ortonormale).

15 La trasformazione inversa (da locale a globale) sarebbe

$$\mathbf{V} = \gamma^T \mathbf{v}$$

16 Infine, la prima fila di Eq. 43.2 è dato da (in termini di caso inferiore $x - y - z$)

$$l_{xX} = C_X = \frac{x_j - x_i}{L}; \quad l_{xY} = C_Y = \frac{y_j - y_i}{L}; \quad l_{xZ} = C_Z = \frac{z_j - z_i}{L} \tag{43.3}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

43.3 Matrici di trasformazione per elementi quadro

17 La matrice di rotazione, $[\Gamma]$, ovviamente varierà con il tipo di elemento. Nel caso più generale (3D element, 6 d.o.f per nodo), dovremmo definire:

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \\ \hline M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ \hline F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \\ \hline M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c|c} \gamma & & & \\ \hline & \gamma & & \\ \hline & & \gamma & \\ \hline & & & \gamma \end{array}\right]}_{\Gamma} \begin{Bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ F_{Z1} \\ \hline M_{X1} \\ M_{Y1} \\ M_{Z1} \\ \hline F_{X2} \\ F_{Y2} \\ F_{Z2} \\ \hline M_{X2} \\ M_{Y2} \\ M_{Z2} \end{Bmatrix} \tag{43.4}$$

e dovrebbe distinguere tra la trasformazione del vettore $[\gamma]$ e la matrice di trasformazione dell'elemento $[\Gamma]$.

18 Nelle sezioni successive, esamineremo la matrice di trasformazione di ogni tipo di elemento in cui inizieremo con l'elemento allineato con il globale X e ruotarlo alla sua posizione attuale che definisce $x - y - z$.

43.3.1 2 casi

43.3.1.1 Telaio 2D

19 Per l'elemento telaio 2D, Fig. 43.4 e da Eq. 43.2 la matrice di rotazione del vettore

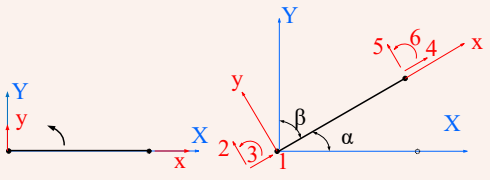


Figura 43.4: rotazione degli elementi del telaio 2D rispetto a Z (or z)

è definita in termini di 9 coseni direzionali di 9 angoli diversi. Tuttavia per il caso 2D, noteremo che quattro angoli sono interconnessi ($l_{xX}, l_{xY}, l_{yX}, l_{yY}$) e può essere espresso in

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

termini di un unico αdove α è la direzione del locale x asse (lungo il membro dal primo al secondo nodo) rispetto al globale X asse.

20 I restanti 5 termini sono collegati all'angolo tra Z e z, che è zero e Z $x-y$ aereo, che è $\pi/2$. Così la matrice di rotazione può essere scritta come:

$$\gamma = \begin{bmatrix} l_{xX} & l_{xY} & l_{xZ} \\ l_{yX} & l_{yY} & l_{yZ} \\ l_{zX} & l_{zY} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) & 0 \\ \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e osserviamo che gli angoli sono definiti dal secondo sottoscritto al primo, e che gli angolazioni antiorario sono positivi.

21 La matrice di rotazione degli elementi $\mathbf{\Gamma}$ sarà poi dato da

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \hline p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathbf{\Gamma}} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \hline P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix}$$

43.3.1.2 Griglia

22 La matrice di trasformazione per l'elemento griglia, Fig. 43.5 è molto analogo a quello dell'elemento frame, tranne che la rotazione è rispetto al y asse invece di z asse.

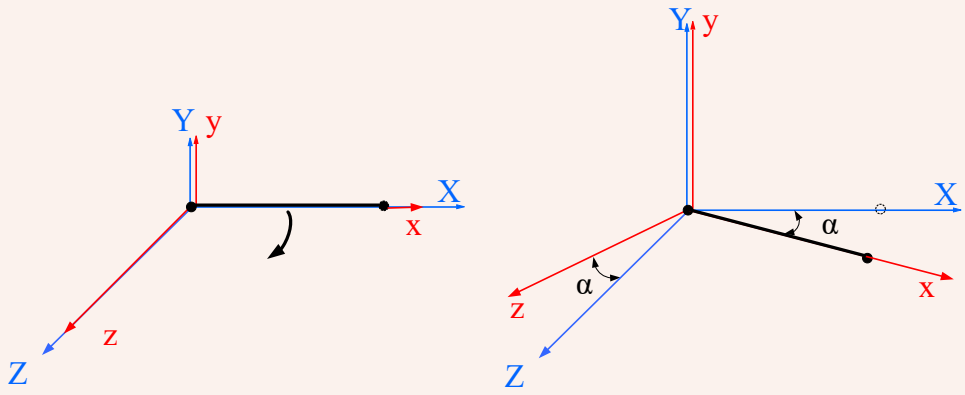


Figura 43.5: rotazione degli elementi di griglia

23 Da Eq. 43.2 la matrice di rotazione del vettore è definita in termini di 9 coseni direzionali di 9 angoli diversi. Tuttavia, noteremo che quattro angoli sono interconnessi ($l_{xX}, l_{xZ}, l_{zX}, l_{zZ}$)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

e può essere espresso in termini di un unico αdove α è la direzione del locale x asse (lungo il membro dal primo al secondo nodo) rispetto al globale X asse.

24 I restanti 5 termini sono collegati all'angolo tra Y e y, che è zero e $Y\ x-z$ aereo, che è $\pi/2$. Così la matrice di rotazione può essere scritta come:

$$\gamma = \begin{bmatrix} l_{xX} & 0 & l_{xZ} \\ 0 & 1 & 0 \\ l_{zX} & 0 & l_{zZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

e osserviamo che gli angoli sono definiti dal secondo sottoscritto al primo, e che gli angolazioni antiorario sono positivi.

25 La matrice di rotazione degli elementi [Γ] sarà poi dato da

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \hline p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{array}\right]}_{\boldsymbol{\Gamma}} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \hline P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix}$$

43.3.1.3 Vlasov raggio

26 La matrice di rigidità dell'elemento griglia con fascia a tenuta stagna è stata data da Eq. 41.3 (§41.8). La sua matrice di trasformazione sarà analoga a quella della griglia, tranne che ora abbiamo un dof extra (M_y), Fig. 43.6.

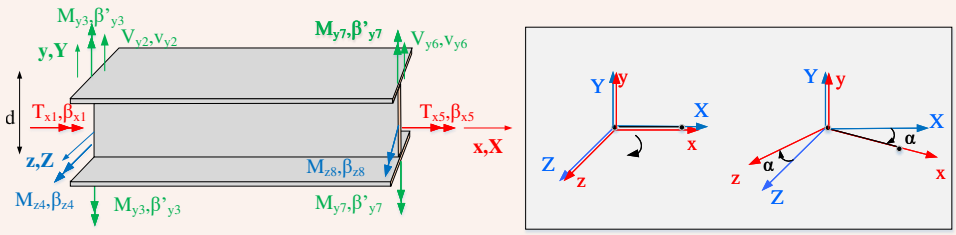


Figura 43.6: Matrice di trasformazione per il raggio vlasov

$$\gamma = \begin{bmatrix} l_{xX} & 0 & 0 & l_{xZ} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l_{zX} & 0 & 0 & l_{zZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 & \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) & 0 & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

27 La matrice di rotazione degli elementi [Γ] sarà poi dato da

$$\begin{Bmatrix} T_{x1} \\ V_{y2} \\ M_{y3} \\ M_{z4} \\ \hline T_{x5} \\ V_{y6} \\ M_{y7} \\ M_{z8} \end{Bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc} \cos\alpha & 0 & 0 & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & 0 & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & 0 & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & 0 & 0 & \cos\alpha \end{array}\right]}_{\Gamma} \begin{Bmatrix} T_{x1} \\ V_{y2} \\ M_{y3} \\ M_{z4} \\ \hline T_{x5} \\ V_{y6} \\ M_{y7} \\ M_{z8} \end{Bmatrix}$$

43.3.1.4 2D trus

28 Per l'elemento di tromba 2D, il sistema di coordinate globale è bidimensionale, mentre quello locale è solo un dimensionale, quindi la matrice di trasformazione vettoriale è Fig. 43.7.

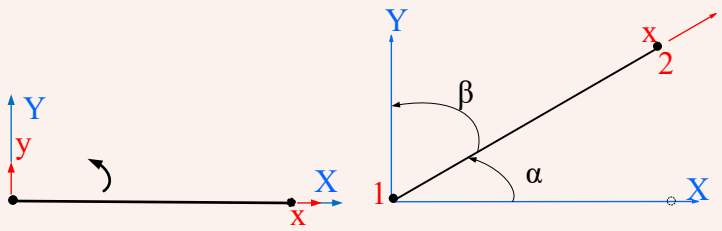


Figura 43.7: 2D tromba rotazione

$$\gamma = \begin{bmatrix} l_{xX} & l_{xY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$$

29 La matrice di rotazione degli elementi [Γ] sarà poi assemblato dalla matrice di rotazione del vettore [γ].

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ \hline p_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{array}\right]}_{\Gamma} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \hline P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix}$$

43.3.2 Telaio 3D

30 Dato che gli elementi asta sono definiti in modo tale da avere il loro locale x asse allineato con il loro asse principale, e che l'elemento è definito dai due nodi finali (delle coordinate

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

note), poi ricordando la definizione della direzione coseni dovrebbe essere evidente che la valutazione della prima riga, solo, è abbastanza semplice in termini di C_X, C_Y e C_Z dove $C_X = l_{X_2X_1} = \frac{x_j - x_i}{L}$, $C_Y = l_{X_2Y_1} = \frac{y_j - y_i}{L}$, $C_Z = l_{X_2Z_1} = \frac{z_j - z_i}{L}$, $L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$. Tuttavia la valutazione degli altri termini è più complessa.

31 Questa trasformazione generalizzata da $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ to $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ è stato realizzato in un passo nel caso bidimensionale, ma quelli intermedi dovranno essere definiti nel caso 3D.

32 A partire da riferimento (X_1, Y_1, Z_1) sistema di coordinate che corrisponde al sistema globale di coordinate, cerchiamo di trasformare un elemento originariamente lungo il X_1 asse nella sua nuova posizione lungo X_2 asse (o x).

33 Nel caso 2D questo è stato realizzato attraverso una singola rotazione α, e tutti gli altri angoli dove definiti in termini di esso.

34 Nel caso 3D, vogliamo trasformarci dalla configurazione iniziale $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ alla configurazione finale $\mathbf{X_2}, \mathbf{Y_2}, \mathbf{Z_2}$. Questo richiederà un minimo di due rotazioni β e γe forse un terzo α (diverso da quello in 2D) per raggiungere questa trasformazione, Tabella 43.1. Quei tre angoli sono chiamati anche il *Angolazioni eulerian*.

43.3.3 Rotture euleriane

35 Possiamo iniziare con la prima fila della matrice di trasformazione che corrisponde alla direzione coseni dell'asse di riferimento $(\mathbf{X_1}, \mathbf{Y_1}, \mathbf{Z_1})$ rispetto al $\mathbf{X_2}$. Questo definirà la prima riga della matrice di rotazione del vettore $[\gamma]$:

$$\gamma = \begin{bmatrix} C_X & C_Y & C_Z \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$$

Dobbiamo ancora definire le seconde e le terze righe, che si ottengono attraverso due successive rotazioni (supponendo cheX_1, Y_1, Z_1 e X_2, Y_2, Z_2 sono in origine coincidenti) (supponendo che l'asse vericale del membro resti verticale). 43.8, la sequenza delle trasformazioni è data dalla Tabella 43.1.

Tabella 43.1: Trasformazioni 3D di elementi lineari

Da	To	Per quanto riguarda	Angolo
X_1, Y_1, Z_1	$X_\beta, Y_\beta, Z_\beta$	$Y_1 \equiv Y_\beta$	β
$X_\beta, Y_\beta, Z_\beta$	$X_\gamma, Y_\gamma, Z_\gamma$	$Z_\beta \equiv Z_\gamma$	γ
Facoltativo			
$X_\gamma, Y_\gamma, Z_\gamma$	$X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha$	$X_\gamma \equiv X_\alpha$	α

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

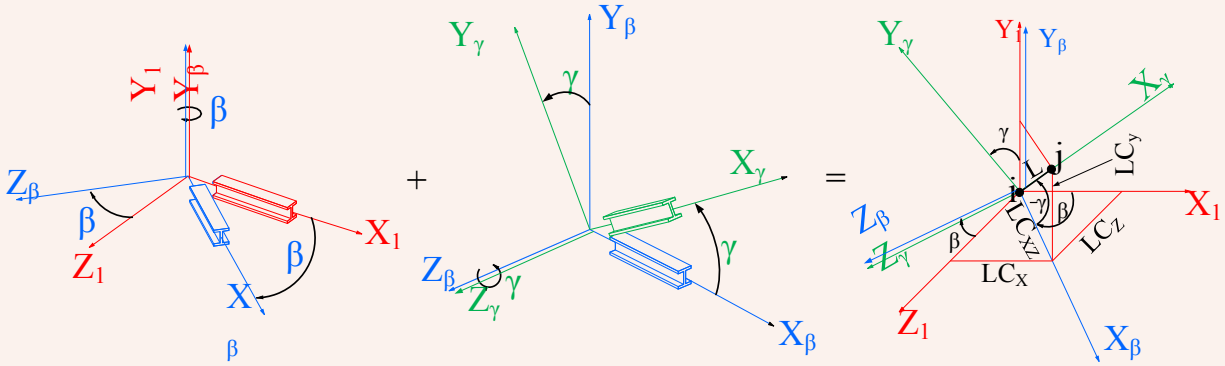


Figura 43.8: Riduzione della rotazione 3D

Rotazione da β il mio Y_1 asse , $X_1 \rightarrow X_\beta$. Questa rotazione $\mathbf{R}_\beta$ è fatto del direzione del villaggio β asse $(X_\beta, Y_\beta, Z_\beta)$ con rispetto a (X_1, Y_1, Z_1):

$$\mathbf{R}_\beta = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C_X}{C_{XZ}} & 0 & \frac{C_Z}{C_{XZ}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{C_Z}{C_{XZ}} & 0 & \frac{C_X}{C_{XZ}} \end{bmatrix} \tag{43.5}$$

$\cos\beta = \frac{C_X}{C_{XZ}}$, $\sin\beta = \frac{C_Z}{C_{XZ}}$, and from Eq. 43.3:

$$C_X = \frac{x_j - x_i}{L};\ C_Y = \frac{y_j - y_i}{L};\ C_Z = \frac{z_j - z_i}{L};\ C_{XZ} = \sqrt{C_X^2 + C_Z^2}$$

Rotazione da γ il mio Z asse

$$\mathbf{R}_\gamma = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{XZ} & C_Y & 0 \\ -C_Y & C_{XZ} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{43.6}$$

where $\cos\gamma = C_{XZ}$, and $\sin\gamma = C_Y$.

36 Combinando Eq. 43.3, 43.5 e 43.6 rendimenti:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{R}_\gamma \mathbf{R}_\beta = \begin{bmatrix} C_X & C_Y & C_Z \\ \frac{-C_X C_Y}{C_{XZ}} & C_{XZ} & \frac{-C_Y C_Z}{C_{XZ}} \\ \frac{-C_Z}{C_{XZ}} & 0 & \frac{C_X}{C_{XZ}} \end{bmatrix} \tag{43.7}$$

37 Per membro verticale (lungo globale Y) la matrice precedente non è più valida come C_{XZ} è non definito ($X_i = X_j \Rightarrow C_X = 0$ e $Z_i = Z_j \Rightarrow C_Z = 0$). Non c'è rotazione attraverso β. La rotazione è rispetto al Z_1 asse da un angolo γ of 90^o or 270^o. Ci sono due possibilità, Fig. 43.9:

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

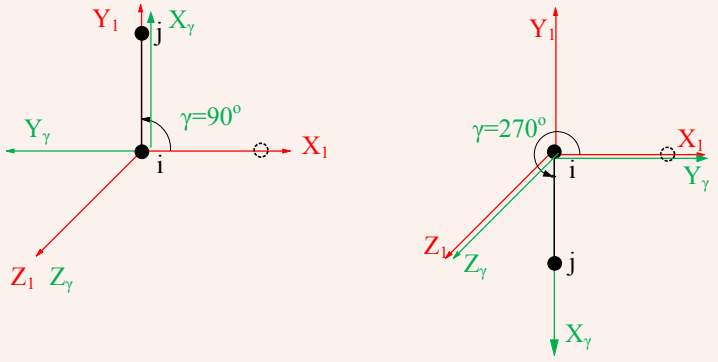


Figura 43.9: Caso speciale di trasformazione 3D per i membri verticali

1. $x_\gamma \uparrow$: X_2 asse è allineato con -Y_1, Y_2 asse è allineato con -X_1, Z_2 asse è allineato con -Z_1
2. $x_\gamma \downarrow$: X_2 asse è allineato con Y_1, Y_2 asse è allineato con -X_1 e Z_2 asse è allineato con Z_1

da qui la matrice di rotazione rispetto al y asse, è simile a quello precedentemente derivato per rotazione rispetto al z asse, salvo il riordinamento dei termini:

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0 & C_Y & 0 \\ -C_Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{43.8}$$

che è valida per entrambi i casi ($C_Y = 1$ per $\gamma = 90$ dege $C_Y = -1$ per $\gamma = 270$ deg).

43.3.4 Torsione dell'asse degli elementi

38 Se gli assi principali devono essere ruotati (compreso un tocco finale dell'asse degli elementi), allora dobbiamo definire una rotazione aggiuntiva alla trasformazione precedente di un angolo α il mio X_γ asse, Fig. 43.10.

39 Questa rotazione è definita tale che:

1. X_α è allineato con X_2 e normale a entrambi Y_2 e Z_2
2. Y_α forma rispettivamente gli angoli 0, α e $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ con X_2, Y_2 e Z_2
3. Z_α fa un angolo 0, $\frac{\pi}{2} + \alpha$ e α, rispetto a X_2, Y_2 e Z_2 rispettivamente

40 Notate che $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$ e $\cos\beta = \sin\alpha$, la direzione di coseni di questa trasformazione sono dati da:

$$\mathbf{R_{ff}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{43.9}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

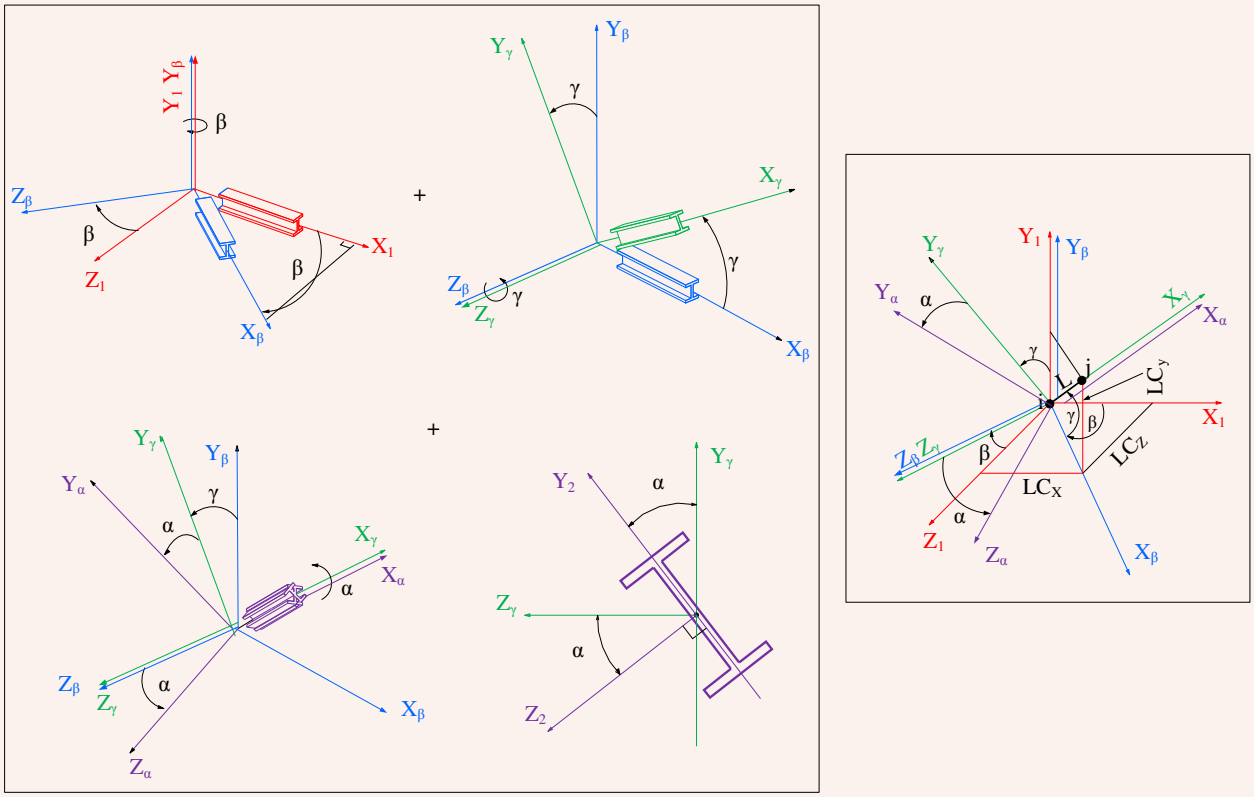


Figura 43.10: Rotazione 3D complessa

causando $Y_2 - Z_2$ asse in coincidenza con gli assi principali della sezione trasversale, che si tradurrà:

$$\gamma = \mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}_\gamma \mathbf{R}_\beta \tag{43.10}$$

$$= \begin{bmatrix} C_X & C_Y & C_Z \\ \frac{-C_X C_Y \cos\alpha - C_Z \sin\alpha}{C_{XZ}} & C_{XZ}\cos\alpha & \frac{-C_Y C_Z \cos\alpha + C_X \sin\alpha}{C_{XZ}} \\ \frac{C_X C_Y \sin\alpha - C_Z \cos\alpha}{C_{XZ}} & -C_{XZ}\sin\alpha & \frac{C_Y C_Z \sin\alpha + C_X \cos\alpha}{C_{XZ}} \end{bmatrix} \tag{43.11}$$

41 Per quanto riguarda il caso più semplice, l'equazione precedente non è definita per i membri verticali e una controparte a Eq. 43.8 si deve ricavare, questo sarà realizzato in due fasi:

1. Ruotare il membro in modo che:
   (a) X_2 asse allineato con Y_1
   (b) Y_2 asse allineato con -X_1
   (c) Z_2 asse allineato con Z_1

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

questo è stato fatto in precedenza e ha portato a Eq. 43.8

$$[\mathbf{R_{fl}}] = \begin{bmatrix} 0 & C_Y & 0 \\ -C_Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{43.12}$$

2. Il secondo passo consiste nell'esecuzione di una rotazione dell'angolo α rispetto al nuovo X_2 come definito in Eq. 43.9.
3. Infine, moltiplichiamo le due matrici di trasformazione $[\mathbf{R_{ff}}][\mathbf{R_{fl}}]$ date dalle Eq. 43.12 e 43.9, ottenendo:
$$\gamma = \mathbf{R_{ff}}\mathbf{R_{fl}} = \begin{bmatrix} 0 & C_Y & 0 \\ -C_Y \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ C_Y \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$
Nota con $\alpha = 0$- Ricuperiamo Eq. 43.8.
4. La matrice di rotazione finale sarebbe Eq. 43.4 con il γ derivato in questa sezione.

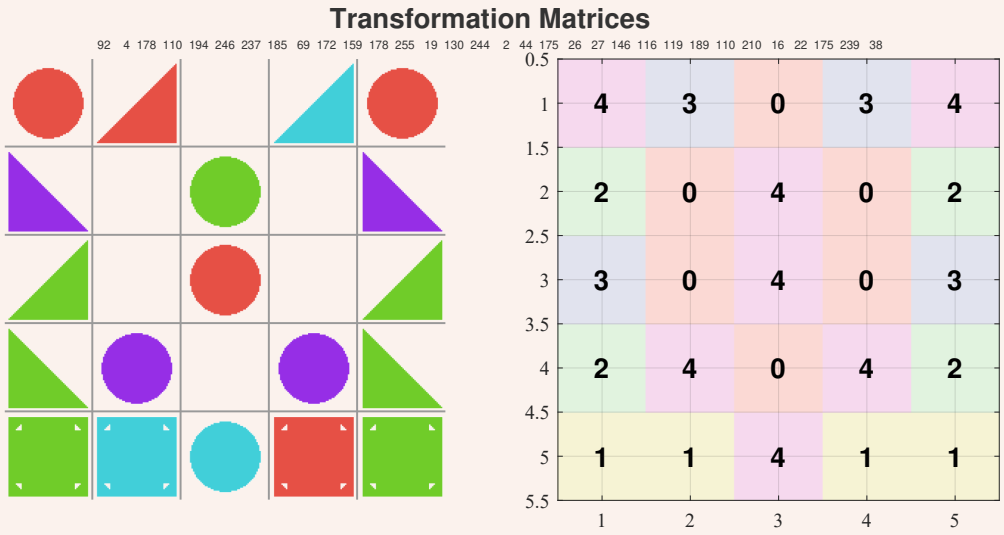
43.3.5 Trucchi 3D

42 Con riferimento alla prima parte della derivazione della trasformazione dell'elemento telaio 3D, la matrice di trasformazione degli elementi di truss 3D è

$$\left\{\begin{matrix} p_1 \\ \hline p_2 \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} \gamma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} C_x & C_y & C_z & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & C_x & C_y & C_z \end{array}\right]}_{\mathbf{\Gamma}} \left\{\begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \hline P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{matrix}\right\}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Identicona specifica del capitolo, chapter H

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 44

Metodo diretto della rigidezza

Abstract

Nel capitolo 42, abbiamo introdotto per la prima volta il concetto di sistema globale delle coordinate, dof globale e matrice della rigidità della struttura nel sistema di coordinate globali. Poi capitolo 43 ha introdotto il concetto di matrice di trasformazione che può essere utilizzato per trasformare le matrici di rigidità degli elementi da sistemi di coordinate locali a globali. Questo capitolo, generalizzerà l'approccio, introdotto per la prima volta nel Capitolo 42, includere strutture arbitrarie (non ortogonali). È importante notare che il contenuto di questo capitolo è fondamentale per tutti i codici degli elementi finiti, che vengono poi avvolti da interfacce utente grafiche amichevoli per la facilità d'uso.

44.1 Obiettivi 1590
44.2 Teoria 1591
44.3 Divulgazione 1593
44.3.1 Non vincolato contro livelli di libertà limitati 1593
44.3.2 Dischilazione strutturale . . 1594
44.4 Realizzazione computer 1595
44.4.1 Condizioni di alloggio, [id] Matrice 1595
44.4.2 **LM** vettore 1596
44.4.3 Montaggio della matrice di rigidità globale 1597
44.4.4 Procedura passo dopo passo 1598
44.5 Esempi 1599
44.5.1 Ex 44.1: Telaio 1600
44.5.2 Ex 44.3: Travatura reticolare 1610

44.1 Obiettivi

1 Finora abbiamo introdotto il metodo di rigidità diretta per le strutture ortogonali attraverso una procedura "manuale", assemblando la matrice di rigidezza globale in termini di libertà libera (cioè non vincolata). Abbiamo anche introdotto le matrici di trasformazione per vari

COPIA DI REVISIONE

tipi di elementi, e possiamo determinare la matrice di rigidità degli elementi nel sistema (cioè globale) coordinate attraverso $\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{\Gamma}^{(e)T}\mathbf{k}^{(e)}\mathbf{\Gamma}^{(e)}$.

2 Questo capitolo a sua volta generalizzerà il metodo di rigidità diretta per

1. indirizzo geometrie strutturali arbitrarie (cioè non ortogonali).
2. Determinazione delle reazioni mediante l'uso di *matrice di rigidità aumentata*.
3. Descrivi gli algoritmi per automatizzare completamente (cioè scrivere un programma di computer) la procedura.

44.2 Teoria

3 Precedentemente, Capitolo 42abbiamo assemblato *riduzione* matrice di rigidità che corrisponde solo a tubolare gradi attivi di libertà che sono attivi (cioè non vincolati), è quello che è stato invertito (o piuttosto decomposto) per determinare gli spostamenti nodali.

4 Nella generalizzazione, cerchiamo di assemblare il *aggrappato* matrice di rigidità in termini di *tutto* il dof (ritratto o no).

5 Quindi partizioniamo la matrice in due parti, con il sottoscritto "u" dove sono noti gli spostamenti (zero o altro), e t dove sono noti i carichi, Tabella 40.2.

$$\left\{\begin{array}{c}\mathbf{P}_t\checkmark\\ \hline \mathbf{R}_u?\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c|c}\mathbf{K}_{tt} & \mathbf{K}_{tu}\\ \hline \mathbf{K}_{ut} & \mathbf{K}_{uu}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\mathbf{\Delta}_t?\\ \hline \mathbf{\Delta}_u\checkmark\end{array}\right\} \tag{44.1}$$

Si noti che $\mathbf{K}_{tt}$ corrisponde alla matrice di rigidità strutturale.

6 Con riferimento a §40.8, si nota che i due tipi di carichi (o spostamenti) corrispondono a *essenziale* e *naturale* condizioni di confine.

7 La prima equazione consente il calcolo degli spostamenti sconosciuti. Si noti che richiede l'inversione di matrice (computationally costoso) (la decomposizione sarebbe un termine più appropriato qui).

$$\mathbf{\Delta}_t = \mathbf{K}_{tt}^{-1}\left(\mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\mathbf{\Delta}_u\right)$$

8 La seconda equazione consente il calcolo delle reazioni

$$\mathbf{R}_u = \mathbf{K}_{ut}\mathbf{\Delta}_t + \mathbf{K}_{uu}\mathbf{\Delta}_u$$

È solo una moltiplicazione di matrice.

9 Per lo scopo di contabilità interna, dal momento che stiamo assemblando *aggrappato* matrice di rigidità, procediamo in due fasi:

1. Primo numero tutti i livelli di libertà non frenati globali

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

2. Poi numerare separatamente tutti i gradi di libertà restrittivi globali (cioè quelli con spostamenti noti, zero o altro), moltiplicati per -1, questo ci permetterà più tardi di distinguere il restritto da dof non frenata.

10 Le forze interne dell'elemento (forze assiali e di taglio, e il momento ad ogni estremità del membro) sono finalmente determinate da

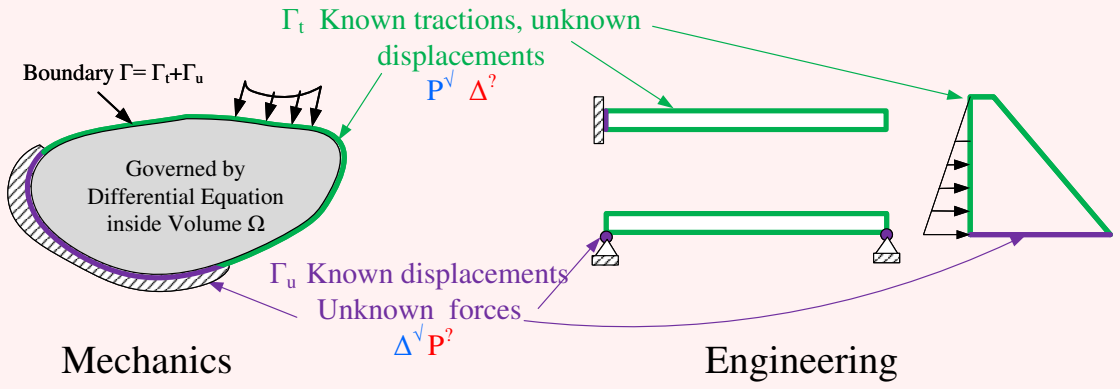
$$p_{int}^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)} \boldsymbol{\delta}^{(e)}$$

a livello di elemento dove $p_{int}^{(e)}$ è la sei per sei schiera di forze interne, $\mathbf{k}^{(e)}$ la matrice di rigidità dell'elemento nei sistemi di coordinate locali, e $\boldsymbol{\delta}^{(e)}$ è il vettore di spostamenti nodali nel sistema coordinate locale. Si noti che quest'ultimo array è ottenuto identificando prima gli spostamenti nel sistema di coordinate globali, e quindi premultiplying dalla matrice di trasformazione per ottenere gli spostamenti in sistema di coordinazione locale.

11 Va notato che in Eq. 44.1, la matrice di rigidità aumentata $\mathbf{K}$ ha un rango r più piccolo di n, considerando che la Commissione ha adottato una decisione relativa alla conclusione di un accordo tra la Comunità e i paesi terzi. $\mathbf{K}_{tt}$ ha $r = n$ (§L.3.1).

12 Quest'ultimo processo è simile al recupero di stress in elementi finiti continui.

Definition 44.1: Cuore del metodo di stiffness diretto



COPIA DI REVISIONE

- Globale sistema di coordinate

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{k}^e \mathbf{\Gamma}$$

$$\mathbf{K}^S = \sum_{e=1}^{e=nelem} \mathbf{K}^e$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}_t^{\checkmark} \\ \hline \mathbf{R}_u^{?} \end{Bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{tt} & \mathbf{K}_{tu} \\ \hline \mathbf{K}_{ut} & \mathbf{K}_{uu} \end{array}\right]}_{\text{Augmented Stiffness Matrix}} \begin{Bmatrix} \mathbf{\Delta}_t^{?} \\ \hline \mathbf{\Delta}_u^{\checkmark} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{tt} = \mathbf{f}^{-1};\ \text{Reduced Stiffness Matrix}$$

$$\mathbf{\Delta}_t = \mathbf{K}_{tt}^{-1} \underbrace{(\mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\mathbf{\Delta}_u)}_{\mathbf{P}'_t}$$

$$\mathbf{R}_u = \mathbf{K}_{ut}\mathbf{\Delta}_t + \mathbf{K}_{uu}\mathbf{\Delta}_u$$

- Locale locale sistema di coordinate

$$\boldsymbol{\delta}^{(e)} = \mathbf{\Gamma}^{(e)}\mathbf{\Delta}^{(e)}$$

$$p_{int}^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\delta}^{(e)}$$

Effetto di nota $\mathbf{P}_{el}$ non incluso per chiarezza

44.3 Divulgazione

44.3.1 Non vincolato contro livelli di libertà limitati

13 In precedenza, abbiamo etichettato il dof globale associato al dof non-constrained (Γ_t) solo, e poi abbiamo risolto per gli spostamenti invertendo i relativi *riduzione* struttura rigidità matrice.

14 Nella generalizzazione del metodo di rigidità diretta, Eq. 44.1, etichettamo la dof lungo Γ_t prima, poi quelli lungo Γ_u successivo (Dalla tabella) 40.2 , questi corrispondono alle condizioni di confine neutre/esclusiva e dirichlet/Natural rispettivamente).

15 Questo si tradurrà in *aggrappato* matrice di rigidità. L'ordine di numerazione è illustrato in Fig. 44.1 ed è auto-esplicativo.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

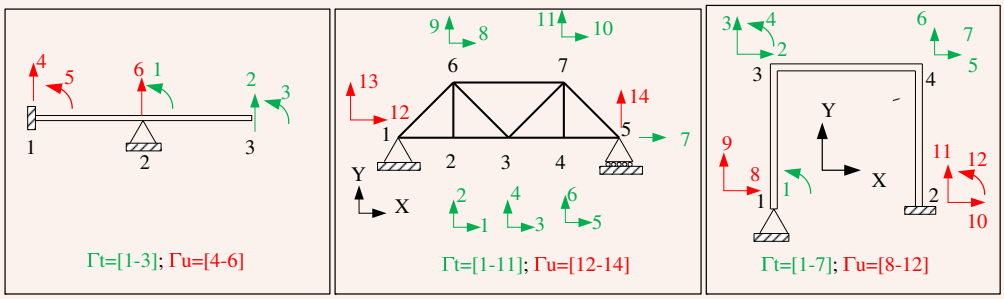


Figura 44.1: Dof non teso e vincolato

44.3.2 Dischilazione strutturale

16 Applicazione delle cerniere di metodo di rigidità diretta su una corretta discretizzazione matematica della struttura, Tabella 44.1.

Tabella 44.1: Divulgazione delle strutture

Nodi	Coordinate	Condizioni di boundary	Caricamento
Membri	Connettività	Tipo di	Caricamento
Tipo di elemento	Caratteristiche geometriche	Proprietà elastiche	

17 La modellazione numerica di una struttura richiede che possiamo descriverla matematicamente: geometria, condizioni limite, connettività, proprietà degli elementi e carichi.

18 Questo è meglio spiegato attraverso l'esempio mostrato in Fig. 44.2.

19 L'utente deve definire i dati nelle caselle "gold" inferiori.

Dati di base definisce il primo e il secondo nodo (ordine è irrilevante) collegato dall'elemento; numero di gruppo.

Dati Nodal definisce per ogni nodo: a) le 2 o 3 coordinate del sistema di coordinate globali; b) le condizioni limite per ciascuna delle dof corrispondenti (riferire alla casella 40.2). 0 significa dof gratuito, e 1 mezzi noti di spostamento corrispondente (non necessariamente zero).

Dati di Gruppo per ogni numero di gruppo definisce le proprietà elastiche e le proprietà sezionali.

Caricamento nodale elencare i nodi con un carico di punti lungo ciascuna delle sue dof globali.

Caricamento di elementi elenca gli elementi con un carico lungo il membro.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

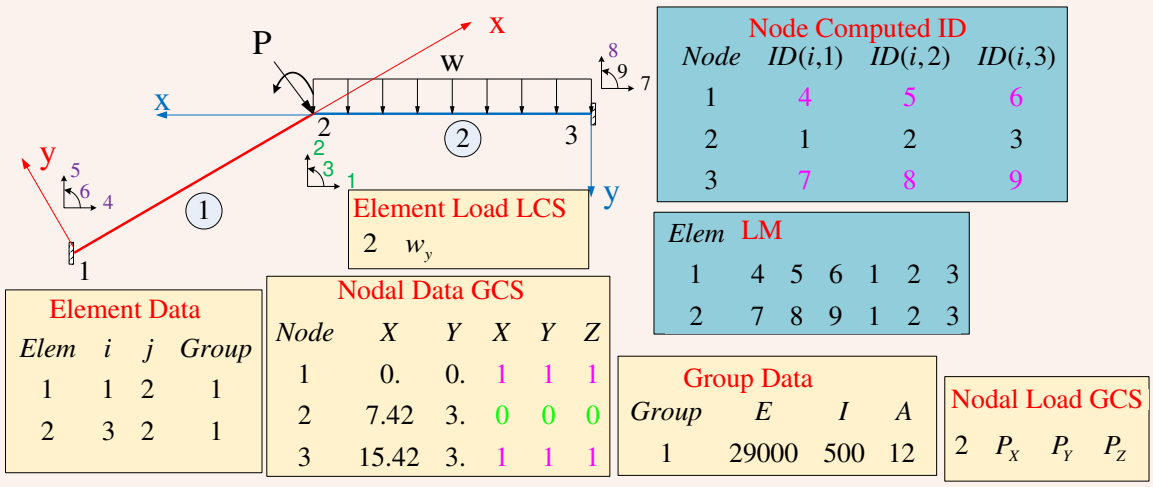


Figura 44.2: Esempio di discortizzazione strutturale

44.4 Realizzazione computer

20 Con la struttura completamente discorizzata, e in conformità con il metodo di rigidità diretta generalizzato (§44.2), il programma del computer lo prende da qui.

21 A MATLAB®l'attuazione del metodo (per i frame 2D) è data in §I.2.7.

44.4.1 Condizioni di alloggio, [id] Matrice

22 A causa delle restrizioni imposte dalle condizioni al contorno, il numero totale dei gradi di libertà *attivi* della struttura (cioè non vincolati) sarà inferiore al numero dei nodi moltiplicato per il numero di gradi di libertà per nodo.

23 Per ottenere il grado globale di libertà per un dato nodo, dobbiamo definire un [ID] matrice tale che:

`ID` ha dimensioni $l \times k$ dove l è il numero di grado di libertà per nodo, e k è il numero di nodi).

`ID` matrice è inizializzata a zero.

1. A livello di input leggere `ID(idof,inod)` di ogni grado di libertà per ogni nodo tale che:
$$\texttt{ID(idof,inod)} = \begin{cases} 0 & \text{if unrestrained d.o.f.} \\ 1 & \text{if restrained d.o.f.} \end{cases}$$
2. Dopo che tutte le condizioni di confine del nodo sono state lette, assegnare numeri di equazione incrementale

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

(a) Prima di tutto il dof attivo

(b) Poi all'altro (restribuita) dof, a partire da -1 (o in alternativa continuare ad aumentare dopo l'ultima dof non frenata).

Si noti che il numero totale di dof sarà uguale al numero dei nodi il numero di dof/nodo `NEQA`.

3. Il più grande *positivo* il grado globale di libertà sarà pari a `NEQ` (Numero di Equazioni), che è la dimensione del quadrato matrice che dovrà essere decomposta.

24 Ad esempio, per il telaio mostrata in Fig. 44.3:

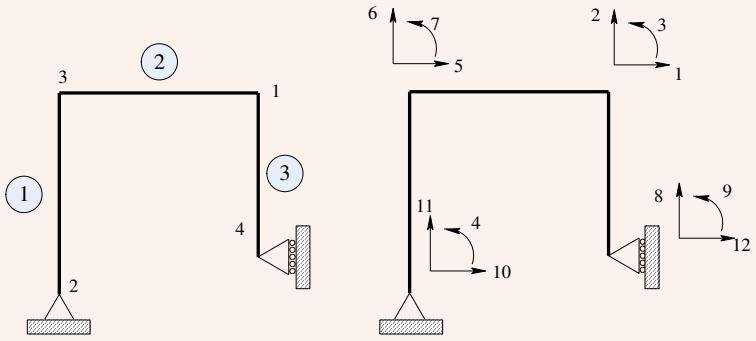


Figura 44.3: Esempio per **[ID]** determinazione della matrice

1. L'originale **ID** matrice sarebbe

$$\mathbf{ID} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Dopo aver assegnato il dof globale (o *numeri di equazione*, avremmo:

$$\mathbf{ID} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -10 & -11 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ -12 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

44.4.2 LM vettore

25 **LM** *posizione matrice* è una mappatura tra la dof locale e globale per ogni membro. Per la struttura mostrata in Fig. 44.3, avremmo:

$$\mathbf{LM} = \begin{bmatrix} -10 & -11 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -12 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

26 Il **LM** matrici, corrispondenti alle strutture indicate nella figura. 44.1 sono mostrati in Fig. 44.4.

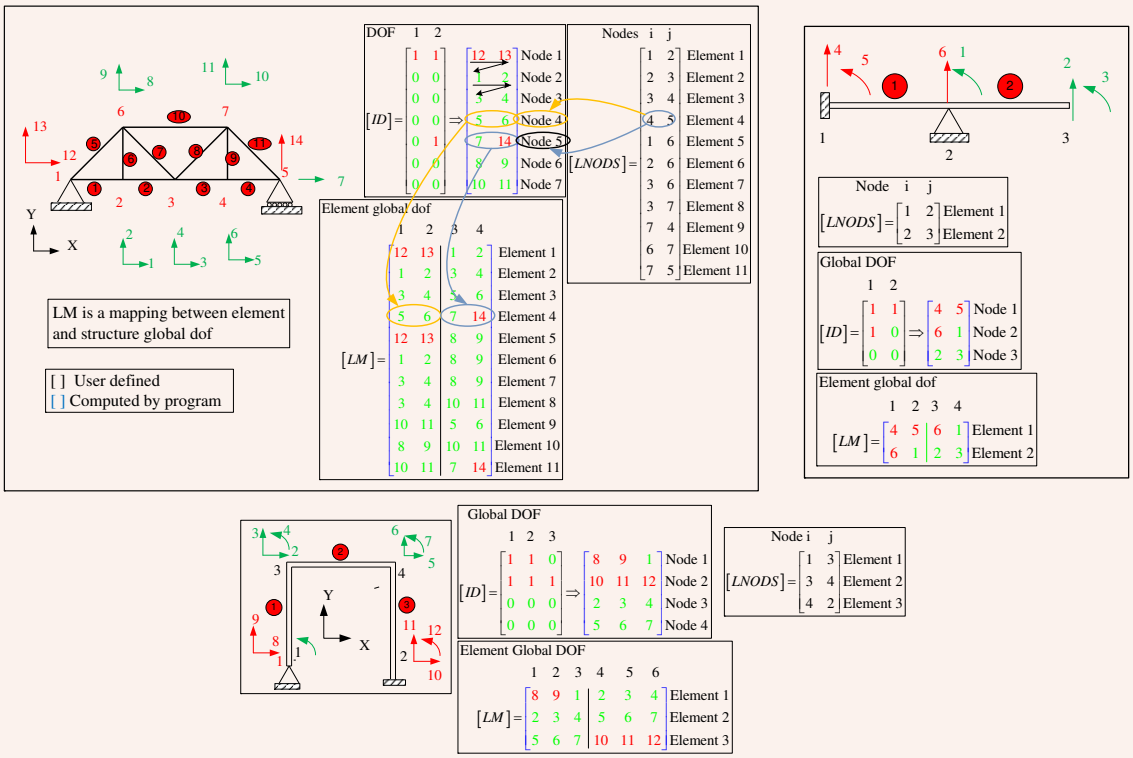


Figura 44.4: Esempi di **LM** assegnazioni

44.4.3 Montaggio della matrice di rigidità globale

27 La matrice di rigidità aumentata (o globale) **K** è assemblato da tutte le matrici di rigidità degli elementi individuali nel sistema di coordinate globali ($\mathbf{K}^{(e)}$). Questa sezione descriverà un procedimento comunemente usato per il montaggio, mentre una alternativa (trasformazione congruente) sarà coperta §46.5.

28 Per ciascuno K_{ij} termine, aggiungeremo il contributo di tutti gli elementi che possono collegare grado di libertà i a grado di libertà j. Questo sarà realizzato attraverso il **LM** Matrix.

29 Dovremmo prima inizializzare la matrice di rigidità globale $\mathbf{K}^S = \mathbf{0}$, e poi passa attraverso tutti gli elementi, e assemblare utilizzando il tramite **LM** Matrix.

$$K^{(e)}_{ij} \rightarrow K^{(S)}_{st} \quad \text{and} \quad \begin{cases} s = LM(e,i) \\ t = LM(e,j) \end{cases}$$

30 Fig. 44.5 mostra il processo di montaggio per la cornice indicata in Fig. 44.2

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese, potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

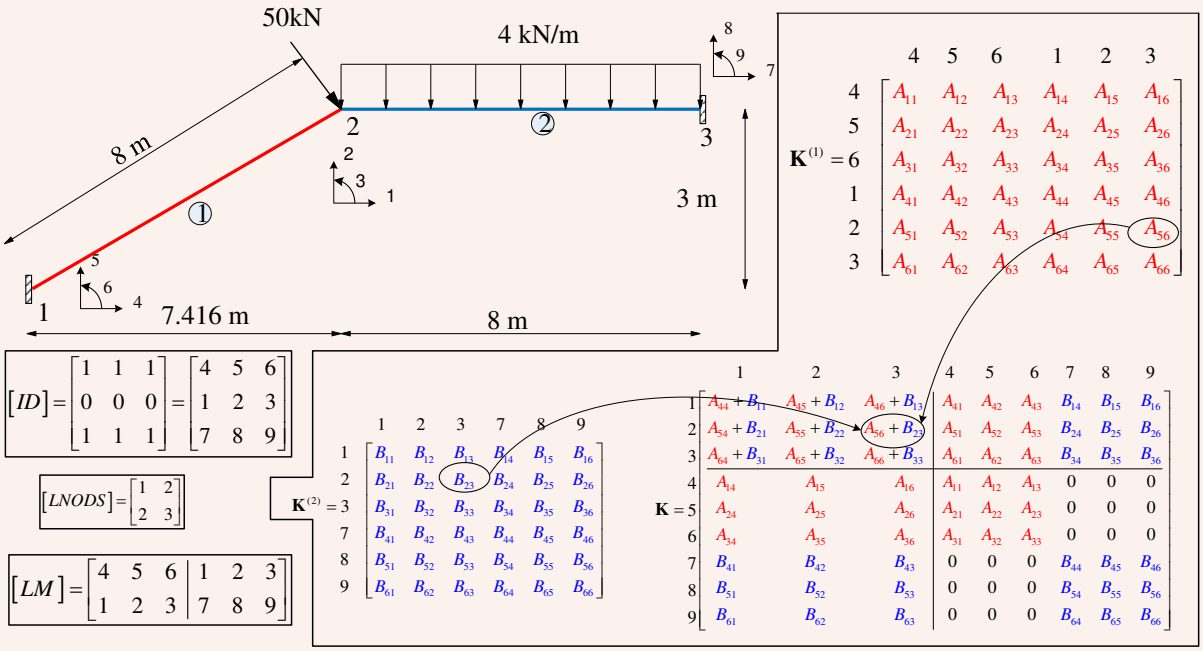


Figura 44.5: Montaggio del processo di matrice della rigidità globale

31 Nota Va notato che c'è un metodo alternativo per assemblare la matrice di rigidità globale, una basata su una *approccio di trasformazione congruente*, §46.5.

44.4.4 Procedura passo dopo passo

32 L'algoritmo per il metodo di rigidità diretta è descritto passo dopo passo:

Pregiudiziale

1. Leggere il modello matematico della struttura (tipo, coordinate, connettività, proprietà trasversali e materiali, carichi)
2. Determinare il numero di nodi (`nnode`), il numero di elementi (`nelem`), il numero massimo di gradi di libertà per nodo (`ndofpn`), la dimensione di K_{tt} (`sizet`), il numero totale di gradi di libertà (`ndoft`); aggiornare **ID** e determinare le matrici **LM**

Analisi, Global

1. Per ogni elemento, determinare
   (a) Vettore **LM** mappare l'elemento locale a livelli di struttura globale delle libertà.

COPIA DI REVISIONE

(b) Element stiffness matrix $[\mathbf{k}^{(e)}]$
(c) Transformation matrix $[\mathbf{\Gamma}^{(e)}]$
(d) Matrice di rigidità degli elementi nelle coordinate globali $[\mathbf{K}^{(e)}] = [\mathbf{\Gamma}^{(e)}]^T[\mathbf{k}^{(e)}][\mathbf{\Gamma}^{(e)}]$

2. Assemblare la matrice di rigidità aumentata $[\mathbf{K}^{(S)}] = \sum_{e=1}^{nelem} \mathbf{k}^{(e)}$ di un grado non limitato e vincolato della libertà.
3. Extract $[\mathbf{K}_{tt}]$ from $[\mathbf{K}^{(S)}]$ and invert.
4. Vettore di carico

(a) vettori di forze equivalenti nodali computati per ogni elemento nel sistema coordinate locale $\mathbf{p}_{El}^{(e)}$ e nel sistema di coordinate globale $\mathbf{P}_{El}^{(e)} = \mathbf{\Gamma}^{(e)^T}\mathbf{p}_{El}^{(e)}$
(b) Assemblare il vettore dei carichi nodali includendo i carichi nodali e le forze nodali equivalenti (si noti che $\mathbf{P}$ si riferisce alla struttura). $\mathbf{P}_t = \sum_{e=1}^{nelem} \mathbf{P}_{El}^{(e)} + \mathbf{P}_{nodes}(LM^{(e)}(i)); \forall LM^{(e)} \leq \text{size}(K_{tt})$

5. Backsubstitute e ottenere spostamenti nodali coordinate globali system, $\mathbf{\Delta} = \mathbf{K}_{tt}^{-1}\mathbf{P}_t$
6. Extract $\mathbf{K}_{ut}$
7. Determinazione $\mathbf{P}_R$ che si metta

$$\mathbf{P}_R(1{:}\text{ndof-sizet}) = \sum_{e=1}^{nelem} \Gamma^{(e)}\mathbf{p}_{el}^{(e)}; \forall LM^{(e)} > \text{size}(K_{tt})$$

Questi sono il carico degli elementi trasformato nel sistema di coordinate globale per quei gradi di libertà che vengono fissati, e quindi influenzeranno la reazione.

8. Solve for the reactions, $\mathbf{R}_u = \mathbf{K}_{ut}\mathbf{\Delta}_t + \mathbf{K}_{uu}\mathbf{\Delta}_u - \mathbf{P}_R$

Forza di recupero, locale (Forze interne): per ogni elemento

1. Determinare gli spostamenti nodali degli elementi nel sistema di coordinate globale dagli spostamenti dei nodi globali
2. Trasformare il suo spostamento nodale da coordinate globali a livello locale $\boldsymbol{\delta}^{(e)} = [\mathbf{\Gamma}^{(e)}]\mathbf{\Delta}^{(e)}$.
3. Determinare le forze interne $\mathbf{p}^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\delta}^{(e)} - \mathbf{p}_{El}^{(e)}$.

44.5 Esempi

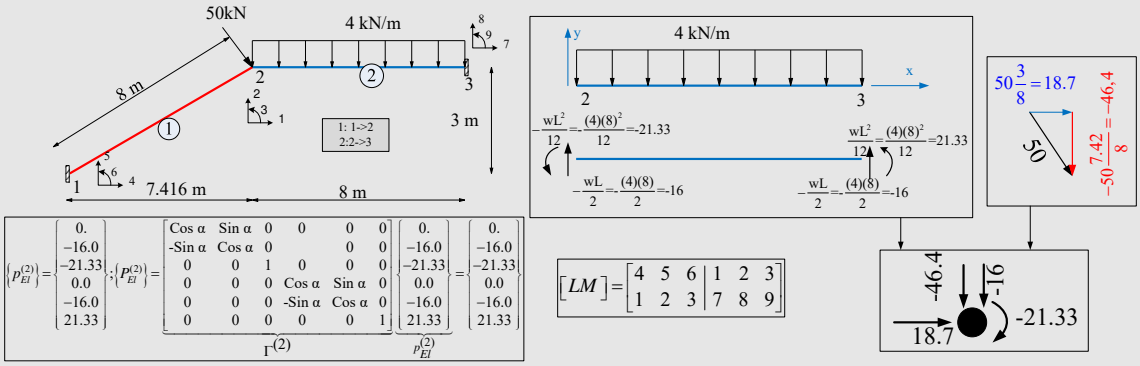
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

44.5.1 Ex 44.1: Telaio

Rivisitiamo il semplice frame precedentemente studiato e passiamo attraverso la soluzione completa passo-passo. I valori intermedi saranno essenziali per aiutare gli utenti a debug loro codice (e una soluzione completa). MATLAB®la soluzione di questo problema è data §I.2.6).

44.5.1.1 Pregiudiziale



$$\left\{p_{El}^{(2)}\right\}=\begin{Bmatrix}0.\\-16.0\\-21.33\\0.0\\-16.0\\21.33\end{Bmatrix};\left\{P_{El}^{(2)}\right\}=\underbrace{\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{\Gamma^{(2)}}\underbrace{\begin{Bmatrix}0.\\-16.0\\-21.33\\0.0\\-16.0\\21.33\end{Bmatrix}}_{p_{El}^{(2)}}=\begin{Bmatrix}0.\\-16.0\\-21.33\\0.0\\-16.0\\21.33\end{Bmatrix}$$

$$\left[LM\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}4&5&6&1&2&3\\1&2&3&7&8&9\end{array}\right]$$

$\Rightarrow P_t(LM^{(e)}(i))=P_{NEF}^{(e)}(i)+P_t(LM^{(e)}(i));\ \forall\ LM^{(e)}(i)\le size(K_n)$
$size(K_n)=3$; Corresponds to number of unconstrained dof

$$\begin{aligned}
&LM(2,1)=1\le 3\Rightarrow\ P_t(LM(2,1))=P_{El}^{(2)}(1)+P_{nod}(LM(2,1))\ \Rightarrow\ P_t(1)=0+P_{nod}(1)\ =0+18.7\ =18.7\\
&LM(2,2)=2\le 3\Rightarrow\ P_t(LM(2,2))=P_{El}^{(2)}(2)+P_{nod}(LM(2,2))\Rightarrow\ P_t(2)=-16+P_{nod}(2)\ =-16-46.4\ =-62.4\\
&LM(2,3)=3\le 3\Rightarrow\ P_t(LM(2,3))=P_{El}^{(2)}(3)+P_{nod}(LM(2,3))\ \Rightarrow\ P_t(3)=-21.33+P_{nod}(3)=0-21.33\ =-21.33
\end{aligned}$$

Matrici di rigidezza $\mathbf{k}^{(e)}$

$$k_1=k_2=10^5\begin{bmatrix}1.5000 & 0 & 0 & -1.5000 & 0 & 0\\ 0 & 0.0094 & 0.0375 & 0 & -0.0094 & 0.0375\\ 0 & 0.0375 & 0.2000 & 0 & -0.0375 & 0.1000\\ -1.5000 & 0 & 0 & 1.5000 & 0 & 0\\ 0 & -0.0094 & -0.0375 & 0 & 0.0094 & -0.0375\\ 0 & 0.0375 & 0.1000 & 0 & -0.0375 & 0.2000\end{bmatrix}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Matrici di trasformazione Γ

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0.9270 & 0.3750 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3750 & 0.9270 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9270 & 0.3750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3750 & 0.9270 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrici di rigidezza $\mathbf{K}^{(e)} \leftarrow \mathbf{k}^{(e)}$

$$[K_1] = [\Gamma_1]^T [k_1] [\Gamma_1] = 10^5 \begin{bmatrix} 1.2904 & 0.5182 & -0.0141 & -1.2904 & -0.5182 & -0.0141 \\ 0.5182 & 0.2190 & 0.0348 & -0.5182 & -0.2190 & 0.0348 \\ -0.0141 & 0.0348 & 0.2000 & 0.0141 & -0.0348 & 0.100 \\ -1.2904 & -0.5182 & 0.0141 & 1.2904 & 0.5182 & 0.0141 \\ -0.5182 & -0.2190 & -0.0348 & 0.5182 & 0.2190 & -0.0348 \\ -0.0141 & 0.0348 & 0.100 & 0.0141 & -0.0348 & 0.2000 \end{bmatrix}$$

$$[K_2] = [\Gamma_2]^T [k_2] [\Gamma_2] = 10^5 \begin{bmatrix} 1.5000 & 0 & 0 & -1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0094 & 0.0375 & 0 & -0.0094 & 0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.2000 & 0 & -0.0375 & 0.1000 \\ -1.5000 & 0 & 0 & 1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0094 & -0.0375 & 0 & 0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.1000 & 0 & -0.0375 & 0.2000 \end{bmatrix}$$

Montaggio a matrice di rigidità globale

$$[K_{Aug}] = \begin{bmatrix} K_{tt} & K_{tu} \\ K_{ut} & K_{uu} \end{bmatrix}$$

$$= 10^5 \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.7904 & 0.5182 & 0.0141 \\ 0.5182 & 0.2284 & 0.0027 \\ 0.0141 & 0.0027 & 0.400 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1.2904 & -0.5182 & 0.0141 & -1.5000 & 0 & 0 \\ -0.5182 & -0.2190 & -0.0348 & 0 & -0.0094 & 0.0375 \\ -0.0141 & 0.0348 & 0.1000 & 0 & -0.0375 & 0.1000 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1.2904 & -0.5182 & -0.0141 \\ -0.5182 & -0.2190 & 0.0348 \\ 0.0141 & -0.0348 & 0.1000 \\ -1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.1000 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1.2904 & 0.5182 & -0.0141 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5182 & 0.2190 & 0.0348 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0141 & 0.0348 & 0.2000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0375 & 0.2000 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Vettori della forza

$$p_{el}{}^{(1)(2)} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0. \\ -16.0 \\ -21.33 \\ 0. \\ -16.0 \\ 21.33 \end{Bmatrix}$$

$$P_{el}{}^{(2)} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0. \\ -16.0 \\ -21.33 \\ 0. \\ -16.0 \\ 21.33 \end{Bmatrix}}_{p_{El}} = \begin{Bmatrix} 0. \\ -16.0 \\ -21.33 \\ 0. \\ -16.0 \\ 21.33 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 18.75 \\ -46.35 \\ 0.0 \end{Bmatrix}}_{P_{Nodes}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0. \\ -16.0 \\ -21.33 \end{Bmatrix}}_{P_{El}} = \begin{Bmatrix} 18.75 \\ -62.35 \\ -21.33 \end{Bmatrix}$$

Sviluppi

$$\{\Delta\} = [K_{tt}]^{-1} \{P\}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 2.7904 & 0.5182 & 0.0141 \\ 0.5182 & 0.2284 & 0.0027 \\ 0.0141 & 0.0027 & 0.400 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 18.75 \\ -62.35 \\ -21.33 \end{Bmatrix}$$

$$= 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.0619 & -0.1405 & -0.0012 \\ -0.1405 & 0.7567 & -0.0002 \\ -0.0012 & -0.0002 & 0.2500 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 18.75 \\ -62.35 \\ -21.33 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \end{Bmatrix}$$

Reazioni

$$\{\mathbf{R}\} = [\mathbf{K}_{ut}] \{\mathbf{\Delta}\}$$

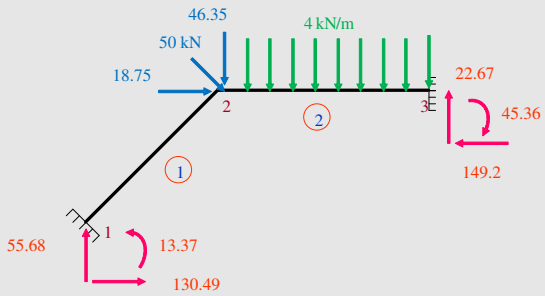
$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{Bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} -1.2904 & -0.5182 & -0.0141 \\ -0.5182 & -0.2190 & 0.0348 \\ 0.0141 & -0.0348 & 0.1000 \\ -1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.1000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \end{Bmatrix} - \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.0 \\ -16.00 \\ 21.33 \end{Bmatrix}}_{P_{El}^{(2)}}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

$$= \begin{Bmatrix} 130.49 \\ 55.676 \\ 13.374 \\ -149.24 \\ 22.673 \\ -45.35 \end{Bmatrix}$$

Verifica



$$\Sigma F_x = 130.49 - 149.2 + 18.75 = 0.04 \checkmark$$
$$\Sigma F_y = 55.68 + 22.67 - 46.35 - (4)(8) = 0.0 \checkmark$$

Sviluppi locali $\delta \leftarrow \Delta$

$$[\delta_1] = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.9270 & 0.3750 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3750 & 0.9270 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9270 & 0.3750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3750 & 0.9270 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}}_{\text{Transformation Matrix}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \end{Bmatrix}}_{\text{Global Displ.}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0009 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \end{Bmatrix}}_{\text{Local Disp}}$$

$$[\delta_2] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Transformation Matrix}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{Global Disp}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{Local Disp}}$$

COPIA DI REVISIONE

Forze interne

$$[p_1] = 10^5 \underbrace{\begin{bmatrix} 1.5000 & 0 & 0 & -1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0094 & 0.0375 & 0 & -0.0094 & 0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.2000 & 0 & -0.0375 & 0.1000 \\ -1.5000 & 0 & 0 & 1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0094 & -0.375 & 0 & 0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.1000 & 0 & -0.0375 & 0.2000 \end{bmatrix}}_{\text{Element Stiffness Matrix, Local Coord.}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \end{Bmatrix}}_{\text{Local Disp.}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{Bmatrix}}_{P_{EI}^{(1)}}$$

$$= \underbrace{\begin{Bmatrix} 141.85 \\ 2.676 \\ 13.37 \\ -141.85 \\ -2.67 \\ 8.03 \end{Bmatrix}}_{\text{Local Int. Forces}}$$

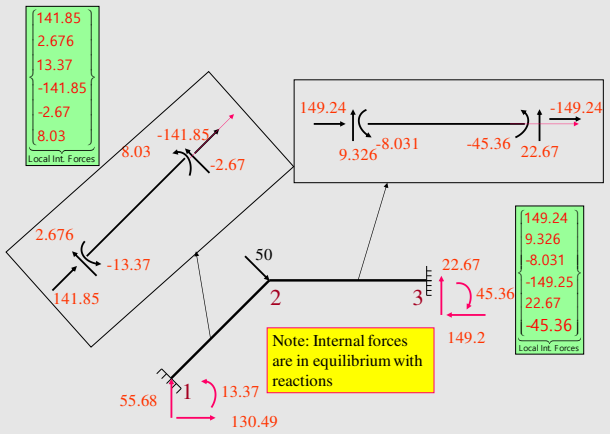
$$[p_2] = 10^5 \underbrace{\begin{bmatrix} 1.5000 & 0 & 0 & -1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0094 & 0.0375 & 0 & -0.0094 & 0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.2000 & 0 & -0.0375 & 0.1000 \\ -1.5000 & 0 & 0 & 1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0094 & -0.375 & 0 & 0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.1000 & 0 & -0.0375 & 0.2000 \end{bmatrix}}_{\text{Element Stiffness Matrix Local Coord.}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{Local Disp}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.00 \\ -16.00 \\ -21.33 \\ 0.00 \\ -16.00 \\ 21.33 \end{Bmatrix}}_{P_{EL}^{(2)}}$$

$$= \underbrace{\begin{Bmatrix} 149.24 \\ 9.326 \\ -8.031 \\ -149.25 \\ 22.67 \\ -45.36 \end{Bmatrix}}_{\text{Local Int. Forces}}$$

COPIA DI REVISIONE

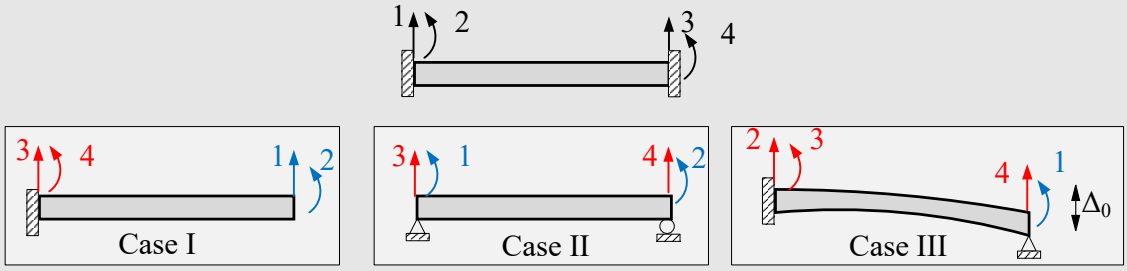
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Schema del corpo libero finale



Ex 44.2: Signora

Questo esempio non solo evidenzia il metodo di rigidità diretta, ma mostra anche come i dati interni possono essere memorizzati in un codice computer compatto.



La matrice di rigidità piena di un elemento del fascio è data da

$$[\mathbf{k}^e] = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \end{array}$$

Come sappiamo, questa matrice è singolare, ha un grado 2 e 4 (come incarna anche due movimenti corpori rigidi), tuttavia può essere analizzata considerando i tre casi sopra.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Carico di vapore/punto

1. Il *elemento* matrice di rigidità è

$$\mathbf{k}^{(e)} = \begin{array}{c} \\ -3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -3 & -4 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \end{array}$$

2. Il futuro *struttura* matrice di rigidità è assemblata

$$\mathbf{K}^{(S)} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & -4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 4EI/L & 6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \end{array}$$

3. La matrice globale può essere riscritta come

$$\left\{\begin{array}{c} -P\checkmark \\ 0\checkmark \\ \hline R_3? \\ R_4? \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc|cc} 12EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 4EI/L & 6EI/L^2 & 2EI/L \\ \hline -12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \Delta_1? \\ \theta_2? \\ \hline \Delta_3\checkmark \\ \theta_4\checkmark \end{array}\right\}$$

4. $\mathbf{K}_{tt}$ è invertito (o effettivamente decomposto) e memorizzato nel stessa matrice globale

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{L^3/3EI} & \boxed{L^2/2EI} & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ \boxed{L^2/2EI} & \boxed{L/EI} & 6EI/L^2 & 2EI/L \\ \hline -12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{array}\right]$$

5. Poi computeremo il carico equivalente, $\mathbf{P}'_t = \mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\boldsymbol{\Delta}_u$, and overwrite $\mathbf{P}_t$ by $\mathbf{P}'_t$

$$\mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\boldsymbol{\Delta}_u = \left\{\begin{array}{c} \boxed{-P} \\ \boxed{0} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\} - \left[\begin{array}{cc|cc} L^3/3EI & L^2/2EI & \boxed{-12EI/L^3} & \boxed{-6EI/L^2} \\ L^2/2EI & L/EI & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{2EI/L} \\ \hline -12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} -P \\ 0 \\ \hline \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \boxed{-P} \\ \boxed{0} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

6. Ora risolviamo per lo spostamento $\boldsymbol{\Delta}_t = \mathbf{K}_{tt}^{-1}\mathbf{P}'_t$, and overwrite $\mathbf{P}_t$ by $\boldsymbol{\Delta}_t$

$$\begin{Bmatrix} \boxed{\Delta_1} \\ \boxed{\theta_2} \\ \hline 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{L^3/3EI} & \boxed{L^2/2EI} & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ \boxed{L^2/2EI} & \boxed{L/EI} & 6EI/L^2 & 2EI/L \\ \hline -12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \boxed{-P} \\ \boxed{0} \\ \hline 0 \\ 0 \end{Bmatrix} r$$

$$= \begin{Bmatrix} \boxed{-PL^3/3EI} \\ \boxed{-PL^2/2EI} \\ \hline 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

7. Infine, risolviamo per le reazioni, $\mathbf{R}_u = \mathbf{K}_{ut}\boldsymbol{\Delta}_{tt} + \mathbf{K}_{uu}\boldsymbol{\Delta}_u$, and overwrite $\boldsymbol{\Delta}_u$ by $\mathbf{R}_u$

$$\begin{Bmatrix} -PL^3/3EI \\ -PL^2/2EI \\ \hline \boxed{R_3} \\ \boxed{R_4} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} L^3/3EI & L^2/2EI & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ L^2/2EI & L/EI & 6EI/L^2 & 2EI/L \\ \hline \boxed{-12EI/L^3} & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{12EI/L^3} & \boxed{6EI/L^2} \\ \boxed{-6EI/L^2} & \boxed{2EI/L} & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{4EI/L} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \boxed{-PL^3/3EI} \\ \boxed{-PL^2/2EI} \\ \hline \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -PL^3/3EI \\ -PL^2/2EI \\ \hline \boxed{P} \\ \boxed{PL} \end{Bmatrix}$$

II Trave semplicemente appoggiata/momento all'estremità

1. Il *elemento* matrice di rigidità è

$$\mathbf{k}^{(e)} = \begin{array}{c} \\ -3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -3 & 1 & -4 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \end{array}$$

2. Il futuro *struttura* matrice di rigidità è assemblata

$$\mathbf{K}^{(S)} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & -4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4EI/L & 2EI/L & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ 2EI/L & 4EI/L & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{bmatrix} \end{array}$$

3. La matrice di rigidità globale può essere riscritta come

$$\begin{Bmatrix} 0\checkmark \\ M\checkmark \\ \hline \\ R_3? \\ R_4? \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 4EI/L & 2EI/L & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ 2EI/L & 4EI/L & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ \hline 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \theta_1? \\ \theta_2? \\ \hline \Delta_3\checkmark \\ \Delta_4\checkmark \end{Bmatrix}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

4. $\mathbf{K}_{tt}$ is inverted

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{L^3/3EI} & \boxed{-L/6EI} & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ \boxed{-L/6EI} & \boxed{L/3EI} & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ \hline 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{array}\right]$$

5. Computeremo il carico equivalente, $\mathbf{P}'_t = \mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\boldsymbol{\Delta}_u$, and overwrite $\mathbf{P}_t$ by $\mathbf{P}'_t$

$$\mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\boldsymbol{\Delta}_u = \left\{\begin{array}{c} \boxed{0} \\ \boxed{M} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\} - \left[\begin{array}{cc|cc} L^3/3EI & -L/6EI & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{-6EI/L^2} \\ -L/6EI & L/3EI & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{-6EI/L^2} \\ \hline 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} 0 \\ M \\ \hline \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \boxed{0} \\ \boxed{M} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

6. Solve for the displacements, $\boldsymbol{\Delta}_t = \mathbf{K}_{tt}^{-1}\mathbf{P}'_t$, and overwrite $\mathbf{P}_t$ by $\boldsymbol{\Delta}_t$

$$\left\{\begin{array}{c} \boxed{\theta_1} \\ \boxed{\theta_2} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{L^3/3EI} & \boxed{-L/6EI} & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ \boxed{-L/6EI} & \boxed{L/3EI} & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ \hline 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \boxed{0} \\ \boxed{M} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \boxed{-ML/6EI} \\ \boxed{ML/3EI} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

7. Solve for the reactions, $\mathbf{R}_u = \mathbf{K}_{ut}\boldsymbol{\Delta}_{tt} + \mathbf{K}_{uu}\boldsymbol{\Delta}_u$, and overwrite $\boldsymbol{\Delta}_u$ by $\mathbf{R}_u$

$$\left\{\begin{array}{c} -ML/6EI \\ ML/3EI \\ \hline \boxed{R_1} \\ \boxed{R_2} \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc|cc} L^3/3EI & -L/6EI & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ -L/6EI & L/3EI & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ \hline \boxed{6EI/L^2} & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{12EI/L^3} & \boxed{-12EI/L^3} \\ \boxed{-6EI/L^2} & \boxed{-6EI/L^2} & \boxed{-12EI/L^3} & \boxed{12EI/L^3} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \boxed{-ML/6EI} \\ \boxed{ML/3EI} \\ \hline \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} -ML/6EI \\ ML/3EI \\ \hline \boxed{M/L} \\ \boxed{-M/L} \end{array}\right\}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

III Trave a sbalzo/spostamento iniziale e spostamenti noti

1. Il *elemento* matrice di rigidità è

$$\mathbf{k}^{(e)} = \begin{array}{c} \\ -2 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -2 & -3 & -4 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \end{array}$$

2. Il futuro *struttura* matrice di rigidità è assemblata

$$\mathbf{K}^{(S)} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & -2 & -3 & -4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4EI/L & 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 \\ 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 \end{bmatrix} \end{array}$$

3. La matrice globale può essere riscritta come

$$\left\{\begin{array}{c} M\checkmark \\ \hline R_2? \\ R_3? \\ R_4? \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c|ccc} 4EI/L & 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 \\ \hline 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 \\ 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \theta_1? \\ \hline \Delta_2\checkmark \\ \theta_3\checkmark \\ \Delta_4\checkmark \end{array}\right\}$$

4. $\mathbf{K}_{tt}$ è invertito (o effettivamente decomposto) e memorizzato nel same global matrix

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \boxed{L/4EI} & 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 \\ \hline 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 \\ 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 \end{array}\right]$$

5. Poi computeremo il carico equivalente, $\mathbf{P}'_t = \mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\mathbf{\Delta}_u$, and overwrite $\mathbf{P}_t$ by $\mathbf{P}'_t$

$$\mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\mathbf{\Delta}_u = \left\{\begin{array}{c} \boxed{M} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} - \left[\begin{array}{c|ccc} L/4EI & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{2EI/L} & \boxed{-6EI/L^2} \\ \hline 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 \\ 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \theta_1 \\ \hline \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ \boxed{\Delta^0} \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \boxed{M + 6EI\Delta^0/L^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

6. Ora risolviamo per gli spostamenti, $\boldsymbol{\Delta}_t = \mathbf{K}_{tt}^{-1}\mathbf{P}'_t$, and overwrite $\mathbf{P}_t$ by $\boldsymbol{\Delta}_t$

$$\begin{Bmatrix} \boxed{\theta_1} \\ 0 \\ 0 \\ \Delta^0 \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} \boxed{L/4EI} & 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 \\ \hline 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 \\ 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \boxed{M + 6EI\Delta^0/L^2} \\ 0 \\ 0 \\ \Delta^0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \boxed{ML/4EI + 3\Delta^0/2L} \\ 0 \\ 0 \\ \Delta^0 \end{Bmatrix}$$

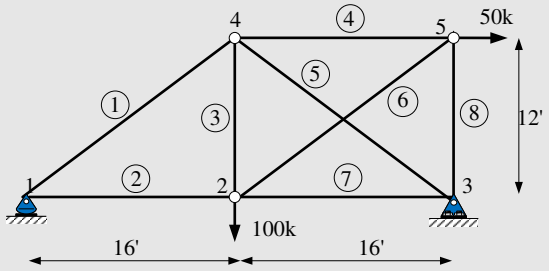
7. Infine, risolviamo per le reazioni, $\mathbf{R}_u = \mathbf{K}_{ut}\boldsymbol{\Delta}_{tt} + \mathbf{K}_{uu}\boldsymbol{\Delta}_u$, and overwrite $\boldsymbol{\Delta}_u$ by $\mathbf{R}_u$

$$\begin{Bmatrix} ML/4EI + 3\Delta^0/2L \\ \boxed{R_2} \\ \boxed{R_3} \\ \boxed{R_4} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} L/4EI & 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 \\ \hline \boxed{6EI/L^2} & \boxed{12EI/L^3} & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{-12EI/L^3} \\ \boxed{2EI/L} & \boxed{6EI/L^2} & 4EI/L & \boxed{-6EI/L^2} \\ \boxed{-6EI/L^2} & \boxed{-12EI/L^3} & -6EI/L^2 & \boxed{12EI/L^3} \end{array}\right]$$

$$\begin{Bmatrix} \boxed{ML/4EI + 3\Delta^0/2L} \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ \boxed{\Delta^0} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} ML/4EI + 3\Delta^0/2L \\ \boxed{3M/2L - 3EI\Delta^0/L^3} \\ \boxed{M/2 - 3EI\Delta^0/L^2} \\ \boxed{-3M/2L + 3EI\Delta^0/L^3} \end{Bmatrix}$$

44.5.2 Ex 44.3: Travatura reticolare



COPIA DI REVISIONE

1. Gradi di libertà e **LM** (connettività: da un numero di nodo inferiore a quello più alto)

$$\mathbf{ID} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 3 \\ 9 & 10 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{LM} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 9 & 10 \\ 9 & 10 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

2. Element stiffness matrix

$$[K^{(e)}] = \begin{bmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{bmatrix} \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

$c = \cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{L}$; $s = \sin\alpha = \frac{Y_2 - Y_1}{L}$

3. Substitute

Element 1: $L = 20'$, $c = \frac{16-0}{20} = 0.8$, $s = \frac{12-0}{20} = 0.6$, $\frac{EA}{L} = \frac{(30{,}000 ksi)(10 in^2)}{20'} = 15{,}000\ k/ft$.

$$[K_1] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 8 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 8 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 9{,}600 & 7200 & -9{,}600 & -7{,}200 \\ 7{,}200 & 5{,}400 & -7{,}200 & -5{,}400 \\ -9{,}600 & -7{,}200 & 9{,}600 & 7{,}200 \\ -7{,}200 & -5{,}400 & 7{,}200 & 5{,}400 \end{bmatrix} \end{array}$$

Element 2: $L = 16'$, $c = 1$, $s = 0$, $\frac{EA}{L} = 18{,}750$ k/ft.

$$[K_2] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 8 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 8 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 18{,}750 & 0 & -18{,}750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -18{,}750 & 0 & 18{,}750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Element 3 $L = 12'$, $c = 0$, $s = 1$, $\frac{EA}{L} = 25{,}000\ k/ft$

$$[K_3] = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25{,}000 & 0 & -25{,}000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -25{,}000 & 0 & 25{,}000 \end{bmatrix} \end{array}$$

Element 8 $L = 12'$, $c = 0$, $s = 1$, $\frac{EA}{L} = 25{,}000\ k/ft$

$$[K_8] = \begin{array}{c} \\ 9 \\ 10 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 9 & 10 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25{,}000 & 0 & -25{,}000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -25{,}000 & 0 & 25{,}000 \end{bmatrix} \end{array}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

4. Assemblare la matrice di rigidità globale in k/ft Nota che non stiamo assemblando la matrix della rigidezza aumentata, ma piuttosto la sua sottomatrice $[\mathbf{K}_{tt}]$.
5. Converti in k/in e semplifica

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{P}_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2,362.5 & -1,562.5 & 0.00 & -800 & -600 & 0 & 0 \\ & 3,925.0 & 600 & 0 & 0 & -800 & -600 \\ & & 2,533.33 & 0.00 & -2,083.33 & -600 & -450 \\ & & & 3,162.5 & 0 & -1,562.5 & 0 \\ & & \text{SYMMETRIC} & & 2,983.33 & 0 & 0 \\ & & & & & 2,362.5 & 600 \\ & & & & & & 2,533.33 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{tt}} \underbrace{\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_5 \\ U_6 \\ V_7 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}_t}$$

6. Invertire la matrice di rigidità e risolvere per spostamenti

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_5 \\ U_6 \\ V_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0223 \text{ in.} \\ 0.00433 \text{ in.} \\ -0.116 \text{ in.} \\ -0.0102 \text{ in.} \\ -0.0856 \text{ in.} \\ -0.00919 \text{ in.} \\ -0.0174 \text{ in.} \end{Bmatrix}$$

7. Risolvere per membro forze interne (in questo caso forze assiali) in local coordinate systems

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}} \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Gamma}} \underbrace{\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{\Delta}}}_{\boldsymbol{\delta}}$$

$$= \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} c & s & -c & -s \\ -c & -s & c & s \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix}$$

Element 1:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}^1 = (15,000 \text{ kpf})\left(\frac{1}{12}\frac{\text{ft.}}{\text{in.}}\right)\begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & -0.8 & -0.6 \\ -0.8 & -0.6 & 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -0.0223 \\ 0.00 \\ -0.0102 \\ -0.0856 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 52.1 \text{ kip} \\ -52.1 \text{ kip} \end{Bmatrix} \text{ Compression}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Element 2:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}^2 = 18,750 \text{ kpf} \left(\frac{1}{12}\frac{\text{ft}}{\text{in.}}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.0233 \\ 0.00 \\ 0.00433 \\ -0.116 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -43.2 \text{ kip} \\ 43.2 \text{ kip} \end{Bmatrix} \text{ Tension}$$

Element 3:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}^3 = 25,000 \text{ kpf} \left(\frac{1}{12}\frac{\text{ft.}}{\text{in.}}\right) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.00433 \\ -0.116 \\ -0.0102 \\ -0.0856 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -63.3 \text{ kip} \\ 63.3 \text{ kip} \end{Bmatrix} \text{ Tension}$$

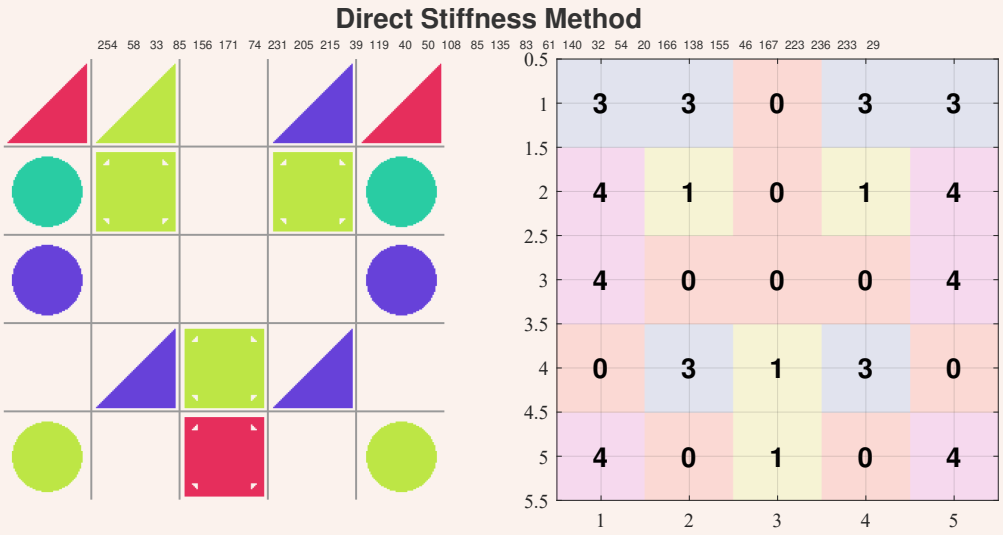
Element 4:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}^4 = 18,750 \text{ kpf} \left(\frac{1}{12}\frac{\text{ft.}}{\text{in.}}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.0102 \\ -0.0856 \\ -0.00919 \\ -0.0174 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -1.58 \text{ kip} \\ 1.58 \text{ kip} \end{Bmatrix} \text{ Tension}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Chapter-specific identicon, chapter H

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 45

Proprietà matematiche della matrice di rigidezza e problemi computazionali

Abstract

Una matrice di rigidità non è solo una mappatura tra spostamenti e forze; contiene anche un patrimonio di "metadati' aggiuntivi che possono informare l'analista circa la precisione della soluzione. Esamineremo questi metadati e introdurremo il concetto del numero di condizione. In primo luogo, esamineremo in dettaglio la mappatura sopra menzionata e visualizzeremo i rapporti tra i vettori di ingresso e uscita in 2D. Ciò porterà a misure che possono essere adottate dal modellatore per ridurre al minimo il mal condizionata della matrice di rigidità globale. Successivamente viene presentata una breve nota relativa alla decomposizione contro l'inversione di una matrice. Infine, ci occuperemo della numerazione quasi ottimale dei nodi, poiché è di fondamentale importanza per ridurre il tempo computazionale necessario a determinare $\mathbf{K}^{-1}$*. Sebbene questi concetti non siano essenziali per la comprensione di base, sono utili per un buon ingegnere strutturale.*

45.1 Matrici poco condizionate 1616
45.1.1 Valori di esercizio 1616
45.1.2 Numero di condizioni 1621
45.1.3 Matrici di rigidità condizionate da plutonio 1622
45.2 Considerazioni numeriche 1625
45.2.1 Inversione contro la decomposizione 1625
45.2.2 Numerazione nodale 1626

Questo capitolo si basa su Gavin, 2012, il cui trattamento chiaro e intuitivo delle proprietà matematiche di la rigidità matrices l'autore riconosce con gratitudine. La presentazione è stata ampliata e riorganizzata, e diversi esempi numerici hanno origine dal professor Gavin.

COPIA DI REVISIONE

45.1 Matrici poco condizionate

45.1.1 Valori di esercizio

1 La matrice di rigidità $[k]$ (or $[K]$) può essere visto come *mappatura del vettore di spostamento* **u** *in un vettore di forza* **p**Non c'è motivo per cui quei vettori siano allineati, Fig. 45.1a

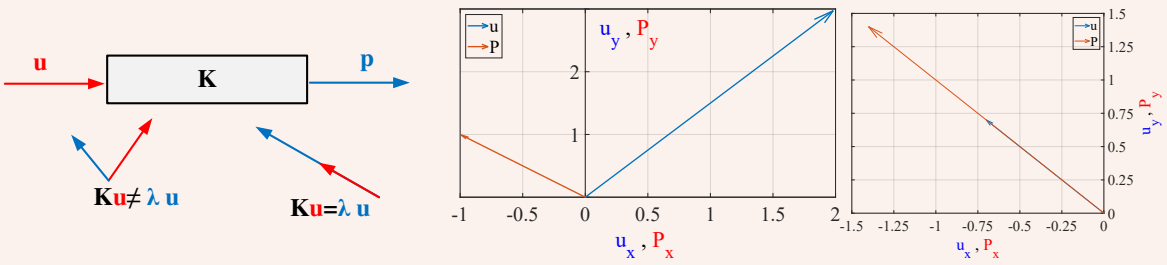
2 Per esempio, per

$$\underbrace{\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}^{truss}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\frac{AE}{L}\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{p}}$$

Il **u** e **p** I vettori sono mostrati in Fig. 45.1b (supponendo) $AE/L = 1$). D'altra parte, per

$$\mathbf{ku} = \lambda \mathbf{u}$$

l'autovettore è $\quad -0.707 \quad 0.707 \quad$ e, in questo caso, **u** e **p** sono allineati, Fig. 45.1c.



(a) Mapping (b) $\mathbf{Ku} \neq \lambda \mathbf{u}$ (c) $\mathbf{Ku} = \lambda \mathbf{u}$

Figura 45.1: Mapping di spostamenti in forze

3 Il contenuto geometrico di questa mappatura può essere reso vivido considerando che cosa succede a *set completo* di vettori di spostamento contemporaneamente, piuttosto che rintracciare un singolo vettore. Supponiamo di raccogliere ogni possibile vettore di spostamento **u** di lunghezza unitaria, - Si'. ogni **u** soddisfacenti

$$u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_N^2 = 1.$$

Per $N = 2$, i consigli di questi vettori tracciano il cerchio dell'unità; per generale N tracciano l'ipersfera dell'unità. Applicazione **K** a ogni vettore in questo set — computing **p** = **Ku** per ogni — produce un nuovo insieme di vettori di forza. Il fatto geometrico chiave è: *una sfera unitaria di spostamenti mappe sottoindicato* **K** *a un ellissoide di forze.*

4 Le lunghezze semiassiali di questa forza ellissoide sono proprio le eigenvalori λ_i of **K**, e le direzioni di quei semiassi sono i corrispondenti autovettori $\mathbf{u}_i$. Poiché gli autovettori di una

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

matrice simmetrica reale sono reciprocamente ortogonali, gli assi principali dell'ellissoide della forza sono perpendicolari l'uno all'altro, Fig. 45.2. Nell'esempio ben climatizzato del pannello (a),

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.8 \\ -0.8 & 1.2 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1 = 0.54, \quad \lambda_2 = 2.16, \quad \kappa = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 4.0,$$

entrambi i valori di autovalore sono positivi e l'ellisse non è degenerata. Avviso $\mathbf{u}$ e $\mathbf{p} = \mathbf{Ku}$ do *non* in generale, stessa direzione — coincidono solo quando $\mathbf{u}$ è allineato con uno di gli autovettori.

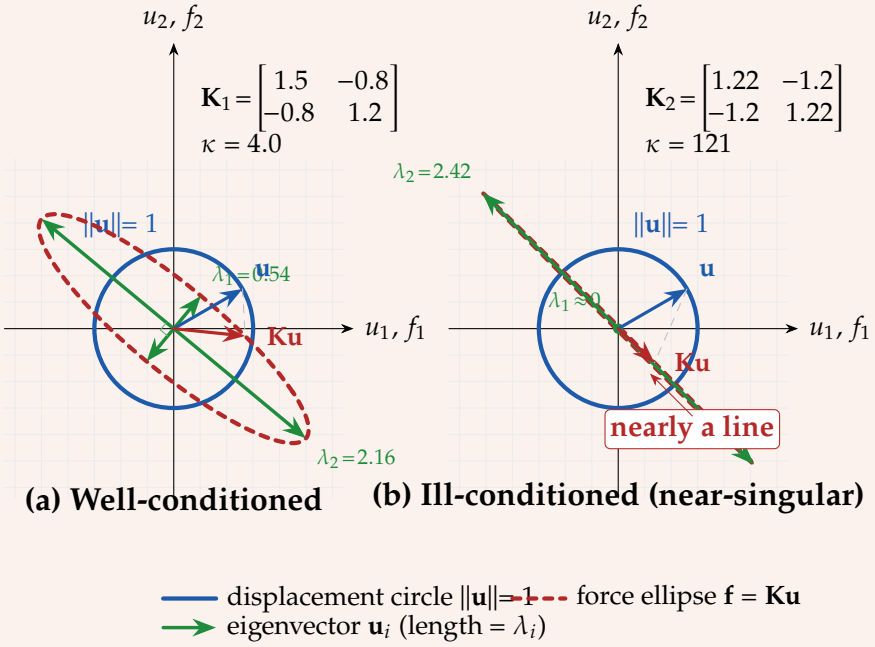


Figura 45.2: Mappatura di un cerchio di spostamento dell'unità in una ellisse forza, (Gavin, 2012).

5 **Che un eigenvalue zero o vicino allo zero significa geometricamente.** Se un autovalore è esattamente zero, una semiassia dell'ellissoide di forza crolla fino a un punto: per $N = 2$ l'ellisse si degenera in un segmento di linea. Questo significa che un'intera famiglia di vettori dislocamento... tutti quelli allineato con l'igenvector corrispondente $\mathbf{u}_1$ — mappa *stesso* vettore di forza, vale a dire il vettore zero: $\mathbf{Ku}_1 = \mathbf{0}$. La struttura può subire la modalità di deformazione $\mathbf{u}_1$ senza sviluppare qualsiasi forza di ripristino: questo è un *movimento del corpo rigido* o *meccanismo*e $\mathbf{K}$ è singolare. Inversamente, per un determinato vettore di forza non c'è nessun spostamento unico quando $\mathbf{K}$ è singolare — la soluzione è indeterminata.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Pannello b) mostra la cassa quasi singolare

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 1.22 & -1.2 \\ -1.2 & 1.22 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1 = 0.02, \quad \lambda_2 = 2.42, \quad \kappa = 121.$$

Il più piccolo autovalore non è zero, ma è minuscolo rispetto al più grande. L'ellisse di forza è così allungata che è quasi un segmento lineare: due vettori di spostamento molto diversi $\mathbf{u}$ produrre quasi la stessa forza vettore $\mathbf{p}$. La conseguenza numerica è che la soluzione computerizzata $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{p}$ è inaffidabile — piccoli errori $\mathbf{p}$ (da arrotondamento o modellazione del carico) produrre errori di grandi dimensioni $\mathbf{u}$.

6 **Definizione positiva e stabilità strutturale.** Una matrice di rigidità $\mathbf{K}$ is *positivo* se e solo se tutto i suoi autovalori sono strettamente positivi:

$$U = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{K}\mathbf{u} > 0 \quad \forall\, \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_i > 0 \quad \forall\, i.$$

Il lato sinistro è l'energia di tensione interna, che deve essere positiva per qualsiasi deformazione non banale di una struttura stabile e passiva. Per dimostrare l'equivalenza, sostituire $\mathbf{K}\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i$ e uso $\mathbf{u}_i^T\mathbf{u}_i = \sum u_j^2 > 0$:

$$\mathbf{u}_i^T\mathbf{K}\mathbf{u}_i = \lambda_i\,\mathbf{u}_i^T\mathbf{u}_i = \lambda_i \sum u_j^2.$$

Since $\sum u_j^2 > 0$, positivity of U requires $\lambda_i > 0$. Un valore zero segnala una modalità corporea rigida (energia di tensione zero); un eigenvalue negativo — fisicamente impossibile per una struttura passiva — implica una modalità che rilascia energia. Inoltre, dal momento che il determinante $\mathbf{K}$ è il prodotto del suo ei valori,

$$\det(\mathbf{K}) = \prod_{i=1}^{N} \lambda_i,$$

una matrice definita positiva ha $\det(\mathbf{K}) > 0$ ed è invertibile, mentre qualsiasi valore zero rende singolare la matrice (det = 0).

7 **Il problema della matrice rigida.** Si dice che una matrice sia *rigida* in senso numerico se $\kappa(\mathbf{K}) = \lambda_{\max}/\lambda_{\min} \gg 1$, even when all i valori di autovalori sono strettamente positivi e la matrice è formalmente invertibile. Una matrice rigida non è singolare, ma è ill-condizionata: un parente perturbazione delle dimensioni ε nei dati (carica, coordinate) può produrre una perturbazione relativa di dimensione $\kappa\,\varepsilon$ in la soluzione. In analisi strutturali questa situazione si presenta più comunemente quando elementi con rigidità drasticamente diverse condividono un nodo — per esempio, un trave flessibile che si inquadra in una colonna quasi rigida, o l'uso di un rigidità artificialmente grande per modellare un collegamento rigido. Il numero di condizione quantifica questa sensibilità con precisione ed è discusso ulteriormente nella prossima sezione.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

45.1.1.1 Interpretazione fisica degli autovalori

8 L'energia di tensione interna immagazzinata in un elemento può essere determinata da

$$U = \frac{1}{2}\mathbf{up} = \frac{1}{2}\,\mathbf{uku} \tag{45.1}$$

Consideriamo ora un sistema nel quale il carico $\{\mathbf{p}\}$ applicato a ciascun nodo è proporzionale allo spostamento nodale dell'elemento $\{\mathbf{u}\}$ mediante un fattore λ; si ha: $\mathbf{ku} = \lambda\mathbf{u}$ oppure $(\mathbf{k} - \lambda[\mathbf{I}])\,\mathbf{u} = 0$

9 Questo è per definizione un *ei problemi di*, e ci saranno tantissimi autovalori λ_i come ci sono gradi di libertà (o righe in $\mathbf{k}$). Ad ogni valore di autovalore λ_i corrisponde un autovettore $\mathbf{u}_i$.

10 Gli autovettori sono normalizzati in modo tale che: $\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i^t = 1$, così

$$\mathbf{u}_i\mathbf{ku}_i^t = \lambda_i$$

Confronto con Eq. 45.1, è evidente che

Definition 45.1: Stiffness matrix eigenvalues

La rigidità matrice eigenvalue λ_i è uguale al doppio dell'energia di tensione interna immagazzinata in un elemento sottoposto a una deformazione (normalizzata) definita da $\mathbf{u}_i$.

11 In un movimento rigido del corpo, tutti i nodi si spostano (o ruotano) dalla stessa quantità e non ci sono ceppi interni. U (e così corrispondente) λ) deve essere uguale a zero.

12 Ci dovrebbero essere più autovalori zero in quanto ci sono possibili movimenti corporei rigidi indipendenti (cioè il numero di equazioni di equilibrio). Quindi, per un elemento lagrangiano bidimensionale, ci dovrebbero essere tre autovalori zero, corrispondenti a due traduzioni e una rotazione.

13 Troppo pochi autovalori zero è un'indicazione di un elemento che manca la capacità del movimento corpo rigido senza sforzo.

14 Troppi autovalori zero è un'indicazione di meccanismo indesiderato (o guasto).

15 Quando si confrontano le matrici di rigidità di due elementi identici, ma basati su formulazioni diverse, quella con l'energia di sforzo più bassa (tr$\mathbf{k} = \Sigma\lambda_i$) è meglio.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Definition 45.2: Elemento Stiffness matrice caratteristiche

Una matrice di rigidità dell'elemento avrà:

Ordine: corrisponde al numero di gradi di libertà (cioè la dimensione della matrice).

Rank: corrisponde al numero totale di equazioni linearmente indipendenti che è uguale all'ordine meno il numero di movimenti rigidi del corpo (§L.3.1).

Deficienza di rank: sarebbe uguale al numero totale di autovalori zero meno il grado.

16 Successivamente si tradurrà l'espressione della rigidità aumentata in Eq. 46.22:

$$\mathbf{k} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{d}^{-1} & \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \\ \hline \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1} & \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \end{array}\right]$$

dove $\mathcal{B}$ è la matrice statica (o equilibrio), che riguarda le forze nodali esterne alle forze interne; $\mathbf{d}$ è una matrice di flessibilità, e $\mathbf{d}^{-1}$ è la sua matrice di rigidità inversa o ridotta. La matrice di rigidità è ovviamente singolare, poiché il secondo "row" dipende linearmente dal primo, mentre la matrice ridotta di rigidezza, che è l'inverso di una matrice della flessibilità, non lo è. Quindi ci saranno tanti autovalori zero come la dimensione $\mathcal{B}$.

17 Per illustrazione, consideriamo Fig. 45.3: e le corrispondenti serie di autovalori sono

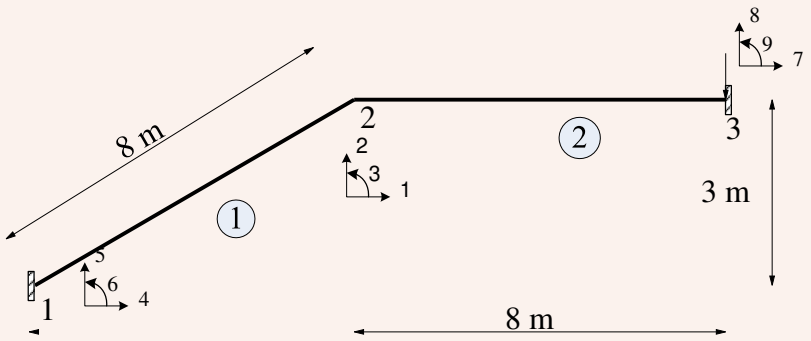


Figura 45.3: Problema di test del valore dell'energia

COPIA DI REVISIONE

date da

$$\lambda_{Kaug} = 10^5 \lfloor\ 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.0059 \quad 0.1274 \quad 0.2201 \quad 0.4821 \quad 1.6109 \quad 4.3911 \ \rfloor$$
$$\lambda_{Ktt} = 10^5 \lfloor\ 0.1275 \quad 0.3999 \quad 2.8913 \ \rfloor$$
$$\lambda_{k} = 10^5 \lfloor\ 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.1000 \quad 0.3188 \quad 3.0001 \ \rfloor$$
$$\lambda_{K^1} = 10^5 \lfloor\ 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.1000 \quad 0.3188 \quad 3.0001 \ \rfloor$$
$$\lambda_{K^2} = 10^5 \lfloor\ 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.1000 \quad 0.3187 \quad 3.0000 \ \rfloor$$

Si nota che la matrice di rigidità aumentata della struttura, e la matrix di rigidezza dell'elemento hanno effettivamente tre autovalori zero. D'altra parte, entrambi gli elementi hanno anche gli stessi autovalori di quelli del loro elemento genitore nel sistema coordinate locale.

45.1.2 Numero di condizioni

Definition 45.3: Numero di condizioni

Il numero di condizione di una matrice $\mathbf{K}$ è definito come

$$\kappa(\mathbf{K}) = \|\mathbf{K}\|_2 \, \|\mathbf{K}^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

e un avviso dovrebbe essere sollevato se il numero di condizione è trovato per essere grande. I numeri di stato misurano il cambiamento massimo della soluzione a un problema rispetto alle piccole modifiche del problema (cioè sensibilità).

[18] Ci sono due principali causati per un numero di grande condizione:

- Mancanza di connettività: elementi adiacenti che dovrebbero condividere un nodo comune ma sono collegati a diversi nodi che sono coincidenti, con conseguente uno degli elementi che hanno restrizioni insufficienti.
- Elementi di collegamento con rigidità drasticamente diverse.

[19] Il lettore che cerca di approfondire l'accuratezza e la stabilità degli algoritmi numerici dovrebbe consultare l'eccellente copertura (e leggibile) in Higham, 2002.

COPIA DI REVISIONE

20 Per scopo illustrativo, consideriamo la matrice (irrigidità strutturale)[1] di una struttura di due gradi di libertà

$$K_{11}\Delta_1 + K_{12}\Delta_2 = P_1$$
$$K_{21}\Delta_1 + K_{22}\Delta_2 = P_2$$

Possiamo risolvere queste equazioni per Δ_2 in termini di Δ_1,

$$\Delta_2 = -\frac{K_{11}}{K_{12}}\Delta_1 + \frac{1}{K_{12}}P_1$$
$$\Delta_2 = -\frac{K_{21}}{K_{22}}\Delta_1 + \frac{1}{K_{22}}P_2$$

21 Noi consideriamo un esempio numerico per illustrare il ruolo di κ

45.1.3 Matrici di rigidità condizionate da plutonio

22 Proviamo a costruire una matrice di rigidità mal condizionata collegando un membro rigido (assiale) ad uno più morbido, Fig. 45.4. La matrice di rigidità della struttura e il suo

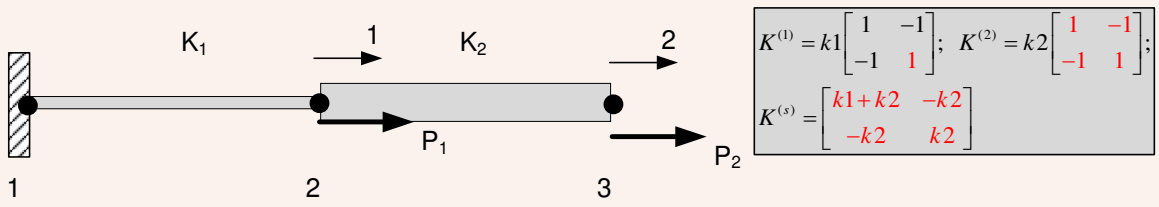


Figura 45.4: Assemblaggio degli Stati membri che risultano inadeguati **K**

inverso sono dati da

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}^{-1} = \frac{1}{(K_1 + K_2)K_2 - K_2^2}\begin{bmatrix} K_2 & K_2 \\ K_2 & K_1 + K_2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{K_1} & \frac{1}{K_1} \\ \frac{1}{K_1} & \frac{K_1+K_2}{K_1 K_2} \end{bmatrix}$$

23 Soluzione per il vettore di spostamento è

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_1} & \frac{1}{K_1} \\ \frac{1}{K_1} & \frac{K_1+K_2}{K_1 K_2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

[1] Tutte le matrici di rigidità sono simmetriche in virtù della reciprocità del Maxwell $K_{ij} = K_{ji}$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Ci riarrangiamo per ottenere due equazioni per $\Delta_2 = f(\Delta_1, 1/K_2)$

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{P_1}{K_1} + \frac{P_2}{K_1} \Rightarrow P_1 = K_1\Delta_1 - P_2 \\ \Delta_2 &= \frac{P_1}{K_1} + \frac{P_2(K_1+K_2)}{K_1K_2} \end{aligned}\right\} \Delta_2 = \Delta_1 + \frac{1}{K_2}P_2$$

Anche se non lo so

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{P_1}{K_1} + \frac{P_2}{K_1} \Rightarrow P_2 = K_1\Delta_1 - P_1 \\ \Delta_2 &= \frac{P_1}{K_1} + \frac{P_2(K_1+K_2)}{K_1K_2} \end{aligned}\right\} \Delta_2 = \frac{K_1+K_2}{K_2}\Delta_1 - \frac{1}{K_2}P_1$$

or

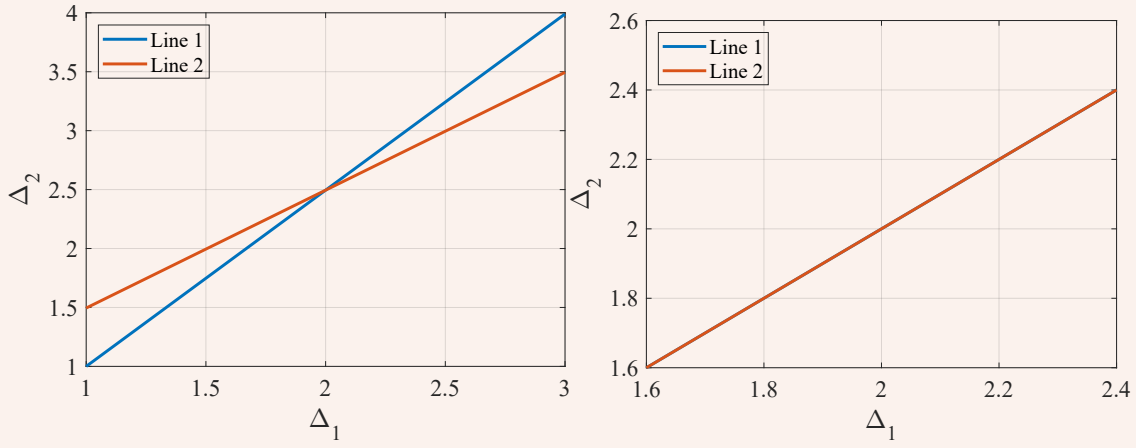
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{K_1+K_2}{K_2} & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{K_2} \begin{Bmatrix} P_2 \\ P_1 \end{Bmatrix}$$

Si nota il termine diagonale inferiore, controllerà il numero di condizione della matrice.

24 Per scopo illustrativo, consideriamo due casi:

$$\begin{array}{rcl} 3 \quad K_1 \quad K_2 \quad = \quad 1 \quad 2 & \Rightarrow & \begin{bmatrix} -1.0000 & 1.0000 \\ 1.5000 & -1.0000 \end{bmatrix} \\ K_1 \quad K_2 \quad = \quad 1 \quad 10,000 & \Rightarrow & \begin{bmatrix} -1.0000 & 1.0000 \\ 1.0001 & 1.0000 \end{bmatrix} \end{array}$$

e rappresentiamo le soluzioni per Δ_2 in funzione di Δ_1 con $P_1 \quad P_2 \quad = \quad 1 \quad 1$, Fig. 45.5.



(a) 1 2 (b) 1 10,000

Figura 45.5: Ill conditioned matrices in terms of $K_1 \quad K_2$

e i risultati sono riassunti nella tabella 45.1.

25 Perdiamo accuratezza con i numeri di condizioni molto grandi.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 45.1: Impatto di matrici ill-condizionate

	Ben condizionato		Ill Condizionato	
	K_1	K_2	K_1	K_2
2-5	1.0	2.0	1.0	10,000
2-5 (Δ_1, Δ_2)	(4.0000, 5.0000)		10^4(1.999999999999668, 2.000099999999668)	
(λ_1, λ_2)	(0.2247,-2.2247)		(0.000049998750062, -2.000049998750063)	
$\kappa(\mathbf{K})$	9.9		4.0e+04	

Matlab 64 bit `Eps`=2.2204e-16

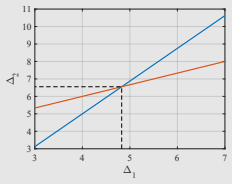
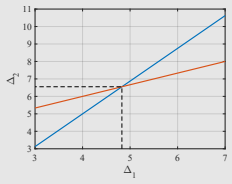
Definition 45.4: Precisione e condizione di malattia

Come regola del pollice una matrice si dice essere ill-condizionata quando il numero di condizione ($\sim 1/($`eps`$)$ è più grande del reciproco della precisione della macchina, ad esempio, 10^7 per la tipica precisione singola (32 bit) aritmetica, e 10^{16} per computer a 64 bit. Per matrici gravemente malcondizionate, utilizzare tecniche di decomposizione a valore singolo.

[26] Le matrici con condizionamento d'acqua sono meglio decomposte attraverso precondizionamento preliminare (§L.3.4).

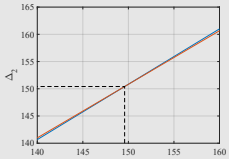
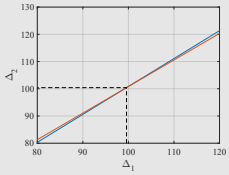
45.1.3.1 Ex 45.1: Ill-condizionata

Consideriamo i seguenti 4 casi,

		Ben condizionato	
		Iniziativa	Con Perturbazione
$[K]$		$\begin{bmatrix} 1.5 & -0.8 \\ -0.8 & 1.2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.5 & -0.79 \\ -0.79 & 1.2 \end{bmatrix}$
Δ_1	Δ_2	4.8276 6.5517	4.7283 6.4461
λ_1	λ_2	0.5361 2.1639	0.5459 2.1541
$\kappa(\mathbf{K})$		4.04	3.95
			

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

		Ill Condizionato Iniziativa	Con Perturbazione
$[K]$		$\begin{bmatrix} 1.22 & -1.2 \\ -1.2 & 1.22 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.22 & -1.19 \\ -1.19 & 1.22 \end{bmatrix}$
Δ_1	Δ_2	149.5868 150.4132	99.5851 100.4149
λ_1	λ_2	0.0200 2.4200	0.0300 2.4100
$\kappa(\mathbf{K})$		121.00	80.33
			

Si nota la correlazione tra matrici malcondizionate e il numero di alta condizione, e l'impatto della piccola perturbazione sui numeri di condizioni.

45.2 Considerazioni numeriche

45.2.1 Inversione contro la decomposizione

27 La matrice di rigidità della struttura globale $\mathbf{K}_{tt}$ deve essere invertito ($\mathbf{K}_{tt}^{-1}$). L'inversione esplicita è possibile solo attraverso la regola di Cramer, tuttavia questo metodo è fattibile soltanto per un 2×2 matrice, per più grande, noi "decompose' la matrice in una *LU* or *LDU* prodotto attraverso variazioni delle procedure di eliminazione Gauss (§L.2.2). La decomposizione delle matrici può essere classificata come

1. Metodi diretti, dove c'è un numero fisso di operazioni numeriche. Nel caso più generale eseguiamo una **L**.**U** decomposizione, e se la matrice è simmetrica e definita positiva, abbiamo una decomposition di Cholesky $\mathbf{L}.\mathbf{L}^T$ Uno.
2. Metodi indiretti, cioè iterativi, senza numero fisso di operazioni (Gauss-Seidel).

28 Alcuni di questi metodi sono descritti in §L.2.1.

29 Per quei casi speciali in cui abbiamo una matrice rigida (numero di grande condizione), allora *singolare decomposizione del valore* (§L.2.2.5) o precondizionamento (§L.3.4) le tecniche di metodi devono essere utilizzate.

30 Naturalmente, nella maggior parte dei casi, l'utente non deve preoccuparsi delle strategie di soluzione, in quanto questi possono essere facilmente invocati in programmi come MATLAB®. Alcune delle funzioni pertinenti sono

`inv(.)` Gauss-Jordan

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

`lu(.)`	LU decomposizione
`chol(.)`	Decomposizione colesco
`simrcm (.)`	Inverso Sparse Cuthill-McKee
`spia(.)`	Trama schema di sparsità di una matrice

e sono esaminati nei dettagli del capitolo L.

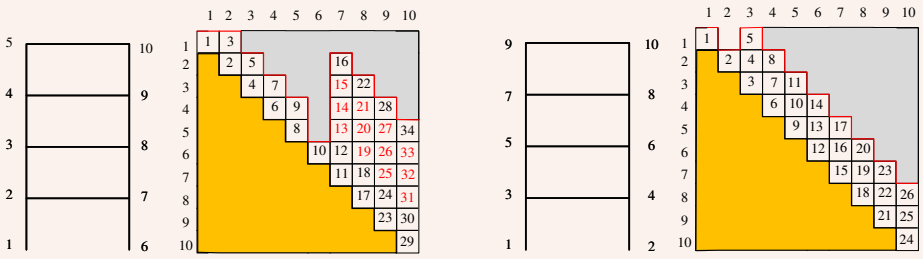
45.2.2 Numerazione nodale

31 In generale, **K** è scarsamente popolato, cioè ci sono molti zeri nella matrice. Indipendentemente dalla soluzione, la decomposizione di una matrice sovrascriverà tutti K_{ij} Tutti i termini zero sopra la "skyline" resteranno intatti. Lo skyline è il termine non zero più basso di una determinata colonna.

32 C'è un grande vantaggio nell'imballaggio di tutti i termini non zero vicino alla diagonale per ridurre al minimo sia lo storage che il tempo computazionale. 45.6a e 45.6a sono esempi di nodi scarsamente e giuridicamente numerati rispettivamente.

33 Le celle colorate sono sotto la diagonale e non devono essere memorizzate in virtù della simmetria, allo stesso modo le cellule grigie che stanno al di sopra dello skyline non devono esser immagazzinate. D'altra parte, i termini non zero sono marcati in nero e gli zero sotto lo skyline sono contrassegnati in rosso. Entrambi sarebbero sottoposti a operazioni della decomposizione.

34 I requisiti di archiviazione e lo sforzo computazionale beneficiano del "packing" quante più condizioni non zero intorno alla diagonale possibile. Questo compito è oggi gestito automaticamente da generatori di rete, che internamente possono utilizzare l'algoritmo Reverse Cuthill-McKnee (RCMH) per il rinumeramento (Cuthill e McKee, 1969).



(a) Poverina numerata (b) Properly numerati

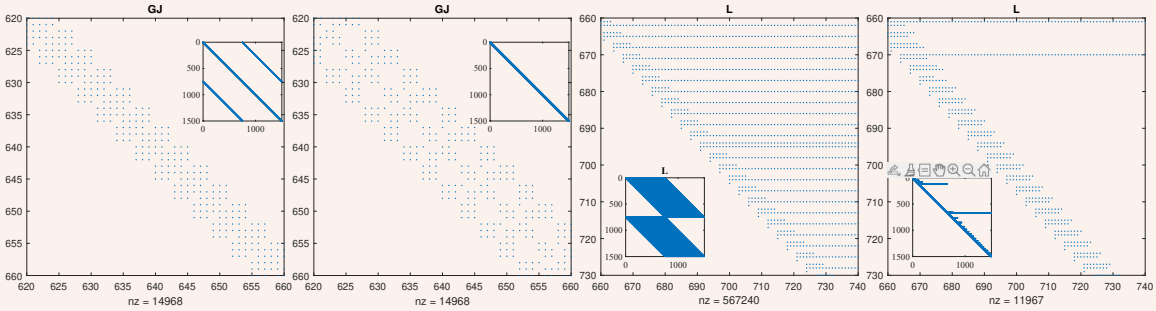
Figura 45.6: Importanza della numerazione nodale

35 Per evidenziare ulteriormente la scarsa natura di una matrice strutturale di rigidità, e le sue implicazioni sui requisiti di storage insieme a costi computazionali, consideriamo un telaio singolo 250 piani con 1.500 ($250 \times 2 \times 3$Per diverse strategie di decomposizione (Gauss-Jordan, LU Decomposition e Cholesky) contrastiamo la distribuzione dei termini

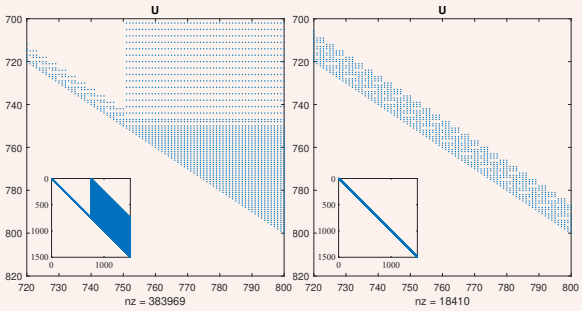
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

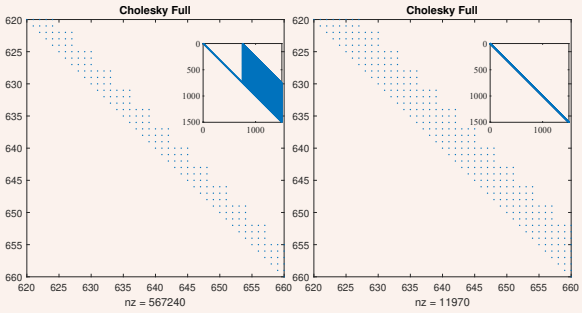
non zero con e senza l'algoritmo RCMH. Il numero di termini non-zero è etichettato come `nz` sotto ogni cifra.



(a) Gauss-Jordan (b) Gauss-Jordan con RCMH (c) La decomposizione (d) Decomposizione L con RCMH



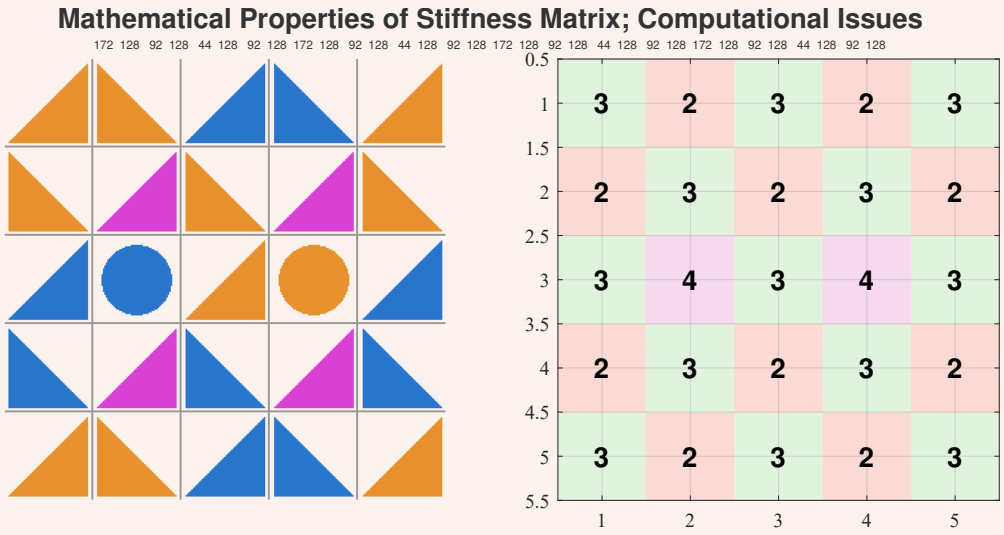
(e) U Decomposizione (f) Decomposizione U con RCMH



(g) Scelta (h) Cholesky con RCMH

Figura 45.7: Requisiti di stoccaggio per la matrice strutturale della rigidità

COPIA DI REVISIONE



Identicona specifica del capitolo, chapter H

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 46

Argomenti speciali

Abstract

Questo capitolo contiene Poteri *di argomenti vari relativi all'analisi strutturale matrice. Iniziamo con condensazione/strumentazione, anche se al giorno d'oggi sono raramente utilizzati a causa del costo ridotto della memoria di computer. Poi vengono introdotti i concetti di statici e matrici cinetiche, che verranno utilizzati per ricavare le relazioni rigide-flessibilità, l'analisi delle travature (§20.4), e la formulazione dell'elemento basato sulla flessibilità (§61.4.1.1). Successivamente, la trasformazione congruente, un metodo alternativo per eseguire l'assemblaggio della matrice di rigidità aumentata (§44.4.3), sarà presentato. Questo metodo è favorito in alcuni codici di elemento finiti. Il capitolo si concluderà con tre tipi di colonne a fascio speciale: a) travi con riduttori rigidi, b) trave semirigide (supportate da molle), e c) con travi variabili.*

46.1 Condensazione/sostruzione 1630
46.2 Equazioni di statici e cinematici . . . 1631
46.2.1 Matrice statica $\mathcal{B}$ 1631
46.2.2 Matrice di cinematica $\mathcal{A}$ . . . 1639
46.2.3 Relazione tra matrici statica e cinematica 1640
46.3 relazioni cinematiche attraverso inverso della matrice statica 1642
46.4 Relazioni di flessibilità 1643
46.4.1 Dalla rigidità alla flessibilità 1643
46.4.2 Dalla flessibilità alla rigidità 1644
46.4.3 Dualità tra flessibilità e rigidità 1649
46.5 Congruente approccio di trasformazione **K** 1649
46.5.1 Ex 46.9: Trasformazione congruente 1651
46.5.2 Ex 46.10: Congruente trasformazione di un telaio 1652
46.6 Elementi speciali 1655
46.6.1 Rigido offset; 1655
46.6.2 Travi semirigidi 1657
46.6.3 Sezione trasversale variabile 1663
46.7 Fonti di derivazione laterale in telai del momento 1665

COPIA DI REVISIONE

46.1 Condensazione/sostruzione

1 La condensazione è il processo di riduzione del numero di d.o.f. per sostituzione, a livello degli elementi, potremmo voler condire un nodo interno (come nell'elemento lagrangiano), a livello globale, questo è strettamente associato alla strutturazione.

2 Prendiamo in considerazione $\mathbf{kd} = \mathbf{p}$ e lascia $\mathbf{d}$ essere diviso in

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_r \\ \mathbf{d}_c \end{Bmatrix}$$

dove i sottoscritti r e c si riferiscono a d.o.f conservato e condensato rispettivamente.

3 Per la sottostrutturazione, i sottoscritti r e c fare riferimento all'interfaccia e d.o.f. Quindi,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{rr} & \mathbf{k}_{rc} \\ \mathbf{k}_{cr} & \mathbf{k}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_r \\ \mathbf{d}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_r \\ \mathbf{p}_c \end{Bmatrix}$$

or

$$\mathbf{k}'\mathbf{d}_r = \mathbf{p}'$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{k}' &= \mathbf{k}_{rr} - \mathbf{k}_{rc}\mathbf{k}_{cc}^{-1}\mathbf{k}_{cr} \\ \mathbf{p}' &= \mathbf{p}'_r - \mathbf{k}_{rc}\mathbf{k}_{cc}^{-1}\mathbf{p}_c \end{aligned}$$

4 Segnando la forma comune delle due equazioni sopra riportate, deduciamo che la condensazione può anche essere considerata come una trasformazione da un $\mathbf{d}, \mathbf{p}, \mathbf{k}$ sistema a un $\mathbf{d}_r, \mathbf{p}', \mathbf{k}'$ attraverso la seguente trasformazione

$$\begin{aligned} \mathbf{k}' &= \mathbf{\Gamma}_c^T \mathbf{k} \mathbf{\Gamma}_c \\ \mathbf{p}' &= \mathbf{\Gamma}_c^T \mathbf{p} \end{aligned}$$

dove

$$\mathbf{\Gamma}_c = \begin{Bmatrix} -\mathbf{k}_{cc}^{-1}\mathbf{k}_{cr} \\ \mathbf{I} \end{Bmatrix}$$

5 $\mathbf{k}'$ è un r by c matrice, mentre $\mathbf{k}$ era $r + c$ by $r + c$ (ancora dobbiamo decomporre separatamente) $\mathbf{k}_{cc}$ che è c by c).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

46.2 Equazioni di statici e cinematici

46.2.1 Matrice statica $\mathcal{B}$

46.2.1.1 Ritiro

Questa sezione è trattata da *Matrix Structural Analysis* by McGuire e Gallagher, 1979[a].

[a] Purtroppo, la sezione originale della prima edizione era stata cancellata dalla seconda.

46.2.1.2 Determinato staticamente

6 La matrice statica $\mathcal{B}$ riguarda il vettore di tutta la struttura **P** forze nodali nelle coordinate globali a tutti gli sconosciuti forze (impegne interne di elezione nel loro sistema di coordinate locali e la struttura reazioni esterne) **F**, attraverso relazioni di equilibrio e viene definito come:

$$\mathbf{P} \equiv \mathcal{B}\mathbf{F} \tag{46.1}$$

7 $\mathcal{B}$ avrebbe quante più righe come il numero totale di indipendenti equazioni di equilibrio; e quante colonne sono come forze interne indipendenti. Questo ricorda la matrice di equilibrio ottenuta nell'analisi tromba per il "metodo delle articolazioni'.

8 A seconda del tipo di struttura, l'elemento interno forza e la le forze di equilibrio variano secondo la tabella 46.1. Come con il metodo di flessibilità, c'è più di una combinazione di

Tabella 46.1: Definizione della forza degli elementi interni per la matrice statica

Tipo di	Forze interne	Equazioni di Equilibrio
Truss	Forza assiale ad una estremità	$\Sigma F_X = 0, \Sigma F_Y = 0$
Fascicolo 1	Guarnizione e momento in un'estremità	$\Sigma F_y^A = 0, \Sigma M_z^A = 0$
Fascicolo 2	Guarnizione a ogni estremità	$\Sigma F_y^A = 0, \Sigma F_y^B = 0$
Fascicolo 3	Momento ad ogni estremità	$\Sigma M_z^A = 0, \Sigma M_z^B = 0$
2D telaio 1	Assale, Sembra, Momento ad una estremità	$\Sigma F_x^A = 0, \Sigma F_y^A = 0, \Sigma M_z^A = 0$

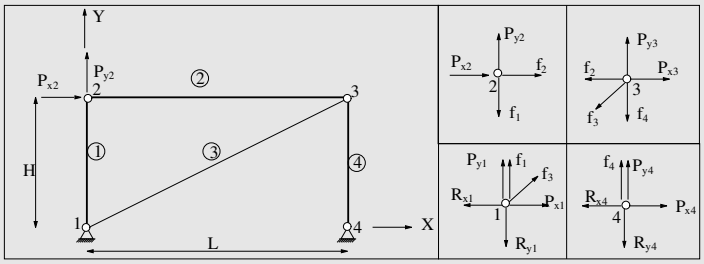
forze interne di elemento indipendenti che possono essere selezionate.

9 Matrice $\mathcal{B}$ sarà una matrice quadrata per un determinato staticamente struttura, e rettangolare (più colonne che righe) altrimenti.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

46.2.1.2.1 Ex 46.1: Matrice statica a trombo determinato statico



Questa tregua ha 8 forze sconosciute (4 forze interne e 4 reazioni esterne), e 8 equazioni di equilibrio (2 a ciascuno dei 4 nodi). Assumendo tutte le forze dell'elemento essere traslitta, e le reazioni come mostrato nella figura, le equazioni di equilibrio sono:

Node	$\Sigma F_X = 0$	$\Sigma F_Y = 0$
Node 1	$\underbrace{P_{x1}}_{0} + F_3 C - R_{x1} = 0$	$\underbrace{P_{y1}}_{0} + F_1 + F_3 S - R_{y1} = 0$
Node 2	$P_{x2} + F_2 = 0$	$P_{y2} - F_1 = 0$
Node 3	$\underbrace{P_{x3}}_{0} - F_2 - F_3 C = 0$	$\underbrace{P_{y3}}_{0} - F_4 - F_3 S = 0$
Node 4	$\underbrace{P_{x4}}_{0} + R_{x4} = 0$	$\underbrace{P_{y4}}_{0} + F_4 - R_{y4} = 0$

where $\cos\alpha = \frac{L}{\sqrt{L^2+H^2}} = C$ and $\sin\alpha = \frac{H}{\sqrt{L^2+H^2}} = S$. Quelle equazioni di equilibrio possono essere gettate in forma matrice

$$\begin{matrix} \Sigma F_x^1: \\ \Sigma F_y^1: \\ \Sigma F_x^2: \\ \Sigma F_y^2: \\ \Sigma F_x^3: \\ \Sigma F_y^3: \\ \Sigma F_x^4: \\ \Sigma F_y^4: \end{matrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{x2} \\ P_{y2} \\ P_{x3} \\ P_{y3} \\ P_{x4} \\ P_{y4} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{P}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & -C & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -S & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathcal{B}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ \hline R_{x1} \\ R_{y1} \\ R_{x4} \\ R_{y4} \end{array}\right\}}_{\mathbf{F}} \tag{46.2}$$

le forze e le reazioni sconosciute possono essere determinate attraverso l'inversione $\mathcal{B}$:

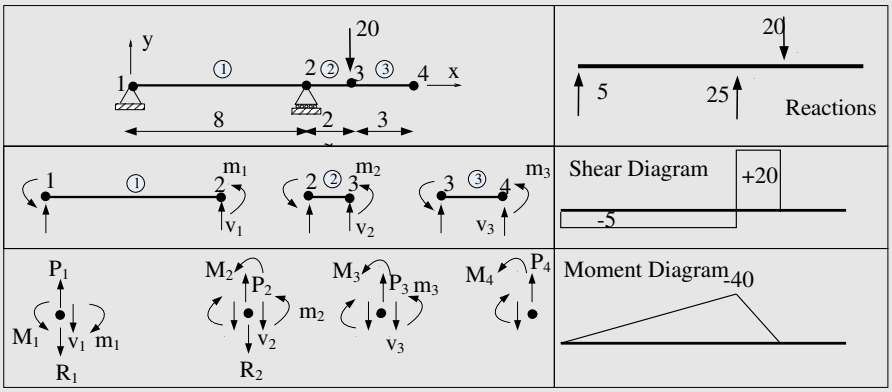
$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ \hline R_{x1} \\ R_{y1} \\ R_{x4} \\ R_{y4} \end{array}\right\}}_{\mathbf{F}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} & 0 & \frac{1}{C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{S}{C} & 0 & -\frac{S}{C} & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{S}{C} & 1 & \frac{S}{C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{S}{C} & 0 & -\frac{S}{C} & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathcal{B}^{-1}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_{x2} \\ P_{y2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{P}} = \left\{\begin{array}{c} P_{y2} \\ -P_{x2} \\ \frac{P_{x2}}{C} \\ -\frac{S}{C}P_{x2} \\ \hline P_{x2} \\ \frac{S}{C}P_{x2} + P_{y2} \\ 0 \\ -\frac{S}{C}P_{x2} \end{array}\right\}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Osservamo che la matrice $\mathcal{B}$ è totalmente indipendente dall'esterno carico, e una volta invertito può essere utilizzato per più casi di carico con sforzi computazionali minimi.

46.2.1.2.2 Ex 46.2: Matrice statica del fascio



Questo è composto da tre elementi, ciascuno con 2 sconosciute interne (v e m) più due Per risolvere per quegli sconosciuti abbiamo 2 equazioni di equilibrio in ciascuno dei 4 nodi. Si noti che in questo problema abbiamo selezionato come primarie sconosciute la cesoia e il momento alla fine giusta di ogni elemento. I componenti di sinistra possono essere recuperati dall'equilibrio. Dall'equilibrio abbiamo così:

$$\begin{matrix}\Sigma F_1:\\ \Sigma M_1:\\ \Sigma F_2:\\ \Sigma M_2:\\ \Sigma F_3:\\ \Sigma M_3:\\ \Sigma F_4:\\ \Sigma M_4:\end{matrix}\underbrace{\begin{Bmatrix}P_1\\M_1\\P_2\\M_2\\P_3\\M_3\\P_4\\M_4\end{Bmatrix}}_{\mathbf{P}}=\underbrace{\left[\begin{array}{cccccc|cc}-1&0&0&0&0&0&1&0\\-8&-1&0&0&0&0&0&0\\1&0&-1&0&0&0&0&1\\0&1&-2&-1&0&0&0&0\\0&0&1&0&-1&0&0&0\\0&0&0&1&-3&-1&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\end{array}\right]}_{\mathcal{B}}\underbrace{\begin{Bmatrix}v_1\\m_1\\v_2\\m_2\\v_3\\m_3\\\hline R_1\\R_2\end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}}$$

Invertire questo 8 da 8 matrice cederebbe

$$\underbrace{\begin{Bmatrix}v_1\\m_1\\v_2\\m_2\\v_3\\m_3\\\hline R_1\\R_2\end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}}=\underbrace{\left[\begin{array}{cccccccc}0&-\frac{1}{8}&0&-\frac{1}{8}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{8}&-\frac{5}{8}&-\frac{1}{8}\\0&0&0&1&2&1&5&1\\0&0&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1&3&1\\0&0&&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\\hline 1&-\frac{1}{8}&0&-\frac{1}{8}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{8}&-\frac{5}{8}&-\frac{1}{8}\\0&\frac{1}{8}&1&\frac{1}{8}&\frac{5}{4}&\frac{1}{8}&\frac{13}{8}&\frac{1}{8}\end{array}\right]}_{\mathcal{B}^{-1}}\underbrace{\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\\-20\\0\\0\\0\end{Bmatrix}}_{\mathbf{P}}=\begin{Bmatrix}5\\-40\\-20\\0\\0\\0\\\hline 5\\-25\end{Bmatrix}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

46.2.1.3 Staticamente indeterminato

10 Per il caso di una struttura statically indeterminate, Eq. 46.1 può essere generalizzato come:

$$\mathbf{P}_{2n\times 1} = \left[\ [\mathcal{B}_0]_{2n\times 2n} \ \middle|\ [\mathcal{B}_x]_{2n\times r}\ \right] \left\{ \frac{\mathbf{F}_0}{\mathbf{F}_x} \right\}_{(2n+r)\times 1} \tag{46.3}$$

dove $\mathcal{B}_0$ è una matrice quadrata, $\{\mathbf{F}_0\}$ il vettore di forze interne o reazioni esterne sconosciute, e $\mathbf{F}_x$ il vettore di sconosciuto *ridondante* interno forze o reazioni.

11 Quindi, possiamo determinare $\{\mathbf{F}_0\}$ da

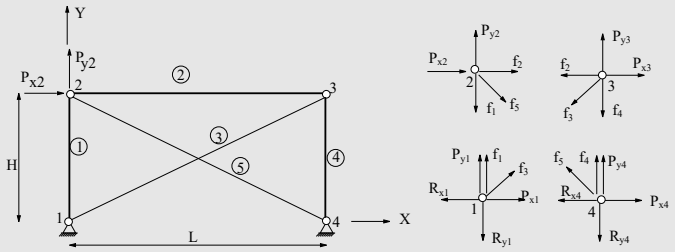
$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0 &= \mathcal{B}_0^{-1}\mathbf{P} - \mathcal{B}_0^{-1}\mathcal{B}_x\mathbf{F}_x \\ &= C_{1\,2n\times 2n}\mathbf{P} - C_{2\,2n\times r}\mathbf{F}_x \end{aligned} \tag{46.4}$$

12 Notare le seguenti definizioni che verranno utilizzate in seguito:

$$\mathcal{B}_0^{-1} \equiv C_1 \tag{46.5}$$

$$-\mathcal{B}_0^{-1}\mathcal{B}_x \equiv C_2 \tag{46.6}$$

46.2.1.3.1 Ex 46.3: Matrice statica di una travatura reticolare staticamente indeterminata



Rivisitare il primo problema di esempio, ma con un membro aggiuntivo che lo rende stabilmente indeterminato, ha ora 9 forze sconosciute (5 forze interne e 4 reazioni esterne), e solo 8 equazioni di

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

equilibrio. Selezione della forza del quinto elemento come la ridondante forza, e con $r = 1$, scriviamo Eq. 46.3

$$\mathbf{P}_{2n\times 1} = \left[\ [\mathcal{B}_0]_{2n\times 2n} \ \middle|\ [\mathcal{B}_x]_{2n\times r}\ \right] \left\{\frac{\mathbf{F}_0}{\mathbf{F}_x}\right\}_{(2n+r)\times 1}$$

$$\mathbf{P} = [\mathcal{B}_0]\{\mathbf{F}_0\} + [\mathcal{B}_x]\{\mathbf{F}_x\}$$

$$\begin{matrix}\Sigma F_x^1:\\ \Sigma F_y^1:\\ \Sigma F_x^2:\\ \Sigma F_y^2:\\ \Sigma F_x^3:\\ \Sigma F_y^3:\\ \Sigma F_x^4:\\ \Sigma F_y^4:\end{matrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} P_{x1}\\ P_{y1}\\ P_{x2}\\ P_{y2}\\ P_{x3}\\ P_{y3}\\ P_{x4}\\ P_{y4}\end{Bmatrix}}_{\mathbf{P}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & -C & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -S & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & S & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]}_{\mathcal{B}_{02nx2n}} \underbrace{\begin{Bmatrix} F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\\ \hline R_{x1}\\ R_{y1}\\ R_{x4}\\ R_{y4}\end{Bmatrix}}_{\{\mathbf{F}_0\}_{2nx1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ -C\\ S\\ 0\\ 0\\ C\\ -S\end{bmatrix}}_{\mathcal{B}_{xnx1}} \underbrace{F_5}_{\mathbf{F}_x}$$

Possiamo risolvere per le forze interne in termini di (ancora sconosciuto) forza ridondante

$$\{\mathbf{F}_0\} = [\mathcal{B}_0]^{-1}\mathbf{P} - [\mathcal{B}_0]^{-1}[\mathcal{B}_x]\{\mathbf{F}_x\}$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\\ R_{x1}\\ R_{y1}\\ R_{x4}\\ R_{y4}\end{Bmatrix}}_{\{\mathbf{F}_0\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{C} & 0 & \frac{1}{C} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{S}{C} & 0 & -\frac{S}{C} & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{S}{C} & 1 & \frac{S}{C} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{S}{C} & 0 & -\frac{S}{C} & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{\mathcal{B}_0^{-1}\equiv C_1} \left[\underbrace{\begin{Bmatrix} 0\\ 0\\ P_{x2}\\ P_{y2}\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}}_{\mathbf{P}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} 0\\ 0\\ -C\\ S\\ 0\\ 0\\ C\\ -S\end{Bmatrix}}_{[\mathcal{B}_x]} \underbrace{F_5}_{\mathbf{F}_x} \right]$$

O utilizzando le seguenti relazioni $[\mathcal{B}_0]^{-1} \equiv [C_1]$ e $-[\mathcal{B}_0]^{-1}[\mathcal{B}_x] \equiv [C_2]$ we obtain

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\\ R_{x1}\\ R_{y1}\\ R_{x4}\\ R_{y4}\end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}_0} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{C} & 0 & \frac{1}{C} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{S}{C} & 0 & -\frac{S}{C} & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{S}{C} & 1 & \frac{S}{C} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{S}{C} & 0 & -\frac{S}{C} & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{C_1} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0\\ 0\\ P_{x2}\\ P_{y2}\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}}_{\mathbf{P}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -S\\ -C\\ 1\\ -S\\ C\\ 0\\ -C\\ 0\end{Bmatrix}}_{C_2} \underbrace{F_5}_{\mathbf{F}_x} \tag{46.7}$$

Nota, che questa equazione non è sufficiente per risolvere le forze sconosciute, as $\mathbf{F}_x$ deve essere ottenuto attraverso lo spostamento della forza relazioni (**D** or **K**).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

46.2.1.4 Identificazione delle forze ridondanti

13 considerando che è stata fatta l'identificazione delle forze ridondanti da semplice ispezione della struttura in analisi a mano di struttura, questo processo di identificazione può essere automatizzato.

14 A partire da

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{2n\times 1} &= \mathcal{B}_{2n\times(2n+r)}\mathbf{F}_{(2n+r)\times 1}\\ \mathcal{B}_{2n\times(2n+r)}\mathbf{F}_{2n+r\times 1} - \mathbf{I}_{2n\times 2n}\mathbf{P}_{2n\times 1} &= \mathbf{0}\\ \left[\begin{array}{c|c}\mathcal{B} & -\mathbf{I}\end{array}\right]_{2n\times(4n+r)}\left\{\begin{array}{c}\mathbf{F}\\ \hline \mathbf{P}\end{array}\right\} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

where $\left[\begin{array}{c|c}\mathcal{B} & -\mathbf{I}\end{array}\right]$ corresponds a *matrice aumentata*.

15 Se applichiamo un processo di eliminazione Gauss-Jordan all'aggregato matrice, questa equazione viene poi trasformata in:

$$\left[\begin{array}{c|c|c}\mathbf{I}_{2n\times 2n} & -C_{2_{2n\times r}} & -C_{1_{2n\times 2n}}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\mathbf{F}_0\\ \hline \mathbf{F}_x\\ \hline \mathbf{P}\end{array}\right\}_{4n+r\times 1} = \{\mathbf{0}\}$$

or:

$$\{\mathbf{F}_0\}_{2n\times 1} = [C_1]_{2n\times 2n}\mathbf{P}_{2n\times 1} + [C_2]_{2n\times r}\{\mathbf{F}_x\}_{r\times 1}$$

che è identico a Eq. 46.4; Come prima, $\mathbf{F}_x$ sono le forze ridondanti e la loro soluzione ovviamente sarebbe dipende dalle proprietà dell'elemento elastico.

46.2.1.4.1 Ex 46.4: Selezione delle forze ridondanti

Rivisitare la tromba statically indeterminate dell'esempio precedente ma con l'aggiunta di un quinto elemento, la tregua sarebbe ora statticamente indeterminato al primo grado. L'equazione dell'equilibrio 46.2 sarà poi scritto come:

$$\begin{array}{c}\\ \Sigma F_x^1 : A\\ \Sigma F_y^1 : B\\ \Sigma F_x^2 : C\\ \Sigma F_y^2 : D\\ \Sigma F_x^3 : E\\ \Sigma F_y^3 : F\\ \Sigma F_x^4 : G\\ \Sigma F_y^4 : H\end{array}\underbrace{\left[\begin{array}{ccccc|cccc||cc}0&0&-C&0&0&1&0&0&0&0&0\\ -1&0&-S&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&-C&0&0&0&0&-1&0\\ 1&0&0&0&S&0&0&0&0&0&-1\\ 0&1&C&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&S&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&C&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&-1&-S&0&0&0&1&0&0\end{array}\right]}_{\left[\begin{array}{c||c}\mathcal{B} & -\mathbf{I}\end{array}\right]}\underbrace{\left\{\begin{array}{c}F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\\ F_5\\ \hline R_{x1}\\ R_{y1}\\ R_{x4}\\ R_{y4}\\ \hline P_{x2}\\ P_{y2}\end{array}\right\}}_{\mathbf{F}}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Si noti che poiché il carico viene applicato solo sul nodo 2, abbiamo considerato un sottoinsieme della matrice di identità **I**.

1. Iniziamo con la seguente matrice

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & R_{x1} & R_{y1} & R_{x4} & R_{y4} & P_{x2} & P_{y2} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccccc} 0 & 0 & -C & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -S & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -S & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

2. Colonne di interscambio

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} R_{x1} & R_{y1} & F_2 & F_1 & F_3 & F_4 & F_5 & R_{x4} & R_{y4} & P_{x2} & P_{y2} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -S & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

3. Operare come indica

$$\begin{array}{r} \\ A \\ B' = B + DB \\ C \\ D \\ E' = \frac{E+C}{C} \\ F \\ G \\ H \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} R_{x1} & R_{y1} & F_2 & F_1 & F_3 & F_4 & F_5 & R_{x4} & R_{y4} & P_{x2} & P_{y2} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -S & 0 & S & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1/C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -S & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

4. Operare come indicato

$$\begin{array}{r} \\ A' = A + CE' \\ B'' = B' + SE' \\ C' = -C \\ D \\ E' \\ F' = F - SE' \\ G \\ H' = H + F' \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} R_{x1} & R_{y1} & F_2 & F_1 & F_3 & F_4 & F_5 & R_{x4} & R_{y4} & P_{x2} & P_{y2} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S/C & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1/C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & S & 0 & 0 & S/C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & S/C & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

5. Intercambiare colonne e osservare che F_5 è il selezionato ridondante.

$$\begin{array}{c} \\ A' \\ B'' \\ C' \\ D \\ E' \\ F' \\ G \\ H' \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} R_{x1} & R_{y1} & F_2 & F_1 & F_3 & F_4 & R_{x4} & R_{y4} & F_5 & P_{x2} & P_{y2} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S/C & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & S & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1/C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & S & S/C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & S/C & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Da Eq. 46.4 noi abbiamo

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} R_{x1} \\ R_{y1} \\ F_2 \\ F_1 \\ F_3 \\ F_4 \\ R_{x4} \\ R_{y4} \end{array}\right\}}_{\mathbf{F}_0} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ S/C & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/C & 0 \\ -S/C & 0 \\ 0 & 0 \\ -S/C & 0 \end{array}\right]}_{C_1} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} P_{x2} \\ P_{y2} \end{array}\right\}}_{\mathbf{P}} + \underbrace{\left\{\begin{array}{c} C \\ 0 \\ -C \\ -S \\ 1 \\ -S \\ -C \\ 0 \end{array}\right\}}_{C_2} \underbrace{\{F_5\}}_{\mathbf{F}_x}$$

che è identico ai risultati in Eq. 46.7 ad eccezione dell'ordine dei termini.

46.2.1.5 Instabilità fisica

16 L'instabilità cinematica deriva da una struttura con un'insufficienza di resistenza in cui il movimento del corpo rigido può verificarsi. Instabilità cinematica si tradurrà in una matrice singolare e decomposizione di questa matrice si tradurrà in una divisione zero causando un computer programma a "crash'. Quindi, è spesso auspicabile per Strutture per determinare *a priori* se la Commissione non ha una struttura è cinematicamente instabile prima che l'analisi venga eseguita.

17 Le condizioni per la determinanza statica e l'instabilità possono essere indicate come una funzione del grado di $\mathcal{B}$. If $\mathcal{B}$ ha n righe (correspondendo al numero di equazioni di equilibrio), u colonne (corrisponde al numero di forze e reazioni interne), ed è di rango r, poi le condizioni di instabilità cinematica sono riassunte nella tabella 46.2

18 Si noti che l'instabilità cinematica non è sempre sinonimo di collasso della struttura. In alcuni casi l'equilibrio sarà recuperato solo dopo la geometria sarebbe stata completamente modificata (come ad esempio con un cavo flessibile strutture) e le equazioni di equilibrio dovrebbero essere completamente riscrivete con la nuova geometria.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 46.2: Condizioni per la determinanza statica e l'instabilità cinematica

$n > u$ Instabile in termini di precisione	
$n = u$ Determinazione statica	
$n = u = r$	Stabile
$n = u > r$	instabile con $n - r$ modalità di instabilità cinematica
$n < r$ Staticamente indeterminato (grado $u - n$)	
$n = r$	Stabile
$n > r$	instabile con $n - r$ modalità di instabilità cinematica

46.2.2 Matrice di cinematica $\mathcal{A}$

19 La matrice cinematica $\mathcal{A}$ si riferisce a tutto il nodale della struttura *spostamenti totali* nelle coordinate globali $\mathbf{\Delta}$ all'elemento *spostamenti relativi* nel loro sistema di coordinate locale e lo spostamento di supporto (che potrebbe non essere zero se si verifica l'insediamento) $\mathbf{\Upsilon}$ e viene definito come:

$$\mathbf{\Upsilon} \equiv \mathcal{A}\mathbf{\Delta} \tag{46.8}$$

20 $\mathcal{A}$ è una matrice rettangolare, il numero di righe è uguale a numero degli spostamenti interni dell'elemento, e il numero di colonne è uguale a il numero di spostamenti nodali.

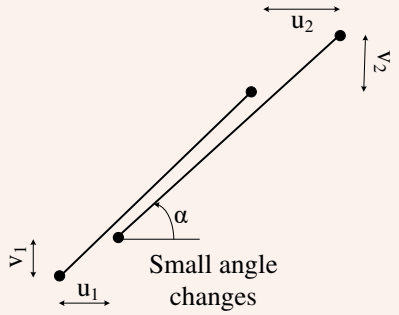


Figura 46.1: Kinematics di un elemento truss

21 Contrariamente alla matrice di rotazione introdotta in precedenza e che trasforma gli spostamenti da coordinate globali a locali per uno *singolo* elemento, il la matrice della cinematica si applica all'intera struttura.

22 Si può facilmente dimostrare che per le capriate (che corrisponde a accorciamento o allungamento del membro, e piccolo cambiamento di angolo α):

$$\Upsilon^{(e)} = (u_2 - u_1)\cos\alpha + (v_2 - v_1)\sin\alpha$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

46.2.2.1 Ex 46.5: Matrice di cinema: esempio truss

Considerando ancora la decisa tromba staticamente dell'esempio precedente, la matrice cinematica sarà data da:

$$\Delta_1^{(e)} = v_2 - v_1; \quad \Delta_2^{(e)} = u_3 - u_2; \quad \Delta_3^{(e)} = (u_3 - u_1)C + (v_3 - v_1)S; \quad \Delta_i^{(e)} = \cdots$$

o in forma matrice:

$$\left\{\begin{array}{c} \Delta_1^{(e)} \\ \Delta_2^{(e)} \\ \Delta_3^{(e)} \\ \Delta_4^{(e)} \\ \hline u_1 \\ v_1 \\ u_4 \\ v_4 \end{array}\right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -C & -S & 0 & 0 & C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathcal{A}} \left\{\begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array}\right\}$$

Applicare i vincoli: $u_1 = 0$; $v_1 = 0$; $u_4 = 0$; $v_4 = 0$ otteniamo:

$$\left\{\begin{array}{c} \Delta_1^{(e)} \\ \Delta_2^{(e)} \\ \Delta_3^{(e)} \\ \Delta_4^{(e)} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -C & -S & 0 & 0 & C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathcal{A}} \left\{\begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array}\right\}$$

Dobbiamo osservare che $\mathcal{A}$ è il trasposto $\mathcal{B}$ matrice in Eq. 46.2.1.4.1

46.2.3 Relazione tra matrici statica e cinematica

23 Avendo definito sia le statiche $\mathcal{B}$ e cinematica $\mathcal{A}$ Matrici, è intuitivo che queste due matrici devono essere correlate. In questa sezione cerchiamo di determinare questa relazione sia per la determinazione statologica e casi stabilmente indeterminati.

46.2.3.1 Determinato staticamente

24 Il lavoro esterno è definito come

$$\left.\begin{aligned} W_{ext} &= \frac{1}{2}\mathbf{P}\boldsymbol{\Delta} \\ \mathbf{P} &= \mathcal{B}\mathbf{F} \end{aligned}\right\} W_{ext} = \frac{1}{2}\mathbf{F}\mathcal{B}^T\boldsymbol{\Delta}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

25 In alternativa, il lavoro interno è dato da:

$$\left.\begin{array}{r} W_{int} = \frac{1}{2}\mathbf{F}\{\boldsymbol{\Upsilon} \\ \boldsymbol{\Upsilon} = \mathcal{A}\boldsymbol{\Delta} \end{array}\right\} W_{int} = \frac{1}{2}\mathbf{F}\mathcal{A}\boldsymbol{\Delta}$$

26 Equazione dell'esterno al lavoro interno $W_{ext} = W_{int}$ we obtain:

$$\frac{1}{2}\mathbf{F}\mathcal{B}^T\boldsymbol{\Delta} = \frac{1}{2}\mathbf{F}\mathcal{A}\boldsymbol{\Delta}$$

or

$$\mathcal{B}^T = \mathcal{A} \tag{46.9}$$

27 Le controparti a livello continuum sono

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

or $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$ dove $\mathbf{L}$ è l'Operatore Lineare (Eq. O.7), e

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}^T} \underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix}}_{\mathbf{b}} = 0$$

or $\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0$

46.2.3.2 Staticamente indeterminato

28 considerando che nel caso precedente abbiamo usato Eq. 46.1 per $\mathcal{B}$, per il caso più generale di strutture staticamente indeterminate possiamo partenza da Eq. 46.3 e scrivere:

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{B}_0 & \mathcal{B}_x \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \mathbf{F}_0 \\ \hline \mathbf{F}_x \end{array}\right\}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove $\mathbf{F}_x$ corrisponde alle forze ridondanti. Il lavoro esterno sarà quindi

$$W_{ext} = \frac{1}{2}\lfloor\ \mathbf{F}_0 \mid \mathbf{F}_x\ \rfloor \begin{bmatrix} [\mathcal{B}_0]^t \\ \hline [\mathcal{B}_x]^t \end{bmatrix} \mathbf{\Delta}$$

29 Ancora una volta, possiamo generalizzare Eq. 46.8 e scrivere

$$\left\{ \frac{\mathbf{\Upsilon}_0}{\mathbf{\Upsilon}_x} \right\} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_0 \\ \hline \mathcal{A}_x \end{bmatrix} \mathbf{\Delta} \tag{46.10}$$

dove $\mathbf{\Upsilon}_0$ e $\mathbf{\Upsilon}_x$ sono spostamenti relativi corrispondenti a $\mathbf{F}_0$ and $\{\mathbf{F}_x\}$ respectively.

30 Di conseguenza, il lavoro interno sarebbe dato da:

$$W_{int} = \frac{1}{2}\lfloor\ \mathbf{F}_0 \mid \mathbf{F}_x\ \rfloor \begin{bmatrix} [\mathcal{A}_0] \\ \hline [\mathcal{A}_x] \end{bmatrix} \mathbf{\Delta}$$

31 Come prima, equiparando l'esterno al lavoro interno $W_{ext} = W_{int}$ e semplificando, otteniamo:

$$\mathcal{B}_0^T = \mathcal{A}_0$$
$$\mathcal{B}_x^T = \mathcal{A}_x$$

VERIFICA

46.3 relazioni cinematiche attraverso inverso della matrice statica

32 Ora cerchiamo di trarre alcune ulteriori relazioni tra gli spostamenti attraverso l'inverso della matrice statica, che verranno poi utilizzate nei metodi di flessibilità e non avranno applicazioni immediate. 46.10 as

$$\mathbf{\Delta} = [\mathcal{A}_0]^{-1} \{\mathbf{\Upsilon}_0\} = \left[[\mathcal{B}_0]^t\right]^{-1} \{\mathbf{\Upsilon}_0\} = \left[[\mathcal{B}_0]^{-1}\right]^t \{\mathbf{\Upsilon}_0\} \tag{46.11}$$

noi possiamo risolvere per $\{\mathbf{F}_0\}$ da Eq. 46.4

$$\{\mathbf{F}_0\} = \underbrace{[\mathcal{B}_0]^{-1}}_{[C_1]} \mathbf{P} - \underbrace{[\mathcal{B}_0]^{-1}[\mathcal{B}_x]}_{[C_2]} \{\mathbf{F}_x\}$$

33 Combinare questa equazione con $[\mathcal{B}_0]^{-1} = [C_1]$ da Eq. 46.5E con Eq. 46.11 noi otteniamo

$$\mathbf{\Delta} = [C_1]^t \{\mathbf{\Upsilon}_0\}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

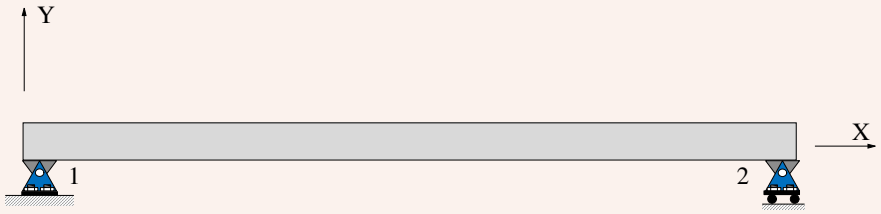


Figura 46.2: Elemento stabile e staticamente determinato

34 Allo stesso modo, possiamo rivisitare Eq. 46.10 e scrivere

$$\{\Upsilon_x\} = [\mathcal{A}_x]\Delta$$

Quando l'equazione precedente è combinata con il lato più destro di Eq. 46.3 e 46.11 noi otteniamo

$$\{\Upsilon_x\} = [\mathcal{B}_x]^t \left[[\mathcal{B}_0]^{-1}\right]^t \{\Upsilon_0\}$$

35 Così, con $[\mathcal{B}_0]^{-1}[\mathcal{B}_x] = -[C_2]$ da Eq. 46.6

$$\{\Upsilon_x\} = -[C_2]^t \{\Upsilon_0\} \tag{46.12}$$

Questa equazione riguarda gli spostamenti relativi sconosciuti a quelli conosciuti.

46.4 Relazioni di flessibilità

Obiettivi

36 Dopo aver introdotto sia i metodi di rigidità che flessibilità, considereremo rigorosamente il rapporto tra le due matrici **K** e [**D**] a livello di struttura.

37 Il punto di partenza per le nostre derivazioni è Eq. 44.1

$$\left\{\begin{array}{c}\mathbf{P}_t\\ \hline \mathbf{P}_u\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c|c}\mathbf{K}_{tt} & \mathbf{K}_{tu}\\ \hline \mathbf{K}_{ut} & \mathbf{K}_{uu}\end{array}\right] \left\{\begin{array}{c}\mathbf{\Delta}_t\\ \hline \mathbf{\Delta}_u\end{array}\right\}$$

46.4.1 Dalla rigidità alla flessibilità

38 Per ottenere **d** la struttura deve essere sostenuta in modo stabile e statuitivamente in modo determinato, come per il fascio in Fig. 46.2. per il quale avremmo:

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

$$\boldsymbol{\delta}_f = \left\{ \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \end{array} \right\} \text{ and } \boldsymbol{\delta}_s = \left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array} \right\}$$
$$\mathbf{p}_t = \left\{ \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \end{array} \right\}$$
$$\mathbf{p}_s = \left\{ \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \end{array} \right\}$$

39 Da $\{\boldsymbol{\delta}_u\} = \{\mathbf{0}\}$ l'equazione sopra si riduce a:

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{p}_f \\ \mathbf{p}_s \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{k}_{tt} \\ \mathbf{k}_{ut} \end{array} \right] \boldsymbol{\delta}_f$$

e noi avremmo:

$$\mathbf{p}_t = \mathbf{k}_{tt} \boldsymbol{\delta}_t \tag{46.13}$$

Definition 46.1: Stiffness Flessibilità Relazione

$$\mathbf{d} = \mathbf{k}_{tt}^{-1}$$

46.4.1.1 Ex 46.6: Matrice di flessibilità

Questo è un caso semplice, dove a partire da Fig. 46.2 il rapporto di rotazione del momento è dato da

$$\left\{ \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \end{array} \right\} = \underbrace{\frac{EI}{L} \left[\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{array} \right]}_{\mathbf{k}_{tt}} \left\{ \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \end{array} \right\}$$

da qui:

$$\mathbf{k}_{tt}^{-1} = \mathbf{d} = \frac{L}{EI} \frac{1}{12} \left[\begin{array}{cc} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{array} \right] = \frac{L}{6EI} \left[\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{array} \right]$$

46.4.2 Dalla flessibilità alla rigidità

40 Cominciamo da

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{p}_f^{\checkmark} \\ \hline \mathbf{p}_s^{?} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{k}_{tt} & \mathbf{k}_{tu} \\ \hline \mathbf{k}_{ut} & \mathbf{k}_{uu} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\delta}_f^{?} \\ \hline \boldsymbol{\delta}_s^{\checkmark} \end{array} \right\} \tag{46.14}$$

e cercherà di derivare ogni termine della matrice rigidità separatamente.

41 $\mathbf{k}_{tt}$: Da Eq. 46.14, $\mathbf{k}$ è stato suddiviso in d.o.f gratuiti e supportati, e abbiamo dimostrato che $\mathbf{k}_{tt} = \mathbf{d}^{-1}$, or $\mathbf{p}_t = \mathbf{k}_{tt} \boldsymbol{\delta}_t$ ma dobbiamo ancora determinare $\mathbf{k}_{tu}$, $\mathbf{k}_{ut}$, and $\mathbf{k}_{uu}$.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

42 $\mathbf{k}_{ut}$: Da $\mathbf{d}$ si ottiene per una struttura stabile staticamente determinata, abbiamo:

$$\mathbf{p}_u = \mathcal{B} \underbrace{\mathbf{p}_t}_{\text{Eq. 46.13}} \tag{46.15}$$

$$= \underbrace{\mathcal{B}\mathbf{k}_{tt}}_{\mathbf{k}_{ut}} \boldsymbol{\delta}_t \tag{46.16}$$

$$\mathbf{k}_{ut} = \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1} \tag{46.17}$$

dove $\mathbf{P} \equiv \mathcal{B}\mathbf{F}$ è la matrice di equilibrio statica (Eq. 46.1).

43 $\mathbf{k}_{tu}$: Equazione dell'esterno all'interno lavoro:

1. External work: $W_{ext} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}_t \mathbf{p}_t$
2. Internal work: $W_{int} = \frac{1}{2}\mathbf{p}_u \boldsymbol{\delta}_u$

Equazione W_{ext} to W_{int} e combinare con

$$\mathbf{p}_u = \boldsymbol{\delta}_t \mathbf{k}_{ut}^T \tag{46.18}$$

da Eq. 46.14 con $\{\boldsymbol{\delta}_u\} = \{\mathbf{0}\}$ (Supporto zero) dislocazioni) otteniamo:

$$\mathbf{k}_{tu} = \mathbf{k}_{ut}^T = \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T$$

44 $\mathbf{k}_{uu}$: L'ultimo termine è ottenuto

$$\mathbf{p}_s = \mathcal{B}\mathbf{p}_f \tag{46.19}$$

$$\mathbf{p}_f = \mathbf{k}_{tu}\boldsymbol{\delta}_s \tag{46.20}$$

$$\mathbf{k}_{tu} = \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \tag{46.21}$$

Combinando Eqns. 46.19, 46.20e 46.21 we ottenere:

$$\mathbf{p}_u = \underbrace{\mathcal{B}\mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T}_{\mathbf{k}_{uu}} \boldsymbol{\delta}_u$$

45 In sintesi, abbiamo:

Definition 46.2: Flessibilità Stiffness Relazione

$$\mathbf{k} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{d}^{-1} & \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \\ \hline \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1} & \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \end{array}\right] \tag{46.22}$$

46 Un'osservazione molto importante, è che la matrice di rigidità è ovviamente singolare, poiché il secondo "row' dipende linearmente dal primo (attraverso $\mathcal{B}$) e quindi, il suo determinante è pari a zero.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

46.4.2.1 Ex 46.7: Flessibilità alla rigidità

Con riferimento a Fig. 46.2e con entrambi M_1 e M_2 assunto per essere positivo (ccw):

1. La matrice di flessibilità è data da:
$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{L}{6EI}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$
2. La matrice statica $\mathcal{B}$ si dà un'altra possibilità di by:
$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{L}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$
3. $\mathbf{k}_{tt}$: sarebbe semplicemente dato da:
$$\mathbf{k}_{tt} = \mathbf{d}^{-1} = \frac{EI}{L}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$
4. $\mathbf{k}_{tu}$: The upper off-diagonal
$$\mathbf{k}_{tu} = \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T = \frac{EI}{L}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\frac{1}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^2}\begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}$$
5. $\mathbf{k}_{ut}$: Lower off-diagonal term
$$\mathbf{k}_{ut} = \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\frac{EI}{L}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^2}\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}$$
6. $\mathbf{k}_{uu}$:
$$\begin{aligned}\mathbf{k}_{uu} &= \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T = \mathbf{k}_{ut}\mathcal{B}^T \\ &= \frac{EI}{L^2}\frac{1}{L}\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 12 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Osserviamo che possiamo riscrivere:
$$\left\{\begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ \hline V_1 \\ V_2 \end{array}\right\} = \frac{EI}{L^3}\left[\begin{array}{cc|cc} 4L^2 & 2L^2 & 6l & -6l \\ 2L^2 & 4L^2 & 6l & -6l \\ \hline 6l & 6l & 12 & -12 \\ -6l & -6l & -12 & 12 \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \hline v_1 \\ v_2 \end{array}\right\}$$

Se riassemblassimo la matrice di rigidità, otterremmo:
$$\left\{\begin{array}{c} V_1 \\ M_1 \\ \hline V_2 \\ M_2 \end{array}\right\} = \underbrace{\frac{EI}{L}\left[\begin{array}{cc|cc} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & \frac{-12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 & \frac{-6}{L} & 2 \\ \hline \frac{-12}{L^2} & \frac{-6}{L} & \frac{12}{L} & \frac{-6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 & \frac{-6}{L} & 4 \end{array}\right]}_{\mathbf{k}}\left\{\begin{array}{c} v_1 \\ \theta_1 \\ \hline v_2 \\ \theta_2 \end{array}\right\}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

ed è la stessa rigidità matrice derivata prima. La dipendenza lineare delle righe e colonne è evidenziata dalla seguente espressione di questa stessa matrice.

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{k^r_{11}+k^r_{12}+k^r_{21}+k^r_{22}}{L^2} & \frac{k^r_{11}+k^r_{21}}{L} & -\frac{k^r_{11}+k^r_{12}+k^r_{21}+k^r_{22}}{L^2} & \frac{k^r_{22}+k^r_{12}}{L} \\ \frac{k^r_{11}+k^r_{21}}{L} & k^r_{11} & -\frac{k^r_{22}+k^r_{12}}{L} & k^r_{12} \\ -\frac{k^r_{11}+k^r_{12}+k^r_{21}+k^r_{22}}{L^2} & -\frac{k^r_{12}+k^r_{22}}{L} & \frac{k^r_{11}+k^r_{12}+k^r_{21}+k^r_{22}}{L^2} & -\frac{k^r_{22}+k^r_{12}}{L} \\ \frac{k^r_{12}+k^r_{22}}{L} & k^r_{21} & -\frac{k^r_{22}+k^r_{12}}{L} & k^r_{22} \end{bmatrix}$$

where k^r corresponds to k_{tt}

46.4.2.2 Ex 46.8: Matrice di stiffness di un elemento curvato

Cerchiamo di determinare la matrice rigidità di una circolare arco di raggio R e sostenere un angolo θ. In primo luogo, determina la matrice di flessibilità di un arco cantilevered da

$$\delta U = \int_s \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx = \frac{R}{EI}\int_0^\theta \delta\overline{M}Md\phi$$

dove M è il momento reale al punto arbitrario A causati da carichi e $\delta\overline{M}$ è il momento virtuale A causata dal carico unitario

47 La matrice di flessibilità sarà così data da:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ V \\ M \end{Bmatrix}$$

e

$$M = M_3 + N(R - R\cos\phi) + V(R_2\sin\phi)$$

$\delta\overline{M}+$ $1_3 = R(1-\cos_1\phi) + R\sin_2\phi$

$f_{ij} =$ Spostamento nel GDL i causato da un carico unitario nel GDL j

$$\begin{aligned} f_{11} &= \frac{R}{EI}\int_o^\theta \delta M_{p1}\cdot M_{D1}d\phi \\ &= \frac{R}{EI}\int_o^\theta R^2(1-\cos\phi)^2 d\phi \\ &= \frac{R^3}{EI}\int_o^\theta (1-2\cos\phi+\cos^2\phi)d\phi \\ &= \frac{R^3}{EI}\left[\phi - 2\sin\phi + \phi/2 = 1/4\sin 2\phi\right]_o^\theta \\ &= \frac{R^3}{EI}\left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right] \end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

$$
\begin{aligned}
f_{12} = f_{21} &= \frac{R}{EI}\int_o^\theta R^2 \sin\phi(1-\cos\phi)d\phi \\
&= \frac{R^3}{EI}\int_o^\theta (\sin\phi - \cos\phi\sin\phi)d\phi \\
&= \frac{R^3}{EI}\left[-\cos\phi - \frac{1}{2}\sin^2\phi\right]_o^\theta \\
&= \frac{R^3}{EI}\left[(-\cos\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta) - (-1-0)\right] \\
&= f_{21} = \frac{R^3}{EI}\left[1 - \cos\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right] \\
f_{13} = f_{31} &= \frac{R}{EI}\int_o^\theta R(1-\cos\phi)d\phi \\
&= \frac{R^2}{EI}\left[\phi - \sin\phi\right]_o^\theta \\
&= \frac{R^2}{EI}\left[\theta - \sin\theta\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{22} &= \frac{R}{EI}\int_o^\theta R^2 \sin^2\phi d\phi \\
&= \frac{R^3}{EI}\left[\frac{\phi}{\partial} - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_o^\theta \\
&= f_{22}\frac{R^3}{EI}\left[\frac{\theta}{\partial} - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right] \\
f_{23} = f_{32} &= \frac{R}{EI}\int_o^\theta R\sin\phi d\phi \\
&= \frac{R^2}{EI}\left[-\cos\phi\right]_o^\theta \\
&= \frac{R^2}{EI}\left[-\cos\theta + 1\right] \\
f_{33} &= \frac{R}{EI}\int_o^\theta d\theta \\
&= \frac{R\theta}{EI}
\end{aligned}
$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

46.4.3 Dualità tra flessibilità e rigidità

	Flessibilità	**Stiffa**
Indeterminanza	Statistiche	Kinematico
Governare Equat.	Kinematico	Equilibrio
Sconosciuti primari	Forze nodali	Sostituzioni nodali
Principio Variante	Forza virtuale	Slocamento virtuale
	$\mathbf{P} = \mathcal{B}'\mathbf{P}$	$\mathbf{\Delta} = \mathbf{\Gamma\Delta}$
	$\mathbf{d}$	$\mathbf{K}$
	$D = \mathcal{B}^T\mathbf{d}\mathcal{B}$	$\mathbf{K} = \Sigma\mathbf{\Gamma}^T\mathbf{K\Gamma}$
	$\begin{Bmatrix} \mathbf{\Delta}_P^? \\ \mathbf{\Delta}_R^\surd \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}^\surd \\ \mathbf{R}^? \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \mathbf{p}^\surd \\ \mathbf{R}^? \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ff} & \mathbf{D}_{fr} \\ \mathbf{D}_{rf} & \mathbf{D}_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{\Delta}_f^? \\ \mathbf{\Delta}_r^\surd \end{Bmatrix}$
	$\mathbf{R} = D_{22}^{-1}(\mathbf{\Delta}_R - \mathbf{D}_{21}\mathbf{P})$	$\mathbf{\Delta}_f = K_{ff}^{-1}(\mathbf{P} - \mathbf{k}_{fr}\mathbf{\Delta}_r)$
	$\mathbf{\Delta}_P = D_{11}^{-1}(\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R})$	$\mathbf{R} = K_{rf}\mathbf{\Delta}_f + \mathbf{k}_{rr}\mathbf{\Delta}_r$
	$\mathbf{P} = \mathcal{B}\mathbf{P}$	$\mathbf{P} = \mathbf{K\Gamma\Delta}$

46.5 Congruente approccio di trasformazione K

Nota: Questa sezione è in gran parte basata sulla sezione 3.3 di (Gallagher, 1975)

47 In §44.4.3 Abbiamo coperto una procedura per assemblare la matrice di rigidità aumentata, che descriverà un approccio alternativo.

48 Per una struttura arbitraria composta da n elementi, possiamo definire il *non collegato* vettori di carico e spostamento nodale in tutto il mondo come coordinate

$$\mathbf{P}^{(e)} = \lfloor\ P^1 \quad P^2 \quad \dots \quad P^n\ \rfloor^T$$
$$\mathbf{\Upsilon}^{(e)} = \lfloor\ \Upsilon^1 \quad \Upsilon^2 \quad \dots \quad \Upsilon^n\ \rfloor^T$$

dove $\{\mathbf{P}^i\}$ e $\{\mathbf{\Delta}^i\}$ sono i nodali di carico e spostamenti array di elemento i. La dimensione di ogni sottomatrice (o più precisamente di ogni subarray) è uguale al numero totale di d.o.f nella coordinate globali per l'elemento i.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

49 Allo stesso modo, possiamo definire la matrice di rigidità globale non collegata (o non assemblata) della struttura come $[\mathbf{K}^{(e)}]$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}^{(e)}\{\boldsymbol{\Upsilon}\}$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^1 & & & & \\ & \mathbf{K}^2 & & & \\ & & \mathbf{K}^3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbf{K}^n \end{bmatrix}$$

50 Si noti che tutti gli altri termini di questa matrice sono uguali a zero, e che non c'è alcuna intersezione tra le varie sottomatrice.

51 Ricordiamo le seguenti relazioni (Eq. 46.1, 46.8e 46.9 rispettivamente)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Upsilon} &= \mathcal{A}\boldsymbol{\Delta} \\ \mathbf{P} &= \mathcal{B}\mathbf{F} \\ \mathcal{B}^T &= \mathcal{A} \end{aligned}$$

Ora combiniamo quelle matrici con la definizione della matrice di rigidità:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathcal{B}\mathbf{F} \\ \mathbf{P} &= \mathbf{K}\boldsymbol{\Delta} \\ \mathcal{B} &= \mathcal{A}^T \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \mathcal{A}^T\mathbf{F} &= \mathbf{K}\boldsymbol{\Delta} \\ \mathbf{F} &= \mathbf{K}^{(e)}\boldsymbol{\Upsilon} \\ \boldsymbol{\Upsilon} &= \mathcal{A}\boldsymbol{\Delta} \end{aligned}\right\}$$

Definition 46.3: Trasformazione congruente

$$\mathbf{K} = \mathcal{A}^T\mathbf{K}^{(e)}\mathcal{A}$$

52 Così, abbiamo appena definito una trasformazione congruente sulla matrice di rigidità globale non collegata scritta in termini di $[\mathbf{K}^{(e)}]$ per ottenere la struttura matrice rigidità. Si noti che:

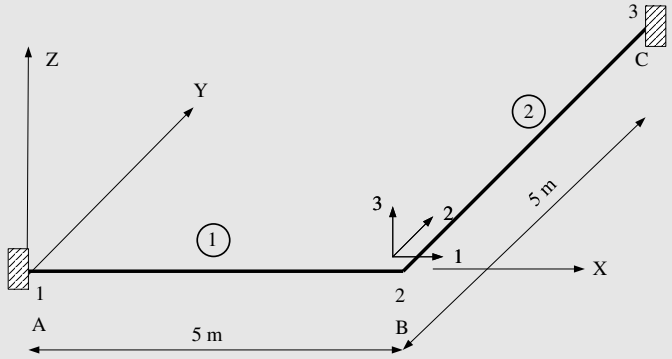
1. If $\mathbf{K}^{(e)}$ si esprime in coordinate globali, quindi $\mathcal{A}$ è un Matrice booleana.
2. If $\mathbf{K}^{(e)}$ è nelle coordinate locali, quindi $\mathcal{A}$ deve includere la trasformazione dall'elemento ai sistemi di coordinate globali, e non è più booleano.
3. $\mathbf{K}$ rappresenta il B.C. come tali termini associati con il d.o.f restrittivo non sono inclusi.
4. Notare la somiglianza tra il metodo di rigidità diretta: $\mathbf{K} = \sum \boldsymbol{\Gamma}^T\mathbf{K}\boldsymbol{\Gamma}$ e l'approccio di trasformazione congruente: $\mathbf{K} = \mathcal{A}^T\mathbf{K}^{(e)}\mathcal{A}$.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

5. Se la struttura è una cornice con n elementi, allora avremmo $\mathbf{K}_{neq\times neq} = \sum_1^n \mathbf{\Gamma}^T_{6\times 6}\mathbf{K}_{6\times 6}\mathbf{\Gamma}_{6\times 6}$ e l'approccio di trasformazione congruente: $\mathbf{K}_{Negativo\times Negativo} = \mathcal{A}^T_{neq\times 6n}\mathbf{K}^{(e)}_{6n\times 6n}\mathcal{A}_{6n\times neq}$.
6. L'approccio congruente sembra essere meno efficiente della rigidità diretta metodo come entrambi $\mathbf{K}^{(e)}$ e $\mathcal{A}$ sono più grandi di $\mathbf{K}$.

46.5.1 Ex 46.9: Trasformazione congruente



Cerchiamo di assemblare la matrice globale della rigidità della griglia sopra indicata utilizzando il metodo diretto di rigidezza e il metodo di trasformazione congruente. I 2 elementi di rigidità matrici nel sistema globale delle coordinate sono dati da:

$$\mathbf{K}_{AB} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 7.692 & 0. & 0. & -7.692 & 0. & 0. \\ & .4\times 10^5 & -12. & 0. & .2\times 10^5 & 12. \\ & & .0048 & 0. & -12. & -.0048 \\ \hline & & & 7.692 & 0. & 0. \\ & & & & .4\times 10^5 & 12. \\ & & & & & .0048 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{K}_{BC} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1\times 10^5 & 0. & 18.75 & .5\times 10^5 & 0. & -18.75 \\ & 14.423 & 0. & 0. & -14.423 & 0. \\ & & .00469 & 18.75 & 0. & -.00469 \\ \hline & & & 1\times 10^5 & 0. & -18.75 \\ & & & & 14.423 & 0. \\ & & & & & .00469 \end{array}\right]$$

Determinaremo la matrice di rigidità globale utilizzando i due approcci:

Location Matrix LM

$$\mathbf{ID} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{LM}^1 = \lfloor\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3\ \rfloor^T$$

$$\mathbf{LM}^2 = \lfloor\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0\ \rfloor^T$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} (7.692 + 1\times10^5) & (0. + 0.) & (18.75 + 0.) \\ (0. + 0.) & (.4\times10^5 + 14.423) & (12. + 0.) \\ (0. + 18.75) & (12. + 0.) & (.0048 + .00469) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1\times10^5 & 0. & 18.75 \\ 0. & .4\times10^5 & 12. \\ 18.75 & 12. & .00949 \end{bmatrix}$$

Trasformazione congruente

1. La matrice di rigidità non montata $\mathbf{K}^{(e)}$, per il nodo 2, è dato da:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}^{(e)}\boldsymbol{\Upsilon}$$
$$\begin{Bmatrix} M_x^1 \\ M_y^1 \\ F_z^1 \\ \hline M_x^2 \\ M_y^2 \\ F_z^2 \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 7.692 & 0 & 0 & & 0. & \\ & .4\times10^5 & 12. & & & \\ \text{sym} & & .0048 & & & \\ \hline & & & 1\times10^5 & 0. & -18.75 \\ & 0. & & & 14.423 & 0. \\ & & & \text{sym} & & .00469 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \Theta_x^1 \\ \Theta_y^1 \\ W_z^1 \\ \hline \Theta_x^2 \\ \Theta_y^2 \\ W_z^2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{element 1} \\ \\ \\ \text{element 2} \end{matrix}$$

   Si noti che il B.C. è implicitamente considerato ignorando i limiti d.o.f. tuttavia la connettività degli elementi non si riflette da questa matrice.
2. La matrice cinematica è data da:

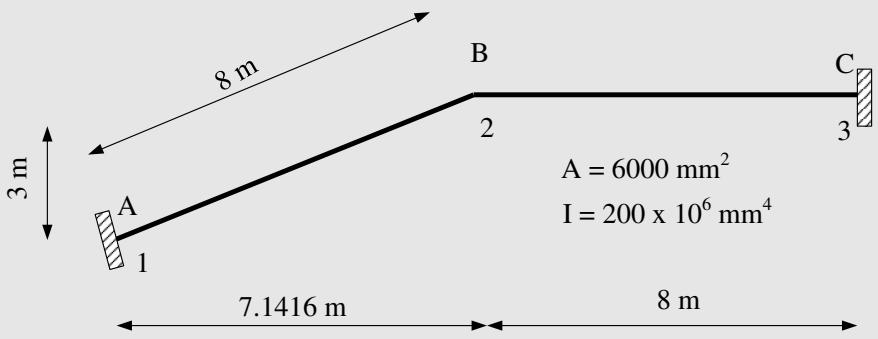
$$\boldsymbol{\Upsilon} = \mathcal{A}\boldsymbol{\Delta}$$
$$\begin{Bmatrix} \theta_x^1 \\ \theta_y^1 \\ w_z^1 \\ \hline \theta_x^2 \\ \theta_y^2 \\ w_z^2 \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ w_z \end{Bmatrix}$$

   Per quanto riguarda la matrice cinematica, stiamo correggendo gli spostamenti locali di ogni elemento a quelli globali, per cui questa matrice è analoga a quella matrice di connettività. Mentre la matrice di connettività definita in precedenza rifletteva la connessione dell'elemento, questo riflette la connettività tra tutti gradi di libertà non frenati.
3. Se prendiamo il prodotto: $\mathcal{A}^T\mathbf{K}^{(e)}\mathcal{A}$ poi ci ricuperemo **K** come mostrato sopra.

46.5.2 Ex 46.10: Congruente trasformazione di un telaio

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Proviamo a assemblare la matrice di rigidità del telaio utilizzando la matrix locator così come i due approcci congruenti. Le matrici di rigidità degli elementi AB e BC nel sistema coordinate locali sono dati da:

$$\mathbf{K}_{AB} = \mathbf{K}_{BC} = 200 \begin{bmatrix} .75 & 0. & 0. & -.75 & 0. & 0. \\ & .00469 & 18.75 & 0 & -.0048 & 18.75 \\ & & 1\times10^5 & 0 & -18.75 & .5\times10^5 \\ & & & .75 & 0. & 0. \\ \text{sym} & & & & .00469 & -18.75 \\ & & & & & 1\times10^5 \end{bmatrix}$$

mentre la matrice di rotazione è data da:

$$\boldsymbol{\Gamma}_{AB} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} .9272 & .375 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ -.375 & .927 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 1 & 0. & 0. & 0. \\ \hline 0. & 0. & 0. & .9272 & .375 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & -.375 & .9272 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1 \end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{BC} = \mathbf{I}$$

Le matrici di rigidità degli elementi nelle coordinate globali saranno allora dato da:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{AB} &= \boldsymbol{\Gamma}_{AB}^T \mathbf{K}_{AB} \boldsymbol{\Gamma}_{AB} \\ &= 200 \begin{bmatrix} .645 & .259 & -7.031 & -.645 & -.259 & -7.031 \\ & .109 & 17.381 & -.259 & -.109 & 17.381 \\ & & 1\times10^5 & 7.031 & -17.381 & .5\times10^5 \\ & & & .645 & .259 & 7.031 \\ & \text{sym} & & & .109 & -17.381 \\ & & & & & 1\times10^5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

and $\mathbf{K}_{BC} = \mathbf{K}_{BC}$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Locator Matrix: Possiamo assemblare facilmente la matrice di rigidità globale:

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= 200\begin{bmatrix}(.645+.75) & (.259+0.) & (7.031+0.)\\ & (.109+.00469) & (-17.38+18.75)\\ \text{sym} & & (1+1)\times 10^5\end{bmatrix}\\ &= 200\begin{bmatrix}1.395 & .259 & 7.031\\ & .1137 & 1.37\\ \text{sym} & & 2\times 10^5\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{46.23}$$

Trasformazione congruente, asse globale, Boolean $\mathcal{A}$

1. Iniziamo con la matrice di rigidità globale non collegata in tutto il mondo sistema di coordinate:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}^{(e)}\boldsymbol{\Upsilon}$$

$$\left\{\begin{array}{c}P_X^1\\P_Y^1\\M_Z^1\\\hline P_X^2\\P_Y^2\\M_Z^2\end{array}\right\} = 200\left[\begin{array}{ccc|ccc}.645 & .259 & 7.031 & & & \\ & .109 & -17.381 & & 0 & \\ \text{sym} & & 1\times 10^5 & & & \\ \hline & & & .75 & 0. & 0.\\ & 0 & & & .00469 & 18.75\\ & & & \text{sym} & & 1\times 10^5\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}U_X^1\\V_Y^1\\\Theta_Z^1\\\hline U_X^2\\V_Y^2\\\Theta_Z^2\end{array}\right\}$$

2. Successivamente determina la matrice cinematica $\mathcal{A}$:

$$\boldsymbol{\Upsilon} = \mathcal{A}\boldsymbol{\Delta}$$

$$\begin{Bmatrix}u^1\\v^1\\\theta^1\\u^2\\v^2\\\theta^2\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\v\\\theta\end{Bmatrix}$$

3. Infine, se prendiamo il prodotto $\underbrace{\mathcal{A}^T}_{3\times 6}\underbrace{\mathbf{K}^{(e)}}_{6\times 6}\underbrace{\mathcal{A}}_{6\times 3}$ otteniamo la struttura matrice di rigidità globale **K** in Eq. 46.23

Trasformazione congruente (asse locale):

1. Matrice di rigidità non collegata nelle coordinate locali:

$$\mathbf{p}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)}\boldsymbol{\delta}^{(e)}$$

$$\left\{\begin{array}{c}P_X^1\\P_Y^1\\M_Z^1\\\hline P_X^2\\P_Y^2\\M_Z^2\end{array}\right\} = 200\left[\begin{array}{ccc|ccc}.75 & 0. & 0. & & & \\ & .00469 & -18.75 & & & \\ \text{sym} & & 1\times 10^5 & & & \\ \hline & & & .75 & 0. & 0.\\ & & & & .00469 & 18.75\\ & & & \text{sym} & & 1\times 10^5\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}u_x^1\\v_y^1\\\theta_z^1\\\hline u_x^2\\v_y^2\\\theta_z^2\end{array}\right\}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

2. La matrice cinematica $[\mathcal{A}]$ è ora data da:

$$\boldsymbol{\delta}^{(e)} = \mathcal{A}\boldsymbol{\Delta}$$

$$\left\{\begin{array}{c} u_x^1 \\ v_y^1 \\ \theta_z^1 \\ \hline u_x^2 \\ v_y^2 \\ \theta_z^2 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc} .9272 & .375 & 0. \\ -.375 & .9272 & 0. \\ 0. & 0. & 1. \\ \hline 1. & 0. & 0. \\ 0. & 1. & 0. \\ 0. & 0. & 1. \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} U_X \\ V_Y \\ \Theta_Z \end{array}\right\}$$

3. Quando il prodotto: $\mathcal{A}^T\mathbf{K}^{(e)}\mathcal{A}$ noi recuperare la struttura matrice di rigidità globale

46.6 Elementi speciali

46.6.1 Rigido offset;

53 Finora tutti i membri sono stati assunti per essere rigidamente collegati e collegare le linee centrali alle linee del centro. In molti casi, o abbiamo una cerniera, un collegamento semirigido e potremmo voler tenere conto dell'offset del membro Fig. 46.3.

Diagramma corpo libero

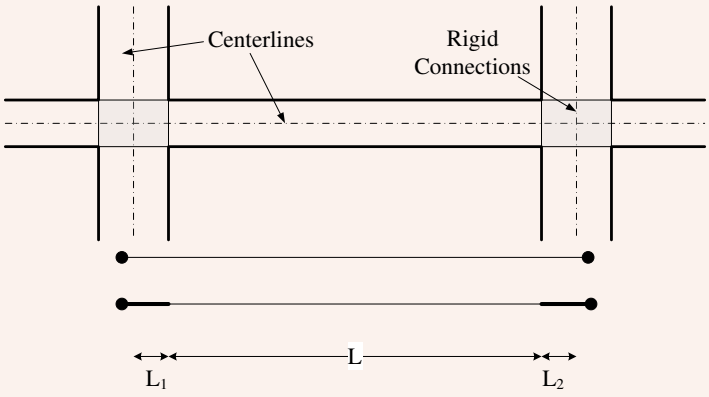


Figura 46.3: Fascio con offset rigido

54 Il diagramma del corpo libero corrispondente, Fig. 46.4, conduce a

$$\mathbf{p} = \lfloor\ N_1 \quad V_2 \quad M_3 \quad N_4 \quad V_5 \quad M_6\ \rfloor$$
$$\overline{\mathbf{p}} = \lfloor\ \overline{N}_1 \quad \overline{V}_2 \quad \overline{M}_3 \quad \overline{N}_4 \quad \overline{V}_5 \quad \overline{M}_6\ \rfloor$$
$$\overline{\mathbf{u}} = \lfloor\ \overline{u}_1 \quad \overline{v}_2 \quad \overline{\theta}_3 \quad \overline{u}_4 \quad \overline{v}_5 \quad \overline{\theta}_6\ \rfloor$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

che rappresentano le forze che agiscono sui lati interni ed esterni del collegamento rigido, e gli spostamenti esterni rispettivamente.

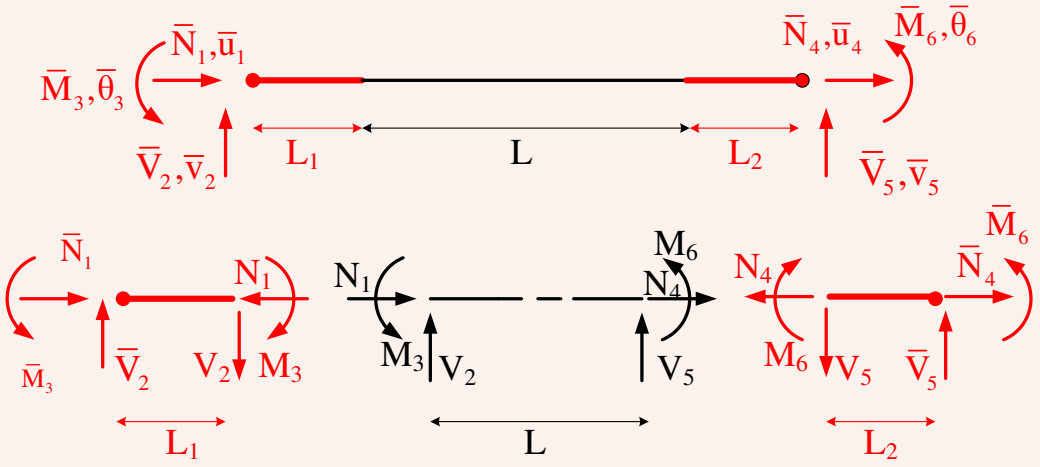


Figura 46.4: Fbd di fascio con offset rigido

Equilibrio

55 Le forze esterne e interne devono essere in equilibrio

$$\overline{N}1 = N_1; \quad \overline{V}_2 = V_2; \quad \overline{M}_3 = L_1V_2 + M_3$$
$$\overline{N}4 = N_4; \quad \overline{V}_5 = V_5; \quad \overline{M}_6 = -L_2V_5 + M_6$$

or

$$\overline{\mathbf{p}} = \mathcal{B}\mathbf{p} \tag{46.24}$$

$\mathcal{B}$ è il *matrice statica* (Eq. 46.1)

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L_2 & 1 \end{bmatrix}$$

56 Allo stesso modo, possiamo definire una matrice cinematica (Eq. 46.8) $\mathcal{A}$ tale

$$\mathbf{u} = \mathcal{A}\overline{\mathbf{u}} \tag{46.25}$$

e lo sappiamo (Eq. 46.9) che $\mathcal{A} = \mathcal{B}^T$.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Stiffness e matrici NEF

57 Siamo ora pronti a determinare la rigidità dell'elemento del fascio con offset rigido in termini di il noto

$$\mathbf{p} + \mathbf{NEF} = \mathbf{ku} \tag{46.26}$$

Se moltiplichiamo entrambi i lati $\mathcal{B}$ e sostituire Eq. 46.24 e 46.25 in 46.26:

$$\mathcal{B}p + \mathcal{B}\mathbf{NEF} = \mathcal{B}\mathbf{k}\mathcal{A}\overline{\mathbf{u}}$$
$$\mathcal{B}p + \mathcal{B}\mathbf{NEF} = \mathcal{B}\mathbf{k}\mathcal{B}^T\overline{\mathbf{u}}$$
$$\overline{\mathbf{p}} + \overline{\mathbf{NEF}} = \overline{\mathbf{k}}\overline{\mathbf{u}}$$

dove

$$\overline{\mathbf{k}} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & \alpha_1 & 0-12 & \alpha_2 & \\ 0 & \alpha_1 & \gamma & 0-\alpha_1 & \beta & \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -\alpha_1 & 012 & -\alpha_2 & \\ 0 & \alpha_2 & \beta & 0 & -\alpha_2 & \gamma \end{bmatrix}$$

e $\alpha_i = 6L + 12L_i$, $\beta = 2L^2 + 6LL_1 + 6LL_2 + 12L_1L_2$e $\gamma = 4L^2 + 12LL_2 + 12L_2^2$

58 Le forze di fine nodale saranno date da

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{FN_1} \\ \overline{FV_2} \\ \overline{FM_3} \\ \overline{FN_4} \\ \overline{FV_5} \\ \overline{FM_6} \end{Bmatrix}}_{\overline{NEF}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L_2 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} FN_1 \\ FV_2 \\ FM_3 \\ FN_4 \\ FV_5 \\ FM_6 \end{Bmatrix}}_{NEF}$$

46.6.2 Travi semirigidi

Nota: Adattato da (Kassimali, 2021, pg. 532)

54 Spesso, un fascio non ha una connessione flessibile o rigida, ma piuttosto semirigida (come nel collegamento di acciaio II), Fig. 46.5

55 La matrice di rigidità di un elemento a fascio regolare può essere espressa come, Eq. 41.1:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_3 \\ M_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{p}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} FV_1 \\ FM_2 \\ FV_3 \\ FM_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{NEF}} = \underbrace{\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}} \tag{46.27}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

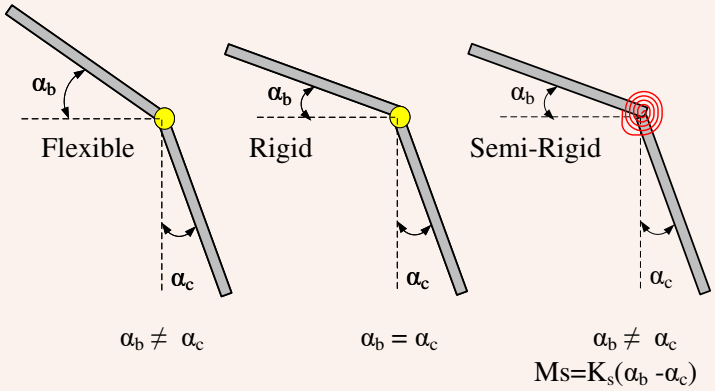


Figura 46.5: Travi flessibili, rigide e semirigide

o semplicemente $\mathbf{p} + \mathbf{NEF} = \mathbf{ku}$.

56 Ora cerchiamo di determinare la rigidità dell'elemento del fascio con il collegamento semi- rigido

$$\overline{\mathbf{p}} = \overline{\mathbf{k}}\overline{\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{NEF}}$$

in funzione di **k**, **NEF** e delle due rigidezze delle molle k^s_{lft} e k^s_{rgt} a sinistra e destra del membro (primo e secondo nodo).

Diagramma corpo libero

57 Con riferimento alla Fig. 46.6, indichiamo con

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} &= \lfloor\ V_1 \quad M_2 \quad V_3 \quad M_4\ \rfloor \\
\overline{\mathbf{p}} &= \lfloor\ \overline{V}_1 \quad \overline{M}_2 \quad \overline{V}_3 \quad \overline{M}_4\ \rfloor \\
\mathbf{u} &= \lfloor\ v_1 \quad \theta_2 \quad v_3 \quad \theta_4\ \rfloor \\
\overline{\mathbf{u}} &= \lfloor\ \overline{v}_1 \quad \overline{\theta}_2 \quad \overline{v}_3 \quad \overline{\theta}_4\ \rfloor
\end{aligned}$$

le forze che agiscono sui lati interni ed esterni delle molle e gli spostamenti nodali dei lati interni ed esterni delle molle rispettivamente.

Equilibrio

58 L'equilibrio detta che $\mathbf{p} = \overline{\mathbf{p}}$.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

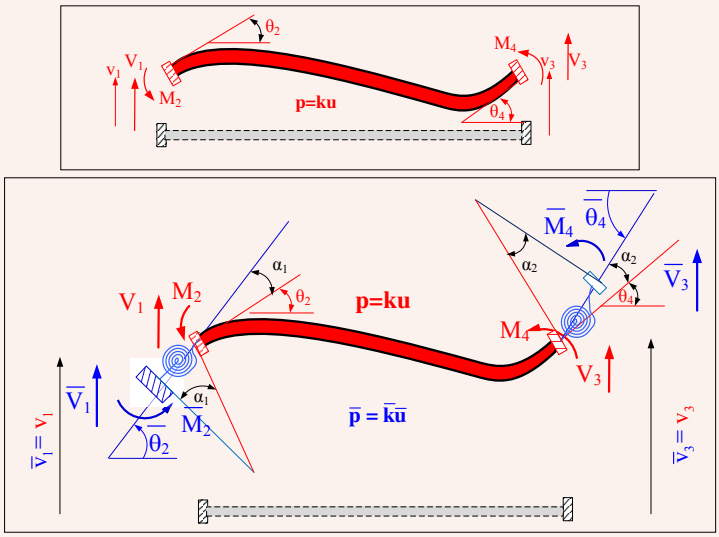


Figura 46.6: Deformazioni di un fascio semirigido

59 Per quanto riguarda gli spostamenti, e supponendo che le molle siano infinitamente piccole, abbiamo

$$\begin{aligned} v_1 &= \overline{v}_1 \\ \theta_2 + \alpha_{\text{lft}} = \overline{\theta}_2 \Rightarrow \theta_2 &= \overline{\theta}_2 - \underbrace{\frac{M_2}{k^s_{\text{lft}}}}_{\alpha_{\text{lft}}} \\ v_3 &= \overline{v}_3 \\ \theta_4 + \alpha_{\text{rgt}} = \overline{\theta}_4 \Rightarrow \theta_4 &= \overline{\theta}_4 - \underbrace{\frac{M_4}{k^s_{\text{rgt}}}}_{\alpha_{\text{rgt}}} \end{aligned} \tag{46.28}$$

dove k^s_{lft} e k^s_{rgt} sono le molle a sinistra e destra rispettivamente.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

60 Sostituire Eq. 46.28 in Eq. 46.27, noi otteniamo

$$\begin{aligned}
\overline{V}_1 + FV_1 &= \frac{EI}{L^3}\left[12\overline{v}_1 + 6L\left(\overline{\theta}_2 - \frac{\overline{M}_2}{k^s_{\text{lft}}}\right) - 12\overline{v}_3 + 6L\left(\overline{\theta}_4 - \frac{\overline{M}_4}{k^s_{\text{rgt}}}\right)\right] \\
\overline{M}_2 + FM_2 &= \frac{EI}{L^3}\left[6L\overline{v}_1 + 4L^2\left(\overline{\theta}_2 - \frac{\overline{M}_2}{k^s_{\text{lft}}}\right) - 6L\overline{v}_3 + 2L^2\left(\overline{\theta}_4 - \frac{\overline{M}_4}{k^s_{\text{rgt}}}\right)\right] \\
\overline{V}_3 + FV_3 &= \frac{EI}{L^3}\left[-12\overline{v}_1 - 6L\left(\overline{\theta}_2 - \frac{\overline{M}_2}{k^s_{\text{lft}}}\right) + 12\overline{v}_3 - 6L\left(\overline{\theta}_4 - \frac{\overline{M}_4}{k^s_{\text{rgt}}}\right)\right] \\
\overline{M}_4 + FM_4 &= \frac{EI}{L^3}\left[6L\overline{v}_1 + 2L^2\left(\overline{\theta}_2 - \frac{\overline{M}_2}{k^s_{\text{lft}}}\right) - 6L\overline{v}_3 + 4L^2\left(\overline{\theta}_4 - \frac{\overline{M}_4}{k^s_{\text{rgt}}}\right)\right]
\end{aligned} \tag{46.29}$$

61 Queste 4 equazioni sono accoppiate (M_2 e M_4 sono sia all'interno che al di fuori della matrice rigidità), cerchiamo di non accoppiarli ed esprimere le forze esclusivamente in termini di spostamento.

$$\begin{aligned}
\overline{M}_2 &= \frac{EI}{L^3}\frac{\phi_b}{\Phi}\left[6L(2-\phi_{\text{rgt}})\overline{v}_1 + 4L^2(3-2\phi_{\text{rgt}})\overline{\theta}_2 - 6L(2-\phi_{\text{rgt}})\overline{v}_3 + 2L^2\phi_{\text{rgt}}\overline{\theta}_4\right] \\
&\quad + \frac{\phi_{\text{lft}}}{\Phi}\left[(4-3\phi_{\text{rgt}})FM_2 - 2(1-\phi_{\text{rgt}})FM_4\right] \\
\overline{M}_4 &= \frac{EI}{L^3}\frac{\phi_{\text{rgt}}}{\Phi}\left[6L(2-\phi_{\text{lft}})\overline{v}_1 + 2L^2\phi_{\text{lft}}\overline{\theta}_2 - 6L(2-\phi_{\text{lft}})\overline{v}_3 + 4L^2(3-2\phi_{\text{lft}})\overline{\theta}_4\right] \\
&\quad + \frac{\phi_{\text{rgt}}}{\Phi}\left[-2(1-\phi_{\text{lft}})FM_2 + (4-3\phi_{\text{lft}})FM_4 - 2(1-\phi_{\text{lft}})FM_2\right]
\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
\phi_{\text{lft}} &= \frac{k^s_{\text{lft}}L}{EI + k^s_{\text{lft}}L} \\
\phi_{\text{rgt}} &= \frac{k^s_{\text{rgt}}L}{EI + k^s_{\text{rgt}}L} \\
\Phi &= 12 - 8\phi_{\text{lft}} - 8\phi_{\text{rgt}} + 5\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}}
\end{aligned}$$

ϕ può essere interpretato come un *fattore di rigidità*. Per connessione rigida $\phi = 1$, mentre per quelli a cerniera $\phi = 0$.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

62 Successivamente sostituiamo queste ultime due equazioni nella prima e terza di Eq. 46.29 e ottenere:

$$\begin{aligned}\overline{V}_1 &= \frac{EI}{\Phi L^3}\Big[12(\phi_{\text{lft}}+\phi_{\text{rgt}}-\phi_b\phi_{\text{rgt}})\overline{v}_1 + 6L\phi_{\text{lft}}(2-\phi_{\text{rgt}})\overline{\theta}_2 - 12(\phi_{\text{lft}}+\phi_{\text{rgt}}-\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}})\overline{v}_3 \\ &\quad +6L\phi_{\text{rgt}}(2-\phi_{\text{lft}})\overline{\theta}_4\Big] + FV_1 - \frac{6}{\Phi L}\left[(1-\phi_{\text{lft}})(2-\phi_{\text{rgt}})FM_2 + (1-\phi_{\text{rgt}})(2-\phi_{\text{lft}})FM_4\right] \\ \overline{V}_3 &= \frac{EI}{\Phi L^3}\Big[-12(\phi_{\text{lft}}+\phi_{\text{rgt}}-\phi_b\phi_{\text{rgt}})\overline{v}_1 - 6L\phi_{\text{lft}}(2-\phi_{\text{rgt}})\overline{\theta}_2 + 12(\phi_{\text{lft}}+\phi_{\text{rgt}}-\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}})\overline{v}_3 \\ &\quad -6L\phi_{\text{rgt}}(2-\phi_{\text{lft}})\overline{\theta}_4\Big] + FV_3 + \frac{6}{\Phi L}\left[(1-\phi_{\text{lft}})(2-\phi_{\text{rgt}})FM_2 + (1-\phi_{\text{rgt}})(2-\phi_{\text{lft}})FM_4\right]\end{aligned}$$

Matrice di affanno

63 Possiamo esprimere queste espressioni come

$$\overline{P} = \overline{\mathbf{k}}\overline{u} + \overline{\mathbf{NEF}}$$

dove

$$\overline{\mathbf{k}} = \frac{EI}{\Phi L^3}\begin{bmatrix} 12(\phi_{\text{lft}}+\phi_{\text{rgt}}-\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}}) & 6L\phi_{\text{lft}}(2-\phi_{\text{rgt}}) & -12(\phi_{\text{lft}}+\phi_{\text{rgt}}-\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}}) & 6L\phi_{\text{rgt}}(2-\phi_{\text{lft}}) \\ 6L\phi_{\text{lft}}(2-\phi_{\text{rgt}}) & 4L^2\phi_{\text{lft}}(3-2\phi_{\text{rgt}}) & -6L\phi_{\text{lft}}(2-\phi_{\text{rgt}}) & 2L^2\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}} \\ -12(\phi_{\text{lft}}+\phi_{\text{rgt}}-\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}}) & -6L\phi_{\text{lft}}(2-\phi_{\text{rgt}}) & 12(\phi_{\text{lft}}+\phi_{\text{rgt}}-\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}}) & -6L\phi_{\text{rgt}}(2-\phi_b) \\ 6L\phi_{\text{rgt}}(2-\phi_{\text{lft}}) & 2L^2\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}} & -6L\phi_{\text{rgt}}(2-\phi_{\text{lft}}) & 4L^2\phi_{\text{rgt}}(3-2\phi_{\text{lft}}) \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix}\overline{FV_1}\\ \overline{FM_2}\\ \overline{FV_3}\\ \overline{FM_4}\end{Bmatrix}}_{\overline{NEF}} = \begin{bmatrix} 1-\frac{6}{\Phi L}\left[(1-\phi_{\text{lft}})(2-\phi_{\text{rgt}})\right] & 0 & -\frac{6}{\Phi L}\left[(1-\phi_{\text{rgt}})(2-\phi_{\text{lft}})\right] & \\ 0 & \frac{\phi_{\text{lft}}}{\Phi}\left[(4-3\phi_{\text{rgt}})\right] & & \frac{\phi_{\text{lft}}}{\Phi}\left[-2(1-\phi_{\text{rgt}})\right] \\ 0 & \frac{6}{\Phi L}\left[(1-\phi_{\text{lft}})(2-\phi_{\text{rgt}})\right] & 1 & \frac{6}{\Phi L}\left[(1-\phi_{\text{rgt}})(2-\phi_{\text{lft}})\right] \\ 0 & \frac{\phi_{\text{rgt}}}{\Phi}\left[-2(1-\phi_{\text{lft}})\right] & 0 & \frac{\phi_{\text{rgt}}}{\Phi}\left[-2(1-\phi_{\text{lft}})\right] \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix}FV_1\\ FM_2\\ FV_3\\ FM_4\end{Bmatrix}}_{NEF}$$

64 È chiaro che per connessioni completamente rigide, $\phi = 1$, recuperare la rigidità originale matrice del fascio, Eq. 46.27.

65 se esprimiamo la rigidità della molla k^s as $k^s = \alpha EI/L$Allora $\phi = \alpha/(1+\alpha)$. Fig. 46.7 mostra la dipendenza $\overline{K}_{22}$ coefficiente di α (supponendo) entrambe le molle hanno la stessa rigidità).

Osservazione

66 Per connessioni completamente rigide, $\phi = 1$, we recuperare la matrice di rigidità originale del fascio.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

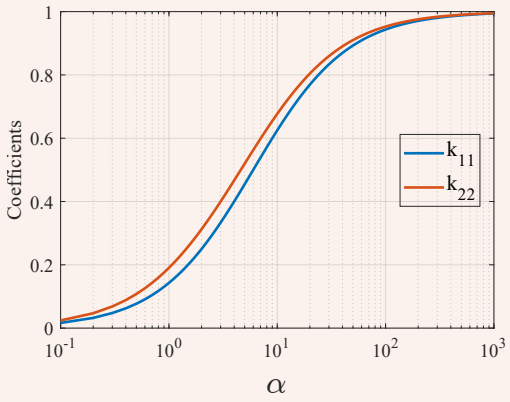


Figura 46.7: $\overline{K}_{22}$ Coefficiente per connessioni semi-flessibili

67 Se ci mettiamo $\phi_1 = 0$ e $\phi_2 = 1$ poi abbiamo una cerniera a sinistra, e un collegamento rigido sulla destra e la matrice di rigidità corrispondente è:

$$\overline{\mathbf{k}} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 3L \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & -3L \\ 3L & 0 & -3L & 3L^2 \end{bmatrix}$$

68 La matrice di rigidità di una colonna del fascio con un cerniera a destra sarà allora:

$$\overline{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} AE/L & 0 & 0 & -AE/L & 0 & 0 \\ 0 & 3EI/L^3 & 3EI/L^2 & 0 & -3EI/L^3 & 0 \\ 0 & 3EI/L^2 & 3EI/L & 0 & -3EI/L^2 & 0 \\ -AE/L & 0 & 0 & AE/L & 0 & 0 \\ 0 & -3EI/L^3 & -3EI/L^2 & 0 & 3EI/L^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se la cerniera è sul lato sinistro

$$\overline{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} AE/L & 0 & 0 & -AE/L & 0 & 0 \\ 0 & 3EI/L^3 & 0 & 0 & -3EI/L^2 & 3EI/L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -AE/L & 0 & 0 & AE/L & 0 & 0 \\ 0 & -3EI/L^3 & 0 & 0 & 3EI/L^3 & -3EI/L^2 \\ 0 & 3EI/L^2 & 0 & 0 & -3EI/L^2 & 3EI/L \end{bmatrix}$$

69 Attenzione: la dof globale corrispondente a una dof zero locale non dovrebbe essere zero, cioè un altro elemento deve "contribuire" al termine globale.

70 se esprimiamo la rigidità della molla k^s as $k^s = \alpha EI/L$Allora $\phi = \alpha/(1+\alpha)$. La dipendenza della $\overline{K}_{22}$ coefficiente di α (supponendo che entrambe le molle abbiano la stessa rigidità).

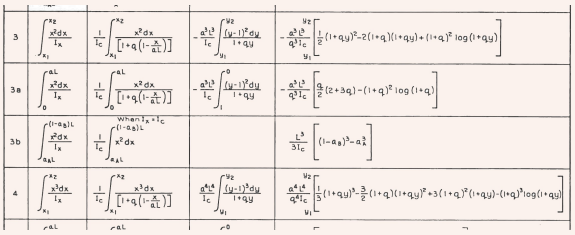
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

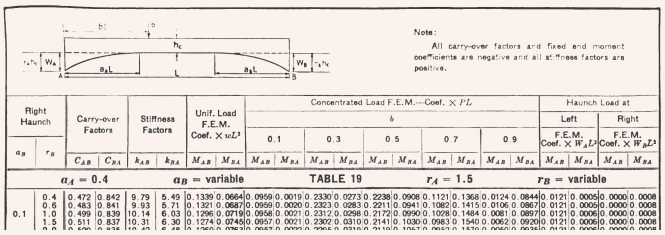
46.6.3 Sezione trasversale variabile

71 In genere, a sostegno abbiamo momenti negativi che sono più grandi di quelli positivi al centro. Conseguentemente, c'è un vantaggio per avere una trave con maggiore istante d'inerzia al supporto (attraverso la profondità aumentata). Questo è un tentativo pratico di avere il fascio sagomato come diagramma del momento (per un carico uniforme).

72 Per questo motivo, non c'è una necessità di determinare la matrice rigidità di tali elementi. Al meglio della mia conoscenza, non esiste pubblicazione che fornisca una soluzione semplice a questo problema e il riferimento più autorevole è (Portland Cement Association, 1947). Questo manuale vale alcuni commenti in quanto era un grande *tour de force* su tre conti: a) le soluzioni analitiche complesse, ma eleganti per gli integrali complessi, Fig. 46.8ab) le 26 tabelle, 1.320 membri considerati con 25 differenti serie di dimensioni 46.8be, questi calcoli sono stati fatti nel 1947! età ben pre-computer. Con riferimento a Fig.



(a) Integrazioni analitiche complesse



(b) Valori numerici

Figura 46.8: Estratti dal manuale di costanti del telaio (Portland Cement Association, 1947)

46.9 noi definiamo

- a Rapporto di lunghezza del criceto alla fine A fino a durata della campata
- b Rapporto di lunghezza del criceto alla fine B fino a durata della campata
- h_a Altezza a supporto A
- h_b Altezza a supporto B
- h_c Altezza a metà della superficie
- I_c Momento di inerzia della sezione a metà del
- I_x Momento di inerzia di qualsiasi distanza sezione x da A
- r_a $(h_A - h_c)/h_c$ per sezione trasversale rettangolare in fine A
- r_b $(h_B - h_c)/h_c$ per sezione trasversale rettangolare in fine B
- x Distanza dal punto variabile alla fine A

e utilizzare le seguenti equazioni per il momento variabile di inerzia:

$$I_x = \begin{cases} Ic\left[1 + r\left(1 - \frac{x}{aL}\right)^2\right]^3 & \text{Parabolic haunches} \\ Ic\left[1 + r\left(1 - \frac{x}{aL}\right)\right]^3 & \text{Straight haunches} \end{cases} \tag{46.30}$$

COPIA DI REVISIONE

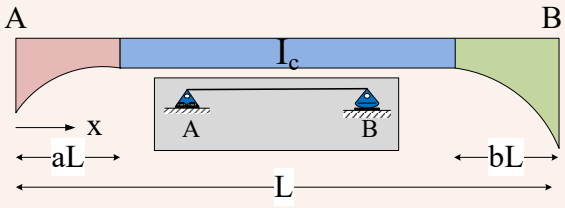


Figura 46.9: Fascio con sezione variabile

73 La matrice di rigidità dell'elemento deriva dalla flessibilità e dalle statiche ($\mathbf{d}$ e $\mathcal{B}$) (come derivato in Eq. 46.22):

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{d}^{-1} & \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \\ \hline \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1} & \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \end{array}\right]$$

74 La matrice statica $\mathcal{B}$ per un raggio semplicemente sostenuto, è dato da

$$\begin{Bmatrix} R_1 = V_1 \\ R_2 = V_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{l}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

75 La matrice di flessibilità a sua volta è stata derivata nel capitolo 25, dove le relazioni di spostamento della forza sono date da

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{array}{c} \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} M_1 & M_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

Utilizzo del lavoro virtuale complementare (Chap 24), abbiamo

$$d_{ij} = \int_0^l \delta\overline{M}(x)_i \frac{M(x)_j}{EI_z} dx \tag{46.31}$$

questo è semplice per membro con costante profondità.

76 Per i membri di profondità variabile, dovremmo sostituire il momento dell'inerzia data da Eq 46.30 in Eq. 46.31, e rompere l'integrale in tre parti:

$$\begin{aligned} d_{ij} = &\int_0^{aL} \delta\overline{M}(x) \frac{M(x)}{EI_{Ic,a,L,r_a}} dx && \text{Left haunch} \\ &+ \int_{aL}^{L-al} \delta\overline{M}(x) \frac{M(x)}{EI_c} dx && \text{Central part} \\ &+ \int_0^{bL} \delta\overline{M}(x) \frac{M(x)}{EI_{Ic,b,L,r_b}} dx && \text{Right haunch} \end{aligned}$$

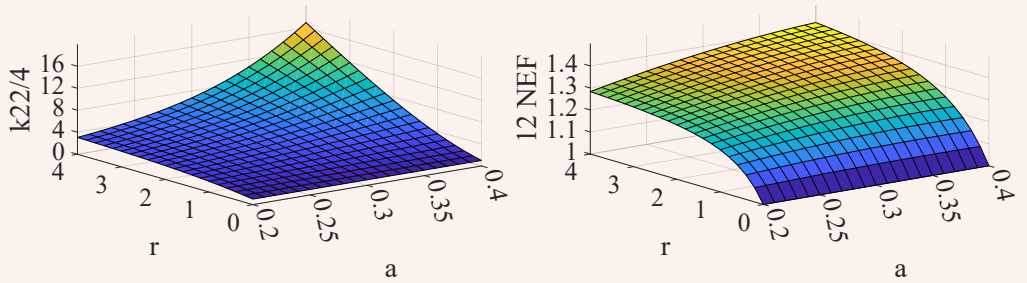
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

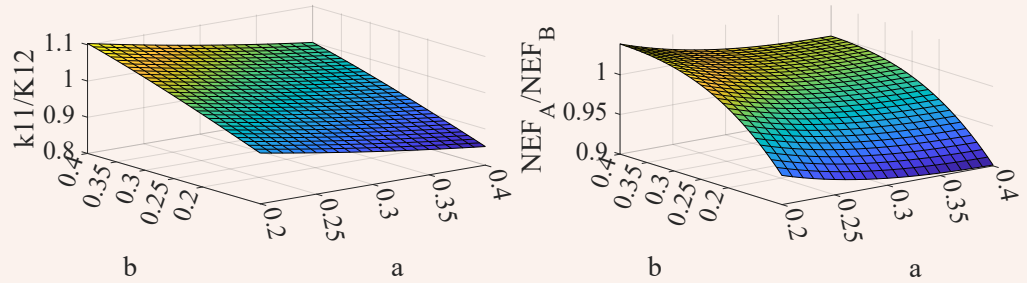
77 Ho cercato di risolvere queste equazioni con Mathematica, tuttavia la soluzione analitica risultante era abbastanza complessa ed impraticabile. MATLAB®il codice è stato scritto (§I.2.9), tale che Eq. 41.1 potrebbe essere modificato per riflettere la presenza di cricche paraboliche o rettilinee.

$$\mathbf{k}^b = \begin{array}{c} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_{1y} & \theta_{1z} & v_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \end{array}$$

Questo fu a sua volta usato per generare i trame mostrati in Fig. 46.10 e 46.11 con $L = I_z = w = 1$. Nota che k_{22} e la **NEF** sono normalizzati rispettivamente da 4 e 12 (coefficienti corrispondenti ad una sezione trasversale costante).



(a) $a = b; r_a = r_b$ (b) $a = b; r_a = r_b$



(c) $r_a = r_b = 0.2$ (d) $r_a = r_b = 0.2$

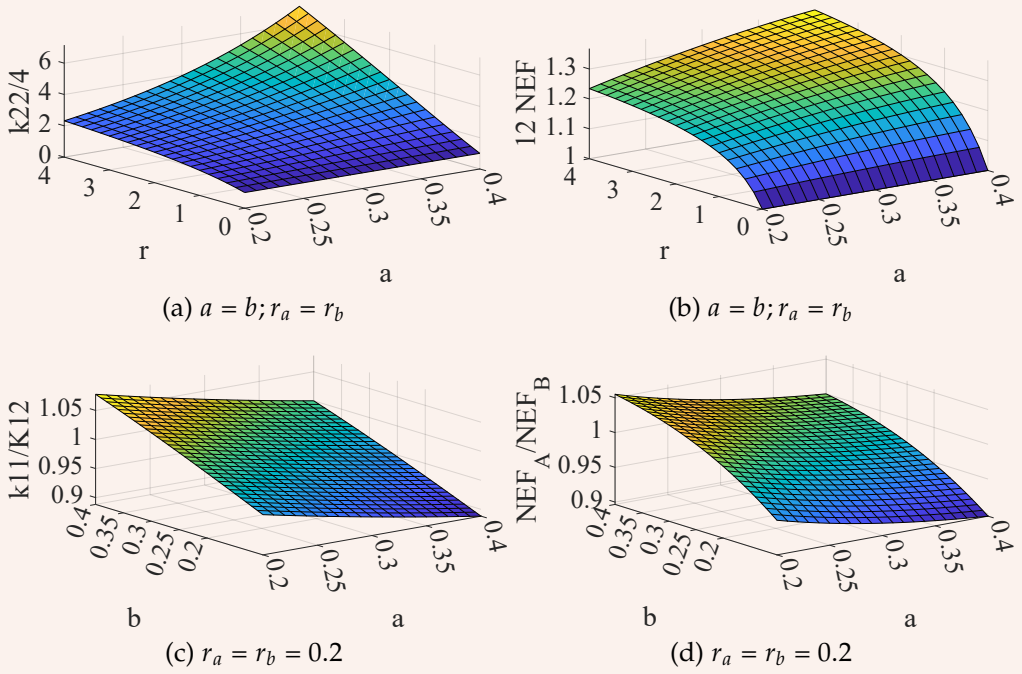
Figura 46.10: Sezione con profondità variabile lineare; studio parametrico

46.7 Fonti di derivazione laterale in telai del momento

78 Prima che un telaio di costruzione possa essere analizzato dinamicamente — per trovare il suo periodo naturale, le sue forme di modalità o la sua risposta sismica — uno deve prima

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) $a = b; r_a = r_b$ (b) $a = b; r_a = r_b$

(c) $r_a = r_b = 0.2$ (d) $r_a = r_b = 0.2$

Figura 46.11: Sezione con profondità variabile parabolica; studio parametrico

di capire la *rigidità laterale* k. Il periodo naturale $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ è interamente governato da questo quantità, e un malinteso dove k proviene da piste inevitabilmente a un malinteso di tutto ciò che segue. Questa sezione inizia quindi con un'attenta dissezione analitica delle fonti di deriva laterale in un telaio che resiste al momento, prima vengono introdotte qualsiasi forza inerzia o effetti dinamici.

79 Le domande qui poste sono ispirate da un saggio influente Powell, 2008, che ha sostenuto che l'istruzione di analisi strutturale dedica molto sforzo ai metodi classici della mano — Rimozione, distribuzione del momento, montaggio a matrice di rigidità — e troppo poco a ciò che realmente conta nella pratica: comprensione che cosa un risultato calcolato significa fisicamente, e riconoscendo quando è sbagliato.

80 Il rimedio di Powell era quello di mettere un programma per computer nelle mani dello studente dal primo giorno e lasciare che l'intuizione fisica cresca da guida numerica esperimenti: variare la rigidità del fascio, osservare la deriva, controllare equilibrio con corpo libero, ripeti. Siamo del tutto simpatici per questa filosofia, e le domande sotto seguire la struttura di Powell da vicino.

81 Tuttavia, in un trattato di questo tipo — rivolto a lettori che desiderano comprendere il comportamento strutturale dai primi principi piuttosto che sviluppare la pratica di progettazione di routine — seguiamo un deliberatamente diverso piuttosto che guidare il lettore attraverso esperimenti di computer, noi derivare soluzioni analitiche chiuse-forma

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

in termini di struttura parametri V, H, L, EI_ce EI_b. La ragione è semplice: algebra fa *visibile* che cosa un computer nasconde.

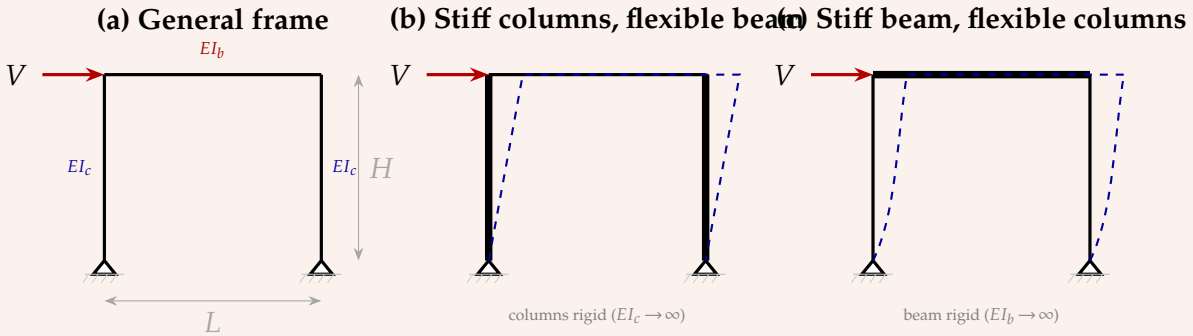
82 Un'espressione a forma chiusa mostra immediatamente quale controllo dei parametri la deriva, come il raggio e la flessibilità della colonna interagiscono attraverso l'articolazione equilibrio, perché il punto di inflessione in una colonna si muove quando la cambia il fascio, e dove il fattore di quattro tra pinned e fisso di base rigidezze derivano da.

83 Questi sono esattamente i tipi di verità fisiche che Powell vuole ingegneri da capire; crediamo semplicemente che, per un matematico lettore inclinato, una derivazione analitica ben interpretata raggiunge che la comprensione più direttamente e più duramente di un parametrico studio numerico.

84 I due approcci sono complementari, non concorrenti. Un praticante che ha lavorato attraverso l'algebra una volta sarà riconoscere immediatamente la formula D-valore in una stampa del computer, saprà istintivamente se la posizione del punto di inflessione in un diagramma della colonna è plausibile, e capirà subito perché assegnare una rigidità astronomica di grandi dimensioni ad un elemento "rigido' avvelena la soluzione numerica.

85 L'esperimento informatico di Powell e il trattamento analitico qui sotto insegnano alla stessa verità fisica; differiscono solo nella percorso per raggiungerlo.

86 Il telaio considerato durante tutto è un n- piano, m-Bai telaio in continuo. I negozi sono numerati 1 (terra) a n (roof); piano i ha altezza h_i e baia j ha larghezza L_j. Column (i, j) has flexural stiffness $EI_{c,ij}$ and beam at level i, bay j has flexural stiffness $EI_{b,ij}$. Carico laterale $\{F_i\}$ agire a ogni livello del piano; il piano a livello i è il carico cumulativo sopra quel livello, $\hat{V}_i = \sum_{k=i}^{n} F_k$. Tutti i membri sono prismatici e l'analisi è elastica lineare. Le basi sono fissate se non diversamente specificato. Il singolo piano, cassa in mono-bay ($n = m = 1$, carico V sul tetto, altezza H, larghezza L) viene utilizzato in tutto il mondo come primario caso illustrativo; le generalizzazioni al telaio multipiano sono si nota esplicitamente quando il comportamento differisce in modo qualitativo - E' importante.



COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Studi di base

Domanda 1 — Analisi completa del telaio

Analizzare il telaio con travi e colonne deformabili. Identificare i gradi di libertà, scrivere la struttura del laterale rigidità, e ottenere la deriva del tetto Δ, momenti di fine colonna, e cesoie a colonna in termini di V, H, L, EI_c, EI_b. Per la generalizzazione multipiano, descrivere la matrice di rigidità struttura equazioni a motore.

Soluzione

Gradi di libertà. Per un telaio mono-storey, ci sono tre indipendenti DOFs: il tetto sway Δ e il due fascio - giunto goffrato rotazione θ_L, θ_R. Da simmetria $\theta_L = \theta_R \equiv \theta$, ridurre il sistema a due sconosciuti (Δ, θ).

Equazioni di difesa della pista. Per ogni colonna (lunghezza H, rotazione degli accordi $\psi = \Delta/H$, rotazione di fine θ, rotazione di fine 0 alla base fissa):

$$M_{\text{top}} = \frac{2EI_c}{H}(2\theta - 3\psi),$$
$$M_{\text{bot}} = \frac{2EI_c}{H}(\theta - 3\psi).$$

Per il fascio (senza rotazione di accordi, rotazione di fine $-\theta$ by antisimmetria):

$$M_{\text{beam}} = \frac{2EI_b}{L}(2\theta + \theta) = \frac{6EI_b}{L}\,\theta.$$

Joint equilibrium ($\sum M = 0$ at the beam level):

$$2M_{\text{top}} + M_{\text{beam}} = 0 \;\Rightarrow\; \theta = \frac{6EI_c\,\Delta/H^2}{8EI_c/H + 2EI_b/L}.$$

Lateral equilibrium ($\sum Q = V$, each column shear $Q = (M_{\text{top}} + M_{\text{bot}})/H$):

$$\boxed{\Delta = \frac{VH^3}{12EI_c}\cdot\frac{1+\rho/2}{1+\rho/6}, \qquad \rho = \frac{6EI_c\,L}{EI_b\,H}.}$$

Portacandele: $Q = V/2$ (antisimmetria). Momenti di fine colonna:

$$M_{\text{bot}} = \frac{VH}{4}\cdot\frac{1+\rho/3}{1+\rho/6}, \qquad M_{\text{top}} = \frac{VH}{4}\cdot\frac{1+2\rho/3}{1+\rho/6}.$$

Generalizzazione a più piani. Con pavimenti rigidi-diaframma, i DOF laterali sono i n piano spostamenti $\{u_i\}$. Ordinare questi come vettore, il globale matrice di rigidità laterale è tridiagonale:

$$\mathbf{K}_{\text{sway}} = \begin{bmatrix} k_1{+}k_2 & -k_2 & & \\ -k_2 & k_2{+}k_3 & -k_3 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -k_n & k_n \end{bmatrix},$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove k_i è la rigidità del piano a livello i (somma a tutti colonne, modificate per la flessibilità del fascio come sopra). Tende Storey $\delta_i = u_i - u_{i-1}$ sono ottenuti da $\mathbf{K}_{\text{sway}}\mathbf{u} = \mathbf{F}$.

Domanda 2 — Limite di costruzione della cinghia: travi infinitamente rigidi

Lasciamo perdere. $EI_b \to \infty$ (Figura) c). Dedicare la rigidità laterale, la deriva del tetto e il diagramma di momento della colonna. Spiegare la forma deflettata. Generalizzare n - I piani.

Soluzione

Con $EI_b \to \infty$, le rotazioni articolari sono soppresse ($\theta = 0$, $\rho \to \infty$). Ogni colonna si comporta come una *fisso... fisso* membro in doppio curvatura.
rigidità laterale e deriva:

$$k^{\infty} = \frac{24EI_c}{H^3}, \qquad \boxed{\Delta^{\infty} = \frac{VH^3}{24EI_c}.}$$

Momenti di colonna (equali superiore e inferiore, inflessione - Mezzo-altezza?

$$M_{\text{top}} = M_{\text{bot}} = \frac{VH}{4}.$$

Forma distratta. Il fascio si traduce come un corpo rigido senza rotazione. Entrambe le colonne deformano in doppia curvatura (S-shape) con un'inflessione punto esattamente a metà altezza. Questo è il *costruzione della cinghia* assunto, ampiamente usato in progettazione preliminare.
Multi-piano. La rigidità del piano a livello i è la somma di tutti m+1 colonne:

$$k_i = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{12\,EI_{c,ij}}{h_i^3}.$$

Ogni colonna porta la tomaia proporzionale alla sua rigidità; il diagramma di flessione-momento in ogni colonna è lineare con punto di inflessione a metà altezza, indipendentemente dal numero dei piani. Per un telaio uniforme sotto un unico carico del tetto V, ogni piano deriva per lo stesso importo $\delta = V/k$, dando una lineare variabile profilo di spostamento.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Domanda 3 — Limite di flessibilità del fascio e modalità cantilever

Lasciamo perdere. $EI_c \to \infty$ per piegare, ma mantenere la rigidità assiale finita EA_c (Figura) b). Mostra che la cornice ora deflette in un *Cantilever flessore* modalità guidato da deformazione assiale differenziale delle colonne. Dedicare la deriva del tetto corrispondente. Discutere quando questa modalità diventa significativa rispetto al modalità di costruzione della cinghia.

Soluzione

Contributo di flessione del fascio (singolo piano). Quando le colonne sono rigidamente rigide, non si verifica una piegatura della colonna. Rotture comuni θ sono controllati interamente dalla flessibilità del fascio. Impostazione $EI_c \to \infty$ nell'equazione di equilibrio congiunto dà

$$\theta = \frac{V H^2 L}{12\, EI_b},$$

e la deriva dalla rotazione congiunta da sola («beam-flexibility drift»):

$$\Delta^{\text{beam}} = \theta H = \frac{V H^3}{12\, EI_b / L \cdot H^2}.$$

Modalità Cantilever (assiale). Per un telaio multipiano con colonne rigide flessora, la cornice si rocciosa sulla sua base come un cantilever verticale. La rigidità flessorale equivalente del sistema a colonna è

$$EI_{\text{eq}} = \sum_j EA_{c,j}\, s_j^2,$$

dove s_j è la distanza della colonna j dall'asse centroidale. La deriva del tetto è quindi identica a quella di un cantilever:

$$\boxed{\Delta^{\text{ax}} = \frac{V H^3}{3\, EI_{\text{eq}}}.}$$

Quando importa questa modalità? Il rapporto tra la deriva assiale e quella della costruzione di taglio è approssimativamente

$$\frac{\Delta^{\text{ax}}}{\Delta^{\infty}} \propto \frac{I_c\, H^2}{A_c\, s^2},$$

che cresce con cornice *snellezza* H/B dove B è il larghezza della baia. Per cornici a bassa velocità ($H/B < 3$) la modalità assiale è trascurabile. Per telai ad alta velocità ($H/B > 6$–8) può contribuire 30–50 % di deriva totale e deve essere esplicitamente controllato aumentare le aree della colonna o aggiungere un nucleo rigido.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Domanda 4 — Superposizione dei componenti della deriva

Mostrare che la deriva totale può essere approssimativamente decomposta come

$$\Delta \approx \Delta^{\text{col}} + \Delta^{\text{beam}} + \Delta^{\text{ax}},$$

spiega perché questa decomposizione è approssimativa piuttosto che esatta, e discutere il suo valore pratico.

Soluzione

Tre fonti. La deriva completa dalla questione 1 può essere scritto al primo ordine come:

(i) **Column bending** Δ^{col}: drift when the il fascio è rigido (questione 2).
(ii) **Beam flexibility** Δ^{beam}: additional deriva dalla rotazione articolare quando le colonne sono rigide (questione 3).
(iii) **Column axial** Δ^{ax}: rocking mode from allungamento della colonna differenziale (questione 3).

L'aggiunta di questi tre dà la formula approssimativa; il risultato esatto da Questioni 1 mostra che le tre fonti interagiscono attraverso la giunzione equilibrio, producendo termini di cross-coupling che la semplice somma ignora. Quantitativamente, l'errore nell'approssimazione additiva è tipicamente 5–15 % per le proporzioni pratiche del telaio.

Perche' non e' esatto. La flessione della colonna produce rotazioni articolari che aumentano i momenti di trave; la flessibilità del fascio riduce i momenti di colonna e sposta l'inflessione punto; deformazione assiale leggermente cambia l'altezza della colonna effettiva. Queste interazioni sono catturate esattamente solo dalla rigidità totale soluzione.

Valore pratico. Nonostante l'approssimazione, la decomposizione è il più utile strumento diagnostico disponibile. Identifichi immediatamente quale fonte domina e quindi dove si deve dirigere lo sforzo di irrigidazione: irruzione delle colonne ridurre Δ^{col}, irrigidiscono le travi per ridurre Δ^{beam}, increase column areas or add a shear wall to reduce Δ^{ax}. Nessun output del computer, tuttavia dettagliato, trasmette questo fisico comprensione direttamente.

Domanda 5 — Controllo dell'equilibrio

Utilizzare diagrammi corpo libero per verificare che: (a) la somma delle cesoie di colonna uguale al carico laterale applicato; (b) le cesoie della colonna sono coerenti con i momenti di fine colonna; (c) l'equilibrio del momento comune è soddisfatto al raggio - collegamenti di goffra. Generalizzare una cornice multipiano.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Soluzione

(a) equilibrio orizzontale globale. Un taglio orizzontale attraverso il telaio a qualsiasi livello rivela che somma delle cesoie a colonna deve pari alla forza laterale totale sopra quella Taglia. Per il telaio a un piano: $Q_L + Q_R = V$. Da antisimmetria $Q_L = Q_R = V/2$. Per il telaio multipiano in piano i: $\sum_j Q_{ij} = \hat{V}_i = \sum_{k \geq i} F_k$. ✓
(b) Momento - consistenza della cinghia. Isolare una colonna di altezza h come corpo libero:

$$Q = \frac{M_{\text{top}} + M_{\text{bot}}}{h}.$$

Sostituire i momenti della Domanda 1 conferma $Q = V/2$ per entrambe le colonne. ✓
e) equilibrio di momento comune. Al raggio - giunto di goffra (livello tetto, colonna sinistra):

$$M_{\text{col,top}} + M_{\text{beam,left}} = 0,$$

- Si'. il momento superiore della colonna deve essere uguale e di fronte al fascio - E' il momento finale in quel locale. Sostituire dalla questione 1: $M_{\text{col,top}} + \frac{6EI_b}{L}\theta = 0$, which is satisfied per costruzione dall'equilibrio congiunto di declivio-difesa equazione. ✓
Equilibrio congiunto multipiano. In un giunto interno (piano i, riga della colonna j):

$$M_{ij}^{\text{col,top}} + M_{i+1,j}^{\text{col,bot}} + M_{b,ij}^{\text{left}} + M_{b,ij}^{\text{right}} = 0.$$

Questo deve essere verificato in ogni giunto; qualsiasi violazione indica una errore di modellazione. I controlli di equilibrio di questo tipo sono lo strumento più affidabile per rilevare errori in un modello di computer, e Powell (Powell, 2008) giustamente li identifica come una capacità ingegneristica indispensabile.

Domanda 6 — Verifica della geometria diretta

Per il limite di costruzione della cinghia (questione 2), verificare la deriva utilizzando $\delta = PL^3/12EI$ per una colonna fissa. Per il contributo della flessibilità del fascio (questione 3), utilizzare il fascio formula di rotazione finale $\theta = ML/6EI_b$ per stimare l'ulteriore - La deriva. Mostra come questi si combinano per dare il valore D-approssimazione.

Soluzione

La deriva della costruzione di un cesoio dalla geometria diretta. Una colonna fissa di altezza H sotto la copertura $Q = V/2$ sviluppa un punto di inflessione a metà

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dell'altezza. Ogni metà si comporta come un cantilever fisso di lunghezza $H/2$ sotto carico Q:

$$\Delta = 2 \times \frac{Q(H/2)^3}{3EI_c} = \frac{VH^3}{24EI_c},$$

conferma della domanda 2 esattamente. ✓

Correzione della flessione del fascio. Il fascio, piegato antisimmetrici sotto fine uguale e opposto momenti M, ha rotazione finale $\theta = ML/6EI_b$. Questa rotazione articolare aggiunge alla deriva θH alla colonna-in attesa - La deriva. Impostazione $M = M_{\text{top}}$ dalla soluzione completa ed esprimendo il risultato come fattore di correzione sulla deriva del fascio rigido dà *Valore D* per colonna (i, j):

$$D_{ij} = \alpha_{ij} \cdot \frac{12\,EI_{c,ij}}{h_i^3}, \qquad \alpha_{ij} = \frac{K_{c,ij}}{K_{c,ij} + \frac{1}{2}(K_{b,ij}^{\text{above}} + K_{b,ij}^{\text{below}})},$$

con $K_c = EI_c/h$, $K_b = EI_b/L$. La deriva del piano, compresa la flessibilità del fascio, è allora:

$$\boxed{\delta_i = \frac{\hat{V}_i}{\sum_j D_{ij}}.}$$

Il metodo D-valore recupera il risultato esatto quando $\alpha = 1$ (trave rigida) e fornisce un'approssimazione affidabile (tipico entro 5-10 % del risultato di rigidità-matrice) per tutti i rapporti di rigidità pratici.

Domanda 7 — Rotture e momenti di fine del fascio

Data la deriva del tetto Δ da Questioni 1, calcolare il giunto rotazione θ e verificare che i momenti di fine del fascio siano calcolati da la rigidità del fascio concorda con quelli ottenuti dall'analisi globale. Generalizzare un telaio multipiano e indicare l'equilibrio congiunto equazione in un nodo interno generale.

Soluzione

Cornice a singolo piano. Dall'equilibrio congiunto derivato in Question 1:

$$\theta = \frac{6EI_c\,\Delta/H^2}{8EI_c/H + 2EI_b/L}.$$

Il momento finale del fascio (curvamento antisimmetrici, rotazione di fine $-\theta$):

$$M_{\text{beam}} = \frac{6EI_b}{L}\,\theta.$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Sostituire θ e poi Δ da Questioni 1 recupera M_{top} exactly. ✓
Telaio a più piani. In un comune interno generale (piano i, riga della colonna j), il l'equazione di equilibrio comune è:

$$\left(\frac{4EI_{c,ij}}{h_i}+\frac{4EI_{c,i+1,j}}{h_{i+1}}+\frac{4EI_{b,ij}}{L_j}+\frac{4EI_{b,i,j-1}}{L_{j-1}}\right)\theta_{ij} = \text{carry-over terms} + \text{chord-rotation terms}.$$

I termini di riporto derivano dalle rotazioni alle giunzioni adiacenti; i termini di rotazione degli accordi sono proporzionali alle deriva interstorey δ_i and δ_{i+1}. Assemblare questa equazione ad ogni giunto e accoppiarla con il le equazioni di equilibrio dei piani producono il sistema completo di rigidità risolto in Domanda 1.

Ulteriori studi

Domanda A1 — Basi fissi e perni

Per il telaio a un piano con una trave rigida, confrontare la laterale rigidità con basi a colonna fissa e pinna. Dimostra analiticamente che il telaio della base pinned è esattamente quattro volte più flessibile. Disegnare e interpretare i diagrammi di flessione-momento per entrambi i casi. Generalizzare una cornice multipiano e discutere come la base condizione si propaga nei piani superiori.

Soluzione

Basi fissi, trave rigide. Ogni colonna è fissata - Fissata; dalla Domanda 2:

$$k^{\text{fixed}} = \frac{24EI_c}{H^3}, \qquad \Delta^{\text{fixed}} = \frac{VH^3}{24EI_c}.$$

Basi a spillo, fascio rigido. Ogni colonna è fissata alla base e fissata in alto (senza rotazione, raggio rigido): un cantilever fisso-pinto. Formula standard per una colonna fissata in alto e pinned alla base:

$$k_{\text{col}}^{\text{pinned}} = \frac{3EI_c}{H^3}, \qquad k^{\text{pinned}} = \frac{6EI_c}{H^3}, \qquad \Delta^{\text{pinned}} = \frac{VH^3}{6EI_c}.$$

Rapporto di flessibilità:

$$\frac{\Delta^{\text{pinned}}}{\Delta^{\text{fixed}}} = \frac{VH^3/6EI_c}{VH^3/24EI_c} = 4. \qquad ✓$$

Il rapporto di 4 segue direttamente dal rapporto della rigidità coefficienti: $12EI/H^3$ (fisso... fisso) contro $3EI/H^3$ (fisso-pinned).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Diagrammi di prostituzione. Con basi fisse entrambe le colonne portano momenti di altezza e fondo uguali $M = VH/4$ in doppia curvatura, con punto di inflessione a - A metà altezza. Con basi a spillo il momento è zero alla base, si alza linearmente to $M = VH/2$ al livello del fascio, e la colonna si deforma in singolo curvatura senza punto di inflessione. Il momento di chiusura del fascio è due volte più grande con basi a spillo.

Telaio a più piani. Il fattore 4 si applica solo al *primo piano*; tomaia piani sono delimitati superiore e inferiore da travi e rimangono fissi - fisso indipendentemente dalla condizione di base. Tuttavia, la deriva del primo piano più grande sposta la domanda di momento i travi del primo piano: con basi a spillo queste travi devono resistere due volte il momento finale della cassa a base fissa, che può governare design del fascio in telai a bassa velocità.

Domanda A2 — Effetto delle varie dimensioni dei membri

Discutere come il profilo della deriva e la distribuzione del momento della colonna cambiano quando (a) dimensioni della colonna diminuiscono nei piani superiori, e (b) dimensioni del fascio varia a piano. Identificare il rapporto di rigidità $\rho = EI_b H/(EI_c L)$ come il parametro di governo e descrivere il suo comportamento limitante.

Soluzione

Parametro di governo. Da una domanda 1, la deriva completa è:

$$\Delta = \frac{VH^3}{12EI_c} \cdot \frac{1+\rho/2}{1+\rho/6}, \qquad \rho = \frac{6EI_c\,L}{EI_b\,H}.$$

Limiti di limite	ρ	Drift	Modello del momento della colonna
Trave rigido	$\rho \to 0$	$VH^3/24EI_c$	Double curvature, $M_{\text{top}} = M_{\text{bot}}$
Colonna rigida	$\rho \to \infty$	$VH^3L/(12EI_bH^2)$	Single curvature, $M_{\text{bot}} = VH/2$
Pratico	$\rho \approx 1$–6	Intermedio	Mista, IP sopra l'altezza media

Dimensioni variabili delle colonne (multi-storey). Se le dimensioni della colonna diminuiscono più velocemente nei piani superiori rispetto al piano taglio diminuzioni, piani superiori diventano relativamente più flessibili e il profilo della deriva è - *E' un po' troppo pesante.*. Un telaio ben proporzionato mantiene la deriva approssimativamente uniforme rapporti δ_i/h_i a tutti i livelli.

Posizione del punto di inflessione. Il punto di inflessione nella colonna (i, j) sorge sopra l'altezza di metà, quando il fascio sottostante è più rigido del raggio sopra (o quando si avvicina una base a spillo), e scende verso l'altezza media, mentre i raggi diventano più quasi uguale. Il tracciamento della posizione del punto di inflessione è un affidabile qualitativo controllare la plausibilità di un diagramma del momento del computer.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Domanda A3 — Zone di estremità rigide a fascio - collegamenti di colonna

Aggiungere zone di estremità rigide di lunghezza $a = d_c/2$ a ogni estremità del fascio, contabilità per la larghezza della colonna finita d_c. Mostra come l'efficace span trasparente $L' = L - d_c$ modifiche coefficiente di rigidità del fascio, il valore D e la deriva del piano. La correzione è più significativa in cornici alte?

Soluzione

Coefficienti di rigidità modificati. Rimozione dell'intera durata L con la chiara sculacciata $L' = L - d_c$ in tutte le espressioni di rigidità del fascio:

$$K_b' = \frac{EI_b}{L'} > K_b = \frac{EI_b}{L},$$

dare un più grande α', un valore D più grande e quindi una *più piccolo* deriva:

$$\delta' = \frac{\hat{V}_i}{\sum_j D_{ij}'} < \delta.$$

Per una tipica struttura in acciaio con $d_c \approx 0.4$ m e $L = 6$ m, la correzione è $L'/L = 5.6/6 \approx 0.93$, dando $Kb'/KB \approx 1.07$ (7 % fascio più rigido) e una riduzione della deriva circa 5–8 %.

Più significativo in cornici alte. In cornici alte la correzione dell'altezza della colonna è proporzionalmente più importante. If $h = 3.5$ m e $d_b = 0.5$ m (profondità del fascio), la colonna chiara altezza è $h' = 3.0$ m e il rapporto di rigidità della colonna è $(h/h')^3 = (3.5/3.0)^3 \approx 1.59$ — a 59 % aumento rigidità di piegatura della colonna che non può essere ignorata in un'analisi seria. Ignorando le zone del pannello in un telaio multipiano tipicamente sovrapredizioni deriva laterale da 15–30 %.

Domanda A4 — Colonne astronomiche rigide: precisione numerica

Set $EI_c = \alpha\, EI_b$ con $\alpha \gg 1$ simulare rigidi colonne. Mostra come il numero di condizione della matrice rigidità cresce con α, stimare la perdita di precisione numerica e identificare la soglia pratica oltre cui i risultati diventano inaffidabili.

Soluzione

Numero di condizioni. Il numero di condizione delle scale matrice montate della rigidità $\kappa(\mathbf{K}) \sim \alpha = EI_c/EI_b$. Per $\alpha = 10^n$, circa n cifre decimali di precisione sono persi dalla soluzione. In aritmetica standard a doppia precisione (circa 15 significativo cifre), la precisione utilizzabile è ridotta a $15 - n$ cifre.

Ricupero della forza. Anche quando gli spostamenti rimangono accettabilmente

COPIA DI REVISIONE

accurati, forze nelle membro molto rigido sono calcolati come rigidità × dislocamento: un numero grande moltiplicato per un numero molto piccolo, che è un *cancellazione catastrofica* in aritmetica a punto galleggiante. Le forze nei membri flessibili (soci) sono generalmente affidabili; le forze nelle colonne astronomiche rigide non lo sono.
Soglia pratica. Rati fino a $\alpha \approx 10^3$–10^4 sono sicuri per standard risolutori a doppia precisione in cornici fino a 50 piani. Oltre a questo, il rimedio preferito è rigidi vincoli di collegamento Discussioni del Parlamento europeo A5), non estesa precisione.
Interpretazione fisica. Anche prima di guasto numerico, facendo colonne 100 o più volte più rigidi dei raggi produce risultati fisicamente indistinguibile dal vero limite di rigidità-colonna; l'ulteriore la rigidità non ha alcun effetto pratico sui momenti di deriva o raggio. Questo è il regime in cui il modello di costruzione della cinghiale è un descrizione essenzialmente esatta del telaio.

Domanda A5 — Limiti di collegamento rigidi: valori P, M, V precisi

Sostituire le colonne astronomiche rigide della Domanda A4 con *vincoli di collegamento rigidi* (maestro-schiavi cinematici). Spiegare perché questo approccio è sia numericamente stabile e fisicamente esatto, e perché la P, M, Valori V calcolati nel I membri vincolati differiscono da quelli calcolati in interrogazione A4. Identificare il diaframma rigido come la più comune caso speciale.

Soluzione

Vincolo cinetico. Un legame rigido tra il nodo master A e nodo schiavo B esecuzioni

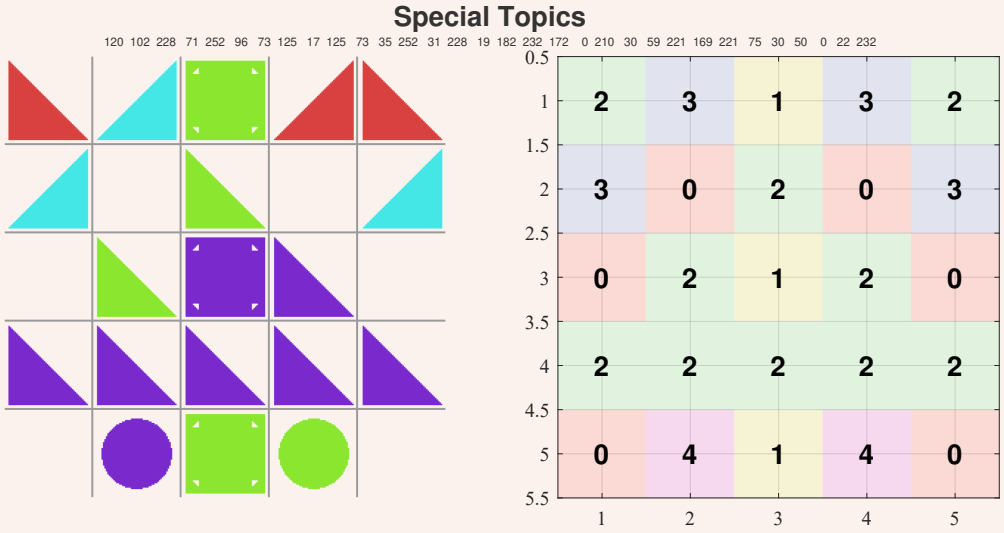
$$\mathbf{u}_B = \mathbf{T}_{AB}\,\mathbf{u}_A,$$

dove $\mathbf{T}_{AB}$ è la trasformazione rigida del corpo. I DOF schiavi vengono eliminati dal sistema globale; vincolo le forze sono recuperate dall'equilibrio del *adiacente adiacente adiacente membri flessibili* da solo — nessuna grande rigidità appare ovunque il calcolo. Il risultato è numericamente esatto e completamente indipendente dal rapporto di rigidità.
Perche' P? M, I valori V differiscono dalla Domanda A4. Nel modello di grande spessore le forze della colonna sono calcolate come $F = K_c\,\delta$, un prodotto di un numero grande e piccolo, convergenza al valore corretto solo come $\alpha \to \infty$ e la perdita catastrofica di sofferenza in precisione finita. Con un collegamento rigido, la forza di vincolo è l'esatta statica reazione necessaria per far rispettare la compatibilità, calcolata direttamente da equilibrio dei membri flessibili collegati. Quando vengono utilizzati vincoli di collegamento rigidi, il computer segnala *zero* P interno, M, V nell'elemento a costrizione (da qui non comporta deformazione), e tutte le forze appaiono come vincolo reazioni — fisicamente esatti e numericamente stabili.
Diaframma rigido. Il diaframma rigido del pavimento, utilizzato praticamente in

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

ogni multipiano modello di costruzione, è proprio un insieme di vincoli rigidi di collegamento che tutti i nodi a un determinato livello del pavimento subiscono lo stesso traduzione orizzontale più una rotazione rigida del corpo. Le forze diaframma in-plano (forze assiali, cesoie) sono recuperate come reazioni di costrizione: esatto, ben climatizzato e indipendente della rigidità di lastra assegnata nel modello. Lo stesso principio dovrebbe essere applicato quando un elemento strutturale è destinato ad essere veramente rigido: modellarlo con vincoli, non con rigidità irrealisticamente grandi.



Identicona specifica del capitolo, chapter H

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 47

Calcolo delle variazioni in meccanica: il quadro di Euler–Lagrange

Abstract

Questo capitolo sviluppa il quadro teorico dei metodi variazionali della meccanica, fornendo una base per gli approcci basati sull'energia discussi nel prossimo capitolo.

Inizia con un'Introduzione che contrasta gli approcci newtoniani e lagrangiani all'analisi strutturale, sottolineando il ruolo dei principi variazionali nella meccanica. La sezione Euler introduce il calcolo delle variazioni, definendo le funzionalità e derivando le equazioni Euler-Lagrange, che sono centrali sia per statici che per dinamiche. La distinzione tra la forma forte (equazioni differenziali) e la forma debole (esposizioni integrate) è evidenziata, insieme al loro significato nella meccanica.

Il capitolo esplora poi le condizioni di confine, distinguendo tra le condizioni essenziali e naturali dei confini e le loro implicazioni nelle formulazioni variazionali.

Il Principio dell'Energia Potenziale Totale è introdotto come una pietra angolare per i metodi basati sull'energia, che porta al principio del lavoro virtuale. Infine, viene presentato il Principio di Hamilton, estendendo l'approccio variazionale ai sistemi dinamici, seguito da una discussione dei principi variazionali multicampo, compresa la formulazione Hu-Washizu.

Mentre questo capitolo si disegna ampiamente (Reddy, 2017; Sokolnikoff, 1956; Pilkey e Wunderlich, 1994), sono stati fatti sforzi per unificare la notazione di coerenza in questo e nelle successive discussioni; il materiale è destinato ai lettori con un forte interesse matematico nella meccanica strutturale; i soggetti interessati esclusivamente alle domande possono procedere direttamente al prossimo capitolo.

47.1 Introduzione 1680
47.2 Euler 1680
47.2.1 Pregiudiziale 1680
47.2.2 Forma differenziale di $\delta\Pi$ . . 1682
47.2.3 Equazione Euler 1683
47.2.4 $\delta\Pi$ 1684
47.2.5 Osservazioni 1685
47.2.6 Condizioni di bovino 1685
47.3 Principio di energia potenziale totale 1689
47.4 Hamilton 1693
47.4.1 Dinamica; Euler/Lagrange . 1693
47.4.2 Ex 47.3: Hamilton 1697
47.5 Principio generale di variazione Hu-Washizu 1700
47.6 diagrammi "Pseudo-Tonti' 1704
47.6.1 Il principio di D'Alembert . . 1704
47.6.2 Equazioni di Hamilton . . . 1704
47.6.3 Equazioni di Lagrange . . . 1705

COPIA DI REVISIONE

47.1 Introduzione

1 L'analisi delle strutture finora è stata realizzata attraverso la soluzione di problemi specifici del valore limite espressi in termini di equazioni differenziali parziali.

2 Tuttavia, l'ingegneria strutturale (e la meccanica) può essere avvicinata da due diversi angoli:

Newton approccio, equilibrio di slancio (equilibrio).

Lagrangian approccio: equilibrio di energia (termodinamica).

3 Il secondo approccio, sfruttando i principi minimi che caratterizzano gli stati di equilibrio dei corpi elastici, è sviluppato in questo capitolo. Si tratta di un approccio basato sull'uso di metodi diretti nel calcolo delle variazioni proposte per la prima volta da Rayleigh e W. Ritz e poi da R. Courant, B. Galerkin ed altri.

4 Questo capitolo sarà:

1. Fornire un rigoroso quadro per i metodi variazionali che sono alla base dei cosiddetti metodi "energy'.
2. Riunire i vari "metodo energetico" e mostrare che sono tutti (essenzialmente) gli stessi.
3. Sviluppare il *principio di spostamento virtuale* come preludio al metodo degli elementi finiti.
4. Mostra la dualità tra la cosiddetta forma forte (equazione differenziale) e la forma debole (soddisfare un principio in senso medio).

47.2 Euler

47.2.1 Pregiudiziale

5 Il calcolo differenziale (DC) comporta una funzione di una o più variabili, mentre il calcolo variazionale (VC) comporta la funzione di un'operazione, o di una funzionalità.

6 Il problema fondamentale del calcolo della variazione, d'altra parte, è quello di trovare una funzione $u(x)$ tale

$$\Pi(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x))dx \tag{47.1}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

e che è stazionario

$$\delta\Pi = 0$$

dove δ indica il *operatore di variazione* (da non confondere con il derivato)

7 Definizione $u(x)$ per essere una funzione x nell'intervallo (a, b)e F essere una funzione reale nota (come la densità di energia), e definiamo *dominio* di una funzione come la raccolta delle funzioni ammissibili appartenenti a una classe di funzioni nello spazio funzionale piuttosto che in una regione nello spazio coordinato (come è il caso per una funzione).

8 Cercare la funzione $u(x)$ che si artizza Π. Così, lascia $\tilde{u}(x)$ essere una famiglia di sentieri vicini della funzione estremizzante $u(x)$ e supponga che ai punti finali $x = a, b$ coincidono.

9 Definizione $u(\tilde{x})$ come somma del percorso di estremizzazione e qualche variazione arbitraria, Fig. 47.1.

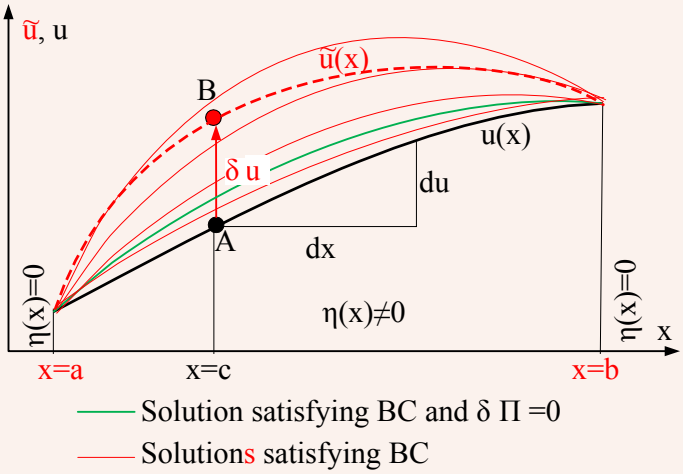


Figura 47.1: Operatori variabili e differenziali

$$\tilde{u}(x, \varepsilon) = u(x) + \varepsilon\eta(x) = u(x) + \delta u(x) \tag{47.2}$$

dove ε è un piccolo parametro, e $\delta u(x)$ è il *variazione* of $u(x)$

$$\begin{aligned}\delta u &= \tilde{u}(x, \varepsilon) - u(x)\\ &= \varepsilon\eta(x)\end{aligned}$$

e $\eta(x)$ è due volte differenziabile, ha ampiezza non definita ma è tale che $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Nota: $\tilde{u}$ coincide con u if $\varepsilon = 0$.

10 Nota:

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

- La condizione necessaria per estremizzare un valore in DC è che il primo derivato sia pari a zero, e che la prima variazione sia zero in VC.
- Il risultato dell'estremizzazione è una singola variabile x a DC, e $u(x)$ in VC.

11 L'operatore variazionale δ è analogo a quello δ associato a spostamento virtuale più tardi.

12 Si può dimostrare che gli operatori di variazione e derivazione sono commutativi

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\delta u) &= \tilde{u}'(x,\varepsilon) - u'(x)\\ \delta u' &= \tilde{u}'(x,\varepsilon) - u'(x)\end{aligned}\right\} \frac{d}{dx}(\delta u) = \delta\left(\frac{du}{dx}\right)$$

13 Operatore variabile δ e l'operatore del calcolo differenziale d può essere usato allo stesso modo, cioè.

$$\begin{aligned}\delta(u')^2 &= 2u'\delta u'\\ \delta(u+v) &= \delta u + \delta v\\ \delta\left(\int u dx\right) &= \int(\delta u)dx\\ \delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y\end{aligned}$$

però, hanno significati chiaramente diversi. du è associato a un punto vicino ad una distanza dx, tuttavia δu è un piccolo cambiamento arbitrario nella funzione u per un dato x (non c'è nessun associato δx).

14 Per i confini dove u è specificato, la sua variazione deve essere zero ed è arbitraria altrove. La variazione δu of u si dice che subisca un cambiamento virtuale.

47.2.2 Forma differenziale di $\delta\Pi$

15 Inserisca la formulazione variazionale ($\delta\Pi = 0$) in uno differenziale $\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = 0$ e usare il calcolo di base.

16 Definizione $\Phi(\varepsilon)$ as

$$\Phi(\varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \Pi(u + \varepsilon\eta(x)) = \int_a^b F(x, u(x) + \varepsilon\eta(x), u'(x) + \varepsilon\eta'(x))dx \tag{47.3}$$

Nota che questo sarà indicato come *forma debole* ('weak" perché ha bisogno di derivato di un ordine minore).

17 Da $\tilde{u}(x) \to u(x)$ as $\varepsilon \to 0$, la condizione necessaria per Π essere un estremismo

$$\left.\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

18 Da Eq. 47.2 $\tilde{u} = u + \varepsilon\eta$e $\tilde{u(x)}' = u'(x) + \varepsilon\eta'(x)$, e applicando la regola della catena

$$\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{u}} \frac{d\tilde{u}}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{u}'} \frac{d\tilde{u}'}{d\varepsilon} \right) dx = \int_a^b \left(\eta \frac{\partial F}{\partial \tilde{u}} + \eta' \frac{\partial F}{\partial \tilde{u}'} \right) dx$$

per $\varepsilon = 0$, $\tilde{u} = u$, così

$$\left. \frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left(\eta \frac{\partial F}{\partial u} + \eta' \frac{\partial F}{\partial u'} \right) dx = 0 \tag{47.4}$$

19 Integrazione per parte ($\int f g' dx = fg - \int f' g dx$) del secondo termine porta a

$$\int_a^b \left(\eta' \frac{\partial F}{\partial u'} \right) dx = \eta \frac{\partial F}{\partial u'} \Big|_a^b - \int_a^b \eta(x) \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u'} \right) dx$$

20 Sostituire,

$$\left. \frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \underbrace{\int_a^b \eta(x) \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u'} \right]}_{\text{I } (x \in [a,b])} + \underbrace{\eta(x) \frac{\partial F}{\partial u'} \Big|_a^b}_{\text{II } (x = a, b)} = 0 \tag{47.5}$$

21 Ogni termine deve essere zero.

1. La prima parte ci darà *Equazione Euler*.
2. La seconda parte ci permetterà di definire *condizioni di confine*.

47.2.3 Equazione Euler

22 Lemma fondamentale del calcolo della variazione afferma che per il continuo $\Psi(x)$ in $a \le x \le b$, e con funzione continua arbitraria $\eta(x)$ che svanisce a e bAllora

$$\int_a^b \eta(x) \Psi(x) dx = 0 \Leftrightarrow \Psi(x) = 0$$

Così, parte I in Eq. 47.5 produce la Forme Forte.

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u'} = 0 \quad \text{in} \quad a < x < b \tag{47.6}$$

23 Questa equazione differenziale è chiamata *Equazione Euler-Lagrange* associati a Π ed è una condizione necessaria per $u(x)$ per estremizzare Π.

24 Si noti che la forma debole è in termini di u' (Eq. 47.3) e la forma forte in termini di u'' Eq. 47.6.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

25 L'equazione precedente può essere generalizzata per una funzione Π che dipende da due variabili di campo, $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$

$$\Pi = \int\int F(x, y, u, v, u_{,x}, u_{,y}, v_{,x}, v_{,y}, \cdots, v_{,yy}) dx dy \tag{47.7}$$

e ci sarebbero altrettante equazioni Euler come variabili di campo dipendenti

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u} - \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial u_{,x}} - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial u_{,y}} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{\partial F}{\partial u_{,xx}} + \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial F}{\partial u_{,xy}} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\dfrac{\partial F}{\partial u_{,yy}} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial v} - \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial v_{,x}} - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial v_{,y}} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{\partial F}{\partial v_{,xx}} + \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial F}{\partial v_{,xy}} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\dfrac{\partial F}{\partial v_{,yy}} = 0 \end{cases} \tag{47.8}$$

26 Nota che il Funzionale e le corrispondenti Equazioni Euler, Eq. 47.1 e 47.6O Eq. 47.7 e 47.8 descrivere lo stesso problema.

27 Le equazioni di Euler corrispondono solitamente all'equazione differenziale governante e sono indicate come la forma forte (o forma classica).

28 La funzione è indicata come la forma debole (o soluzione generalizzata).

29 In Meccanica, l'equilibrio viene applicato in senso medio sul corpo (e la variabile di campo è differenziata m i tempi nella forma debole, e $2m$ tempi nella forma forte) Eq. 47.3 *vs* Eq. 47.6.

30 Si può dimostrare che nel principio di spostamenti virtuali, le equazioni Euler sono le equità di equilibrio, mentre nel principio delle forze virtuali sono le ed equazione di compatibilità.

31 Le equazioni di Euler sono equazione differenziale che non possono essere sempre risolte con metodi esatti. Un metodo alternativo consiste nel bypassare le equazioni di Euler e andare direttamente alla dichiarazione variazionale del problema alla soluzione delle equazione di Euller.

32 Si vedrà che la formulazione Elemento Finito si basa sulla forma debole, mentre la formulazione delle Differenze Finite è basata sulla forma forte.

47.2.4 $\delta\Pi$

33 Nella sezione precedente abbiamo appena mostrato che $d\Phi(\varepsilon)/d\varepsilon$ porta a *Euler-Lagrange* equazione (Eq. 47.5)

$$\left.\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \underbrace{\int_a^b \eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\right]}_{\text{I } (x \in [a,b])} + \underbrace{\eta(x)\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b}_{\text{II } (x = a, b)} = 0$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Dobbiamo ancora definire $\delta\Pi$.

34 La prima variazione di un'espressione funzionale è

$$\left.\begin{aligned}\delta F &= \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\delta u' \\ \delta\Pi &= \int_a^b \delta F dx\end{aligned}\right\} \delta\Pi = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'\delta u'}\right) dx \tag{47.9}$$

Integrazione per parti (Eq. R.3) del secondo termine (come nel caso di Eq. 47.4) rendimenti

$$\delta\Pi = \int_a^b \delta u \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\right) dx \tag{47.10}$$

47.2.5 Osservazioni

35 Ho appena dimostrato che trovare il valore stazionario di Π impostando $\delta\Pi = 0$ è equivalente a trovare il valore estremico di Π impostando $\left.\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$ pari a zero.

36 Analogamente, si può dimostrare che come con i derivati secondari del calcolo, la seconda variazione $\delta^2\Pi$ può essere utilizzato per caratterizzare l'estremità come minimo o massimo.

37 Un'osservazione importante è che la formulazione variazionale è scalare, mentre quella euleriana è vettoriale.

47.2.6 Condizioni di bovino

38 Rivisitazione della seconda parte di Eq. 47.5,

$$\left.\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \underbrace{\int_a^b \eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\right]}_{\text{I } (x\in[a,b])} + \underbrace{\eta(x)\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b}_{\text{II } (x=a,b)} = 0$$

ci permette di definire le condizioni limite, Fig. 47.1.

$$\underbrace{\underbrace{\eta(x)}_{\text{Ess.}}\ \underbrace{\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b}_{\text{Nat.}}}_{\text{Boundary Cond.}} = 0 \tag{47.11}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Questo può essere raggiunto attraverso le seguenti combinazioni

$$\begin{array}{rcrcll} \eta(a) = 0 & \text{and} & \eta(b) & = 0 & \text{Essential} & \Gamma_u \\ \eta(a) = 0 & \text{and} & \frac{\partial F}{\partial u'}(b) & = 0 & \text{Mixed} & \Gamma_u \cup \Gamma_t \\ \frac{\partial F}{\partial u'}(a) = 0 & \text{and} & \eta(b) & = 0 & \text{Mixed} & \Gamma_u \cup \Gamma_t \\ \frac{\partial F}{\partial u'}(a) = 0 & \text{and} & \frac{\partial F}{\partial u'}(b) & = 0 & \text{Natural} & \Gamma_t \end{array}$$

[39] Generalizzare, per un problema con, una variabile di campo, in cui il più alto derivato nell'equazione differenziale del governo è dell'ordine $2m$ (o semplicemente) m nella corrispondente funzionalità), poi abbiamo, Fig. 47.2,

Essenziale (o condizioni di confine forzate o geometriche) (perché era essenziale per la derivazione dell'equazione Euler) se $\eta(a)$ or $\eta(b)$ =0. Condizioni di confine essenziali, comportano derivati dell'ordine zero (la variabile campo stesso) attraverso m-1. Matematicamente, questo corrisponde a *Problemi di valore limite di arricchimento*.

Naturali (o statiche): se si lascia η arbitraria, è necessario imporre $\frac{\partial F}{\partial u'} = 0$ in $x = a$ oppure b. Le condizioni al contorno naturali coinvolgono derivate di ordine m e superiore. Questa condizione è implicita nel soddisfacimento dell'enunciato variazionale, ma non è dichiarata esplicitamente nel funzionale. Matematicamente, ciò corrisponde ai *problemi ai valori al contorno di Neumann*.

Mista Boundary-Value i problemi, sono quelli in cui le condizioni di confine essenziali e naturali vengono specificate su porzioni complementari del limite (come ad esempio Γ_u e Γ_t).

Problematiche	Membro assiale Carico distribuito	Membro della Flexural Carico distribuito
Differential Equation	$AE\frac{d^2u}{dx^2} - q = 0$	$EI\frac{d^4w}{dx^4} - q = 0$
m	1	2
Essential B.C. $[0, m-1]$	u	$w, \frac{dw}{dx}$
Natural B.C. $[m, 2m-1]$	$\frac{du}{dx}$ or $\sigma_{xx} = Eu_{,x}$	$\frac{d^2w}{dx^2}$ and $\frac{d^3w}{dx^3}$ or $M = EIw_{,xx}$ and $V = EIw_{,xxx}$

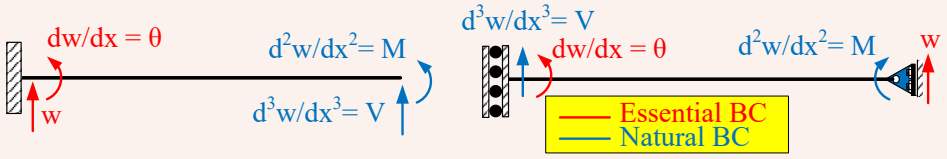


Figura 47.2: Esempi di condizioni limite essenziali e naturali

COPIA DI REVISIONE

47.2.6.1 Ex 47.1: Euler: assiale

Energia potenziale Π di un membro assiale (L, E, A), fissata a sinistra e sottoposta ad una forza assiale P a destra è dato da

$$\Pi = \underbrace{\int_0^L \frac{EA}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx}_{\text{Strain Energy}} \underbrace{-Pu(L)}_{\text{Work}}$$

Determinare l'Equazione Euler richiedendo che Π essere un minimo.

Soluzione I

Seguire la procedura utilizzata per la derivazione delle Equazioni Euler, la prima variazione Π:

$$\delta\Pi = \int_0^L \underbrace{\frac{EA}{2}2\left(\frac{du}{dx}\right)}_{a}\underbrace{\delta\left(\frac{du}{dx}\right)}_{b'} dx - P\delta u(L)$$

Integrazione per parti (Eq. R.3)

$$\delta\Pi = + \underbrace{EA\frac{du}{dx}}_{a}\underbrace{\delta u}_{b}\Bigg|_0^L - \int_0^L \underbrace{\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right)}_{a'}\underbrace{\delta u}_{b} dx - P\delta u(L) = 0$$

$$= -\int_0^L \delta u \underbrace{\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right)}_{\text{Euler Eq.}} dx + \underbrace{\left[\left(EA\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=L} - P\right]}_{\text{B.C.}} \delta u(L)$$

$$\underbrace{- \left(EA\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=0}\underbrace{\delta u(0)}_{0}}_{0}$$

Ricordate che δ in un operatore arbitrario che può essere assegnato qualsiasi valore, abbiamo impostato i coefficienti di δu tra $(0, L)$ e quelli per δu at $x = L$ pari a zero separatamente, e ottenere

- Equazione Euler:

$$-\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right) = EA\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \qquad 0 < x < L$$

  Notare come la funzionalità era in termini di u' e l'equazione Euler in termini di u''.
- Condizione naturale del corpo:

$$EA\frac{du}{dx} - P = 0 \quad \text{at} \quad x = L$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Soluzione II

Utilizzare i risultati dalla derivazione precedente (Eq. 47.6): Abbiamo derivato:

$$F(x,u,u') = \frac{EA}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2$$

(nota che da allora P è un carico applicato alla fine del membro, non appare come parte di $F(x,u,u')$. Noi diamo il via all'Equazione Euler da Eq. 47.6

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} &= 0 \\ \Rightarrow -\frac{d}{dx}(EAu') = -EA\frac{d^2u}{dx^2} &= 0 \text{ Euler Equation} \end{aligned}$$

Infine, la condizione al contorno è ottenuta dall'Eq. 47.11:

$$\begin{aligned} \underbrace{\eta(x)}_{\text{Ess.}}\underbrace{\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b}_{\text{Nat.}} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial u'} &= EAu' \\ EA\frac{du}{dx} &= 0 \end{aligned}$$

47.2.6.2 Ex 47.2: Euler: flessore

L'energia potenziale totale di un fascio che supporta un carico uniforme p è dato da

$$\Pi = \int_0^L \left(\frac{1}{2}M\kappa - pw\right)dx = \int_0^L \underbrace{\left(\frac{1}{2}(EIw'')w'' - pw\right)}_{F}dx$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Cerchiamo di ricavare la prima variazionale di Π. Eq in attesa. 47.9, e integrando per parte (Eq. R.3) due volte

$$\begin{aligned}
\delta\Pi &= \int_0^L \delta F dx = \int_0^L \left(\frac{\partial F}{\partial w''}\delta w'' + \frac{\partial F}{\partial w}\delta w \right) dx \\
&= \int_0^L (EIw''\delta w'' - p\delta w) dx \\
&= (EIw''\delta w')|_0^L - \int_0^L \left[(EIw'')'\delta w' - p\delta w \right] dx \\
&= \underbrace{\underbrace{(EIw'')}_{\text{Nat.}}\underbrace{\delta w')|_0^L}_{\text{Ess.}} - \underbrace{[(EIw'')'}_{\text{Nat.}}\underbrace{\delta w]|_0^L}_{\text{Ess.}}}_{\text{BC}} + \int_0^L \underbrace{\left[(EIw'')'' + p \right]}_{\text{Euler Eq.}} \delta w dx = 0
\end{aligned}$$

Or

$$(EIw'')'' = -p \quad \text{for all x}$$

che è l'equazione differenziale di governo dei raggi e le condizioni limite sono date da

Essenziale		Naturale
$\delta w' = 0$	or	$EIw'' = -M = 0$
$\delta w = 0$	or	$(EIw'')' = -V = 0$

47.3 Principio di energia potenziale totale

40 L'espressione per il potenziale totale di energia (TPE) è data da

$$\begin{aligned}
\Pi &\overset{\text{def}}{=} U - W_e \\
W_e &\overset{\text{def}}{=} \int_\Omega \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma + \mathbf{uP} \\
U &\overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} d\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0 d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega
\end{aligned}$$

la funzione per la forma generale della potenziale principio variativo di energia è ottenuto

$$\Pi = \underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} d\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0 d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega}_{U} \underbrace{- \int_\Omega \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma - \mathbf{uP}}_{-W_e} \quad (47.12)$$

41 Una dichiarazione variazionale è ottenuta prendendo la prima variazione Π e impostare questa quantità scalare pari a zero.

COPIA DI REVISIONE

42 La dichiarazione variazionale per la forma generale del potenziale energia funzionale (cioè Equazione 47.12) is

$$\delta\Pi = \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} d\Omega - \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0 d\Omega + \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \quad (47.13)$$

che è il *Principio del lavoro virtuale*.

43 Riscriviamo le relazioni di estensivazione in termini di **lineare operatore differenziale L** (Eq. O.2.3.2)

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$$

dove **L** è un operatore differenziale lineare e **u** è il vettore di spostamento definito in Eq. O.7:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

44 Dal momento che l'operatore differenziale **L** is *lineare*, la variazione delle ceppi $\delta\boldsymbol{\epsilon}$ può essere espresso in termini di variazione della spostamenti $\delta\mathbf{u}$

$$\delta\boldsymbol{\epsilon} = \delta(\mathbf{L}\mathbf{u}) = \mathbf{L}\delta\mathbf{u} \quad (47.14)$$

45 Consideriamo due forme della dichiarazione variazionale

1. **In termini di ceppi:** che è più adatto per la derivazione di le corrispondenti equazioni Euler,

$$\delta\Pi = \underbrace{\int_\Omega \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} d\Omega - \int_\Omega \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0 d\Omega + \int_\Omega \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega}_{\delta U}$$
$$\underbrace{- \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma}_{-\delta W_e} = 0 \quad (47.15)$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

2. **In termini di spostamenti:** (utilizzando l'Equazione) 47.14) che è più adatto per la successiva discretizzazione.

$$\delta\Pi = \underbrace{\int_\Omega \delta(\mathbf{Lu})^T \mathbf{D}(\mathbf{Lu})\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta(\mathbf{Lu})^T \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0 \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \delta(\mathbf{Lu})^T \boldsymbol{\sigma}_0 \mathrm{d}\Omega}_{\delta U}$$
$$\underbrace{- \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b}\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}}\mathrm{d}\Gamma}_{-\delta W_e} = 0$$

46 Per ottenere le equazioni Euler per la forma generale della potenziale energia variazionale principio il volume integra definendo l'energia virtuale di sforzo δU in Equazione 47.15 deve essere integrato da parti per convertire la variazione dei ceppi $\delta(\mathbf{Lu})$ in una variazione i luoghi di sfolgo $\delta\mathbf{u}$.

47 Integrazione da parte di parti di questi integrali utilizzando il teorema di Green (Eq. R.6)

$$\int_\Omega R\frac{\partial S}{\partial x}\mathrm{d}\Omega = -\int_\Omega \frac{\partial R}{\partial x} S\mathrm{d}\Omega + \oint_\Gamma RSn_x \mathrm{d}\Gamma$$

rendimenti

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \delta(\mathbf{Lu})^T \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}\mathrm{d}\Omega &= \oint_\Gamma \delta\mathbf{u}^T \mathbf{G}(\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon})\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T \mathbf{L}^T(\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon})\mathrm{d}\Omega \\
\int_\Omega \delta(\mathbf{Lu})^T \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0\mathrm{d}\Omega &= \oint_\Gamma \delta\mathbf{u}^T \mathbf{G}(\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0)\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T \mathbf{L}^T(\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0)\mathrm{d}\Omega \\
\int_\Omega \delta(\mathbf{Lu})^T \boldsymbol{\sigma}_0\mathrm{d}\Omega &= \oint_\Gamma \delta\mathbf{u}^T \mathbf{G}\boldsymbol{\sigma}_0\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T \mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}_0\mathrm{d}\Omega
\end{aligned} \tag{47.16}$$

dove $\mathbf{G}$ è una matrice di trasformazione che contiene la direzione coseni per un vettore normale unità tale che le trazioni di superficie $\mathbf{t}$ sono definiti as $\mathbf{t} = \mathbf{G}\boldsymbol{\sigma}$ e gli integrali di superficie sono finiti l'intera superficie del corpo Γ.

48 Sostituire l'equazione 47.16 in Equazione 47.15, la dichiarazione variazionale diventa

$$\delta\Pi = -\int_\Omega \delta\mathbf{u}^T \{\mathbf{L}^T \underbrace{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0]}_{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{b}\}\mathrm{d}\Omega$$
$$+ \int_\Gamma \delta\mathbf{u}^T \{\mathbf{G}\underbrace{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0]}_{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\mathbf{t}}\}\mathrm{d}\Gamma = 0$$

49 Da $\delta\mathbf{u}$ è arbitraria le espressioni negli integrandi all'interno i bracci devono essere uguali

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

a zero per $\delta\Pi$ essere pari a zero. Riconoscere che il rapporto stress-strain appare sia nel volume che negli integrali superficiali, le equazioni Euler sono

$$\text{(BE): Equilibrium} \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ on } \Omega \tag{47.17}$$

$$\text{(NBC): Natural B.C.} \mathbf{G}\boldsymbol{\sigma} - \hat{\mathbf{t}} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_t \tag{47.18}$$

dove la prima equazione Euler è l'equazione di equilibrio e la seconda L'equazione di Euler definisce le condizioni naturali del confine. condizioni di confine sono definite su Γ_t piuttosto che Γ perché sia le trazioni di superficie applicate $\hat{\mathbf{t}}$ e il vettore matrice prodotto $\mathbf{G}\boldsymbol{\sigma}$ sono identici a zero fuori Γ_t.

50 In generale, solo alcune forme di equazioni differenziali sono Euler equazioni di una funzione variazionale.

51 Per il problema elastostatico, è possibile partire dal Equazioni Euler, e poi derivare il potenziale totale di energia funzionale eseguendo le operazioni appena presentate in ordine inverso.

52 Il diagramma Tonti per il TPE è mostrato in Fig. 47.3. In questo diagramma, i forti collegamenti sono mostrati da linee solide, connessioni deboli da primavera-come simboli, scatole con linee solide denotano il campo primario sconosciuto, variabili all'interno di scatole trattenute sono internamente campi derivati, e scatole ombreggiate indicano i campi prescritti.

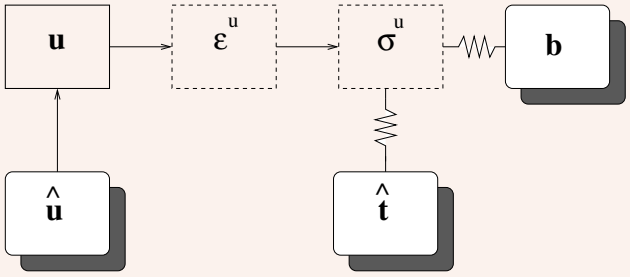


Figura 47.3: Tonti diagrap per il metodo energetico potenziale totale

53 §48.4.1 ulteriormente espandersi su questa sezione.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

47.4 Hamilton

47.4.1 Dinamica; Euler/Lagrange

47.4.1.1 Sistema discreto

54 Se consideriamo una singola particella di massa m che si muove sotto l'influenza di una forza $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r)$il sentiero $\mathbf{r}(t)$ seguito dalla particella deve soddisfare la seconda legge di movimento di Newton

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

55 Un percorso che differisce dal vero cammino si esprime come $\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}$dove $\delta\mathbf{r}$ è la variazione del percorso per qualsiasi tempo fisso t. Presumiamo che il percorso reale $\mathbf{r}$ e il percorso variato differiscono, tranne in due tempi distinti t_1 e t_2; cioè, $\delta\mathbf{r}(t_1) = \delta\mathbf{r}(t_2) = 0$.

56 Prendere il prodotto scalare dell'equazione precedente con la variazione $\mathbf{r}$, e integrarsi nel tempo tra t_1 e t_2, noi otteniamo

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \mathbf{F}(\mathbf{r})\right]\cdot\delta\mathbf{r}dt = 0$$

Integrazione per parte (Eq. R.3) i rendimenti a prima termine

$$-\int_{t_1}^{t_2}\left(m\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d\delta\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot\delta\mathbf{r}\right)dt + \left(m\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\delta\mathbf{r}\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} \tag{47.19}$$

Il secondo termine scompare da allora $\delta\mathbf{R}(t_1) = \delta\mathbf{r}(t_2) = 0$. Inoltre, si nota che

$$\delta K \overset{\text{def}}{=} m\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d\delta\mathbf{r}}{dt} = \delta\left[\frac{m}{2}\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]$$

Quindi Eq. 47.19 diventa

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta K + \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r})dt = 0 \tag{47.20}$$

che è proprio *forma generale del principio di Hamilton* per una singola particella.

57 Se la forza $\mathbf{F}$ è conservatrice (cioè la somma delle sue energie potenziali e cinetiche è costante), possiamo sostituirla con il gradiente di un potenziale (il primo teorema diCastigliano)

$$\mathbf{F} = -\nabla\Pi$$

dove $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathbf{r})$ è l'energia potenziale della particella, quindi riscriviamo Eq. 47.20 può ora essere riscrittura come

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(K - \Pi)dt = 0 \tag{47.21}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

perché

$$\nabla\Pi \cdot \delta\mathbf{r} = \frac{\partial\Pi}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial\Pi}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial\Pi}{\partial x_3}\delta x_3 = \delta\Pi(x_1, x_2, x_3)$$

58 La differenza tra l'energia cinetica e le energie potenziali è chiamata *Lagrangian* funzione

$$\mathcal{L} \overset{\text{def}}{=} K - \Pi$$

Eq. 47.21 è il principio di Hamilton per movimento conservatore di una particella

Definition 47.1: Il principio di Hamilton

Il movimento di una particella agito da forze conservatrici tra due arbitrari istanti del tempo t_1 e t_2 è tale che la linea integrale sulla funzione Lagrangiana è un estremo per il movimento del percorso.

59 Questo può essere anche dichiarato in altre parole *Di tutti i possibili percorsi che la particella poteva percorrere dalla sua posizione in tempo t_1 alla sua posizione a tempo t_2, i suoi veri e propri sentieri saranno quelli per cui*

$$I \overset{\text{def}}{=} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt.$$

è un estremo.

60 Se il percorso può essere definito in termini di coordinate generalizzate[1] q_i $(i = 1, 2, 3)$, poi

$$\begin{aligned}\delta I &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)\mathrm{d}t = 0 \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right] \delta q_i \mathrm{d}t\end{aligned}$$

Si noti che il termine all'interno della staffa quadrata può essere facilmente derivato attraverso una procedura simile a quella in §47.2.4.

61 Se tutto q_i sono linearmente indipendenti (cioè senza vincoli tra di loro), le variazioni δq_i sono indipendenti da t, eccetto $\delta q_i = 0$ at t_1 e t_2. Pertanto, i coefficienti di δq_1, δq_2e δq_3 svanire separatamente cedendo *Equazioni lagrangiane di movimento*, conosciuto anche come *Euler-Lagrange* equazioni.

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0, \qquad i = 1, 2, 3$$

[1] Le coordinate generalizzate sono un insieme di parametri utilizzati per rappresentare lo stato di un sistema in uno spazio di configurazione, che devono definire in modo unico la configurazione del sistema rispetto ad uno stato di riferimento.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

che è ovviamente analogo a Eq. 47.6.

62 Per le forze non conservatrici, il lettore dovrebbe riferirsi a (Reddy, 2017, pg. 148).

47.4.1.2 Sistema di contenimento

63 In seguito essenzialmente alla stessa procedura di quella sviluppata per sistemi discreti, possiamo sviluppare il principio di Hamilton per le dinamiche del corpo deformabile. Mentre la seconda legge di movimento di Newton si applica ancora, ora che il corpo è deformabile avremo bisogno di un'equazione costitutiva.

64 A partire da

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

il percorso reale $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ seguito una particella materiale in posiione $\mathbf{x}$ varia coerente con la condizione di confine cinematica (essenziale) a $\mathbf{u}+\delta\mathbf{u}$ dove $\delta\mathbf{u}$ è la variazione ammissibile (o spostamento virtuale) del percorso.

65 Come prima, supponiamo che il percorso variato differisca da quello reale, tranne a volte t_1 e t_2. Così, una variazione ammissibile di $\delta\mathbf{u}$ soddisfa le condizioni (equazione governativa e condizioni di confine)

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{u} &= 0 \qquad && \text{on } \Gamma_u \text{ for all } t \\ \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_1) &= \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_2) \qquad && \text{for all } \mathbf{x} \end{aligned} \tag{47.22}$$

dove Γ_u denota la porzione della superficie del corpo dove lo spostamento vettore $\mathbf{u}$ è specificato.

66 Il lavoro svolto sul corpo a tempo t dalla forza risultante nel passare attraverso lo spostamento virtuale $\delta\mathbf{u}$ is

$$\int_\Omega \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega$$

dove 4$\mathbf{b}$ è il vettore della forza corporea, $\mathbf{t}$ la trazione specificata, $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$ sono lo stress e i tensori di tensione. Gli ultimi termini rappresentano il lavoro virtuale delle forze interne memorizzate nel corpo (così negative).

67 Il lavoro svolto dalla forza inerzia $m\mathbf{a}$ passare attraverso lo spostamento virtuale $\delta\mathbf{u}$ is

$$\int_\Omega \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega$$

dove ρ è la densità di massa.

68 Possiamo scrivere così

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_\Omega \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega - \left(\int_\Omega \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \right) \right] dt = 0 \\ \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_\Omega \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial t} d\Omega - \left(\int_\Omega \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \right) \right] dt = 0 \end{aligned} \tag{47.23}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Il primo termine nella seconda espressione è stato ottenuto attraverso l'integrazione da parte di parti; i termini integrati svaniscono a causa delle condizioni iniziali e finali del limite (Eq. 47.22).

69 Eq. 47.23 è la forma generale del principio di Hamilton per un mezzo continuo (conservatore ed elastico o no).

70 Il potenziale di lavoro esterno a sua volta è definito da (Eq. 48.6).

$$\delta \mathcal{W}_e = -\int_\Omega \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma$$

e da allora per un corpo elastico ideale $\mathbf{b}$ e $\mathbf{t}$ sono conservatori e l'energia di tensione U_0 esiste tale che

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}}, \qquad \text{where } U_0 = U_0(\varepsilon_{ij})$$

(Applicare il teorema fondamentale del calcolo)

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \text{and} \quad F'(x) = f(x)$$

a Eq. 48.3).

71 Sostituire quest'ultima equazione in Eq. 47.23 noi otteniamo

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [K - (\mathcal{W}_e + U)]\, dt = 0 \tag{47.24}$$

dove K e U sono le eneergie cinetiche e ceppo

$$K = \int_\Omega \frac{\rho}{2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \frac{\mathbf{u}}{\partial t} d\Omega, \qquad U = \int_\Omega U_0 d\Omega$$

72 Eq. 47.24 rappresenta il principio di Hamilton per un corpo elastico (di nuovo, lineare o non lineare).

73 Da $\Pi = U + \mathcal{W}_e$ è l'energia potenziale totale, Eq. 48.6, per il corpo senza movimento (cioè le forze sono applicate abbastanza lentamente che il moto è indipendente dal tempo e le forze inerziali sono trascurabili), il principio di Hamilton riduce al principio dello spostamento virtuale.

74 le equazioni Euler-Lagrange associate al Lagrangian $L = K - \Pi$, può essere ottenuto da Eq. 47.24.

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(u_i, \dot{u}_i) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_\Omega \left(\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{b} \right) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_t} (\mathbf{t} - \widehat{\mathbf{t}}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \right] dt \end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove $\widehat{\mathbf{t}}$ è la trazione superficiale specificata lungo Γ_t. Arriviamo a quest'ultima equazione da Eq. 47.24 attraverso l'integrazione di parti, teoremi gradienti e Eq. 47.22.

75 Da $\delta\mathbf{u}$ è arbitrario per $t_1 < t < t_2$e $\mathbf{x}$ dentro Ω e su Γ_t, segue che

$$\begin{aligned} \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad &\text{in } \Omega \\ t - \widehat{\mathbf{t}} = \mathbf{0} \quad &\text{on } \Gamma_t \end{aligned}$$

queste sono l'equazione Euler-Lagrange per un corpo elastico.

47.4.2 Ex 47.3: Hamilton

Per una barra di sezione trasversale uniforme, di lunghezza L, area A, modulo di Young E e densità di massa ρ, vincolata a un'estremità e collegata a un supporto rigido all'altra mediante una molla di rigidezza k



Siamo interessati a determinare la mozione periodica, che ha il forma

$$u(x,t) = u_0(x)e^{i\omega t}$$

dove ω è la frequenza delle vibrazioni naturali, e $u_0(x)$ è l'ampiezza. Le energie cinetiche e di tensione sono date da

$$\begin{aligned} K &= \int_\Omega \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}\Omega = \int_0^L \frac{\rho A}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx \\ U &= \int_\Omega \frac{E}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}\Omega = \int_0^L \frac{EA}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{k}{2}[u(L)]^2 \end{aligned}$$

In assenza di un potenziale di lavoro esterno, Eq. 47.24 (con $\mathcal{W} = 0$)

$$\begin{aligned} \delta I &= \delta\int_{t_1}^{t_2}(K-\Pi)dt \\ &= \frac{1}{2}\delta\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_0^L\left[\rho A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - EA\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x - k[u(L)]^2\right\}\mathrm{d}t = 0 \end{aligned}$$

Noi presumiamo

$$u(x,t) = u_0(x)e^{i\omega t}$$

dove ω è la frequenza delle vibrazioni naturali, e $u_0(x)$ è il ampiezza e sostituzione

$$\delta\left\{\int_0^L\frac{1}{2}\left[\rho A\omega^2[u_0(x)]^2 - EA\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x - \frac{k}{2}[u_0(L)]^2\right\} = 0$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

where $\int_{t_1}^{t_2} \exp^{2i\omega t}\,\mathrm{d}t$ being nonzero is factored out. Piuttosto che usare la formula derivata in precedenza, ridistribuiamo l'Equazione Euler corrispondente

$$\delta\left\{\int_0^L \frac{1}{2}\left[\rho A\omega^2(u_0)^2 - EA\left(\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\mathrm{d}x - \frac{k}{2}\left[u_0(L)\right]^2\right\} =$$
$$\int_0^L \left[\rho A\omega^2 u_0\delta u_0 - EA\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right]\mathrm{d}x - ku_0(L)\delta u_0(L) = 0$$

Integrazione per parte (Eq. R.3)

$$\int_0^L \underbrace{EA\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)}_{u}\underbrace{\delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)}_{v'}\mathrm{d}x = \underbrace{EA\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)}_{u}\underbrace{\delta u_0}_{v}\Bigg|_0^L - \int_0^L \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}EA\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)}_{u'}\underbrace{\delta u_0}_{v}\mathrm{d}x$$

Sostituire

$$\int_0^L \left[\rho A\omega^2[u_0(x)] - EA\frac{\partial u_0}{\partial x}\delta\frac{\partial u_0}{\partial x}\right]\mathrm{d}x - ku_0(L)\delta u_0(L)$$
$$= \int_0^L \rho A\omega[u_0(x)] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}EA\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\underbrace{- EA\left(\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x}\right)\delta u_0\Big|_0^L}_{0} - ku_0(L)\delta u_0(L) = 0$$

or

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(EA\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x}\right) + \rho A\omega^2 u_0 = 0 \text{ for } 0 < x < L$$
$$\left(EA\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x} + ku_0\right) = 0 \text{ for } x = L$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Substituting $\overline{x} = \frac{x}{L}$, $\mathrm{d}x = L\mathrm{d}\overline{x}$, $\overline{u} = \frac{u_0}{L}$, and $\alpha = \frac{kL}{EA}$, $\lambda = \frac{\omega^2 \rho L^2}{E}$ we have

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \frac{1}{2}\left[\rho A\omega^2 (u_0)^2 - EA\left(\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\mathrm{d}x - \frac{k}{2}\left[u_0(L)\right]^2 \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda EA}{L^2}(L\overline{u})^2 - EA\left(\frac{\mathrm{d}\overline{u}_0}{\mathrm{d}\overline{x}}\right)^2\right] L\mathrm{d}\overline{x} - \frac{k}{2}\left[L\overline{u}_0(1)\right]^2 \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2} EAL\left[\lambda(\overline{u})^2 - \left(\frac{\mathrm{d}\overline{u}_0}{\mathrm{d}\overline{x}}\right)^2\right]\mathrm{d}\overline{x} - \frac{kL^2}{2}\left[\overline{u}_0(1)\right]^2 \\
&= \frac{KL^2}{2}\left\{\int_0^1 \left[\frac{\lambda}{\alpha}(\overline{u})^2 - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}\overline{u}_0}{\mathrm{d}\overline{x}}\right)^2\right]\mathrm{d}\overline{x} - \left[\overline{u}_0(1)\right]^2\right\} \\
&\Rightarrow \delta\left[\frac{KL^2}{2}\left\{\int_0^1 \left[\frac{\lambda}{\alpha}(\overline{u})^2 - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}\overline{u}_0}{\mathrm{d}\overline{x}}\right)^2\right]\mathrm{d}\overline{x} - \left[\overline{u}_0(1)\right]^2\right\}\right] = 0 \\
&\delta\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 \left[\lambda(\overline{u})^2 - \left(\frac{\mathrm{d}\overline{u}_0}{\mathrm{d}\overline{x}}\right)^2\right]\mathrm{d}\overline{x} - \frac{\alpha}{2}\left[\overline{u}_0(1)\right]^2\right\} = 0
\end{aligned}$$

Utilizzo del metodo Rayleigh-Ritz

$$u = c_1 x + c_2 x^2$$

e riscrivere l'equazione precedente in termini di u

$$\begin{aligned}
&\delta\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 \left[\lambda(u)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\mathrm{d}x - \frac{\alpha}{2}\left[u(1)\right]^2\right\} = 0 \\
&\int_0^1 \left[\lambda(c_1 x + c_2 x^2)(\delta c_1 x + \delta c_2 x^2) - (c_1 + 2c_2 x)(\delta c_1 + 2\delta c_2 x)\right]\mathrm{d}x \\
&- (c_1 + c_2)(\delta c_1 + \delta c - 2) = 0
\end{aligned}$$

Raccogliere i coefficienti di δc_1 e δc_2 e li ha messi a zero separatamente, abbiamo

$$\begin{aligned}
\delta c_1 : &\int_0^1 \left[\lambda(c_1 x + c_2 x^2)x - (c_1 + 2c_2 x)\right]\mathrm{d}x - (c_1 + c_2) = 0 \\
\delta c_2 : &\int_0^1 \left[\lambda(c_1 x + c_2 x^2)x^2 - (c_1 + 2c_2 x)2x\right]\mathrm{d}x - (c_1 + c_2) = 0
\end{aligned}$$

Integrazione, riduzione e compattazione

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & \frac{7}{3} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Esiste una soluzione non banale se e solo se

$$\begin{vmatrix} 2 - \frac{\lambda}{3} & 2 - \frac{\lambda}{4} \\ 2 - \frac{\lambda}{4} & \frac{7}{3} - \frac{\lambda}{5} \end{vmatrix} = 0$$

or

$$15\lambda^2 - 640\lambda + 2400 = 0$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Questa equazione quadratica ha due radici

$$\lambda_1 = 4.1545 \qquad \lambda_2 = 38.512$$

che corrispondono a

$$\omega_1 = \frac{2.038}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$\omega_2 = \frac{6.206}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

La soluzione esatta è data da

$$\lambda + \tan\lambda = 0$$

le cui prime due radici sono

$$\omega_1 = \frac{2.02875}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$\omega_2 = \frac{4.91318}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

47.5 Principio generale di variazione Hu-Washizu

La sezione seguente è riprodotta da Reich, 1993 «*On the Marriage of Mixed Finite Element Methods and Fracture Mechanics: An Application to Concrete Dams*».

76 A *Multicampione* principio variabile è uno che ha più di un campo master (o variabile di stato), che è più di un campo sconosciuto è soggetto a variazioni indipendenti.

77 In elastostatica lineare, possiamo avere spostamento, $\mathbf{u}$, ceppi $\boldsymbol{\varepsilon}$, o stress $\boldsymbol{\sigma}$ come candidati potenziali per campi di padrone. combinazioni sono possibili, (Felippa, 2000), Tabella 47.1.

78 Il principio variativo di Hu-Washizu (HW) è un metodo variabile a tre campi principio in cui *spostamenti, tensioni e stress* sono trattati as *campi indipendenti* (in contrapposizione a solo lo spostamento totale potenziale principio energetico).

79 Naturalmente, le due variabili di campo aggiuntive, rispetto al principio variativo TPE, appaiono non solo nel funzionale, ma anche nel sistema discretizzato di equazioni. per un dominio con una data discortizzazione il sistema discreto di equazioni derivato dal

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

$\mathbf{u}$	$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{\sigma}$	Nome
		Campo singolo	
Y			Energia potenziale totale
		Y	Energia potenziale totale
	Y		No
		Due campi	
Y		Y	Hellinger-Reissner
Y	Y		de Veubeke
	Y	Y	No
		Tre campi	
Y	Y	Y	Hu-Washizu

Tabella 47.1: Funzionalità in elasticità lineare

principio variativo HW sarà molto più grande di sistema discreto di equazioni derivate dal principio variativo TPE.

80 Con il numero aumentato di equazioni, miglioramenti significativi in la precisione può essere osservata per la soluzione ottenuta dal discreto forma del principio variabile HW rispetto alla soluzione ottenuta dalla forma discreta del principio variativo TPE per lo stesso discretizzazione: ciò significa che le discorsizzazioni grossolane possono essere utilizzate con la forma discreta del principio variativo HW per ottenere lo stesso grado di precisione che verrebbe osservata con discretizzazioni molto più sottili utilizzando TPE principio variabile.

81 Il principio variabile HW è funzionale derivato dal funzionale per il principio variativo TPE imponendo equazione dislocamento della tensione come condizione sussidiaria finita utilizzando metodo di moltiplicatori Lagrange.

82 La condizione o il vincolo della filiale finita è scritta in forma residua come

$$\mathbf{L}\,\mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0} \tag{47.25}$$

e forzato in un senso medio su tutto il corpo Ω.

83 imponendo l'equazione di spostamento della tensione come un vincolo C^0 ceppi e sollecitazioni continue si ottengono nella forma discreta della dichiarazioni variezionali, al contrario delle tensioni e degli stress discontinui ottenuti nella forma discreta della dichiarazione variante per il principio variazionale TPE.

84 La funzionalità limitata è scritta come

$$\Pi_{HW} = \Pi_{\text{TPE}} + \int_{\Omega} \boldsymbol{\lambda}^T \left(\mathbf{L}\,\mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon}\right) \mathrm{d}\Omega \tag{47.26}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Dove? $\boldsymbol{\lambda}$ è il moltiplicatore di Lagrange e essere coerente con il integrali nel funzionale TPE (cioè nell'Eq. 47.12) Il moltiplicatore di Lagrange deve avere le unità di stress. $\boldsymbol{\sigma}$ sarà utilizzato per il moltiplicatore Lagrange invece di più tipico $\boldsymbol{\lambda}$ tale che il significato fisico del Lagrange moltiplicatore è più evidente.

85 Il funzionale per il principio variativo HW diventa così

$$\begin{aligned}\Pi_{HW} = & \underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T\mathbf{D}\,\boldsymbol{\epsilon}\,d\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T\mathbf{D}\,\boldsymbol{\epsilon}_0\,d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\sigma}_0\,d\Omega}_{U} \\ & \underbrace{-\int_\Omega \mathbf{u}^T\mathbf{b}\,d\Omega - \int_{\Gamma_t}\mathbf{u}^T\hat{\mathbf{t}}\,d\Gamma}_{-W_e} + \underbrace{\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{L}\,\mathbf{u}-\boldsymbol{\epsilon})\,d\Omega}_{\text{Constraint}}\end{aligned} \tag{47.27}$$

86 Una dichiarazione variazionale è ottenuta prendendo il primo variazione della funzionalità e impostazione di questa quantità scalare pari a zero.

87 La prima variazione della HW funzionale, con termini disposti secondo il quale la variabile di campo è variata, è

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{HW} = & \int_\Omega \delta(\mathbf{L}\,\mathbf{u})^T\boldsymbol{\sigma}\,d\Omega - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{b}\,d\Omega - \int_{\Gamma_t}\delta\mathbf{u}^T\hat{\mathbf{t}}\,d\Gamma \\ & + \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T\mathbf{D}\,\boldsymbol{\epsilon}\,d\Omega - \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T\mathbf{D}\,\boldsymbol{\epsilon}_0\,d\Omega + \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\sigma}_0\,d\Omega - \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\sigma}\,d\Omega \\ & + \int_\Omega \delta\boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{L}\,\mathbf{u}-\boldsymbol{\epsilon})\,d\Omega = 0\end{aligned} \tag{47.28}$$

Si noti che il 4 ° e 7 ° termine sono stati aggiunti e si annullano a vicenda.

88 Da $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\epsilon}$e $\boldsymbol{\sigma}$ sono variabili di campo indipendenti, termini che coinvolgono $\delta\mathbf{u}$, $\delta\boldsymbol{\epsilon}$e $\delta\boldsymbol{\sigma}$ deve aggiungere fino a zero individualmente e sono, quindi raggruppati insieme per formare tre distinte dichiarazioni variazionali (analogo al metodo di separazione delle variabili nella soluzione di equazioni differenziali parziali)

$$\int_\Omega \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T\boldsymbol{\sigma}\,d\Omega - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{b}\,d\Omega - \int_{\Gamma_t}\delta\mathbf{u}^T\hat{\mathbf{t}}\,d\Gamma = 0 \tag{47.29}$$

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T[\mathbf{D}(\boldsymbol{\epsilon}-\boldsymbol{\epsilon}_0)+\boldsymbol{\sigma}_0-\boldsymbol{\sigma}]\,d\Omega = 0 \tag{47.30}$$

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{L}\,\mathbf{u}-\boldsymbol{\epsilon})\,d\Omega = 0 \tag{47.31}$$

89 Per ottenere le corrispondenti equazioni Euler per la forma generale della HW principio variabile il volume integrale in Equazione 47.29 contenenti la variazione dei ceppi $\delta(\mathbf{Lu})$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

definito in termini di spostamenti $\mathbf{u}$ deve essere integrato con parti che utilizzano Teorema di Green (Eq. R.2.6) per ottenere una forma della variazione dichiarazione in termini di variazione degli spostamenti $\delta\mathbf{u}$.

90 Integrazione per parti (Eq. R.3) di questo integrale rendimenti

$$\int_\Omega \delta(\mathbf{L}\,\mathbf{u})^T\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega = \oint_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\mathbf{G}\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega \tag{47.32}$$

dove $\mathbf{G}$ è una matrice di trasformazione che contiene la direzione coseni per un vettore normale unità tale che le trazioni di superficie $\mathbf{t}$ sono definiti as $\mathbf{t} = \mathbf{G}\,\boldsymbol{\sigma}$ e l'integrale della superficie è sopra tutta la superficie del corpo Γ.

91 Sostituire l'equazione 47.32 in Equazione 47.29, la prima dichiarazione variazionale diventa

$$-\int_\Omega \delta\mathbf{u}^T(\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b})\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T(\mathbf{G}\,\boldsymbol{\sigma} - \hat{\mathbf{t}})\,\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{47.33}$$

Da $\delta\mathbf{u}$ è arbitraria le espressioni negli integrandi all'interno le parentesi devono essere uguali a zero per la somma degli integrali da pari a zero.

92 Anche, $\delta\boldsymbol{\epsilon}$ e $\delta\boldsymbol{\sigma}$ sono anche arbitrarie e le espressioni all'interno dei braces nel secondo dichiarazione variazionale (cioè Equazione 47.30) e all'interno delle parentesi nella terza dichiarazione variazionale (cioè. Equazione 47.31) deve essere pari a zero per integrale per essere pari a zero.

93 Le equazioni Euler per la funzione HW sono

$$\begin{aligned}
&\text{(BE): Equilibrium} && \mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Omega && (47.34)\\
&\text{(CE): Stress-Strain} && \mathbf{D}\,(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Omega && (47.35)\\
&\text{(KE): Strain-Displacement} && \mathbf{L}\,\mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Omega && (47.36)\\
&\text{(NBC): Natural B.C.} && \mathbf{G}\,\boldsymbol{\sigma} - \hat{\mathbf{t}} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_t && (47.37)
\end{aligned}$$

dove la prima equazione Euler è l'equazione di equilibrio; seconda equazione Euler è il rapporto stress-strain; la terza Eulero l'equazione è la equazione dislocamento delle tensioni; e il quarto Euler l'equazione definisce le condizioni di confine naturali.

94 Il confine naturale le condizioni sono definite Γ_t piuttosto che Γ perché sia le trazioni di superficie applicate $\hat{\mathbf{t}}$ e il vettore matrice prodotto $\mathbf{G}\,\boldsymbol{\sigma}$ sono identici a zero fuori Γ_t. A partire dalle equazioni Euler, è possibile derivare l'HW funzionale eseguendo le operazioni appena presentate in ordine inverso.

95 Quest'ultimo insieme di quattro equazioni Euler, dovrebbe essere confrontato con il due (Eq. 47.17 e 47.18) ottenuto dal TPE originale. Le due equazioni aggiuntive portano in gioco stress-strain e anche, mentre la formulazione originale (Eq. 47.17 e 47.18) era in termini di spostamento solo ($\mathbf{u}$), la formulazione Hu-Washizu è in termini di tre indipendenti variabili ($\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$), Tabella 47.2.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

			TITOLO	HW
Equazioni di Euler				
Equilibrium	$\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$	Ω	Y	Y
Stress-Strain	$\mathbf{D}\,(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$	Ω	N	Y
Strain-Slocazione	$\mathbf{L}\,\mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0}$	Ω	N	Y
Naturale B.C.	$\mathbf{G}\,\boldsymbol{\sigma} - \hat{\mathbf{t}} = \mathbf{0}$	Γ_t	Y	Y
Variabili				
Slocamento	$\mathbf{u}$		Y	Y
Strain	$\boldsymbol{\varepsilon}$		N	Y
Stress	$\boldsymbol{\sigma}$		N	Y

Tabella 47.2: Confronto tra l'energia potenziale totale e le formule Hu-Washizu

96 Il diagramma Tonti (§O.8) per il principio variativo di Hu-Washizu è indicato in Fig. 47.4.

47.6 diagrammi "Pseudo-Tonti'

47.6.1 Il principio di D'Alembert

97 Il principio di D'Alembert è una riforma della Seconda Legge di Newton che introduce forze inerziali, trasformando un sistema dinamico in forma quasi-statica di equilibrio. Questo principio serve come ponte tra meccanica newtoniana e meccanica lagrangiana esprimendo le equazioni del movimento come equilibrio tra forze applicate e reazioni inerziali.

98 Il diagramma Tonti per il Principio di D'Alembert, Fig. 47.5c, pone come nodo centrale che collega le Leggi di Newton al lavoro virtuale e alle Equazioni di Lagrange, evidenziando come i sistemi meccanici si evolvono attraverso coordinate generalizzate.ma), energia cinetica (T), e potenziale energia (V), dimostrando come questo principio si integra sia in formulazioni di meccanica basate sulla forza che su quelle basate sull'energia.

47.6.2 Equazioni di Hamilton

99 Le Equazioni di Hamilton derivano da una trasformazione Legendre delle Equations Lagrange, dalla meccanica di transizione da una formulazione basata sulla configurazione a una rappresentazione dello spazio-fase.

100 Il diagramma Tonti per le Equazioni di Hamilton, Fig. 47.5b, collega le Leggi di

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

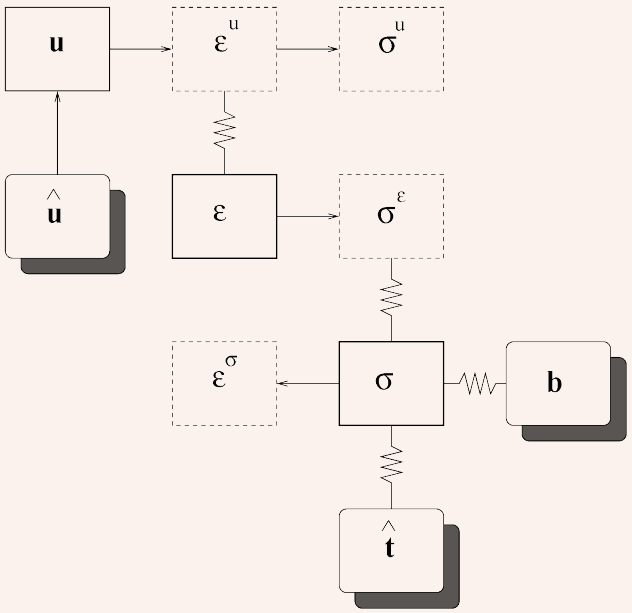


Figura 47.4: Diagramma Tonti per Hu-Washizu, (Červenka, 1994)

Newton, il Principio di D'Alembert e le Equazioni di Lagrange alle coordinate generalizzate (q), velocità generalizzate ($\dot{q}$), e momento generalizzato (p). Inoltre, collega la funzione Hamiltoniana (H), che rappresenta l'energia totale, le espressioni cinetiche e potenziali dell'energia. Questa struttura mette in evidenza come la meccanica hamiltoniana fornisce un potente quadro per le dinamiche classiche, consentendo l'applicazione diretta alle trasformazioni canoniche, alla geometria simplettica e alla meccanica quantistica.

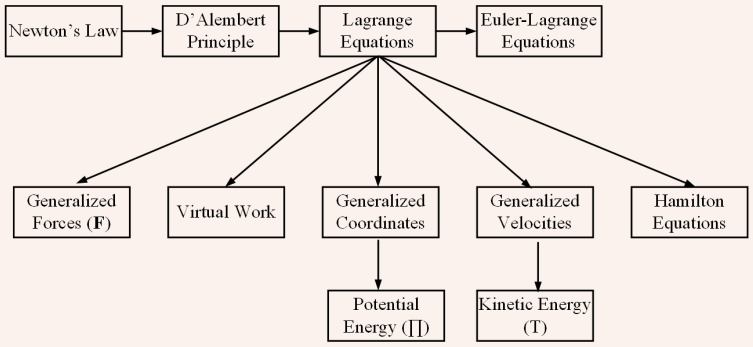
47.6.3 Equazioni di Lagrange

101 Le Equazioni di Lagrange costituiscono la base della meccanica variazionale, offrendo una formulazione elegante che esprime dinamiche puramente in termini di coordinate generalizzate (q) e velocità ($\dot{q}$).

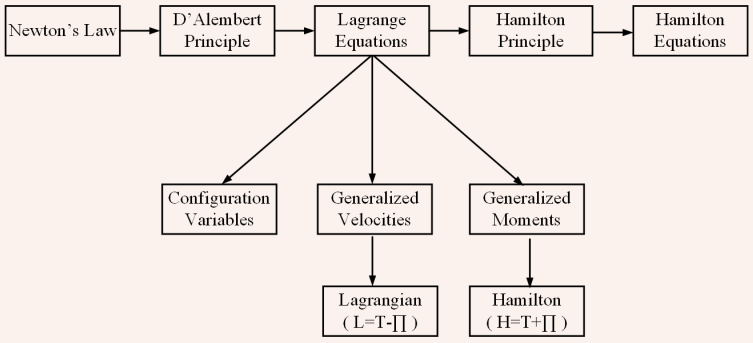
102 Il diagramma Tonti per le Equazioni di Lagrange, Fig. 47.5a, lo collega alla meccanica newtoniana tramite il Principio di D'Alembert e la collega anche ai metodi di lavoro ed energia virtuali. Inoltre, il divario tra le Equazioni di Hamilton attraverso la trasformazione Legendre e si collega con le equazioni Euler-Lagrange, sottolineando il suo profondo legame con il calcolo delle variazioni. Mostrando il passaggio dalle descrizioni basate sulla forza agli approcci basati sull'energia, il diagramma illustra come la meccanica Lagrangiana unifica meccanica classica sotto una potente struttura analitica.

COPIA DI REVISIONE

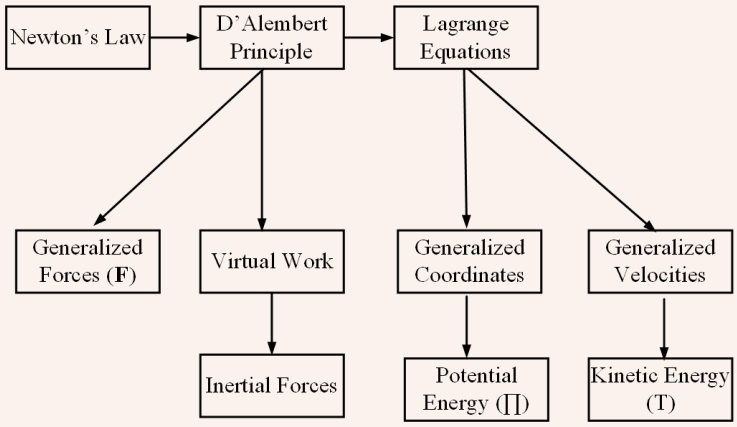
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Lagrange



(b) Hamilton



(c) D'Alembert

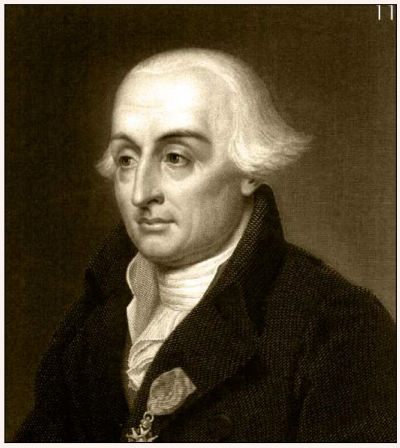
Figura 47.5: Diagrammi Tonti per Lagrange, Hamilton e D'Alembert

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Euler (1707)-1783)



Lagrange (1736-1813)



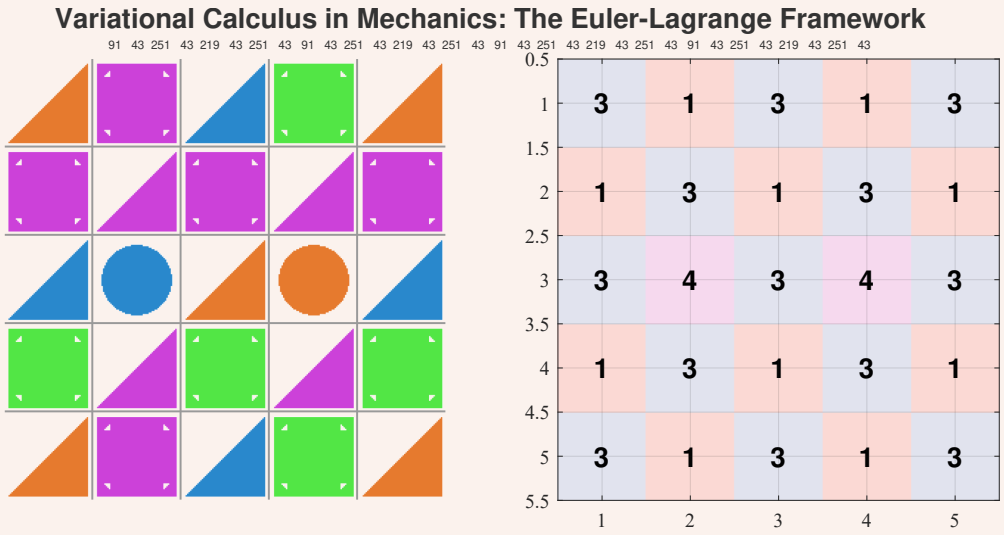
Hamilton (1805-1865)



D’Alembert (1717-1813)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Identicona specifica del capitolo, chapter H

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 48

Principi variazionali ed energetici nell'analisi strutturale

Abstract

Questo capitolo introdurrà un sistema di soluzione radicalmente diverso rispetto all'approccio basato sull'equilibrio precedentemente adottato (Newtoniano 44).

Esso abbraccia il concetto di stazionaria di una funzione, come deriva dai principi variazionali discussi nel capitolo precedente.

Saranno derivate diverse soluzioni, anche se sono tutte interconnesse (cioè si può ricavarne una di esse dall'altra). Ciò porterà a formulazioni meglio conosciute come Principio del Lavoro Virtuale, Principio dell'Energia Totale Minima, Metodo Ritz e Teoremi di Castigliano. 24).

Infine, il principio di spostamento virtuale getterà le basi per il metodo degli elementi finiti presentato nel capitolo 50.

48.1 Introduzione 1710
48.1.1 Termodinamica 1710
48.1.2 Relazioni di base 1711
48.1.3 Definizioni 1712
48.1.4 Condizioni generali 1712
48.1.5 Espressioni virtuali 1714
48.1.6 Osservazioni 1714
48.1.7 Applicazioni a elementi 1D . 1716
48.1.8 Sintesi della vw e del cvw . . 1720
48.2 Approcci 1722
48.3 Lavoro virtuale 1723
48.3.1 Principio del lavoro virtuale complementare (PCVW) . . 1723
48.3.2 Ex 48.2: Arco semicerchio a tre cerniere 1727
48.3.3 Principio del lavoro virtuale (PVW) 1728
48.4 Principi di potenziale energia 1732
48.4.1 Principio di energia potenziale totale (PTPE) 1732
48.4.2 Principio di energia potenziale complementare totale (PTCPE) 1736
48.5 Teoremi di Castigliano 1736
48.5.1 Primo teorema 1736
48.5.2 Secondo teorema 1739
48.6 Metodo Rayleigh-Ritz 1742
48.6.1 Ritiro 1742
48.7 Sintesi 1752

[1] Questo capitolo è in gran parte ispirato da (Pilkey e Wunderlich, 1994) e (Reddy, 2017).

COPIA DI REVISIONE

48.1 Introduzione

2 Questa sezione semplicemente elenca varie definizioni senza alcun tentativo di legare insieme due termini. Ciò sarà fatto, ater, una volta abbiamo una chiara comprensione del significato di ogni termine.

48.1.1 Termodinamica

3 Il lavoro è definito come prodotto di una forza e spostamento

$$W \overset{\text{def}}{=} \int_a^b \mathbf{F}.\mathrm{d}\mathbf{s}$$
$$\mathrm{d}W = F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y$$

4 L'energia è una quantità che rappresenta la capacità o la capacità di eseguire lavoro.

5 Il cambiamento dell'energia è proporzionale al quantità di lavoro eseguito. Dal solo il cambiamento di energia è coinvolto, qualsiasi dato può essere utilizzato come base per misura di energia, quindi l'energia non è né creata né consumata.

Definition 48.1: Prima legge degli stati termodinamici

La quantità di tempo del cambiamento dell'energia totale (cioè la somma dell' energia cinetica) K e l'energia interna U) è uguale alla somma del tasso di lavoro effettuato dall'esterno forze W_e e il cambiamento del contenuto di calore per unità tempo H:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(K + U) = W_e + H \tag{48.1}$$

dove K è l'energia cinetica, U l'energia di tensione interna, W il lavoro esterno, e H l'ingresso di calore al sistema.

6 Per un sistema adiabatico (senza scambio termico) e se i carichi vengono applicati in una quasi modo statico (non energia cinetica), la relazione sopra semplifica:

$$W_e = U \tag{48.2}$$

7 Dobbiamo ancora definire entrambi U e W_e Nel contesto della meccanica strutturale, che sarà fatta dopo.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

48.1.2 Relazioni di base

8 Prima di iniziare, dobbiamo definire una serie di espressioni che saranno necessarie Quelli verranno poi richiamati.

Stress Strain Relation $\sigma = \mathbf{D}(\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma_0$

dove **D** è la matrice costitutiva; ε è il vettoriale di tensione a causa degli spostamenti **u**; ε_0 è il vettore di ceppo iniziale; σ_0 è il vettore di stress iniziale; e σ è il vettore di stress.

9 Le tensioni e gli stress iniziali sono il risultato di condizioni quali riscaldamento o raffreddamento di un sistema o presenza di pressioni pore in un sistema.

Forze In meccanica strutturale, abbiamo solo due tipi di forze:

Trazione di superficie $\hat{\mathbf{t}}$Fico. 48.1 Nota: la forza di punta è collegata alla trazione

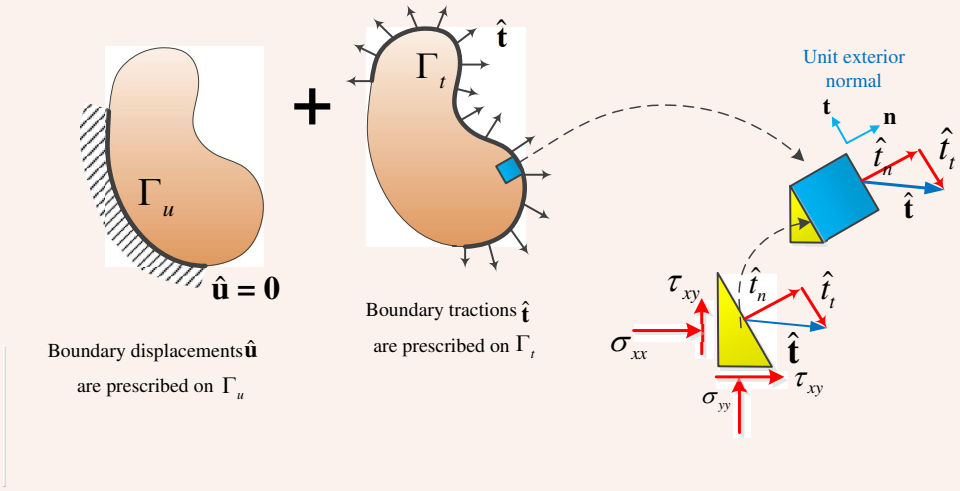


Figura 48.1: Definizione di trazione

attraverso *Funzione Dirac* $\delta(z-d) = 0, z \neq d$, da cui:

$$\int_{\infty}^{\infty} \delta(z-d)dz = 1$$

$$\int_{0}^{L} \delta(z-d)dz = 1$$

$$\int_{0}^{L} f(z)\delta(z-d)dz = f(d)$$

Forza corporea **b** (come la gravità o elettromagnetica).

Forza di punto/momento

$$W_e = \int_0^{\Delta_f} P d\Delta + \int_0^{\theta_f} M d\theta$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

48.1.3 Definizioni

48.1.4 Condizioni generali

Densità energetica interna dello strain

$$U_0 \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma} \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{48.3}$$

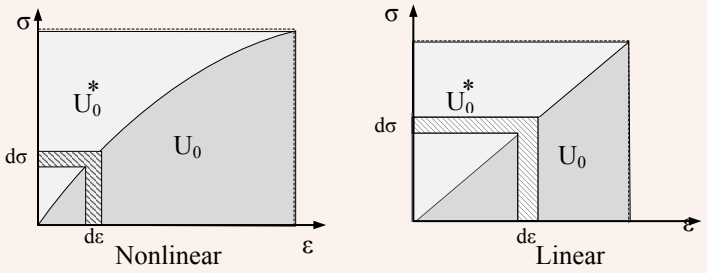


Figura 48.2: Densità energetiche di ceppo e complementari

Densità energetica dello strato complementare $U_0^* \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\varepsilon} \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$

Energia dello straccio $U \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega U.S.A.\Omega = \int_\Omega \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma} \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega$

Per un sistema elastico lineare

$$U = \frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \mathrm{d}\Omega$$

dove Ω è il volume del sistema.

Energia complementare $U^* \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega U_0^* d\Omega = \int_\Omega \int_0^{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\varepsilon} \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} d\Omega$

Lavori esterni

$$W_e \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega \mathbf{u}^T \mathbf{b} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} \mathrm{d}\Gamma$$

$$W_e = \int_0^{\Delta_f} P \mathrm{d}\Delta + \int_0^{\theta_f} M \mathrm{d}\theta$$

Per **sistemi elastici lineari**, abbiamo per carichi di punti

$$\left.\begin{aligned} P &= K\Delta \\ W_e &= \int_0^{\Delta_P} P \mathrm{d}\Delta \end{aligned}\right\} W_e = K\int_0^{\Delta_P} \Delta \mathrm{d}\Delta = \frac{1}{2}K\Delta_P^2$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Quando questa ultima equazione è combinata con $P = K\Delta_P$ noi otteniamo

$$W_e = \frac{1}{2} P \Delta_P \tag{48.4}$$

dove K è il **rigidità** della struttura.

10 Analogamente per un momento applicato che abbiamo

$$W_e = \frac{1}{2} M \theta_M \tag{48.5}$$

Potenziale di lavoro esterno

$$\mathcal{W}_e \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega \mathbf{u}^T \mathbf{b} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} \mathrm{d}\Gamma + \mathbf{uP} \tag{48.6}$$

Si noti che l'energia potenziale delle forze esterne non è la stessa del lavoro di esterna *aumento* carichi (che aumenta con lo spostamento) L'energia potenziale delle forze esterne è il lavoro di *costante* le forze che attraversano uno spostamento, sono così diverse da un fattore di 1/2.

Energia potenziale

$$\Pi \overset{\text{def}}{=} U - \mathcal{W}_e = \int_\Omega U_0 d\Omega - \left(\int_\Omega \mathbf{ub} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}\hat{\mathbf{t}} d\Gamma + \mathbf{uP} \right) \tag{48.7}$$

L'energia potenziale è quindi la somma dell'energia estensiva e della *potenziale del lavoro esterno* (e non il lavoro) come mostrato in Fig. 48.3, l'energia di tensione aumenta quadraticamente con lo spostamento, mentre il potenziale del lavoro esterno diminuisce con un aumento dello spostamento.

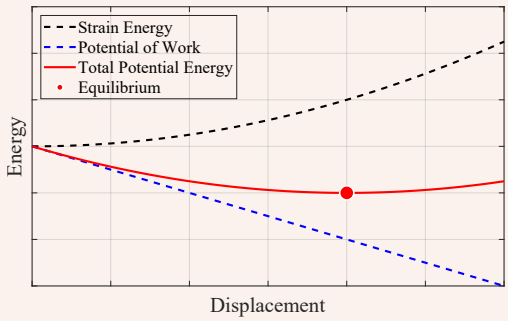


Figura 48.3: Energia potenziale

Energia potenziale complementare

$$\Pi^* \overset{\text{def}}{=} U^* - \mathcal{W}_e^* = \int_\Omega U_0^* d\Omega - \left(\int_\Omega \mathbf{ub} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}\hat{\mathbf{t}} d\Gamma + \mathbf{uP} \right)$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

48.1.5 Espressioni virtuali

11 Va notato che le quantità virtuali sono precedute da δ. considerando che non assegnamo a questo simbolo qualsiasi particolare significato matematico, questo stesso δ sarà utilizzato per indicare l'operatore differenziale nel principio del minimo totale (o complementare) potenziale energia.

Energia virtuale interna $\delta\overline{U} = -\delta\overline{W}_i \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}d\Omega$

Energia virtuale dello Strain $\delta\overline{U}^* = -\delta\overline{W}_i^* \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}\delta\bar{\boldsymbol{\sigma}}d\Omega$

Lavoro virtuale esterno $\delta\overline{W}_e \overset{\text{def}}{=} \int_{\Gamma_t} \delta\bar{\mathbf{u}}^t\hat{\mathbf{t}}d\Gamma + \int_\Omega \delta\bar{\mathbf{u}}^t\mathbf{b}d\Omega$

Lavoro virtuale esterno complementare

$$\delta\overline{W}_e^* \overset{\text{def}}{=} \int_{\Gamma_u} \hat{\mathbf{u}}^t\delta\bar{\mathbf{t}}d\Gamma \tag{48.8}$$

48.1.6 Osservazioni

48.1.6.1 Lavoro interno contro energia da sforzo

12 Durante l'incremento di tensione, il lavoro svolto dalle forze interne in un elemento differenziale sarà il negativo di quello eseguito da sottolinea agire su di esso.

$$W_i \overset{\text{def}}{=} -\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}d\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}\Omega$$

13 Se il solido elastico estenso è stato permesso di tornare lentamente alla loro stato non teso, allora il solido restituirebbe l'opera eseguita dal forze esterne. Ciò è dovuto al rilascio di energia da sforzo immagazzinata nel solido.

14 Così, in assenza di ceppi iniziali,

$$U = -W_i$$

15 Il lavoro interno dipende dalla storia del carico, questo è illustrato considerando un membro assiale sottoposto a due casi di carico, Fig. 48.4: a) Ceppi termici iniziali (senza aumento di stress corrispondente), seguiti di una forza esterna; e b) Forza esterna, seguita

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

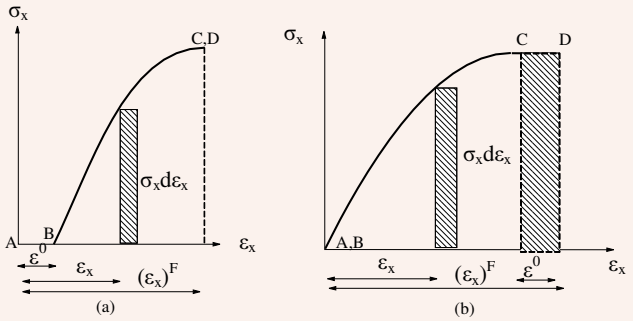


Figura 48.4: Effetti delle storie di carico su U e W_i

da tensione termica. In entrambi i casi il lavoro interno è uguale all'area sotto la curva ABCD.

$$
\begin{aligned}
U_i &= \int_0^L \left(\int_0^{(\varepsilon_x)_F} \sigma_{xx} \mathrm{d}\varepsilon_x \right) A \mathrm{d}x \\
W_i^a &= -U_i \\
W_i^b &= -U_i - \int_0^L \left(\int_0^{\varepsilon^0} \sigma_{xx} \mathrm{d}\varepsilon_x \right) A \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Quindi, W_i non è sempre uguale a $-U_i$.

48.1.6.2 indipendenza del percorso di lavoro esterno

16 In questa sezione cerchiamo di dimostrare che il lavoro totale svolto in corso dallo stato A alla B è indipendente dal percorso.

17 In 2D l'espressione differenziale del lavoro è data da

$$\mathrm{d}W_e = F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y \tag{48.9}$$

18 Dal calcolo, una condizione necessaria e sufficiente per $\mathrm{d}W_e$ per essere il differenziale esatto è che

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \tag{48.10}$$

19 Se la forza doveva muoversi lungo un contorno chiuso (o da A a B e poi torna a A lungo qualsiasi percorso arbitrario), corrispondente Γ, poi dal teorema di Green (Eq. R.2.6) noi abbiamo

$$\oint (R\mathrm{d}x + S\mathrm{d}y) = \int_\Gamma \left(\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{48.11}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Se lasciamo $R = F_x$ e $S = F_y$Allora

$$W_e = \oint (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y) = \int_\Gamma \underbrace{\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)}_{0} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{48.12}$$

20 Così, da Eq. 48.10 il lavoro è pari a zero,

21 Se decomporremo il sentiero

$$W_e = \oint = \int_A^B + \int_B^A = 0 \Rightarrow \int_A^B = -\int_B^A \tag{48.13}$$

poi, l'integrazione per il lavoro porta a

$$W_e = \int_A^B (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y) \tag{48.14}$$

che è il percorso indipendente.

22 Si noti che se non si fa alcun lavoro netto nel muoversi intorno a un percorso chiuso, il si dice che il sistema sia *conservatore*. Questo è il caso per puramente sistemi elastici.

23 Quando si verificano deformazioni di attrito o plastica (o smorzata), allora ci piacerebbe avere *non conservativo* sistema.

48.1.7 Applicazioni a elementi 1D

48.1.7.1 Energia complementare, elastico lineare U^*

Membri assiali

$$\left.\begin{aligned} U^* &= \int_\Omega \varepsilon \sigma d\Omega \\ \sigma &= \frac{P}{A} \\ \varepsilon &= \frac{P}{AE} \\ d\Omega &= A dx \end{aligned}\right\} U^* = A \int_\Omega \int_0^L \frac{P}{AE} \frac{dP}{A} dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{P^2}{AE} dx$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Membri della flessione

$$\left.\begin{aligned} U^* &= \int_\Omega \varepsilon E \delta\varepsilon d\Omega \\ \sigma_x &= \frac{M_z y}{I_z} \\ \varepsilon_x &= \frac{M_z y}{EI_z} \\ d\Omega &= dAdx \\ \int_A y^2 dA &= I_z \end{aligned}\right\} U^* = \int_0^L M(x)\frac{M(x)}{EI_z}dx = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2(x)}{EI_z}dx \tag{48.15}$$

48.1.7.2 Energia, elastico lineare U

Membri assiali

$$\left.\begin{aligned} U &= \int_\Omega \varepsilon\sigma d\Omega \\ \varepsilon &= \frac{du}{dx} \\ \sigma &= \frac{1}{E}\frac{du}{dx} \\ d\Omega &= Adx \end{aligned}\right\} U = \frac{A}{E}\int_\Omega\int_0^L \frac{du}{dx}\frac{d^2u}{dx^2}dx = \frac{A}{2E}\int_0^L \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$$

Membri della flessione

$$\left.\begin{aligned} U &= \int_\Omega \varepsilon E \delta\varepsilon d\Omega \\ \sigma_x &= \frac{M_z y}{I_z} \\ \varepsilon_x &= \frac{M_z y}{EI_z} \\ d\Omega &= dAdx \\ \int_A y^2 dA &= I_z \\ \frac{M(x)}{EI} &= \frac{d^2y}{dx^2} \end{aligned}\right\} U = \int_0^L M(x)\frac{M(x)}{EI_z}dx = \int_0^L EI_z y''\frac{EI_z y''}{EI_z}dx = EI_z\int_0^L (y'')^2 dx$$

48.1.7.3 Energia virtuale di sforzo complementare δU^*

Membri assiali

24 Le tensioni e le forze costituiscono i quantitativi virtuali identificati da δ.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

Sistema elastico

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U}^* &= \int_\Omega \delta\overline{\sigma}\varepsilon d\Omega \\ d\Omega &= A dx \end{aligned}\right\} \delta\overline{U}^* = A\int_0^L \delta\overline{\sigma}\varepsilon dx$$

Elastico lineare

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U}^* &= \int_\Omega \varepsilon\delta\overline{\sigma} d\Omega \\ \delta\overline{\sigma} &= \frac{\delta\overline{P}}{A} \\ \varepsilon &= \frac{P}{AE} \\ d\Omega &= A dx \end{aligned}\right\} \delta\overline{U}^* = \int_0^L \underbrace{\delta\overline{P}}_{\text{“}\delta\overline{\sigma}\text{”}} \underbrace{\frac{P}{AE}}_{\text{“}\varepsilon\text{”}} dx$$

Membri della flessione

Sistema elastico

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U}^* &= \int_\Omega \delta\overline{\sigma}_{xx}\varepsilon_x d\Omega \\ \delta\overline{M}(x) &= \int_A \delta\overline{\sigma}_x y dA \Rightarrow \frac{\delta\overline{M}(x)}{y} = \int_A \delta\overline{\sigma}_x dA \\ \phi &= \frac{\varepsilon}{y} \Rightarrow \phi y = \varepsilon_x \\ d\Omega &= \int_0^L\int_A dA dx \end{aligned}\right\} \delta\overline{U}^* = \int_0^L \delta\overline{M}(x)\phi dx$$

Elastico lineare

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U}^* &= \int_\Omega \varepsilon \underbrace{E\delta\overline{\varepsilon}}_{\delta\overline{\sigma}} d\Omega \\ \sigma_x &= \frac{M_z y}{I_z} \\ \varepsilon_x &= \frac{M_z y}{EI_z} \\ d\Omega &= dA dx \\ \int_A y^2 dA &= I_z \end{aligned}\right\} \delta\overline{U}^* = \int_0^L \underbrace{\delta\overline{M}(x)}_{\text{“}\delta\overline{\sigma}\text{”}} \underbrace{\frac{M(x)}{EI_z}}_{\text{“}\varepsilon\text{”}} dx$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Membri torsionali

Sistema elastico

$$\left.\begin{aligned} \delta U^* &= \int_\Omega \varepsilon \delta\sigma dvol \\ \delta U^* &= \int_\Omega \delta\tau_{xy}\gamma_{xy} dvol \\ \tau_{xy} &= \frac{Tr}{J} \\ \mathrm{d}\Omega &= A dx \end{aligned}\right\} \delta U^* = \int_0^L \frac{\delta T}{J}\gamma_{xy}\mathrm{d}x \tag{48.16}$$

Elastico lineare

$$\left.\begin{aligned} \delta U^* &= \int_\Omega \delta\tau_{xy} \underbrace{G\tau_{xy}}_{\gamma_{xy}} dvol \\ \tau_{xy} &= \frac{Tr}{J} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \mathrm{d}\Omega &= r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}x \\ J &= \int_o^r\int_0^{2\pi} r^2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \end{aligned}\right\} \delta U^* = \int_0^L \underbrace{\delta T}_{\text{“}\delta\sigma\text{”}} \underbrace{\frac{T}{GJ}}_{\text{“}\varepsilon\text{”}} \mathrm{d}x \tag{48.17}$$

48.1.7.4 Energia virtuale δU

25 L'energia virtuale interna è espressa in termini di sforzo o spostamenti interni.

26 Condurrà alla formulazione alla radice del metodo degli elementi finiti.

Membri assiali

27 Le macchie e gli spostamenti costituiscono le quantità virtuali identificate da δ.

Sistema elastico

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U} &= \int_\Omega \sigma_x \delta\overline{\varepsilon}_x d\Omega \\ d\Omega &= A dx \end{aligned}\right\} \delta\overline{U} = A\int_0^L \sigma_x \delta\overline{\varepsilon}_x dx$$

Elastico lineare

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

$$\left.\begin{aligned}\delta\overline{U} &= \int \sigma_x \delta\overline{\varepsilon}_x d\Omega \\ \sigma_x &= E\varepsilon_x = E\frac{du}{dx} \\ \delta\overline{\varepsilon}_x &= \frac{d(\delta\overline{u})}{dx} \\ d\Omega &= A dx\end{aligned}\right\} \delta\overline{U} = \int_0^L \underbrace{E\frac{du}{dx}}_{"\sigma"} \underbrace{\frac{d(\delta\overline{u})}{dx}}_{"\delta\overline{\varepsilon}"} \underbrace{A dx}_{d\Omega}$$

Membri della flessione

Sistema elastico

$$\left.\begin{aligned}\delta\overline{U} &= \int \sigma_x \delta\overline{\varepsilon}_x d\Omega \\ M(x) &= \int_A \sigma_x y dA \Rightarrow \frac{M(x)}{y} = \int_A \sigma_x dA \\ \delta\overline{\phi} &= \frac{\delta\overline{\varepsilon}_x}{y} \Rightarrow \delta\overline{\phi} y = \delta\overline{\varepsilon}_x \\ d\Omega &= \int_0^L \int_A dA dx\end{aligned}\right\} \delta\overline{U} = \int_0^L M(x)\delta\overline{\phi} dx$$

Elastico lineare

$$\left.\begin{aligned}\delta\overline{U} &= \int_\Omega \sigma_x \delta\overline{\varepsilon}_x d\Omega \\ \left.\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{M(x)y}{I_z} \\ M(x) &= \frac{d^2v}{dx^2} E I_z\end{aligned}\right\} \sigma_x &= \underbrace{\frac{d^2v}{dx^2}}_{\kappa} Ey \\ \delta\overline{\varepsilon}_x &= \frac{\delta\overline{\sigma}_x}{E} = \frac{d^2(\delta\overline{v})}{dx^2} y \\ d\Omega &= A dx\end{aligned}\right\} \delta\overline{U} = \int_0^L \int_A \frac{d^2v}{dx^2} Ey \frac{d^2(\delta\overline{v})}{dx^2} y dA dx$$

Since $\int_A y^2 dA = I_z \Rightarrow$

$$\delta\overline{U} = \int_0^L \underbrace{EI_z \frac{d^2v}{dx^2}}_{"\sigma"} \underbrace{\frac{d^2(\delta\overline{v})}{dx^2}}_{"\delta\overline{\varepsilon}"} dx$$

48.1.8 Sintesi della vw e del cvw

28 Tabella 48.1 è una visione "panoramica' delle varie espressioni precedentemente definite.

COPIA DI REVISIONE

Nota: bisogno di ricavare energia potenziale in termini di spostamenti in trave e libro

Tabella 48.1: Riassunto delle equazioni per vw, cvw, pe, cpe

Energie interne di Strain				
	Energia dello straccio $\delta\overline{U}$		**Compl. Energia della Strain: $\delta\overline{U}^*$**	
	Elastico	**Elastico lineare**	**Elastico**	**Elastico lineare**
Axial	$A\int_0^L \sigma\delta\overline{\varepsilon}dx$	$\int_0^L \underbrace{E\frac{du}{dx}}_{\sigma}\underbrace{\frac{d(\delta\overline{u})}{dx}}_{\delta\overline{\varepsilon}}\underbrace{Adx}_{d\Omega}$	$A\int_0^L \delta\overline{\sigma}\varepsilon dx$	$\int_0^L \underbrace{\delta\overline{P}}_{\delta\overline{\sigma}}\underbrace{\frac{P}{AE}}_{\varepsilon}dx$
Flexure	$\int_0^L M\delta\overline{\phi}dx$	$\int_0^L \underbrace{EI_z\frac{d^2v}{dx^2}}_{\sigma}\underbrace{\frac{d^2(\delta\overline{v})}{dx^2}}_{\delta\overline{\varepsilon}}dx$	$\int_0^L \delta\overline{M}\phi dx$	$\int_0^L \underbrace{\delta\overline{M}}_{\delta\overline{\sigma}}\underbrace{\frac{M}{EI_z}}_{\varepsilon}dx$
Lavoro virtuale esterno				
P	$\sum_i^n P_i\delta\overline{\Delta}_i$		$\sum_i^n \delta\overline{P}_i\Delta_i$	
M	$\sum_i^n M_i\delta\overline{\theta}_i$		$\sum_i^n \delta\overline{M}_i\theta_i$	
w	$\int_0^L w(x)\delta\overline{v}(x)dx$		$\int_0^L \delta\overline{w}(x)v(x)dx$	
Energia				
	Energia U (Spostamento)		**Compl. Energia U^* (Force)**	
Axial	$\frac{1}{2}\frac{A}{E}\int_0^L \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$		$\frac{1}{2}\int_0^L \frac{P^2}{AE}dx$	
Flexural	$\frac{1}{2}\int_0^L EI_z\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx$		$\frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI_z}dx$	

Please note that this section contains floating elements (figures and/or tables) that need to be printed before the next one. As a result, you may encounter blank spaces or gaps in here.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

48.2 Approcci

29 Da ora, abbiamo definito ogni ingrediente delle equazioni ancora da derivare; di nuovo, in quanto tali termini erano indipendenti l'uno dall'altro, e non c'era alcuna relazione tra loro.

30 Quindi, prima di approfondire i dettagli, è meglio guardare ai due approcci possibili: i principi del lavoro virtuale (PVW) e il principio del completamento Lavoro virtuale (PCVW) che si riferiscono

Forza sistemi che soddisfano i requisiti di equilibrio
Deformazione sistemi che soddisfano il requisito della cinematica.

31 Abbiamo chiaramente due percorsi da percorrere per combinare quantità virtuali e reali, Tabella 48.2e Fig. 48.5, per la derivazione dei due principi.

Tabella 48.2: Alternate i percorsi per i principi del lavoro virtuale e il principio di un'opera virtuale complementare

Principio	Virtuale			Segreto	Realtà	
	Avviamento	Soddisfazione			Soddisfazione	
	con	Debole	B.C.		Forte	B.C
CVW $\delta\overline{U}^* = \delta\overline{W}_e^*$	Forze.	Equilibrio	Naturale Γ_t	Centrale.	Compatibilità	Essenzia
VW $\delta\overline{U} = \delta\overline{W}_e$	Centrale.	Compatibilità	Essenziale Γ_u	Forze	Equilibrio	Naturale

32 Si noti che per compatibilità, intendiamo

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

e per equilibrio:

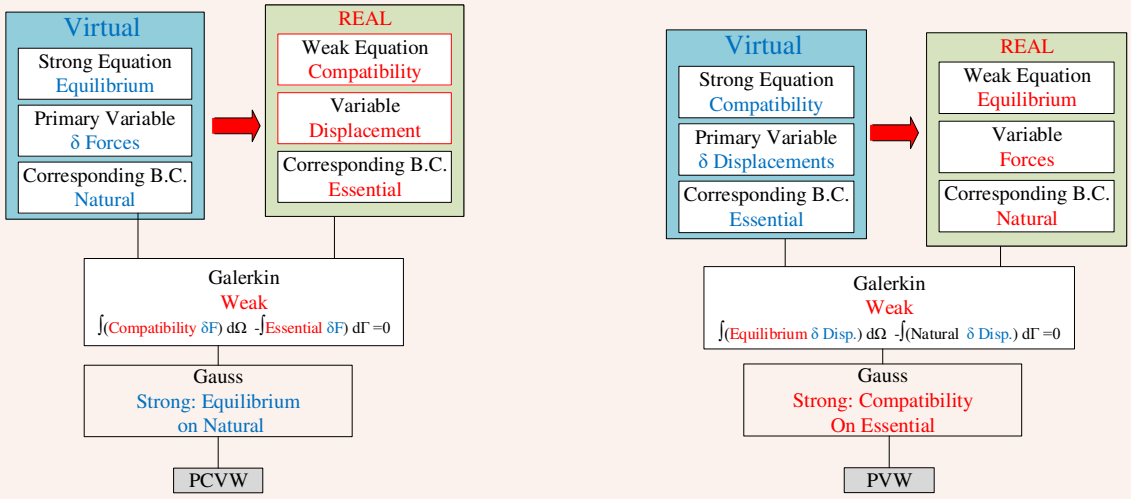
$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0$$

33 Tuttavia, prima di andare avanti, il lettore dovrebbe avere una buona comprensione di, Fig. 48.5:

Forte-serbante forme coperte §47.2.3.
BC essenziale e naturale coperti (§47.2.6)
Elasticità (Equazioni di base)§O.8)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Lavoro virtuale complementare

(b) Lavoro virtuale

Figura 48.5: Diagrammi illustrativi dei principi delle opere virtuali e complementari

48.3 Lavoro virtuale

48.3.1 Principio del lavoro virtuale complementare (PCVW)

34 Iniziamo con la derivazione del PCVW, in quanto il lettore può già avere familiarità con il metodo (precedentemente e schematicamente introdotto nel §24.2) per la determinazione delle deflettenze).

48.3.1.1 Ritiro

35 La derivazione del principio di lavoro virtuale complementare inizia con l'esistenza di un insieme staticamente ammissibile di forza virtuale (equilibrio soddisfacente) e la corrispondente condizione limite naturale. Cerchiamo di raggiungere i corrispondenti spostamenti reali cinematici ammissibile che soddisfano anche le condizioni essenziali del limite, Tabella 48.2Fico. 48.5a.

36 La condizione cinematica (compatibilità) (scambio di profilo) è data da

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

37 Si noti che questo può essere riscritto come (Eq. O.7)

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

e che in seguito (sotto la derivazione del PVW), l'equazione dell'equilibrio sarà espressa come (Eq. O.9).

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} = 0$$

or

$$\underbrace{\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}}_{\text{div } \boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{b} = 0$$

38 Le condizioni di confine naturali sono espresse come

$$u_i = \hat{u} \text{ on } \Gamma_u$$

dove $\hat{u}$ sono noti spostamenti lungo Γ_u.

39 Queste due equazioni sono riscritte come

$$\varepsilon_{ij} - u_{i,j} = 0; \qquad u_i - \hat{u} = 0$$

40 Ora soddisfaremo in una media (debole su un integrale) percepiamo queste forti equazioni differenziali utilizzando le *Metodo di Galerkin*. Prima equazione precoce dal campo di stress virtuale $\delta\overline{\sigma}_{ij}$ e integrarsi sul volume; premultiply second da corrispondenti trazioni virtuali $\delta\bar{t}_i$ e integrarsi sulla superficie corrispondente, cedendo la forma debole

$$\int_\Omega \underbrace{\left(\varepsilon_{ij} - u_{i,j}\right) \delta\overline{\sigma}_{ij}}_{\text{Compatibility}} d\Omega - \int_{\Gamma_u} \underbrace{\left(u_i - \hat{u}\right) \delta\bar{t}_i}_{\text{Essential B.C.}} d\Gamma = 0 \tag{48.18}$$

41 Concentrati su $\int_{\Gamma_u} u_i \delta\bar{t}_i d\Gamma$

$$\int_{\Gamma_u} u_i \delta\bar{t}_i d\Gamma = \int_{\Gamma} u_i \delta\bar{t}_i d\Gamma - \int_{\Gamma_t} u_i \delta\bar{t}_i d\Gamma$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

e notare che il secondo termine sul lato destro è zero da allora

$$\delta \bar{t}_i = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_t$$

per soddisfare le condizioni di confine naturali.

42 Da allora

$$\int_{\Gamma_u} u_i \delta \bar{t}_i d\Gamma = \int_{\Gamma} u_i \delta(\overline{\sigma}_{ij} n_j) d\Gamma \tag{48.19}$$

43 Rivolgiamo il nostro indirizzo $u_i \delta \bar{t}_i$ termine applicando il teorema di Gauss (§R) insieme $t_i = \sigma_{ij} n_j$ poi

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} t_i u_i d\Gamma &= \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} (\sigma_{ij} u_i) n_j d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} (\sigma_{ij} u_i)_{,j} d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} u_i + \sigma_{ij} u_{i,j}) d\Omega\end{aligned}$$

Così ora possiamo convertire Eq. 48.19 in un volume integrale

$$\int_{\Gamma} u_i \delta \bar{t}_i d\Gamma = \int_{\Omega} u_i \delta \overline{\sigma}_{ij,j} d\Omega + \int_{\Omega} u_{i,j} \delta \overline{\sigma}_{ij} d\Omega$$

44 Le tensioni virtuali assunte devono essere staticamente ammissibili (cioè in equilibrio) all'interno Ω (Contrariamente, nel Principio del Lavoro Virtuale/Slocamento, gli spostamenti virtuali devono essere cinematicamente ammissibile). In assenza di forze corporee:

$$\delta \overline{\sigma}_{ij,j} = 0 \ \text{ in } \ \Omega$$

or

$$\int_{\Gamma_u} u_i \delta \bar{t}_i d\Gamma = \int_{\Omega} u_{i,j} \delta \overline{\sigma}_{ij} d\Omega$$

45 Combinando quest'ultima equazione con Eq. 48.18 porta a

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} u_{i,j} \delta \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_u} \hat{u} \delta t_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{i,j} \delta \sigma_{ij} d\Omega = 0 \tag{48.20}$$

che semplifica in

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_u} \hat{u} \delta t_i d\Gamma = 0 \tag{48.21}$$

46 Ciascuno dei termini è un'espressione di lavoro, il primo corrisponde al lavoro virtuale complementare interno e il secondo al lavoro virtuale complementare esterno, Eq. 48.8

$$-\delta W_i^* - \delta W_e^* = 0 \tag{48.22}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

or

$$\delta U_i^* = \delta W_e^* \tag{48.23}$$

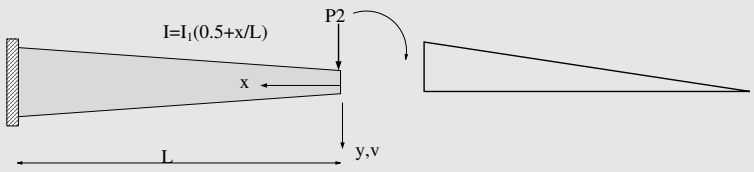
che è il principio del lavoro complementare virtuale (o forze virtuali)

Definition 48.2: Principio del lavoro complementare virtuale

Un sistema deformabile soddisfa tutti i requisiti cinetici (Eq. 48.2) se la somma del lavoro virtuale complementare esterno e il lavoro virtuale interno complementari è zero per tutte le sollecitazioni virtuali stabilmente ammissibile $\delta\overline{\sigma}_{ij}$.

Questo principio porta alla matrice di flessibilità.

48.3.1.2 Ex 48.1: PCVW, trave a sbalzo rastremata



$$\int_0^L \underbrace{\delta\overline{M}\frac{M}{EI_z}dx}_{\text{Internal}} = \underbrace{\delta\overline{P}\Delta}_{\text{External}}$$

Ecco: $\delta\overline{M}$ e $\delta\overline{P}$ sono le forze virtuali, e $\frac{M}{EI_z}$ e Δ sono gli spostamenti reali.

If $\delta\overline{P} = 1$Allora $\delta\overline{M} = x$ e $M = P_2 x$ or:

$$(1)\Delta = \int_0^L x\frac{P_2 x}{EI_1(.5+\frac{x}{L})}dx = \frac{P_2}{EI_1}\int_0^L \frac{x^2}{\frac{L+x}{2L}}dx = \frac{P_2 2L}{EI_1}\int_0^L \frac{x^2}{L+x}dx$$

Da *Mathematica* lo sappiamo:

$$\int \frac{x^2}{a+bx} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bx)^2 - 2a(a+bx) + a^2\ln(a+bx)dx\right]$$

Sostituire $a = L$ e $b = 1$ otteniamo:

$$\Delta = \frac{2P_2L}{EI_1}\left[\frac{1}{2}(L+x)^2 - 2L(L+x) + L^2\ln(L+x)\right]\Big|_0^L = \frac{2P_2L}{EI_1}\left[L^2(\ln 2 - \frac{1}{2})\right] = \frac{P_2L^3}{2.5887EI_1}$$

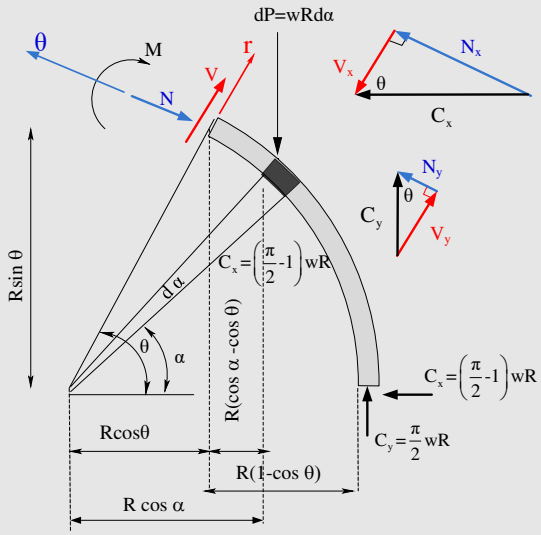
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Analogamente:

$$\theta = \int_0^L \frac{M(1)}{EI_1\left(.5+\frac{x}{L}\right)} = \frac{2ML}{EI_1}\int_0^L \frac{1}{L+x} = \frac{2ML}{EI_1}\ln(L+x)\,|_0^L = \frac{ML}{.721EI_1}$$

48.3.2 Ex 48.2: Arco semicerchio a tre cerniere



Cerchiamo di determinare la deviazione verticale della corona dei tre cernieri arco semicircolare stazionosamente determinato sotto il proprio peso morto w.
Cerchiamo prima di determinare l'espressione analitica del diagramma del momento. Dalle statiche si può dimostrare che le reazioni verticali e orizzontali are $R_v = \frac{\pi}{2}wR$ and $R_h = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)wR$.
Poi considerando il diagramma del corpo libero dell'arco, e sommando le forze nella direzione radiale ($\Sigma F_R = 0$):

$$-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)wR\cos\theta + \frac{\pi}{2}wR\sin\theta - \int_{\alpha=0}^{\theta} wR\mathrm{d}\alpha\sin\theta + V = 0$$
$$V = wR\left[\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cos\theta + \left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\sin\theta\right]$$

Analogamente, se consideriamo la somma delle forze nella direzione assiale ($\Sigma F_T = 0$):

$$\left(\frac{\pi}{2}-1\right)wR\sin\theta + \frac{\pi}{2}wR\cos\theta - \int_{\alpha=0}^{\theta} wR\mathrm{d}\alpha\cos\theta + N = 0$$
$$N = wR\left[\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cos\theta - \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\sin\theta\right]$$

Ora possiamo considerare la terza equazione dell'equilibrio ($\Sigma M_\theta = 0$):

$$\left(\frac{\pi}{2}-1\right)wR\cdot R\sin\theta - \frac{\pi}{2}wR^2(1-\cos\theta) +$$
$$\int_{\alpha=0}^{\theta} wR\mathrm{d}\alpha\cdot R(\cos\alpha-\cos\theta) + M = 0$$
$$M = wR^2\left[\frac{\pi}{2}(1-\sin\theta) + \left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cos\theta\right]$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

La vera curvatura ϕ si ottiene dividendo il momento per EI

$$\phi = \frac{wR^2}{EI}\left[\frac{\pi}{2}(1-\sin\theta) + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\cos\theta\right]$$

La forza virtuale δP sarà un punto verticale unità nel direzione della deviazione desiderata, causando un momento interno virtuale

$$\delta M = \frac{R}{2}\left[1 - \cos\theta - \sin\theta\right] \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

Quindi, l'applicazione dell'equazione di lavoro virtuale produce:

$$\begin{aligned}\underbrace{1}_{\delta P}\cdot\Delta &= 2\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{wR^2}{EI}\left[\frac{\pi}{2}(1-\sin\theta) + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\cos\theta\right]}_{\phi} \cdot \underbrace{\frac{R}{2}\cdot\left[1-\cos\theta-\sin\theta\right]}_{\delta M}\underbrace{R\mathrm{d}\theta}_{\mathrm{d}x} \\ &= \frac{wR^4}{16EI}\left[7\pi^2 - 18\pi - 12\right] \\ &= 0337\frac{wR^4}{EI}\end{aligned}$$

48.3.3 Principio del lavoro virtuale (PVW)

48.3.3.1 Ritiro

47 La derivazione del principio di lavoro virtuale inizia con l'esistenza di spostamenti virtuali cinematicamente ammissibili (compatibilità soddisfacente) e la corrispondente condizione limite essenziale.

48 Cerchiamo il corrispondente insieme staticamente ammissibile di forze reali che soddisfano anche le corrispondenti condizioni di confine naturale.

49 Le tensioni interne sono in equilibrio se

$$\underbrace{\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}}_{\text{div }\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{b} = 0 \tag{48.24}$$

50 La corrispondente condizione di confine essenziale è data da

$$\mathbf{t} - \hat{\mathbf{t}} = 0 \quad \text{on } \Gamma_t \quad \text{Essential B.C.} \tag{48.25}$$

dove $\hat{t}$ sono noti trazione lungo Γ_t.

51 Equazioni 48.24 e 48.25 costituire una campo di stress ammissibile.

52 Noi faremo rispettare la soddisfazione della condizione locale di equilibrio Eq. 48.24 e la condizione di confine statica Eq. 48.25 in forma globale (o integrale/ debole) che si compie moltiplicando entrambe le equazioni per uno spostamento virtuale $\delta\overline{\mathbf{u}}$.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

53 La forma debole è così data da

$$-\int_{\Omega} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \underbrace{\left(\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{b}\right)}_{\text{Equil.}} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \underbrace{(\mathbf{t}-\hat{\mathbf{t}})}_{\text{Essential B.C.}} d\Gamma = 0 \tag{48.26}$$

54 Un requisito importante per gli spostamenti (virtuali) è che devono soddisfare il requisito di compatibilità (contrariamente, nel principio del lavoro virtuale complementare, le sollecitazioni dovevano essere staticamente ammissibile). Gli spostamenti virtuali devono soddisfare le condizioni essenziali del limite:

$$\mathbf{L}\delta\overline{\mathbf{u}} = \text{div}\delta\overline{\mathbf{u}} = \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{48.27}$$

55 Concentrati su $\int_{\Gamma_t} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} d\Gamma$

$$\int_{\Gamma_t} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} d\Gamma = \int_{\Gamma} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} d\Gamma$$

Cerchiamo di convertire in un volume integrale attraverso il teorema Gauss. Richiamo la definizione del vettore di trazione

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n} \quad \text{or} \quad t_i = \sigma_{ij} n_j$$

applicazione teorema di Gauss otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} d\Gamma &= \int_{\Gamma} (\delta\overline{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\sigma})\mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \text{div}(\delta\overline{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\sigma}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \text{div}\delta\overline{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \text{div}\boldsymbol{\sigma} d\Omega\end{aligned}$$

Tuttavia, $\text{div}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}$ così

$$\int_{\Gamma} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} d\Gamma = \int_{\Omega} \text{div}\delta\overline{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega$$

56 A seguito di alcuni passi saltati ed eccitanti, l'equazione sopra si produce il principio del lavoro virtuale (sostituzioni)

$$\underbrace{\int_{\Omega} \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega}_{-\delta\overline{W}_i = \delta\overline{U}_i} \underbrace{- \int_{\Omega} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma}_{-\delta\overline{W}_e} = 0 \tag{48.28}$$

or

$$\delta\overline{U}_i = \delta\overline{W}_e$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Definition 48.3: Principio di spostamento virtuale

Un sistema deformabile è in equilibrio (Eq. 48.24) se la somma del lavoro virtuale esterno e il lavoro virtuale interno è zero per spostamenti virtuali $\delta\overline{\mathbf{u}}$ che soddisfano l'equazione cinematica e le condizioni di confine cinematiche (Eq. 48.27).

57 Per elementi dimensionali, questo riduce a

$$\underbrace{\int \sigma \delta\overline{\varepsilon} d\Omega}_{\delta\overline{U}} = \underbrace{P\delta\overline{v}}_{\delta\overline{W}}$$

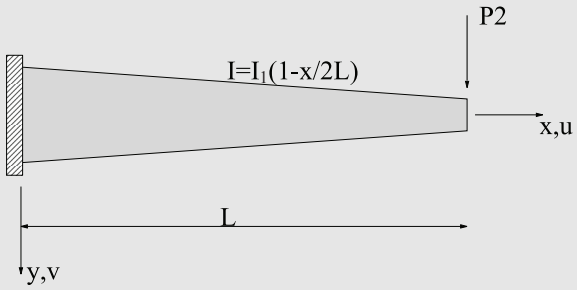
Nota che la posa $\delta U - \delta W = 0$, possiamo fattorizzare tutti i termini di un dato δv_i e impostarlo uguale a zero. Questo si tradurrà in

$$A_1\delta v_1 + A_2\delta v_2 + \cdots + A_n\delta v_n = 0$$

Perché? δv_i può essere scelto arbitrario, poi ciascuno A_i deve essere uguale a zero. Ciò si tradurrà in un sistema di n equazioni lineari:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta v_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta v_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta v_n \end{bmatrix}}_{\text{Ignore}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix}}_{\text{Solve}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{48.29}$$

48.3.3.2 Ex 48.3: PVW, trave a sbalzo rastremata



Nell'applicazione del PVW, dobbiamo avere un ravvicinamento della situazione reale v e quello virtuale $\delta\overline{v}$. Queste espressioni devono soddisfare le condizioni di confine essenziali (spostamento e pendenza per raggi).
Le soluzioni approssimative proposte a questo problema sono

$$v = \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right) v_2 \tag{48.30}$$

$$v = \left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right] v_2 \tag{48.31}$$

COPIA DI REVISIONE

Essi soddisfano l'essenziale B.C: $v = v' = 0$ at $x = 0$.

Consideriamo 3 casi:

Soluzione	Realtà	Virtuale
1	Eqn. 48.30	Eqn. 48.31
2	Eqn. 48.30	Eqn. 48.30
3	Eqn. 48.31	Eqn. 48.31

- L'applicazione del PVW richiede la valutazione delle funzioni seconda derivata.

	Trigonometrico (Eqn. 48.30)	Polinomio (Eqn. 48.31)
v	$\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)v_2$	$\left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2-2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]v_2$
$\delta\overline{v}$	$\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)\delta\overline{v}_2$	$\left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2-2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]\delta\overline{v}_2$
v''	$\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}v_2$	$\left(\frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}\right)v_2$
$\delta\overline{v}''$	$\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\delta\overline{v}_2$	$\left[\frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}\right]\delta\overline{v}_2$

$$\delta\overline{U}=\int_0^L EI_z\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2(\delta\overline{v})}{dx^2}dx;\qquad \delta\overline{W}=P_2\delta\overline{v}_2$$

Soluzione 1:

$$\delta\overline{U}=\int_0^L \underbrace{\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)v_2}_{v''}\underbrace{\left(\frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}\right)\delta\overline{v}_2}_{\delta\overline{v}''}\underbrace{EI_1\left(1-\frac{x}{2L}\right)}_{EI}dx$$

$$=\frac{3\pi EI_1}{2L^3}\left[1-\frac{10}{\pi}+\frac{16}{\pi^2}\right]v_2\delta\overline{v}_2$$

$$\delta\overline{W}=P_2\delta\overline{v}_2$$

che produce:

$$v_2=\frac{P_2L^3}{2.648EI_1}$$

Soluzione 2:

$$\delta\overline{U}=\int_0^L \underbrace{\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\delta\overline{v}_2}_{v''}\underbrace{\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\delta\overline{v}_2}_{\delta\overline{v}''}\underbrace{EI_1\left(1-\frac{x}{2L}\right)}_{EI}dx=\frac{\pi^4EI_1}{32L^3}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{\pi^2}\right)v_2\delta\overline{v}_2$$

$$\delta\overline{W}=P_2\delta\overline{v}_2$$

che produce:

$$v_2=\frac{P_2L^3}{2.57EI_1}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Soluzione 3:

$$\delta\overline{U} = \int_0^L \underbrace{\left[\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right] v_2}_{v''} \underbrace{\left[\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right] \delta\overline{v}_2}_{\delta\overline{v}''} \underbrace{EI_1 \left(1 - \frac{x}{2L}\right)}_{EI} dx = \frac{9EI}{L^3} v_2 \delta\overline{v}_2$$

$$\delta\overline{W} = P_2 \delta\overline{v}_2$$

che produce:

$$v_2 = \frac{P_2 L^3}{9EI_1}$$

48.4 Principi di potenziale energia

58 Un approccio completamente diverso ma relativo sarà ora presentato: piuttosto che convolure quantità reali e virtuali, cercheremo semplicemente di minimizzare l'energia potenziale totale (o complementare). Questi due principi saranno derivati da quelli dell'energia virtuale di sforzo (e l'operazione inversa è naturalmente possibile).

59 È importante notare che qui, il δ l'operatore assumerà il suo pieno significato matematico: differenziale, mentre prima di esso ha implicito una quantità virtuale.

60 Si noti che il principio di energia potenziale complementare è solo leggermente rilevante, e non sarà discusso.

48.4.1 Principio di energia potenziale totale (PTPE)

61 Ripercorriamo questo principio, precedentemente affrontato in §47.3

48.4.1.1 Ritiro

62 Riminder: La differenziazione è il metodo matematico utilizzato per calcolare la variazione intorno a un punto.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

63 If U_0 è una funzione potenziale, prendiamo il suo differenziale $\delta U_0 = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij}$ e il teorema fondamentale del calcolo afferma che $\frac{d}{dx}\int_0^x f(u)du = f(x)$. Così

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta U_0}{\delta \varepsilon_{ij}} &= \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \\ U_0 &= \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \\ \frac{\delta}{\delta \varepsilon_{ij}} \int_0^x \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} &= \sigma_{ij} \end{aligned}\right\} \frac{\delta U_0}{\delta \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \Rightarrow \delta U_0 = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}$$

64 Il principio del lavoro virtuale (Eq. 48.28)

$$\int_\Omega \delta \overline{\varepsilon}_{ij} \sigma_{ij} d\Omega - \int_\Omega \delta \overline{u}_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \overline{u}_i \hat{t}_i d\Gamma = 0$$

può essere riscritto come

$$\int_\Omega \delta U_0 d\Omega - \int_\Omega \delta u_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u_i \hat{t}_i d\Gamma = 0$$

65 Fino a ora δ riferito a una quantità virtuale, ora facciamo l'interruttore e δ si riferirà alla variazione.

66 Se né le trazioni superficiali, né le forze del corpo alterano la loro magnitudine o direzioni durante la deformazione, questo può essere semplificato

$$\delta \left[\underbrace{\overbrace{\int_\Omega U_0 d\Omega}^{U} \overbrace{- \int_\Omega u_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} u_i \hat{t}_i d\Gamma}^{-\mathcal{W}_e}}_{\Pi} \right] = 0 \tag{48.32}$$

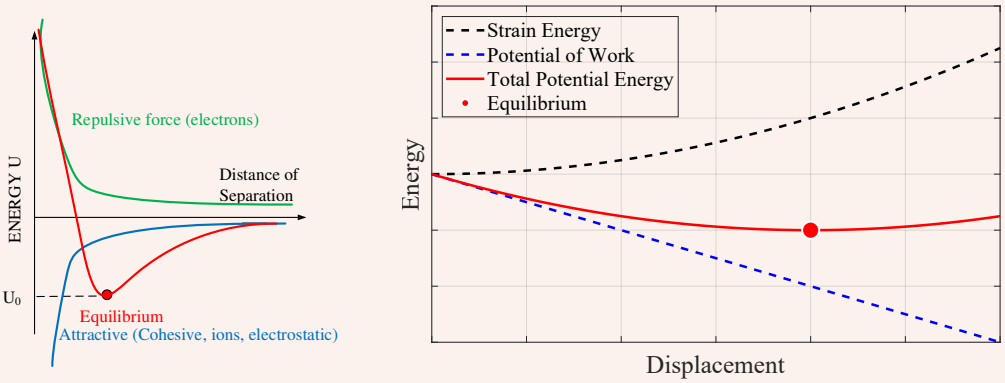
67 Confrontando quest'ultima equazione, con Eq. 48.7 Concludiamo che la variazione dell'energia potenziale è zero.

$$\delta \Pi = 0 \tag{48.33}$$

Questo è chiaramente illustrato in Fig. 48.6b dove l'equilibrio corrisponde al minimo dell'energia potenziale totale, analogo allo stato di equilibrio tra forze interatomiche nella meccanica quantistica, Fig. 48.6a.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Meccanica quantistica (b) Meccanica classica

Figura 48.6: Minimizzazione in meccanica quantistica e classica

Definition 48.4: Principio del valore stazionario dell'energia potenziale

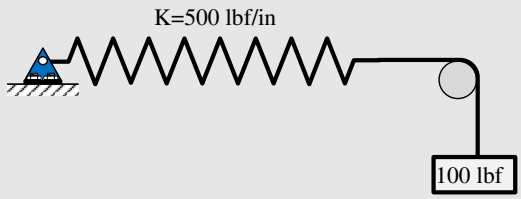
Di tutte le deformazioni cinematografiche ammissibili (scambiamenti che soddisfano le condizioni essenziali di confine), le deformazione effettive (quelle che corrispondono a sollecitazioni che soddisfa l'equilibrio) sono quelle per cui il potenziale totale energia assume un valore stazionario.

68 Per problemi che coinvolgono più gradi di libertà,

$$\delta\Pi = \underbrace{\frac{\partial\Pi}{\partial\Delta_1}\delta\Delta_1}_{0} + \underbrace{\frac{\partial\Pi}{\partial\Delta_2}\delta\Delta_2}_{0} + \cdots \underbrace{\frac{\partial\Pi}{\partial\Delta_n}\delta\Delta_n}_{0} = 0 \tag{48.34}$$

or n equazioni con n - Ignoti.

48.4.1.2 Ex 48.4: PTPE, primavera e massa



Cerchiamo di determinare la posizione di equilibrio della massa.
Newtonian $\Delta = \frac{F}{K} = \frac{100}{500} = 0.2''$
Lagrangian: L'energia della tensione U e potenziale del lavoro esterno W sono dati da

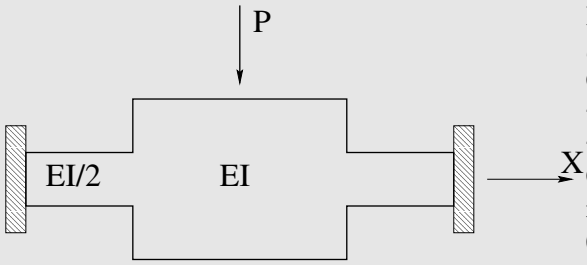
$$U = \frac{1}{2}u(Ku) = 250u^2 \qquad W_e = mgu = 100u$$

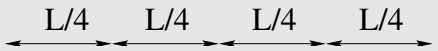
COPIA DI REVISIONE

Nota che non c'è $1/2$ in W_e perché la forza è costante durante il lavoro. Energia potenziale totale $\Pi = U - W_e$ e lo è $\Pi = 250u^2 - 100u$, deve essere stazionario

$$\delta\Pi = \frac{d\Pi}{du} = 0 \Rightarrow 500u - 100 = 0 \Rightarrow u = 0.2 \text{ in}$$

48.4.1.3 Ex 48.5: PTPE; trave a morsetto con varialble I





Prendiamo in considerazione questo $v = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$
Questa soluzione deve soddisfare l'essenziale B.C.: $v = v' = 0$ at $x = 0$; in secondo luogo, $v = v_{max}$ e $v' = 0$ at $x = \frac{L}{2}$.
Questo sarà applicato determinando i quattro parametri in termini di una singola quantità sconosciuta (4 equazioni e 4 B.C.):

$$\begin{array}{lll} @x = 0 & v = 0 & \Rightarrow a_4 = 0 \\ @x = 0 & \frac{dv}{dx} = 0 & \Rightarrow a_3 = 0 \\ @x = \frac{L}{2} & v = v_{max} & \Rightarrow v_{max} = a_1\frac{L^3}{8} + a_2\frac{L^2}{4} \\ @x = \frac{L}{2} & \frac{dv}{dx} = 0 & \Rightarrow \frac{3}{4}a_1L^2 + a_2L = 0 \quad \Rightarrow a_2 = -\frac{3}{4}a_1L \end{array}$$

su sostituzione, otteniamo:

$$v = \left(-\frac{16x^3}{L^3} + \frac{12x^2}{L^2}\right) v_{max}$$

Pertanto, in questo problema la soluzione è in termini di una sola variabile sconosciuta v_{max}.

Per applicare il principio dell'energia potenziale minima, dobbiamo valutare: Energia interna U: per i membri flessografici, espressi in termini di spostamenti (un must in questo metodo) è dato da

$$U = 2\left[\frac{1}{2}\int_0^{L/2} E\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 I_z dx\right]$$

thus we must evaluate $\frac{d^2v}{dx^2}$:

$$\frac{dv}{dx} = \left(-\frac{48x^2}{L^3} + \frac{24x}{L^2}\right) v_{max}$$
$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{24}{L^2}\left(1 - \frac{4x}{L}\right) v_{max}$$

Sostituire

$$\frac{U}{2} = \frac{E}{2}\int_0^{\frac{L}{4}} \frac{24^2}{L^4}\left(1 - \frac{4x}{L}\right)^2 v_{max}^2 \frac{I_z}{2} dx + \frac{E}{2}\int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} \frac{24^2}{L^4}\left(1 - \frac{4x}{L}\right)^2 v_{max}^2 I_z dx$$
$$U = \frac{72EI_z}{L^3} v_{max}^2$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Potenziale del lavoro esterno W_e:] Per un carico di punto, $W_e = Pv_{max}$

Infine,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_{max}} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial v_{max}} - \frac{\partial W_e}{\partial v_{max}} = 0 \quad \frac{144EI_z}{L^3} v_{max} = P \quad \Rightarrow v_{max} = \frac{PL^3}{144EI_z}$$

48.4.2 Principio di energia potenziale complementare totale (PTCPE)

69 A seguito di un approccio simile a quello del TPE, si può facilmente dimostrare che

$$\delta\Pi^* = \delta U^* - \delta \mathcal{W}_e^* \tag{48.35}$$

48.5 Teoremi di Castigliano

Per il contesto storico, consultare §11.4.3

Anche se il teorema di Castigliano è fondamentalmente simile al principio del lavoro virtuale, spesso è il metodo preferito di soluzione per alcuni problemi.

Il metodo non separa il reale dalle quatità virtuali, ma prvide una sola espressione dell'energia di tensione in termini di entrambe le quantità e poi prendere il derivato rispetto a quella virtuale.

48.5.1 Primo teorema

70 Il primo teorema di Castigliano si basa sul principio energetico potenziale totale. 48.33 può essere riscritto come

$$\delta\Pi = \delta U - \delta \mathcal{W}_e = 0$$

Il secondo termine può essere espresso come

$$\delta \mathcal{W}_e = F\delta u + \frac{1}{2}\Delta F \delta u + \cdots$$

combining[1] we get

$$\left(\frac{\partial U}{\partial u} - F\right)\delta u = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial u} = F$$

che è il primo teorema di Castigliano:

[1] Recall that $\delta F(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

Definition 48.5: Il primo teorema di Castigliano

Il primo derivato parziale dell'energia interna totale (energia a trasmissione) in una struttura rispetto ad ogni particolare componente di deflettorazione è pari alla forza applicata a quel punto e nella direzione corrispondente a tale deviazione componente.

71 Questo primo teorema è applicabile a strutture lineari o non lineari elastiche in cui la temperatura è costante e i supporti sono poco flessibili.

72 Finora abbiamo fatto riferimento ad un sistema con una sola forza, che può essere generalizzato a un sistema di N dove

$$\mathcal{W}_e = \sum_{i=1}^{N} F_i u_i$$

Poi, l'energia potenziale totale può essere espressa come

$$\Pi = U - \mathcal{W}_e = U(u_1, u_2, \cdots, u_N) - \sum_{i=1}^{N} F_i u_i$$

Per qualsiasi variazione virtuale δu_i in lo spostamento u_i, la variazione $\delta\Pi$ nel potenziale energetico totale Π deve svanire (con il principio dell'energia potenziale totale)

$$\delta\Pi = \frac{\partial U}{\partial u_i}\delta u_i - F_i \delta u_i = \left(\frac{\partial U}{\partial u_i} - F_i\right)\delta u_i = 0$$

Dal momento che la variazione $\delta u_1, \delta u_2, \cdots, \delta u_N$ sono indipendenti l'uno dall'altro, ne segue che

$$\frac{\partial U}{\partial u_i} - F_i = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

Qual è la dichiarazione generale del primo teorema di Castigliano

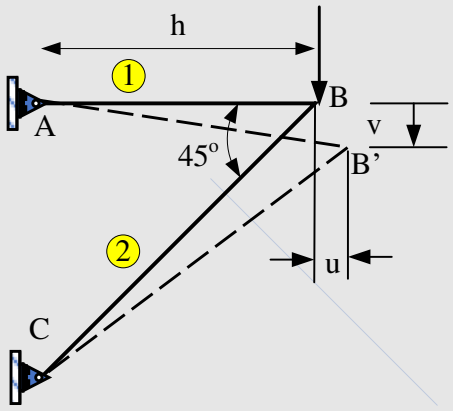
Se l'energia di tensione di un sistema strutturale può essere espressa in termini N spostamenti indipendenti, $u_1, u_2, \cdots, u_N$ corrispondenti a N forze specificate, $F_1, F_2, \cdots, F_N$, il primo derivato parziale dell'energia di deformazione rispetto a qualsiasi spostamento u_i (sotto carico) F_i) è uguale alla forza F_i in direzione di u_i.

48.5.1.1 Ex 48.6: Tronchi elastici non lineari

Da (Reddy, 2017)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Per la tromba adiacente con attacco pin cerchiamo di determinare gli spostamenti orizzontali e verticali del giunto B sotto il carico applicato P. Le barre sono fatte di materiale elastico non lineare il cui comportamento stress-strain è dato da

$$\sigma = \begin{cases} K\sqrt{\varepsilon} & \varepsilon \geq 0 \\ -K\sqrt{-\varepsilon} & \varepsilon \leq 0 \end{cases}$$

e la sezione trasversale di ogni membro è A.

Dalla cinematica (cioè geometria del deformatino) della tromba, la ceppo in ogni membro è data da

$$\varepsilon_1 = \frac{AB' - AB}{AB} = \sqrt{\frac{(h+u)^2 + v^2}{h^2}} - 1$$
$$\varepsilon_2 = \frac{CB' - CB}{CB} = \sqrt{\frac{(h+u)^2 + (h-v)^2}{2h^2}} - 1$$

Ma poiché abbiamo piccoli spostamenti (cioè $u^2 \simeq 0$ e $v62 \simeq 0$, questo semplifica

$$\varepsilon_1 = \sqrt{1 + 2\frac{u}{h}} - 1 \simeq \frac{u}{h}$$
$$\varepsilon_2 = \sqrt{1 + \frac{(u-v)}{h}} - 1 \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{u-v}{h}\right)$$

La densità di energia della struttura è data da $U_0 = U_{01} + U_{02}$

$$\begin{aligned} U_0 &= \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon + \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon \\ &= \int_0^{\varepsilon_1} K\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon + \int_0^{\varepsilon_2} -K\sqrt{-\varepsilon} d\varepsilon \\ &= \frac{2K}{3}(\varepsilon_1)^{3/2} + \frac{2K}{3}(-\varepsilon_2)^{3/2} \\ &= \frac{2}{3}K\left[\left(\frac{u}{h}\right)^{3/2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{v-u}{h}\right)^{3/2}\right] \end{aligned}$$

Abbiamo preso il membro 2 per essere sotto compressione.

L'energia totale della tensione è data da $U = U_1 + U_2$

$$\begin{aligned} U &= Ah\frac{2}{3}K\left(\frac{u}{h}\right)^{3/2} + A\sqrt{2}h\frac{2}{3}K\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{v-u}{h}\right)^{3/2} \\ &= \frac{AK}{3\sqrt{h}}\left[2u\sqrt{u} + (v-u)\sqrt{v-u}\right] \end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Usiamo ora il primo teorema di Castigliano

$$\frac{\partial U}{\partial u} = 0 = \frac{AK}{2\sqrt{h}}(2\sqrt{u} - \sqrt{v-u})$$
$$\frac{\partial U}{\partial v} = P = \frac{AK}{2\sqrt{h}}\sqrt{v-u}$$

per la risoluzione u e v

$$u = \frac{P^2 h}{A^2 K^2}, \qquad v = \frac{5P^2 h}{A^2 K^2}$$

48.5.2 Secondo teorema

73 Il secondo teorema di Castigliano si basa sul principio totale del potenziale energetico complementare. 48.35 può essere riscritto come

$$\delta\Pi^* = \delta U^* - \delta \mathcal{W}_e^* \Rightarrow \frac{\partial U^*}{\partial F}\delta F - u\delta F = 0$$

or

$$\frac{\partial U^*}{\partial F} = u$$

+

74 Questa equazione può essere generalizzata ad un sistema strutturale

$$\frac{\partial U^*}{\partial F_i} = u_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

Definition 48.6: Il secondo teorema di Castiglione

Il primo derivato parziale dell'energia interna totale in una struttura rispetto alla forza applicata a qualsiasi punto è pari alla deflezione al punto di applicazione di tale forza nella direzione della sua linea d'azione.

75 Se usiamo l'espressione di U^* da §48.1.7.1

$$U* = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^L \frac{P^2}{AE} \\ \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI}dx \end{cases}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

poi

$$\begin{aligned}\Delta_i &= \frac{\partial U^*}{\partial P_i} = \int_0^L \frac{P}{AE}\frac{\partial P}{\partial P_i}\\ \theta_i &= \frac{\partial U^*}{\partial M_i} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_i}\end{aligned} \tag{48.36}$$

48.5.2.1 Ex 48.7: Castigliano 2; trave a sbalzo

Cerchiamo lo spostamento della punta di un cantilever caricato da un carico a punto.

Da Eq. 48.15, l'energia complementare della tensione è $U^* = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI}\mathrm{d}x$, e per un carico di punto, lavoro esterno è $\mathcal{W}^*_e = P\Delta$ così l'energia potenziale del sistema è

$$\begin{aligned}\Pi^* &= U^* - \mathcal{W}^*_e\\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI_z}\mathrm{d}x - P\Delta\end{aligned} \tag{48.37}$$

Tuttavia, per il carico del punto, il momento è $M = Px$, sostitutiva sopra

$$\begin{aligned}\Pi^* &= \tfrac{1}{2}\int_0^L \frac{P^2x^2}{EI}\mathrm{d}x - P\Delta\\ &= \tfrac{1}{6}\frac{P^2L^3}{EI} - P\Delta\\ \frac{\mathrm{d}\Pi^*}{\mathrm{d}P} &= \tfrac{1}{3}\frac{P^2L^3}{EI} - \Delta = 0\\ \Rightarrow \Delta &= \tfrac{1}{3}\frac{PL^3}{EI}\end{aligned} \tag{48.38}$$

48.5.2.2 Ex 48.8: Castigliano 2; deflettore di un fascio uniformemente caricato utilizzando il secondo teorema di castigliano

Considerando un raggio semplicemente sostenuto uniformemente caricato, cerchiamo la deflezione di midspan.

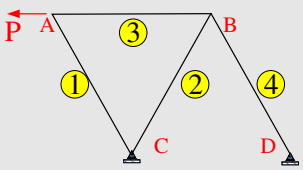
In questo caso dovremo introdurre un *forza fittizio* R a metà del tempo, e il momento è così $M(x) = \frac{wL}{2}x + \frac{R}{2}x - w\frac{x^2}{2}$. L'energia complementare della tensione è $U^* = 2\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{M^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x$ and the displacement

$$\begin{aligned}\Delta &= \left.\tfrac{\partial U^*}{\partial R}\right|_{R=0}\\ &= \left.\left(\tfrac{2}{EI}\int_0^{\frac{L}{2}} M\tfrac{\partial M}{\partial R}\mathrm{d}x\right)\right|_{R=0} = \left.\left\{\tfrac{2}{EI}\int_0^{\frac{L}{2}}\left[\left(\tfrac{wL}{2}+\tfrac{R}{2}\right)x - w\tfrac{x^2}{2}\right]\tfrac{x}{2}\mathrm{d}x\right\}\right|_{R=0}\\ &= \frac{5wL^4}{384EI}\end{aligned} \tag{48.39}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

48.5.2.3 Ex 48.9: Castigliano 2, truss non lineare



La tromba adiacente (equilatero) è composta da barre con una relazione di spostamento non lineare $u = k_1 F + k_2 F^2$.
Dal momento che il materiale è non lineare $U_i^* \neq U_i$ e in questo caso dovremmo usare l'energia complementare della tensione

$$U_i^* = \sum \int_0^F u dF$$

Dall'equilibrio statico

$$\lfloor F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4 \rfloor = \lfloor 0 \quad -P \quad P \quad P \rfloor$$

Così

$$\lfloor u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \rfloor = \lfloor 0 \quad -k_1 P + k_2 P^2 \quad k_1 P + k_2 P^2 \quad k_1 P + k_2 P^2 \rfloor$$

Pertanto, l'energia totale di sforzo complementare della struttura diventa

$$U_i^* = 2\left(\frac{k_1 F^2}{2} + \frac{k_2 P^3}{3}\right) + \left(\frac{k_1 F^2}{2} - \frac{k_2 P^3}{3}\right) = \frac{3k_1 F^2}{2} + \frac{k_2 P^3}{3}$$

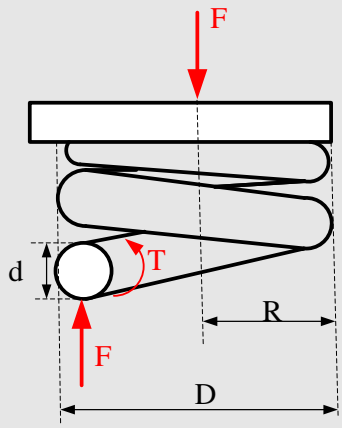
Così

$$v_A^H = \frac{\partial U_i^*}{\partial P} = 3k_1 P + k_2 P^2$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

48.5.2.4 Ex 48.10: Castigliano 2, inflessione della molla



Per la molla di compressione elicoidale adiacente realizzata in sezione circolare trasversale di aste soggette a sollecitazione torsionale della cinghia e taglio trasversale (ignorando flessore).
L'energia totale complementare della tensione è data da

$$U^* = U_T^* + U_S^* = \frac{T^2 L}{2GJ} + \frac{F^2 L}{2AG}$$

dove L è la lunghezza del filo.
Sostituire $T = FD/2$, $L = N\pi D$, $J = \pi d^4/32$ e $A = \pi d^2/4$ noi otteniamo

$$U^* = \frac{4NF^2D^3}{d^4G} + \frac{2NF^2D}{d^2G}$$

dove N è il numero di bobine attive.
Poi applichiamo il secondo teorema di Castigliano per determinare la deviazione della primavera

$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial F} = \frac{8NFD^3}{d^4G} + \frac{4NFD}{d^2G}$$

48.6 Metodo Rayleigh-Ritz

Per il contesto storico, consultare §12.3.1

48.6.1 Ritiro

76 Nella minimizzazione dell'energia potenziale totale, abbiamo espresso l'energia potenziali in termini di quantità fisiche (scambiamenti/rotazioni) a determinati nodi e poi ha dichiarato che il potenziale è stazionario, cioè.

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial\Delta_1}\delta\Delta_1 + \frac{\partial\Pi}{\partial\Delta_2}\delta\Delta_2 + \ldots + \frac{\partial\Pi}{\partial\Delta_n}\delta\Delta_n$$

77 Un approccio più generale (e ancora approssimativo) è quello di esprimere gli spostamenti, e quindi il potenziale in termini di coefficienti sconosciuti in una funzione come:

$$u \approx \sum_{i=1}^{n} a_i\Phi_i + \Phi_0$$

dove a_i indicare i parametri non definiti, e Φ sono funzioni appropriate predefinite di

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

posizioni (più avanti, queste saranno le funzioni della forma N_i nella formulazione degli elementi finiti).

78 Nel PTPE, abbiamo avuto un campo di spostamento singolo in termini di n variabili (sostituzioni sconosciute), ora abbiamo più espressioni del campo di spostamento in termini di n coefficienti a.

79 Φ dovrebbe soddisfare tre condizioni

1. Sii continuo.
2. Deve essere ammissibile, cioè soddisfare le condizioni di confine essenziali (le condizioni di frontiera naturali sono già incluse nella dichiarazione variazionale. Φ anche soddisfarli, quindi si ottengono risultati migliori).
3. Deve essere indipendente e completa (che significa che lo spostamento esatto e i loro derivati che appaiono in Π può essere arbitrario abbinato se sono utilizzati abbastanza termini.

80 In generale Φ è una funzione polinomiale o trigonometrica.

81 Determinamo i parametri c_i soddisfare la stazionaria di Π per variazioni arbitrarie δc_i.

$$\delta\Pi(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial a_i} \delta a_i = 0$$

per variazioni arbitrarie e indipendenti δa_i,

82 ne segue così che

$$\delta\Pi = \underbrace{\frac{\partial \Pi}{\partial a_1}\delta a_1}_{0} + \underbrace{\frac{\partial \Pi}{\partial a_2}\delta a_2}_{0} + \ldots + \underbrace{\frac{\partial \Pi}{\partial a_n}\delta a_n}_{0} = 0 \tag{48.40}$$

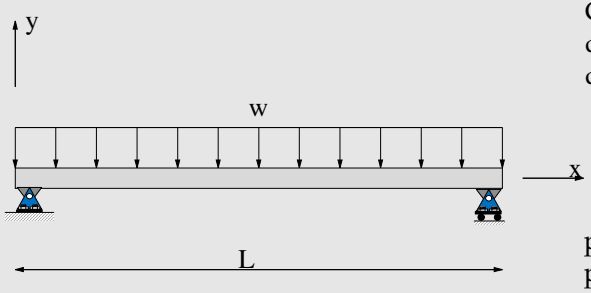
Nota analogia con Eq. 48.34

83 Così otteniamo un totale di n Da questi spostamenti, possiamo quindi determinare tensioni e stress (o forze interne) e da qui abbiamo sostituito un problema con un numero infinito di d.o.f da uno con un codice finito.

48.6.1.1 Ex 48.11: Rayleigh Ritz carica uniformemente semplicemente il fascio supportato

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Cerchiamo di determinare la deflezione maimum del fascio adiacente utilizzando una soluzione data dalla seguente serie infinita:

$$v(x) = a_1 \underbrace{x(L-x)}_{\Phi_1} + a_2 \underbrace{x^2(L-x)^2}_{\Phi_2} + \dots$$

per questa soluzione particolare, trattiamo solo il primo termine:

$$v(x) = a_1 x(L-x)$$

Osserviamo che:

1. Contrariamente al problema precedente esempio, gli essenziali (o geometrici) B.C. sono subito soddisfatto a entrambi $x = 0$ e $x = L$.
2. Possiamo continuare v in termini di a_1 e prendere $\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0$ (Se avessimo lasciato) v in termini di a_1 e a_2 noi dovremmo then have to take both $\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0$, and $\frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0$).
3. O possiamo risolvere per a_1 in termini di v_{max} at $x = \frac{L}{2}$ e prendere $\frac{\partial \Pi}{\partial v_{max}} = 0$.

$$\begin{aligned}
\Pi(a_1) &= U(a_1) - W_e(a_1) \\
&= \int_0^L \frac{EI_z}{2}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx - \int_0^L wv(x)dx \\
&= \int_0^L \left[\frac{EI_z}{2}(-2a_1)^2 - a_1 wx(L-x)\right] dx \\
&= \frac{EI_z}{2} 4a_1^2 L - a_1 w\frac{L^3}{2} + a_1 w\frac{L^3}{3} \\
&= 2a_1^2 EI_z L - \frac{a_1 wL^3}{6}
\end{aligned}$$

Se ora prendiamo $\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0$, otteniamo:

$$\begin{aligned}
4a_1 EI_z L - \frac{wL^3}{6} &= 0 \\
a_1 &= \frac{wL^2}{24EI_z}
\end{aligned}$$

Dopo aver risolto il campo di spostamento in termini di $a_1$noi ora stabiliamo $v_{\max}$ at $\frac{L}{2}$:

$$v = \underbrace{\frac{wL^4}{24EI_z}}_{a_1}\left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right) = \frac{wL^4}{96EI_z}$$

Questo è da confrontare con il valore esatto di $v\max.^{esatto} = \frac{5}{384}\frac{wL^4}{EI_z} = \frac{wL^4}{76.8EI_z}$ which constitutes $\approx 17\%$ errore.

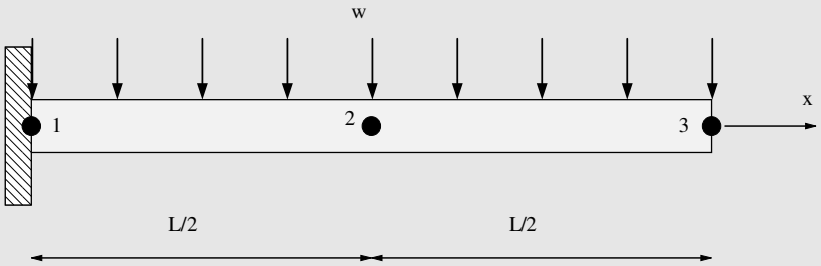
Nota: Se due termini $a_1 x(L-x) + a_2 x^2(L-x)^2$ si erano mantenuti, poi avremmo ottenuto: $a_1 = \frac{wL^2}{24EI_z}$ and $a_2 = \frac{w}{24EI_z}$ and $v_{\max}$ sarebbe uguale a $v_{\max}^{exact}$. (Perché?)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

48.6.1.2 Ex 48.12: Metodi variabili

Per il raggio cantilevered indicato di seguito:



sottoposte a un carico costante. cerchiamo di analizzare lo stesso problema utilizzando i seguenti metodi:

1. **Principio del lavoro virtuale complementare**, (utilizzando un carico di punti unità virtuale), e:
   (a) Determinare lo spostamento verticale del punto 3.
   (b) Compute the total complementary potential energy $\left(\frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI_z}dx\right)$
2. **Principio del lavoro virtuale** utilizzando la seguente espressione sia per i sistemi virtuali che reali:
   $$v = a_1 x^2 + a_2 x^3$$
   e:
   (a) Determinare lo spostamento verticale del nodo 3.
   (b) Sulla base dei risultati, disegnare il diagramma del momento (espresso in termini del secondo derivato degli spostamenti), e la tosapa (derivante del momento).
   (c) Computare l'energia potenziale totale del sistema.
   (d) Confronta i risultati con quelli del problema 1 (soluzione esatta) e *Discutere*.

   Nota: prima dobbiamo adattare i coefficienti a_1 e a_2 agli spostamenti dei punti 2 e 3, v_2 e v_3.
3. **Principio di energia potenziale totale minima**.
4. **Rayleigh-Ritz**
5. **PVW; spostamento trigonometrico**
   $$v = \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right)a_1 + \left(1 - \cos\frac{3\pi x}{2L}\right)a_2$$
   al posto del polinomio dislocamento approssimazione.

Soluzione

La soluzione di Kathryn Sufka

Nota: la soluzione completa passo dopo passo sarà data qui (cortesia di Kathryn Sufka). La soluzione Mathematica per un carico lineare variabile è fornita in Appendice I.2.14.

COPIA DI REVISIONE

1. Principio del lavoro virtuale complementare Slocamento verticale al punto 3. PCVW: $\delta U^* = \delta W^*$

$$\delta U^* = \int_0^L \delta \bar{M} * MEIdx$$
$$\delta M = x$$
$$M = \frac{wx^2}{2}$$
$$\delta U^* = \int_0^L x * \frac{wx^2}{2EI}dx = \frac{w}{2EI}\int_0^L x^3 dx = \frac{w}{2EI}[\frac{x^4}{4}]_0^L = \frac{wL^4}{8EI}$$
$$\delta W^* = \delta P * \Delta$$
$$\delta P = 1$$
$$\delta W^* = \Delta$$
$$\Rightarrow \Delta = \frac{wL^4}{8EI}$$

Totale energia potenziale complementare

$$\Pi^* = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI}dx = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{(wx^2)^2}{4EI}dx = \frac{w^2}{8EI}\int_0^L x^4 dx$$
$$\Pi^* = \frac{w^2L^5}{40EI}$$

2. Principio del lavoro virtuale

1. Sviluppi verticali del punto 3. $v = a_1x^2 + a_2x^3$

   Riscrittura v in termini di v_2 e v_3, gli spostamenti ai punti 2 e 3:

$$v_2 = v\left(\frac{L}{2}\right) = a_1\frac{L^2}{4} + a_2\frac{L^3}{8}$$
$$v_3 = v(L) = a_1L^2 + a_2L^3$$

   Risolvere per a_1 e a_2 in termini di spostamenti

$$a_1 = \frac{8v_2 - v_3}{L^2}$$
$$a_2 = \frac{-8v_2 + 2v_3}{L^3}$$

   Poi

$$v = \left(\frac{8v_2 - v_3}{L^2}\right)x^2 + \left(\frac{-8v_2 + 2v_3}{L^3}\right)x^3$$
$$\frac{dv}{dx} = 2\left(\frac{8v_2 - v_3}{L^2}\right)x + 3\left(\frac{-8v_2 + 2v_3}{L^3}\right)x^2$$
$$\frac{d^2v}{dx^2} = 2\left(\frac{8v_2 - v_3}{L^2}\right) + 6\left(\frac{-8v_2 + 2v_3}{L^3}\right)$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Analogamente,

$$\delta v = \left(\frac{8\delta v_2 - \delta v_3}{L^2}\right)x^2 + \left(\frac{-8\delta v_2 + 2\delta v_3}{L^3}\right)x^3$$
$$\frac{d^2\delta v}{dx^2} = 2\left(\frac{8\delta v_2 - \delta v_3}{L^2}\right) + 6\left(\frac{-8\delta v_2 + 2\delta v_3}{L^3}\right)x$$

2. PVW: $\delta U = \delta W$

$$\delta U = \int_0^L EI\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2\delta v}{dx^2}dx = \frac{4EI}{L^3}(64v_2\delta v_2 - 20\delta v_2 v_3 - 20v_2\delta v_3 + 7v_3\delta v_3)$$
$$\delta W = \int_0^L w\delta v dx = \frac{2wL\delta v_2}{3} + \frac{wL\delta v_3}{6}$$

3. $\delta U - \delta W = 0$

$$\frac{4EI}{L^3}(64v_2\delta v_2 - 20\delta v_2 v_3 - 20v_2\delta v_3 + 7v_3\delta v_3) - \frac{2wL\delta v_2}{3} - \frac{wL\delta v_3}{6} = 0$$
$$\left[\frac{4EI}{L^3}(64v_2 - 20v_3) - \frac{2wL}{3}\right]\delta v_2 + \left[\frac{4EI}{L^3}(-20v_2 + 7v_3) - \frac{wL}{6}\right]\delta v_3 = 0$$
$$\frac{4EI}{L^3}(64v_2 - 20v_3) - \frac{2wL}{3} = 0$$
$$64v_2 - 20v_3 = \frac{wL^4}{6EI}$$
$$64v_2 = \frac{wL^4}{6EI} + 20v_3$$
$$v_2 = \frac{wL^4}{384EI} + \frac{5v_3}{16}$$

$$\frac{4EI}{L^3}(-20v_2 + 7v_3) - \frac{wL}{6} = 0$$
$$\frac{4EI}{L^3}\left[-20\left(\frac{wL^4}{384EI} + \frac{5v_3}{16}\right) + 7v_3\right] - \frac{wL}{6} = 0$$
$$\frac{4EI}{L^3}\left[\frac{-5wL^4}{96EI} - \frac{25v_3}{4} + 7v_3\right] = \frac{wL}{6}$$
$$\frac{-5wL^4}{96EI} - \frac{25v_3}{4} + 7v_3 = \frac{wL^4}{24EI}$$
$$\frac{3v_3}{4} = \frac{3wL^4}{32EI}$$
$$v_3 = \frac{wL^4}{8EI}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

4. Diagramma di taglio e momento.

$$v = \frac{5wL^2}{24EI}x^2 - \frac{wL}{12EI}x^3$$
$$v'' = \frac{5wL^2}{12EI} - \frac{wL}{2EI}x$$
$$M(x)=EIv'' \frac{5wL^2}{12} - \frac{wLx}{2}$$
$$V(x)=M'(x) = \frac{-wL}{2}$$

5. Computare l'energia potenziale totale.

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx - \int_0^L wv dx$$
$$v = \frac{5wL^2}{24EI}x^2 - \frac{wL}{12EI}x^3$$
$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{5wL^2}{12EI} - \frac{wL}{2EI}x$$
$$\Pi = \frac{7w^2L^5}{8EI} - \frac{7w^2L^5}{144EI}$$
$$\Pi=\frac{119w^2L^5}{144EI}$$

3. Principio dell'energia totale minima $\delta\Pi = 0$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx = \frac{2EI}{L^3}(64v_2^2 - 40v_2v_3 + 7v_3^2)$$
$$W = \int_0^L wv dx = \frac{2Lv_2w}{3} + \frac{Lv_3w}{6}$$
$$\Pi = U - W = \frac{2EI}{L^3}(64v_2^2 - 40v_2v_3 + 7v_3^2) - \left(\frac{2Lv_2w}{3} + \frac{Lv_3w}{6}\right)$$
$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial v_2}\delta v_2 + \frac{\partial\Pi}{\partial v_3}\delta v_3 = 0$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_2} = 0 \text{ and } \frac{\partial \Pi}{\partial v_3} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_2} = \frac{2EI}{L^3}(128v_2 - 40v_3) - \frac{2Lw}{3} = \frac{16EI}{L^3}(16v_2 - 5v_3) - \frac{2Lw}{3} = 0 \frac{16EI}{L^3}(16v_2 - 5v_3) = \frac{2Lw}{3}$$

$$16v_2 - 5v_3 = \frac{wL^4}{24EI}$$

$$v_2 = \frac{wL^4}{384EI} + \frac{5v_3}{16}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_3}\delta v_3 = \frac{2EI}{L^3}(-40v_2 + 14v_3) - \frac{Lw}{6} = \frac{28EIv_3}{L^3} - \frac{80EIv_2}{L^3} - \frac{Lw}{6} = 0$$

$$\frac{28EIv_3}{L^3} - \frac{80EI}{L^3}\left(\frac{wL^4}{384EI} + \frac{5v_3}{16}\right) = \frac{wL}{6}$$

$$\frac{28EIv_3}{L^3} - \frac{25EIv_3}{L^3} - \frac{5wL}{24} - = \frac{wL}{6}$$

$$\frac{3EIv_3}{L^3} = \frac{9wL}{24}$$

$$v_3 = \frac{wL^4}{8EI}$$

4. Rayleigh-Ritz $\delta\Pi = 0$

$$v = a_1\phi_1 + a_2\phi_2$$

$$\phi_1 = x^2 \text{ and } \phi_2 = x^3$$

$$v = a_1x^2 + a_2x^3$$

$$\frac{dv}{dx} = 2a_1x + 3a_2x^2$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = 2a_1 + 6a_2x$$

$$\Pi = U - W$$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx$$

$$= 2EI(a_1^2L + 3a_2^2L^3 + 3a_1a_2L^2)$$

$$W = \int_0^L wv dx = \frac{a_1wL^3}{3} + \frac{a_2wL^4}{4}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

$$\Pi = 2EI(a_1^2 L + 3a_2^2 L^3 + 3a_1 a_2 L^2) - \frac{a_1 w L^3}{3} - \frac{a_2 w L^4}{4}$$
$$\delta\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial a_2}\delta a_2 = 0$$
$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0 \text{ and } \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0$$
$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = EI(4a_1 L + 6a_2 L^2) - \frac{wL^3}{3} = 0$$
$$4a_1 L + 6a_2 L^2 = \frac{wL^3}{3EI}$$
$$4a_1 L = \frac{wL^3}{3EI} - 6a_2 L^2$$
$$a_1 = \frac{wL^2}{12EI} - \frac{3a_2 L}{2}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 6EI(2a_2 L^3 + a_1 L^2) - \frac{wl^4}{4} = 0$$
$$6EI\left[2a_2 L^3 + \left(\frac{wL^2}{12EI} - \frac{3a_2 L}{2}\right)L^2\right] - \frac{wL^4}{4} = 0$$
$$12EIL^3 a_2 + \frac{wL^4}{2} - 9EIL^3 a_2 - \frac{wL^4}{4} = 0$$
$$3EIL^3 a_2 = -\frac{wL^4}{4}$$
$$a_2 = -\frac{wL}{12EI}$$
$$a_1 = \frac{wL^2}{12EI} - \left(\frac{3L}{2} * \frac{-wL}{12EI}\right)$$
$$a_1 = -\frac{wL^2}{24EI}$$
$$v = \frac{-wL^2}{24EI}x^2 + \frac{-wL}{12EI}x^3$$
$$v_3 = v(L) = \frac{-wL^2}{24EI}L^2 + \frac{-wL}{12EI}L^3$$
$$v_3 = \frac{-wL^4}{8EI}$$

Nota: v_3 è negativo perché lo spostamento è nella direzione negativa y.

5. PVW, spostamento trigonometrico (con qualche aiuto da Mathematica)

$$v = \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right)a_1 + \left(1 - \cos\frac{3\pi x}{2L}\right)a_2$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Riscrittura v in termini di v_2 e v_3, gli spostamenti ai punti 2 e 3:

$$v_2 = v\left(\frac{L}{2}\right) = a_1(1 - \sqrt{2}/2) + a_2(1 + \sqrt{2}/2)$$
$$v_3 = v(L) = a_1 + a_2$$

Risolvere per a_1 e a_2 in termini di spostamenti

$$a_1 = \frac{-\sqrt{2}v_2 + v_3 + \sqrt{2}v_3}{2}$$
$$a_2 = \frac{\sqrt{2}v_2 + v_3 - \sqrt{2}v_3}{2}$$

Pertanto,

$$v = \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right)\left(\frac{-\sqrt{2}v_2 + v_3 + \sqrt{2}v_3}{2}\right) + \left(1 - \cos\frac{3\pi x}{2L}\right)\left(\frac{\sqrt{2}v_2 + v_3 - \sqrt{2}v_3}{2}\right)$$
$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{\pi^2}{8L^2}\left[-(\sqrt{2}v_2 - v_3 + \sqrt{2}v_3)\cos\frac{\pi x}{2L} + 9(\sqrt{2}v_2 + v_3 - \sqrt{2}v_3)\cos\frac{3\pi x}{2L}\right]$$
$$\delta v = \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right)\left(\frac{-\sqrt{2}\delta v_2 + \delta v_3 + \sqrt{2}\delta v_3}{2}\right) + \left(1 - \cos\frac{3\pi x}{2L}\right)\left(\frac{\sqrt{2}\delta v_2 + \delta v_3 - \sqrt{2}\delta v_3}{2}\right)$$
$$\frac{d^2\delta v}{dx^2} = \frac{\pi^2}{8L^2}\left[-(\sqrt{2}\delta v_2 - \delta v_3 + \sqrt{2}\delta v_3)\cos\frac{\pi x}{2L} + 9(\sqrt{2}\delta v_2 + \delta v_3 - \sqrt{2}\delta v_3)\cos\frac{3\pi x}{2L}\right]$$
$$\text{PVW} : \delta U = \delta W$$
$$\delta U = \int_0^L EI\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2\delta v}{dx^2}dx$$
$$\delta U = \frac{\pi^4 EI}{64L^3}[82v_2\delta v_2 + 2(-41 + 20\sqrt{2})\delta v_2 v_3 + 2(-41 + 20\sqrt{2})v_2\delta v_3 + (123 - 80\sqrt{2})v_3\delta v_3]$$
$$\delta W = \int_0^L w\delta v dx$$
$$\delta W = \frac{wL}{3\pi}[(4\sqrt{2})\delta v_2 + (-2 - 4\sqrt{2} + 3\pi)\delta v_3]$$
$$\delta U - \delta W = 0$$

$$\frac{\pi^4 EI}{64L^3}[82v_2\delta v_2 + 2(-41 + 20\sqrt{2})\delta v_2 v_3 + 2(-41 + 20\sqrt{2})v_2\delta v_3 + (123 - 80\sqrt{2})v_3\delta v_3] - \frac{wL}{3\pi}[(4\sqrt{2})\delta v_2 + (-2 - 4\sqrt{2} + 3\pi)\delta v_3] = 0$$

$$\left[\frac{\pi^4 EI}{64L^3}[82v_2 + 2(-41 + 20\sqrt{2})v_3] - \frac{wL}{3\pi}(4\sqrt{2})\right]\delta v_2 + \left[\frac{\pi^4 EI}{64L^3}[2(-41 + 20\sqrt{2})v_2 + (123 - 80\sqrt{2})v_3] - \frac{wL}{3\pi}(-2 - 4\sqrt{2} + 3\pi)\right]\delta v_3 = 0$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

$$\frac{\pi^4 EI}{64L^3}[82v_2 + 2(-41 + 20\sqrt{2})v_3] - \frac{wL}{3\pi}(4\sqrt{2}) = 0$$

$$\frac{\pi^4 EI}{64L^3}[82v_2 + 2(-41 + 20\sqrt{2})v_3] = \frac{wL}{3\pi}(4\sqrt{2})$$

$$82v_2 + 2(-41 + 20\sqrt{2})v_3 = \frac{256\sqrt{2}wL^4}{3\pi^5 EI}$$

$$82v_2 = \frac{256\sqrt{2}wL^4}{3\pi^5 EI} - 2(-41 + 20\sqrt{2})v_3$$

$$v_2 = \frac{128\sqrt{2}wL^4}{123\pi^5 EI} - \frac{(-41 + 20\sqrt{2})}{41}v_3$$

$$\frac{\pi^4 EI}{64L^3}[2(-41 + 20\sqrt{2})v_2 + (123 - 80\sqrt{2})v_3]$$

$$-\frac{wL}{3\pi}(-2 - 4\sqrt{2} + 3\pi) = 0$$

$$2(-41 + 20\sqrt{2})v_2 + (123 - 80\sqrt{2})v_3 = \frac{64wL^4}{3\pi^5 EI}(-2 - 4\sqrt{2} + 3\pi)$$

$$2(-41 + 20\sqrt{2})\left[\frac{128\sqrt{2}wL^4}{123\pi^5 EI} - \frac{(-41 + 20\sqrt{2})}{41}v_3\right] + (123 - 80\sqrt{2})v_3 = \frac{64wL^4}{3\pi^5 EI}(-2 - 4\sqrt{2} + 3\pi)$$

$$-37.4275\frac{wL^4}{\pi^5 EI} - 7.8873v_3 + 9.8629v_3 = 37.7157\frac{wL^4}{\pi^5 EI}$$

$$1.9756v_3 = 75.1432\frac{wL^4}{\pi^5 EI}$$

$$v_3 = 0.1243\frac{wL^4}{EI}$$

48.7 Sintesi

84 Riepilogo dei vari metodi introdotti nel presente capitolo è mostrato in Fig. 48.7.

85 La dualità tra i due principi variativi è evidenziata dalla Fig. 48.8, quando a partire da spostamenti cinematicamente ammissibile, il principio del lavoro virtuale fornisce soluzioni stabilmente ammissibili. Analogamente, per le sollecitazioni staticamente ammissibile, il principio del lavoro virtuale complementare porta a soluzioni cinematografiche ammissibili.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

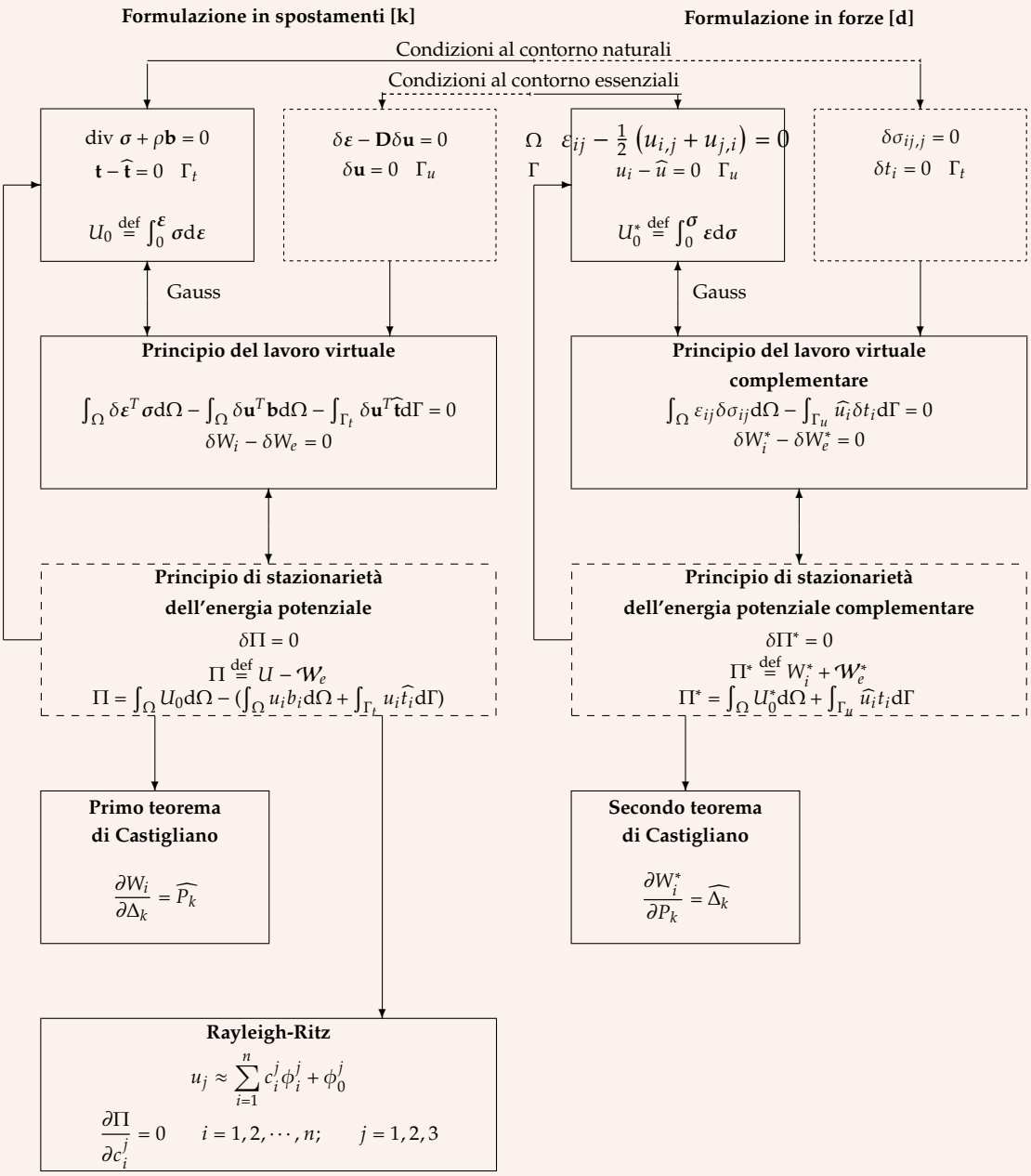


Figura 48.7: Riepilogo dei metodi variativi

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

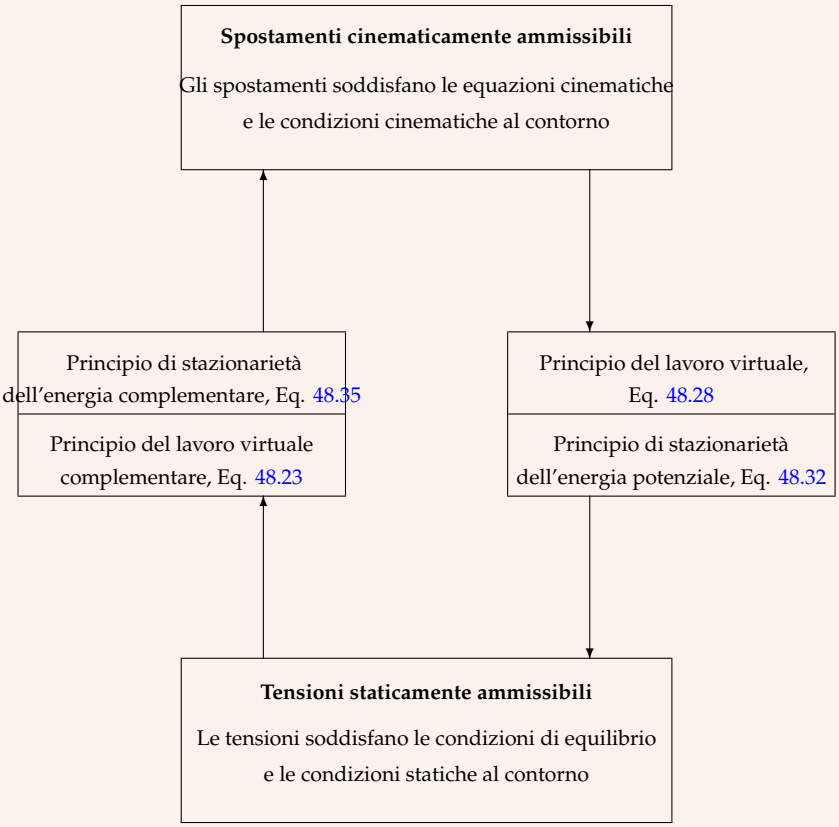
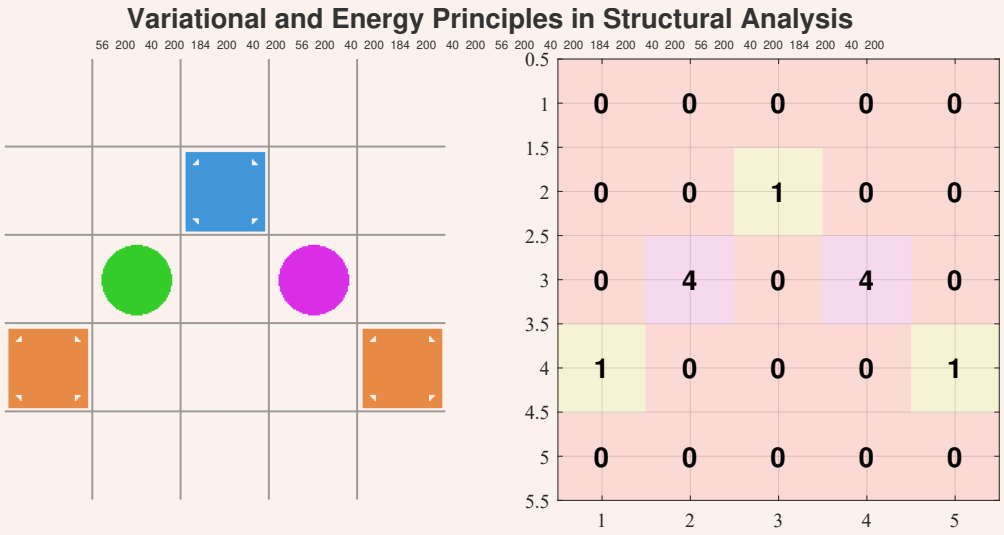


Figura 48.8: Dualità dei principi variativi

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Identicona specifica del capitolo, chapter H

COPIA DI REVISIONE

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 49

Funzioni di interpolazione

Abstract

Nel metodo Rayleigh Ritz abbiamo risolto il problema variazionale utilizzando un'approssimazione funzionale per il campo di spostamento (§48.6). Tuttavia, i coefficienti utilizzati non hanno alcun significato fisico. In questo capitolo introdurremo le approssimazioni di spostamento polinomiale in termini di spostamenti nodali noti. Queste funzioni di interpolazione sono conosciute come Funzioni di forma.

Interpolazioni per diversi gradi polinomiali, in termini di sistemi di coordinate cartesiani, triangolari e naturali saranno presentati, per 1D, ans così come 2D e 3D (per elementi finiti continuum).

Come per come abbiamo introdotto matrici di trasformazione prima di coprire il metodo Stiffness Direct, precediamo l'introduzione del metodo degli elementi finiti con una discussione sulle funzioni della forma.

49.1 Introduzione 1756
49.1.1 Caratteristiche delle funzioni di forma 1756
49.1.2 Il triangolo di Pascal 1757
49.1.3 Sistemi di coordinamento . . . 1759
49.1.4 Proseguimento 1764
49.2 Funzioni di forma 1764
49.2.1 Formulazione diretta 1764
49.2.2 Funzioni di interpolazione lagrangiana 1770
49.2.3 Funzioni di interpolazione ermiziana 1776

49.1 Introduzione

49.1.1 Caratteristiche delle funzioni di forma

1 Nel metodo Rayleigh-Ritz (§48.6) abbiamo detto che la funzione Φ deve essere continuo, soddisfare le condizioni di confine e essere indipendente ed *completo*.

COPIA DI REVISIONE

2 Passare al metodo degli elementi finiti, dove Φ I coefficienti sono ora sostituiti da *funzioni di forma* **N**.

3 Una funzione forma è una funzione matematica utilizzata per interpolare la soluzione della variabile di campo (come lo spostamento, la temperatura, ecc.) all'interno di un elemento. Funzioni di forma, definiscono come la variabile del campo varia all'interno dell'elemento in base ai valori dei nodi dell'oggetto.

4 Le caratteristiche principali delle funzioni di forma includono:

Interpolazione: Se la variabile di campo è nota ai nodi, la funzione forma permette il calcolo della variabile in qualsiasi punto all'interno dell'elemento.

Valori nodali: A qualsiasi nodo dato i, la funzione forma N_i ha un valore di 1 a nodo i e 0 a tutti gli altri nodi dell'elemento, assicurando che l'interpolazione sia esatta ai nodi.

Proseguimento: La continuità delle funzioni di forma dipende dal tipo di elemento e dalla natura del problema. Per esempio, gli elementi lineari hanno funzioni di forma continua, mentre gli elementi di ordine superiore hanno funzioni formali che possono essere continue in derivati di ordine più elevato.

movimento del corpo rigido: dovrebbe essere catturato (cioè. $v = a_1 + \ldots$)

Ceppo costante: dovrebbe anche essere catturato

Dimensione-dipendente: Le funzioni di forma variano a seconda della dimensione dell'elemento.

49.1.2 Il triangolo di Pascal

5 C'è una connessione tra le funzioni di forma e il Triangolo di Pascal attraverso la struttura matematica e le proprietà delle funzioni di sagoma polinomiale (particolarmente per gli elementi di ordine superiore).

6 I coefficienti delle funzioni di forma (polynomial based) possono essere correlati ai coefficienti binomiali, che si trovano nel Triangolo di Pascal.

7 Il Triangolo di Pascal fornisce infatti i coefficienti binomiali utilizzati nell'espansione dei polinomi, ad esempio l'ampliamento della rete $(a + b)$ comporta coefficienti che sono esattamente le voci del Triangolo di Pascal. Allo stesso modo, in 2D le funzioni formali possono essere scritte utilizzando termini polinomiali che coinvolgono combinazioni di x e y. I coefficienti di questi termini, quando ampliati, seguono il modello dei coefficienti binomiali.

8 Per un elemento triangolare quadratico, le funzioni di forma potrebbero assomigliare:

$$N_1(x, y) = a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 x^2 + e_1 xy + f_1 y^2$$

$$N_2(x, y) = a_2 + b_2 x + c_2 y + d_2 x^2 + e_2 xy + f_2 y^2$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

$$N_3(x,y) = a_3 + b_3 x + c_3 y + d_3 x^2 + e_3 xy + f_3 y^2$$

I coefficienti $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$ sarà determinato in base ai valori nodali e può essere collegato a coefficienti binomiali.

9 Un'interpretazione schematica delle funzioni di forma in termini di serie polinomiale è data dal triangolo di Pascal che si mostra nella tabella 49.1. Termini polinomiali presenti in

Tabella 49.1: Interpretazione delle funzioni di forma in termini di serie polinomiale (1d & 2d)

Constant				a_1					
Linear			$a_2 x$		$a_3 y$				
Quadratic		$a_4 x^2$		$a_5 xy$		$a_6 y^2$			
Cubico	$a_7 x^3$		$a_8 x^2 y$		$a_9 xy^2$		$a_{10} y^3$		
Quartico	$a_{11} x^4$		$a_{12} x^3 y$		$a_{13} x^2 y^2$		$a_{14} xy^3$		$a_{15} x^4$

varie formulazioni di elementi è mostrato in Tabella 49.2

Tabella 49.2: Termini polinomiali in varie formulazioni di elementi (1d & 2d)

Elemento di base	Termini	# di Nodi (termine)
Lineare	a_1, a_2	2
Quadratica	a_1, a_2, a_4	3
Bi-Linear (triangolo)	$a_1, a_2, a_3,$	3
Bi-Linear (quadrilaterale)	a_1, a_2, a_3, a_5	4
Bi-Quadratic (Serendipity)	$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_8, a_9$	8
Bi-Quadratic (Lagrangian)	$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_8, a_9, a_{13}$	9

10 A *completo* Il polinomio contiene tutti i termini sopra una certa linea nel triangolo Pascal, più sono inclusi i termini, maggiore è l'accuratezza. $u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_5 xy$ è più accurato di $u = a_1 + a_2 x + a_3 y$, Tuttavia il tasso di convergenza è invariato (perché la seconda approssimazione non è una quadratica completa).

11 I termini di approssimazione che non migliorano il tasso di convergenza sono chiamati *parassita* termini.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

49.1.3 Sistemi di coordinamento

49.1.3.1 Carte

12 Per un elemento (finito o altrimenti), possiamo scrivere un'espressione per spostamento generalizzato (traduzione/rotazione), u a qualsiasi punto in termini di tutti i suoi nodali, $\overline{\mathbf{u}}$.

$$u = \sum_{i=1}^{n} N_i(X)\overline{\Delta}_i = \mathbf{N}(x)\overline{\mathbf{u}}$$

dove:

1. $\overline{u}_i$ è lo spostamento nodale (generalizzato) corrispondente GDL i
2. N_i è una funzione di interpolazione, o *funzione forma* che ha le seguenti caratteristiche:
   (a) $N_i = 1$ at $\overline{u}_i$
   (b) $N_i = 0$ at $\overline{u}_j$ dove $i \neq j$.
3. $\mathbf{N}$ può essere derivato sulle basi di:
   (a) Presumibilmente stato di deformazione definito in termini di serie polinomiale.
   (b) Funzione di interpolazione (Lagrangiano o Ermiziano).

13 Distingueremo tra due classi di problemi:

C^0 dove deve essere garantita solo la continuità di spostamento elementi (truss, torsione, stress aereo/straina, elasticità 3D).

C^1 dove dobbiamo garantire la continuità *entrambi* spostamenti e loro derivati (come travi, piastre e gusci).

49.1.3.2 Naturale

14 Definiamo due coordinate naturali ξ_1 e ξ_2Fico. 49.1

$$\xi_1 = \frac{L_1}{L} \quad \text{and} \quad \xi_2 = \frac{L_2}{L}$$

poiché $L_1 + L_2 = L$, si ha

$$\xi_1 + \xi_2 = 1$$

Si noti che $\xi_i = 1$ a nodo i e zero a tutti gli altri nodi.

15 Un punto arbitrario P con coordinate x ha

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

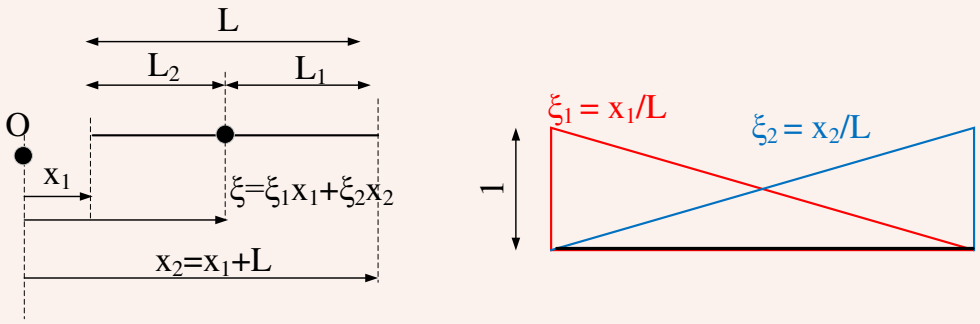


Figura 49.1: Sistema di coordinate naturali lungo una linea retta

Così, per ogni punto x, corrisponde a un insieme di (nonindependent) coordinate naturali ξ_1, ξ_2. Queste equazioni possono essere indicate come

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \end{array} \right\} \quad \text{and} \quad \left\{ \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \end{array} \right\} = \frac{1}{L} \left[\begin{array}{cc} x_2 & -1 \\ -x_1 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \end{array} \right\}$$

16 L'interpolazione può essere effettuata in coordinate naturali

$$\phi = \underbrace{\lfloor \begin{array}{cc} \xi_1 & \xi_2 \end{array} \rfloor}_{\mathbf{N}} \left\{ \begin{array}{c} \overline{\phi}_1 \\ \phi_2 \end{array} \right\}$$

17 Integrazione dei polinomi in ξ_1 e ξ_2 può essere fatto attraverso (a la prova rigorosa è sviluppata di seguito attraverso Eq. 49.1)

$$\int_L \xi_1^k \xi_2^l \mathrm{d}L = L \frac{k!\, l!}{(1+k+l)!}$$

Inoltre,

$$\begin{array}{rcll} \int_L x \mathrm{d}L & = & \int_L (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) \mathrm{d}L & = \frac{L}{2}(x_1 + x_2) \\ \int_L \xi_1 \xi_2^2 \mathrm{d}L & = & L \frac{2}{4!} & = \frac{L}{12} \end{array}$$

49.1.3.3 Triangolare

18 Le coordinate naturali sono indissolubili e definite rispetto alla lunghezza dell'elemento/area/volume piuttosto che al sistema di coordinate globale.

19 Sono spesso utilizzati nella formulazione di elementi *semplice* elementi (dove in un n spazio dimensionale, ci sono $n+1$ vertici e $n+1$ superfici di dimensionalità $n-1$).

20 Elementi triangolari permettono un polinomio completo nella coordinazione cartesiana da utilizzare per il campo (ad esempio temperatura, spostamento) quantità. Così, *tutto* i

COPIA DI REVISIONE

termini di un triangolo pasquale troncato sono utilizzati nelle funzioni della forma. (Questo non sarà il caso per l'elemento quadrilatero bilineare).

21 Cerchiamo di determinare $\phi = \sum N_i \overline{\phi}_i$ dove $\overline{\phi}_i$ sono nodali d.o.f. e $N_i = N_i(L_1, L_2, L_3)$.

We start with $\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i L_1^q, L_2^r, L_3^s)$ dove q, r e s gamma oltre n possibili combinazioni per le quali $q + r + s = p$ e dove p è l'ordine del polinomio. Per esempio,

Elemento lineare:

$$\phi = a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3 = a'_1 + a'_2 x + a'_3 y$$

Elemento Quadratico:

$$\phi = a_1 L_1^2 + a_2 L_2^2 + a_3 L_3^2 + a_4 L_1 L_2 + a_5 L_2 L_3 + a_6 L_3 L_1 = a'_1 + a'_2 x + a'_3 y + a'_4 x^2 + a'_5 xy + a'_6 y^2$$

22 Le funzioni di forma del Triangolo Lineare sono semplicemente le coordinate dell'area,

$$N_1 = L_1 \qquad N_2 = L_2 \qquad N_3 = L_3$$

e ciascuno è uguale all'unità a un nodo, zero agli altri, e varia linearmente.

23 Per una superficie triangolare, qualsiasi punto P divide il triangolo 1-2-3 in tre sottozone A_1, A_2, A_3Fico. 49.2 così definiamo le coordinate di area come i rapporti delle aree

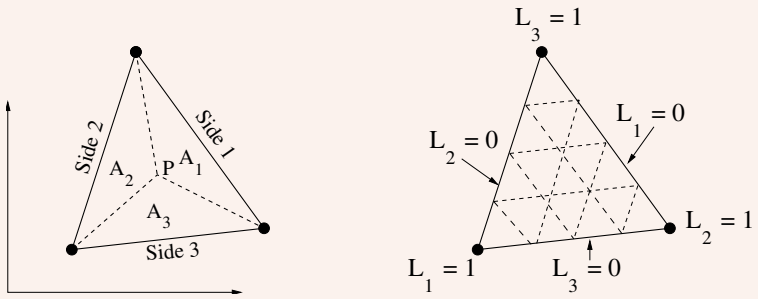


Figura 49.2: Sistema di coordinate naturali per un triangolo

$$L_1 = \frac{A_1}{A}, \quad L_2 = \frac{A_{21}}{A}, \quad L_3 = \frac{A_3}{A}$$

dove A è l'area del triangolo 1-2-3. Da $A = A_1 + A_2 + A_3$ poi

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1$$

e il centroide è a $L_1 = L_2 = L_3 = \frac{1}{3}$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

24 Ancora una volta le equazioni dei vincoli sono

$$\left\{\begin{array}{c} 1 \\ x \\ y \end{array}\right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{array}\right]}_{\mathbf{a}} \left\{\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\right\}$$

invertire

$$\begin{aligned} \left\{\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\right\} &= \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} x_2y_3 - x_3y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{array}\right]}_{\mathbf{a}^{-1}} \left\{\begin{array}{c} 1 \\ x \\ y \end{array}\right\} \\ &= \frac{1}{2A}\left[\begin{array}{ccc} 2A_{23} & y_{23} & x_{32} \\ 2A_{31} & y_{31} & x_{13} \\ 2A_{12} & y_{12} & x_{21} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} 1 \\ x \\ y \end{array}\right\} \end{aligned}$$

where $x_{ij} = x_i - x_j$

25 Osserviamo che l'area è uguale al determinante su due.

$$2A = |\mathbf{A}| = x_2 - x_1y_3 - y_1 - x_{31}y_{21}$$

e se le etichette sono invertite tale che 1-2-3 è senso orario, allora il determinante è negativo.

26 Una funzione ϕ può essere espresso in termini di coordinate dell'area

$$\begin{aligned} \phi &= \phi(L_1, L_2, L_3) \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \phi}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial L_3}\frac{\partial L_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial \phi}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial L_3}\frac{\partial L_3}{\partial y} \end{aligned}$$

e

$$\begin{array}{llllll} \frac{\partial L_1}{\partial x} = \frac{y_2 - y_3}{2A}; & \frac{\partial L_2}{\partial x} = \frac{y_3 - y_1}{2A}; & \frac{\partial L_3}{\partial x} = \frac{y_1 - y_2}{2A}; \\ \frac{\partial L_1}{\partial y} = \frac{x_3 - x_2}{2A}; & \frac{\partial L_2}{\partial y} = \frac{x_1 - x_3}{2A}; & \frac{\partial L_3}{\partial y} = \frac{x_2 - x_1}{2A}; \end{array}$$

27 Integrazione per la matrice di rigidità richiedono l'integrazione nella coordinate di area delle espressioni del modulo $\int_A L_1^k L_2^l L_3^m \mathrm{d}A$. Per realizzare questa operazione, e con riferimento a Fig. 49.3, (Eisenberg e Malvern, 1973):

$$\begin{aligned} dA &= (\mathrm{d}s_1)\csc\theta_3(\mathrm{d}s_2) \\ &= (h_1\mathrm{d}L_1)\csc\theta_3(h_2\mathrm{d}L_2) \\ &= 2A\mathrm{d}L_1\mathrm{d}L_2 \end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

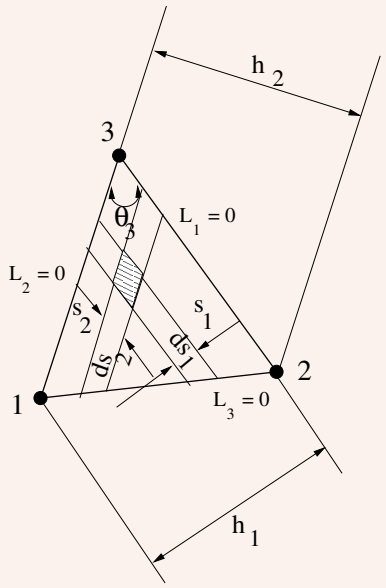


Figura 49.3: Integrazione su un triangolo

Così

$$\int_A L_1^k L_2^l L_3^m \mathrm{d}A = 2A \int_0^1 \left[\int_0^{1-L_1} L_1^k L_2^l (1 - L_1 - L_2)^m \mathrm{d}L_2 \right] \mathrm{d}L_1$$

noi il prossimo sostituto $L_2 = t(1 - L_1)$ e $\mathrm{d}L_2 = (1 - L_1)\mathrm{d}t$ che produce

$$\int_A L_1^k L_2^l L_3^m \mathrm{d}A = 2A \int_0^1 L_1^k (1 - L_1)^{l+m+1} \mathrm{d}L_1 \int_0^1 t^l (1 - t)^m \mathrm{d}t$$

ciascuno degli integrali sul lato destro è della forma del beta funzione (Abramowitz e Stegun, 1970)

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1 - t)^{w-1} \mathrm{d}t = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z + w)}$$

dove Γ denota la funzione gamma che soddisfa $\Gamma(n + 1) = n!$ per integers $n \geq 0$. Così

$$\int_A L_1^k L_2^l L_3^m \mathrm{d}A = 2A \frac{\Gamma(k + 1)\Gamma(l + 1)\Gamma(m + 1)}{\Gamma(k + l + m + 3)}$$

Da k, le m sono interi non negativi,

$$\int_A L_1^k L_2^l L_3^m \mathrm{d}A = 2A \frac{k!\, l!\, m!}{(k + l + m + 2)!} \tag{49.1}$$

[28] Va notato che la relazione sopra viene utilizzata solo se abbiamo elementi di lato rettilinei e la formulazione degli elementi può quindi essere analiticamente derivata. In alternativa, se abbiamo un lato curvilineo, questa formula non sarà utilizzata e l'elemento verrà integrato numericamente nel contesto di una formulazione isoparametrica.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

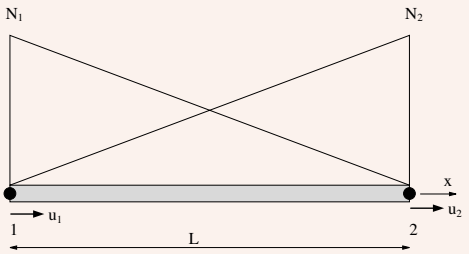


Figura 49.4: Elemento finito assiale

49.1.4 Proseguimento

29 C^0 continuità si riferisce all'esigenza che una funzione sia continua attraverso i confini degli elementi finiti adiacenti, ma non necessariamente dei suoi derivati primi o superiori (assiali o torsione per esempio).

30 C^1 la continuità si riferisce all'esigenza che sia una funzione che il suo primo derivato siano continui attraverso i confini degli elementi finiti adiacenti (tipicamente membri flessografici).

49.2 Funzioni di forma

49.2.1 Formulazione diretta

49.2.1.1 Elemento di truss; lineare

31 Cominciamo con il semplice elemento di tromba, sviluppiamo la funzione forma esplicitamente e poi ne deriviamo una formula per la sua generalizzazione.

32 Con riferimento a Fig. 49.4 Cominciamo con:

$$\begin{aligned} u &= N_1\overline{u}_1 + N_2\overline{u}_2 \\ \theta_x &= N_1\overline{\theta}_{x1} + N_2\overline{\theta}_{x2} \end{aligned}$$

33 Poiché abbiamo 2 d.o.f, assumeremo uno stato di deformazione lineare

$$u = a_1 x + a_2 \tag{49.2}$$

dove u può essere u or θ, e il B.C. è dato da: $u = \overline{u}_1$ at $x = 0$e $u = \overline{u}_2$ at $x = L$. Così abbiamo:

$$\begin{aligned} \overline{u}_1 &= a_2 \\ \overline{u}_2 &= a_1 L + a_2 \end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

34 Risolvere per a_1 e a_2 in termini di $\overline{u}_1$ e $\overline{u}_2$ otteniamo:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\overline{u}_2}{L} - \frac{\overline{u}_1}{L} \\ a_2 &= \overline{u}_1 \end{aligned}$$

35 Sostituire e riordinare queste espressioni in Eq. 49.2 noi otteniamo

$$\begin{aligned} u &= (\frac{\overline{u}_2}{L} - \frac{\overline{u}_1}{L})x + \overline{u}_1 \\ &= \underbrace{(1 - \frac{x}{L})}_{N_1}\overline{u}_1 + \underbrace{\frac{x}{L}}_{N_2}\overline{u}_2 \end{aligned}$$

or:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \tfrac{x}{L} \\ N_2 &= \tfrac{x}{L} \end{aligned} \tag{49.3}$$

49.2.1.2 Generalizzazione

36 La derivazione precedente può essere generalizzata scrivendo:

$$u = a_1 x + a_2 = \underbrace{\lfloor\, x \quad 1 \,\rfloor}_{\mathbf{p}} \underbrace{\left\{ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} \right\}}_{\{\mathbf{a}\}} \tag{49.4}$$

dove **p** corrisponde all'approssimazione polinomiale, e **a** è il vettore del coefficiente.

37 Proseguiamo per applicare le condizioni di confine:

$$\underbrace{\left\{ \begin{matrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{matrix} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ L & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}} \underbrace{\left\{ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} \right\}}_{\mathbf{a}}$$

inversione di seguito $\mathcal{L}$Questo porta a

$$\underbrace{\left\{ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} \right\}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\frac{1}{L}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}^{-1}} \underbrace{\left\{ \begin{matrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{matrix} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}}$$

38 Sostituire quest'ultima equazione in Eq. 49.4, otteniamo:

$$u = \underbrace{\underbrace{\lfloor\, (1 - \tfrac{x}{L}) \quad \tfrac{x}{L} \,\rfloor}_{\mathbf{p}\mathcal{L}^{-1}}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\left\{ \begin{matrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{matrix} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Quindi, le funzioni di forma $\mathbf{N}$ può essere ottenuto direttamente da

$$\mathbf{N} = \mathbf{p}\mathcal{L}^{-1}$$

39 Nota che in alcuni casi $\mathcal{L}^{-1}$ non sempre è possibile ottenere, e che in altri possono esserci notevoli difficoltà algebriche per geometrie arbitrarie. Quindi, introdurremo più tardi le funzioni di interpolazione lagrangiana e ermiziana.

49.2.1.3 Elemento di triangolo costante

40 Poi consideriamo un elemento triangolare, Fig. 49.5 con *bi-lineare* dislocamento campo

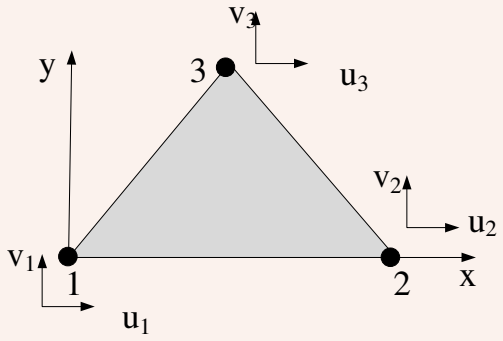


Figura 49.5: Elemento di triangolo costante

(in entrambi x e y):

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x + a_3 y \\ v &= a_4 + a_5 x + a_6 y \\ u &= \underbrace{\lfloor\, 1 \quad x \quad y \,\rfloor}_{\mathbf{p}} \underbrace{\left\{ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \right\}}_{\{\mathbf{a}\}} \end{aligned}$$

41 Come prima, cerchiamo per la prima volta le funzioni di forma e quindi applichiamo condizioni di confine ai nodi per u prima di tutto:

$$\underbrace{\left\{ \begin{matrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{u}_3 \end{matrix} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}} = \underbrace{\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{matrix} \right]}_{[\mathcal{L}]} \underbrace{\left\{ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \right\}}_{\mathbf{a}} \tag{49.5}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Noi allora moltiplichiamo l'inverso $\mathcal{L}$ in Eq. 49.5 by $\mathbf{p}$ e ottenere:

$$u = N_1\overline{u}_1 + N_2\overline{u}_2 + N_3\overline{u}_3$$

dove

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{x_2 y_3}(x_2 y_3 - x y_3 - x_2 y + x_3 y) \\ N_2 &= \frac{1}{x_2 y_3}(x y_3 - x_3 y) \\ N_3 &= \frac{y}{y_3} \end{aligned}$$

e osservare che ciascuna delle tre funzioni di forma è uguale a 1 al corrispondente nodo, e pari a 0 agli altri due.

42 Le stesse funzioni di forma possono essere derivate per v:

$$v = N_1\overline{v}_1 + N_2\overline{v}_2 + N_3\overline{v}_3$$

43 Quindi, il campo di spostamento sarà dato da:

$$\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{u}_3 \\ \overline{v}_3 \end{array} \right\}$$

e l'elemento corrispondente a cui si riferisce *triangolo costante di sforzo* (CST) perché ha un campo di spostamento lineare, e quindi una tensione costante.

49.2.1.4 Elemento bilineare rettangolare

44 Poi consideriamo un elemento quadrilatero, Fig. 49.6 con *bi-lineare* campo di spostamento (in entrambi x e y). Utilizzando la funzione di interpolazione Lagrangiana di Eq. 49.6, e a partire da u lo spostamento, eseguiamo due interpolazioni: la prima lungo il bordo inferiore (1-2) e lungo la cima uno (4-3).

45 Da Eq. 49.6 con $m = 1$ otteniamo:

$$\begin{aligned} \overline{u}_{12} &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\overline{u}_1 + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2}\overline{u}_2 \\ &= \frac{a - x}{2a}\overline{u}_1 + \frac{x + a}{2a}\overline{u}_2 \end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

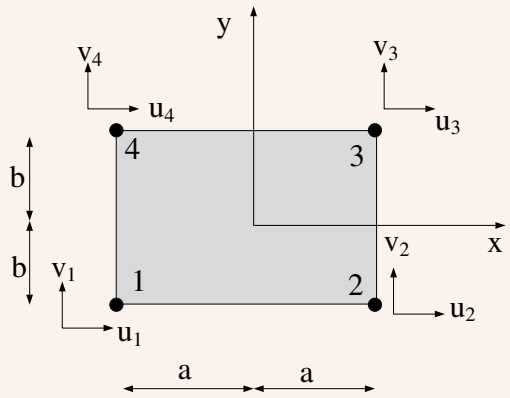


Figura 49.6: Elemento bilineare rettangolare

Analogamente

$$\begin{aligned}\overline{u}_{43} &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\overline{u}_4 + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2}\overline{u}_3 \\ &= \frac{a - x}{2a}\overline{u}_4 + \frac{x + a}{2a}\overline{u}_3\end{aligned}$$

46 Poi, ci interpolare nel y direzione lungo 1-4 e 2-3 tra $\overline{u}_{12}$ e $\overline{u}_{43}$. Ancora una volta, usiamo Eq. 49.6 Tuttavia, questa volta sostituiamo x by y:

$$\begin{aligned}u &= \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1}\overline{u}_{12} + \frac{y_1 - y}{y_1 - y_2}\overline{u}_{43} \\ &= \frac{b - y}{2b}\frac{a - x}{2a}\overline{u}_1 + \frac{b - y}{2b}\frac{x + a}{2a}\overline{u}_2 + \frac{y + b}{2b}\frac{a - x}{2a}\overline{u}_4 + \frac{y + b}{2b}\frac{x + a}{2a}\overline{u}_3 \\ &= \underbrace{\frac{(a - x)(b - y)}{4ab}}_{N_1}\overline{u}_1 + \underbrace{\frac{(a + x)(b - y)}{4ab}}_{N_2}\overline{u}_2 + \underbrace{\frac{(a + x)(b + y)}{4ab}}_{N_3}\overline{u}_3 + \underbrace{\frac{(a - x)(b + y)}{4ab}}_{N_1}\overline{u}_4\end{aligned}$$

47 Si può facilmente controllare che a ogni nodo i il corrispondente N_i is pari a 1, e tutti gli altri a zero, e che in qualsiasi punto $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 1$. Quindi, il campo di spostamento sarà dato da:

$$\left\{\begin{array}{c} u \\ v \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccccccc} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{u}_3 \\ \overline{v}_3 \\ \overline{u}_4 \\ \overline{v}_4 \end{array}\right\}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

48 Le funzioni di forma per l'elemento quadrilatero isoparametrico a quattro nodi sono mostrate in Fig. 49.7

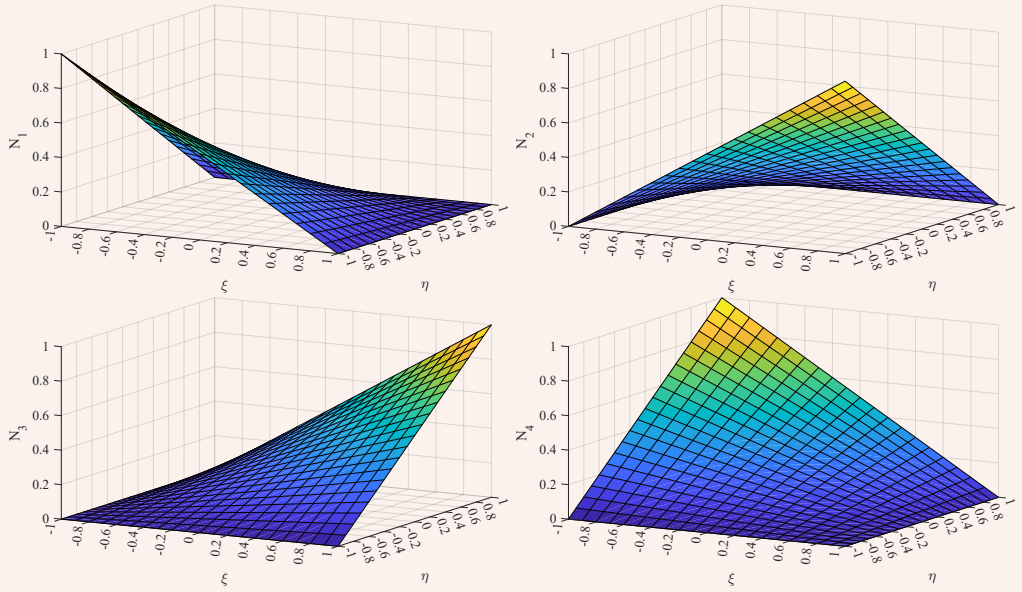


Figura 49.7: Funzioni di forma per 4 elementi quadrilaterali annunziati

49.2.1.5 Elemento trilineare a mattone

49 Per estensione alla derivazione precedente, le funzioni di forma di un solido elemento solido trilineare rettangolare, Fig. 49.8 sarà dato da:

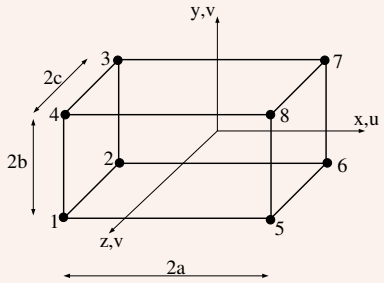


Figura 49.8: Solido elemento rettangolare trilineare

COPIA DI REVISIONE

$$\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccccccccc} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \overline{w}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{w}_2 \\ \overline{u}_3 \\ \overline{v}_3 \\ \overline{w}_3 \\ \overline{u}_4 \\ \overline{v}_4 \\ \overline{w}_4 \end{array} \right\}$$

dove

$$N_i = \frac{(a \pm x)(b \pm y)(c \pm z)}{8abc}$$

49.2.2 Funzioni di interpolazione lagrangiana

49.2.2.1 Quadrilaterali

50 Nel nostro approccio precedente, le funzioni di forma sono state ottenute da:

1. Assunzione di una funzione polinomiale: $u = \mathbf{pa}$
2. Applicazione delle condizioni di confine $\overline{\mathbf{u}} = \mathcal{L}\mathbf{a}$
3. Inversione di $\mathcal{L}$
4. And finally $\mathbf{N} = \mathbf{p}\mathcal{L}^{-1}$

Seguendo queste operazioni, abbiamo in effetti definito *Funzioni di interpolazione lagrangiana* per problemi C^0 continuità di interelement (cioè continuità di spostamento solo).

51 L'interpolazione lagrangiana definisce i coefficienti (**N** nel nostro caso) di una rappresentazione della serie polinomiale di una funzione in termini di valori definiti in punti discreti (nodi nel nostro caso). Per i punti lungo una linea questo si produrrà:

$$N_i = \frac{\prod_{j=1, j\neq i}^{m+1}(x - x_j)}{\prod_{j=1, j\neq i}^{m+1}(x_i - x_j)} \tag{49.6}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Se si espande, l'equazione precedente cederebbe:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{m+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_{m+1})} \\ N_2 &= \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_{m+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_{m+1})} \\ N_{m+1} &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)}{(x_{m+1}-x_1)(x_{m+1}-x_2)\cdots(x_{m+1}-x_m)} \end{aligned}$$

52 Per il membro assiale, $m = 1$, $x_1 = 0$e $x_2 = L$, le equazioni sopra riportate si tradurranno in:

$$u = \frac{(x-L)}{-L}\overline{u}_1 + \frac{x}{L}\overline{u}_2 = \underbrace{(1-\frac{x}{L})}_{N_1}\overline{u}_1 + \underbrace{\frac{x}{L}}_{N_2}\overline{u}_2$$

che è identico a Eq. 49.3.

49.2.2.2 Triangoli

53 Le funzioni di forma per altri elementi possono essere ottenute dal La funzione di interpolazione lagrangiana utilizzata prima Eq. 49.6

$$\begin{aligned} l_k^n &= \frac{\prod_{i=0,i\neq k}^{n}(L-L_i)}{\prod_{i=0,i\neq k}^{n}(L_k-L_i)} \\ &= \frac{(L-L_0)(L-L_1)\cdots(L-L_{k-1})(L-L_{k+1})\cdots(L-L_n)}{(L_k-L_0)(L_k-L_1)\cdots(L_k-L_{k-1})(L_k-L_{k+1})\cdots(L_k-L_n)} \end{aligned}$$

54 Quindi, denota un nodo tipico i per tre numeri q, r e s corrispondente alla posizione delle coordinate L_{1i}, L_{2i} e L_{3i}, possiamo scrivere le funzioni di forma in termini di tre funzioni di interpolazione lagrangiana

$$N_i = l_q^q(L_1)l_r^r(L_2)l_s^s(L_3)$$

55 Utilizzando questa formula, le funzioni di forma per elementi di ordine più elevati sono

Triangolo lineare

$$N_i = L_i$$

Triangolo Quadratico

$$\begin{aligned} N_i &= L_i(2L_i-1) && \text{Corner nodes} \\ N_j &= 4L_iL_k && \text{Midside nodes, } i,j,k \text{ are on the same side} \end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Triangolo Cubice

$$\begin{aligned} N_i &= \tfrac{1}{2}L_i(3L_i-1)(3L_i-2) && \text{Corner nodes} \\ N_j &= \tfrac{9}{2}L_iL_k(3L_i-1) && \text{Midside nodes, } i,j,k \text{ are on the same side} \\ N_{10} &= 27L_1L_2L_3 && \text{Internal node} \end{aligned}$$

56 Le funzioni di forma per il triangolare lineare a tre nodi sono mostrate in Fig. 49.9. Nota nelle coordinate di area, l'unico modo per visualizzare le funzioni della forma è determinare **N** in termini di L_1 e L_2

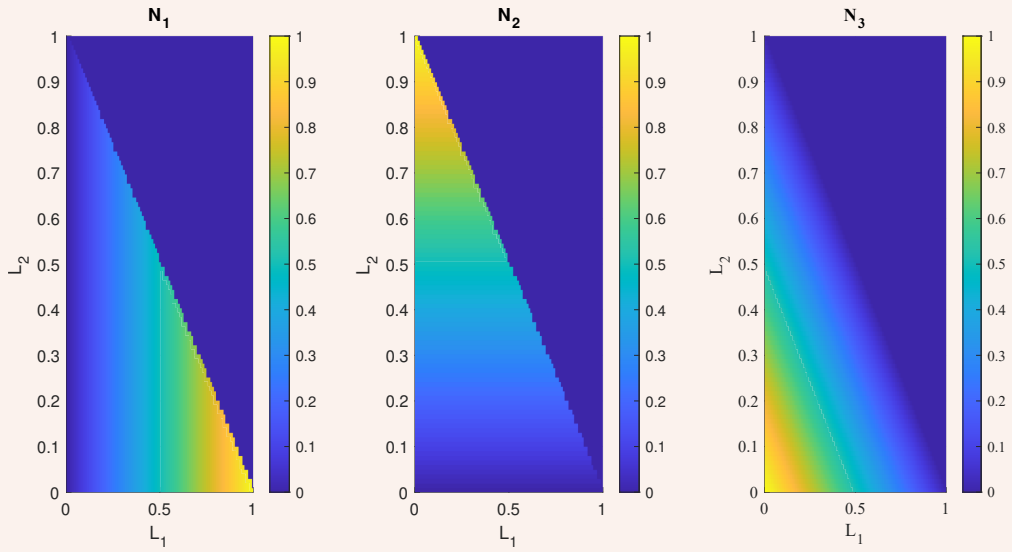


Figura 49.9: Funzioni di forma per 3 elementi lineari triangolari

49.2.2.3 Elemento di truss; quadratico

57 Ora applichiamo la funzione di interpolazione Lagrangiana per ricavare le funzioni formali di un elemento quadratico truss.

58 I tre elementi quadratici annui, Fig. 49.10.

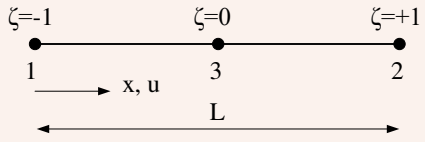


Figura 49.10: Elemento a barre quadratico trinodato

COPIA DI REVISIONE

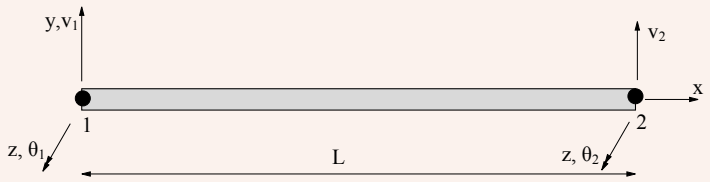


Figura 49.11: Elemento finitore flessibile

59 Le funzioni di forma per l'elemento possono essere ottenute dal Funzione di interpolazione lagrangiana da Eq. 49.6e in cui noi sostituiamo x by ξ. ka) un polinomio di ordine $n-1$ sarebbe

$$\begin{aligned} N_k^n &= \frac{\prod_{i=1,i\neq k}^{n}(\xi-\xi_i)}{\prod_{i=1,i\neq k}^{n}(\xi_k-\xi_i)} \\ &= \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)\cdots(\xi-\xi_{k-1})(\xi-\xi_{k+1})\cdots(\xi-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_1)(\xi_k-\xi_2)\cdots(\xi_k-\xi_{k-1})(\xi_k-\xi_{k+1})\cdots(\xi_k-\xi_n)} \end{aligned}$$

60 Per un elemento quadratico a tre lati $\xi_1=-1$, $\xi_2=+1$e $\xi_3=0$. Sostituire, otteniamo le tre funzioni di forma

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{(\xi-\xi_2)(\xi-\xi_3)}{(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)} = \frac{(\xi-1)(\xi-0)}{(-1-1)(-1-0)} = \tfrac{1}{2}(\xi^2-\xi) \\ N_2(\xi) &= \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_3)}{(\xi_2-\xi_1)(\xi_2-\xi_3)} = \frac{(\xi+1)(\xi-0)}{(1+1)(1-0)} = \tfrac{1}{2}(\xi^2+\xi) \\ N_3(\xi) &= \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)}{(\xi_3-\xi_1)(\xi_3-\xi_2)} = \frac{(\xi+1)(\xi-1)}{(0+1)(0-1)} = 1-\xi^2 \end{aligned}$$

Quindi,

$$x(\xi) = \lfloor \mathbf{N} \rfloor \lfloor\ \overline{x}_1 \quad \overline{x}_2 \quad \overline{x}_3\ \rfloor^T \quad \text{and} \quad u(\xi) = \lfloor \mathbf{N} \rfloor \lfloor\ \overline{u}_1 \quad \overline{u}_2 \quad \overline{u}_3\ \rfloor^T \tag{49.7}$$

dove

$$\lfloor \mathbf{N} \rfloor = \lfloor\ \tfrac{1}{2}(\xi^2-\xi) \quad \tfrac{1}{2}(\xi^2+\xi) \quad 1-\xi^2\ \rfloor \tag{49.8}$$

49.2.2.4 Signora

61 Useremo le equazioni derivate in §49.2.1.2. Con riferimento a Fig. 49.11. We have 4 d.o.f.'s, $\{\mathbf{u}\}_{4\times1}$: e quindi avrà bisogno di 4 funzioni formali, N_1 to N_4, e quelli saranno ottenuti attraverso 4 condizioni di confine. Per questo dobbiamo assumere un'approssimazione polinomiale per spostamenti di grado 3.

$$\begin{aligned} v &= a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 \\ \theta &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 3a_1x^2 + 2a_2x + a_3 \end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Nota: v può essere riscritto come:

$$v = \underbrace{\begin{bmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}} \underbrace{\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}} \tag{49.9}$$

62 Ora applichiamo le condizioni di confine:

1. $v = \overline{v}_1$ at $x = 0$
2. $v = \overline{v}_2$ at $x = L$
3. $\theta = \overline{\theta}_1 = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ at $x = 0$
4. $\theta = \overline{\theta}_2 = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ at $x = L$

or:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{Bmatrix}}_{\overline{\mathbf{u}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ L^3 & L^2 & L & 1 \\ 3L^2 & 2L & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}}$$

Che quando i rendimenti invertiti:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\frac{1}{L^3}\begin{bmatrix} 2 & L & -2 & L \\ -3L & -2L^2 & 3L & -L^2 \\ 0 & L^3 & 0 & 0 \\ L^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[\mathcal{L}]^{-1}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{Bmatrix}}_{\overline{\mathbf{u}}} \tag{49.10}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

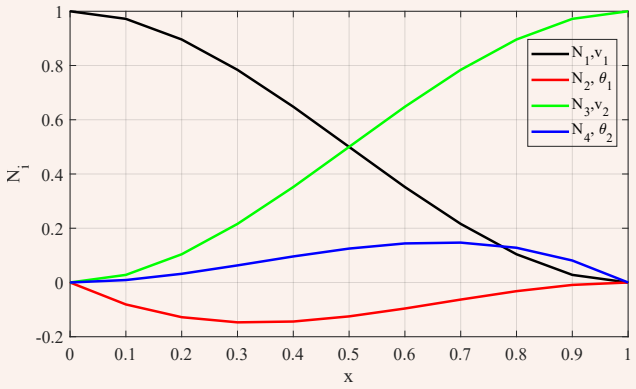


Figura 49.12: Funzioni di forma per flessore di elemento a fascio uniforme.

63 Combinando Eq. 49.10 con Eq. 49.9, otteniamo:

$$
\begin{aligned}
u &= \underbrace{\lfloor\, x^3 \quad x^2 \quad x \quad 1 \,\rfloor}_{\mathbf{p}} \underbrace{\frac{1}{L^3}\begin{bmatrix} 2 & L & -2 & L \\ -3L & -2L^2 & 3L & -L^2 \\ 0 & L^3 & 0 & 0 \\ L^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[\mathcal{L}]^{-1}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{Bmatrix}}_{\overline{\mathbf{u}}} \\
&= \underbrace{\lfloor\, \underbrace{(1+2\xi^3-3\xi^2)}_{N_1} \quad \underbrace{x(1-\xi)^2}_{N_2} \quad \underbrace{(3\xi^2-2\xi^3)}_{N_3} \quad \underbrace{(\xi^2-\xi)}_{N_4} \,\rfloor}_{\mathbf{N}=\mathbf{p}\mathcal{L}^{-1}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ v_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{Bmatrix}}_{\overline{\mathbf{u}}}
\end{aligned}
$$

where $\xi = \frac{x}{l}$.

64 Pertanto, le funzioni di forma per l'elemento flessore sono date da:

$$
\begin{aligned}
N_1 &= (1 + 2\xi^3 - 3\xi^2) \\
N_2 &= x(1-\xi)^2 \\
N_3 &= (3\xi^2 - 2\xi^3) \\
N_4 &= x(\xi^2 - \xi)
\end{aligned}
\tag{49.11}
$$

e sono mostrati in Fig 49.12. Tabella 49.3 illustra le caratteristiche di quelle funzioni formali

65 Nota che ridistribuiremo le stesse funzioni di forma qui sotto (§49.2.3.1) utilizzando le funzioni di interpolazione ermiziana.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

	$\xi = 0$		$\xi = 1$	
Function	N_i	$N_{i,x}$	N_i	$N_{i,x}$
$N_1 = (1 + 2\xi^3 - 3\xi^2)$	1	0	0	0
$N_2 = x(1 - \xi)^2$	0	1	0	0
$N_3 = (3\xi^2 - 2\xi^3)$	0	0	1	0
$N_4 = x(\xi^2 - \xi)$	0	0	0	1

Tabella 49.3: Caratteristiche delle funzioni di forma degli elementi del fascio

49.2.3 Funzioni di interpolazione ermiziana

66 Per problemi che coinvolgono il primo derivato della funzione forma, che è con C^1 continuità interelement (cioè continuità del primo derivato o del pendio) come per flessore, *Funzioni di interpolazione ermiziana* piuttosto che Quelli lagrangiani dovrebbero essere usati.

67 Le funzioni di interpolazione ermiziana sono funzioni cubiche a senso pezzo che soddisfano le condizioni di spostamento e pendenza (C^0, C^1) continuità. sono ampiamente utilizzati in CAD come curve Bezier.

68 Una funzione di interpolazione ermiziana è un tipo di interpolazione polinomiale utilizzata per stimare il valore di una funzione basata sia sui valori delle funzioni che sui valori derivati nei punti di interposizione (nodi). L'interpolazione ermiziana assicura non solo che il polinomio interpolato corrisponda ai valori di funzione indicati nei nodi, ma anche che i primi (e potenzialmente superiori) derivati si abbinano a questi nodi. Ciò si traduce in un'approssimazione più liscia e precisa, soprattutto quando la funzione di interpolazione è nota per avere determinati valori derivati.

69 Per esempio, consideriamo il caso semplice in cui si vuole interpolare una funzione $f(x)$ nei due punti x_0 e x_1 mediante l'interpolazione hermitiana. Sono noti i valori $f(x_0)$, $f(x_1)$ e le rispettive derivate prime $f'(x_0)$, $f'(x_1)$.

70 Polinomio di interpolazione ermiziana $H(x)$ di grado 3 può essere costruito come segue:

$$H(x) = h_0(x)f(x_0) + h_1(x)f(x_1) + h_2(x)f'(x_0) + h_3(x)f'(x_1)$$

dove funzioni di base $h0(x)$, $h1(x)$, $h2(x)$e $h3(x)$ sono definite per garantire che le condizioni di interpolazione siano soddisfatte.

71 Le funzioni di base sono costruite per soddisfare le condizioni di interpolazione ai nodi. x_0 e x_1, le funzioni di base possono essere definite come:

$$h_0(x) = (1 - 2(x - x_0)\frac{d}{dx}L_0(x))(L_0(x))^2$$

$$h_1(x) = (1 - 2(x - x_1)\frac{d}{dx}L_1(x))(L_1(x))^2$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

$$h_2(x) = (x - x_0)(L_0(x))^2$$
$$h_3(x) = (x - x_1)(L_1(x))^2$$

dove $L0(x)$ e $L1(x)$ sono i polinomi lineari di base Lagrange dati da:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$
$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

49.2.3.1 Funzioni di forma del fascio rivisitate

72 in §49.2.2.4 abbiamo derivato le funzioni di forma di un fascio utilizzando il metodo sviluppato in §49.2.1.2 e con riferimento a Fig. 49.11.

73 Nella teoria del fascio Euler-Bernoulli, gli sconosciuti primari sono lo spostamento trasversale w e la rotazione (slope) $\theta = \frac{dw}{dx}$Per modellare il comportamento dei raggi sottoposti a flessione, le funzioni di forma devono garantire la continuità sia dello spostamento che del pendio attraverso i confini degli elementi.

74 Considerare un elemento di fascio con due nodi, x_0 e x_1. Ogni nodo ha due gradi di libertà: lo spostamento trasversale w e la rotazione (slope) $\theta = \frac{dw}{dx}$. I polinomi di interpolazione ermiziani sono costruiti per garantire che sia lo spostamento che il pendio siano continui attraverso i confini degli elementi.

75 Polinomio di interpolazione ermiziana $H(x)$ per un elemento di fascio può essere scritto come polinomio cubico in termini delle funzioni base e dei valori nodali:

$$H(x) = h_0(x)w_0 + h_1(x)\theta_0 + h_2(x)w_1 + h_3(x)\theta_1$$

dove:

- w_0 e θ_0 sono lo spostamento e la pendenza a nodo x_0,
- w_1 e θ_1 sono lo spostamento e la pendenza a nodo x_1,
- $h0(x)$, $h1(x)$, $h2(x)$e $h3(x)$ sono le funzioni di forma ermiziana.

76 Per determinare le funzioni di forma $h0(x)$, $h1(x)$, $h2(x)$e $h3(x)$, dobbiamo imporre le seguenti condizioni ai nodi:

1. $H(x0) = w0$
2. $\frac{dH}{dx}(x_0) = \theta_0$
3. $H(x1) = w1$
4. $\frac{dH}{dx}(x_1) = \theta_1$

77 Per costruire le funzioni di base, utilizziamo la coordinata normalizzata $\xi = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$. Le funzioni di base sono quindi definite come segue:

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

1. $h_0(\xi)$: Dislocazione x_0
2. $h_1(\xi)$: Rifugiati x_0
3. $h_2(\xi)$: Dislocazione x_1
4. $h_3(\xi)$: Rifugiati x_1

$h0(x)$

$$h_0(x_0) = 1, \quad h_0'(x_0) = 0, \quad h_0(x_1) = 0, \quad h_0'(x_1) = 0$$

Noi costruiamo $h_0(\xi)$ as:

$$h_0(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$$

$h1(x)$

$$h_1(x_0) = 0, \quad h_1'(x_0) = 1, \quad h_1(x_1) = 0, \quad h_1'(x_1) = 0$$

Noi costruiamo $h_1(\xi)$ as:

$$h_1(\xi) = \xi - 2\xi^2 + \xi^3$$

$h2(x)$

$$h_2(x_0) = 0, \quad h_2'(x_0) = 0, \quad h_2(x_1) = 1, \quad h_2'(x_1) = 0$$

Noi costruiamo $h_2(\xi)$ as:

$$h_2(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3$$

$h3(x)$

$$h_3(x_0) = 0, \quad h_3'(x_0) = 0, \quad h_3(x_1) = 0, \quad h_3'(x_1) = 1$$

Noi costruiamo $h_3(\xi)$ as:

$$h_3(\xi) = \xi^2 - \xi^3$$

Combinando questi risultati, il polinomio di interpolazione ermiziano per un elemento a fascio è:

$$H(x) = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)w_0 + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)(x - x_0)\theta_0 + (3\xi^2 - 2\xi^3)w_1 + (\xi^2 - \xi^3)(x - x_1)\theta_1$$

where $\xi = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$. che sono identici a quelli precedenti derivati §49.2.2.4.

49.2.3.2 Elementi quadrilaterali

49.2.3.2.1 Quadrolatero di Linar (q4)

[78] Abbiamo precedentemente derivato la matrice di rigidità di una rettangolare elemento (allineato con l'asse di coordinate), questa formulazione generalizzerà a una forma quadrilatera arbitraria.

[79] Fig. 49.13 illustra l'elemento

[80] Per la custodia bidimensionale

$$u(\xi, \eta) = \sum N_{ij}\overline{u}_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} N_j(\xi)N_i(\eta)\overline{u}_k$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

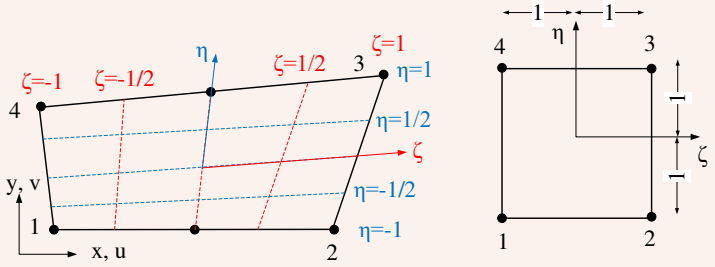


Figura 49.13: Quattro elementi isoparametrici

dove $k = (i-1)m + j$. Per un elemento bilineare, $n = m = 2$, questo può essere riscritto come

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta) &= \lfloor\, N_1(\xi) \quad N_2(\xi) \,\rfloor \begin{bmatrix} \overline{u}_1 & \overline{u}_3 \\ \overline{u}_2 & \overline{u}_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1(\eta) \\ N_2(\eta) \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_\xi^T \overline{\mathbf{u}} \mathbf{N}_\eta \\ &= N_1(\xi)N_1(\eta)\overline{u}_1 + N_2(\xi)N_1(\eta)\overline{u}_2 + N_1(\xi)N_2(\eta)\overline{u}_4 + N_2(\xi)N_2(\eta)\overline{u}_3 \\ &= N_1(\xi,\eta)\overline{u}_1 + N_2(\xi,\eta)\overline{u}_2 + N_3(\xi,\eta)\overline{u}_3 + N_4(\xi,\eta)\overline{u}_4 \\ &= \sum_{i=1}^{4} N_i \overline{u}_i \end{aligned}$$

81 Applicando l'equazione di interpolazione lagrangiana, Eq. 49.7 noi otteniamo

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{(\xi-\xi_2)}{(\xi_1-\xi_2)} = \frac{(\xi-1)}{(-1-1)} = \frac{1}{2}(1-\xi) \\ N_2(\xi) &= \frac{(\xi-\xi_1)}{(\xi_2-\xi_1)} = \frac{(\xi+1)}{(1+1)} = \frac{1}{2}(1+\xi) \\ N_1(\eta) &= \frac{(\eta-\eta_2)}{(\eta_1-\eta_2)} = \frac{(\eta-1)}{(-1-1)} = \frac{1}{2}(1-\eta) \\ N_2(\eta) &= \frac{(\eta-\eta_1)}{(\eta_2-\eta_1)} = \frac{(\eta+1)}{(1+1)} = \frac{1}{2}(1+\eta) \end{aligned}$$

Sostituire in Eq. 49.12

$$\begin{aligned} N_1(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta); \quad N_2(\xi,\eta) = \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta); \\ N_3(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta); \quad N_4(\xi,\eta) = \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta); \end{aligned} \tag{49.12}$$

Va notato che per questo semplice caso, le funzioni di forma potrebbero essere state determinate da un semplice controllo.

49.2.3.2.2 Quadratici quadrilateri

82 Per un elemento quadrilatero quadratico, ci sono due possibilità, Fig. 49.14.

83 Il triangolo Pascal, Fig. 49.15, sarà poi utilizzato per giustificare la scelta dei termini nel campo di spostamento degli elementi isoparametrici.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

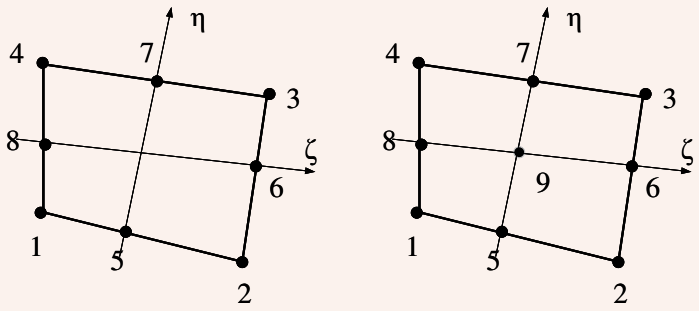


Figura 49.14: Serendipity e quadrilateri lagrangiani quadratici

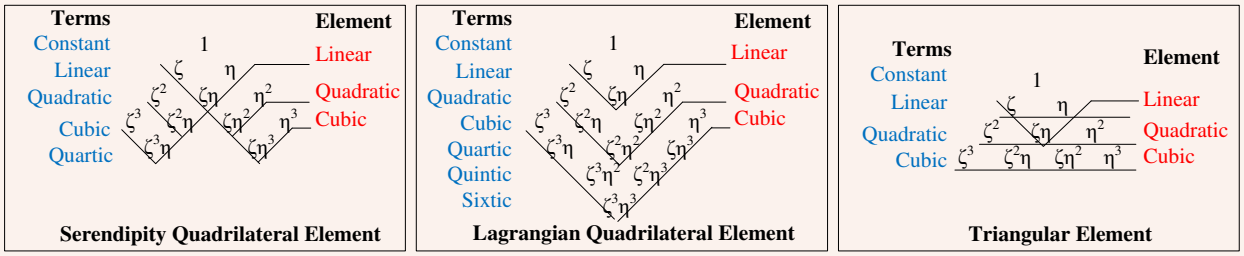


Figura 49.15: Triangoli Pascal per elementi quadrilaterali e triangolari

49.2.3.2.2.1 Elemento di serenità (q8)

84 Sulla base del triangolo di Pascal, lo spostamento il campo è dato da

$$u = \underbrace{a_1}_{\boxed{0}} + \underbrace{a_2 x + a_3 y}_{\boxed{1}} + \underbrace{a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2}_{\boxed{2}} + \underbrace{a_8 x^2 y + a_9 x y^2}_{\boxed{3}}$$

85 In questa formulazione, il $x^2 y^2$ termine manca e gli 8 termini nel presunto polinomiale espansione corrispondono i 8 nodi (4 angolo e 4 midside).

86 Per analogia a tabelle 49.1 e 49.2, le funzioni di forma possono essere ottenute mediante semplice controllo (i.e. *serependio*),

$$\begin{aligned} N_i &= \tfrac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(\xi\xi_i+\eta\eta_i-1) && i=1,2,3,4 \\ N_i &= \tfrac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta\eta_i) && i=5,7 \\ N_i &= \tfrac{1}{2}(1+\xi\xi_i)(1+\eta^2) && i=6,8 \end{aligned}$$

e sono tabulati in Tabella 49.4.

87 Le funzioni di forma per i nodi angolo e midisde sono mostrata in Fig. 49.17.

49.2.3.2.2.2 Elemento lagrangiano (q9)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

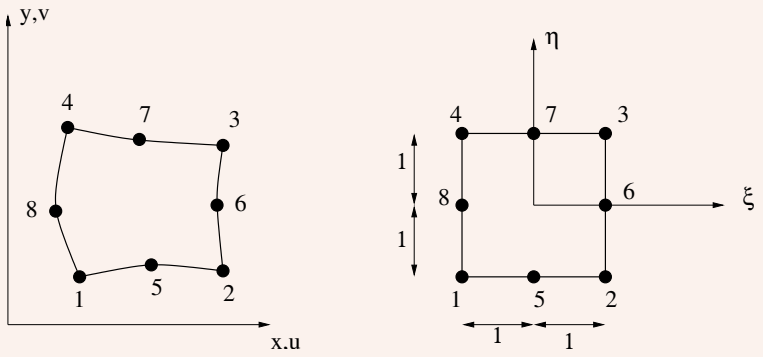


Figura 49.16: Serendipity isoparametrico elemento finito quadratico: elemento globale e genitore

Tabella 49.4: Funzioni di forma e derivati naturali per l'elemento q8

i	N_i	$N_{i,\xi}$	$N_{i,\eta}$
1	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)$	$\frac{1}{4}(2\xi+\eta)(1-\eta)$	$\frac{1}{4}(1-\xi)(2\eta+\xi)$
2	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)$	$\frac{1}{4}(2\xi-\eta)(1-\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\xi)(2\eta-\xi)$
3	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)$	$\frac{1}{4}(2\xi+\eta)(1+\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\xi)(2\eta+\xi)$
4	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi-\eta-1)$	$\frac{1}{4}(2\xi-\eta)(1+\eta)$	$\frac{1}{4}(1-\xi)(2\eta-\xi)$
5	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$	$-\xi(1-\eta)$	$-\frac{1}{2}(1-\xi^2)$
6	$\frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$	$\frac{1}{2}(1-\eta^2)$	$-(1+\xi)\eta$
7	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$	$-\xi(1+\eta)$	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)$
8	$\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$	$-\frac{1}{2}(1-\eta^2)$	$-(1-\xi)\eta$

88 In questo elemento, il campo di spostamento è dato da

$$u = \underbrace{\underbrace{a_1}_{\boxed{0}} + \underbrace{a_2x + a_3y}_{\boxed{1}} + \underbrace{a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2}_{\boxed{2}} + \underbrace{a_8x^2y + a_9xy^2}_{\boxed{3}}}_{\text{Serendipity}} + \underbrace{a_{12}x^2y^2}_{\boxed{4}}$$

89 Tutti i termini quadratici sono presenti, quindi ci sono 9 termini in espansione polinomiale, e il nono nodo corrisponderà a un nodo interno.

90 Le funzioni di forma in questo caso possono essere ottenute direttamente dalle funzioni di interpolazione lagrangiana, producendo

91 L'elemento Q9 ha nove nodi e utilizza funzioni di forma che sono quadratiche in entrambi i ξ e η Le funzioni di forma sono derivate utilizzando l'interpolazione lagrangiana.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

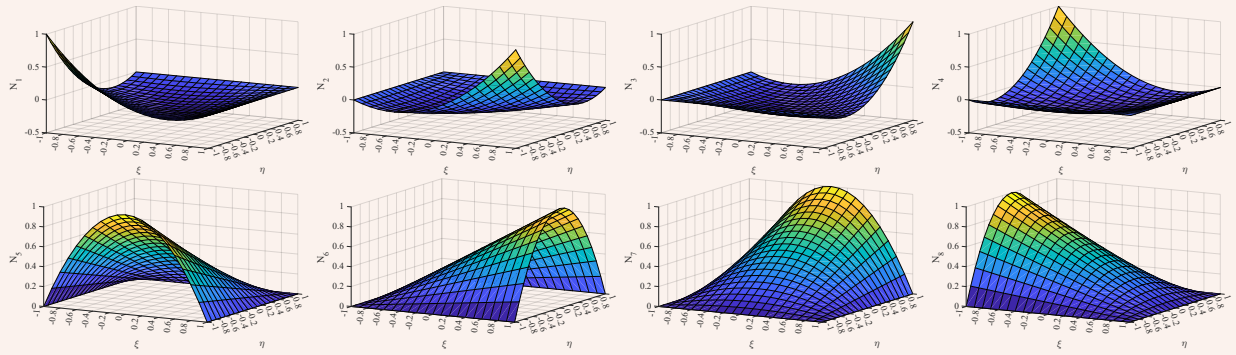


Figura 49.17: Funzioni di forma per 8 elementi quadrilaterali annunziati

92 L'elemento Q9 ha i seguenti nodi e coordinate nel sistema di coordinate naturali (ξ, η) indicato nella tabella 49.5.

Tabella 49.5: Coordinate nodali (naturali) di elemento q9

Node	1	2	3	4	5	5	7	8	9
ξ	-1	0	1	1	1	0	-1	-1	0
τ	-1	-1	-1	0	1	1	1	0	0

93 Le funzioni di forma Lagrange per un elemento quadratico in 1D sono date da:

$$N_i(\xi) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}$$

94 Per un elemento quadratico con nodi a $\xi = -1$, $\xi = 0$e $\xi = 1$, le funzioni di forma sono:

Funzione di forma $N_0(\xi)$ per $\xi = -1$

$$N_0(\xi) = \frac{(\xi - 0)(\xi - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} = \frac{\xi(\xi - 1)}{2}$$

Funzione di forma $N_1(\xi)$ per $\xi = 0$

$$N_1(\xi) = \frac{(\xi - (-1))(\xi - 1)}{(0 - (-1))(0 - 1)} = \frac{(\xi + 1)(\xi - 1)}{-1} = 1 - \xi^2$$

Funzione di forma $N_2(\xi)$ per $\xi = 1$

$$N_2(\xi) = \frac{(\xi - (-1))(\xi - 0)}{(1 - (-1))(1 - 0)} = \frac{(\xi + 1)\xi}{2}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

95 Le funzioni di forma 2D Lagrange per l'elemento Q9 sono prodotti delle funzioni di sagoma 1D LaGrange ξ e η indicazioni:

$$N_{ij}(\xi,\eta) = N_i(\xi) \cdot N_j(\eta)$$

96 Ora costruiamo le funzioni di forma

1. At $(\xi,\eta) = (-1,-1)$:

$$N_{11}(\xi,\eta) = N_0(\xi)N_0(\eta) = \left(\frac{\xi(\xi-1)}{2}\right)\left(\frac{\eta(\eta-1)}{2}\right) = \frac{\xi(\xi-1)\eta(\eta-1)}{4}$$

2. At $(\xi,\eta) = (0,-1)$:

$$N_{21}(\xi,\eta) = N_1(\xi)N_0(\eta) = (1-\xi^2)\left(\frac{\eta(\eta-1)}{2}\right) = \frac{(1-\xi^2)\eta(\eta-1)}{2}$$

3. At $(\xi,\eta) = (1,-1)$:

$$N_{31}(\xi,\eta) = N_2(\xi)N_0(\eta) = \left(\frac{(\xi+1)\xi}{2}\right)\left(\frac{\eta(\eta-1)}{2}\right) = \frac{(\xi+1)\xi\eta(\eta-1)}{4}$$

4. At $(\xi,\eta) = (1,0)$:

$$N_{32}(\xi,\eta) = N_2(\xi)N_1(\eta) = \left(\frac{(\xi+1)\xi}{2}\right)(1-\eta^2) = \frac{(\xi+1)\xi(1-\eta^2)}{2}$$

5. At $(\xi,\eta) = (1,1)$:

$$N_{33}(\xi,\eta) = N_2(\xi)N_2(\eta) = \left(\frac{(\xi+1)\xi}{2}\right)\left(\frac{(\eta+1)\eta}{2}\right) = \frac{(\xi+1)\xi(\eta+1)\eta}{4}$$

6. At $(\xi,\eta) = (0,1)$:

$$N_{23}(\xi,\eta) = N_1(\xi)N_2(\eta) = (1-\xi^2)\left(\frac{(\eta+1)\eta}{2}\right) = \frac{(1-\xi^2)(\eta+1)\eta}{2}$$

7. At $(\xi,\eta) = (-1,1)$:

$$N_{13}(\xi,\eta) = N_0(\xi)N_2(\eta) = \left(\frac{\xi(\xi-1)}{2}\right)\left(\frac{(\eta+1)\eta}{2}\right) = \frac{\xi(\xi-1)(\eta+1)\eta}{4}$$

8. At $(\xi,\eta) = (-1,0)$:

$$N_{12}(\xi,\eta) = N_0(\xi)N_1(\eta) = \left(\frac{\xi(\xi-1)}{2}\right)(1-\eta^2) = \frac{\xi(\xi-1)(1-\eta^2)}{2}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

9. At $(\xi, \eta) = (0, 0)$:

$$N_{22}(\xi, \eta) = N_1(\xi)N_1(\eta) = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$$

97 L'ultima funzione forma è spesso chiamata *funzione di bolla*

98 Quelle funzioni di forma differiscono leggermente da quelle dell'elemento serendipity.

99 Le funzioni di forma sono mostrate in Fig. 49.18.

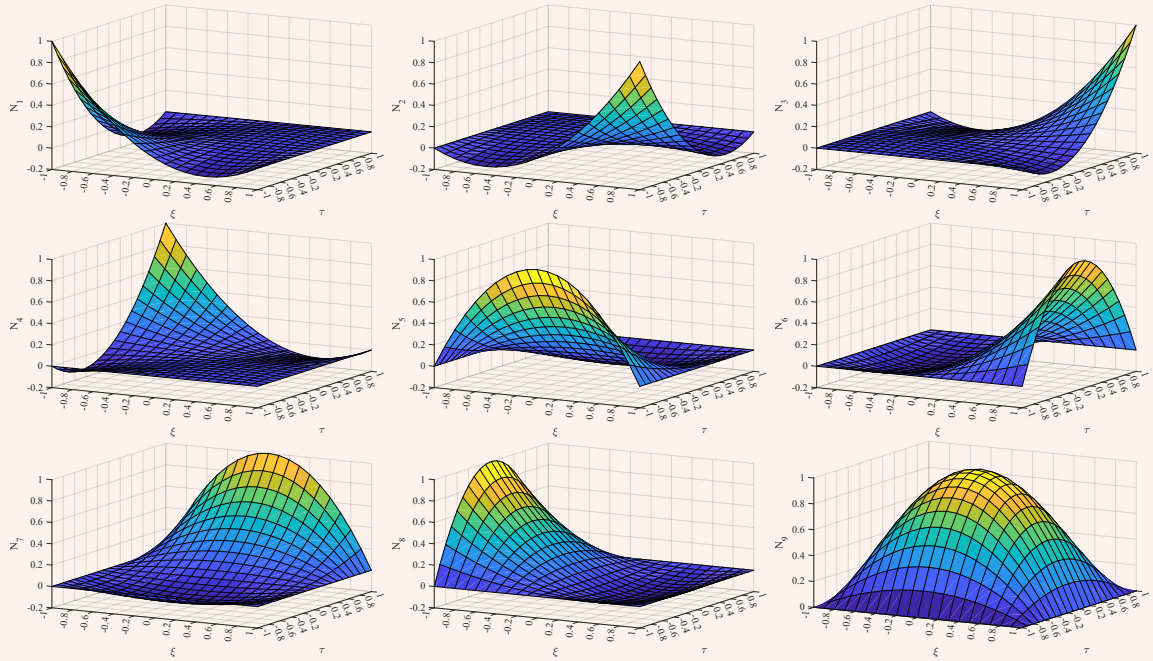


Figura 49.18: Funzioni di forma per 9 elementi quadrilaterali annunziati

100 Gli elementi Q9 eseguono molto meglio del Q8 se i bordi non sono paralleli o leggermente curvato.

49.2.3.3 Elemento variabile (gerarchico)

101 Sulla base di quanto sopra, possiamo generalizzare la formulazione a uno dei elemento quadrilatero con numero variabile di nodi. Questo elemento può avere diverso ordine di variazione lungo diversi bordi, e è abbastanza utile per facilitare il grading di una maglia elemento finito.

102 Nella sua formulazione più semplice, ha quattro nodi e ha una variazione lineare lungo tutti i lati, e nel caso più generale è un elemento quadratico pieno. Le funzioni di forma possono essere ottenute dalla tabella 49.6. Si noti che queste funzioni di forma sono per l'elemento gerarchico in cui i nodi d'angolo sono numerati prima, e quelli di lato intermedio dopo, Fig. 49.19.

COPIA DI REVISIONE

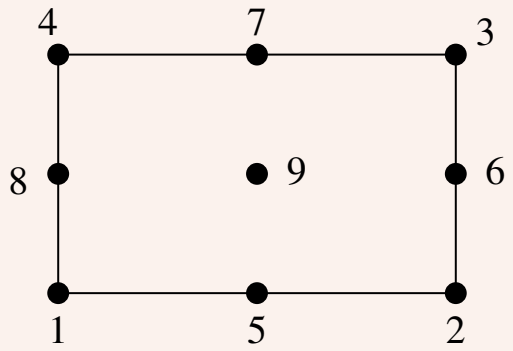


Figura 49.19: Numerazione nodale per elementi isoparametrici

Tabella 49.6: Funzioni di forma per elementi nodi variabili

		Solo se nodo i è presente				
		$i=5$	$i=6$	$i=7$	$i=8$	$i=9$
N_1	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$	$-\frac{1}{2}N_5$			$-\frac{1}{2}N_8$	$\frac{1}{4}N_9$
N_2	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$	$-\frac{1}{2}N_5$	$-\frac{1}{2}N_6$			$\frac{1}{4}N_9$
N_3	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$		$-\frac{1}{2}N_6$	$-\frac{1}{2}N_7$		$\frac{1}{4}N_9$
N_4	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$			$-\frac{1}{2}N_7$	$-\frac{1}{2}N_8$	$\frac{1}{4}N_9$
N_5	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$					$-\frac{1}{2}N_9$
N_6	$\frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$					$-\frac{1}{2}N_9$
N_7	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$					$-\frac{1}{2}N_9$
N_8	$\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$					$-\frac{1}{2}N_9$
N_9	$(1-\xi^2)(1-\eta^2)$					

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

49.2.3.4 Elemento triangolare (t6)

103 Le funzioni di forma dello spostamento quadratico possono essere scritte in naturale coordinate come:

$$u = \sum_{i=1}^{6} N_i u_i \quad v = \sum_{i=1}^{6} N_i v_i \tag{49.13}$$

dove le funzioni di forma sono state ottenute in Eq. 49.2.2.2

$$\begin{aligned} N_1 &= (2L_1 - 1)L_1 & N_4 &= 4L_1L_2 \\ N_2 &= (2L_2 - 1)L_2 & N_5 &= 4L_2L_3 \\ N_3 &= (2L_3 - 1)L_3 & N_6 &= 4L_3L_1 \end{aligned} \tag{49.14}$$

104 Si deve notare che in alternativa, avremmo potuto ottenere quella forma funzioni assumendo

$$u(L_1, L_2) = a_1 + a_2L_1 + a_3L_2 + a_4L_1^2 + a_5L_1L_2 + a_6L_2^2 \tag{49.15}$$

e quindi determinare i coefficienti mediante soddisfazione delle condizioni di confine appropriate.

105 Le funzioni della forma e i loro derivati rispetto alla naturale coordinate L_1 e L_2 sono dati in tabella 49.7 (in termini of L_1, L_2e L_3).

Tabella 49.7: Funzioni di forma e derivati per l'elemento t6

i	N_i	N_{i,L_1}	N_{i,L_2}	N_{i,L_3}
1	$(2L_1 - 1)L_1$	$4L_1 - 1$	0	0
2	$(2L_2 - 1)L_2$	0	$4L_2 - 1$	0
3	$(2L_3 - 1)L_3$	0	0	$4L_3 - 1$
4	$4L_1L_2$	$4L_2$	$4L_1$	0
5	$4L_2L_3$	0	$4L_3$	$4L_2$
6	$4L_1L_3$	$4L_3$	0	$4L_1$

106 Le funzioni di forma per il triangolo quadratico a sei nodi sono mostrate in Fig. 49.20.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

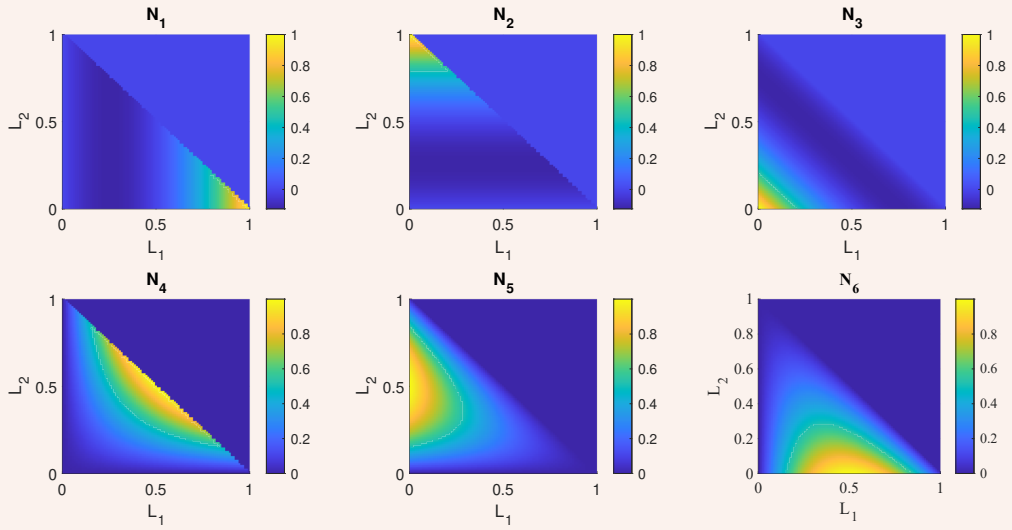
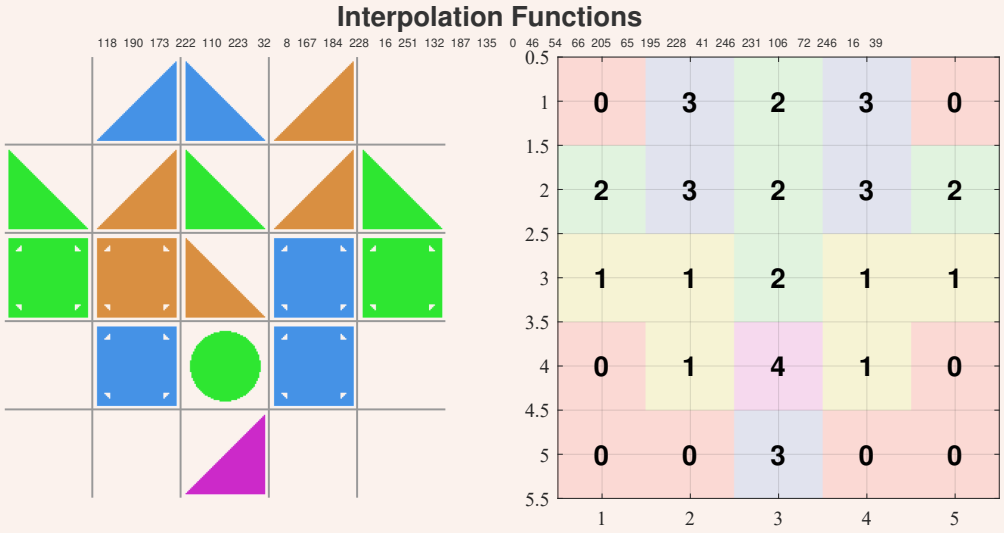


Figura 49.20: Funzioni di forma per 6 elementi quadratici triangolari annui



Identicona specifica del capitolo, chapter H

COPIA DI REVISIONE

Capitolo 50

Formulazione degli elementi finiti lineari

Abstract

Nei capitoli precedenti, abbiamo introdotto metodi variazionali, in particolare il principio del lavoro virtuale e le funzioni di interpolazione discusse per il campo di spostamento in termini dei valori nodali. Ora, è il momento di applicare questi concetti per formulare il metodo degli elementi finiti. Questo capitolo fornisce una formulazione generale per gli elementi 1D (abrassia/trusca) e continuum. Si noti che questo non è l'unico approccio, in un capitolo successivo esamineremo il metodo Galerkin (§52) che, per tutti gli scopi pratici, si tradurrà in una formulazione identica nella meccanica.

50.1 Introduzione 1788
50.2 Elemento finito 1789
50.2.1 Introduzione 1789
50.2.2 Relazioni di spostamento . . 1789
50.2.3 Slocamento virtuale e ceppi . 1790
50.2.4 Elemento rigidità matrice formulazione 1791
50.2.5 Recupero delle tensioni . . . 1792
50.3 Applicazione 1793
50.3.1 Elemento di truss 1793
50.3.2 Elemento flessibile 1793
50.4 Requisiti generali di elementi 1794
50.5 Errore di discretizzazione e tasso di convergenza 1796
50.6 Carattere limitato inferiore delle soluzioni basate su energia minima potenziale 1797
50.7 Equilibrio e compatibilità nella soluzione 1798

50.1 Introduzione

1 Finora abbiamo considerato sistemi continui, in questo capitolo cerchiamo di applicare le relazioni precedentemente derivate alle discreti sistemi. Soluzioni primarie solo presso solo nodi (al contrario di una soluzione continua all'interno Ω). L'applicazione del principio di

COPIA DI REVISIONE

spostamento virtuale richiede un assunto campo di spostamento. Questo campo di sfogo può essere approssimato da funzioni di interpolazione scritto in termini di:

1. Coefficienti polinomiali sconosciuti, più adatti per sistemi continui, ad esempio: e la Rayleigh-Ritz metodo

$$v(x) = a_1 \underbrace{x(L-x)}_{\Phi_1} + a_2 \underbrace{x^2(L-x)^2}_{\Phi_2} + \dots$$

   Un grosso svantaggio di questo approccio, è che i coefficienti non hanno fisico - Che significa.
2. Deformazioni nodali sconosciute, più adatte per sistemi discreti e Possibili formulazioni basate sull'energia

$$v(\overline{\mathbf{u}}_i) = u = N_1\overline{\mathbf{u}}_1 + N_2\overline{\mathbf{u}}_2 + \dots + N_n\overline{\mathbf{u}}_n$$

   dove $\overline{\mathbf{u}}_i$ è lo spostamento noto a dof i.

50.2 Elemento finito

50.2.1 Introduzione

2 Nel capitolo 41, abbiamo derivato le matrici di rigidità di un elemento asta dimensionale, l'approccio utilizzato non potrebbe essere generalizzato all'elemento finito generale. applicabile sia a barre dimensionali (o quasi continuum) elementi o elementi continui (2D o 3D).

3 È importante notare che mentre il precedente presentato metodo per derivare la matrice di rigidità ha dato una soluzione esatta, non può essere generalizzato al continuum (2D/3D elementi). D'altra parte, il metodo qui presentato è un ca. metodo, che si traduce in una matrice di rigidità esatta per elementi dimensionali flessibili e uno. Nonostante la sua approssimazione, questo cosiddetto metodo degli elementi finiti darà ottimi risultati se vengono utilizzati abbastanza elementi.

50.2.2 Relazioni di spostamento

4 Lo spostamento u in qualsiasi punto all'interno di un elemento può essere scritto in termini delle funzioni formali $\mathbf{N}$ e gli spostamenti nodali $\overline{\mathbf{u}}$ as

$$\mathbf{u}(x) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{N}(x)\overline{\mathbf{u}}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

5 La varietà viene quindi definita come:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{B}(x)\overline{\mathbf{u}} \tag{50.1}$$

dove **B** è la matrice che lega gli spostamenti nodali al campo di deformazione ed è espressa in termini delle derivate di **N**.

50.2.2.1 Membri assiali

6 Utilizzo delle funzioni di forma derivate in Eq 49.3Eq. 50.1 darà

$$\begin{aligned} u(x) &= \underbrace{\lfloor \underbrace{(1-\frac{x}{L})}_{N_1} \quad \underbrace{\frac{x}{L}}_{N_2} \rfloor}_{\mathbf{N}} \underbrace{\left\{ \begin{matrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{matrix} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}} \\ \varepsilon(x) &= \varepsilon_{xx} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \underbrace{\left\lfloor \underbrace{-\frac{1}{L}}_{\frac{\partial N_1}{\partial x}} \quad \underbrace{\frac{1}{L}}_{\frac{\partial N_2}{\partial x}} \right\rfloor}_{\mathbf{B}} \underbrace{\left\{ \begin{matrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{matrix} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}} \end{aligned}$$

50.2.2.2 Membri della Flexural

7 Utilizzando le funzioni di forma per elementi flessografici precedentemente derivati in Eq. 49.11

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{y}{\rho} = y\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = y\frac{\mathrm{d}^2 N}{\mathrm{d}x^2}\overline{\mathbf{v}} \\ &= \underbrace{y \left\lfloor \underbrace{\frac{6}{L^2}(2\xi-1)}_{\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2}} \quad \underbrace{-\frac{2}{L}(3\xi-2)}_{\frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2}} \quad \underbrace{\frac{6}{L^2}(-2\xi+1)}_{\frac{\partial^2 N_3}{\partial x^2}} \quad \underbrace{-\frac{2}{L}(3\xi-1)}_{\frac{\partial^2 N_4}{\partial x^2}} \right\rfloor}_{\mathbf{B}} \underbrace{\left\{ \begin{matrix} \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{matrix} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}} \end{aligned} \tag{50.2}$$

50.2.3 Slocamento virtuale e ceppi

8 In previsione dell'applicazione del principio di spostamento virtuale, definiamo i vettori di spostamenti virtuali e ceppo in termini di nodali funzioni di spostamento e forma:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{u}(x) &= \mathbf{N}(x)\delta\overline{\mathbf{u}} \\ \delta\boldsymbol{\varepsilon}(x) &= \mathbf{B}(x)\delta\overline{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

50.2.4 Elemento rigidità matrice formulazione

9 Applichiamo ora la principio di spostamento virtuale e ribadisce alcune relazioni note (curanti con matrici):

$$\delta U = \delta W \tag{50.3}$$

$$\delta U = \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\sigma} \mathrm{d}\Omega \tag{50.4}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^0 \tag{50.5}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}} \tag{50.6}$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\delta\overline{\mathbf{u}}$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \delta\overline{\mathbf{u}}\mathbf{B}^T \tag{50.7}$$

Combinando le Eq. 50.3, 50.4, 50.5, 50.7 e 50.6, l'energia di deformazione virtuale interna è data da:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{\Omega} \underbrace{\delta\overline{\mathbf{u}}\mathbf{B}^T}_{\delta\boldsymbol{\varepsilon}} \underbrace{\mathbf{D}\mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}}_{\boldsymbol{\sigma}} \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} \underbrace{\delta\overline{\mathbf{u}}\mathbf{B}^T}_{\delta\boldsymbol{\varepsilon}} \underbrace{\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^0}_{\boldsymbol{\sigma}^0} \mathrm{d}\Omega \\ &= \delta\overline{\mathbf{u}} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\,\mathrm{d}\Omega\overline{\mathbf{u}} - \delta\overline{\mathbf{u}} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^0 \mathrm{d}\Omega \end{aligned} \tag{50.8}$$

10 Il virtuale lavoro esterno a sua volta è dato da:

$$\delta W = \underbrace{\delta\overline{\mathbf{u}}}_{\text{Virt. Nodal Displ.}} \underbrace{\overline{\mathbf{F}}}_{\text{Nodal Force}} + \int_l \delta\mathbf{u} q(x) \mathrm{d}x$$

11 Combinare questa equazione con $\{\delta\mathbf{u}\} = \mathbf{N}\{\delta\overline{\mathbf{u}}\}$ rendimenti:

$$\delta W = \delta\overline{\mathbf{u}}\overline{\mathbf{F}} + \delta\overline{\mathbf{u}} \int_0^l \mathbf{N}^T\, q(x)\, \mathrm{d} \tag{50.9}$$

12 Equazione dell'energia di tensione interna Eqn. 50.8 al lavoro esterno Eqn. 50.9, otteniamo:

$$\underbrace{\delta\overline{\mathbf{u}} \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\,\mathrm{d}\Omega}_{\mathbf{k}}\,\overline{\mathbf{u}} - \delta\overline{\mathbf{u}} \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{B}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^0 \mathrm{d}\Omega}_{\overline{\mathbf{F}}^0}}_{\delta U} = \underbrace{\delta\overline{\mathbf{u}}\overline{\mathbf{F}} + \delta\overline{\mathbf{u}} \underbrace{\int_0^l \mathbf{N}^T\, q(x)\, \mathrm{d}x}_{\overline{\mathbf{F}}^e}}_{\delta W} \tag{50.10}$$

or

$$\mathbf{k}\overline{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{F}}^o = \overline{\mathbf{F}} + \overline{\mathbf{F}}^e \tag{50.11}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

13 Cancellare il $\delta\overline{\mathbf{u}}$ termine, questa è la stessa equazione dell'equilibrio di quello scritto in precedenza. $\overline{\mathbf{u}}$, la matrice di rigidità della struttura $\mathbf{k}$, il vettore della forza nodale esterna $\overline{\mathbf{F}}$, la forza di elementi distribuita $\overline{\mathbf{F}}^e$, e il vettore di spostamento iniziale.

14 Da questa relazione definiamo:

Definition 50.1: Forza di matrice e di elementi

La matrice di rigidità dell'elemento:

$$\mathbf{k} = \int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\mathrm{d}\Omega \tag{50.12}$$

vettore di forza iniziale elemento:

$$\overline{\mathbf{F}}^0 = \int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^0\mathrm{d}\Omega \tag{50.13}$$

vettore di carico equivalente elemento:

$$\overline{\mathbf{F}}^e = \int_0^L \mathbf{N}\, q(x)\,\mathrm{d}x \tag{50.14}$$

15 Il generale equazione di equilibrio può essere scritto come:

$$\underbrace{\mathbf{k}\overline{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{F}}^0}_{F_{\text{int}}} - \underbrace{\overline{\mathbf{F}} + \overline{\mathbf{F}}^e}_{F_{\text{ext}}} = 0$$

Questo è il equazione discorizzata Euler (equazione di equilibrio) associata con la variazionale definita dal principio del lavoro virtuale.

50.2.5 Recupero delle tensioni

16 Mentre dalla sezione precedente, abbiamo derivato un rapporto generale in cui gli spostamenti nodali sono le sconosciute primarie, cerchiamo di determinare i risvolti interni (generalizzati) che sono più spesso necessari per il design. Ricordando che abbiamo:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}\end{aligned}$$

Con il vettore di spostamento nodale $\overline{\mathbf{u}}$ noti, queste due equazioni si sarebbero rese:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\cdot\mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}$$

Si nota che le variabili secondarie (straine e stress) sono derivati delle variabili primarie (slocamento), e come tali non possono sempre essere determinati con la stessa precisione.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

50.3 Applicazione

50.3.1 Elemento di truss

17 Le funzioni di forma dell'elemento tromba derivato in Eq. 49.3

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{x}{L} \\ N_2 &= \frac{x}{L} \end{aligned}$$

18 La relazione di spostamento del ceppo corrispondente **B** è dato da:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}x} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{\mathrm{d}x} & \frac{dN_2}{\mathrm{d}x} \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \end{aligned}$$

Per l'elemento reticolare, la matrice costitutiva **D** si riduce allo scalare E; pertanto, sostituendo nell'Eq. 50.12, con $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}A\mathrm{d}x$: $\mathbf{k} = \int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\mathrm{d}\Omega$ Ma $\mathrm{d}\Omega = A\mathrm{d}x$ e per elemento con area trasversale costante otteniamo:

$$\mathbf{k} = A\int_0^L \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} \cdot E \cdot \lfloor\, -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \,\rfloor \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{k} = \frac{AE}{L^2}\int_0^L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{d}x = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

50.3.2 Elemento flessibile

19 Per un elemento di fascio, le funzioni della forma sono state derivate in Eq. 49.11 e la **B** matrice in Eq. 50.2, sostitutiva in Eq. 50.12:

$$\mathbf{k} = \int_0^L \int_A \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\, y^2\, \mathrm{d}A\, \mathrm{d}x$$

Notate che $\int_A y^2\, \mathrm{d}A = I_z$ Eq. 50.12 riduce a

$$\mathbf{k} = \int_0^L \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B} I_z\, \mathrm{d}x$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Per questo semplice caso, abbiamo: $\mathbf{D} = E$, così:

$$\mathbf{k} = EI_z \int_0^l \mathbf{B}^T \mathbf{B}\, \mathrm{d}x$$

20 Notare il cambiamento della variabile di integrazione da $\mathrm{d}x$ to $\mathrm{d}\xi$, noi otteniamo

$$\mathbf{k} = EI_z \int_0^1 \begin{Bmatrix} \frac{6}{L^2}(2\xi-1) \\ -\frac{2}{L}(3\xi-2) \\ \frac{6}{L^2}(-2\xi+1) \\ -\frac{2}{L}(3\xi-1) \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2}(2\xi-1) & -\frac{2}{L}(3\xi-2) & \frac{6}{L^2}(-2\xi+1) & -\frac{2}{L}(3\xi-1) \end{bmatrix} \underbrace{L\mathrm{d}\xi}_{\mathrm{d}x}$$

or

$$\mathbf{k} = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \overline{v}_1 & \overline{\theta}_1 & \overline{v}_2 & \overline{\theta}_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \end{array}$$

che è in realtà identico alla matrice precedentemente derivata in Eq. 41.1

21 In effetti, abbiamo attraversato quattro capitoli (a partire dal capitolo 47 a questo 50) essere finalmente in grado di derivare questa matrice utilizzando un approccio generalizzato che può essere applicato a qualsiasi tipo di elemento finito. Questo approccio sarà sfruttato nel prossimo capitolo per ricavare la rigidità matrice di elementi isoparametrici.

50.4 Requisiti generali di elementi

22 Un elemento finito (solo un campo di spostamento approssimativo nel La formulazione Rayleigh-Ritz deve soddisfare due principi fondamentali *requisiti*

Complessità: La discorsizzazione FE deve *almeno* ospitare costante dislocamento e tensione costante (o gradiente temperatura e temperatura). includendo in due problemi dimensionali i seguenti

$$\phi = a_1 + a_2 x + a_3 y + \text{ eventuali termini aggiuntivi}$$

Compatibilità o conformità: Il ravvicinamento del settore sull'elemento i confini devono essere continui (C^0 o C^1 continuità). Gli elementi più finiti sono conformi, ma alcuni Non lo sono.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

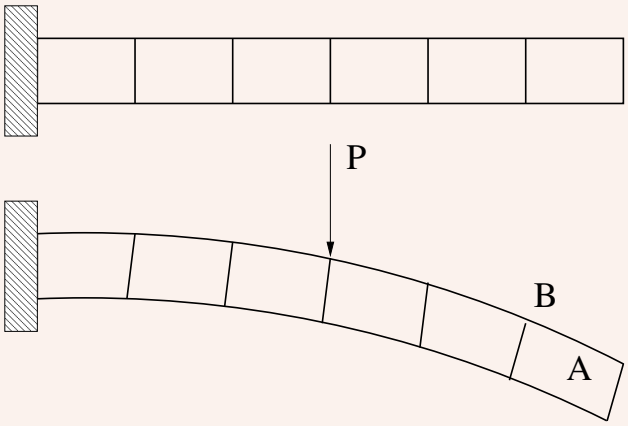


Figura 50.1: Completità e compatibilità

23 Per esempio, rispetto a Fig. 50.1, elemento A deve essere in grado di subire il movimento del corpo rigido senza ceppi / stress interni, e al nodo B dovremmo avere continuità di spostamento (ma non pendenza per questo elemento).

24 Se questi due requisiti sono soddisfatti, allora *convergenza* è assicurato. Nel metodo FE si ottengono soluzioni approssimative, e più elementi che abbiamo uso, più accurato è la soluzione approssimativa. Nel limite, per elementi infinitamente piccoli, abbiamo bisogno della soluzione anche Quindi, la convergenza è garantita se completezza e i requisiti di compatibilità sono soddisfatti.

25 *Teorema di equivalenza del lax*:

Definition 50.2: Criteri di convergenza

Criterio di convergenza=completezza+ requisiti di compatibilità

26 Due requisiti essenziali:

Test di patch: La completezza può essere valutata attraverso il *test di patch* che sarà discusso più tardi.

Energia zero della frana: Per problemi strutturali, non dovrebbe esserci energia da sforzo zero quando l'elemento è sottoposto a un movimento rigido del corpo. Richiamare che nella matrice di rigidità formulazione, la matrice è singolare in quanto incarna non solo lo spostamento della forza relazioni, ma anche le equazioni di equilibrio. Ad ogni di queste equazione corrisponde un modalità corpo rigido che può essere rilevato da un'analisi di autovalore (più su questo più avanti).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

50.5 Errore di discretizzazione e tasso di convergenza

27 La formazione produrrà una soluzione esatta nel limite come la dimensione h of elemento si avvicina a zero.

28 In alcuni casi la soluzione esatta è ottenuta con un numero finito di elementi (o anche con uno solo) se l'espansione polinomiale utilizzata in questo elemento può adattarsi esattamente alla soluzione corretta. (ad esempio Truss, elementi a trave, elemento di stress aereo utilizzato in un piatto sotto puro carico assiale).

29 La soluzione esatta può essere sempre ampliata in prossimità di qualsiasi nodo i come polinomiale

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_i + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right)_i (x - x_i) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\right)_i (y - y_i) + \dots$$

Se all'interno di un elemento di dimensione h un polinomio di grado p viene utilizzato, quindi l'espansione della serie Taylor fino a quel grado può essere ospitata e l'errore è dell'ordine $O(h^{p+1})$.

30 Così per un elemento lineare, *convergenza* tasso è di ordine $O(h^2)$, cioè l'errore in spostamento è ridotto a $1/4$ dell'originale errore interrompendo la mesh.

31 Con un argomento simile, si può dimostrare che le tensioni (o stress) che sono dati dal mi derivati dello spostamento dovrebbero convergere con un errore di $O(h^{p+1-m})$, e l'energia di tensione (che è data dalla quadrato delle sollecitazioni) errore sarà $O(h^{2(p+1-m)})$

32 Dalle argomentazioni di cui sopra, la conoscenza dell'ordine di convergenza può aiutare estrapolando le soluzioni a quella «corretta»; da qui, ad esempio, se lo spostamento converge a $O(h^2)$, e abbiamo due soluzioni approssimative u_1 e u_2 ottenuti con mesh di dimensioni h e $h/2$; quindi può scrivere

$$\frac{u_1 - u}{u_2 - u} = \frac{O(h^2)}{O(h/2)^2} = 4$$

dove u è il valore extrapolated.

33 La convergenza alla soluzione esatta può essere accelerata, Fig. 50.2.

- **h** ridurre la dimensione degli elementi (o mesh raffiment).
- **p** aumentare l'ordine del polinomio (stesso numero di elementi ma più alto numero di nodi/dof).
- **r** rilocalizzazione dei nodi della maglia dell'elemento finito senza cambiare la topologia della mesh.

Una terza forma di accelerazione è la cosiddetta **r** raffinatezza in cui lo stesso numero di nodi/elementi viene mantenuto ma la maglia è spostata intorno per aumentare la sua densità in zone di gradiente ad alta tensione.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

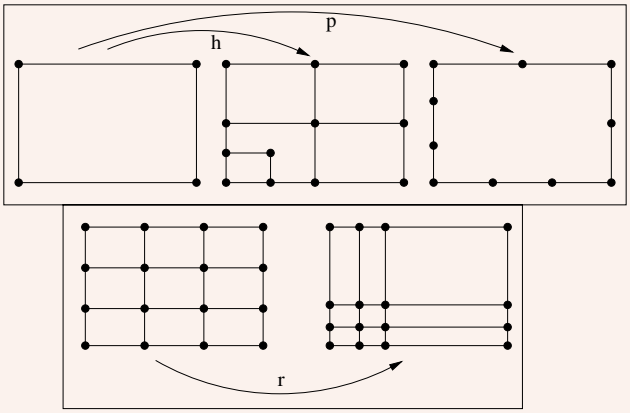


Figura 50.2: h, p e r convergenza

34 Le procedure di convergenza sopra descritte possono essere accelerate all'interno del contesto di un programma che può ospitare *Rimessaggio adattivo* tecniche.

35 Infine, possono provenire errori aggiuntivi *round-off* all'interno computer.

50.6 Carattere limitato inferiore delle soluzioni basate su energia minima potenziale

36 Una soluzione numerica che deriva dal principio del totale minimo energia potenziale è *inferiore al limite* soluzione, perché la tensione di energia è più piccolo di quello esatto (ossia ottenuto da un numero infinito di elementi).

37 Questo può essere facilmente mostrato se consideriamo lo spostamento u_i causa da un carico P_i che è aumentato da zero al suo valore stabilito. Il lavoro svolto è $\frac{P_i u_i}{2}$ e deve essere uguale all'interno energia U. In alternativa, il potenziale del carico applicato è $P_i u_i$, e l'energia potenziale esatta è

$$\Pi_{\text{exact}} = \frac{P_i u_i^{\text{exact}}}{2} - P_i u_i^{\text{exact}} = -\frac{P_i u_i^{\text{exact}}}{2}$$

Analogamente, il valore approssimativo dell'energia potenziale è

$$\Pi_{\text{approx}} = -\frac{P_i u_i^{\text{approx}}}{2}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Sappiamo che il ravvicinamento delle legislazioni Π is *algebricamente* più alto di valore esatto (dal momento che il valore esatto è un minimo), da qui

$$\underbrace{-\frac{P_i u_{i_{\text{exact}}}}{2}}_{\Pi_{\text{exact}}} < \underbrace{-\frac{P_i u_{i_{\text{approx}}}}{2}}_{\Pi_{\text{approx}}}$$

or

$$u_i^{\text{approx}} < u_i^{\text{exact}} \tag{50.15}$$

o in alternativa, la soluzione è *troppo rigida*.

38 Notare la somiglianza con il metodo Rayleigh-Ritz, la mancanza di abbastanza i termini della nostra approssimazione polinomiale hanno anche comportato una soluzione rigida.

50.7 Equilibrio e compatibilità nella soluzione

39 In un *soluzione esatta* su ogni elemento differenziale equilibrio e prevale la compatibilità.

40 In una discorizzazione degli elementi finiti, questo non è necessariamente il caso:

Equilibrio delle Forze Nodali: Quelli sono automaticamente soddisfatti per definizione ($\mathbf{k}^e\overline{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{f}} = 0$) ai nodi.

Compatibilità con Nodes: Elementi collegati tra loro hanno lo stesso spostamenti (lungo dof corrispondente) al nodo di collegamento.

Continuità di interelement della stringa: di solito non è soddisfatto, che è l'equilibrio tra gli elementi non prevale necessariamente. Per esempio, consideri Fig. 50.3 se il

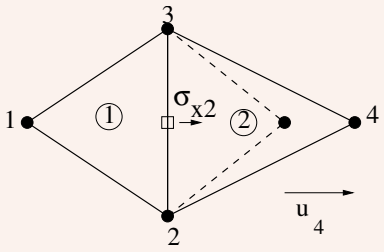


Figura 50.3: continuità di interelement dello stress

nodo 4 è l'unico spostato (tutti gli altri restanti fissi), allora ci sarà una discontinuità σ_{xx} attraverso il confine di elemento 2-3.

Compatibilità di interelement con gli spostamenti: La maggior parte degli elementi hanno questo requisito soddisfatto. Se un elemento non è allora viene etichettato come *incompatibile* or *non conforme*Fico. 50.4

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

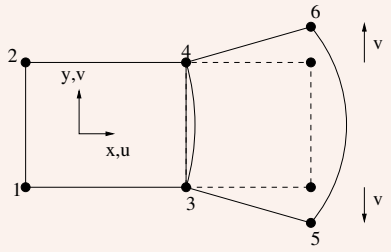
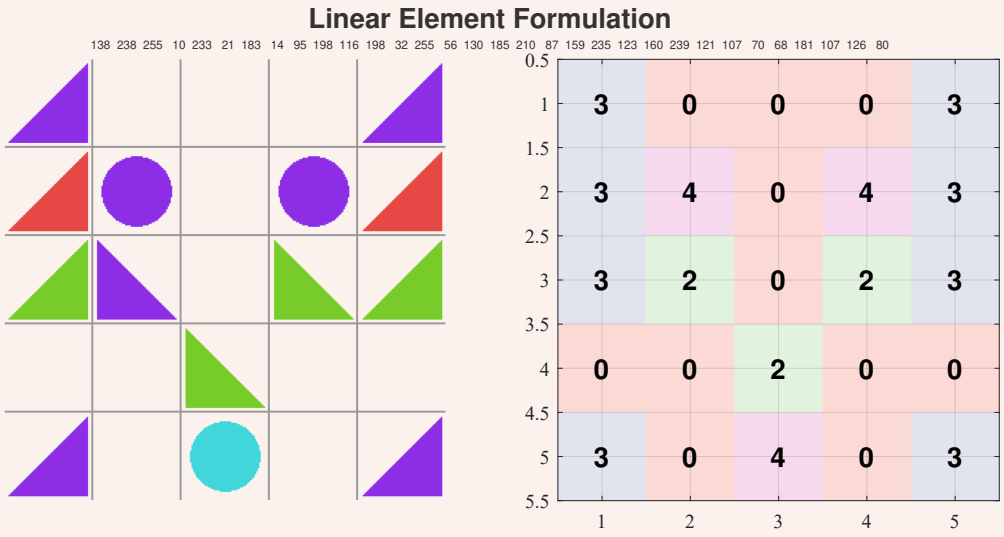


Figura 50.4: continuità di interelement

Elementi interni di Equilibrium: non sempre è soddisfatto. In generale la soddisfazione di equilibrio ad ogni punto esige relazioni tra dof che non necessariamente derivano da $\mathbf{k}^e\overline{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{f}} = 0$

Compatibilità di spostamento all'interno di un elemento: è soddisfatto come abbiamo solo bisogno di lo spostamento dell'elemento sia continuo e monovalore.



Identicona specifica del capitolo, chapter H

COPIA DI REVISIONE

Capitolo 51

Elementi isoparametrici

Abstract

Anche se questo libro si concentra principalmente sugli elementi 1D, la teoria sottostante nella sezione degli elementi finiti vale anche per gli elementi continuum. Gli elementi isoparametrici utilizzano le stesse funzioni di forma sia per spostamenti che per geometria, consentendo ai bordi curvi in un elemento, garantendo maggiore flessibilità nella meshing di una struttura. Le funzioni di forma sono state ricavate nel capitolo precedente: in questo capitolo, si tradurrà rigorosamente la matrice rigidità di questo tipo di elemento, specificatamente per l'elemento Q4. Mentre la formulazione può inizialmente apparire noiosa e confusa, porta a una semplice implementazione del programma di computer ed è applicabile sia all'analisi dello stress bidimensionale che tridimensionale così come problemi non strutturali. La matrice di rigidità dell'elemento verrà valutata attraverso l'integrazione numerica, pertanto la seconda parte del capitolo si occuperà in dettaglio dell'integrazione a livello numerico.

51.1 Introduzione 1801
51.2 Formulazione degli elementi 1803
51.2.1 Elemento bar 1803
51.2.2 Quadrilatero (q4); formulazione dettagliata 1804
51.2.3 Elementi triangolari 1808
51.2.4 Ex 51.1: Operatori giacobini 1811
51.3 Integrazione numerica 1812
51.3.1 Newton-Cotes 1813
51.3.2 Quadratura Gauss-legendre 1815
51.3.3 Regioni rettangolari e prismi 1818
51.3.4 Regioni triangolari 1818
51.4 Recupero delle tensioni; tensioni nodali 1818
51.5 Carico equivalente nodale 1821
51.5.1 Carico gravitazionale 1822
51.5.2 Carico di trazione 1823
51.5.3 Deformazioni/tensioni iniziali; carico termico 1824
51.5.4 Ordine di integrazione . . . 1825
51.6 Parassita/incompatibile elementi . . 1828
51.6.1 Q4, il problema 1828
51.6.2 Q6, la soluzione 1829
51.6.3 Qm6, ulteriori miglioramenti 1829
51.7 Rotazionale d.o.f. 1830

COPIA DI REVISIONE

51.1 Introduzione

1 In precedenza abbiamo esaminato semplici elementi finiti, in questa lezione Noi distorceremo quegli elementi più semplici in altri di forma più arbitraria.

2 In linea di principio, le coordinate naturali saranno distorte in nuove set curvilineari quando complottato in un cartesiano x, y, z spazio, Fig. 51.1.

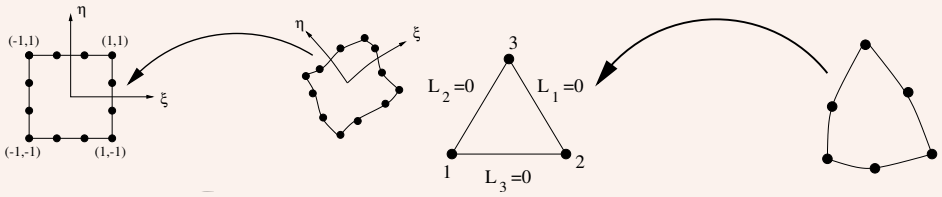


Figura 51.1: Mapping bidimensionale di alcuni elementi

3 Nella formulazione isoparametrica, gli spostamenti sono espressi in termini di coordinate naturali, tuttavia devono essere differenziate rispetto a coordinate cartesian x, y, z. Questo si realizza attraverso una trasformazione matrice **J**, e l'integrazione non può più essere eseguita analiticamente ma deve essere fatto numericamente.

4 Le coordinate naturali vanno da -1 a +1, Fig. 51.2

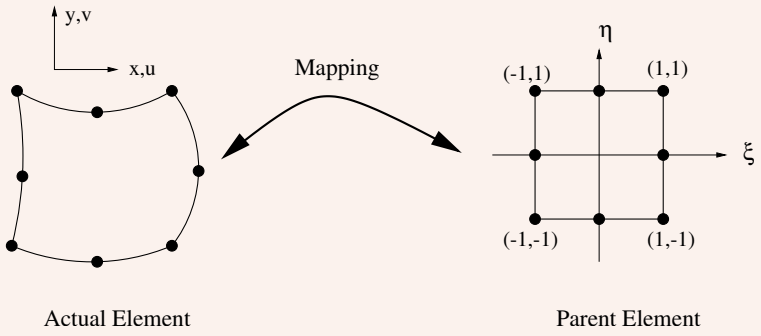


Figura 51.2: Elementi effettivi e genitoriali

COPIA DI REVISIONE

5 Gli spostamenti nodali in qualsiasi punto all'interno dell'elemento possono essere scritti in termini di spostamenti noti nodali e le funzioni formali

$$\begin{aligned} u &= N_1\overline{u}_1 + N_2\overline{u}_2 + \cdots = \mathbf{N}\left\{\begin{array}{c}\overline{u}_1\\ \overline{u}_2\\ \vdots\end{array}\right\} = \mathbf{N}\overline{\mathbf{u}}_e \\ v &= N_1\overline{v}_1 + N_2\overline{v}_2 + \cdots = \mathbf{N}\left\{\begin{array}{c}\overline{v}_1\\ \overline{v}_2\\ \vdots\end{array}\right\} = \mathbf{N}\overline{\mathbf{v}}_e \\ w &= N_1\overline{w}_1 + N_2\overline{w}_2 + \cdots = \mathbf{N}\left\{\begin{array}{c}\overline{w}_1\\ \overline{w}_2\\ \vdots\end{array}\right\} = \mathbf{N}\overline{\mathbf{w}}_e \end{aligned}$$

or

$$\mathbf{u} = \lfloor\ u \quad v \quad w\ \rfloor^T = [\mathbf{N}]\overline{\mathbf{u}}_e$$

6 Quando gli elementi sono anche distorti, le coordinate di qualsiasi punto può **anche** essere espresso in termini di coordinate nodali

$$\begin{aligned} x &= \tilde{N}_1\overline{x}_1 + \tilde{N}_2\overline{x}_2 + \cdots = \tilde{\mathbf{N}}\left\{\begin{array}{c}\overline{x}_1\\ \overline{x}_2\\ \vdots\end{array}\right\} = \tilde{\mathbf{N}}\overline{\mathbf{x}} \\ y &= \tilde{N}_1\overline{y}_1 + \tilde{N}_2\overline{y}_2 + \cdots = \tilde{\mathbf{N}}\left\{\begin{array}{c}\overline{y}_1\\ \overline{y}_2\\ \vdots\end{array}\right\} = \tilde{\mathbf{N}}\overline{\mathbf{y}} \\ z &= \tilde{N}_1\overline{z}_1 + \tilde{N}_2\overline{z}_2 + \cdots = \tilde{\mathbf{N}}\left\{\begin{array}{c}\overline{z}_1\\ \overline{z}_2\\ \vdots\end{array}\right\} = \tilde{\mathbf{N}}\overline{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

or

$$c = \lfloor\ x \quad y \quad z\ \rfloor^T = \tilde{\mathbf{N}}\overline{\mathbf{c}} \tag{51.1}$$

7 Matrici funzione forma $\mathbf{N}$ e $\tilde{\mathbf{N}}$ sono funzioni di ξ, η, e ζQuindi, tre possibili casi si presentano, Fig. 51.3

Isoparamteric: $\mathbf{N}$ e $\tilde{\mathbf{N}}$ sono identici

Sottoparamterico: $\mathbf{N}$ è di grado superiore a $[\tilde{\mathbf{N}}]$

Superparamterico: $\mathbf{N}$ è di grado inferiore a quello $[\tilde{\mathbf{N}}]$

8 Gli elementi sotto e Super parametrici sono molto raramente utilizzati.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

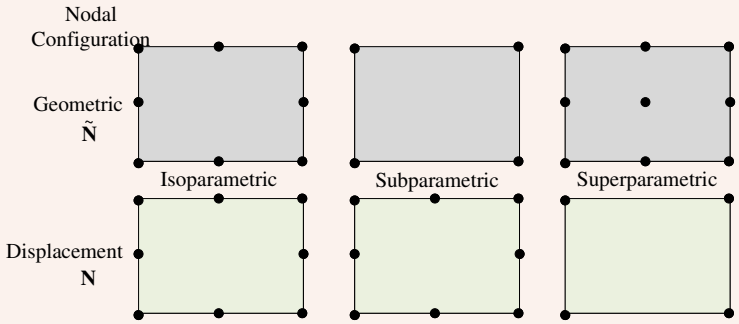


Figura 51.3: Iso, super e sotto elementi parametrici

51.2 Formulazione degli elementi

51.2.1 Elemento bar

9 Le funzioni di forma sono state derivate §49.2.2.3.

10 La relazione di spostamento della tensione è data da $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{N}\overline{\mathbf{u}}_e = \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}_e$, e l'operatore differenziale $\mathbf{L}$ è uguale a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. Per questo caso unidimensionale, questo riduce a

$$\varepsilon_x = \frac{du}{\mathrm{d}x} = \underbrace{\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}_{L} \lfloor \mathbf{N} \rfloor}_{\mathbf{B}} \begin{Bmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{u}_3 \end{Bmatrix} \tag{51.2}$$

11 Invochiamo la regola della catena poiché le funzioni di forma sono espresse in termini di coordinate naturali:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} \tag{51.3}$$

Il primo termine può essere facilmente disponibile dalle funzioni di forma, Eq. 49.8, tuttavia il secondo non è.

12 considerando che, $\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}$ non è disponibile, possiamo determinare il suo inverso $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}$- Da Eq.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

49.7, che denoterà J or **Jacobian**. L'operatore giacobino J è un fattore di scala che riguarda Cartesian a coordinate naturali $\mathrm{d}x = J\mathrm{d}\xi$.

$$J(\xi) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\lfloor \mathbf{N} \rfloor \left\{ \begin{array}{c} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{array} \right\} = \underbrace{\underbrace{\lfloor \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(2\xi - 1) & \frac{1}{2}(2\xi + 1) & -2\xi \end{array} \rfloor}_{\frac{\mathrm{d}_\mathbf{N}}{\mathrm{d}_\xi}} \left\{ \begin{array}{c} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{array} \right\}}_{\frac{\mathrm{d}_x}{\mathrm{d}_\xi}}$$

13 Possiamo riscrivere Eq. 51.3 as

$$\mathbf{B} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}x} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}}_{J^{-1}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}\xi}$$

e la **B** matrice è così ottenuta sostituendo in Eq. 51.2

$$\lfloor \mathbf{B}(\xi) \rfloor = \frac{1}{J}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\lfloor \mathbf{N} \rfloor = \frac{1}{J}\lfloor \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(2\xi - 1) & \frac{1}{2}(2\xi + 1) & -2\xi \end{array} \rfloor$$

14 L'area differenziale è

$$d\Omega = A\mathrm{d}x = AJd\xi$$

15 Sostituire, la matrice di rigidità dell'elemento è finalmente ottenuta da Eq. 50.12

$$\mathbf{K}_e(\xi) = \int_0^L \mathbf{B}^T(\xi)AE\mathbf{B}(\xi)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^T(\xi)AE\mathbf{B}(\xi)J(\xi)d\xi$$

16 Osserviamo che **B**, in generale, contiene ξ in entrambi i termini numeratore e denominatore, e quindi l'espressione non può essere analiticamente invertiti. Inoltre, i limiti di integrazione sono ora da -1 a +1, e vedremo più tardi come numericamente integrarlo.

51.2.2 Quadrilatero (q4); formulazione dettagliata

17 Coordinate e spostamenti sono dati da

$$\begin{array}{rclrcl} x & = & \sum N_i(\xi,\eta)\overline{x}_i; & y & = & \sum N_i(\xi,\eta)\overline{y}_i \\ u & = & \sum N_i(\xi,\eta)\overline{u}_i; & v & = & \sum N_i(\xi,\eta)\overline{v}_i \end{array} \tag{51.4}$$

dove le funzioni di forma sono state derivate in Eq. 49.12.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

18 La relazione di spostamento della tensione è data da

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \right]}_{\mathbf{L}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\}}_{\mathbf{u}} \tag{51.5}$$

Tuttavia, gli spostamenti possono essere ottenuti da Eq. 51.4

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} N_1(\xi,\eta) & 0 & N_2(\xi,\eta) & 0 & N_3(\xi,\eta) & 0 & N_4(\xi,\eta) & 0 \\ 0 & N_1(\xi,\eta) & 0 & N_2(\xi,\eta) & 0 & N_3(\xi,\eta) & 0 & N_4(\xi,\eta) \end{array} \right]}_{\mathbf{N}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \hline \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \hline \overline{u}_3 \\ \overline{v}_3 \\ \hline \overline{u}_4 \\ \overline{v}_4 \end{array} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}} \tag{51.6}$$

19 Combinando Eq. 51.5 e 51.6 rendimenti

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{L}\mathbf{N}\overline{\mathbf{u}} = \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}} \\ \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx}(\xi,\eta) \\ \varepsilon_{yy}(\xi,\eta) \\ \gamma_{xy}(\xi,\eta) \end{array} \right\} &= \underbrace{\sum_{i=1}^{4} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial y} & \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial x} \end{array} \right]}_{\mathbf{B}=\mathbf{L}\mathbf{N}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_i \\ \overline{v}_i \end{array} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}} \end{aligned} \tag{51.7}$$

$$= \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} \end{array} \right]}_{\mathbf{B}} \left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \hline \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \hline \overline{u}_3 \\ \overline{v}_3 \\ \hline \overline{u}_4 \\ \overline{v}_4 \end{array} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} \end{array} \right] \underbrace{\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{array} \right]}_{\mathbf{J}^{-1}} \tag{51.8}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

20 Considerando il set di coordinate locali ξ, η e quello globale corrispondente x, y, le regole della catena darebbero

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{array} \right]}_{\mathbf{J}} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{array} \right\} = \mathbf{J}^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{array} \right\}$$

Quest'ultima equazione è la chiave per ottenere tutti i componenti che andranno all'interno **B** Matrix.

21 Espansione della definizione dei giacobiani

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} \end{array} \right\} &= \underbrace{\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{array} \right]}_{\mathbf{J}} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^{4} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\overline{x}_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\overline{y}_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\overline{x}_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\overline{y}_i \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{array} \right\} \\ &= \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \hline \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \overline{x}_1 & \overline{y}_1 \\ \overline{x}_2 & \overline{y}_2 \\ \overline{x}_3 & \overline{y}_3 \\ \overline{x}_4 & \overline{y}_4 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{array} \right\} \\ &= \underbrace{\frac{1}{4} \left[\begin{array}{cccc} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ \hline -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \overline{x}_1 & \overline{y}_1 \\ \overline{x}_2 & \overline{y}_2 \\ \overline{x}_3 & \overline{y}_3 \\ \overline{x}_4 & \overline{y}_4 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{array} \right\}}_{\mathbf{J}} \end{aligned} \tag{51.9}$$

22 Torna al Jacobian

$$\mathbf{J}^{-1} \overset{\text{def}}{=} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{array} \right] = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{array} \right] = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \sum_{i=1}^{4} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\overline{y}_i & -\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\overline{y}_i \\ -\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\overline{x}_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\overline{x}_i \end{array} \right]$$

23 dal calcolo, se ξ e η sono alcuni curvilineari arbitrari coordinate, Fig. 51.4, poi

$$d\mathbf{r} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{array} \right\} d\xi \quad \text{and} \quad d\mathbf{s} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{array} \right\} \mathrm{d}\eta$$

sono vettori diretti tangenziale a ξ = costante, e η = costante rispettivamente.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

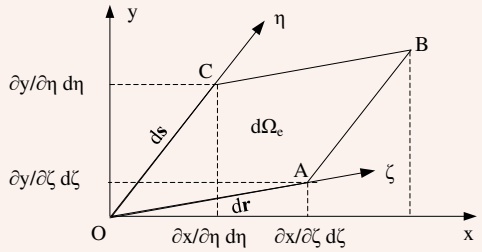


Figura 51.4: Elemento differenziale nel sistema di coordinate curvilinea

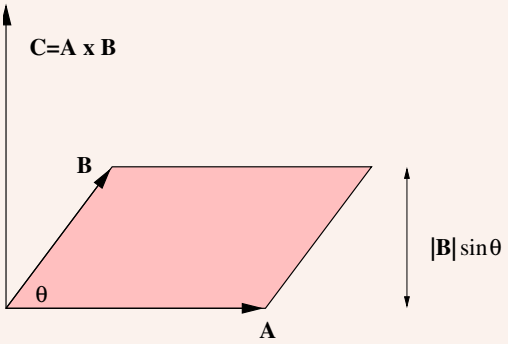


Figura 51.5: Prodotto trasversale di due vettori

24 Dal vettore algebra, il prodotto trasversale di due vettori che si trovano nella Piano x, Fig. 51.5 is

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= \mathbf{A}\times\mathbf{B}\\ &= |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta\mathbf{k}\\ &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ A_x & A_y & 0\\ B_x & B_y & 0\end{vmatrix} = \underbrace{(A_xB_y - B_xA_y)}_{\text{Area}}\mathbf{k}\\ |\mathbf{C}| &= |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta\end{aligned}$$

quindi, la zona differenziale $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ è quindi uguale alla lunghezza della vettore risultante dal prodotto trasversale di $d\mathbf{r}d\mathbf{s}$ e è uguale a

$$\mathrm{d}(area) = \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \det\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial x}{\partial\eta}\\ \frac{\partial y}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\eta}\end{bmatrix}}_{\mathbf{J}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{51.10}$$

25 Infine, si determina la matrice di rigidezza dell'elemento da

$$\mathbf{k}_{8\times8} = \int\int \mathbf{B}^T_{8\times3}\mathbf{D}_{3x3}\mathbf{B}_{3\times8}t\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathbf{k} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}t\det\mathbf{J}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

COPIA DI REVISIONE

26 La valutazione della matrice di rigidità degli elementi comporta dA. Se consideriamo un elemento infinitesimale, di lunghezza dr e ds, al vertice di un elemento, ha i confini dell'elemento come i suoi lati, poi, da Eq. 51.10

$$dA = \mathrm{d}x.\mathrm{d}y.\sin\theta$$

Tuttavia, da Eq. 51.10 noi abbiamo $dA = \det\mathbf{J}\mathrm{d}\xi.\mathrm{d}\eta$, così

$$\det\mathbf{J} = \frac{\mathrm{d}x.\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi.\mathrm{d}\eta}\sin\theta$$

Si osserva quindi che, se θ è piccolo o prossimo a 180^o, allora $\det\mathbf{J}$ sarà molto piccolo, se l'angolo è maggiore di 180 ^{o}, il determinante è negativo (implicando una rigidità negativa che di solito innesca un errore/arresto in un'analisi FE).

27 In generale si raccomanda che $30^o < \theta < 150^o$.

28 L'inverso del giacobiano esiste finché l'elemento non è molto distorto o si piega su se stesso, Fig. 51.6 in quei casi non esiste una relazione unica tra le coordinate.

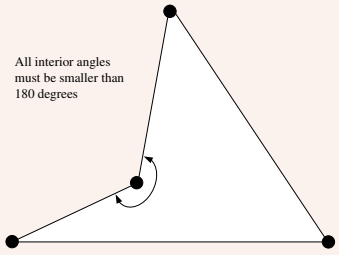


Figura 51.6: Elemento con possibili jacobian singolari

29 Si può facilmente dimostrare che per i parallelogrammi, il giacobino è costante, mentre per i nonparallelogrammi non lo è.

30 In generale **J** è un indicatore della quantità di distorsione degli elementi rispetto ad uno quadrato 2x2. Alcune volte è costante, altre varia all'interno dell'elemento.

51.2.3 Elementi triangolari

51.2.3.1 Triangolo T3

31 Le funzioni di forma di questo triangolo sono date in §49.2.2.2.

32 The **B** matrix is obtained from:

$$\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{xy}\end{array}\right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc}\frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{array}\right]}_{\mathbf{L}}\left\{\begin{array}{c}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{array}\right\} \tag{51.11}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

or

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx}(L_1, L_2, L_3) \\ \varepsilon_{yy}(L_1, L_2, L_3) \\ \varepsilon_{xy}(L_1, L_2, L_3) \end{array} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{6} \underbrace{\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial y} & \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial x} \end{array} \right]}_{\mathbf{B}=\mathbf{LN}} \left\{ \begin{array}{c} \overline{\mathbf{u}}_i \\ \overline{\mathbf{v}}_i \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{2A} \left[\begin{array}{cc} \lfloor \frac{\partial L_1}{\partial x} \quad \frac{\partial L_2}{\partial x} \quad \frac{\partial L_3}{\partial x} \rfloor [\mathbf{N}_L] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lfloor \frac{\partial L_1}{\partial y} \quad \frac{\partial L_2}{\partial y} \quad \frac{\partial L_3}{\partial y} \rfloor [\mathbf{N}_L] \\ \lfloor \frac{\partial L_1}{\partial y} \quad \frac{\partial L_2}{\partial y} \quad \frac{\partial L_3}{\partial y} \rfloor [\mathbf{N}_L] & \lfloor \frac{\partial L_1}{\partial x} \quad \frac{\partial L_2}{\partial x} \quad \frac{\partial L_3}{\partial x} \rfloor [\mathbf{N}_L] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \overline{\mathbf{u}} \\ \overline{\mathbf{v}} \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
[\mathbf{N}_L] &= \left[\begin{array}{cccccc} \frac{\partial N_1}{\partial L_1} & \frac{\partial N_2}{\partial L_1} & \frac{\partial N_3}{\partial L_1} & \frac{\partial N_4}{\partial L_1} & \frac{\partial N_5}{\partial L_1} & \frac{\partial N_6}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_1}{\partial L_2} & \frac{\partial N_2}{\partial L_2} & \frac{\partial N_3}{\partial L_2} & \frac{\partial N_4}{\partial L_2} & \frac{\partial N_5}{\partial L_2} & \frac{\partial N_6}{\partial L_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial L_3} & \frac{\partial N_2}{\partial L_3} & \frac{\partial N_3}{\partial L_3} & \frac{\partial N_4}{\partial L_3} & \frac{\partial N_5}{\partial L_3} & \frac{\partial N_6}{\partial L_3} \end{array} \right] \\
&= \left[\begin{array}{cccccc} 4L_1 - 1 & 0 & 0 & 4L_2 & 0 & 4L_3 \\ 0 & 4L_2 - 1 & 0 & 4L_1 & 4L_3 & 0 \\ 0 & 0 & 4L_3 - 1 & 0 & 4L_2 & 4L_1 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

33 L'equazione precedente può essere ulteriormente semplificata

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{N}_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_y \\ \mathbf{N}_y & \mathbf{N}_x \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \overline{\mathbf{u}} \\ \overline{\mathbf{v}} \end{array} \right\}$$

dove

$$\begin{aligned}
\left[\mathbf{N}_x^T | \mathbf{N}_y^T \right] &= \frac{1}{2A} \left[\begin{array}{c|c} \frac{\partial L_1}{\partial x}(4L_1 - 1) & \frac{\partial L_1}{\partial y}(4L_1 - 1) \\ \frac{\partial L_2}{\partial x}(4L_2 - 1) & \frac{\partial L_2}{\partial y}(4L_2 - 1) \\ \frac{\partial L_3}{\partial x}(4L_3 - 1) & \frac{\partial L_3}{\partial y}(4L_3 - 1) \\ 4\frac{\partial L_1}{\partial x}L_2 + 4\frac{\partial L_2}{\partial x}L_1 & 4\frac{\partial L_1}{\partial y}L_2 + 4\frac{\partial L_2}{\partial y}L_1 \\ 4\frac{\partial L_2}{\partial x}L_3 + 4\frac{\partial L_3}{\partial x}L_2 & 4\frac{\partial L_2}{\partial y}L_3 + 4\frac{\partial L_3}{\partial y}L_2 \\ 4\frac{\partial L_3}{\partial x}L_1 + 4\frac{\partial L_1}{\partial x}L_3 & 4\frac{\partial L_3}{\partial y}L_1 + 4\frac{\partial L_1}{\partial y}L_3 \end{array} \right] \\
\lfloor \overline{\mathbf{u}} \quad \overline{\mathbf{v}} \rfloor &= \lfloor \overline{u}_1 \quad \overline{u}_2 \quad \overline{u}_3 \quad \overline{u}_4 \quad \overline{u}_5 \quad \overline{u}_6 \mid \overline{v}_1 \quad \overline{v}_2 \quad \overline{v}_3 \quad \overline{v}_4 \quad \overline{v}_5 \quad \overline{v}_6 \rfloor
\end{aligned}$$

34 Questa espressione viene poi analiticamente integrata con Eq. 49.1. In generale è in corso un'integrazione numerica isoparametrica preferibile (Sezione 51.2.3).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

51.2.3.2 Triangolo T6

35 Per i sei triangoli nodi, i derivati parziali di una variabile ϕ con rispetto a x e y può essere espresso come, (Felippa, 2000)

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial x} \\ \frac{\partial L_1}{\partial y} & \frac{\partial L_2}{\partial y} & \frac{\partial L_3}{\partial y} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sum_{i=1}^{6} \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \\ \sum_{i=1}^{6} \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \\ \sum_{i=1}^{6} \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \end{array} \right\} \tag{51.12}$$

36 Trasposizione di entrambi i lati

$$\lfloor \sum_{i=1}^{6} \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \quad \sum_{i=1}^{6} \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \quad \sum_{i=1}^{6} \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \rfloor \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_1}{\partial y} \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial y} \\ \frac{\partial L_3}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial y} \end{array} \right] = \lfloor \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} \rfloor$$

37 Noi ora facciamo $\phi \equiv 1$, xe y:

$$\left[\begin{array}{ccc} \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} & \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} & \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \\ \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{\partial N_i}{\partial L_1} & \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{\partial N_i}{\partial L_2} & \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \\ \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial N_i}{\partial L_1} & \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial N_i}{\partial L_2} & \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_1}{\partial y} \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial y} \\ \frac{\partial L_3}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial y} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial 1}{\partial x} & \frac{\partial 1}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{array} \right]$$

38 Ma $\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1$e $\frac{\partial 1}{\partial x} = \frac{\partial 1}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial x} = 0$ since x and y sono coordinate indipendenti. Inoltre tutte le voci nella prima riga sono uguali a una costante (3 per l'elemento T6), e dal lato destro corrispondente, questa riga può essere normalizzata, cedendo la matrice giacobiana per questo elemento

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{\partial N_i}{\partial L_1} & \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{\partial N_i}{\partial L_2} & \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \\ \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial N_i}{\partial L_1} & \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial N_i}{\partial L_2} & \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \end{array} \right]}_{\mathbf{J}} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_1}{\partial y} \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial y} \\ \frac{\partial L_3}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial y} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right]$$

39 Sostituire dalla tabella 49.7 noi otteniamo

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ x_1(4L_1 - 1) + 4x_4L_2 + 4x_6L_3 & x_2(4L_2 - 1) + 4x_5L_3 + 4x_4L_1 & x_3(4L_3 - 1) + 4x_6L_1 + 4x_5L_2 \\ y_1(4L_1 - 1) + 4y_4L_2 + 4y_6L_3 & y_2(4L_2 - 1) + 4y_5L_3 + 4y_4L_1 & y_3(4L_3 - 1) + 4y_6L_1 + 4y_5L_2 \end{array} \right]}_{\mathbf{J}}$$
$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_1}{\partial y} \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial y} \\ \frac{\partial L_3}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial y} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right]$$

COPIA DI REVISIONE

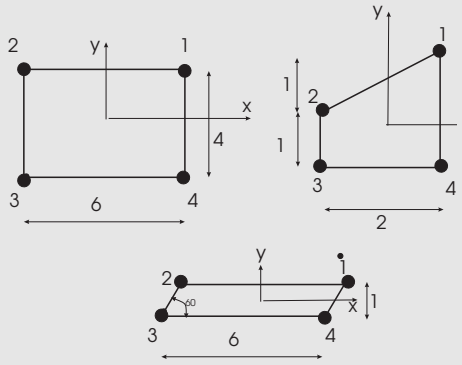
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

40 Successivamente invertiamo la matrice e risolviamo per le sei coordinate triangolari parziali e sostituiamo in Eq. 51.12 che a sua volta ci permetterà di determinare **B** matrice in Eq. 51.7

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx}(L_1,L_2,L_3) \\ \varepsilon_{yy}(L_1,L_2,L_3) \\ \gamma_{xy}(L_1,L_2,L_3) \end{array} \right\} = \underbrace{\sum_{i=1}^{6} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial y} & \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial x} \end{array} \right]}_{\mathbf{B=LN}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_i \\ \overline{v}_i \end{array} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}}$$

51.2.4 Ex 51.1: Operatori giacobini

Esempio da
Cerchiamo di determinare gli operatori giacobini **J** per la bidimensionale adiacente elementi.
Le coordinate sono date da Eq. 51.1, le funzioni della



Elemento 1:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\overline{x}_3 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\overline{x}_4 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\overline{x}_1 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\overline{x}_2 \\ &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-3) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(3) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(3) + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-3) \\ y &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\overline{y}_3 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\overline{y}_4 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\overline{y}_1 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\overline{y}_2 \\ &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-2) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-2) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(2) + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(2) \\ [\mathrm{J}] &= \left[\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Si noti che $A = 24 = \det[J](2 \times 2) = 6 \times 4$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Elemento 2:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-(3+1/(2\sqrt{3}))) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(3-1/2\sqrt{3})) \\ &\quad + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(3+1/2\sqrt{3})) + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-(3-1/2\sqrt{3}))) \\ y &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-2) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-2) \\ &\quad + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(2) + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(2) \\ [\mathbf{J}] &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Elemento 3:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1) + \frac{1}{4}(1-\xi)(-1) \\ y &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-3/4) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-3/4) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(5/4) + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1/4) \\ [\mathbf{J}] &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & (1+\eta) \\ 0 & (3+\xi) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

51.3 Integrazione numerica

41 La comprensione dell'integrazione numerica non è solo essenziale per un corretto integrazione della famiglia isoparametrica di elementi, ma anche utile in comprensione dei metodi residenziali ponderati (capitolo 52),

42 Un aspetto cruciale della formulazione degli elementi isoparametrici è il numero integrazione che può essere espressa

$$\int \mathbf{F}(\xi)\mathrm{d}\xi \quad \text{or} \quad \int\int \mathbf{F}(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

In pratica eseguiamo l'integrazione numericamente utilizzando

$$\int \mathbf{F}(\xi)\mathrm{d}\xi = \sum_i \mathbf{W}_i\mathbf{F}(\xi_i) + \mathbf{R}_n \quad \text{or} \quad \int\int \mathbf{F}(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \sum_i\sum_j \mathbf{W}_{ij}\mathbf{F}(\xi_i,\eta_j) + \mathbf{R}_n$$

dove le somme si estendono su tutti i e je $\mathbf{W}_i$, $\mathbf{W}_{ij}$ sono fattori di peso, e $\mathbf{F}(\xi_i)$ e $\mathbf{F}(\xi_i,\eta j)$ sono le matrici valutate nei punti specificati negli argomenti.

43 Le matrici $\mathbf{R}_n$ sono matrici di errore, che in generale non vengono calcolate.

44 Come mostrato sopra, $\mathbf{F} = \mathbf{B}^T.\mathbf{D}.\mathbf{B}$ per matrice di rigidità dell'elemento finito valutazione, e ogni elemento è integrato individualmente.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

45 L'integrazione $\int_a^b F(\xi)d\xi$ è essenzialmente basato sul passaggio un polinomio $P(\xi)$ attraverso valori dati $F(\xi)$ e poi usare $\int_a^b P(\xi)d\xi$ as an approximation.

$$\int_a^b F(\xi)d\xi \approx \int_a^b P(\xi)d\xi$$

46 Utilizzo $P(\xi) = F(\xi)$ at n punti, e richiamando le proprietà delle funzioni di interpolazione lagrangiana, otteniamo

$$\begin{aligned} P(\xi) &= l_1(\xi)F(\xi_1) + l_2(\xi)F(\xi_2) + \cdots + l_n(\xi)F(\xi_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} l_i(\xi)F(\xi_i) \end{aligned}$$

e si noti che, per $\xi = \xi_i$, $l_i = 1$, mentre tutti gli altri $l_i = 0$.

51.3.1 Newton-Cotes

47 Nell'integrazione di Newton-Cotes, si presume che i punti di campionamento sono **altrettanto spazioso**Fico. 51.7, così noi definiamo

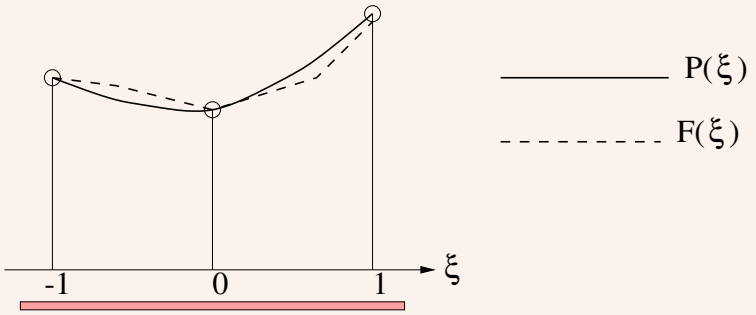


Figura 51.7: Integrazione numerica Newton-Cotes

$$\int_a^b P(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} l_i(\xi)F(\xi_i)\mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b l_i(\xi)\mathrm{d}\xi F(\xi_i) \tag{51.13}$$

or

$$\begin{array}{r|rcl} \text{Approximation} & \int_a^b P(\xi)\mathrm{d}\xi & = & \sum_{i=1}^{n} W_i^{(n)} F(\xi_i) \\ \text{Weights} & W_i^{(n)} & = & \int_a^b l_i(\xi)\mathrm{d}\xi = (b-a)C_i^{(n)} \end{array}$$

dove $C_i^{(n)}$ sono i "pesi" del *Quadratura Newton-Cotes* per l'integrazione numerica con n punti di campionamento altrettanto distanziati.

48 Le costanti di Newton-Cotes e il relativo promemoria sono mostrati in Tabella 51.1, (Bathe, 1996)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 51.1: Pesi per le formule quadrature Newton-Cotes

n	$C_0^{(n)}$	$C_1^{(n)}$	$C_2^{(n)}$	$C_3^{(n)}$	$C_4^{(n)}$	Error
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				$10^{-1}(b-a)^3F^{II}(\xi)$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$			$10^{-3}(b-a)^5F^{IV}(\xi)$
4	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$		$10^{-3}(b-a)^5F^{IV}(\xi)$
5	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$	$10^{-6}(b-a)^7F^{VI}(\xi)$

[49] Si può dimostrare che questo metodo consente l'esatta integrazione del polinomio di ordine $n-1$, e che se n è strano, allora possiamo esattamente integrare polinomi di ordine nQuindi usiamo in valori dispari generali n,

[50] Per $n=2$ di $[-1,1]$, selezioniamo punti altrettanto distanziati $\xi_1=-1$ and $\xi_2=1$ to evaluate $\int_{-1}^{1} P(\xi)\mathrm{d}\xi$

$$
\begin{aligned}
P(\xi) &= \sum_{i=1}^{2} l_i(\xi)F(\xi_i)\\
l_1(\xi) &= \frac{\xi-\xi_2}{\xi_1-\xi_2}=\frac{1}{2}(1-\xi)\\
l_2(\xi) &= \frac{\xi-\xi_1}{\xi_2-\xi_1}=\frac{1}{2}(1+\xi)\\
W_1^{(2)} &= \int_{-1}^{1} l_1(\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-\xi)\mathrm{d}\xi=1\\
W_2^{(2)} &= \int_{-1}^{1} l_2(\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1+\xi)\mathrm{d}\xi=1\\
\int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi &\approx \int_{-1}^{1} P(\xi)\mathrm{d}\xi=\sum_{i=1}^{2} W_i^{(2)}F(\xi_i)=F(-1)+F(1)
\end{aligned}
$$

che è il *regola trapezoidale*

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

51 Per $n = 3$ di $[-1, 1]$, selezioniamo punti altrettanto distanziati $\xi_1 = -1$ $\xi_2 = 0$, and $\xi_3 = 1$, to evaluate $\int_{-1}^{1} P(\xi)\mathrm{d}\xi$

$$\begin{aligned}
P(\xi) &= \sum_{i=1}^{3} l_i(\xi)F(\xi_i) \\
l_1(\xi) &= \frac{(\xi-\xi_2)(\xi-\xi_3)}{(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)} = \frac{1}{2}\xi(\xi-1) \\
l_2(\xi) &= \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_3)}{(\xi_2-\xi_1)(\xi_2-\xi_3)} = -(1+\xi)(\xi-1) \\
l_3(\xi) &= \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)}{(\xi_3-\xi_1)(\xi_3-\xi_2)} = \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \\
W_1^{(3)} &= \int_{-1}^{1} l_1(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \xi(\xi-1)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{3} \\
W_2^{(3)} &= \int_{-1}^{1} l_2(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{-1}^{1} -(1+\xi)(\xi-1)\mathrm{d}\xi = \frac{4}{3} \\
W_3^{(3)} &= \int_{-1}^{1} l_3(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \xi(1+\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{3} \\
\int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi &\approx \int_{-1}^{1} P(\xi)\mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^{3} W_i^{(3)}F(\xi_i) = \frac{1}{3}[F(-1)+4F(0)+F(1)]
\end{aligned}$$

che è *La regola di Simpson*

51.3.2 Quadratura Gauss-legendre

52 Nella quadratura Gauss-Legendre, i punti non sono fissi e allo stesso tempo distanziati, ma sono selezionati per raggiungere *migliore precisione*.

53 Ancora una volta iniziamo con

$$\int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi \approx \int_{-1}^{1} P(\xi)\mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^{n} W_i^{(n)}F(\xi_i)$$

tuttavia in questa formulazione *entrambi* $W_i^{(n)}$ e ξ_i sono sconosciuti per essere ancora determinati. Così abbiamo un totale $2n$ - Ignoti.

54 Nei punti di integrazione $P(\xi_i) = F(\xi_i)$, tuttavia a intermediario punti la differenza può essere espressa come

$$F(\xi) = P(\xi) + \underbrace{\chi(\xi)(\beta_0 + \beta_1\xi + \beta_2\xi^2 + \cdots)}_{0 \text{ at } \xi=\xi_i;i=1,2,\cdots,n}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

perché vogliamo che il lato sinistro sia esattamente uguale a quello $P(\xi)$ all'integrazione punti, definiamo

$$\chi(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)...(\xi - \xi_n)$$

come polinomio dell'ordine n, essere pari a zero all'integrazione punti ξ_i.

55 β_i dovrebbe essere selezionato in orer per eliminare il divario tra $F(\xi)$ e $P(\xi)$ a punti intermedi.

56 Integrazione

$$\int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{-1}^{1} P(\xi) + \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi$$

Ci siamo separati l'ultimo termine

$$\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi + \sum_{j=n}^{\infty} \beta_j \int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi$$

57 Truncating gli ultimi termini dell'espansione

$$\int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi \approx \int_{-1}^{1} P(\xi) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi \tag{51.14}$$

osserviamo che il primo integrale sul lato destro comporta un polinomio di ordine $n-1$, e il secondo integrale un polinomio d'ordine $2n-1$. Così abbiamo stabilito

$$\int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi = 0 \qquad j = 0, 1, \cdots, n-1 \tag{51.15}$$

che si tradurrebbe in una serie di n equazioni simultanee di ordine n in termini degli sconosciuti ξ_i, $i = 0, 1, \cdots, n-1$.

58 Torna a Eq. 51.14

$$\int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi \approx \int_{-1}^{1} P(\xi) = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i) \int_{-1}^{1} l_i(\xi)\mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^{n} W_i^{(n)} F(\xi_i)$$

or

Approximation	$\int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi$	$\approx$	$\sum_{i=1}^{n} W_i^{(n)} F(\xi_i)$
Weights	$W_i^{(n)}$	$=$	$\int_{-1}^{1} l_i(\xi)\mathrm{d}\xi$
Gauss Points	$\int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi$	$=$	$0 \quad j = 0, 1, \cdots, n-1$

59 Punti di integrazione ξ_i e coefficienti di peso $W_i^{(n)}$ sono indicato nella tabella 51.2, (Bathe, 1996)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 51.2: Punti di integrazione e pesi per formule gauss-quadrature nell'intervallo$[-1,1]$

n	ξ_i	$W_i^{(n)}$	Error
1	0	2	$\frac{1}{3}F^{(2)}(\xi)$
2	$-1/\sqrt{3}$ $1/\sqrt{3}$	1 1	$\frac{1}{135}F^{(4)}(\xi)$
3	$-\sqrt{3/5}$ 0 $\sqrt{3/5}$	$5/9$ $8/9$ $5/9$	$\frac{1}{15{,}750}F^{(6)}(\xi)$

51.3.2.1 Polinomio Leggero

60 Le soluzioni (punti di integrazione Gauss) sono uguali alle radici di un Polinomio leggendario definito da

$$\begin{aligned} L_0(\xi) &= 1 \\ L_1(\xi) &= \xi \\ L_k(\xi) &= \tfrac{2k-1}{k}\xi L_{k-1}(\xi) - \tfrac{k-1}{k}\xi L_{k-2}(\xi) \quad 2 \le k \le n \end{aligned}$$

e la n I punti di integrazione Gauss sono determinati dalla soluzione $L_n(\xi) = 0$ per le sue radici ξ_i, $i = 0, 1, \cdots, n-1$.

61 Le funzioni di ponderazione vengono quindi date da

$$W_i^{(n)} = \frac{2(1-\xi_i^2)}{[nL_{n-1}(\xi_i)]^2}$$

51.3.2.2 Quadratura Gauss-Legendre per $n = 2$

62 In primo luogo cerchiamo i punti di integrazione per $n = 2$, $\chi(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)$, e le equazioni risultanti sono

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)\xi^0 d\xi &= 0 \\ \int_{-1}^{1} (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)\xi^1 d\xi &= 0 \end{aligned}$$

Dopo l'integrazione, otteniamo

$$\xi_1\xi_2 = -\frac{1}{3} \quad \text{and} \quad \xi_1 + \xi_2 = 0$$

da

$$\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{and} \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

I coefficienti di peso sono

$$\begin{aligned} W_i^{(n)} &= \int_{-1}^{1} l_i(\xi)\mathrm{d}\xi \\ W_1^{(2)} &= \int_{-1}^{1} \frac{\xi-\xi_2}{\xi_1-\xi_2}\mathrm{d}\xi = \frac{-2\xi_2}{\xi_1-\xi_2} = 1.0 \\ W_2^{(2)} &= \int_{-1}^{1} \frac{\xi-\xi_1}{\xi_2-\xi_1}\mathrm{d}\xi = \frac{-2\xi_1}{\xi_1-\xi_2} = 1.0 \end{aligned}$$

51.3.3 Regioni rettangolari e prismi

63 Integrazione numerica $F(\xi,\eta)$ su una regione rettangolare $-1 \le \xi \le 1$e $-1 \le \eta \le 1$, si realizza selezionando m e n (da non confondere con l'ordine dei punti di integrazione polinomiale) nel ξ e η indicazioni stradali

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(\xi.\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \approx \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} W_i^{(m)} W_j^{(n)} F(\xi_i,\eta_j)$$

e il numero totale di punti di integrazione sarà così $m \times n$Fico. 51.8.

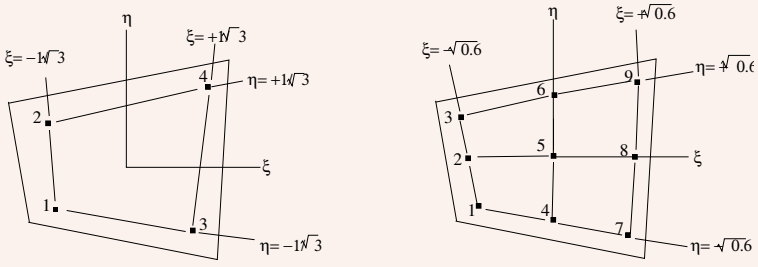


Figura 51.8: Integrazione Gauss-legendre su una superficie

51.3.4 Regioni triangolari

64 Per l'integrazione numerica su un triangolo, i punti Gauss sono mostrati in Fig. 51.9, e le coordinate triangolari corrispondenti sono date Tabella 51.3.

51.4 Recupero delle tensioni; tensioni nodali

65 Le stringhe sono valutate da

$$\sigma = \mathbf{DB}\overline{\mathbf{u}}$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

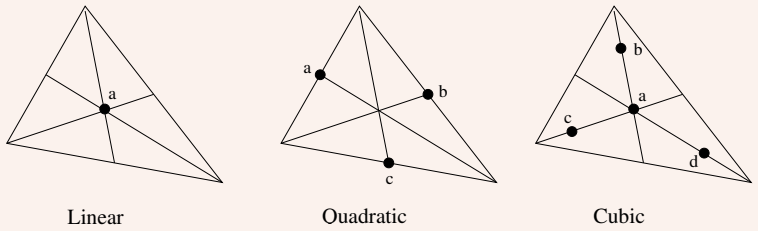


Figura 51.9: Integrazione numerica su un triangolo

Tabella 51.3: Coordinate e pesi per l'integrazione numerica su un triangolo

Ordine	Errore	Punti	Triang, Coord.	Pesi
Linear	$R = O(h^2)$	a	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	1
Quadratic		a	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$	$\frac{1}{3}$
	$R = O(h^3)$	b	$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2},$	$\frac{1}{3}$
		c	$\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
Cubic		a	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	$-\frac{27}{48}$
	$R = O(h^4)$	b	$0.6, 0.2, 0.2$	$\frac{25}{48}$
		c	$0.2, 0.6, 0.2$	$\frac{25}{48}$
		d	$0.2, 0.2, 0.6$	$\frac{25}{48}$

in generale, è auspicabile che essi siano valutati al elementi nodali. Tuttavia, dovrebbe essere tenuto a mente che sottolinea calcolato a un dato nodo da elementi diversi non devono essere gli stessi (perché le sollecitazioni non sono obbligate ad essere continuo in formulazioni di elementi finiti a base di spostamento). Quindi una sorta di stress che media in punti nodali può essere auspicabile.

66 Nella formulazione isoparametrica, gli stress nodali sono molto poveri, e i migliori risultati si ottengono nei punti Gaus.

67 Per valutare le sollecitazioni nodali, due approcci:

1. Valutare σ direttamente ai nodi ($\xi = \eta = \pm 1$)
2. Valutare gli stress nei punti Gauss e poi estrapolare.

Il secondo approccio produce risultati molto migliori.

68 L'estrapolazione da punti Gauss sarà illustrata attraverso Fig. 51.10 per il quadrilatero isoparametrico 4 nodi.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

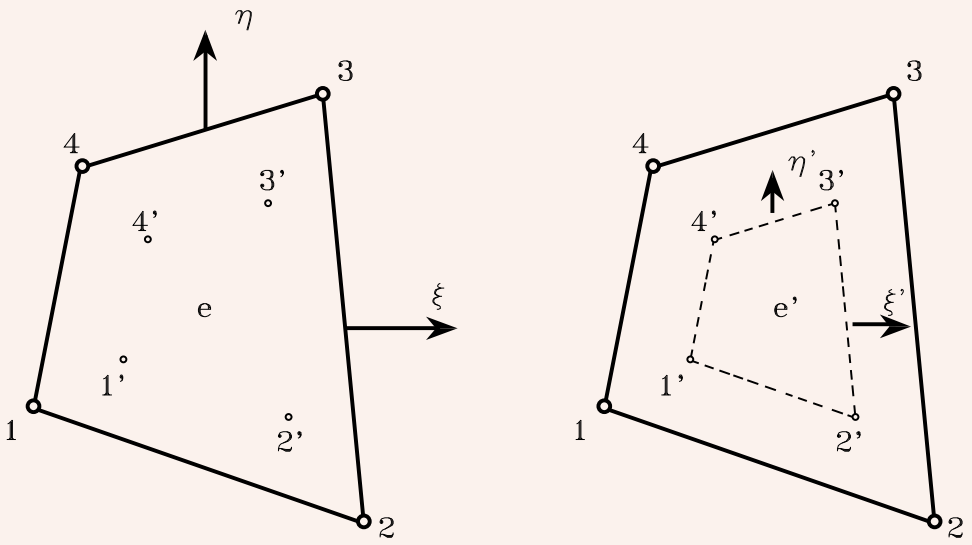


Figura 51.10: Estrazione da 4 punti quadrati (Felippa, 1999)

Specificamo un elemento "internal" con i suoi nodi e coordinate naturali ξ' e η' che sono collegati ξ e η attraverso la tabella 51.4

Tabella 51.4: Coordinate naturali dei nodi quadrilateri bilineari

Angolo Node	ξ	η	ξ'	η'	Gamma Node	ξ	η	ξ'	η'
1	-1	-1	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$1'$	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	-1	-1
2	$+1$	-1	$+\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$2'$	$+1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$+1$	-1
3	$+1$	$+1$	$+\sqrt{3}$	$+\sqrt{3}$	$3'$	$+1/\sqrt{3}$	$+1/\sqrt{3}$	$+1$	$+1$
4	-1	$+1$	$-\sqrt{3}$	$+\sqrt{3}$	$4'$	$-1/\sqrt{3}$	$+1/\sqrt{3}$	-1	$+1$

or

$$\xi' = \sqrt{3}\xi \qquad \eta' = \sqrt{3}\eta$$

hence any scalar quantity σ (such as σ_{xx}) i valori σ'_i è conosciuto all'elemento Gauss gli angoli possono essere interpolati attraverso le consuete funzioni di forma bilineare ora espresse in termini di ξ' e η'

$$\sigma(\xi',\eta') = \lfloor\ N_1^{e'} \quad N_2^{e'} \quad N_3^{e'} \quad N_4^{e'}\ \rfloor \left\{ \begin{array}{c} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_3 \\ \sigma'_4 \end{array} \right\}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove

$$\begin{aligned} N_1^{e'} &= \frac{1}{4}(1-\xi')(1-\eta') \\ N_2^{e'} &= \frac{1}{4}(1+\xi')(1-\eta') \\ N_3^{e'} &= \frac{1}{4}(1+\xi')(1+\eta') \\ N_4^{e'} &= \frac{1}{4}(1-\xi')(1+\eta') \end{aligned}$$

Allo stesso modo, possiamo *estrapolato* σ agli angoli dell'elemento. Per l'angolo 1, per esempio, sostituiamo ξ' e η' nelle equazioni precedenti $-\sqrt{3}$. Fare questo per i quattro angoli, otteniamo

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1-\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1+\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1-\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 1-\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1+\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1-\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1+\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_3 \\ \sigma'_4 \end{Bmatrix}$$

Come previsto, la somma di ogni riga è uguale a una, e per gli stress we replace σ by σ_{xx}, σ_{yy}, and τ_{xy}

69 Come sappiamo, diversi stress nodali saranno ottenuti da adiacente per ottenere un valore unico, possiamo prendere

1. Media in peso di tutti gli stress nodali.
2. Media ponderata delle sollecitazioni nodali basate sul relativo dimensioni degli elementi determinati dalla loro area attraverso (a)J).

51.5 Carico equivalente nodale

70 Nella formulazione degli elementi finiti, tutti i carichi devono essere sostituito da un carico nodale "energy equivalent'.

71 Consideriamo i seguenti casi: carico nodale, gravità, trazione e termica.

72 Ma prima, riscriviamo Eq. 48.32 in termini di valori nodali

$$\int_\Omega \delta\mathbf{u}^t\mathbf{b}d\Omega = \int_\Omega \mathbf{N}^t\mathbf{b}d\Omega$$
$$\int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}\hat{\mathbf{t}}d\Gamma = \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^t\hat{\mathbf{t}}d\Gamma$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

or

$$\mathbf{f}_e = \int_\Omega \mathbf{N}^t \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^t \hat{\mathbf{t}} d\Gamma \tag{51.16}$$

51.5.1 Carico gravitazionale

73 Le forze di gravità sono equivalenti a una forza corporea/volume unitario agire all'interno del solido nella direzione dell'asse di gravità, Fig. 51.11, (che non devono essere coincidenti

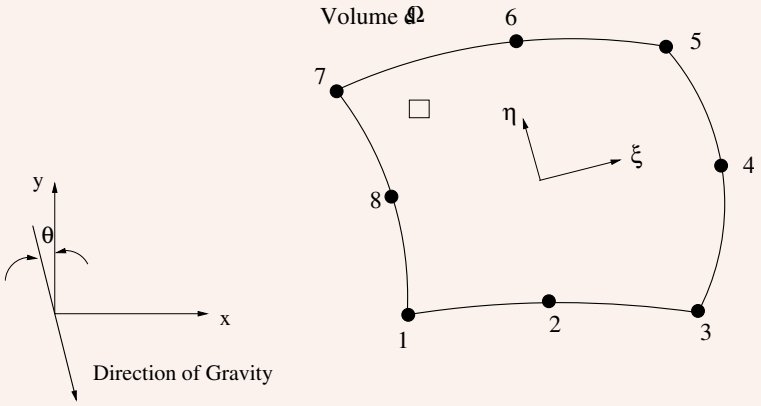


Figura 51.11: Carico della gravità

con l'asse di coordinate).

$$\begin{aligned} dG_x &= \rho g d\Omega \sin\theta \\ dG_y &= -\rho g d\Omega \cos\theta \end{aligned}$$

dove g è l'accelerazione gravitazionale e ρ è la massa densità.

74 Da Eq. 51.16

$$\mathbf{f}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} \mathrm{d}\Omega$$

noi otteniamo

$$\left\{ \begin{array}{c} P_{xi} \\ P_{yi} \end{array} \right\} = \int_{\Omega_e} N_i \rho g \left\{ \begin{array}{c} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{array} \right\} d\Omega$$

o le forze nodali equivalenti di energia per il nodo i sono

$$\left\{ \begin{array}{c} P_{xi} \\ P_{yi} \end{array} \right\} = \sum_{j=1}^{ngaus} \sum_{k=1}^{ngaus} \rho g t \left\{ \begin{array}{c} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{array} \right\} N_i(\xi_j \eta_k) W_j W_k \det \mathbf{J}(\xi_j, \eta_k)$$

75 L'angolo θ è da misurare in senso antiorario dal positivo y asse.

COPIA DI REVISIONE

51.5.2 Carico di trazione

76 Qualsiasi bordo elemento può avere un carico distribuito per lunghezza unitaria in una normale e direzione tangenziale prescritta.

77 La variazione del carico distribuito è polinomiale e il suo ordine non può superare l'ordine dell'elemento. Per amore della consistenza, nodi caricati sono elencati anche in senso antiorario.

78 Prima di tutto, si determinano i componenti dei carichi distribuiti x e y indicazioni considerando le forze che agiscono su un incrementale Lunghezza dS del bordo caricato, Fig. 51.12:

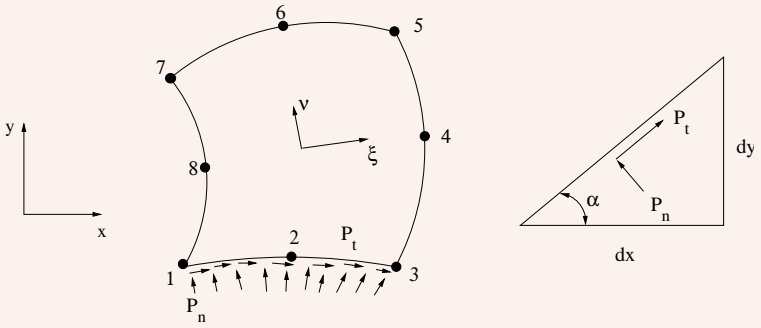


Figura 51.12: Carico di trazione in elementi isoparametrici

$$\begin{aligned} dP_x &= (p_t dS\cos\theta - p_n dS\sin\theta) &&= (p_t \mathrm{d}x - p_n \mathrm{d}y)\\ dP_y &= (p_n dS\cos\theta - p_t dS\sin\theta) &&= (p_n \mathrm{d}x - p_t \mathrm{d}y) \end{aligned}$$

79 Ma poiché l'integrazione deve essere effettuata in termini di coordinate naturali:

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi \qquad \mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi$$

Sostituire

$$\begin{aligned} dP_x &= \left(p_t \frac{\partial x}{\partial \xi} - p_n \frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\mathrm{d}\xi\\ dP_y &= \left(p_n \frac{\partial x}{\partial \xi} + p_t \frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

80 Da Eq. 51.16 noi abbiamo

$$\mathbf{f}_e = \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{t}} \mathrm{d}\Gamma$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Così

$$\begin{aligned} P_{xi} &= \int_{\Gamma_t} N_i \left(p_t \frac{\partial x}{\partial \xi} - p_n \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \mathrm{d}\xi \\ P_{yi} &= \int_{\Gamma_t} N_i \left(p_n \frac{\partial x}{\partial \xi} + p_t \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

L'integrazione viene nuovamente effettuata numericamente (lungo il bordo) e le forze nodali equivalenti di energia per il nodo i sono

$$\begin{aligned} P_{xi} &= \sum_{j=1}^{ngaus} N_i \left(p_t \frac{\partial x}{\partial \xi} - p_n \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) W_j \\ P_{yi} &= \sum_{j=1}^{ngaus} N_i \left(p_n \frac{\partial x}{\partial \xi} + p_t \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) W_j \end{aligned}$$

dove l'integrazione viene portata numericamente lungo il bordo. and note that $\frac{\partial x}{\partial \xi}$ and $\frac{\partial y}{\partial \xi}$ sono prese direttamente dal giacobino Matrix.

81 Si noti che poiché l'integrazione deve essere portata lungo il bordo, noi abbiamo usato ξ.

82 Per elementi adiacenti, Fig. 51.13.

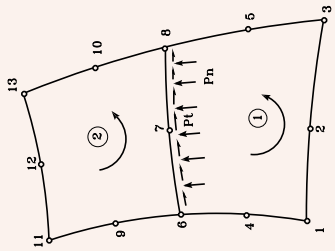


Figura 51.13: Carico di trazione in elementi isoparametrici contigui

51.5.3 Deformazioni/tensioni iniziali; carico termico

83 Distinguono tra due casi:

Aereo Stress che è il più semplice

$$\begin{aligned} \varepsilon^0_{xx} &= \alpha \Delta T \\ \varepsilon^0_{yy} &= \alpha \Delta T \\ \gamma^0_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Strain di aeroplano noi abbiamo

$$\begin{aligned}\varepsilon^0_{xx} &= -\frac{\nu\sigma^0_{zz}}{E} + \alpha\Delta T\\ \varepsilon^0_{yy} &= -\frac{\nu\sigma^0_{zz}}{E} + \alpha\Delta T\\ \gamma^0_{xy} &= 0\\ \varepsilon^0_{zz} &= \frac{\sigma^0_{zz}}{E} + \alpha\Delta T = 0\end{aligned}$$

Usare l'ultima espressione per eliminare σ^0_{zz}, noi otteniamo

$$\begin{aligned}\varepsilon^0_{xx} &= (1+\nu)\alpha\Delta T\\ \varepsilon^0_{yy} &= (1+\nu)\alpha\Delta T\\ \gamma^0_{xy} &= 0\\ \sigma^0_{zz} &= -E\alpha\Delta T\end{aligned}$$

84 Queste espressioni vengono poi sostituite in Eq. 50.13

$$\mathbf{f}_{0_e} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega - \int_{\Omega_t} \mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega$$

e integrato numericamente.

51.5.4 Ordine di integrazione

51.5.4.1 Integrazione completa

85 Per gli elementi integrati numericamente, una questione di importanza fondamentale è il *ordine* dell'integrazione numerica. Se l'ordine di integrazione è troppo

- **E' un po' troppo.** si tradurrebbe in una formulazione esatta, che tuttavia può essere computazionalmente costoso.
- **No.** Allora potremmo avere carenza di rango.

Quindi, dobbiamo selezionare correttamente l'ordine della quadratura numerica.

86 Ricordiamo che

1. Cerchiamo di integrare $\mathbf{F} = \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\det\mathbf{J}$.
2. Il giacobino è costante solo per i parallelogrammi.
3. In Quadratura Gaussiana, integrazione con n punti correttamente integra un polinomio di ordine $2n-1$ (per i quali non si può parlare) Newton-Cotes era $n+1$).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Quindi, per un elemento parallelogramma bilineare, **F** è una funzione polinomiale, di ordine 2, in termini delle coordinate naturali ξ e η che può essere esattamente integrato da $n = 2$ punti (i.e. 2×2).

87 Con argomenti simili, un quadrilatero quadratico dovrebbe essere integrato di tre punti (F è ora di ordine 4, e così $2 \times 3 - 1 = 5$).

88 Tali ordini di approssimazioni sono validi solo per i parallelogrammi, come il bordo diventa inclinato, poi l'errore aumenta.

51.5.4.2 Integrazione ridotta

89 Integrazione ridotta, cioè utilizzando meno punti Gauss di quanto richiesto per un integrazione esatta, causerà l'elemento ad ammorbidire perché ordine più alto termini polinomiali possono svanire nei punti della regola di ordine inferiore.

90 In un corpo elastico, la soluzione FE consente solo quegli spostamenti che può essere rappresentato da una combinazione lineare delle funzioni di forma. il campo di spostamento esatto differirà dallo spostamento assunto, in altre parole le funzioni di forma impediscono la deformazione della struttura come vuole[1].

91 Dato che la formulazione di rigidità è troppo rigida, (Eq. 50.15), l'ammorbidimento introdotto da una riduzione numerica l'integrazione è benefica.

92 Gli ordini raccomandati di integrazione per gli elementi quadrilaterla sono indicato nella tabella 51.5.

Tabella 51.5: Integrazioni numeriche complete e ridotte per elementi quadrilaterali

.

Elemento di base	Integrazione affidabile	Integrazione ridotta
4-node	2x2	-
4 nodi distorti	2x2	-
8 nodi	3x3	2x2
8 nodi distorti	3x3	2x2
9 nodo	3x3	2x2
9-nodo distorto	3x3	2x2

93 Se l'elemento è artificialmente ammorbidito, allora ci sarà *spurioso modalità zero energia*e la matrice di rigidità sarà *grado carente*, cioè il suo grado è inferiore al numero di elemento d.o.f. meno il numero di modalità rigide del corpo.

94 Le modalità di spostamento indipendenti di un elemento bilineare sono mostrata in Fig. 51.14. Le prime tre modalità sono movimento rigido del corpo, le successive tre sono

[1] Questo è analogo a troncare una serie Fourrier, che altrimenti avrebbe potuto essere un sostituto esatto di una serie di fisico osservazioni.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

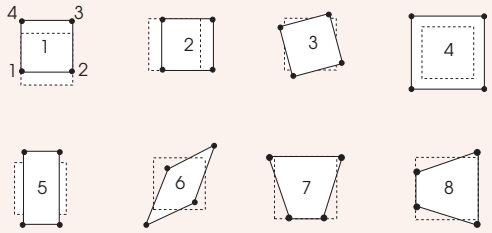


Figura 51.14: Modalità di spostamento indipendenti per un elemento bilineare

costanti e le ultime due sono modalità di piegamento.

95 Poiché l'elemento non fornisce alcuna resistenza a tutti i spurious modalità zero-energia (che può essere utilizzato comunque in combinazione lineare con le altre modalità per descrivere il campo di spostamento), quindi l'effetto di una ridotta integrazione è quello di ammorbidire la rigidità del modello FE.

96 Se adottiamo un sistema di integrazione ridotta, saremo sostanzialmente ridurre lo sforzo computazionale, tuttavia ci perderemo alcuni molto speciale proprietà del metodo di spostamento, vale a dire: a) Boundedness e b) convergenza monotonica verso una soluzione esatta.

97 Un'illustrazione dei problemi derivanti dalla riduzione dell'integrazione è illustrati per i seguenti elementi

Q4 Per un'integrazione a singolo punto, il punto Gauss è al centro. Al centro di un elemento sotto piegare $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \gamma_{xy} = 0$, accordingly $U = 0$ per le modalità corrispondenti 4 e 5 in Fig. 51.14, queste modalità spurie scompariranno se $n = 2$.

Q9 Lo spostamento è dato da $u = 3\xi^2\eta^2 - \xi^2 - \eta^2$ e $v = 0$. Se l'elemento è integrato da 2x2 punti, at $\xi = \eta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ si può dimostrare che in quei punti i ceppi sono zero e i meccanismi corrispondenti, o **clessidra** sono mostrati in Fig. 51.15.

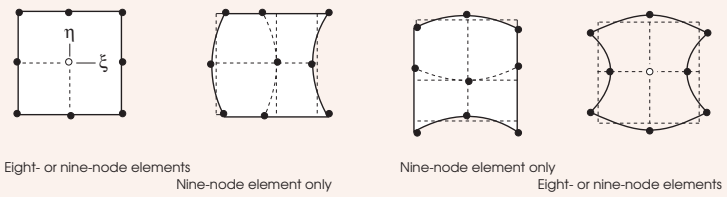


Figura 51.15: Modalità di oreglas in elemento quadratico sottointegrato

51.5.4.3 Integrazione ridotta selettiva

98 In integrazione selettiva, integriamo i diversi termini di sforzo con diversi ordini di integrazione.

COPIA DI REVISIONE

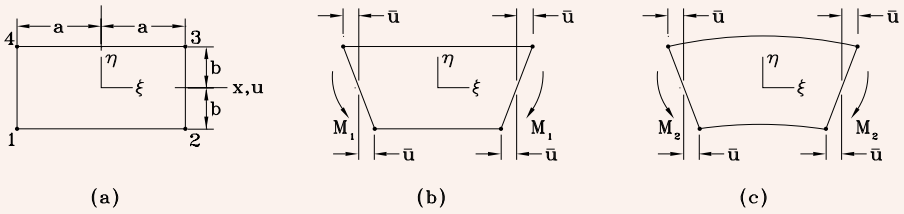


Figura 51.16: Elemento bilineare rettangolare sottoposto a flessione; elemento bilineare e geometria corretta

99 Ulteriori informazioni su questa tecnica nel capitolo successivo.

51.6 Parassita/incompatibile elementi

51.6.1 Q4, il problema

100 Le funzioni di forma per l'elemento bilineare sono date da Eq. 49.12

$$\begin{array}{rclrcl} N_1(\xi,\eta) &=& \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta); & N_2(\xi,\eta) &=& \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta); \\ N_3(\xi,\eta) &=& \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta); & N_4(\xi,\eta) &=& \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta); \end{array} \tag{51.17}$$

dove $\xi = x/a$ e $\eta = y/b$.

101 Impostando il campo di spostamento della Fig. 51.16 l'elemento bilineare e gli spostamenti corretti e le tensioni sono dati Tabella 51.6.

Tabella 51.6: Bilinsear e slittamenti/strains

	Bilinear Elemento di base	Esatto Formulazione
u	$\xi\eta\overline{u}$	$\xi\eta\overline{u}$
v	0	$(1-\xi^2)\frac{a\overline{u}}{2b} + (1-\eta^2)\nu\frac{b\overline{u}}{2a}$
ε_{xx}	$\eta\frac{\overline{u}}{a}$	$\eta\frac{\overline{u}}{a}$
ε_{yy}	0	$-\nu\eta\frac{\overline{u}}{a}$
γ_{xy}	$\xi\frac{\overline{u}}{b}$	0

102 Da questa tabella si nota che la cesoia parassita contribuisce al energia di sforzo immagazzinata nell'elemento (che è uguale a $\mathbf{P}^T.\mathbf{d}$). Quindi, per una data sostituzione imposta, le forze sarebbero più grandi e $M_1 > M_2$.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

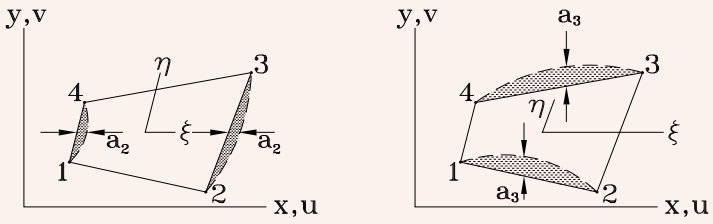


Figura 51.17: Stime associate a modalità incompatibili per l'elemento q6

103 Comprendendo il rapporto di energie estensive dei due elementi, otteniamo

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{1}{1+\nu}\left[\frac{1}{1+\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]$$

come a/b aumenta, l'elemento "locks' (un termine che sarà spiegato nei capitoli successivi).

104 Quindi, la ceppo di taglio indesiderata che produce $M_1 > M_2$ si chiama *parassita*.

51.6.2 Q6, la soluzione

105 Comparazione dei campi di spostamento in Tabella 51.6 we osservare che l'elemento bilineare erra dalla soluzione esatta, omettendo la modalità di spostamento associata con $(1-\xi^2)$ e $(1-\eta^2)$.

106 Possiamo rimediare a questa situazione aggiungendo le modalità mancanti come nodi interni

$$\begin{aligned} u &= \sum N_i \overline{u}_i + (1-\xi^2)a_1 + (1-\eta^2)a_2 \\ v &= \sum N_i \overline{v}_i + (1-\xi^2)a_3 + (1-\eta^2)a_4 \end{aligned}$$

dove N_i sono dati da Eq. 51.17e a_i sono Nodeless d.o.f. L'elemento ora ha 6 gradi di libertà, e quindi l'elemento è riferito a come Q6.

107 Il **B** matrice dovrebbe essere corrispondentemente regolata e seguendo la sua formulazione, il d.o.f aggiuntivo a_i sono eliminati attraverso la condensazione (Sect. 46.1).

108 L'elemento Q6 è *incompatibile* (o non conforme) a causa della distribuzione quadrata di u or v lungo il bordo che è definito solo due nodi, Fig. 51.17.

109 L'ammorbidimento in questo caso contrasta la sovrastimità intrinseca della standard assunto formulazione di spostamento.

51.6.3 Qm6, ulteriori miglioramenti

110 Si può dimostrare che l'elemento Q6 passa il test di patch solo se è rettangolare.

COPIA DI REVISIONE

111 Per rimediare a questa carenza, consideriamo quella parte della **B** matrice associata con il nodeless d.o.f. e etichettarlo $\mathbf{B}_a$e poi il vettore di carico nodale corrispondente è

$$\mathbf{p}_a^e = -\int_\Omega^e \mathbf{B}_a^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega$$

dove $\boldsymbol{\sigma}_0$ rappresentano le sollecitazioni iniziali causate dall'elemento standard formulazione associata con d_r sul nodale d.o.f.

112 Poiché l'elemento isoparametrico standard supera il test di patch, quando $\boldsymbol{\sigma}_0$ è costante, senza questo carico aggiuntivo associato con a_iAllora $\mathbf{p}_a^e$ dovrebbe anche essere zero per costante $\boldsymbol{\sigma}_0$ or

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{B}_a^T t \det\mathbf{J} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta = 0$$

Per gli elementi generali (non rettangolari) questa equazione non è soddisfatta e il test di patch fallisce.

113 Questo può essere artificialmente rimediato nella formazione $\mathbf{B}_a$ e integrazione utilizzando $\mathbf{J}_0$ dove il giacobiano è valutato a $\xi = \eta = 0$ piuttosto che al punto di quadratura Gauss, e usiamo il corrispondente t_0 per lo spessore.

114 Quando si esegue un'operazione del genere, l'elemento risultante viene chiamato QM6, e funziona quasi come l'elemento quadratico se rettangolare, e è considerevolmente più accurato dell'elemento bilineare.

115 Le stringhe sono calcolate con tutto il d.o.f, compreso il a_i. Risultati migliori si ottengono se i carichi nodali degli elementi $\mathbf{p}^e$ che sono associati a modalità incompatibili sono impostati a zero durante il recupero del associato D.o.f. a_i (seguendo la condensazione).

51.7 Rotazionale d.o.f.

116 *Trapano d.o.f.* sono rotazioni a nodi di angolo. Nel contesto del piano elementi, sono associati con forme paraboliche dislocate dei bordi, Fig. 51.18. Sono di importanza nelle conchiglie definite come un assemblaggio di elementi piatti. Quindi, l'elemento può modellare flexure e azione a membrana.

117 Assumere rotazione $\overline{\omega}_i$ e $\overline{\omega}_j$ a nodi i e j of un lato elemento di lunghezza L, i momenti finali di un fascio immaginario saranno

$$\begin{aligned} M_i &= \frac{2EI}{L}\left(2\overline{\omega}_i + \overline{\omega}_j\right) \\ M_j &= \frac{2EI}{L}\left(\overline{\omega}_i + 2\overline{\omega}_j\right) \end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

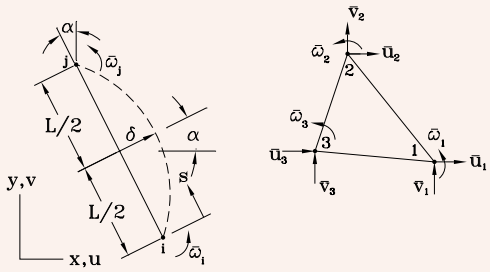


Figura 51.18: Cilindrata laterale indotta dalla perforazione d.o.f.

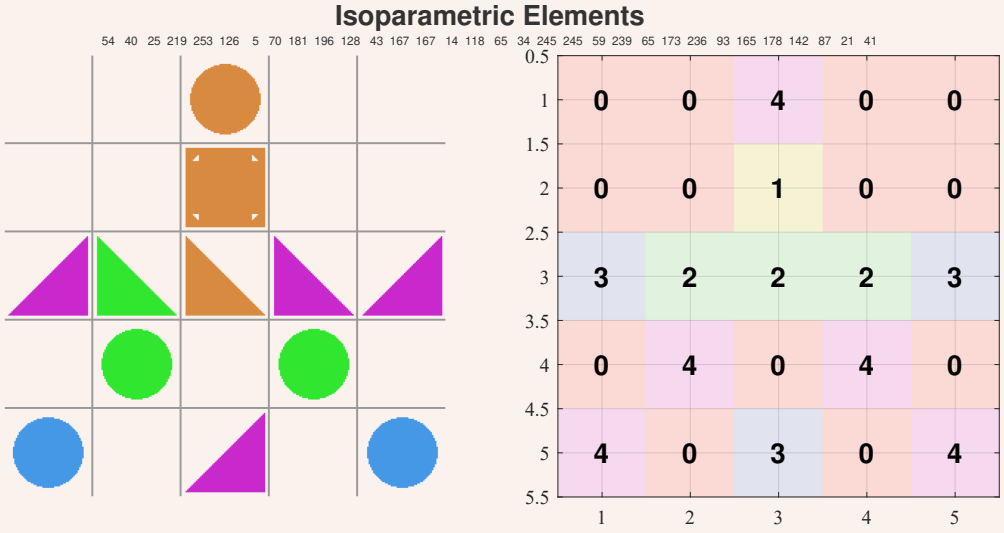
Da qui, da $M = M_i + (M_j - M_i)\frac{x}{L}$ e il metodo di forza vituale che possiamo risolvere per lo spostamento del bordo medio-normale

$$\delta = \frac{L}{8}(\overline{\omega}_j - \overline{\omega}_i)$$

118 Quindi lo spostamento dei bordi è causato da due parti: traduzione e distorsione parabolica:

$$\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\} = \frac{L-s}{L} \left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_i \\ \overline{v}_i \end{array} \right\} + \frac{s}{L} \left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_j \\ \overline{v}_j \end{array} \right\} + \frac{L-s}{2L} s(\omega_j - \omega_i) \left\{ \begin{array}{c} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{array} \right\}$$

e espressioni simili possono essere scritte per altri bordi.



Identicona specifica del capitolo, chapter H

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 52

Metodi dei residui pesati

Abstract

La formulazione degli elementi finiti presentata nel capitolo 50 era radicato nel principio del lavoro virtuale e principi variativi. Si afferma che per un corpo in equilibrio, il lavoro virtuale svolto da stress interni è pari al lavoro virtuale fatto dalle forze esterne per qualsiasi spostamento virtuale che sia cinematicamente ammissibile.

Al contrario, questo capitolo presenterà un metodo alternativo. Il metodo Galerkin è un approccio residuo ponderato utilizzato nella soluzione numerica delle equazioni differenziali. Si tratta di moltiplicare l'equazione differenziale governante da un insieme di funzioni di prova e di integrare sul dominio del problema per minimizzare i residui.

Il metodo Galerkin è più generale e può essere applicato ad una vasta gamma di equazioni differenziali oltre quelle della meccanica strutturale.

Questo capitolo presenta brevemente e con succintamente il metodo Galerkin.

52.1 Introduzione 1833
52.2 Formulazione generale 1833
52.2.1 Operatori differenziali 1833
52.2.2 Formulazione residua 1834
52.3 Metodi residui ponderati 1836
52.3.1 Metodo di collocazione punto 1837
52.3.2 Metodo di collocazione sottodominio 1837
52.3.3 Metodo di minimo-quares . 1837
52.3.4 Metodo di Galerkin 1837
52.4 Applicazioni del metodo Galerkin a problemi di elasticità 3D 1840
52.4.1 Derivazione della forma debole 1840
52.4.2 Discretizzazione 1842

Il capitolo seguente è adattato a partire dal Ottosen e Petersson, 1992 Introduction to the Finite Element Method.

COPIA DI REVISIONE

52.1 Introduzione

1 Finora, il metodo degli elementi finiti derivava da un principio variazionale attraverso il metodo Rayleigh-Ritz.

2 In Elasto-Statics, il principio variazionale utilizzato è la minimizzazione dell'energia potenziale totale e la formulazione debole risultante è equivalente all'equazione di equilibrio (forma forte).

3 In molti rami delle scienze fisiche, non può essere disponibile un principio variazionale e tutto ciò che è disponibile è una equazione differenziale e le sue condizioni di confine associate.

4 Va notato che una formulazione variazionale non è possibile quando l'ordine dell'equazione differenziale è *Strano*.

5 È per quei problemi che *metodi residui ponderati* è essenzialmente un metodo matematico.

6 La formulazione risultante è integrale, ed è quindi "weak'.

7 Il metodo Galerkin è più generale e può essere applicato ad una vasta gamma di equazioni differenziali oltre quelle della meccanica strutturale. Inoltre, è coerente con i Principi Variativi: Il metodo è coerente con il metodo Ritz e i principi variativi.

52.2 Formulazione generale

52.2.1 Operatori differenziali

8 Considerando un'equazione differenziale generale

$$\begin{array}{lrcll} \text{Governing Differential Equation} & L\phi + g & = & 0; & \Omega \\ \text{Boundary conditions} & B_i(\phi) & = & q_i; & \Gamma_i \end{array} \tag{52.1}$$

dove L è un operatore differenziale. Assumendo un problema 1D, $\phi = \phi(x)$ è una funzione sconosciuta che rappresenta la variabile di stato da determinare (cioè spostamento, temperatura, testa, ecc...), $g(x)$ è una funzione di forzatura nota.

9 Presumiamo che l'operatore differenziale sia simmetrico e positivo,

$$\begin{array}{lrcl} \text{Symmetric} & \int_\Omega (L[u])v \mathrm{d}\Omega & = & \int_\Omega (L[v])u \mathrm{d}\Omega \\ \text{Positive Definite} & \int_\Omega (L[u])u \mathrm{d}\Omega & > & 0 \end{array} \tag{52.2}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove u e v sono tutte le funzioni che *soddisfare le condizioni di confine essenziali e naturali*, L è l'operatore lineare definito in Eq. O.7.

52.2.1.1 Ex 52.1: Controllare la simmetria e la definizione positiva di un membro assiale 1D

Come esempio, consideriamo la risposta di stato costante di una barra assiale. L'equazione differenziale e le condizioni di confine sono

$$\begin{array}{lll} \text{Governing Differential Equation} & -EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & = 0 \\ \text{Essential Boundary conditions} & u|_{x=0} & = 0 \\ \text{Natural Boundary conditions} & EA\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} & = P \end{array}$$

Da allora

$$\begin{array}{llllllllll} L[.] & = & -EA\frac{\partial^2}{\partial x^2}; & \phi & = & u; & g & = & 0; \\ B_1 & = & 1; & q_1 & = & 0; & B_2 & = & EA\frac{\partial}{\partial x}; & q_2 & = & P; \end{array}$$

Per determinare se l'operatore L è simmetrico e positivo definito, noi consideriamo $P = 0$, e integrarsi due volte per parte[a] noi otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^l -EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v \mathrm{d}x &= -EA\frac{\partial u}{\partial x} v\Big|_0^l + \int_0^l EA\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x \\ &= -EA\frac{\partial u}{\partial x} v\Big|_0^l + EAu\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_0^l - \int_0^l EA\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} u \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Ma poiché le condizioni di confine sono $u = v = 0$ at $x = 0$ e $\partial u/\partial x = \partial v/\partial x = 0$ per $x = l$; pertanto si considera soltanto hanno

$$\int_0^l -EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v \mathrm{d}x = \int_0^l -EA\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} u \mathrm{d}x$$

da qui operatore è simmetrico.

Possiamo anche concludere che operatore è positivo definito da Eq. 52.3

$$\int_0^l -EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u \mathrm{d}x = \int_0^l EA\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x$$

[a] Da Eq.R.3: $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x$

52.2.2 Formulazione residua

10 Ora alteriamo Eq. 52.1, e per un problema 1D riscriverlo come

$$\int_a^b w(L\phi + g)\mathrm{d}x = 0 \tag{52.3}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove w è un arbitrario *funzione di peso*[1]. Si nota che attraverso questa equazione, l'equazione differenziale di governo è soddisfatta in una *debole* - Si'.

11 Ora cerchiamo una soluzione numerica approssimativa per la funzione sconosciuta $\phi(x)$, quindi in generale possiamo presumere

$$\begin{aligned}\phi(x)^{app} &= a_1\psi_1(x) + a_2\psi_2(x) + \cdots + a_n\psi_n(x) \\ &= \mathbf{a}\boldsymbol{\psi}\end{aligned} \tag{52.4}$$

dove a_i sono i parametri sconosciuti, e $\psi(x)$ sono prespecificati *processo* funzioni[2] of x.

12 Sostituire l'equazione precedente in Eq. 52.3

$$\int_a^b w(L\phi^{app} + g)\mathrm{d}x = 0$$

Da ϕ^{app} in generale non soddisfa l'equazione differenziale esattamente, allora

$$\begin{aligned}L\phi^{app} + g &= R \\ \int_a^b wR &= 0\end{aligned}$$

dove $R(x)$ è una misura dell'errore, ed è chiamato *Residui*; In questo modo immettiamo il requisito che pesi e residui essere funzioni ortogonali[3].

13 Il residuo dipende chiaramente dai coefficienti a_i, così il nostro obiettivo è selezionare il peso $w(x)$ in modo tale che *ponderato residui* $w(x)R(x)$ di $a - b$ è zero.

14 funzioni di peso arbitrario sono selezionati prima

$$\begin{aligned}w &= c_1W_1(x) + c_2W_2(x) + \cdots + c_nW_n(x) \\ &= \lfloor\ W_1(x) \quad W_2(x) \quad \cdots \quad W_n(x)\ \rfloor \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{Bmatrix}\end{aligned} \tag{52.5}$$

e $W_i(x)$ sono funzioni predefinite di x, c_i sono parametri. Quindi, possiamo riscrivere Eq. 52.3 as

$$\mathbf{c}^T \int_a^b \mathbf{W}^T R\mathrm{d}x = 0 \tag{52.6}$$

[1] Osservare la somiglianza con la derivazione del principio di lavoro virtuale dall'equilibrio equazione e condizione limite.

[2] Più tardi nel metodo Galerkin, che è una forma speciale di Residui ponderati, ϕ corrisponderà alla lo spostamento, $\boldsymbol{\psi}$ alle funzioni di forma $\mathbf{N}$e $\mathbf{a}$ a spostamenti nodali $\overline{\mathbf{u}}$.

[3] Due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono ortogonali se $\mathbf{a}^T\mathbf{b} = 0$, allo stesso modo due funzioni $u(x)$ e $v(x)$ are orthogonals if $\int v(x)u(x) = 0$.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

Ma da quando **c** non dipende dalle coordinate, quindi

$$\int_a^b \mathbf{W}^T R \mathrm{d}x = 0 \tag{52.7}$$

Questa equazione rappresenta davvero un sistema di n equazioni.

15 Sostituire Eq. 52.3e da allora **a** non dipende da coordinate

$$R = L(\boldsymbol{\psi}\mathbf{a}) + g = L(\boldsymbol{\psi})\mathbf{a} + g$$

Quindi, prendendo la media ponderata

$$\underbrace{\left(\int_a^b \mathbf{W}^T L(\boldsymbol{\psi})\mathrm{d}x\right)}_{\mathbf{K}^e}\mathbf{a} = \underbrace{-\int_a^b \mathbf{W} g \mathrm{d}x}_{\mathbf{f}}$$

or

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \int_a^b W_1 L(\psi_1)\mathrm{d}x & \int_a^b W_1 L(\psi_2)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b W_1 L(\psi_n)\mathrm{d}x \\ \int_a^b W_2 L(\psi_1)\mathrm{d}x & \int_a^b W_2 L(\psi_2)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b W_2 L(\psi_n)\mathrm{d}x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b W_n L(\psi_1)\mathrm{d}x & \int_a^b W_n L(\psi_2)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b W_n L(\psi_n)\mathrm{d}x \end{bmatrix}; \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \int_a^b W_1 g \mathrm{d}x \\ \int_a^b W_2 g \mathrm{d}x \\ \vdots \\ \int_a^b W_n g \mathrm{d}x \end{Bmatrix}$$

16 $\mathbf{K}^e$ è così n by n matrice, e dall'equazione precedente possiamo risolvere per voi i coefficienti sconosciuti **a**.

52.3 Metodi residui ponderati

17 La formulazione precedente era molto generale, e tecniche diverse varia a seconda dei pesi selezionati, cioè la nostra scelta per **W**.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

52.3.1 Metodo di collocazione punto

18 In questo metodo, la funzione di peso w è basato su *Dirac's funzione delta* $\delta(x - x_i)$ e così il residuo è impostato per essere esattamente uguale a zero n punti. Questo è ottenuto adottando per la funzione di peso w il *La funzione delta di Dirac* $\delta(x - x_i)$ dove

$$\delta(x - x_i) = \begin{cases} \infty & \text{if } x = x_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_i)\mathrm{d}x = 1$$

52.3.2 Metodo di collocazione sottodominio

19 Divideremo la regione di interesse in n sottoregioni, e all'interno ciascuno di loro l'integrale del residuo è impostato a zero.

52.3.3 Metodo di minimo-quares

20 L'integrale del quadrato dei residui viene minimizzato con rispetto al a_i.

$$I = \int R^2(x, y, z, a_1, \cdots, a_n)\mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0; \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

52.3.4 Metodo di Galerkin

Per il contesto storico, consultare §12.3.1

21 Nel metodo Galerkin, selezioniamo

$$\mathbf{W} = \boldsymbol{\psi}$$

cioè le funzioni di peso sono uguali alle funzioni di prova. Poiché le funzioni di prova sono ortogonali ai residui (Eq. 52.3), poi Eq. 52.7 diventa

$$\int_a^b \boldsymbol{\psi}^T R\mathrm{d}x = 0$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

e

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \int_a^b \psi_1 L(\psi_1)\mathrm{d}x & \int_a^b \psi_1 L(\psi_2)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b \psi_1 L(\psi_n)\mathrm{d}x \\ \int_a^b \psi_2 L(\psi_1)\mathrm{d}x & \int_a^b \psi_2 L(\psi_2)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b \psi_2 L(\psi_n)\mathrm{d}x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b \psi_n L(\psi_1)\mathrm{d}x & \int_a^b \psi_n L(\psi_2)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b \psi_n L(\psi_n)\mathrm{d}x \end{bmatrix}; \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \int_a^b \psi_1 g\mathrm{d}x \\ \int_a^b \psi_2 g\mathrm{d}x \\ \vdots \\ \int_a^b \psi_n g\mathrm{d}x \end{Bmatrix}$$

52.3.4.1 Ex 52.2: Vibrazione di stringa

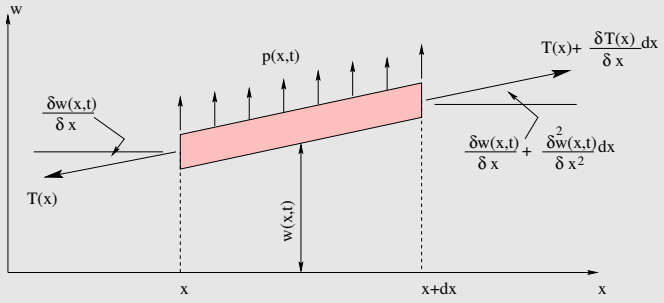
Cerchiamo di formulare le matrici degli elementi finiti dal metodo Galerkin per un un elemento di una stringa sottoposta a tensione $T(x)$e a un forza trasversale esterna per lunghezza unitaria $p(x,t)$. La massa per unità di lunghezza è denotata da ρ. Presumiamo piccoli spostamenti e risolviamo per la frequenza fondamentale delle vibrazioni.

1. Prima scriviamo l'equazione di movimento di Newton nella direzione trasversale ($\Sigma F_y = ma$) per un elemento della stringa

$$\left[T(x) + \frac{\partial T(x)}{\partial x}\mathrm{d}x\right]\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\mathrm{d}x\right] + p(x,t)\mathrm{d}x - T(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = \rho \mathrm{d}x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$$

che riduce a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right] + p(x,t = \rho\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$$



2. Nel caso di vibrazione libera $p(x,t) = 0$, e per costante tensione T =cst, otteniamo

$$Tw_{,xx} - \rho w_{,tt} = 0$$

che è il *equazione dell'onda*.

3. Applichiamo il metodo Galerkin

$$\int_0^L \mathbf{N}^T\left[Tw_{,xx} - \rho\ddot{w}\right]\mathrm{d}x = 0$$

dove $w = \mathbf{N}\overline{w}$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

4. Integrazione per parti

$$-\int_0^L \mathbf{N}_{,x}^T T w_{,x} \mathrm{d}x - \int_0^L \mathbf{N}^T \rho \ddot{w} \mathrm{d}x + \left[\mathbf{N}^T T w_{,x}\right]\Big|_0^L = 0$$

L'ultimo termine è pari a zero perché la forma funziona al corrispondente i nodi sono uguali a zero. Per analogia al metodo di spostamento virtuale, $\mathbf{N}$ corrisponde al spostamento virtuale che deve essere uguale a zero ai supporti in ordine per soddisfare le condizioni di confine essenziali.

5. Substituting $w = \mathbf{N}\overline{w}$ and $w_{,x} = \mathbf{N}_{,x}\overline{w}$ we obtain

$$\underbrace{\int_0^L \mathbf{N}_{,x}^T T \mathbf{N}_{,x} \mathrm{d}x}_{\mathbf{k}}\, \overline{w} + \underbrace{\int_0^L \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} \mathrm{d}x}_{\mathbf{m}}\, \ddot{\overline{w}} = 0$$

dove

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{N}_{,x} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Sostituire

$$\mathbf{k} = \frac{T}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{m} = \frac{\rho L}{6}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

7. Se consideriamo un assemblaggio di due elementi e soppresso il d.o.f fisso (1 e 3), allora

$$2\frac{T}{L}\overline{w}_2 + 4\frac{\rho L}{6}\ddot{\overline{w}}_2 = 0$$

8. Per la vibrazione libera

$$\overline{w}_2 = A \sin \omega t$$
$$\ddot{\overline{w}}_2 = -\omega^2 A \sin \omega t$$

9. Sostituire

$$\left(2\frac{T}{L} - 4\frac{\rho L}{6}\omega^2\right) A \sin \omega t = 0 \Rightarrow \omega^2 = 3\frac{T}{\rho L^2}$$

Nota che la risposta esatta è $w^2 = \frac{\pi^2 T}{4\rho L^2}$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

52.4 Applicazioni del metodo Galerkin a problemi di elasticità 3D

22 Applichiamo il metodo Galerkin a due classi di problemi.

23 Cominciamo con problemi di elasticità, per mostrare che il metodo Galerkin sarebbe risultato esattamente la stessa formulazione di quella ottenuta dalla principio variabile.

24 A seguito di questa "validazione" del metodo, prenderemo in considerazione (nel prossimo capitolo) una classe di problemi che non hanno un principio variativo, e quindi Il metodo Galerkin è l'unica tecnica applicabile. La seconda applicazione sarà l'equazione di calore.

52.4.1 Derivazione della forma debole

25 Ora applichiamo il metodo Galerkin all'equazione dell'elasticità e mostrare che recuperaremo il principio del lavoro virtuale che era derivato da un principio variativo, quindi in questo particolare i due metodi sono infatti (come previsto) equivalenti.

26 A partire dall'equazione di equilibrio (Eq. O.9)

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0$$

dove $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$ e

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix};$$

27 Espansione delle equazioni di equilibrio che abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + b_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z &= 0 \end{aligned} \tag{52.8}$$

28 Moltiplichiamo la prima equazione in Eq. 52.8 da parte dell'arbitrario funzione w_x e ci integriamo sul volume[4] Ω:

$$\int_\Omega w_x \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} d\Omega + \int_\Omega w_x \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} d\Omega + \int_\Omega w_x \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} d\Omega + \int_\Omega w_x b_x d\Omega = 0$$

[4] Osservare la somiglianza con la derivazione del principio di lavoro virtuale.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

29 Ora applichiamo il teorema Green-Gauss (una forma del teoremo divergentece[5])

$$\begin{aligned}\int_\Gamma w_x\sigma_{xx}n_x\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial w_x}{\partial x}\sigma_{xx}\mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma w_x\sigma_{xy}n_y\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial w_x}{\partial y}\sigma_{xy}\mathrm{d}\Omega \\ + \int_\Gamma w_x\sigma_{xz}n_z\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial w_x}{\partial z}\sigma_{xz}\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega w_x b_x\mathrm{d}\Omega = 0\end{aligned} \tag{52.9}$$

30 Ricordando che le trazioni sono date da Eq. O.5

$$\begin{aligned} t_x &= \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z \\ t_y &= \sigma_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{yz}n_z \\ t_z &= \sigma_{zx}n_x + \sigma_{zy}n_y + \sigma_{zz}n_z \end{aligned}$$

poi l'equazione precedente riduce a

$$\int_\Gamma w_x t_x\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \left(\frac{\partial w_x}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial w_x}{\partial y}\sigma_{xy} + \frac{\partial w_x}{\partial z}\sigma_{xz}\right)\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega w_x b_x\mathrm{d}\Omega = 0$$

31 Allo stesso modo, otteniamo per le altre due equazioni di equilibrio

$$\begin{aligned}\int_\Gamma w_y t_y\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \left(\frac{\partial w_y}{\partial x}\sigma_{yx} + \frac{\partial w_y}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial w_y}{\partial z}\sigma_{yz}\right)\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega w_y b_y\mathrm{d}\Omega &= 0 \\ \int_\Gamma w_z t_z\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \left(\frac{\partial w_z}{\partial x}\sigma_{zx} + \frac{\partial w_z}{\partial y}\sigma_{zy} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\sigma_{zz}\right)\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega w_z b_z\mathrm{d}\Omega &= 0\end{aligned}$$

32 Riassumendo queste tre equazioni

$$\begin{aligned}&\underbrace{\int_\Gamma (w_x t_x + w_y t_y + w_z t_z)\mathrm{d}\Gamma}_{\mathbf{W}^T\mathbf{t}} + \underbrace{\int_\Omega (w_x b_x + w_y b_y + w_z b_z)\mathrm{d}\Omega}_{\mathbf{w}^T\mathbf{b}} \\ &- \int_\Omega \left[\frac{\partial w_x}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial w_y}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\sigma_{zz} + \right. \\ &\left.\left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x}\right)\sigma_{xy} + \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x}\right)\sigma_{xz} + \left(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y}\right)\sigma_{yz}\right]\mathrm{d}\Omega = 0\end{aligned} \tag{52.10}$$

33 Ci concentriamo sul terzo termine nell'equazione precedente. Per $\mathbf{w} = \lfloor\ w_x \quad w_y \quad w_z\ \rfloor^T$, then

$$(\mathbf{Lw})^T = \lfloor\ \frac{\partial w_x}{\partial x};\quad \frac{\partial w_y}{\partial y};\quad \frac{\partial w_z}{\partial z};\quad \frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x};\quad \frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x};\quad \frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y};\ \rfloor$$

[5] Da Eq. R.6, $\int_\Omega \Phi\nabla\cdot\mathbf{v}\mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma \Phi\mathbf{v}^T\mathbf{n}\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega(\nabla\Phi)^T\mathbf{v}\mathrm{d}\Omega$. If we set $\mathbf{v}^T = [\ \Psi \quad 0 \quad 0\ ]$, we obtain $\int_\Omega \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial x}\mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma \Phi\Psi n_x\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial\Phi}{\partial x}\Psi\mathrm{d}\Omega$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

e

$$(\mathbf{Lw})^T\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial w_x}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial w_y}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\sigma_{zz} + \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x}\right)\sigma_{xy} + \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x}\right)\sigma_{xz} + \left(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y}\right)\sigma_{yz} \tag{52.11}$$

34 Quindi, sostituendo Eq. 52.11 in Eq. 52.10 noi otteniamo

$$\int_\Omega (\mathbf{Lw})^T\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma \mathbf{w}^T\mathbf{t}\mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega \mathbf{w}^T\mathbf{b}\mathrm{d}\Omega$$

35 Ma da quando **L** operatore è simmetrico, da Eq. 52.2, l'equazione sopra può anche essere scritta come

$$\int_\Omega \mathbf{w}^T(\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma})\mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma \mathbf{w}^T\mathbf{t}\mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega \mathbf{w}^T\mathbf{b}\mathrm{d}\Omega \tag{52.12}$$

che è il *forma debole* dell'equazione differenziale di equilibrio sottoposte alle condizioni di confine trazione (naturale).

36 Il *vettore di peso* **w** è completamente arbitrario. Nel principio di spostamento virtuale, corrisponderebbe al virtuale dislocamento, confrontare questa ultima equazione con Eq. 48.26.

$$\int_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\{\mathbf{G}\underbrace{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0]}_{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\mathbf{t}}\}\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{52.13}$$

52.4.2 Discretizzazione

37 Dato che il campo di spostamento è scritto come

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\overline{\mathbf{u}}$$

dove **N** sono le funzioni di forma, e $\overline{\mathbf{u}}$ sono gli spostamenti conosciuti dal nodale. Si noti che questa è l'applicazione di Eq. 52.4

38 Il metodo Galerkin utilizza le funzioni di forma per il peso (funzioni W_i) Quindi, Eq. 52.5 sarà

$$\mathbf{w} = \mathbf{Nc}; \quad \mathbf{w}^T = \mathbf{c}^T\mathbf{N}^T$$

e

$$\mathbf{Lw} = \mathbf{LNc} = \mathbf{Bc}$$

39 Inserire le ultime due equazioni nella forma debole, e ricordare che la L operatore (O.7) è simmetrico, Eq. 52.12, rendimenti

$$\mathbf{c}^T\left(\int_\Omega \mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega - \int_\Gamma \mathbf{N}^T\mathbf{t}\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{b}\mathrm{d}\Omega\right) = 0$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

(Nota somiglianza con Eq. 52.6). Da $\mathbf{c}$ è una matrice arbitraria, concludiamo che

$$\int_\Omega \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_\Gamma \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma + \int_\Omega \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega \tag{52.14}$$

Questa equazione è applicabile sia ai sistemi lineari che non lineari. La mano destra lato rappresentano l'effetto del carico.

40 Introduciamo un modello costitutivo, Eq. O.11 che è riscritto in forma vettoriale

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0)$$

41 Lo stress e la tensione sono dati da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{N}\overline{\mathbf{u}} = \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}\mathbf{B}\overline{\mathbf{u}} - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 \end{aligned}$$

42 Inserimento di queste due equazioni in Eq. 52.14, rendimenti

$$\underbrace{\int_\Omega \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} d\Omega}_{\mathbf{K}^e}\,\overline{\mathbf{u}} = \underbrace{\int_\Gamma \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma}_{\mathbf{f}_1} + \underbrace{\int_\Omega \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega}_{\mathbf{f}_b} + \underbrace{\int_\Omega \mathbf{B}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega}_{\mathbf{f}_0}$$

43 Così, utilizzando l'approccio Galerkin, abbiamo recuperato la stessa formulazione di rigidità come quella precedentemente ottenuta da un Principio Variationale Eq. 50.10).

44 considerando che non può esserci alcun vantaggio più chiaro nell'uso della Galerkin approccio quando è disponibile un principio variabile, questa può essere l'unica formulazione possibile in assenza del secondo.

52.4.2.1 Ex 52.3: Matrice di stiffness di un elemento del fascio

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Introduzione

Cerchiamo di ricavare la matrice rigidità per un elemento a fascio utilizzando il metodo Galerkin.

COPIA DI REVISIONE

L'equazione di base per la deflezione $v(x)$ di un fascio Euler-Bernoulli sotto carico distribuito $q(x)$ is:

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = q(x)$$

Moltiplicare entrambi i lati dell'equazione differenziale da una funzione di peso $\psi(x)$ e integrarsi sulla lunghezza L dell'elemento del fascio:

$$\int_0^L \psi(x)\left(EI\frac{d^4v}{dx^4} - q(x)\right)dx = 0$$

Per ridurre l'ordine dei derivati su v, si integrano da parti. Considerare il termine con il più alto derivato:

$$\int_0^L \psi(x)EI\frac{d^4v}{dx^4}dx$$

Integrare per due parti per spostare i derivati da v to ψ:

$$\int_0^L \psi EI\frac{d^4v}{dx^4}dx = -\int_0^L \frac{d\psi}{dx}EI\frac{d^3v}{dx^3}dx + \left[\psi EI\frac{d^3v}{dx^3}\right]_0^L$$

I termini al contorno $\left[\psi EI\frac{d^3v}{dx^3}\right]_0^L$ sono nulli se la funzione peso ψ soddisfa le condizioni al contorno.

Applicare l'integrazione da parte di parti ancora a $\int_0^L \frac{d\psi}{dx}EI\frac{d^3v}{dx^3}dx$:

$$-\int_0^L \frac{d\psi}{dx}EI\frac{d^3v}{dx^3}dx = \int_0^L \frac{d^2\psi}{dx^2}EI\frac{d^2v}{dx^2}dx - \left[\frac{d\psi}{dx}EI\frac{d^2v}{dx^2}\right]_0^L$$

Again, the boundary terms $\left[\frac{d\psi}{dx}EI\frac{d^2v}{dx^2}\right]_0^L$ vanish under suitable boundary conditions for ψ.

Così, la forma debole dell'equazione governativa diventa:

$$\int_0^L \frac{d^2\psi}{dx^2}EI\frac{d^2v}{dx^2}dx = \int_0^L \psi q(x)dx$$

Assumere una soluzione approssimativa per $v(x)$ come combinazione lineare delle funzioni di forma $Ni(x)$:

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i N_i(x)$$

dove v_i sono gli spostamenti nodali e $Ni(x)$ sono le funzioni di forma.

Allo stesso modo, scegliere le funzioni di peso ψ per essere le funzioni di forma $Nj(x)$:

$$\psi = N_j(x)$$

Sostituire le approssimazioni nell'equazione della forma debole:

$$\int_0^L \frac{d^2N_j}{dx^2}EI\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i N_i(x)\right)dx = \int_0^L N_j(x)q(x)dx$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Questo semplifica:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \int_0^L \frac{d^2N_j}{dx^2} EI \frac{d^2N_i}{dx^2} dx = \int_0^L N_j(x) q(x) dx$$

Riconosciamo chiaramente una dichiarazione di equilibrio in termini di rigidità matrice, spostamento e forza.

$$K_{ji} = \int_0^L \frac{d^2N_j}{dx^2} EI \frac{d^2N_i}{dx^2} dx$$

$$f_j = \int_0^L N_j(x) q(x) dx$$

Per l'elemento a due nodi con funzioni di forma cubica:

$$N_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$N_2(x) = x - 2\left(\frac{x^2}{L}\right) + \left(\frac{x^3}{L^2}\right)$$

$$N_3(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x^3}{L^2}\right)$$

$$N_4(x) = -\left(\frac{x^2}{L}\right) + \left(\frac{x^3}{L^2}\right)$$

Computare i loro secondi derivati:

$$\frac{d^2N_1}{dx^2} = -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}$$

$$\frac{d^2N_2}{dx^2} = \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2}$$

$$\frac{d^2N_3}{dx^2} = \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}$$

$$\frac{d^2N_4}{dx^2} = -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2}$$

Ora, calcola le voci della matrice di rigidità:

$$K_{ij} = \int_0^L \frac{d^2N_i}{dx^2} EI \frac{d^2N_j}{dx^2} dx$$

Per un elemento tipico del fascio, la matrice di rigidità risultante è una 4×4 matrice:

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

52.4.2.2 Ex 52.4: Trasferimento termico

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

cerchiamo di risolvere il problema del trasferimento termico caratterizzato da

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

dove: $u(x,t)$ è la distribuzione della temperatura, α è la diffusione termica.

Risolviamo questa equazione sul dominio $0 \leq x \leq L$ con le seguenti condizioni iniziali e di confine:

- Stato iniziale: $u(x,0) = u0(x)$,
- Condizioni di alloggio: $u(0,t) = uL$ e $u(L,t) = uR$.

Il metodo Galerkin comporta i seguenti passaggi:

1. Forma debole dell'equazione di calore
2. Soluzione approssimativa utilizzando le funzioni di base
3. Formulazione Galerkin
4. Montaggio del Sistema Equazioni
5. Integrazione del tempo

Prima di tutto, moltiplicare l'equazione termica per una funzione di prova $\psi(x)$ e integrarsi sul dominio $[0, L]$:

$$\int_0^L \psi(x) \frac{\partial u}{\partial t}\, dx = \alpha \int_0^L \psi(x) \frac{\partial^2 u}{dx^2}\, dx$$

Integrare il lato destro per parti per ridurre l'ordine del derivato:

$$\alpha \int_0^L \psi(x) \frac{\partial^2 u}{dx^2}\, dx = -\alpha \int_0^L \frac{\partial \psi}{dx} \frac{\partial u}{dx}\, dx + \left[\alpha \psi(x) \frac{\partial u}{dx}\right]_0^L$$

Assumendo la funzione di test $\psi(x)$ soddisfa le condizioni di confine in modo che i termini limite svaniscano, otteniamo:

$$\int_0^L \psi(x) \frac{\partial u}{\partial t}\, dx = -\alpha \int_0^L \frac{\partial \psi}{dx} \frac{\partial u}{dx}\, dx$$

Noi apprenderemo una soluzione approssimativa $u(x,t)$ come combinazione lineare delle funzioni di base $Ni(x)$:

$$u(x,t) \approx \sum_{i=1}^{n} U_i(t) N_i(x)$$

dove $Ui(t)$ sono coefficienti di tempo-dipendenti da determinare e $Ni(x)$ sono le funzioni di base spaziale.

Scegli le funzioni di test ψ essere la stessa delle funzioni di base $Nj(x)$:

$$\psi = N_j(x)$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Sostituiamo la soluzione approssimata e le funzioni di prova nella forma debole:

$$\int_0^L N_j(x)\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{n} U_i(t)N_i(x)\right)dx = -\alpha\int_0^L \frac{\partial N_j}{dx}\frac{\partial}{dx}\left(\sum_{i=1}^{n} U_i(t)N_i(x)\right)dx$$

Questo semplifica:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{dU_i(t)}{dt}\int_0^L N_j(x)N_i(x)\,dx = -\alpha\sum_{i=1}^{n} U_i(t)\int_0^L \frac{\partial N_j}{dx}\frac{\partial N_i}{dx}\,dx$$

Definire la matrice di massa M e la matrice di rigidità K:

$$M_{ji} = \int_0^L N_j(x)N_i(x)\,dx$$

$$K_{ji} = \int_0^L \frac{\partial N_j}{dx}\frac{\partial N_i}{dx}\,dx$$

Il sistema delle equazioni diventa:

$$M\frac{dU}{dt} = -\alpha KU$$

dove $U = [U1(t), U2(t)\ldots, Un(t)]^2$.

Utilizzare un metodo di time-stepping come il metodo Euler avanzato per integrare il sistema delle equazioni nel tempo:

$$M\frac{U^{(k+1)} - U^{(k)}}{\Delta t} = -\alpha KU^{(k)}$$

Rearrange dà:

$$U^{(k+1)} = U^{(k)} + \Delta t M^{-1}(-\alpha KU^{(k)})$$

Consideriamo ora specifiche funzioni di base. semplicità FOr, noi considerare le funzioni di base lineare. Dividere il dominio $[0, L]$ in n elementi di uguale lunghezza $h = L/n$. Definire le funzioni di base $Ni(x)$ come funzioni lineari pezzetti che sono 1 a nodo i e 0 a tutti gli altri nodi.

Per due elementi lineari, le funzioni di base $N1(x)$ e $N2(x)$ potrebbe essere definito come:

$$N_1(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{h} & 0 \le x \le h \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_2(x) = \begin{cases} \frac{x}{h} & 0 \le x \le h \\ 1 - \frac{x-h}{h} & h \le x \le 2h \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

La matrice di massa M e matrice rigidità K per queste funzioni di base sono calcolate come:

$$M = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

COPIA DI REVISIONE

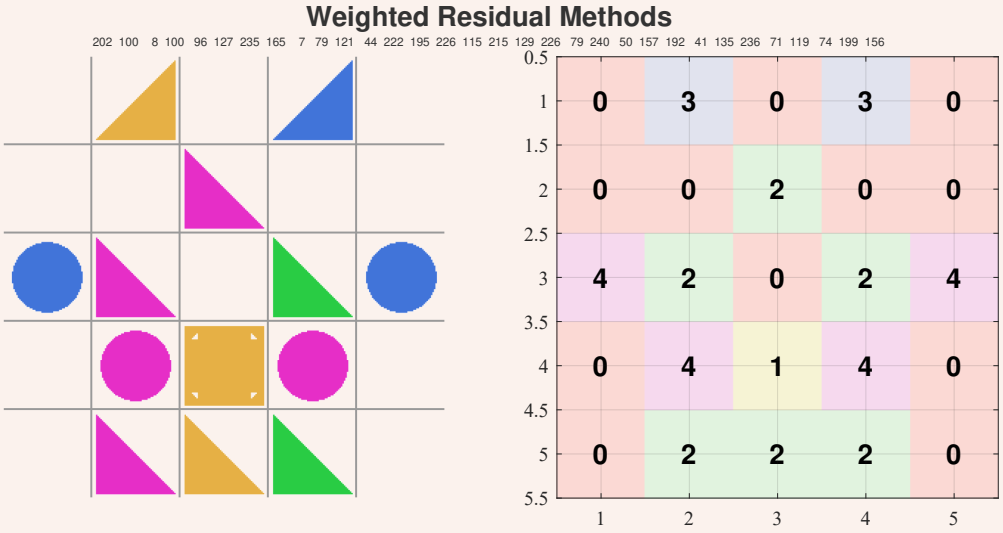
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Il sistema di equazioni per il metodo Euler in avanti diventa:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{U^{(k+1)} - U^{(k)}}{\Delta t} = -\alpha \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} U^{(k)}$$

Solving for $U^{(k+1)}$:

$$U^{(k+1)} = U^{(k)} - \frac{\alpha \Delta t}{h} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} U^{(k)}$$



Identicona specifica del capitolo, chapter H

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 53

Dinamica II

Abstract

Questo capitolo è destinato a un corso di laurea di primo anno e sviluppa gli strumenti computazionali ed avanzati necessari per l'analisi dinamica realistica. Dopo aver formulato le equazioni generali di movimento per i sistemi strutturali e la definizione delle idealizzazioni utilizzate per strutture incorniciate, sottolinea l'analisi transitoria tramite discretizzazione temporale e integrazione passo dopo passo. Gli algoritmi classici (differenza centrale e metodi di tipo Newmark) sono presentati con attenzione alla stabilità, accuratezza e smorzamento numerico. Il capitolo estende quindi la discussione ai sistemi continui e alle dinamiche non lineari, e si conclude con considerazioni di modellazione pratica e una chiara distinzione tra verifica e convalida. Se del caso, le misure di risposta deterministica sono collegate al capitolo 72 per la loro interpretazione basata sulle prestazioni probabilistiche.

Segnale. ~~Capitolo 36 Il presente capitolo inizia dove i metodi lineari di forma chiusa~~ raggiungono i loro limiti: formulazioni generalizzate del sistema, calcolo transitorio e risposta non lineare.

Analisi dinamica transitoria

Abstract

La dinamica è una non si può *piuttosto che rivedere i suoi fondamenti, questo capitolo si concentrerà sugli aspetti computazionali come implementati nei codici di analisi degli elementi finiti. Il capitolo si apre con la discretizzazione di un edificio per l'analisi dinamica, seguita dalla formulazione variazionale del problema dinamico, poi vengono discusse le tecniche di integrazione temporale.*

COPIA DI REVISIONE

53.1 Introduzione 1850
53.2 Idealizzazione per l'analisi dinamica 1851
53.2.1 Assilico *vs* Stiffamento flessibile 1851
53.2.2 Modelli 1852
53.3 Formulazione dei problemi 1856
53.3.1 Formulazione Variazione . . 1856
53.3.2 Rappresentanza di massa . . 1858
53.3.3 Smorzamento 1859
53.3.4 Tecnica numerica: metodi Euler 1863
53.4 Dischio di tempo 1866
53.4.1 Implicita 1866
53.4.2 Integrazione temporale esplicita 1871
53.5 Metodi numerici per l'analisi dinamica 1874
53.5.1 Metodo delle differenze centrali 1875
53.5.2 Ex 53.5: Passo temporale di stabilità per le differenze centrali 1875
53.5.3 Metodo Newmark-Beta . . . 1876
53.5.4 Sovrapposizione modale e integrazione diretta 1876
53.6 Sistemi continui 1877
53.6.1 Vibrazione assiale delle barre 1877
53.6.2 Vibrazione trasversale delle travi 1879
53.7 Dinamica non lineare 1880
53.7.1 Fonti di non linearità 1880
53.7.2 Duttilità e progettazione secondo la capacità 1880
53.8 Considerazioni pratiche 1881
53.8.1 Smorzamento nelle strutture reali 1881
53.8.2 Interazione terreno-struttura 1881
53.8.3 Smorzatori a massa accordata 1881
53.8.4 Isolamento alla base 1882
53.9 Sintesi 1882

Per il contesto storico, consultare §12.3.6

53.1 Introduzione

1 Quando la frequenza del carico applicato (eccitazione) di una struttura è inferiore a circa un terzo della sua minore frequenza naturale delle vibrazioni, allora possiamo trascurare gli effetti inerziali e trattare il problema come quasi-statico, altrimenti un'analisi dinamica deve essere eseguito.

2 Per una struttura molto flessibile, anche un *carico applicato lentamente* può richiedere un'analisi dinamica.

3 Se la struttura è sottoposta a un carico impatto, che si deve occupare principalmente della propagazione dell'onda (stress) in un tale problema spesso abbiamo *alte frequenze* e la durata dell'analisi dinamica è circa il tempo necessario per l'onda di viaggiare attraverso la struttura.

4 Se le forze inerziali sono presenti, allora siamo confrontati con un problema dinamico e possiamo analizzarlo attraverso una delle seguenti procedure di soluzione:

1. Spettro di risposta (solo sistemi elastici lineari)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

2. Analisi della storia del tempo attraverso l'analisi modale (ancora elastica lineare), o integrazione diretta del tempo.
3. Il Prof. Wilson è stato dichiarato:

   > *Ray Clough e io ci dispiace di aver creato il metodo approssimativo dello spettro di risposta per l'analisi sismica delle strutture nel 1962.... A quel tempo molti membri della professione utilizzavano la somma dei valori assoluti dei valori modali per stimare le forze massime degli associati. Ray suggeriva di usare il metodo SRSS per combinare i valori modale. Tuttavia, sono io che ho messo il metodo approssimativo in molti programmi di analisi dinamica che hanno permesso agli ingegneri di produrre numeri positivi senza senso di poco o nessun valore... Dopo aver lavorato con la RSM per oltre 50 anni, lo consiglio di non essere utilizzato per l'analisi sismica.*
4. I metodi di dinamica strutturale sono essenzialmente indipendenti dall'analisi degli elementi finiti, come presumono questi metodi che abbiamo già la rigidità, la massa e le matrici umide. Tali matrici possono essere ottenute da un unico grado di libertà, da una idealizzazione/semplificazione di una struttura frame, oppure da una maglia elemento finita molto complessa.

5 Notare l'Appendice 36.4.3 e K coprirà brevemente le vibrazioni libere e le tecniche di filtraggio record sismico.

53.2 Idealizzazione per l'analisi dinamica

53.2.1 Assilico *vs* Stiffamento flessibile

6 Come promemoria, prima di esaminare la modellazione dell'edificio sottoposto a carico laterale (ad esempio sismico), può essere utile mettere in prospettiva l'importanza assiale *vs* rigidità flessografiche, Fig. 53.1a.

7 Il rapporto di rigidità assiale a flessione è:

$$\alpha = \frac{k_a}{k_t} = \frac{\frac{EA}{L}}{\frac{12EI}{L^3}} = \frac{AL^2}{12I}$$

Per un $b \times h$ sezione rettangolare, con $b = h/2$e $L = 10h$noi avremmo $\alpha = 100$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

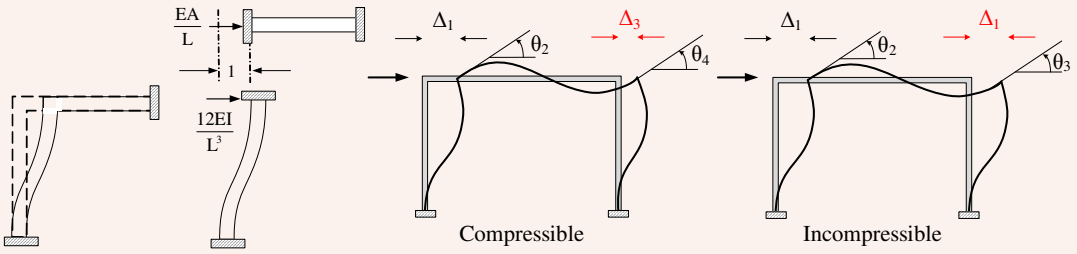
8 Per una sezione W con

$$\left.\begin{aligned} Z &\approx \frac{wd}{9} \\ \frac{Z}{S} &= \xi = 1.1 \\ S &= \frac{I}{\frac{d}{2}} \\ w &= (490)\ \text{lbs/ft}^3 A \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} I &\approx 0.208 A d^2 \\ \alpha &= \frac{\frac{EA}{L}}{\frac{12EI}{L^3}} = \frac{\frac{EA}{L}}{\frac{12E(0.208)Ad^2}{L^3}} = 0.4\left(\frac{L}{d}\right)^2 \end{aligned}$$

9 Per la struttura in acciaio, possiamo presumere
$L = 20d, \Rightarrow \alpha = 160$

10 Nota: possiamo avere deformazioni assiali trascurabili, tuttavia la forza assiale non è trasmissibile; spesso si sfrutta in analisi sismica, permettendoci di sostituire un edificio multi-bay (breve) con una singola colonna con masse lumped.

11 If $\alpha >\approx 10$ possiamo ignorare la deformazione assiale, e ridurre il numero di gradi di libertàFico. 53.1bQuindi, se il telaio è sottoposto a carico laterale (vento o terremoto), la forza di taglio in ogni colonna è proporzionale alla sua rigidità flessorale.



(a) rigidità assiali e flessori (b) Impatto sull'analisi dei frame

Figura 53.1: Assilico *vs* rigidità flessografiche

53.2.2 Modelli

12 Per i telai multistory/bay, possiamo ridurre sostanzialmente il numero di gradi non vincolati di libertà (e quindi la dimensione delle matrici da invertire).

13 Ignorando la deformazione assiale, facilita notevolmente l'analisi dinamica di piccoli montanti a gradini sottoposti al carico laterale (vento, terremoti).

14 Il diagramma del corpo libero di un edificio sottoposto a carico laterale e con rigidità assiale ignorato, è mostrato in Fig. 53.1a.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

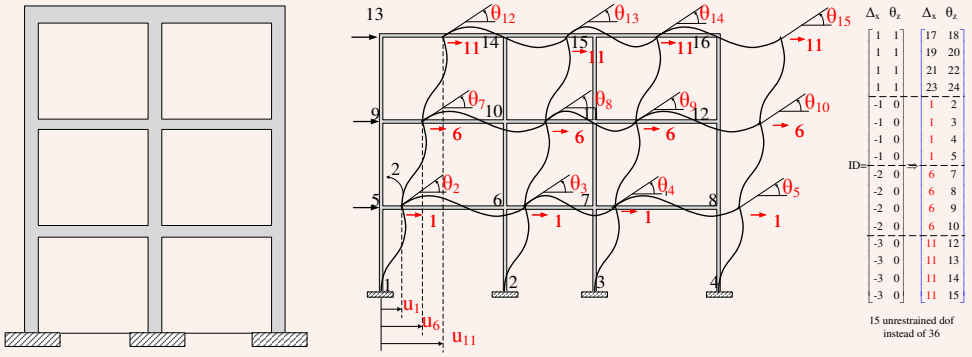


Figura 53.2: Riduzione di spostamenti non frenati quando la rigidità assiale viene ignorata

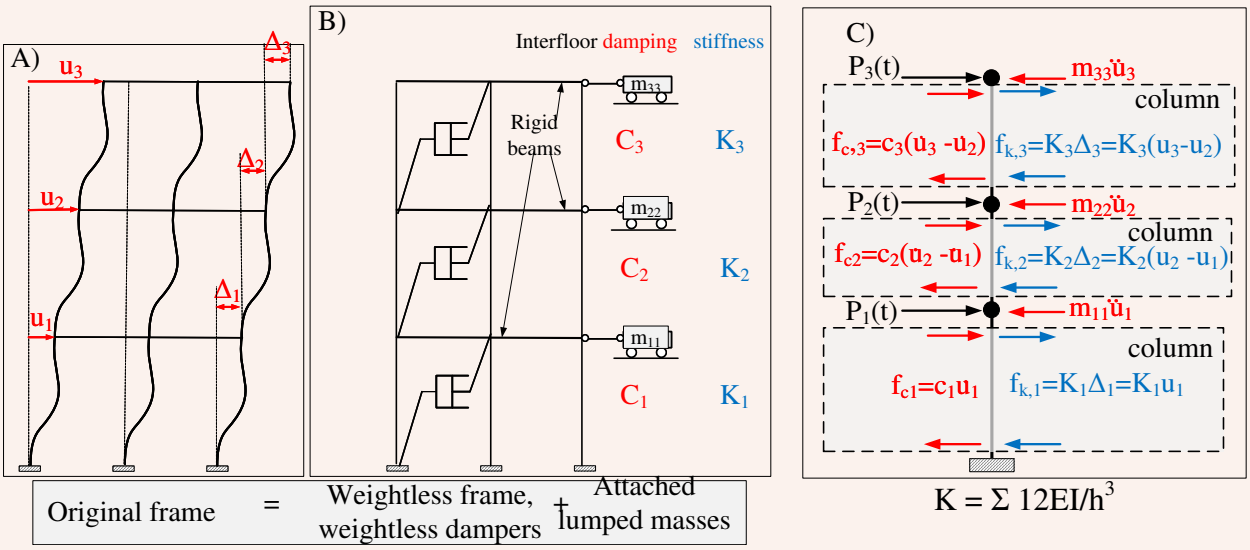


Figura 53.3: Modellazione di edificio per carico sismico

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

15 Le forze di rigidità e smorzamento sono date da (notando che $\Delta_i = u_i - u_{i-1}$Fico. 53.3-A)

$$\begin{array}{lll} F_{K,1} = f_{k,1} - f_{k,2} & = K_1 u_1 - K_2(u_2 - u_1) \\ F_{K,2} = f_{k,2} - f_{k,3} & = K_2(u_2 - u_1) - K_3(u_3 - u_2) \\ F_{K,3} = f_{k,3} & = K_3(u_3 - u_2) \\ \hline F_{C,1} = f_{c,1} - f_{c,2} & = c_1 \dot{u}_1 - c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \\ F_{C,2} = f_{c,2} - f_{c,3} & = c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2) \\ F_{C,3} = f_{c,3} & = c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2) \end{array} \tag{53.1}$$

dove $F_{K,i}$ e $F_{C,i}$ sono le forze interne nette a causa di rigidità e smorzamento applicato sui nodi. 2., uno sopra e l'altro sotto il nodo, Fig. 53.3-C)).

16 La rigidità della storia è somma delle rigidità laterali di tutte le colonne nella storia $K_i = \sum_{columns} \frac{12EI_c}{h^3}$.

17 Forze di stiffa: $F_{K,i} = f_{k,i} - f_{k,i+1}$.

18 Forza di taglio (alla fine del membro) $\mathbf{f}_i$ è correlato a spostamenti relativi del pavimento $\mathbf{f}_i = K_i \Delta_i = K_i(u_i - u_{i-1})$.

19 Applicando la seconda legge di movimento di Newton a ciascuno dei tre nodi, Fig. 53.4Possiamo riscrivere Eq. 53.1 as

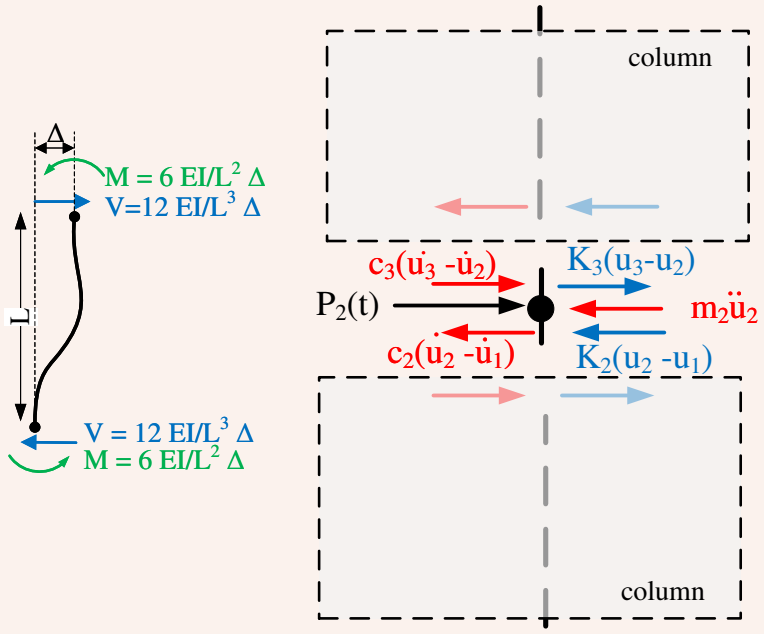


Figura 53.4: Schema corpo libero di un nodo

$$\begin{array}{llll} P_3(t) & -m_{33}\ddot{u}_3 & -c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2) & -K_3(u_3 - u_2) & = 0 \\ P_2(t) & -m_{22}\ddot{u}_2 & +c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2) - c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) & +K_3(u_3 - u_2) - K_2(u_2 - u_1) & = 0 \\ P_1(t) & -m_{11}\ddot{u}_1 & +c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - c_1\dot{u}_1 & +K_2(u_2 - u_1) - K_1 u_1 & = 0 \end{array}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

termini di riorganizzazione:

$$\begin{array}{lll} m_{11}\ddot{u}_1 & +(c_1+c_2)\dot{u}_1 - c_2\dot{u}_2 & +(k_1+k_2)u_1 - k_2u_2 & = P_1(t) \\ m_{22}\ddot{u}_2 & -c_2\dot{u}_1 + (c_2+c_3)\dot{u}_2 - c_3\dot{u}_3 & -k_2u_1 + (k_2+k_3)u_2 - k_3u_3 & = P_2(t) \\ m_{33}\ddot{u}_3 & -c_3\dot{u}_2 + c_3\dot{u}_3 & -K_3u_2 + K_3u_3 & = P_3(t) \end{array}$$

or

$$\mathbf{M}\{\ddot{u}\} + \mathbf{C}\dot{u} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P}(t)$$

dove

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 & 0 \\ -K_2 & K_2+K_3 & -K_3 \\ 0 & -K_3 & K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{Bmatrix}$$

53.2.2.1 Ex 53.1: Simulazione Monte Carlo di una risposta elastica lineare al carico laterale

Adattato da (Bucher, 2009).

Riesaminamo l'edificio in Fig. 53.3, ma estenderlo a quattro piani. E' sottoposto a quattro carichi statici F_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Le lastre del pavimento sono supposte essere rigide e le colonne hanno identico Lunghezza $H = 4$ m e differenti rigidità flessografiche EI_k, $k = 1...8$. Caricamenti e rigidità sono *variabili casuali*. I carichi sono distribuiti normalmente con un valore medio di 20 kN e una COV di 0,4, le rigidità vengono distribuite normalmente con il valore medio pari a 10 MNm^2 e un COV di 0.2. Tutte le variabili sono indipendenti in coppia. Vogliamo calcolare

- il valore medio e la deviazione standard, nonché il coefficiente di variazione dello spostamento orizzontale u della storia più bella,
- la probabilità p_F che u supera un valore di 0,1 m.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

L'analisi deve essere basata sul comportamento elastico lineare della struttura, escludendo gli effetti di gravità. La deflezione top story può essere calcolata aggiungendo i relativi spostamenti interstoriali 53.3

$$
\begin{aligned}
u_4 &= \frac{F_4 H^3}{12\left(EI_7 + EI_8\right)} \\
u_3 &= \frac{\left(F_3 + F_4\right) H^3}{12\left(EI_5 + EI_6\right)} \\
u_2 &= \frac{\left(F_2 + F_3 + F_4\right) H^3}{12\left(EI_3 + EI_4\right)} \\
u_1 &= \frac{\left(F_1 + F_2 + F_3 + F_4\right) H^3}{12\left(EI_1 + EI_2\right)} \\
u &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4
\end{aligned}
$$

A MATLAB®codice per questo esempio è elencato in §I.2.15 che produce $\mu_u = 0.0545$, $\sigma_u = 0.0128$, $COV = 0.2353$, e la probabilità di fallimento è ${}_pF == 7.6100e-04$

53.3 Formulazione dei problemi

53.3.1 Formulazione Variazione

20 In un continuum tridimensionale generale, l'equazione del movimento di un volume elementare Ω senza smorzamento è

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} \tag{53.2}$$

dove $\mathbf{m}$ è la matrice di densità di massa uguale a $\rho\mathbf{I}$e $\mathbf{b}$ è il vettore di forze del corpo.

21 L'operatore differenziale $\mathbf{L}$ (Eq. O.7) is

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

22 Per materiale elastico lineare

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_e \boldsymbol{\varepsilon}$$

e per materiale non lineare, le equazioni costitutive possono essere scritte come

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_i \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove $\mathbf{D}_i$ è la matrice di rigidità tangente .

23 considerando che l'equazione 53.2 descrive il movimento del corpo in un senso forte, una formulazione debole è ottenuta dal principio di lavoro virtuale complementare minimo (o Residuale ponderato / Gallo)

$$\int_\Omega \delta\mathbf{u}^T[\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} - \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}]\mathrm{d}\Omega = 0 \tag{53.3}$$

24 Applicare il teorema divergenza Gauss, Equazione R.4:

$$\int\int_A \phi \mathrm{div}\ \mathbf{q}\mathrm{d}A = \oint_s \phi\mathbf{q}^T\mathbf{n}\mathrm{d}s - \int\int_A (\nabla\phi)^T\mathbf{q}\mathrm{d}A$$

e ricordando che $\mathbf{Lu} = \boldsymbol{\varepsilon}$,

$$\int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega = -\int_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\mathrm{d}\Gamma$$

25 Così, Equazione 53.3 trasforma in

$$\int_\Omega [\delta\mathbf{u}^T(\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{b}) + \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}]\mathrm{d}\Omega - \int_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\mathbf{t}\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{53.4}$$

Finora non è stato fatto alcun presupposto per quanto riguarda il comportamento materiale.

26 Successivamente cercheremo la discorsitizzazione spaziale dell'equazione di lavoro virtuale (Equation 53.4). Dai fondamenti degli elementi finiti, abbiamo i seguenti rapporti:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \mathbf{N}\overline{\mathbf{u}}\\
\delta\mathbf{u}^T &= \delta\overline{\mathbf{u}}^T\mathbf{N}^T\\
\ddot{\mathbf{u}} &= \mathbf{N}\ddot{\overline{\mathbf{u}}}\\
\mathbf{B} &= \mathbf{L}\mathbf{N}\\
\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}\\
\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T &= \delta\overline{\mathbf{u}}^T\mathbf{B}^T\\
\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \mathbf{B}\dot{\overline{\mathbf{u}}}
\end{aligned}$$

27 Per problemi lineari $\boldsymbol{\sigma}_{t,n} = \mathbf{D}_e\mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}_{t,n}$, e con una corretta sostituzione, questo si tradurrebbe

$$\underbrace{\underbrace{\int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{m}\mathbf{N}\mathrm{d}\Omega\,\ddot{\overline{\mathbf{u}}}_{t,n}}_{\mathbf{M}_{tt}}}_{\mathbf{P}^{inertia}_{t,n}} + \underbrace{\underbrace{\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}_e\mathbf{B}\mathrm{d}\Omega\,\overline{\mathbf{u}}_{t,n}}_{\mathbf{K}}}_{\mathbf{P}^{int}_{t,n}} - \underbrace{\left(\int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{P}^{ext}_{t,n}\mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma \mathbf{N}^T\mathbf{t}_{t,n}\mathrm{d}\Gamma\right)}_{\mathbf{P}^{ext}_{t,n}} = 0$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

or $\mathbf{M}\ddot{\overline{\mathbf{u}}}_{t,n} + \mathbf{K}\overline{\mathbf{u}}_{t,n} = \mathbf{P}^{ext}_{t,n}$ Che rappresenta l'equazione lineare semi-discreta del movimento nell'integrazione implicita di tempo.

28 Nota somiglianza tra la matrice di massa e quella geometrica (Eq. 60.5)

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{m} \mathbf{N} d\Omega$$
$$\mathbf{k}^{(e)}_g = P^{(e)} \int_L \mathbf{N}_{,x} \mathbf{N}_{,x} dx$$

29 Nota anche l'assenza del coefficiente di smorzamento (che è un "trick' non-razionale numerico).

30 Se si assume un'umidità viscosa (vedi sotto) e si sostituisce $\overline{\mathbf{u}}$ by $\mathbf{u}$ noi otteniamo

$$\mathbf{M}_{tt} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{C}_{tt} \cdot \dot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{P}^{int}_t = \mathbf{P}^{ext}_t \tag{53.5}$$

dove $\mathbf{M}_{tt}$ e $\mathbf{C}_{tt}$ sono le matrici di massa e di smorzamento viscoso dell'idealizzazione strutturale; $\ddot{\mathbf{u}}_t$ è il vettore delle accelerazioni nodali, $\dot{\mathbf{u}}_t$ è il vettore delle velocità nodali, $\mathbf{P}^{int}_t$ è il vettore delle forze nodali interne o di richiamo statico risultante dal vettore degli spostamenti nodali $\mathbf{u}_t$, e $\mathbf{P}^{ext}_t$ è il vettore delle forze nodali applicate dovute al carico sismico.

53.3.2 Rappresentanza di massa

31 Ci sono due possibili rappresentazioni della matrice di massa: lumped e coerente.

Massa lumpata: Si presume che tutte le masse siano concentrate ai nodi finali, anche se non esattamente corrette, il vantaggio di questo modello è che avremo una matrice diagonale facilmente invertibile. Se il movimento assiale dell'elemento del fascio è incluso, la matrice di massa, con il vettore corrispondente spostamento, allora

$$\mathbf{m}_e = \rho \cdot A \cdot L_e \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si noti che abbiamo zero termini lungo la diagonale corrispondente al DOF rotazionale. Per includere il DOF rotazionale consideriamo un "?disco' di lunghezza dx, al coordinate x dal primo nodo. Il momento rotante dell'inerzia di questo "disco' su nodo il primo node è

$$dm_r = \rho \left(\frac{I}{A} + x^2 \right) dx$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove ρ è la densità di massa (massa per lunghezza unitaria) dell'elemento, e A è l'area della sezione trasversale del fascio, perché l'inerzia rotatoria di mezzo elemento viene inumidita ad ogni nodo, così avremo

$$m_{ri} = m_{rj} = \int_0^{L/2} dm_r = \frac{\rho L}{2}\left(\frac{I}{A} + \frac{L^2}{12}\right) = \frac{\rho L}{2}\left(r_y^2 + \frac{L^2}{12}\right)$$

e la seguente matrice di massa rotazionale deve essere aggiunta a quella traduttiva

$$m_r = \mathbf{m}_e = \rho \cdot A \cdot L_e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{ri} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{rj} \end{bmatrix} = \frac{\rho L}{2}\left(r_y^2 + \frac{L^2}{12}\right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Massa costante: utilizza una matrice di massa kinematically equivalente dove le forze inerziali sono associate a tutti i gradi di libertà. Dati

$$\mathbf{m}_e = \int_0^{L_e} \rho \cdot A(x) \cdot \mathbf{N}_d(x)^T \cdot \mathbf{N}_d(x) \mathrm{d}x$$

sostituire le funzioni di forma per il composto del fascio (Eq. 49.11) otteniamo

$$\mathbf{m}_e = \frac{\rho \cdot A \cdot L_e}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22 \cdot L_e & 0 & 54 & -13 \cdot L_e \\ 0 & 22 \cdot L_e & 4 \cdot L_e^2 & 0 & 13 \cdot L_e & -3 \cdot L_e^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13 \cdot L_e & 0 & 156 & -22 \cdot L_e \\ 0 & -13 \cdot L_e & -3 \cdot L_e^2 & 0 & -22 \cdot L_e & 4 \cdot L_e^2 \end{bmatrix}$$

La matrice di massa viene poi trasformata in riferimento globale $\mathbf{M}_e = \mathbf{\Gamma}_e^T \cdot \mathbf{m}_e \cdot \mathbf{\Gamma}_e$

53.3.3 Smorzamento

32 Tutte le strutture sono smorzate, (2nd la legge della termodinamica) altrimenti le loro oscillazioni non si fermeranno mai. L'ampliamento può essere visto come una forza attrito che dissipa l'energia e può assumere forme diverse.

33 La forma più comunemente usata di smorzamento è la cosiddetta viscosa o damping Rayleigh che, quando inserita nell'equazione del movimento, ha la seguente forma

$$\mathbf{M}_{tt} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n} + \mathbf{C}_{tt} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n} + \mathbf{P}_{t,n}^{int} = \mathbf{P}_{t,n}^{ext}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove, $\ddot{\mathbf{u}}_{t,n}$, $\dot{\mathbf{u}}_{t,n}$ e $\mathbf{u}_{t,n}$ sono i vettori nodali di accelerazione, velocità e spostamento rispettivamente al passo attuale; $\mathbf{P}^{int}_{t,n}$ è il vettore di forza nodale o di ripristino statico al momento attuale.

34 In un'analisi non lineare, questo è considerato da alcuni modelli costitutivi che includono l'umidità dell'isterisi, come il modello di Kent e Park modificato per calcestruzzo. Pertanto, occorre esercitare grande attenzione nell'aggiunta di smorzamento ad un'analisi non lineare.

35 In analisi elastiche lineari, la forma più comune di smorzamento è il cosiddetto smorzamento viscoso (più noto come Rayleigh smorzamento). In questa semplificazione, presumiamo la presenza di un ammortizzatore viscoso (che per definizione è sensibile alla velocità) tra la struttura e un punto fisso esterno (massa proporzionale), e un altro insieme di ammorbidi all'interno della struttura che collega tutti i gradi di libertà (stiffness ammortizzatore proporzionale), Fig. 53.5. Viscoso smorzamento: $\mathbf{C}_{tt} = a_m \cdot \mathbf{M}_{tt} + b_k \cdot \mathbf{K}_{tt}$

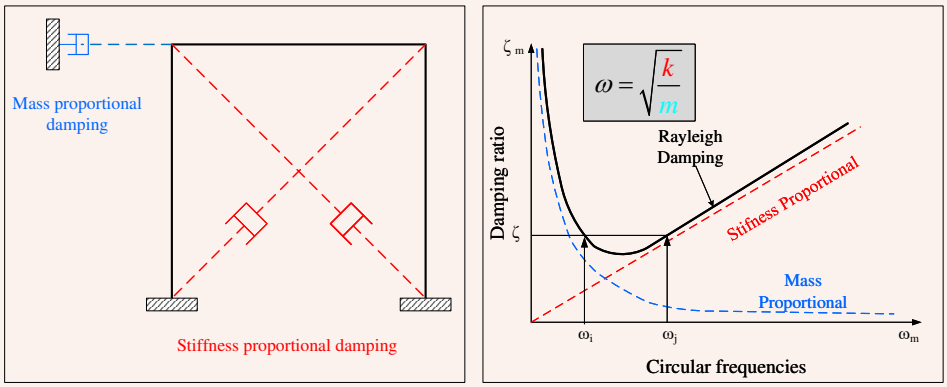


Figura 53.5: Massa e rigidità di smorzamento proporzionale

dove, a_m e b_k sono coefficienti che pre-multiply i termini di massa e rigidità rispettivamente. Coefficienti a_m e b_k sono calcolati in base a due frequenze circolari (ω_1 e ω_2, radians/sec.) da smorzare ξ_1 e ξ_2 rispettivamente. Dove ω_m e ξ_m sono la frequenza circolare e il rapporto di smorzamento del m^{th} Modalità. Può essere facilmente mostrato che

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_i} & \omega_i \\ \frac{1}{\omega_j} & \omega_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_m \\ b_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \zeta_i \\ \zeta_j \end{Bmatrix}$$

36 Se si assume lo stesso rapporto di smorzamento ζ per entrambe le modalità (supporsi pratico ragionevole), poi

$$a_m = \zeta \frac{2\omega_i \cdot \omega_j}{\omega_i + \omega_j}; \quad b_k = \zeta \frac{2}{\omega_i + \omega_j}$$

37 Occorre sottolineare ancora una volta che i diversi coefficienti di smorzamento devono essere utilizzati in analisi lineari e non lineari (specialmente se il modello costitutivo non

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

lineare rappresenta l'umidità dell'isterisi. Inoltre, se la smorzatura di Rayleigh viene utilizzata in un'analisi non lineare, allora i coefficienti a_m e b_k può essere aggiornato ad ogni incremento di tempo per riflettere il cambiamento nella matrice tangenziale rigidità $\mathbf{K}_t$.

[38] In pratica possiamo ottenere coefficienti di smorzamento eccitando una struttura con shaker anche se solo per la gamma elastica.

53.3.3.1 Ex 53.2: Calibrazione dei coefficienti di smorzamento Rayleigh per un edificio

È stato analizzato un edificio in cemento armato a tre piani e il prime due frequenze naturali identificate come $f_1 = 1.20$ Hz e $f_2 = 3.60$ Hz (i.e. $\omega_1 = 7.540$ rad/s e $\omega_2 = 22.619$ rad/s). Un rapporto di smorzamento target $\zeta = 5\%$ è da assegnare a entrambe le modalità utilizzando il dispositivo di smorzamento Rayleigh $\mathbf{C} = a_m\mathbf{M} + b_k\mathbf{K}$. Determinazione: a) i coefficienti a_m e b_k; (b) il implied rapporto di smorzamento nella terza modalità ($f_3 = 6.00$ Hz, $\omega_3 = 37.699$ rad/s); (c) l'interpretazione ingegneristica.

Soluzione.

(a) Coefficienti di Rayleigh.

Con l'umidità uguale in entrambe le modalità di destinazione, le formule semplificate danno:

$$a_m = \zeta\frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1+\omega_2} = 0.05\times\frac{2\times 7.540\times 22.619}{7.540+22.619} = 0.05\times\frac{341.1}{30.159} = 0.565\ \text{s}^{-1}$$

$$b_k = \zeta\frac{2}{\omega_1+\omega_2} = 0.05\times\frac{2}{30.159} = 3.32\times 10^{-3}\ \text{s}$$

(b) Sumidimento implicito in modalità 3.

Per qualsiasi modalità n con frequenza ω_n, il modello Rayleigh assegna un rapporto di smorzamento:

$$\zeta_n = \frac{1}{2}\left(\frac{a_m}{\omega_n} + b_k\omega_n\right)$$

Per la modalità 3:

$$\zeta_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{0.565}{37.699} + 3.32\times 10^{-3}\times 37.699\right) = \frac{1}{2}(0.01499 + 0.12516) = 7.0\%$$

e) interpretazione dell'ingegneria.

Tre osservazioni valgono la pena di notare.

1. Modalità 1 e 2 sono smorzati esattamente al bersaglio 5% per costruzione.
2. Modalità 3, mentire *sopra* la banda di calibrazione, è sovra-amped a 7%: il termine di rigidità e proporzionalità $b_k\omega_n$ cresce linearmente con frequenza e domina per alte modalità. In un elemento finito modello con molte modalità, la frequenza più alta (lunghezza di onde corte) i modi possono essere assegnati artificialmente grandi rapporti di smorzamento — un funzione intenzionale utilizzata per sopprimere la risposta ad alta frequenza spuriosa, ma una potenziale fonte di errore se queste modalità portano energia reale.
3. Il termine proporzionale di massa a_m/ω_n decadi con frequenza e sarebbe modalità over-damp *di seguito* la banda di calibrazione (ad es. molto bene. modalità di doratura o scorrimento a bassa frequenza in strutture isolate base), che deve essere gestito con cura.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Queste caratteristiche spiegano perché la scelta delle frequenze di calibrazione (ω_i, ω_j) è una decisione di modellazione, non puramente numerica: dovrebbero collegare la gamma di frequenza in cui la dinamica della struttura la risposta dovrebbe essere significativa.

53.3.3.2 Ex 53.3: Baseline analitica: vibrazione libera dalle condizioni iniziali generali

✳ Prima di passare alla regolazione numerica del tempo, è istruttivo avere un esatto risultato a forma chiusa contro quale integratori possono essere verificati. Considera un sistema SDOF umido con:

$$m = 2\,000 \text{ kg}, \quad k = 800\,000 \text{ N/m}, \quad \zeta = 2\%$$

rilasciato dalle condizioni iniziali $u_0 = 25$ mm e $v_0 = 80$ mm/s. Determinazione: a) le proprietà del sistema; (b) l'esatta libertà di movimento risposta $u(t)$; (c) l'ampiezza e la fase; (d) la risposta $t = 0.20$ s e il tempo del primo passaggio zero.

Soluzione.

(a) Proprietà del sistema.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{800\,000}{2\,000}} = 20.00 \text{ rad/s}, \qquad T_n = \frac{2\pi}{20} = 0.3142 \text{ s}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 20\sqrt{1-0.0004} = 19.996 \text{ rad/s}, \qquad T_d = 0.3143 \text{ s}$$

Per $\zeta = 2\%$ la differenza tra ω_d e ω_n è solo 0,02%, confermando che le strutture leggermente smorzate oscillano essenzialmente il non smorfiato frequenza naturale.

(b) Risposta esatta.

La soluzione di vibrazione gratuita sotto-ampli $u(0) = u_0$ e $\dot{u}(0) = v_0$ is:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[u_0\cos(\omega_d t) + \frac{v_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right]$$

Substituting numbers ($\zeta\omega_n = 0.02 \times 20 = 0.40 \text{ s}^{-1}$, $\omega_d \approx 19.996$):

$$\frac{v_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d} = \frac{80 + 0.40 \times 25}{19.996} = \frac{90}{19.996} = 4.501 \text{ mm}$$

$$u(t) = e^{-0.40t}\,[25\cos(19.996\,t) + 4.501\sin(19.996\,t)] \quad [\text{mm}]$$

(c) Ampiezza e fase.

In amplitude-phase form $u(t) = \rho\, e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi)$:

$$\rho = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{v_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d}\right)^2} = \sqrt{25^2 + 4.501^2} = \sqrt{625 + 20.26} = 25.40 \text{ mm}$$

$$\tan\phi = \frac{v_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d u_0} = \frac{4.501}{25} = 0.1800 \quad \Rightarrow \quad \phi = 10.2^\circ$$

d) Risposta $t = 0.20$ s e prima traversata zero.

$$u(0.20) = e^{-0.40\times0.20}\,[25\cos(19.996 \times 0.20) + 4.501\sin(19.996 \times 0.20)]$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

$$= e^{-0.08}\,[25\cos(3.9992) + 4.501\sin(3.9992)]$$

$\cos(3.9992\text{ rad}) = -0.6542$, $\sin(3.9992\text{ rad}) = -0.7563$:

$$u(0.20) = 0.9231\,[25\times(-0.6542) + 4.501\times(-0.7563)] = 0.9231\,[-16.35 - 3.404] = -18.24\text{ mm}$$

Il primo zero che attraversa dopo $t = 0$ si verifica quando $25\cos(\omega_d t) + 4.501\sin(\omega_d t) = 0$, cioè. $\tan(\omega_d t) = -25/4.501 = -5.554$, da cui $\omega_d t = \pi - \arctan(5.554) = \pi - 1.391 = 1.749$ rad:

$$t_0 = \frac{1.749}{19.996} = 0.0875\text{ s}$$

- Commenta. Questo risultato a forma chiusa funge da *verifica benchmark* per qualsiasi Integratore numerico applicato allo stesso problema: per $\Delta t \to 0$, Le soluzioni Euler, central-difference e Newmark devono convergere a $u(0.20) = -18.24$ mm. Comparazione dell'output numerico contro questo valore in un unico punto di controllo è controllo semplice ma potente della correttezza di implementazione.

53.3.4 Tecnica numerica: metodi Euler

39 Il metodo di Euler è un metodo numerico di primo ordine per risolvere i problemi del valore iniziale (cioè dinamica), che utilizza il pendio della linea tangente al punto attuale per stimare il valore della soluzione al punto successivo. Questo metodo utilizza una dimensione di passo fissa e richiede solo il valore iniziale della soluzione e l'equazione differenziale stessa per calcolare la soluzione ad ogni punto. Il principale vantaggio del metodo di Euler è la sua semplicità e facilità d'implementazione, ma può soffrire di problemi di bassa precisione e stabilità per alcuni tipi di equazioni differenziali.

40 Considerando i derivati più alti e superiori come la velocità, l'accelerazione, ci muoviamo in quello che è noto come *Runge-Kutta*, dove la versione più bassa di ordine di Runge-Kutta è il Metodo Euler.

41 In §59.1.1 useremo un'altra tecnica numerica, il metodo di Newton per trovare una soluzione a un'equazione differenziale.

42 Nel nostro problema, alla fine, cerchiamo di risolvere Eq. 53.5, ma prima di affrontare il problema dinamico (§53.4), una breve revisione del metodo di Euler è garantito.

43 Il metodo Euler è una procedura numerica per risolvere le equazioni differenziali ordinarie dei valori iniziali (come nelle dinamiche strutturali). t_n, come si ottiene la soluzione in tempo t_{n+1}Fico. 53.6 illustra i due metodi.

44 Nota che abbiamo fatto riferimento *Metodo di Newton per l'analisi non lineare, e Euler per la dinamica*.

45 Nel nostro caso, discostiamo lo spazio dall'elemento finito e discretizziamo il tempo dalla differenza finita.

46 Come con il metodo di Newton (Eq. 59.1), iniziamo con la serie di Taylor.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Avanti Euler/Explicit

$$y(t_n + h) \equiv y_{n+1} = y(t_n) + h \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_n} + O(h^2) \Rightarrow y^{?}_{n+1} \simeq y^{\checkmark}_n + h f(y^{\checkmark}_n, t_n) \tag{53.6}$$

where $h = \Delta t$, and $f(y_n, t_n) = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_n}$ Questo è anche indicato come esplicita esplicito da y_{n+1} è dato esplicitamente in termini di quantità note come y_n e $f(y_n, t_n)$ e non c'è alcuna equazione da risolvere. I metodi espliciti sono facili da implementare ma sono condizionalmente sable (cioè. h Questo è simile al metodo approssimativo passo per passo utilizzato in precedenza per problemi geometrici non lineari.

Indietro Euler/Implicita inizia con la seguente espansione della serie Taylor retromarcia

$$y(t_n) \equiv y_n = y(t_{n+1} - h) = y(t_{n+1}) - h \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_{n+1}} + O(h^2) \Rightarrow y^{?}_{n+1} \simeq y^{\checkmark}_n + h f(y^{?}_{n+1}, t_{n+1})$$

È un metodo implicito da quando $f(y_{n+1}, t_{n+1})$ Non è conosciuto e un'equazione (solitamente) non lineare deve essere risolta in ogni momento (forse dal metodo Newton-Raphson). Evidentemente, questo è più computazionalmente costoso del metodo esplicito, tuttavia il metodo è incondizionabilmente stabile.

[47] Si nota che il metodo implicito (a costo di una soluzione Newton-Raphson) fornisce sempre una soluzione "esatta"; nel contesto delle dinamiche strutturali, possiamo dire che l'equilibrio è soddisfatto.

53.3.4.1 Ex 53.4: Metodo di Euler

Cerchiamo di risolvere la seguente equazione differenziale ordinario del primo ordine:

$$\frac{dy}{dt} = 1 + (t - y(t))^2; \qquad 2 \le t \le 3; \qquad y(0) = 1; n = 0$$

- Avanti Euler con $h = 0.1$

$$y_{n+1} = y_n + h f(y_n, t_n) \Rightarrow y_1 = 1 + 0.1 \left[1 + (2. - 1.)^2\right] = 1.2$$

- Il ritorno di Euler darà

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h f(y_{n+1}, t_{n+1}) \\ \Rightarrow y_1 &= 1 + 0.1 \left[1 + (2.1 - y_1)^2\right] \\ \Rightarrow 0 &= 0.1 y_1^2 - 1.42 y_1 + 1.541 \\ \Rightarrow y_1 &= 1.1839 \end{aligned}$$

  In questo caso abbiamo avuto equazione quadratica per risolvere, tuttavia in generale potremmo dover usare il metodo di Newton per risolvere y_n.
- Nel contesto dell'analisi strutturale non lineare, ciò implica che stiamo controllando l'equilibrio $n = 1$, che non è il caso nel metodo esplicito.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

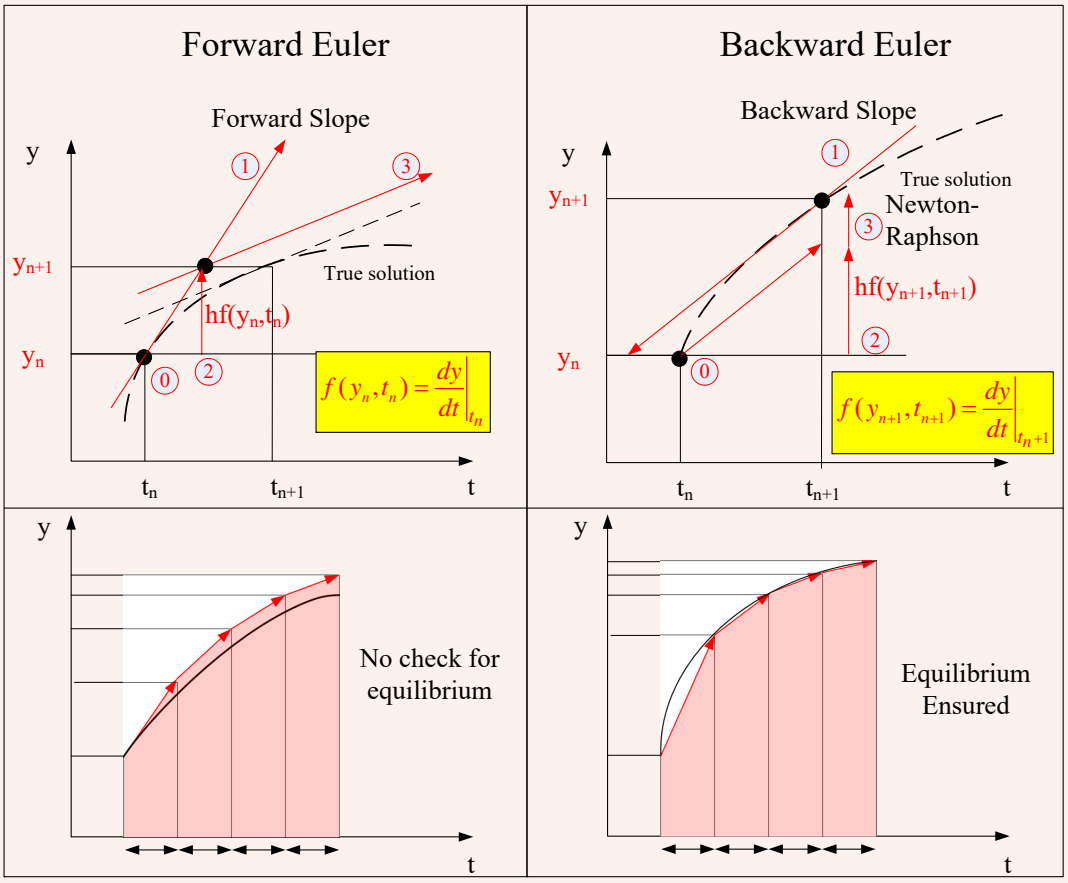


Figura 53.6: Euler avanti vs metodi arretrati Euler

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

53.4 Dischio di tempo

48 Matematicamente, Equazione 53.5 rappresenta un sistema di equazioni differenziali lineari del secondo ordine, e in linea di principio la soluzione delle equazione può essere ottenuta mediante procedure standard per la soluzione di equità differenziale con coefficienti costanti.

49 Tuttavia, le procedure proposte per la soluzione di sistemi generali di equazioni differenziali possono diventare molto costose se l'ordine delle matrici è grande - a meno che non si prenda un vantaggio specifico delle caratteristiche speciali del coefficiente matrici **M**, **C**e **K**.

50 Nell'analisi pratica degli elementi finiti, siamo quindi principalmente interessati a alcuni metodi efficaci, vale a dire integrazione diretta e sovrapposizione delle modalità. Queste due tecniche sono strettamente correlate, e la scelta di un metodo o dell'altro è determinata solo dalla loro efficacia numerica.

51 Nel metodo di integrazione diretta, Equazione 53.5 è integrato con una procedura numerica passo dopo passo; il termine "direct" significa che prima dell'integrazione numerica, non viene effettuata alcuna trasformazione delle equazioni in forma diversa.

53.4.1 Implicita

53.4.1.1 Metodo di Newmark

53.4.1.1.1 Ritiro 52 Il metodo di Newmark è una generalizzazione del metodo di Euler per le equazioni differenziali di secondo ordine (equazione del movimento)

53 A partire dalla serie di Taylor

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix}^{n-1} + \Delta t \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{u}} \end{pmatrix}^{n-1} && \text{Forward Euler} \\
\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix}^{n-1} + \Delta t \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{u}} \end{pmatrix}^{n} && \text{Backward Euler}
\end{aligned}$$

54 Il metodo di Newmark differisce dal metodo di Euler sostituzione di derivati dell'ordine superiore con espressioni più semplici (e quindi una minore precisione) per l'efficienza.

55 Ancora una volta, consideriamo le espansioni della serie Taylor dei termini di spostamento nodale e vettori velocità sui valori alla precedente $n-1$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{t,n} &\approx \mathbf{u}_{t,n-1} + \frac{\partial \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t^2}\frac{\Delta t^2}{2!} + \frac{\partial^3 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t^3}\frac{\Delta t^3}{3!} + \cdots \\
\dot{\mathbf{u}}_{t,n} &\approx \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t^2}\Delta t + \frac{\partial^3 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t^3}\frac{\Delta t^2}{2!} + \cdots
\end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Queste due equazioni rappresentano i vettori approssimativi di spostamento e velocità ($\mathbf{u}_{t,n}$ e $\dot{\mathbf{u}}_{t,n}$) eccetto i termini di ordine elevato della serie Taylor. ultimi termini delle due equazioni sopra riportate come segue:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t^3}\frac{\Delta t^3}{3!} &\approx \frac{\frac{\partial^2 \mathbf{u}_{t,n}}{\partial^2 t} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial^2 t}}{\Delta t}\frac{\Delta t^3}{3!} \approx (\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} - \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1})\frac{\Delta t^2}{3!} \\
&\approx \beta(\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} - \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1})\,\Delta t^2 \\
\frac{\partial^3 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t^3}\frac{\Delta t^2}{2!} &\approx \frac{\frac{\partial^2 \mathbf{u}_{t,n}}{\partial^2 t} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial^2 t}}{\Delta t}\frac{\Delta t^2}{2!} \approx (\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} - \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1})\frac{\Delta t}{2!} \\
&\approx \gamma(\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} - \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1})\,\Delta t
\end{aligned}$$

dove β e γ sono parametri che raffigurano approssimazioni numeriche.

[56] Sostituire

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{t,n} &= \mathbf{u}_{t,n-1} + \Delta t \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \Delta t^2 \cdot \beta \cdot (\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} - \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1}) \\
\dot{\mathbf{u}}_{t,n} &= \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \Delta t \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \Delta t \cdot \gamma \cdot (\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} - \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1})
\end{aligned}$$

[57] Quindi, otteniamo il Newmark β metodo, che consiste delle seguenti equazioni (differenza di marcia):

$$\mathbf{P}^{ext}_{t,n} = \mathbf{M}_{tt} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n} + \mathbf{C}_{tt} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n} + \mathbf{P}^{int}_{t,n} \tag{53.7}$$

$$\mathbf{u}_{t,n} = \mathbf{u}_{t,n-1} + \Delta t \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \frac{\Delta t^2}{2}\left[(1-2\beta)\ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + 2\beta \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n}\right] \tag{53.8}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t,n} = \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \Delta t\left[(1-\gamma)\ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \gamma \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n}\right] \tag{53.9}$$

dove la prima equazione è l'equazione dell'equilibrio espressa in tempo n, e le altre due sono formule di differenza finite che descrivono l'evoluzione della soluzione di approssimazione (Nota abbiamo tre equazioni e tre sconosciuti: $\mathbf{u}_{t,n}$, $\dot{\mathbf{u}}_{t,n}$ e $\ddot{\mathbf{u}}_{t,n}$.

[58] β e γ sono parametri che determinano le caratteristiche di stabilità e precisione. Condizioni di stabilità per il Newmark β metodo seguente, Tabella 53.1:

- unconditionally stable if $\gamma \geq \frac{1}{2}$ and $\beta \geq \frac{\gamma}{2}$
- condizionatamente stabile se $\gamma \geq \frac{1}{2}$ e $\beta < \frac{\gamma}{2}$, con il seguente limite di stabilità: $\frac{\Delta t}{T} \leq \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\gamma - 2\beta}} = 0.551$

53.4.1.1.2 Nuovo β metodo implicito

[59] Il metodo implicito di Newmark inizia con Eqs. 53.7, 53.8 e 53.9 può essere riscritto come:

$$\mathbf{P}^{ext}_{t,n} = \mathbf{M}_{tt} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n} + \mathbf{C}_{tt} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n} + \mathbf{P}^{int}_{t,n} \tag{53.10}$$

$$\mathbf{u}_{t,n} = \tilde{\mathbf{u}}_{t,n} + \Delta t^2 \cdot \beta \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n} \tag{53.11}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t,n} = \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n} + \Delta t \cdot \gamma \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n} \tag{53.12}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 53.1: Stato di stabilità per diversi metodi

Metodo	Tipo di	β	γ	Stato di stabilità	Ordine di accuratezza
Accelerazione costante	Implicita	$1/4$	$1/2$	Incondizionato	2
Accelerazione lineare	Implicita	$1/3!=1/6$	$1/2!=1/2$	$\Delta t \leq 2\sqrt{3}/\omega$	2
Differenza centrale	Esplicito	0	$1/2$	$\Delta t \leq 2/\omega$	2

dove le quantità conosciute al momento $n-1$ avere $\tilde{(.)}$ con

$$\tilde{\mathbf{u}}_{t,n} = \mathbf{u}_{t,n-1} + \Delta t \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \frac{\Delta t^2}{2}(1-2\beta)\ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1}$$
$$\tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n} = \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \Delta t(1-\gamma)\ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1}$$

60 Eq. 53.11 dà $\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} = \frac{\mathbf{u}_{t,n}-\tilde{\mathbf{u}}_{t,n}}{\Delta t^2 \cdot \beta}$;

61 Sostituito in Eq. 53.12 noi possiamo risolvere per $\dot{\mathbf{u}}_{t,n} = \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n} + \frac{\gamma}{\Delta t \cdot \beta}(\mathbf{u}_{t,n} - \tilde{\mathbf{u}}_{t,n})$. Infine, sostituire in Eq. 53.10 otteniamo:

$$\underbrace{\frac{1}{\Delta t^2 \cdot \beta}\mathbf{M}_{tt} \cdot \mathbf{u}_{t,n} + \frac{\gamma}{\Delta t \cdot \beta}\mathbf{C}_{tt} \cdot \mathbf{u}_{t,n} + \mathbf{P}^{int}_{t,n}}_{?}$$
$$= \underbrace{\mathbf{P}^{ext}_{t,n} + \frac{1}{\Delta t^2 \cdot \beta}\mathbf{M}_{tt} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{t,n} + \frac{\gamma}{\Delta t \cdot \beta}\mathbf{C}_{tt} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{t,n} - \mathbf{C}_{tt} \cdot \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n}}_{\checkmark}$$

62 Se le soluzioni di prova in un dato passo k sono $\mathbf{u}^k_{t,n}$e $\mathbf{P}^{int,k}_{t,n}$Allora non soddisfa le equazioni del moto. Quindi, possiamo scrivere per questo particolare passo con vettore di forza residua $\mathbf{P}^{R,k}_{t,n}$:

$$\mathbf{P}^{R,k}_{t,n} = \mathbf{P}^{ext}_{t,n} + \overline{\mathbf{M}}_{tt}\left(\tilde{\mathbf{u}}_{t,n} - \mathbf{u}^k_{t,n}\right) - \mathbf{C}_{tt} \cdot \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n} - \mathbf{P}^{int,k}_{t,n}$$

where, $\overline{\mathbf{M}}_{tt} = \frac{\mathbf{M}_{tt}+\Delta t \cdot \gamma \cdot \mathbf{C}}{\Delta t^2 \cdot \beta}$

63 Utilizzando il metodo iterativo di rigidità iniziale, possiamo risolvere per $\Delta\mathbf{u}^k_{t,n}$ da $\mathbf{P}^{R,k}_{t,n} = \mathbf{K}_{eff} \cdot \Delta\mathbf{u}^k_{t,n}$dove, $\mathbf{K}_{eff}$ è la matrice di rigidità efficace, e $\Delta\mathbf{u}^k_{t,n} = \mathbf{u}_{t,n} - \mathbf{u}^k_{t,n}$.

64 In sezione elastica, $\mathbf{P}^{int}_{t,n} = \mathbf{K}_{tt} \cdot \mathbf{u}_{t,n}$; Sostituire possiamo risolvere per $\mathbf{u}_{t,n}$:

$$\mathbf{K}_{eff} \cdot \mathbf{u}_{t,n} = \mathbf{P}^{ext}_{t,n} + \overline{\mathbf{M}}_{tt} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{t,n} - \mathbf{C}_{tt} \cdot \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

where, $\mathbf{K}_{eff} = \overline{\mathbf{M}}_{tt} + \mathbf{K}_{tt}$ (lumped or consistent mass matrix).

65 Infine, risolviamo per $\delta\mathbf{u}^k_{t,n}$ e il vettore di spostamento aggiornato $\mathbf{u}^{k+1}_{t,n}$ al passo successivo iterazione $k+1$:

$$\delta\mathbf{u}^k_{t,n} = \left[\mathbf{K}_{eff}\right]^{-1} \cdot \mathbf{P}^{R,k}_{t,n}; \quad \mathbf{u}^{k+1}_{t,n} = \mathbf{u}^k_{t,n} + \delta\mathbf{u}^k_{t,n}$$

Nota deve invertire la matrice di massa solo per una matrice coerente.

66 Nota analogia con analisi non lineare dove $\delta\mathbf{u}$ è uguale alla rigidità tangente matrice volte la forza residua.

53.4.1.2 Metodo Hilber-hughes-taylor

67 Un grosso inconveniente di Newmark β il metodo è la tendenza a persistere nel rumore ad alta frequenza nella soluzione; d'altra parte, quando si aggiunge l'umidità lineare o viscosità artificiale tramite il parametro γ, l'accuratezza è notevolmente degradata.

68 Questo è affrontato dal metodo Hilber-Hughes-Taylor (HHT) (noto anche come α metodo), che migliorerà la dissipazione numerica per alta frequenza senza degradare l'accuratezza tanto

69 L'equazione del movimento nel metodo HHT è scritta a passo di tempo corrente n (differenza in avanti) as:

$$\underbrace{\mathbf{M}_{tt} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n}}_{\mathbf{P}^{inertia}_{t,n}} + \mathbf{P}^{int}_{t,n} = \mathbf{P}^{ext}_{t,n}$$

Cercando una soluzione approssimativa di questa equazione per differenza di un passo, scriviamo,

$$\mathbf{M}_{tt} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n} + (1+\alpha)\mathbf{P}^{int}_{t,n} - \alpha \cdot \mathbf{P}^{int}_{t,n-1} = (1+\alpha)\mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \alpha\mathbf{P}^{ext}_{t,n-1}$$

Si noti che il metodo HHT presenta $\alpha(\mathbf{P}^{int}_{t,n} - \mathbf{P}^{int}_{t,n-1})$ che è simile a rigidità damping proporzionale (indeed è comunemente detto che α Se l'equazione sopra viene espansa, si ottiene l'effetto di smorzamento introdotto e la possibile non linearità materiale introdotta, si ottengono:

$$(1+\alpha)\mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \alpha\mathbf{P}^{ext}_{t,n-1} = \mathbf{M}_{tt} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n} + (1+\alpha)\mathbf{C}_{tt} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n} - \alpha \cdot \mathbf{C}_{tt} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + (1+\alpha)\mathbf{P}^{int}_{t,n} - \alpha \cdot \mathbf{P}^{int}_{t,n-1}$$

If $-1/3 \leq \alpha \leq 0$, $\beta = (1-\alpha)^2/4$e $\gamma = (1-2\alpha)/2$, poi il α metodo è incondizionatamente stabile e ha una precisione di secondo ordine.

70 Supponendo di aver ottenuto la risposta al passo temporale precedente $n-1$, ossia $\mathbf{u}_{t,n-1}$, $\dot{\mathbf{u}}_{t,n-1}$ e $\ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1}$, che soddisfano l'equazione del moto, si cerca ora di determinare iterativamente la soluzione al passo temporale corrente n.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

71 Prima di tutto, dobbiamo determinare la forza esterna efficace e la rigidità effettiva.

$$\underbrace{\frac{1}{\Delta t^2 \cdot \beta}\mathbf{M}_{tt} \cdot \mathbf{u}_{t,n} + \frac{\gamma}{\Delta t \cdot \beta}(1+\alpha)\mathbf{C}_{tt} \cdot \mathbf{u}_{t,n} + (1+\alpha)\mathbf{P}^{int}_{t,n}}_{?}$$

$$= \underbrace{(1+\alpha)\mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \alpha \cdot \mathbf{P}^{ext}_{t,n-1} + \frac{1}{\Delta t^2 \cdot \beta}\mathbf{M}_{tt} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{t,n} + \frac{\gamma}{\Delta t \cdot \beta}(1+\alpha)\mathbf{C}_{tt} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{t,n}}_{\checkmark}$$

$$\underbrace{-(1+\alpha)\mathbf{C}_{tt} \cdot \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n} + \alpha \cdot \mathbf{C}_{tt} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{n-1} + \alpha \cdot \mathbf{P}^{int}_{t,n}}_{\checkmark}$$

72 Il soluzioni di prova in iterazione k sono $\mathbf{u}^k_{t,n}$e $\mathbf{P}^{int,k}_{t,n}$, non necessariamente soddisfa le equazioni del movimento. Quindi, possiamo scrivere per questo particolare passo:

$$\mathbf{P}^{R,k}_{t,n} = (1+\alpha)\mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \alpha \cdot \mathbf{P}^{ext}_{t,n-1} + \overline{\mathbf{M}}_{tt}\left(\tilde{\mathbf{u}}_{t,n} - \mathbf{u}^k_{t,n}\right) - (1+\alpha)\mathbf{C}_{tt} \cdot \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n} + \alpha \cdot \mathbf{C}_{tt} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} - (1+\alpha)\mathbf{P}^{int,k}_{t,n} + \alpha \cdot \mathbf{P}^{int}_{t,n-1}$$

where, $\overline{\mathbf{M}}_{tt} = \frac{\mathbf{M}_{tt} + \Delta t \cdot \gamma(1+\alpha)\mathbf{C}_{tt}}{\Delta t^2 \cdot \beta}$ and $\mathbf{P}^{R,k}_{t,n}$ is the residual force vector.

73 Utilizzando il metodo iterativo di rigidità iniziale, possiamo risolvere per $\Delta\mathbf{u}^k_{t,n}$ da $\mathbf{P}^{R,k}_{t,n} = \mathbf{K}_{eff} \cdot \Delta\mathbf{u}^k_{t,n}$ where, $\mathbf{K}_{eff}$ is the effective stiffness matrix, and $\Delta\mathbf{u}^k_{t,n} = \mathbf{u}_{t,n} - \mathbf{u}^k_{t,n}$

74 Nel campo elastico possiamo esprimere $\mathbf{P}^{int}_{t,n}$ per calcolare la matrice di rigidezza efficace mediante la matrice di rigidezza iniziale $\mathbf{K}_{tt}$ come: $\mathbf{P}^{int}_{t,n} = \mathbf{K}_{tt} \cdot \mathbf{u}_{t,n}$.

75 Substituting we solve for $\mathbf{u}_{t,n}$:

$$\mathbf{K}_{eff} \cdot \mathbf{u}_{t,n} = (1+\alpha)\mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \alpha \cdot \mathbf{P}^{ext}_{t,n-1} + \overline{\mathbf{M}}_{tt} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{t,n} - (1+\alpha) \cdot \mathbf{C}_{tt} \cdot \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n} + \alpha \cdot \mathbf{C}_{tt} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \alpha \cdot \mathbf{P}^{int}_{t,n-1}$$

where, $\mathbf{K}_{eff} = \overline{\mathbf{M}}_{tt} + (1+\alpha)\mathbf{K}_{tt}$

76 Infine, risolviamo per $\delta\mathbf{u}^k_{t,n}$ e il vettore di spostamento aggiornato $\mathbf{u}^{k+1}_{t,n}$ al prossimo passo di iterazione $k+1$:

$$\delta\mathbf{u}^k_{t,n} = \left[\mathbf{K}_{eff}\right]^{-1} \cdot \mathbf{P}^{R,k}_{t,n};\ \mathbf{u}^{k+1}_{t,n} = \mathbf{u}^k_{t,n} + \delta\mathbf{u}^k_{t,n}$$

77 Final Remarks:

- α introduce un smorzamento che cresce con il rapporto di incremento del tempo al periodo di vibrazione di un nodo.
- Negative values of α cause damping

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

- If $\alpha = 0$, non abbiamo smorzamento artificiale (preimpostazione energetica) ed è esattamente l'accelerazione costante (regola trapezoidale) - Newmark β metodo se $\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$.
- Valore minimo $\alpha = -1/3$ che fornisce il massimo smorzamento artificiale. Questo si traduce in un rapporto di umidità di circa 6% quando l'incremento del tempo è 40% del periodo di oscillazione della modalità da studiare e più piccolo se il periodo di oscillazione aumenta.
- Questo smorzamento artificiale non è molto sostanziale per un incremento di tempo realistico e basse frequenze, ma non è negligible per alte frequenze.
- Si raccomanda un valore predefinito di -0.05.

53.4.2 Integrazione temporale esplicita

78 Per l'integrazione esplicita del tempo, adottiamo al punto di partenza una leggera variazione dell'equazione differenziale precedentemente derivata, che include gli effetti dell'umidificazione.

$$\underbrace{\mathbf{M}\ddot{\overline{\mathbf{u}}}}_{\mathbf{F}_I(t)} + \underbrace{\mathbf{C}\dot{\overline{\mathbf{u}}}}_{\mathbf{F}_D(t)} + \underbrace{\mathbf{K}\overline{\mathbf{u}}}_{\mathbf{F}_i(t)} = \underbrace{\mathbf{f}_e}_{\mathbf{f}_e(t)}$$

dove $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{K}$ sono rispettivamente le matrici di massa, smorzamento e rigidezza; $\mathbf{f}_e$ è il vettore dei carichi esterni; $\ddot{\mathbf{u}}$, $\dot{\mathbf{u}}$ e $\mathbf{u}$ sono i vettori di accelerazione, velocità e spostamento dell'insieme di elementi finiti.

79 Un modo alternativo per considerare questa equazione è quello di esaminare l'equazione delle statiche a tempo $t$dove $\mathbf{F}_I(t), \mathbf{F}_D(t), \mathbf{F}_i(t), \mathbf{F}_e(t)$ sono le forze elastiche interne ed esterne, rispettivamente.

53.4.2.1 Sistemi lineari

80 Per l'equazione semidiscretizzata del movimento, adottiamo la *metodo di differenza centrale*. Questo metodo si basa su una differenza finita di approssimazione dei derivati del tempo dello spostamento (velocità e accelerazione). Assumendo un cambiamento lineare nello spostamento in ogni fase temporale, la velocità e l'accelerazione a tempo t sono:

$$\dot{\overline{\mathbf{u}}}^t = \frac{\overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} - \overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t}}{2\Delta t}$$
$$\ddot{\overline{\mathbf{u}}}^t = \frac{\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t} - 2\overline{\mathbf{u}}^t + \overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}}{\Delta t^2}$$

dove Δt è il passo del tempo.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

81 Substituting into Equation 53.5, we obtain

$$\underbrace{\left(\underbrace{\frac{1}{\Delta t^2}}_{a_0}\mathbf{M}+\underbrace{\frac{1}{2\Delta t}}_{a_1}\mathbf{C}\right)}_{\widehat{\mathbf{M}}}\overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}=\underbrace{\mathbf{f}_e^t-\left(\mathbf{K}-\underbrace{\frac{2}{\Delta t^2}}_{a_2}\mathbf{M}\right)\overline{\mathbf{u}}^t-\left(\underbrace{\frac{1}{\Delta t^2}}_{a_0}\mathbf{M}-\underbrace{\frac{1}{2\Delta t}}_{a_1}\mathbf{C}\right)\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t}}_{\widehat{\mathbf{f}}_e^t} \tag{53.13}$$

da cui possiamo risolvere $\overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}$.

82 Va notato che:

- La soluzione si basa sulla condizione di equilibrio a tempo, t.
- Nessuna fattorizzazione della matrice di rigidità, $\mathbf{K}$, è necessario (cioè no $\mathbf{K}^{-1}$ il termine appare nell'equazione).
- Per avviare il metodo, dobbiamo determinare lo spostamento, la velocità e l'accelerazione in tempo $-\Delta t$.

83 Algorithm:

1. Formare la matrice di rigidità $\mathbf{K}$, matrice di massa $\mathbf{M}$, e matrice umida $\mathbf{C}$.
2. Initialize $\overline{\mathbf{u}}^0, \dot{\overline{\mathbf{u}}}^0, \ddot{\overline{\mathbf{u}}}^0$ at time $t = 0$.
3. Select the time step $\Delta t \leq \Delta t_{cr}$.
4. Determine the constants $a_0 = \frac{1}{\Delta t^2}$, $a_1 = \frac{1}{2\Delta t}$, $a_2 = 2a_0$, $a_3 = \frac{1}{a_2}$.
5. Compute
$$\overline{\mathbf{u}}^{-\Delta t} = \overline{\mathbf{u}}^0 - \Delta t\dot{\overline{\mathbf{u}}}^0 + a_3\ddot{\overline{\mathbf{u}}}^0$$
6. Compute the effective mass matrix , $\hat{\mathbf{M}} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}$.
7. Triangularize $\hat{\mathbf{M}}$ (not necessary if lumped mass matrix is used):
$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T$$
8. For each time step:
   (a) Determine the effective loads at time t:
   $$\hat{\mathbf{f}}_e^t = \mathbf{f}_e^t - (\mathbf{K} - a_2\mathbf{M})\overline{\mathbf{u}}^t - (a_0\mathbf{M} - a_1\mathbf{C})\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t}$$
   (b) Risolvere per gli spostamenti in tempo $t + \Delta t$
   $$\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T\overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{f}}_e^t$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

(c) Se necessario, risolvere per velocità e accelerazioni, tensioni e stress in tempo t

$$\begin{aligned}\ddot{\overline{\mathbf{u}}}^t &= a_0(\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t} - 2\overline{\mathbf{u}}^t + \overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t})\\ \dot{\overline{\mathbf{u}}}^t &= a_1(-\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t} + \overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t})\\ \boldsymbol{\varepsilon}^{t+\Delta t} &= \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}\\ \boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} &= \mathbf{D}_e\boldsymbol{\varepsilon}^{t+\Delta t}\end{aligned}$$

(d) Aggiorna la prossima volta $t = t + \Delta t$ e torna a (a).

84 Un'integrazione temporale esplicita ha molti vantaggi; la maggiore è che non richiede una fattorizzazione della matrice di rigidità.

85 Se adottiamo una matrice di massa lumped (invece coerente) e non c'è smorzamento, allora nessuna factorizzazione è necessaria ed Equazione 53.13 riduce a:

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)\overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{f}}_e^t$$

where

$$\hat{\mathbf{f}}_e^t = \mathbf{f}_e^t - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)\overline{\mathbf{u}}^t - \left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t} \tag{53.14}$$

86 Quindi, se la massa è diagonale, non c'è bisogno di fattorizzare. Inoltre, se il matrice struttura rigidità non deve essere triangolare, allora non è necessario assemblare la matrice globale della rigidità.

$$\mathbf{K}\overline{\mathbf{u}}^t = \sum_i^n \mathbf{K}_{(e)}\overline{\mathbf{u}}^t = \sum \mathbf{F}_{(e)}^t$$

che significa $\mathbf{K}_{(i)}\overline{\mathbf{u}}^t$ necessario in Equazione 53.14 può essere valutato a livello di elemento sommando i contributi da ogni elemento al vettore di carico efficace.

$$\hat{\mathbf{f}}_e^t = \mathbf{f}_e^t - \sum_i \mathbf{F}_{(i)}^t - \frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}(\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t} - 2\overline{\mathbf{u}}^t)$$

87 Poiché non è necessario montare alcuna matrice di rigidità strutturale, si possono risolvere problemi molto grandi e si tratta di problemi quasistatici (lineari e non lineari) in cui il carico viene applicato incrementalmente nel tempo.

88 Un grande svantaggio del metodo esplicito è che converga solo se

$$\Delta t < \Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{max}}$$

dove ω_{max} è la frequenza naturale più alta (o lunghezza d'onda più piccola) della struttura (Courant, Friedrichs e Lewy, 1967). Richiamatelo. $\omega = \frac{2\pi}{T}$Se questa condizione viene

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

violata, si verifica l'instabilità numerica. Quindi, deve essere prima effettuata un'analisi dell'igenvalore del sistema completo; ma poiché la matrice di rigidità strutturale globale non è necessariamente assemblata, una stima superiore al limite della ω_{max} è ottenuto da

$$\omega_{max} < \omega_{max}^{(e)}$$

dove $\omega_{max}^{(e)}$ è la frequenza massima di un singolo elemento finito (di solito il più piccolo). Può a sua volta essere determinato da

$$\det(\mathbf{K}^{(e)} - (\omega_{max}^{e})^2 \mathbf{M}^{e}) = 0$$

89 Nei problemi non lineari, $\mathbf{K}$ è la rigidezza tangente.

90 Si noti che gli autovalori (corrispondenti a ω^2) del problema semplice senza smorzamento ($\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}$) si possono ottenere sviluppando il determinante della matrice risultante oppure determinando direttamente gli autovalori di $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$.

91 Alternatively,

$$\omega_{max}^{e} = \frac{2c}{L}$$

dove c è la velocità dell'onda acustica, $c = \sqrt{E/\rho}$e L è una lunghezza rappresentativa dell'elemento (e).

92 In sostanza, questo significa che Δt deve essere abbastanza piccolo in modo che le informazioni non si propagano attraverso più di un elemento per passo del tempo.

53.4.2.2 Sistemi non lineari

93 Nei sistemi non lineari gli spostamenti incrementali $\Delta\overline{\mathbf{u}}$, le tensioni e gli stress incrementali, e la matrice di rigidità sono aggiornati secondo

$$\begin{aligned}
\Delta\overline{\mathbf{u}} &= \overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} - \overline{\mathbf{u}}^{t} \\
\Delta\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B}\Delta\overline{\mathbf{u}} \\
\Delta\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}_i^{t+\Delta t}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\
\boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} &= \boldsymbol{\sigma}^{t} + \Delta\boldsymbol{\sigma} \\
\mathbf{K}_i^{t+\Delta t} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T D_i^{t+\Delta t}\mathbf{B}\mathrm{d}\Omega
\end{aligned}$$

Nell'algoritmo sopra indicato, dobbiamo valutare $\mathbf{K}_i$ ad ogni passo di volta.

53.5 Metodi numerici per l'analisi dinamica

94 Le soluzioni analitiche alle equazioni del movimento sono limitate ai sistemi semplici e ai carichi idealizzati, per strutture realistiche ed eccitazioni i metodi di time-stepping

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

numerici sono essenziali. Questi metodi approssimano la risposta continua elaborando valori discreti a passi di tempo Δt - A parte.

53.5.1 Metodo delle differenze centrali

95 Il metodo centrale di differenza approssima velocità e accelerazione utilizzando differenze finite:

$$\dot{u}_n \approx \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta t} \tag{53.15}$$

$$\ddot{u}_n \approx \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta t)^2} \tag{53.16}$$

Sostituire l'equazione del moto a tempo t_n:

$$m\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta t)^2} + c\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta t} + ku_n = F_n$$

Solving for u_{n+1}:

$$u_{n+1} = \frac{F_n - (k - 2m/(\Delta t)^2)u_n - (m/(\Delta t)^2 - c/(2\Delta t))u_{n-1}}{m/(\Delta t)^2 + c/(2\Delta t)}$$

96 Il metodo di differenza centrale è *esplicita esplicito*: u_{n+1} è calcolato direttamente dai valori conosciuti t_n e t_{n-1}. Tuttavia, è solo condizionatamente stabile; il passo del tempo deve soddisfare:

$$\Delta t < \frac{T_n}{\pi} = \frac{2}{\omega_n} \tag{53.17}$$

53.5.2 Ex 53.5: Passo temporale di stabilità per le differenze centrali

Metodo di differenza centrale Se il periodo dominante di un sistema è $T_n = 0.50$ s, quale sarebbe il limite di stabilità della differenza centrale?

Da Eq. (53.17) is:

$$\Delta t < \frac{T_n}{\pi} = \frac{0.50}{3.1416} = 0.159 \text{ s}$$

Una scelta pratica comune è quella di fare un passo più piccolo (ad esempio, $\Delta t = 0.05$ s) migliorare la precisione oltre a soddisfare la stabilità.

Per sistemi con modalità ad alta frequenza (come nei modelli di elementi finiti), questo limite può essere molto restrittivo.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

53.5.3 Metodo Newmark-Beta

97 Nathan Newmark (1910-1981) sviluppò una famiglia di metodi basati sulla variazione dell'accelerazione assunta in ogni fase del tempo.β metodo assume:

$$u_{n+1} = u_n + \dot{u}_n \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{u}_n + \beta \ddot{u}_{n+1}\right](\Delta t)^2 \dot{u}_{n+1} \qquad = \dot{u}_n + [(1-\gamma)\ddot{u}_n + \gamma \ddot{u}_{n+1}]\,\Delta t$$

I parametri β e γ controllare la variazione di accelerazione assunta:

- $\gamma = 1/2$, $\beta = 1/6$: Linear acceleration (conditionally stable)
- $\gamma = 1/2$, $\beta = 1/4$: Average acceleration (unconditionally stable)
- $\gamma = 1/2$, $\beta = 0$: Central difference (explicit, conditionally stable)

98 Il metodo di accelerazione medio ($\gamma = 1/2$, $\beta = 1/4$) è particolarmente popolare perché è incondizionatamente stabile—qualsiasi passo di tempo dà risposta limitata, anche se la precisione si degrada per grandi Δt. È anche implicito, il che significa che $\ddot{u}_{n+1}$ appare su entrambi i lati, richiedendo soluzione di un sistema di equazioni ad ogni passo.

99 Per l'equazione MDOF (36.15), il metodo Newmark porta a:

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{u}_{n+1} = \hat{\mathbf{F}}_{n+1}$$

dove la rigidità efficace $\hat{\mathbf{K}}$ e forza efficace $\hat{\mathbf{F}}_{n+1}$ Questo sistema deve essere risolto in ogni fase di tempo, rendendo i metodi impliciti computazionalmente più costosi per passo rispetto a metodi espliciti, ma la capacità di utilizzare passaggi temporali più grandi spesso compensa.

53.5.4 Sovrapposizione modale e integrazione diretta

100 Esistono due strategie generali per l'analisi dinamica dei sistemi MDOF:

101 **Superposizione modulare** trasforma le equazioni accoppiate in equazione modale non couforizzata, risolve ogni equatura modale SDOF e ricostruisce la risposta fisica. Intuizione fisica, capacità di tracciare alte modalità, efficienza per sistemi lineari con poche modalità partecipanti. Svantaggi: richiede soluzione di autovalore, limitata a sistemi lineare, matrice smorzante deve essere diagonalizzabile.

102 **Integrazione diretta** I vantaggi: gestisce sistemi non lineari, smorzamento arbitrario, nessuna soluzione di autovalore necessaria. Svantaggi: computazionalmente costoso per sistemi di grandi dimensioni, meno intuizione fisica.

103 Per i sistemi lineari sottoposti a carico del terremoto, è generalmente preferibile la sovrapposizione modale; per l'analisi non lineare (siielding, contatto, deformazioni di grandi dimensioni), è necessaria un'integrazione diretta.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Verifica e validazione

Nelle dinamiche computazionali è essenziale distinguere tra verifica e convalida. *Verifica* chiede se l'algoritmo numerico e la sua implementazione risolvono correttamente le equazioni indicate (passo di tempo, controlli di convergenza e benchmark del codice). *Validazione* chiede se le equazioni dichiarate rappresentino il sistema fisico con sufficiente fedeltà (forma modello, condizioni di confine, smorzamento e presupposti costitutivi). Una simulazione può essere verificata ma non valida, e la confusione tra i due è una fonte frequente di fiducia indebita nei risultati numerici.

53.6 Sistemi continui

104 Strutture con massa e rigidità distribuita—fasci, piastre, gusci— sono regolate da equazioni differenziali parziali. Sebbene i metodi numerici discretizzano in ultima analisi questi sistemi, la comprensione delle soluzioni analitiche fornisce informazioni sulle forme di modalità e le frequenze naturali.

53.6.1 Vibrazione assiale delle barre

105 Considerare un bar uniforme di lunghezza L, area trasversale A, modulo E, e la densità ρ. Lo spostamento assiale $u(x,t)$ soddisfa:

$$EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

or, defining the wave speed $c = \sqrt{E/\rho}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Questa è l'equazione d'onda unidimensionale.

106 Per la vibrazione libera, cerchiamo soluzioni della forma $u(x,t) = \phi(x)\sin(\omega t)$. Sostituzione dà:

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\phi = 0$$

con soluzione $\phi(x) = A\cos(\omega x/c) + B\sin(\omega x/c)$. Le condizioni di cottura determinano le frequenze e le forme delle modalità consentite. Per una barra fissata a entrambe le estremità:

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

53.6.1.1 Ex 53.6: Velocità d'onda e frequenze naturali assiali di una lega-rod in acciaio

Un solido acciaio circolare tie-rod ha diametro $d = 50$ mm e lunghezza $L = 3.0$ m. Entrambe le estremità sono fissate (saldate a piastre rigide). Steel properties: $E = 210$ GPa, $\rho = 7\,850$ kg/m^3. Determinazione: a) la velocità d'onda longitudinale; (b) i primi tre naturali assiali frequenze; (c) come questi si confrontano con la frequenza tipica del vento e della sismica e ciò che implica per la modellazione strutturale.

Soluzione.

(a) Longitudinal wave speed.

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{210 \times 10^9}{7\,850}} = \sqrt{2.675 \times 10^7} = 5\,172 \text{ m/s}$$

Questa è la velocità a cui un'onda di stress longitudinale viaggia lungo l'asta — circa 15 volte la velocità del suono in aria.

(b) Axial natural frequencies (fixed–fixed bar).

Per una barra fissata a entrambe le estremità, $\phi(0) = \phi(L) = 0$ richiede $\phi(x) = B\sin(\omega x/c)$ with $\sin(\omega L/c) = 0$, giving $\omega_n L/c = n\pi$, and therefore:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{nc}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$f_1 = \frac{1 \times 5\,172}{2 \times 3.0} = 862 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 2f_1 = 1\,724 \text{ Hz}, \qquad f_3 = 3f_1 = 2\,586 \text{ Hz}$$

I periodi naturali corrispondenti sono $T_1 = 1/862 = 1.16$ ms, far shorter than any structural analysis time step in seismic or wind engineering (Δt typically 0.005–0.02 s).

(c) Confronto con il contenuto sismico e della frequenza del vento.

Source	Dominant frequency	Relation to axial rod modes
Earthquake ground motion	0.1–10 Hz	$< f_1/86$
Wind gust spectrum	0.01–2 Hz	$< f_1/430$
Machinery vibration	1–100 Hz	$< f_1/8.6$
Axial rod mode 1	862 Hz	—

Commento. Diverse importanti conseguenze seguono da questo confronto.

1. *Le modalità assiali non sono mai eccitate da carichi sismici o vento.* La separazione di frequenza è tre ordini di grandezza. la giustificazione matematica per l'assunzione di modellazione comune che deformazioni assiali possono essere *ignorato* (infinito assiale rigidità) nell'analisi del carico laterale delle strutture incorniciate (§53.2.1).
2. *Le modalità assiali regolano il passo critico del tempo nell'integrazione esplicita.* Il limite di stabilità $\Delta t < 2/\omega_{\max}$ per un elemento di barra Lunghezza ℓ is $\Delta t < \ell/c$. Per un 3 elemento m:

$$\Delta t < \frac{3.0}{5\,172} = 5.8 \times 10^{-4} \text{ s}$$

Questo è 10-30 volte più piccolo del passo di tempo necessario per l'accuratezza in risposta sismica, facendo metodi espliciti costosi per modelli che include axial DOFs. Implicit methods (Newmark, HHT) circumvent this by being unconditionally stable.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

3. *Wave propagation matters in impact problems.* Se l'asta è sottoposta ad un impatto finale, la risposta è regolata da propagazione della tensione di stress a 5 172 m/s, e la durata dell'analisi è il tempo di viaggio dell'onda $L/c = 0.58$ ms. Questo è il regime di explicit dynamic codes (DYNA, ABAQUS/Explicit) and requires time steps di microsecondo ordine — un mondo computazionale completamente diverso from seismic analysis.

53.6.2 Vibrazione trasversale delle travi

107 L'equazione del fascio Euler-Bernoulli per le vibrazioni trasversali è:

$$EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q(x,t)$$

dove $v(x,t)$ è lo spostamento trasversale, EI è la rigidità flessorale, e $q(x,t)$ è il carico distribuito.

108 For free vibration ($q = 0$), seeking $v(x,t) = \phi(x)\sin(\omega t)$:

$$\frac{\mathrm{d}^4\phi}{\mathrm{d}x^4} - \beta^4\phi = 0, \qquad \beta^4 = \frac{\rho A\omega^2}{EI}$$

The general solution is:

$$\phi(x) = C_1\cosh(\beta x) + C_2\sinh(\beta x) + C_3\cos(\beta x) + C_4\sin(\beta x)$$

Le condizioni di boundary a entrambe le estremità forniscono quattro equazioni per le quattro costanti, dando un problema di autovalore per β.

109 Per un raggio di lunghezza semplicemente supportato L:

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \qquad \phi_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}$$

Le frequenze naturali aumentano come n^2, rapidamente separando i modi più alti da quelli inferiori. La frequenza fondamentale ($n = 1$) is:

$$f_1 = \frac{\pi}{2L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

110 Per altre condizioni di confine (fissate, cantilever, ecc.), l'equazione della frequenza trascendente deve essere risolta numericamente; le tabelle dei coefficienti di frequenza sono disponibili in riferimenti standard.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

53.7 Dinamica non lineare

111 Le sezioni precedenti hanno assunto un comportamento lineare: forze proporzionali allo spostamento e alla velocità. Le strutture reali, soprattutto in presenza di forti scuotimenti sismici o carichi estremi, mostrano una risposta non lineare. La non linearità deriva dallo snervamento dei materiali, dagli effetti geometrici (grandi spostamenti), dal comportamento di contatto o apertura e dall'attrito.

53.7.1 Fonti di non linearità

112 **Materiale non linearità** Quando la relazione tra stress e resistenza non è lineare, per l'acciaio il comportamento elastico iniziale dà modo di cedere quando lo sforzo supera la forza di resa. Il rapporto costitutivo deve essere modellato in modo appropriato (elastoplastica, danno, ecc.).

113 **Non linearità geometrica** Quando si verificano spostamenti abbastanza grandi che le equazioni di equilibrio devono essere scritte sulla configurazione deformata. P-Δ l'effetto in colonne—momento amplificazione a causa di forza assiale che agisce attraverso lo spostamento laterale — è un esempio comune.

114 **Contatto non linearità** si verifica in interfacce dove i componenti possono separare o entrare in contatto. I cuscinetti di isolamento base, le articolazioni di espansione e le sezioni crepeti mostrano tutto questo comportamento.

53.7.2 Duttilità e progettazione secondo la capacità

115 Il *dislocamento duttilità* μ è definito come il rapporto di spostamento massimo per lo spostamento dei rendimenti:

$$\mu = \frac{u_{\max}}{u_y}$$

Le strutture progettate per produrre e deformare inelastica possono sopravvivere ai terremoti molto più forti di quanto suggerisse la loro capacità elastica. *progettazione della capacità*: accettare la resa in regioni accuratamente dettagliate, proteggendo gli elementi fragili.

116 Il rapporto tra riduzione della forza e domanda di duttilità è catturato dalla R-μ-T per strutture con periodi nella gamma di velocità-sensibili:

$$R \approx \mu$$

Questa regola di "equal spostamento" afferma che lo spostamento massimo della struttura cedente equivale a quello di una struttura elastica con lo stesso periodo—ilding riduce la domanda di forza senza aumentare lo spostamento.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 53.2: Rapporti di smorzamento rappresentativi per diverse classi di strutture

Structure type	Damping ratio ζ
Steel, welded, pre-yield	0.01–0.02
Steel, bolted, pre-yield	0.02–0.03
Reinforced concrete, uncracked	0.01–0.02
Reinforced concrete, cracked	0.03–0.05
Prestressed concrete	0.01–0.02
Masonry, uncracked	0.02–0.03
Wood structures	0.05–0.10

53.8 Considerazioni pratiche

53.8.1 Smorzamento nelle strutture reali

117 I rapporti di smorzamento misurati per le strutture dipendono dal materiale, dall'ampiezza delle vibrazioni e dalla tipologia di costruzione. 53.2

Questi sono valori di ordinazione della grandezza; l'umidità effettiva dipende dai dettagli e deve essere misurata quando possibile.

53.8.2 Interazione terreno-struttura

118 La risposta dinamica di una struttura dipende non solo dalla struttura stessa ma anche dal suolo di sostegno. *Interazione delle strutture del suolo* (SSI) può influenzare in modo significativo sia il movimento di ingresso che le frequenze del sistema. I suoli flessibili aumentano il periodo effettivo del sistema e introducono ulteriori smorzamenti attraverso la radiazione dell'energia nel terreno. Per strutture rigide su suolo morbido, gli effetti SSI possono essere sostanziali; per le strutture flessibili sulla roccia sono trascurabili.

53.8.3 Smorzatori a massa accordata

119 Un ammortizzatore di massa sintonizzato (TMD) è un sistema secondario di smorzamento a massa, attaccato alla struttura primaria e sintonizzato ad una frequenza specifica. Quando la struttura primaria vibra alla sua frequenza naturale, il TMD oscilla in opposizione, riducendo la risposta primaria. I TMD sono utilizzati in edifici alti (ad esempio Taipei 101) e ponti a lunga durata per ridurre le vibrazioni causate dal vento e sismiche.

120 L'ottimizzazione di un TMD per una struttura primaria non smorzata è:

$$\frac{\omega_d}{\omega_n} = \frac{1}{1+\mu_m}, \qquad \zeta_d = \sqrt{\frac{3\mu_m}{8(1+\mu_m)^3}}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove $\mu_m = m_d/m$ è il rapporto di massa (tipicamente 0,01 a 0.05), ω_d è la frequenza TMD, e ζ_d è il rapporto di smorzamento TMD.

53.8.4 Isolamento alla base

121 Isolamento di base introduce uno strato flessibile (portanti elastomerici o sistemi scorrevoli) tra la struttura e la fondazione. La struttura isolata ha un periodo molto più lungo, allontanandolo dal contenuto ad alta energia dei tipici movimenti di terra del terremoto. Lo strato di isolamento fornisce anche un ulteriore smorzamento. L'isolamento della base è particolarmente efficace per le strutture rigide e a corto raggio ed è ampiamente utilizzato per gli ospedali, i servizi di emergenza e gli edifici storici.

53.9 Sintesi

122 Questo capitolo ha introdotto i principi fondamentali della dinamica strutturale, che vanno dall'oscillatore monogrado di libertà ai sistemi multi-grado-di-libertà, dalla vibrazione libera alla risposta forzata, dalle soluzioni analitiche alle soluzioni numeriche I concetti chiave includono:

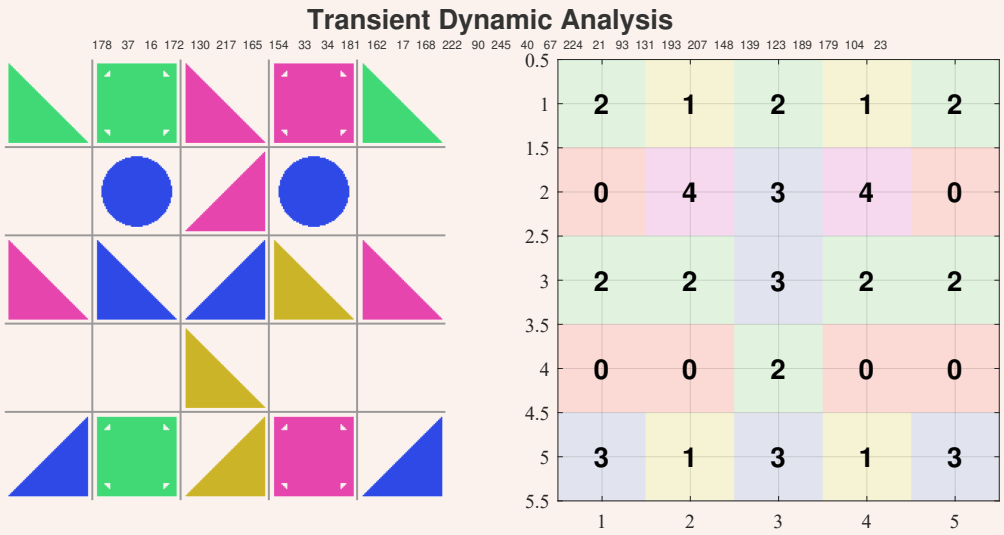
1. L'equazione del movimento, esprimendo equilibrio dinamico di forze inerziali, smorzanti, elastiche e applicate.
2. Frequenza naturale e rapporto di smorzamento come proprietà del sistema intrinseco che regolano la risposta dinamica.
3. Vibrazione libera che rivela i modi naturali di oscillazione.
4. Risposta armonica e il fenomeno della risonanza.
5. Il Duhamel integrale per la risposta al carico arbitrario.
6. Spettri di risposta come strumenti pratici per l'ingegneria del terremoto.
7. Modal analysis transforming coupled MDOF equations into independent SDOF equations.
8. Metodi di time-stepping numerici per la risposta al calcolo delle eccitazioni complesse.
9. Dinamica non lineare, isteresi e il ruolo della duttilità nel design sismico.

123 La dinamica strutturale estende l'analisi statica sviluppata nei capitoli precedenti per comprendere fenomeni di tempo-variazione. Gli stessi principi –equilibrio, compatibilità e relazioni costitutive –apply, ma ora in un contesto tempo dipendente dove l'inerzia e la dissipazione dell'energia svolgono ruoli centrali. La padronanza di questi concetti è essenziale per la progettazione di strutture soggette a vento, terremoti, vibrazioni dei macchinari e altri carichi dinamici.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Riferimento in avanti. I quantitativi di risposta deterministica calcolati qui (storie temporali, richieste di picco e misure derivate) sono utilizzati nel capitolo 72 come input per l'ingegneria del terremoto basata sulle prestazioni.



Chapter-specific identicon, chapter H

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Parte IV

Avanzato: non linearità e altri argomenti

Questo volume, il terzo di una serie completa sull'analisi strutturale, sviluppa concetti avanzati con un focus sul comportamento e sulla plasticità non lineari, essenziali per valutare le reali prestazioni delle infrastrutture civili. È suddiviso nei seguenti gruppi:

I Plasticity modellazione a livello materiale, sezione e strutturale.

II Analisi non lineare Materiale e geometrico.

III Fibre con base 1D formulazione degli elementi (stiffness e flessibilità basata), e modelli costitutivi adatti.

IV PBEE Partendo dall'introduzione del concetto di pericolo, rischio e incertezze, copriamo le tre analisi associate a PBEE: pericolo, strutturale e perdita. Infine il libro culmina con una copertura esaustiva del framework PBEE, integrando concetti probabilistici con la previsione di risposta non lineare per sostenere la valutazione razionale delle prestazioni e della progettazione.

COPIA DI REVISIONE

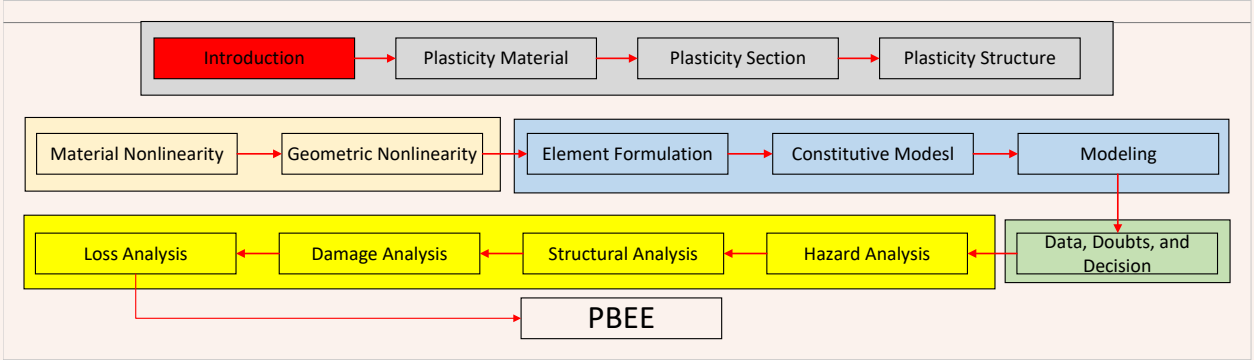
Capitolo 54

Introduzione

Abstract

Questo capitolo introduttivo del quarto libro, che copre l'analisi non lineare, inizia discutendo le cause principali delle risposte non lineari e come influiscono sulla rigidità Matrix attraverso **B** *or* **D** *(per le nonlinearie geometriche e materiali), che porta ad un'esplorazione di vari tipi di analisi, tra cui carichi di primo ordine, secondo ordine, lineare, non lineare e limite che possono causare instabilità. Successivamente, si discute il concetto di sicurezza, che passa al ruolo e all'evoluzione dei codici di progettazione. Questi codici sono destinati a garantire una sicurezza sufficiente, storicamente basata su regole di pollice e più recentemente, su considerazioni moderne che rappresentano le probabilità di fallimento. Il capitolo sottolinea che la determinazione del vero fattore di sicurezza (cioè non basata sui codici di progettazione) o l'individuazione di un fallimento graduale richiede analisi non lineari, che è il primo obiettivo di questo quarto libro.*

54.1 Introduzione 1886
54.1.1 Fonti di non linearità 1886
54.1.2 Perché un'analisi non lineare 1888
54.2 Tipi di analisi strutturali non lineari 1888
54.3 Carico/spostamento di tipo eccezionale 1891
54.4 Sicurezza 1891
54.4.1 Terminologia 1891
54.4.2 Sicurezza & carichi 1892
54.5 Codici di progettazione 1893
54.5.1 Introduzione 1893
54.5.2 Evoluzione: antichità 1895
54.5.3 Tempi moderni 1896
54.5.4 Sintesi 1900



COPIA DI REVISIONE

54.1 Introduzione

54.1.1 Fonti di non linearità

1 Finora ci siamo limitati a problemi elastici lineari con una piccola deformazione (ad eccezione del capitolo 29). Ciò implicava anche che implicitamente ritenevamo che il materiale avesse una forza infinita (ma non doveva mai realmente affidarsi a questa supposizione).

2 Naturalmente nessun materiale ha una forza infinita, e ad un certo punto tutto comincia a comportarsi in-elastica e alla fine rompersi.

3 Questo quarto libro affronterà così quelle due forme di non linearità: a) geometrica e materiale.

4 In effetti abbiamo brevemente considerato esempi di grande deformazione (o non linearità geometrica) nel capitolo 29, e esaminato un problema mostrato in Fig. 54.1 da §29.2.3Questa volta formalizzare il problema nel contesto della discorsizzazione degli elementi finiti.

5 Per quanto riguarda la non linearità materiale, provengono da:

Acciaio inossidabile che ha una curva di tensione lineare fino al punto di resa, a quel punto abbiamo indurimento della macchia e deformazione eccessiva.

Concretamente ha una curva di tensione non lineare che inizia intorno $0.6f_c'$, fino alla forza di compressione (a una tensione intorno a 0.003) e poi addolcimento. Si noti che la resistenza aumenterà con confinamento (fornito da rinforzo della cinghia). f_c').

6 Mentre useremo il materiale inerente relazioni non lineari di stress-strain, potremmo anche fare riferimento alla sezione risposta non lineare in termini di $M - \Phi$ or $M - \theta$ (curvatura o rotazione).

7 Come vedremo più tardi, abbiamo essenzialmente due tipi di modello per catturare la risposta non lineare degli elementi 1D.

Plasticità Distribuita dove si verifica la plastificazione lungo tutto l'elemento.

Plasticità lumpata dove la risposta plastica è limitata alla fine dell'elemento, e una risposta elastica lineare è tra.

8 La risposta non lineare dell'acciaio e del cemento è mostrata in Fig. 54.2. considerando che queste curve saranno utilizzate di routine *continuum* elementi finiti, nel contesto di questo libro (concentrandosi in 1D) gli elementi saranno utilizzati in fibra (curvamento biassiale) o stratificato (curvezione unitaria) *plasticità distribuita* modelli.

9 Fig. 54.3 illustra i modelli costitutivi per la plasticità lumpeda, che vengono catturati più spesso da un diagramma di curvatura e talvolta da una rotazione del momento.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

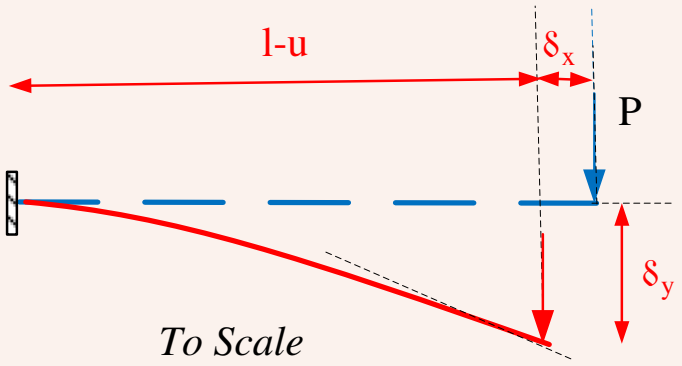


Figura 54.1: Non linearità geometrica, grande esempio di deflettorazione (**B**), 29.2.3

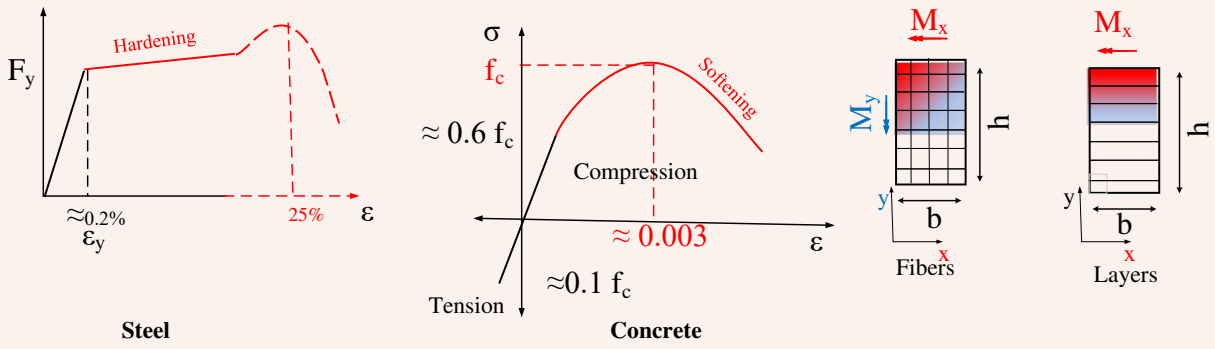


Figura 54.2: Materiale non linearità, fibre (**D**)

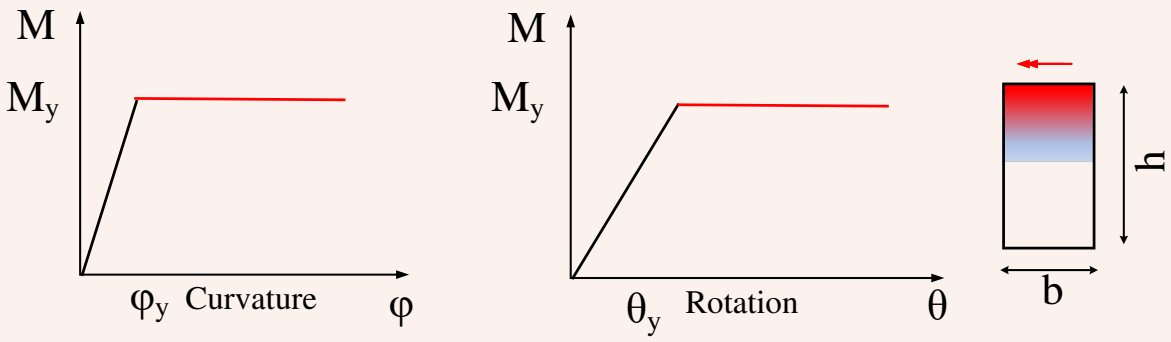


Figura 54.3: Materiale non linearità, sezione (**D**)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

54.1.2 Perché un'analisi non lineare

10 considerando che le analisi elastiche lineari sono giustificate per la valutazione della sicurezza di progettazione o preliminare, quelle non lineari devono essere eseguite quando si desidera una risposta strutturale completa, il carico di guasto deve essere determinato nel modo più preciso possibile, oppure "vero" fattore di sicurezza deve essere trovato.

11 Come dovrebbe essere evidente dalla sezione precedente, non possiamo fare affidamento sul LRFD (predominante) per valutare il vero fattore di sicurezza o per eseguire un'analisi che rappresenta danni parziali.

12 In tali casi, un'analisi elastica lineare semplificata supererà il carico di punta o sottovaluterà gli spostamenti. in seconda a situazioni potenzialmente pericolose derivanti da spostamenti di grandi dimensioni non previsti, Figura 54.4. In entrambi i casi, la ridistribuzione dello stress non viene catturata e sarà impossibile distinguere localizzato dal fallimento globale.

13 In un'analisi elastica lineare, supereremo la capacità e sottovalutiamo lo spostamento.

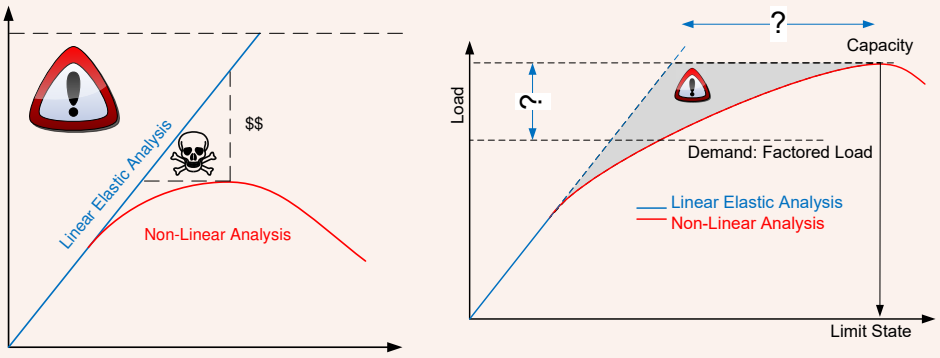


Figura 54.4: Lineare *vs.* analisi non lineari

14 Va sempre tenuto presente che l'analisi non lineare non è un sostituto del buon senso dell'ingegneria comune; dovrebbe essere solo l'ultima risorsa dopo il buon senso, analisi lineari e metodi semplificati sono stati esauriti. Idealmente, dovrebbe essere eseguita per convalidare /quantificare un'assunzione solida.

54.2 Tipi di analisi strutturali non lineari

15 Come accennato in precedenza, ci sono due fonti di non linearità. Il primo è causato dalla risposta materiale non lineare e il secondo da grandi spostamenti.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

16 Nella formulazione della matrice di rigidità dell'elemento, si manifestano attraverso (Eq. 50.12)

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega$$

B per il primo, e **D** per il secondo.

17 Nel contesto dell'analisi non lineare, questo può essere riscritto come

$$\mathbf{K}^i_{tan} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^i_{tan} \mathbf{B} d\Omega$$

18 I soggetti a loro volta daranno origine a diversi tipi di analisi, Tabella 54.1 In questa tabella si includono anche analisi critiche (biforcazioni) (ossia buckling).

Tabella 54.1: Tabulazione dei livelli di analisi strutturale

		D			
	Diagramma corpo libero sulla base	Forma non conforme		Forma deformata	
		Elastico (Sfilare)	Inelasticità (Non lineare)	Elastico (Sfilare)	Inelasticità (Non lineare)
B	1^{st} Ordine (Sfilare)	1 (**D**:L-**B**:L)	2 (**D**:NL-**B**:L)	Carico critico (Buckling)	
				5 elastico	6 Inelasticità
	2^{nd} Ordine (non lineare)	Forma deformata			
		3 (**D**:L-**B**:NL)	4 (**D**:NL-**B**:NL)	-	-

B non linearità geometrica; **D** materiale non linearità.

19 Le curve di spostamento del carico corrispondenti sono mostrate in Fig. 54.5. anche mostrato ar i valori asintomatici del

20 Formulazione basata sul diagramma del corpo libero non deformato sono fuerred come *Lagrangian*, mentre quelli che devono tener conto della deforemazione sono indicati come *Eulerian*.

I Analisi Incrementali: (incrementi di carichi, spostamenti o entrambi) attraverso il metodo del Newton (tipicamente), §59.3.1.1.

1 (D:L-B:L); Forma non conforme Questo è il caso più comune, elastico lineare. Di solito è accettabile per i carichi di servizio. Per casi a tempo dipendente, dobbiamo considerare modelli viscoelastici.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

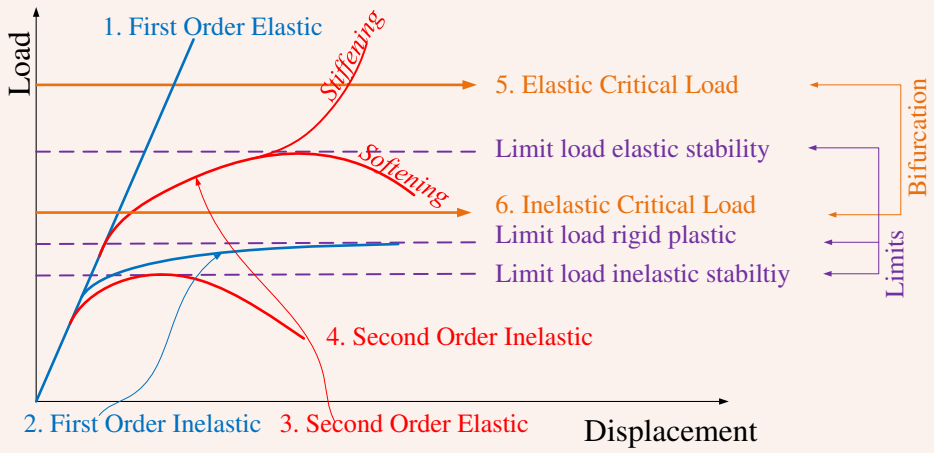


Figura 54.5: Tipi di analisi strutturale

2 (D:NL-B:L); Forma non conforme Seconda forma di analisi più comune, tipicamente condotta per cercare carichi finali/insoliti. Necessario per PBEE (vedi sotto).

3 (D:L-B:NL); elastico si riferisce agli effetti degli deformazione finita e spostamenti, le equazioni di equilibrio sono scritte in termini della geometria della forma deformata (Eulerian), non tiene conto delle non-linearità materiali, può essere in grado di rilevare biforcazione e o maggiore rigidità (quando un membro è sottoposto a carico assiale trasile). cavi, reti, strutture catenarie.

4 (D:NL-B:NL); Inelastica equazioni di equilibrio scritte in termini della geometria della forma deformata, possono spiegare sia le non linearità geometriche che materiali. Di gran lunga la forma di analisi più complessa, utilizzata nella simulazione della formatura dei metalli, frammentazione delle strutture (impatto del missile).

II Analisi di biforcazione: Analisi di autovalori che porterebbero al carico critico elastico (indurimento). Si noti che non abbiamo una curva corrispondente di spostamento del carico, ma piuttosto "modalità di buckling".

5 Biforcazione; Elastico

6 Biforcazione; Inelastica

21 Tabella 54.2 riassume le ipotesi di analisi per diverse analisi non lineari.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 54.2: Intercorrelazione dei diversi livelli di analisi

	1	2	3	4	5	6
D	L	NL	L	NL	L	NL
B	L	L	NL	NL	NL	NL
FBD	- Non difensori.	Un'azione	Sconfiggi.	Sconfiggi.	Sconfiggi.	Sconfiggi.
Analisi	Incr.	Incr.	Incr.	Incr.	Bif.	Bif.

54.3 Carico/spostamento di tipo eccezionale

22 Nell'analisi non lineare delle strutture, il carico viene applicato in modo incrementale e una soluzione è ricercata alla fine di ogni incremento:

1. "Break down' il carico esterno in n incrementi (non devono essere uguali; mentre ci avviciniamo al picco di carico anticipato, è consigliabile ridurre quello incrementale).
2. Ad ogni passo, applicare il vettore di carico incrementale, $\Delta\mathbf{P}_i$.
3. Risolvere per lo spostamento corrispondente, $\mathbf{u}_i$, che quasi soddisfa l'equilibrio (nella classe implicita di analisi, ma non quella esplicita).
4. Aggiornare i vettori di carico e spostamento

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{i-1} + \Delta\mathbf{P}_i$$
$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i-1} + \Delta\mathbf{u}_i$$

23 Un ulteriore ciclo iterativo è necessario nella soluzione implicita per garantire che l'equilibrio sia (vicino) soddisfatto.

24 Mentre nella maggior parte delle analisi il carico viene applicato in modo incrementale, una strategia di soluzione può non prevedere la risposta post-peak. Se questo è desiderato, allora il vettore di spostamento (invece del vettore di carico) dovrebbe essere applicato in maniera incrementale.

54.4 Sicurezza

54.4.1 Terminologia

25 In definitiva, un'analisi non lineare è semplicemente un veicolo per affrontare la vera sicurezza di una struttura.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

26 *Sicurezza* si riferisce alla condizione di una struttura in cui è in grado di resistere ai carichi e alle condizioni ambientali che può incontrare durante la sua durata prevista senza sperimentare guasti o collassi. La sicurezza viene generalmente valutata confrontando i carichi e le sollecitazioni effettive a cui una struttura è sottoposta con la sua capacità di resistere a quei carichi e alle tensioni, che sono determinati attraverso analisi e test.

27 *Margine di sicurezza* , invece, si riferisce alla quantità con cui i carichi effettivi e sottolinea che una struttura sperimenta sotto la sua capacità di resistere a quei carichi e sollecitazioni. Il margine di sicurezza è calcolato come la differenza tra i carichi effettivi e le sollecitazioni e la capacità della struttura per resistere a quei carichi e alle tensioni, divise dalla capacità.

28 *Fattore di sicurezza* È un criterio di progettazione che rappresenta le incertezze del carico e della resistenza dei materiali, il rapporto tra il carico massimo che una struttura può gestire al carico previsto.

29 *Valutazione del rischio* è il processo di identificazione, analisi e valutazione dei rischi associati a un progetto o ad un sistema per mitigare i potenziali pericoli.

30 *Analisi dei rischi* è una tecnica utilizzata per identificare i potenziali pericoli e valutare la loro gravità e probabilità, che aiuta a progettare misure di sicurezza per prevenire gli incidenti.

31 *Modalità di fallimento* è un approccio sistematico per identificare le modalità di fallimento potenziali in un sistema e i loro effetti sulle prestazioni del sistema, che aiuta a privilegiare i rischi e ad attuare azioni correttive.

32 *Valutazione del rischio probabilistico* è un'analisi quantitativa che utilizza la probabilità di valutare i rischi dei diversi scenari di fallimento e dei loro potenziali impatti.

33 *Ridunda* è l'inclusione di componenti o sistemi aggiuntivi che possono assumere in caso di guasto, aumentando l'affidabilità e la sicurezza generale.

34 *Indice di affidabilità* è una misura per quantificare la sicurezza o l'affidabilità di un sistema o componente, §N.

35 *Tolleranza di guasto* è la capacità di un sistema di continuare a funzionare correttamente anche in presenza di errori o errori.

36 *Sistema di sicurezza-critico* Il sistema di insufficienza può provocare danni significativi a persone, proprietà o ambiente; questi sistemi richiedono misure di sicurezza rigorose.

54.4.2 Sicurezza & carichi

37 Partendo dalle curve di tensione non lineari materiali, ci siamo spostati alla risposta strutturale non lineare prevista sotto varie ipotesi e ora cerchiamo di adattarsi a quelle curve il carico.

38 I carichi sono stati discussi in chapter 18, ma nel contesto dell'analisi non lineare, dove si adatta un carico dato alla curva globale di spostamento del carico? Come è garantita la

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

sicurezza per ciascuno di essi e dove è che abbiamo bisogno del più grande margine di sicurezza.

39 Questo è illustrato in Fig. 54.6dove

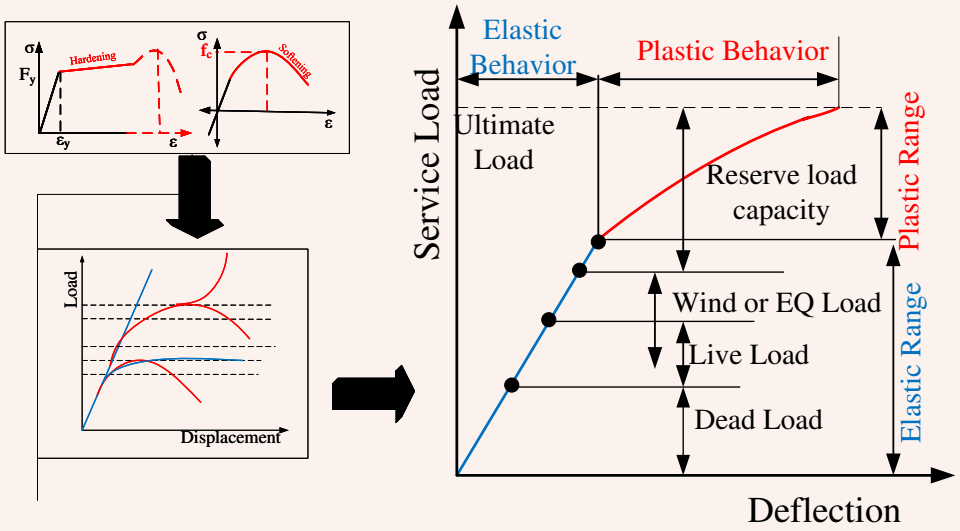


Figura 54.6: Curva di difesa del carico e varia gamma di risposta

40 Per ovvie ragioni, non vogliamo carichi di servizio per attivare la risposta inelastice della struttura. *fattore di sicurezza*. Tuttavia, in presenza di carichi rari ma ad alta intensità, possiamo ridurre al sicuro (ma con attenzione) il margine di sicurezza (è qui che un buon ingegnere può distinguersi). In tutti i casi non vogliamo superare la gamma elastica (anche se può essere superata per un'accitazione sismica davvero estrema come vedremo nel capitolo 72) flirtando con il carico finale/fresco, per evitare che tale evento si sia comportato in un overdesign eccessivamente costoso.

54.5 Codici di progettazione

54.5.1 Introduzione

41 I requisiti di sicurezza sono oggi incisi nei codici Design.

42 I codici di progettazione svolgono un ruolo fondamentale nel garantire la sicurezza delle strutture fornendo linee guida e requisiti standardizzati per la progettazione, costruzione e manutenzione degli edifici e infrastrutture.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Standardizzazione: I codici di progettazione offrono un insieme coerente di regole e procedure che gli ingegneri e gli architetti devono seguire, garantendo una struttura progettata utilizzando principi e pratiche accettate, riducendo il rischio di errori e omissioni.

Margine di sicurezza: I codici di progettazione incorporano fattori e margini di sicurezza che rappresentano incertezze nelle proprietà materiali, condizioni di carico e influenze ambientali. Questi margini di sicurezza aiutano a garantire che le strutture possano sopportare stress e carichi inaspettati senza guasti.

Specifiche del materiale: I codici specificano i tipi e le qualità dei materiali che possono essere utilizzati nella costruzione. Con la standardizzazione delle proprietà dei materiali, come resistenza e durata, i codici di progettazione assicurano che vengano utilizzati solo materiali adatti, migliorando la sicurezza generale della struttura.

Considerazioni di carico: I codici di progettazione forniscono linee guida per il calcolo dei carichi che una struttura deve sostenere, compresi i carichi morti (forze statiche permanenti), carichi vivi (forza contemporanea o mobile), carichi ambientali (vento, terremoto, neve) e carichi accidentali (impatti, esplosioni) I calcoli precisi del carico sono fondamentali per garantire che le strutture possano sopportare in modo sicuro queste forze.

Analisi strutturale I codici di progettazione delineano metodi per analizzare il comportamento strutturale in varie condizioni di carico. Questo include le linee guida per condurre l'analisi dello stress, l' analisi della stabilità e l'esame dinamico, aiutando gli ingegneri a prevedere come le strutture rispondono a scenari diversi.

Progettazione sismica: Nelle regioni soggette a terremoti, i codici di progettazione comprendono disposizioni specifiche per il disegno sismico, che assicurano che le strutture siano progettate per resistere alle forze sismiche, riducendo il rischio di un fallimento catastrofico durante un terremoto.

Controllo e ispezione di qualità: I codici di progettazione richiedono procedure di controllo della qualità e ispezioni regolari durante il processo di costruzione. Ciò aiuta a verificare che il lavoro di costruzione aderisca alle specifiche del progetto e che eventuali deviazioni o carenze sono affrontate prontamente.

Aggiornamenti e revisioni: I codici di progettazione vengono regolarmente aggiornati per riflettere nuovi risultati della ricerca, progressi tecnologici e lezioni apprese da fallimenti strutturali passati. Questo processo di miglioramento continuo garantisce che i codici di progettazione rimangano rilevanti ed efficaci nella promozione della sicurezza strutturale.

Compliance legale e regolamentare: I codici di costruzione, basati su codici di progettazione, sono applicati dalle autorità locali per garantire che tutti i progetti di costruzione soddisfino gli standard minimi di sicurezza. La mancata conformità

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

può comportare conseguenze legali, comprese le ammende, sanzioni e l'obbligo di apportare modifiche costose.

Responsabilità professionale: L'aderenza ai codici di progettazione è un aspetto fondamentale della responsabilità professionale degli ingegneri e degli architetti. Essa dimostra un impegno per la sicurezza pubblica e contribuisce a mantenere la fiducia e la fiducia dei clienti, degli organismi normativi e del pubblico generale.

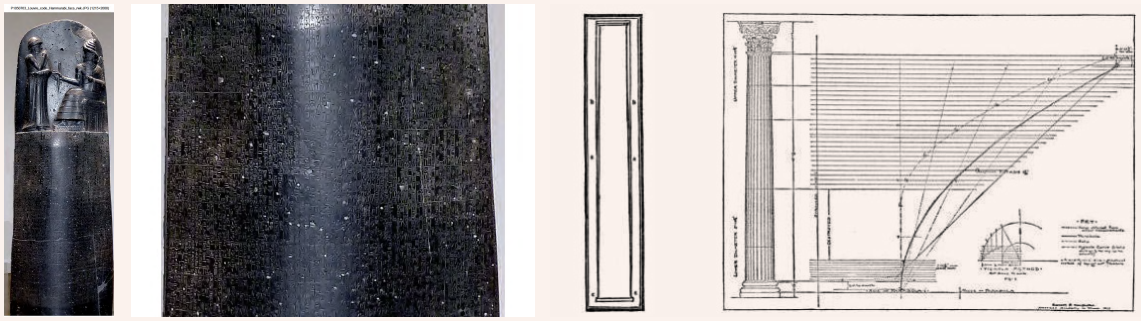
54.5.2 Evoluzione: antichità

54.5.2.1 Mesopotamia; hamurabi

43 Il codice di Hamurabi (1780 a.C.) includeva le disposizioni relative alla costruzione. In questa imponente stele in pietra scolpito da una sola lastra di quattro toni (nero) diorite, 282 editti sono scritti in forma se-allora (ci riferiremmo oggi come Decision Logic Tables), Fig. 54.7a. Di particolare rilevanza per i giorni moderni Ingegneri strutturali:

> *228. If a builder build a house for some one and complete it, he shall give him a fee of two shekels in money for each sar of surface.*
> *229 If a builder build a house for some one, and does not construct it properly, and the house which he built fall in and kill its owner, then that builder shall be put to death.*
> *230. If it kill the son of the owner the son of that builder shall be put to death.*
> *231. If it kill a slave of the owner, then he shall pay slave for slave to the owner of the house.*
> *232. If it ruin goods, he shall make compensation for all that has been ruined, and inasmuch as he did not construct properly this house which he built and it fell, he shall re-erect the house from his own means.*
> *233. If a builder build a house for some one, even though he has not yet completed it; if then the walls seem toppling, the builder must make the walls solid from his own means.*
>
> Hammurabi code (1780 BC)

44 La durezza del codice è comunque equilibrata (per la prima volta nella storia) con il concetto di innocenza fino a prova contraria.



(a) Codice di Hamurabi (Musée du Louvre)

(b) Vitruvio, Libro IV

Figura 54.7: Codici di progettazione in antichità

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

54.5.2.2 Romana; vitruvio

45 Vitruvibile (Vitruvius, 1960), (discusso in più dettagli §6.3.1 e 15.2.1) Dieci *Libri su Architettura* può essere considerato come uno dei primi codici di progettazione.

46 Per esempio, capitolo IV del libro III (Le Fondazioni e le Sottostrutture dei Templi) Fig. 54.7b inizia con

> The foundations of these works should be dug out of the solid ground, if it can be found, and carried down into solid ground as far as the magnitude of the work shall seem to require, and the whole substructure should be as solid as it can possibly be laid. Above ground, let walls be laid under the columns, thicker by one half than the columns are to be, so that the lower may be stronger than the higher. Hence they are called "stereobates"; for they take the load. And the projections of the bases should not extend beyond this solid foundation. The wall thickness is similarly to be preserved above ground likewise, and the intervals between these walls should be vaulted over, or filled with earth rammed down hard, to keep the walls well apart.
>
> Vitruvius, Chapter IV, Book III

54.5.3 Tempi moderni

47 Ovviamente gli antichi "codici" erano tutti basati su regole di pollici trasmesse da generazioni ad altri, che venivano utilizzate nel disegno delle cattedrali gotiche (§4), archi (§31) e altri. Non era fino a Galileo (§6.6.2) per la prima volta introdusse meccanica sperimentale, e l'idea che lo stress non può essere ignorata che "codici" si è evoluto (molto più tardi) in documenti radicati nella scienza (Meccanica applicata per la maggior parte).

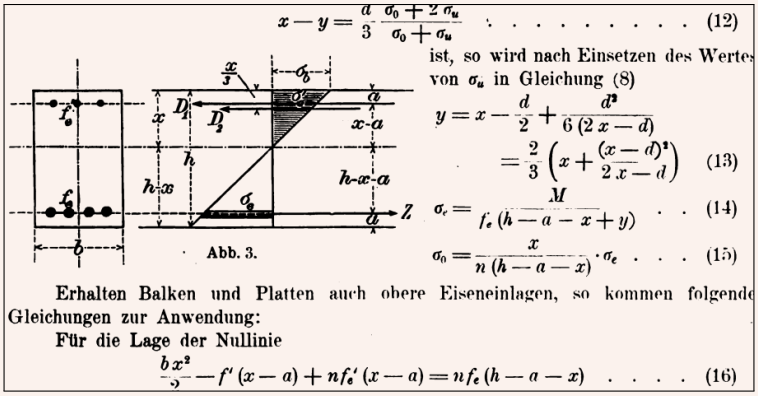
48 Il più antico codice di progettazione per cemento armato è il *Regime di canone ur Eisenbetonbau* (Regolamenti in cemento armato per la costruzione di calcestruzzo armato), che è stato sviluppato in Germania nel 1904, Fig. 54.8. Il codice si basava sul lavoro dell'ingegnere francese François Hennebique, che ha sviluppato un sistema di rinforzo del cemento alla fine del XIX secolo. Essa ha stabilito regole e linee guida per la progettazione e costruzione di strutture in cemento armato, comprese le specifiche per le proprietà dell'acciaio calcestruzzo e rinforzante, nonché i calcoli di progettazione e i requisiti di dettaglio. È stata ampiamente adottata in Germania e in altri paesi europei, ed è servita come modello per i successivi codici di cemento armato sviluppati in tutto il mondo.

49 Dal momento che lo sviluppo della *Beton-Reglement*, sono stati sviluppati numerosi altri codici e standard per la progettazione di cemento armato, riflettendo i progressi tecnologici e le modifiche dei codici edili e delle normative. Tuttavia, i principi fondamentali del design in cemento armato, compreso l'uso di acciaio rinforzato per fornire resistenza alla trazione e l'importanza dei dettagli e delle pratiche costruttive adeguate, sono rimasti in gran parte immutati.

50 Allo stesso modo, negli Stati Uniti, i codici di costruzione sono emersi all'inizio del XX secolo, come le città hanno cominciato ad attuare regolamenti per affrontare le

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



$$x - y = \frac{a}{3}\,\frac{\sigma_0 + 2\sigma_u}{\sigma_0 + \sigma_u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

ist, so wird nach Einsetzen des Wertes von σ_u in Gleichung (8)

$$y = x - \frac{d}{2} + \frac{d^3}{6\,(2\,x - d)}$$

$$= \frac{2}{3}\left(x + \frac{(x-d)^2}{2\,x - d}\right) \quad (13)$$

$$\sigma_e = \frac{M}{f_e\,(h - a - x + y)} \quad \ldots \quad (14)$$

$$\sigma_0 = \frac{x}{n\,(h - a - x)} \cdot \sigma_e \quad \ldots \quad (15)$$

Abb. 3.

Erhalten Balken und Platten auch obere Eiseneinlagen, so kommen folgende Gleichungen zur Anwendung:

Für die Lage der Nullinie

$$\frac{b\,x^2}{2} - f'\,(x - a) + n f_e'\,(x - a) = n f_e\,(h - a - x) \quad \ldots \quad (16)$$

Figura 54.8: *) ur Eisenbetonbau*

preoccupazioni di sicurezza associate alla costruzione di edifici. Il National Board of Fire Underwriters sviluppò il primo codice di costruzione del modello nel 1915, che fu principalmente focalizzato sulla sicurezza antincendio.

51 Nel 1927, venne costituita la fondazione dei Codici e delle Commissioni Internazionali (BOCA) per promuovere lo sviluppo di codici edili modello, e nel 1940 fu pubblicata la prima edizione del BOCA National Building Code. La Conferenza Internazionale dei funzionari dell'edificio (ICBO) è stata anche formata negli anni '20, e ha sviluppato il proprio codice di costruzione modello nel 1940, che divenne noto come Uniform Building Code.

52 Negli Stati Uniti, l'American Concrete Institute (ACI) è stato fondato nel 1904, ma il primo codice ACI specificamente dedicato al cemento armato non fu pubblicato fino al 1915. Questo codice, intitolato "Costruire i requisiti di Codice per il cemento armato", ha stabilito le linee guida per la progettazione e costruzione delle strutture in calcestruzzo rinforzato negli Stati Uniti.

53 Il più antico codice di progettazione dell'acciaio è la specifica per il disegno, la fabbricazione e l'erezione dell'industria siderurgica strutturale per gli edifici, che fu pubblicata nel 1923 dall'American Institute of Steel Construction (AISC). L'organizzazione fu fondata nel 1921 per promuovere l'uso dell'acciaio strutturale nella costruzione di edifici, e la prima edizione delle specifiche forniva linee guida per l'utilizzo dell' acciaio nelle applicazioni strutturali, tra cui design, fabbricazione e erezione.

54 considerando che i dettagli del progetto sono rimasti sostanzialmente gli stessi (come il mantenimento dell'equilibrio tra forze interne ed esterne, o la limitazione della deflezione), la filosofia di sovraarchizzazione si è evoluta per tutti i codici (concreti, acciaio, legname e altri). Quelli, Fig. 54.9, può essere ampiamente classificato come

Progettazione di corde ammesse L'approccio più antico e semplice per introdurre il concetto di sicurezza.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Progettazione del fattore di resistenza al carico introdotto nel codice ACI nel 1977, AISC nel 1986.

Ingegneria basata sulle prestazioni 1 & 2 sviluppato principalmente per il design sismico.

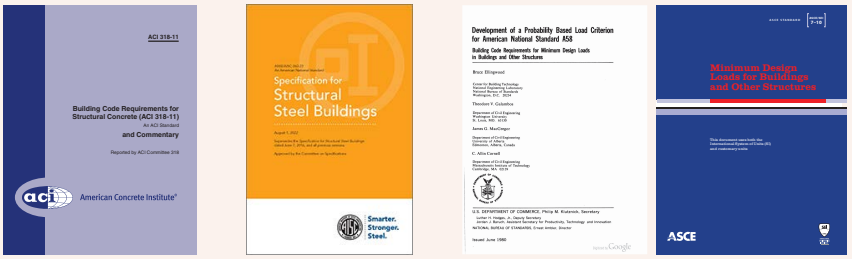


Figura 54.9: Esempi di codici di design moderni

54.5.3.1 Progettazione dello stress, ASD

55 L'ASD è l'approccio più intuitivo e semplice: la forza effettiva viene ridotta da un fattore (tipicamente 60%) ed è considerato il massimo sforzo ammissibile (tensile, comprimitivo o flessorale).

56 La maggiore limitazione del metodo, è che il fattore di sicurezza è solo influenzato dal chap: regione della fiducia nella forza (capacità) e non nel carico (demand).

54.5.3.2 Resistenza al carico e progettazione dei fattori, LRFD

Concetti chiave

57 Il carico e la resistenza non sono quantità deterministiche (come nel design dello stress ammissibile, ASD), ma sono variabili casuali con le proprie funzioni di distribuzione delle probabilità. *probabilità di fallimento*.

58 Dato che abbiamo sia la capacità che il deman, ognuno di essi sarà moltiplicato per un fattore appropriato. α, (ASCE/SEI 7-16, 2017) e la capacità (ultima resistenza) sarà ridotta da Φ.

59 α e Φ sarà determinato tale che la probabilità di fallimento non supera un certo valore. Quindi, LRFD è generalmente espresso come

$$\Phi C_n \geq \Sigma \alpha_i D_i \tag{54.1}$$

dove C_n e D sono la capacità nominale e le richieste (o resistenza nominale e carico). Lo stato di limite è generalmente determinato da Capacità di plastica senza un'analisi non lineare. LRFD cerca di avere un indice di affidabilità (capitolo. N) tale da $\beta >\sim 3.5$ (Tabella) N.1). L'indice di affidabilità è un indicatore "universale" sull'adeguatezza della struttura e può essere utilizzato come metrica per 1) valutare la salute di una struttura, e 2) confrontare diverse strutture mirate a possibile risanamento.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

60 L'indice di affidabilità è definito nell'Appendice N.

Limitazioni di LRFD

61 Ci sono tre principali limitazioni del LRFD,

1. È inconsistente: analisi lineare, ma progettazione plastica.
2. Ignora la ridistribuzione del carico vicino al fallimento (anche se ACI implicitamente ne rappresenta alcuni attraverso riduzione di momenti negativi).
3. Rivolge un solo livello di pericolo: fallimento di una componente strutturale (e non dell'intero sistema)

62 Mentre tali limitazioni sono inconseguenti per le analisi statiche, sono problematici se: a) si cerca di determinare la vera sicurezza di una struttura; e b) sotto carico dinamico dove il danno parziale è (economicamente) accettabile. Tali limitazioni sono affrontate dal metodo successivo.

54.5.3.3 Ingegneria del terremoto

63 L'ingegneria terremoti basata sulle prestazioni (PBEE) è un approccio all'ingegneria del terremoto che si concentra sul raggiungimento di obiettivi specifici per le strutture sotto carico sismico. In PBEE, gli obiettivi di performance sono tipicamente definiti in termini di livello di danno che una struttura può sostenere durante un terremoto, così come la sua funzionalità dopo il terremoto.

64 La PBEE valuta esplicitamente le prestazioni probabili di un edificio, dato il pericolo potenziale cui può essere esposto, considerando le incertezze nella quantificazione dei rischi e nella valutazione della risposta reale dell'edificio.

65 Contrariamente a LRFD, non si limita ad un livello di pericolo, ma più. Le prestazioni sono misurate in termini di probabilità di perdite, costi di riparazione e sostituzione, tempo di riparazione, e il placarding non sicuro.

66 Le prestazioni possono essere valutate per uno scenario o intensità del terremoto particolare, oppure considerando tutti i terremoti che potrebbero verificarsi e la probabilità di ciascuno, durante un determinato periodo di tempo. Prestazioni espresse in termini di una serie di livelli di performance discreti identificati come, Fig. 54.10:

1. Operazione
2. Impresa immediata
3. Sicurezza della vita
4. Prevenzione del collo

67 Alcuni limiti:

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

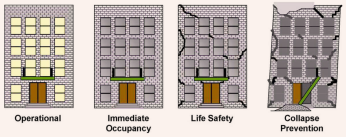


Figura 54.10: Livelli di performance

- Gli stati di limite sono componente basato non veramente sistema, (e se un componente non riesce, innesca il collasso progressivo?)
- tratta solo l'evento MCE (2%/50anni).
- Trattamento limitato chap: regione della fiducia e probabilità.
- Informazioni limitate per la progettazione di codice sopra.

68 PBEE costituisce lo stato della pratica e viene utilizzato solo da aziende di fascia alta.

69 La copertura più dettagliata di PBEE è data nel capitolo 72.

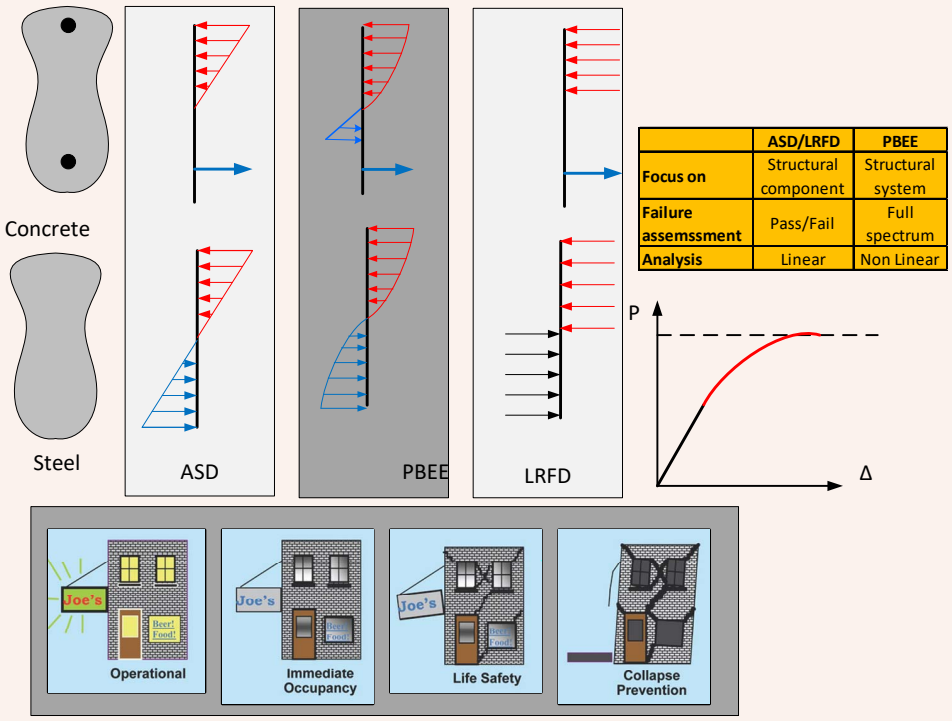
54.5.4 Sintesi

70 I paradigmi di design precedentemente discussi sono riassunti in Fig. 54.11



COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



	ASD/LRFD	PBEE
Focus on	Structural component	Structural system
Failure assemssment	Pass/Fail	Full spectrum
Analysis	Linear	Non Linear

Figura 54.11: Confronto di vari quadri di progettazione

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 55

Plasticità I; Fibre & Continuum (per l'analisi degli elementi finiti)

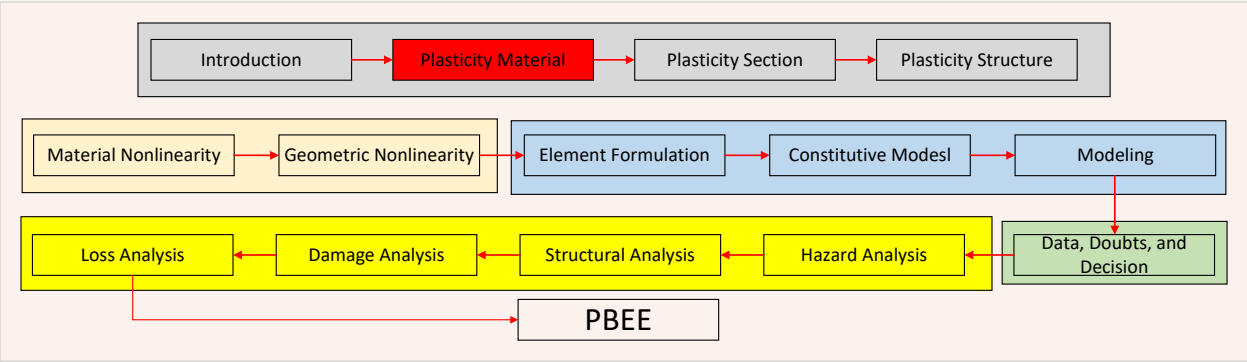
Abstract

Questo è il primo dei tre capitoli che coprono la plasticità. In questo[1] *ci concentriamo su un "Gauss-Point' nello spirito di elemento finito continuum, o su una fibra/strato in elementi plasticità distribuiti. Si tratta essenzialmente di una rassegna fondamentale dei fondamenti della plasticità, come si trovano in innumerevoli libri di testo. A seguito di una breve panoramica delle osservazioni del laboratorio e dei guasti microscopici, i fondamenti della teoria della plasticità sono coperti con enfasi sulla derivazione del tangente modulo elastico. Sono coperti due approcci, la prima derivazione generalizzata introduce concetti di funzione del rendimento, regola del flusso (e condizione Kuhn-Tucker), condizioni di consistenza. Il secondo, molto più semplice è limitato a 1D e si basa su considerazioni di ingegneria più semplici. Il prossimo capitolo coprirà la plasticità sezionale, e quella successiva plasticità strutturale.*

55.1 Introduzione 1903
55.2 Condizioni di resa in plastica 1903
55.2.1 Modelli indipendenti a pressione idrostatica 1904
55.2.2 Modelli a carico della pressione idrostatica 1906
55.3 Osservazioni del laboratorio 1908
55.3.1 Metalli 1908
55.3.2 Concretamente 1909
55.4 Insufficienza microscopica 1909
55.4.1 Obbligazioni chimiche 1909
55.4.2 Insufficienza duttile e fragile 1910
55.4.3 Dislocazione 1910
55.5 Fondamenti di plasticità 1911
55.5.1 Introduzione 1911
55.5.2 Modulo elastico tangente . . 1912

[1] Il lettore è incoraggiato a rivedere l'Appendice O prima di imbarcarsi in questo capitolo

COPIA DI REVISIONE



55.1 Introduzione

1 Ci sono tre tipi principali di guasto: cracking / frattura, buckling/instabilità e resa / plasticità.Questo capitolo si occuperà della plasticità .

2 Per il cemento, l'insufficienza plastica tende ad essere associata a "crushing' di calcestruzzo (vedere §55.2.1), o la resa del rinforzo (§55.2.2).

3 Questo capitolo fornirà una breve introduzione ai criteri di fallimento basati sulla plasticità che sono quasi universalmente utilizzati nelle analisi degli elementi finiti non lineari.

55.2 Condizioni di resa in plastica

4 La respirazione in un elemento strutturale non a carico dell'aria può essere facilmente determinata $|\frac{\sigma}{\sigma_{yld}}| \overset{?}{\geq} 1$Ma che mi dici di uno stato generale di stress tridimensionale?

5 Questo si realizza introducendo un *funzione di rendimento* F come funzione delle principali sollecitazioni e dello stress della resa non assiale

$$F(\sigma_{(1)}, \sigma_{(2)}, \sigma_{(3)}; \sigma_y) \begin{cases} < 0 & \text{Elastic} \quad \left|\frac{\mathrm{d}\varepsilon^P}{\mathrm{d}t}\right| = 0 \\ = 0 & \text{Plastic} \quad \frac{\mathrm{d}\varepsilon^P}{\mathrm{d}t} \geq 0 \\ > 0 & \text{Impossible} \end{cases}$$

Nota: F non può essere maggiore di zero, per lo stesso motivo che uno stress uniassiale non può superare lo stress del rendimento. $\sigma_{(1)} - \sigma_{(2)}$, F è mostrato in Figura 55.1. L'area definita da F il *superficie di rendimento*.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

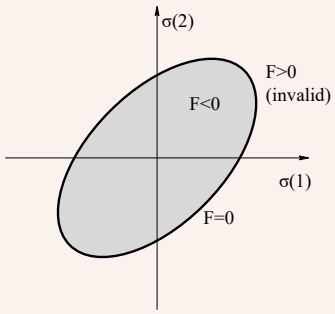
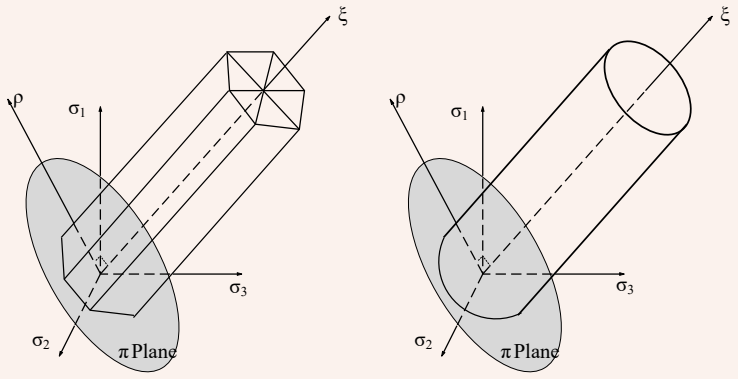


Figura 55.1: Superficie di usura; definizione

6 Ci sono due classi di superfici di resa: quelle indipendenti dallo stress idrostatico (Equazione O.2.2.1) e quelli che dipendono (Chen e Zhang, 1990).

55.2.1 Modelli indipendenti a pressione idrostatica

7 Per le superfici di resa indipendenti a pressione idrostatica (come per l'acciaio), i loro meridiani sono linee rette parallele all'asse idrostatico, quindi lo stress di taglio deve essere la causa principale della resa per questo tipo di materiale. Poiché è la grandezza dello stress della cesoia che è importante, e non la sua direzione, segue che il comportamento elastico-plastica nella tensione e in compressione dovrebbe essere equivalente per i materiali indipendenti di pressione idrostatica (come l'acciaio).



(a) Tresca (b) von Mises

Figura 55.2: Modelli indipendenti a pressione idrostatica

COPIA DI REVISIONE

Tresca: criterio postula che la resa avviene quando lo stress massimo della cinghia raggiunge un valore limite k, Figura 55.2a.

$$F\left(\max\left(\frac{1}{2}|\sigma_1-\sigma_2|,\frac{1}{2}|\sigma_2-\sigma_3|,\frac{1}{2}|\sigma_3-\sigma_1|\right)-k\right)=0$$

Da un test di tensione non assiale, si determina che $k=\sigma_y/2$, e da un puro test di taglio, $k=\tau_y$. Quindi a Tresca, resistenza alla trazione e forza della taglio sono collegati da

$$\sigma_y = 2\tau_y$$

Il criterio di Tresca può essere rappresentato anche come

$$2\sqrt{J_2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-\sigma_y=0 \text{ for } 0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$$

Il criterio Tresca è il primo proposto, utilizzato principalmente per problemi elastici-plastici; tuttavia, a causa degli angoli singolari, provoca numerosi problemi nell'analisi numerica.

Von Mises: Ci sono molteplici interpretazioni fisiche per il postulato dei criteri von Mises (tutti equivalenti), Figura 55.2b:

1. Il materiale si cederà quando il secondo invariante deviatorio di stress raggiunge un valore critico

$$F(J_2)=J_2-k^2=0 \tag{55.1}$$

2. Il materiale si cederà quando l'energia massima distorsional (shear) raggiunge lo stesso valore critico come per la resa, come nella tensione uniaxial.
3. Quando la distanza (ρ) tra il punto di stress P e l'asse idrostatico ξ è uguale a

$$\rho_0=\tau_y\sqrt{2}$$

Utilizzo dell'equazione 55.1 e dal test non assiale, k è uguale a $k=\sigma_y/\sqrt{3}$, e dal puro test di taglio, $k=\tau_y$. Quindi in von Mises, resistenza alla trazione e forza della taglio sono collegati da

$$\sigma_y=\sqrt{3}\tau_y$$

Quindi, possiamo riscrivere l'Equazione 55.1 as

$$f(J_2)=J_2-\frac{\sigma_y^2}{3}=0$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

55.2.2 Modelli a carico della pressione idrostatica

8 I materiali attriti sensibili alla pressione (come il suolo, la roccia, il cemento) devono considerare gli effetti sia del primo che del secondo invariante di stress, meglio spiegato in termini della superficie di resa.

9 Le sezioni trasversali di una superficie di resa sono le curve di intersezione tra la superficie del rendimento e il piano deviatorio (ρ, θ) che è perpendicolare all'asse idrostatico, ξe con ξ = costante. Le forme di sezione trasversale di questa superficie di resa avranno una simmetria tripla.

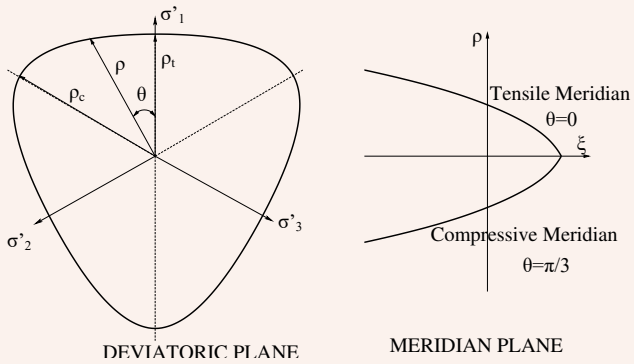


Figura 55.3: Superfici di resa dipendente dalla pressione

10 I meridiani di una superficie di resa sono le curve di intersezione tra la superficie e un piano meridiano (ξ, ρ) che contiene l'asse idrostatico. Il piano meridiano con $\theta = 0$ è il meridiano trasile e passa attraverso il punto di resa della trazione non assiale. Il piano meridiano con $\theta = \pi/3$ è il meridiano comprimitivo e passa attraverso il punto di resa della compressione non assiale, Figura 55.3. Il raggio di una superficie di resa sul meridiano trasile è ρ_t e sul meridiano di compressione è ρ_c.

Rankine: criterio postula che la resa avviene quando lo stress principale massimo raggiunge la resistenza alla trazione, Figura 55.4a.

$$\sigma_1 = \sigma_y; \quad \sigma_2 = \sigma_y; \quad \sigma_3 = \sigma_y;$$

Mohr-Coulomb: I criteri di portata massima sono un'estensione del criterio Tresca, la cui resistenza massima è una costante più una funzione dello stress normale che agisce sullo stesso piano, Figura 55.4b.

$$|\tau| = c - \sigma \tan\phi$$

dove c è la coesione e ϕ l'angolo di attrito interno. Entrambi c e ϕ sono proprietà materiali che possono essere calibrate da test di compressione non assiali e di trazione.

$$\begin{cases} \sigma_t &= \frac{2c\cos\phi}{1+\sin\phi} \\ \sigma_c &= \frac{2c\cos\phi}{1-\sin\phi} \end{cases}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

In termini di invarianti, i criteri Mohr-Coulomb possono essere espressi come:

$$\frac{1}{3}I_1 \sin\phi + \sqrt{J_2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{\frac{J_2}{3}}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\sin\phi - c\cos\phi = 0$$
$$\text{for } 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$$

Drucker-Prager: Il postulato è una semplice estensione del criterio von Mises per includere l'effetto della pressione idrostatica sulla resa dei materiali attraverso I_1, Figura 55.4c:

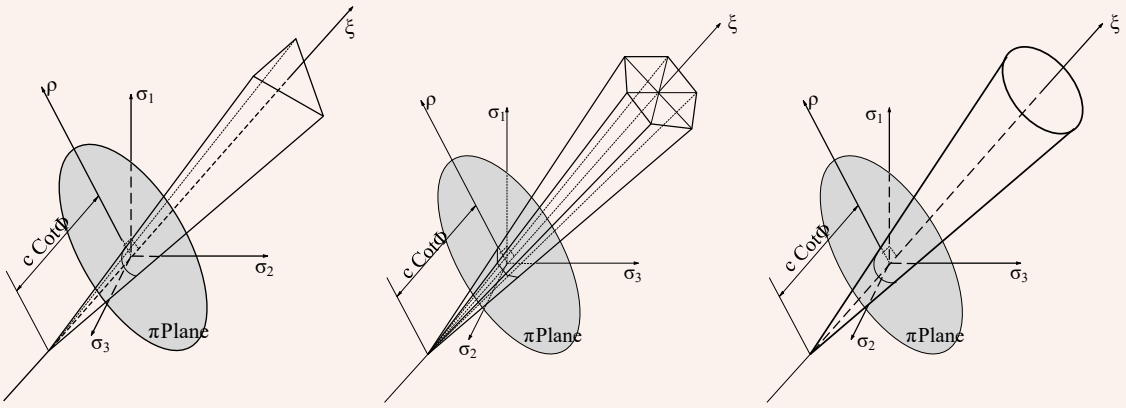
$$F(I_1, J_2) = \alpha I_1 + J_2 - k$$

I parametri di resistenza α e k può essere determinato dalla tensione e dai test di compressione non assiali:

$$\begin{cases} \sigma_t &= \frac{\sqrt{3}k}{1+\sqrt{3}\alpha} \\ \sigma_c &= \frac{\sqrt{3}k}{1-\sqrt{3}\alpha} \end{cases}$$

or

$$\begin{cases} \alpha &= \frac{m-1}{\sqrt{3}(m+1)} \\ k &= \frac{2\sigma_c}{\sqrt{3}(m+1)} \end{cases}$$



(a) Rankine (b) Mohr-Coulomb (c) Drucker-Prager

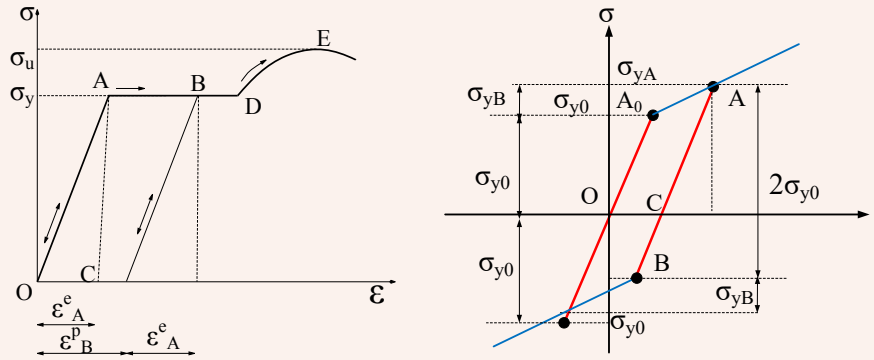
Figura 55.4: Modelli a carico della pressione idrostatica

COPIA DI REVISIONE

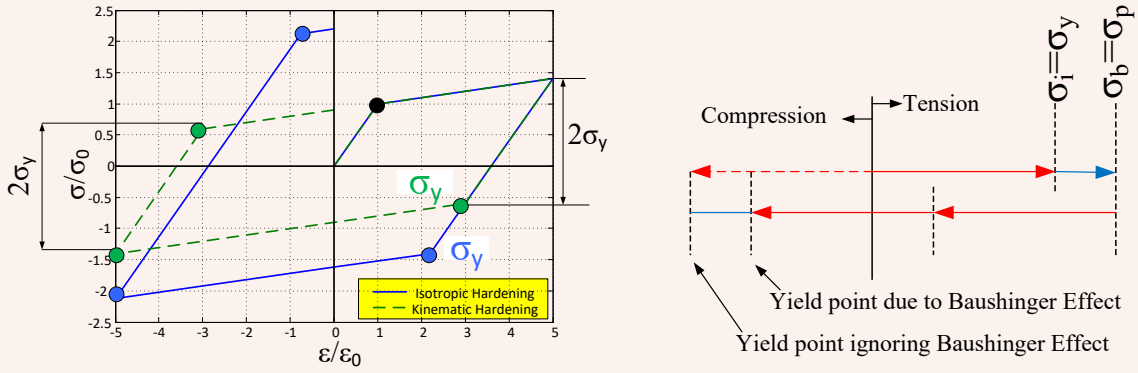
55.3 Osservazioni del laboratorio

55.3.1 Metalli

11 Caricamento e scarico di un tagliando in acciaio a varie fasi, Figura 55.5a, osserviamo che fino a A ci sarebbe uno scarico linearemente elastico seguendo il percorso iniziale di carico. Il comportamento O-A è indipendente dal percorso di carico; ad A raggiungiamo il limite elastico. Poi il materiale diventa plastica e si comporta irreversibilmente: La prima resa avviene (A-D) e poi indurimento. Su scarico, il materiale sperimenta tensione permanente o ceppo di plastica ε^p. Così, solo una parte della tensione totale ε_B at B viene recuperato dopo lo scarico, cioè la tensione elastica ε^e_A.



(a) Indurimento iotropo



(b) Indurimento cinetico; effetto Bauschinger

Figura 55.5: Stress-strain di metalli; effetto baushinger

12 L'indurimento dello strain in una direzione seguita da un carico rovesciato nell'altra porta ad una curva di sforzo differente rispetto a quella ottenuta dalla tensione pura o compressione. σ^B_y più piccolo di σ^0_y, e molto più piccolo rispetto allo stress precedente

COPIA DI REVISIONE

di resa A. Questo fenomeno è chiamato l'effetto Bauschinger, o indurimento cinetico (al contrario di isotropo indurito), Figura 55.5b.

13 Il comportamento dello stress-strain nella gamma di plastica dipende dal percorso, cioè la tensione non dipenderà dallo stato attuale della sollecitazione.

55.3.2 Concretamente

14 Concrete contiene microcracks a causa di restringimento ed è originariamente isotropica. Sotto compressione come lo stress raggiunge $\simeq 0.5 f_c'$, le crepe di interfaccia intorno agli aggregati si propagano e tendono ad allinearsi con lo stress della compressione. (Hsu et al., 1963) (Slate e Olsefski, 1963), Figura 55.6.

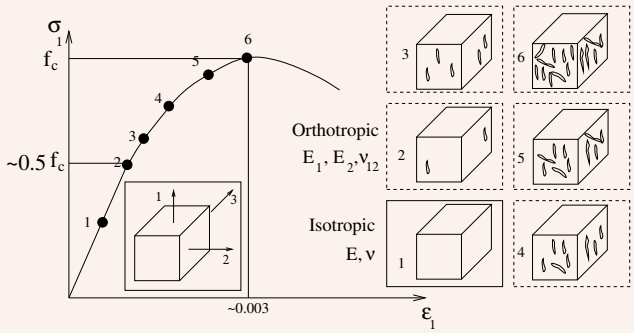


Figura 55.6: Micro-cracks concreti

15 Se viene applicato un carico, si verifica un improvviso fallimento al picco e se lo spostamento è imposto, si presenta l'ammorbidimento post-peak.

55.4 Insufficienza microscopica

55.4.1 Obbligazioni chimiche

16 La comprensione dei legami chimici è importante per spiegare sia il fallimento del duttile che lo spostamento, Figura 55.7. Gli atomi di legame ionico sono tenuti insieme da attrazione elettrostatica come gli elettroni vengono trasferiti da un atomo a uno vicino. L'atomo che rinuncia all'elettrone diventa carica positiva, e l'atoma ricevendolo diventa negativamente caricato. Un legame covalente si verifica quando gli elettroni sono condivisi più o meno allo stesso modo tra atomi vicini. Sebbene la forza elettrostatica di attrazione tra atomi adiacenti sia inferiore a quella dei legami ionici, i legami covalenti tendono ad essere altamente direzionali, il che significa che essi resistono al movimento degli atomoni l'uno all'altro. In un legame metallico, gli elettroni sono delocalizzati o distribuiti in modo equo attraverso un cristallo metallico e il legame non è localizzato tra due atomi.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

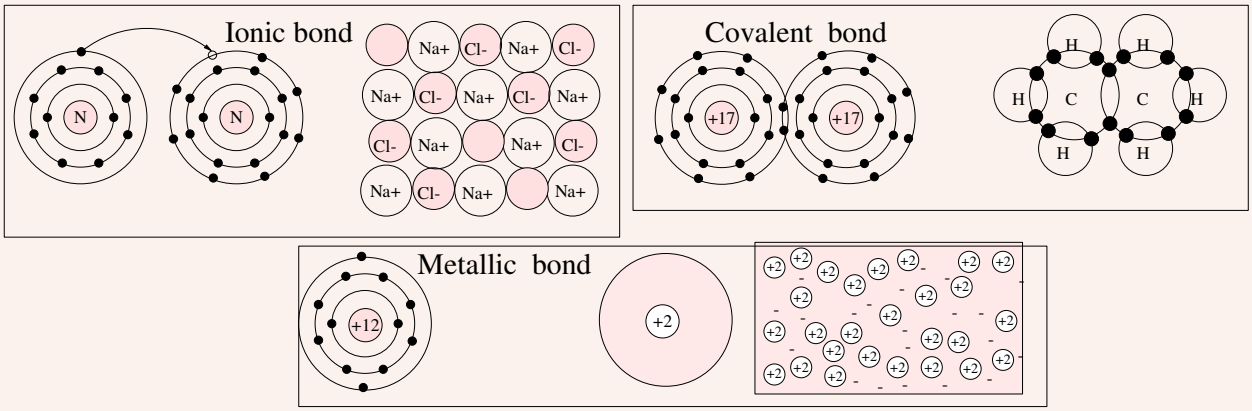


Figura 55.7: Obbligazioni chimiche

55.4.2 Insufficienza duttile e fragile

17 In un solido ionico, ogni ione è circondato da ioni caricati di fronte, quindi scivolare è molto più difficile da raggiungere, e il materiale risponde rompendo in un comportamento fragile, Figura 55.8Quando una forza di sufficiente grandezza sposta gli atomi da una posizione di equilibrio all'altra, abbiamo una deformazione plastica lungo il piano di scivolamento senza riguardo al vincolo della carica elettrica e quindi dà luogo ad una risposta duttile.

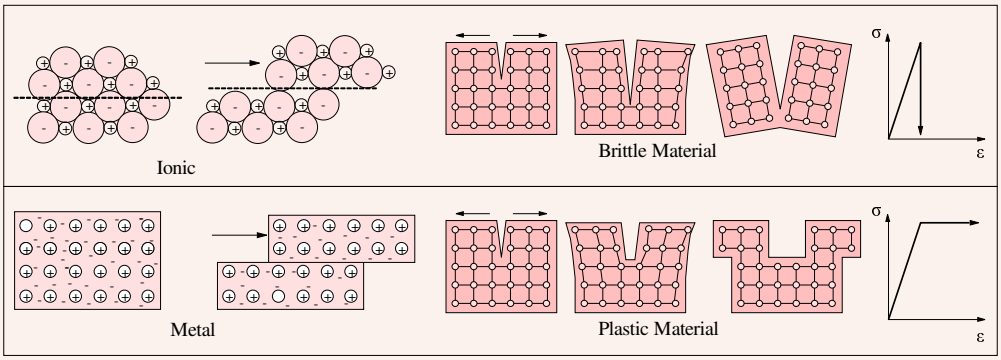


Figura 55.8: Obbligazioni duttili e fragili

55.4.3 Dislocazione

18 La forza teorica dei cristalli perfetti (stress che richiede per separare due atomi adiacenti) è circa $E/10$, ma non è mai raggiunto a causa della presenza di imperfezioni casuali. La dislocazione dei bordi è causata da difetti interni nel piano atomico. τ, c'è una forza di guida per rompere i legami atomici tra gli atomi A e C fino a quando la dislocazione non passa completamente dal cristallo, questo è chiamato scivolo dislocation, Figura 55.9.

19 Quando la dislocazione lascia il cristallo, ci sarà un offset permanente.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

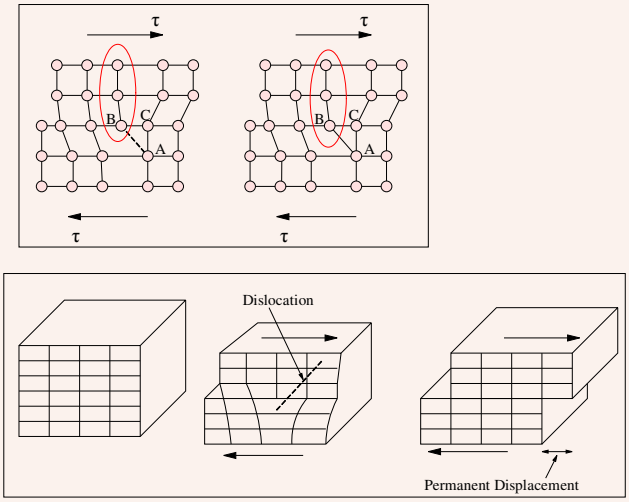


Figura 55.9: Dislocazione

20 Il *stress da rendimento* viene raggiunto una volta che lo stress applicato del taglio equivale allo sforzo di taglio necessario per fornire le dislocazioni con abbastanza energia per superare forze a corto raggio esercitate dagli ostacoli.

21 *Lavorare-Hardening* a sua volta può essere spiegato quando si moltiplicano le dislocazioni di deformazione plastica, e sono necessari maggiori stress per superare questa resistenza e l'indurimento della tensione.

22 Il *Effetto del Bauschinger* Quando si accumulano deformazioni o dislocazioni, causando cumuli dislocation. Poiché l'indurimento delle tensioni è correlato ad una maggiore densità di dislocalizzazione, riducendo il numero di dissaluzioni (attraverso lo stress inversione) riduce la forza.

55.5 Fondamenti di plasticità

55.5.1 Introduzione

23 Ci sono due principali teorie per l'elastoplasticità:

Teoria della deformazione (o Total) presuppone che la deformazione plastica possa essere caratterizzata dalla tensione totale, senza necessariamente considerare il percorso o la sequenza con cui tale sforzo è stato raggiunto. $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$ porta ad una formulazione di tipo setant della plasticità che si basa sulla decomposizione additiva del totale sforzo in componenti elastici e plastiche.

Teoria del tasso (Prandtl-Reuss), anche chiamata teoria incrementale o teoria del flusso,

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

descrive la deformazione plastica come processo dipendente dalla velocità, dove il tasso a cui viene applicato il carico influisce sulla risposta di plastica del materiale.

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p$$

La teoria dei tassi è intrinsecamente dipendente dal percorso, il che significa che la risposta plastica dipende non solo dallo stato attuale ma anche dalla storia e dalla velocità di carico. Questo lo rende più adatto per il carico non proporzionale e i casi in cui il caricamento cambia direzione o intensità nel tempo.

La teoria dei tassi è quella più ampiamente usata.

24 Con riferimento alla Figura 55.10, l'incremento totale della tensione può essere decomposto in un elastico e una plastica:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p$$

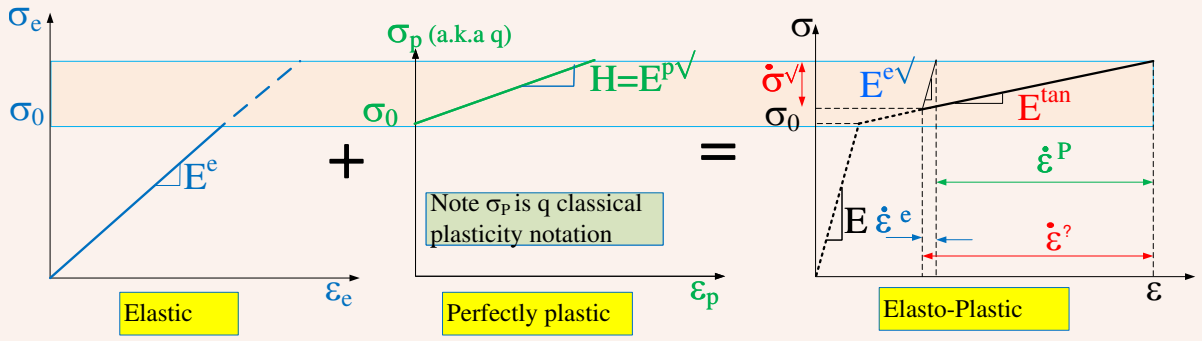


Figura 55.10: Elasto-plastic stress sforzo risposta

25 Tuttavia, conosciamo solo la parte elastica della legge costitutiva:

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \tag{55.2}$$

26 La varietà di plastica e il corrispondente incremento dello stress plastico sono:

$$\dot{\sigma_p} = \dot{q} = H\dot{\varepsilon^p} \tag{55.3}$$

dove H è il modulo di indurimento or .

55.5.2 Modulo elastico tangente

27 Con riferimento alla Figura 55.10, dato che il totale sforzo incrementale è $\dot{\varepsilon}$, ora cerchiamo di determinare lo stress plastico incrementale corrispondente, $\dot{\sigma}$, tale che

$$\dot{\sigma} = E^{tan}\dot{\varepsilon} \tag{55.4}$$

Ciò richiederebbe il cosiddetto modulo elastico tangente E^{tan} (non essere confuso con H).

28 Sono possibili due approcci:

COPIA DI REVISIONE

1. Meccanica 3D generalizzata; questo richiederà
   (a) Funzione di risanamento
   (b) Regola di flusso
   (c) Condizione della consistenza
2. Ingegneria 1D

Ciascuno sarà affrontato separatamente.

55.5.2.1 Derivazione generalizzata

55.5.2.1.1 Funzione di snervamento; modello isotropica indurimento

29 Il denota il livello attuale di stress meno lo sforzo iniziale di rendimento a cui si può aggiungere una funzione α che descrive il tipo di indurimento. In 1D, può essere definito come

$$h(\sigma, q) = |\sigma| - q \leq 0 \tag{55.5}$$

q determina il movimento e la deformazione della superficie di resa (Ardening o Softening). $h < 0$, allora lo stress è all'interno del dominio elastico e se $h = 0$, lo stress ha raggiunto il suo limite di plastica.

30 Prima la tensione raggiunge il rendimento ($\sigma_0 = \sigma_y$). A quel punto, un ulteriore aumento della tensione si traduce in una espansione q che a sua volta espanderà il dominio elastico.

55.5.2.1.2 Regola di flusso

31 Quando lo stress è all'interno della superficie di resa, è elastico, la legge di Hooke è applicabile, le tensioni sono recuperabili e non c'è dissipazione dell'energia . Quindi, quando il carico sulla struttura spinge il tenore di stress ad essere al di là della superficie di resa, il tensore di sforzo si blocca sulla superficie di rendimento e la struttura deforma plasticamente.

32 Se il materiale presenta indurimento invece di una risposta plastica elastica-perfetta, la superficie del rendimento si espande o si muove con il punto di stress ancora sulla superficie della resa.

33 La questione cruciale è quale sarà la direzione del flusso di plastica (cioè l'ampiezza relativa dei componenti delle $\boldsymbol{\varepsilon}^P$). Questa domanda è affrontata dalla regola del flusso, o la norma.

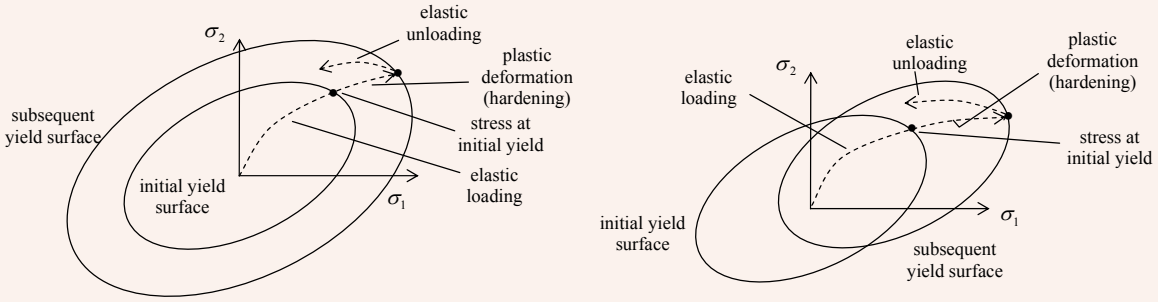
34 La regola di flusso assume che l'incremento della tensione plastica e il tenore deviatorio dello stress abbiano le stesse direzioni principali, e definisce l'evoluzione del ceppo plastico come:

$$\dot{\varepsilon}^p := \lambda \cdot \frac{\partial g(\sigma, \varepsilon^p, q)}{\partial \sigma} = \lambda \cdot h(\sigma,\ q) \tag{55.6}$$

dove $g(\sigma, \varepsilon^p, q)$ è il potenziale di plastica e λ è un moltiplicatore di plastica che misura l'entità della deformazione plastica (come vedremo più avanti, questo termine cadrà e porterà a E^{tan} che è ciò che alla fine cerchiamo).

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Isotropo (b) Kinematico

Figura 55.11: Modelli di indurimento

35 If $g \equiv h$, abbiamo una regola di flusso associata (solitamente in metalli). Se $g \neq h$ abbiamo una regola di flusso non associata (materiali e materiali che mostrano la dilatanza).

36 Per i modelli di indurimento isotropici e una regola del flusso associata,

$$g(\sigma, \varepsilon^p, q) = h(\sigma, q) = |\sigma| - q \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial \sigma} = \text{sign}(\sigma)$$

dove sign(σ) is 1 if $\sigma \geq 0$ or -1 if $\sigma < 0$. Poi dall'Equazione 55.6,

$$\dot{\varepsilon}^p = \lambda \cdot \text{sign}(\sigma)$$

or

$$\lambda = |\dot{\varepsilon}^p| \geq 0$$

37 Per semplicità e sotto l'assunzione di un materiale indurimento elasto-plastico con una curva bilineare,

$$h(\sigma,\ q) = -\frac{\partial g}{\partial q} = 1$$

Pertanto, possiamo esprimere lo stress (Equazione 55.2) as

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \Rightarrow \dot{\sigma} = E \cdot (\dot{\varepsilon} - \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma}) = E \cdot (\dot{\varepsilon} - \lambda \cdot \text{sign}(\sigma)) \tag{55.7}$$

e dall'Equazione 55.3

$$\dot{q} = H\dot{\varepsilon^p} \Rightarrow \dot{q} = H \cdot \lambda \cdot h(\sigma,\ q) = H \cdot \lambda \tag{55.8}$$

55.5.2.1.2.1 Condizioni Kuhn-Tucker

38 Nel regime elastico, la funzione di resa f deve rimanere negativo, e il moltiplicatore di plastica è zero. Durante il flusso di plastica, la funzione di resa f deve essere zero mentre il moltiplicatore di plastica è positivo.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

[39] Questi vincoli possono essere espressi in modo succinta dalla cosiddetta condizione Kuhn-Tucker,

$$\begin{aligned} \text{Elastic loading and unloading}: f < 0, \quad \dot{\gamma} = 0 \\ \text{Plastic loading}: f = 0, \quad \dot{\gamma} > 0 \end{aligned} \tag{55.9}$$

O combinato per il caso generale di $f \leq 0$ e $\dot{\gamma} \geq 0$:

$$f \cdot \dot{\gamma} = 0 \tag{55.10}$$

55.5.2.1.3 Condizione della consistenza

[40] Durante il caricamento in plastica, la via di stress è costretta a muoversi lungo la superficie del rendimento, quindi questa condizione di consistenza ci impedisce di andare oltre la superficie di resa ed è matematicamente espressa come $\dot{f}(\sigma, q) = 0$, or

$$\begin{aligned} \dot{f}(\sigma,\ q) &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \dot{q} = 0 \end{aligned} \tag{55.11}$$

55.5.2.1.4 Modulo tangente

[41] Ora, possiamo finalmente risolvere l'Equation 55.4

$$\dot{\sigma} = E^{tan} \dot{\varepsilon}$$

dove il modulo tangente è la pendenza della curva dello stress-strain a qualsiasi sforzo o tensione specificato. Sotto il limite proporzionale, il modulo tangente equivale al modulo di Young, da non confondere con $\dot{\sigma^p} = \dot{q} = H\dot{\varepsilon^p}$. Sostituire

Flow Rule Equation 55.7	$\dot{\sigma} = E \cdot (\dot{\varepsilon} - \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma})$
Equation 55.8	$\dot{q} = H \cdot \lambda \cdot h(\sigma,\ q)$
Consistency Equation 55.11	$\dot{f}(\sigma,\ q) = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \dot{q} = 0$

noi otteniamo

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot E \cdot \left(\dot{\varepsilon} - \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot H \cdot \lambda \cdot h(\sigma,\ q) = 0$$

[42] Perciò,

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot E \cdot \dot{\varepsilon}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot E \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma} - \frac{\partial f}{\partial q} \cdot H \cdot h(\sigma,\ q)}$$

Sostituire il nuovo

$$\dot{\sigma} = E \cdot (\dot{\varepsilon} - \dot{\gamma} \cdot \text{sign}(\sigma))$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

otteniamo un'espressione esplicita per lo stress incrementale,

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= E \cdot \left(\dot{\varepsilon} - \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma}\right) \\ &= \underbrace{\left(E - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot E^2 \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot E \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma} - \frac{\partial f}{\partial q} \cdot H \cdot h(\sigma,\ q)}\right)}_{(\textit{by definition})\ E^{tan}} \cdot \dot{\varepsilon}\end{aligned}$$

43 Per un materiale di indurimento elasto-plastico con una curva bilineare in una dimensione,

$$\lambda = \frac{\text{sign}(\sigma) \cdot E \cdot \dot{\varepsilon}}{E + H}$$

e il modulo tangente riduce a

$$\begin{aligned}E^{tan} &= E - \frac{\text{sign}(\sigma) \cdot E^2 \cdot \text{sign}(\sigma)}{\text{sign}(\sigma) \cdot E \cdot \text{sign}(\sigma) - (-1) \cdot H \cdot (1)} \\ &= E - \frac{E^2}{E + H} = \frac{E \cdot H}{E + H}\end{aligned} \tag{55.12}$$

Notare che se $H = E/9$Allora $E^{tan} = E/10$.

55.5.2.2 Modulo tangente; ingegneria

44 Una derivazione più semplice (e più intuitiva) del modulo tangente è derivata dopo.

45 La teoria dei tassi è definita da

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p$$

If $\sigma \leq \sigma_y$ (elasticità), allora

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e = \frac{\dot{\sigma}}{E}$$

e se $\sigma > \sigma_y$ (plasticità), allora

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= \dot{\varepsilon^e} + \dot{\varepsilon}^p \\ \dot{\varepsilon} &= \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\dot{\sigma}}{H} = \frac{\dot{\sigma}}{E^{tan}}\end{aligned}$$

dove

$$E^{tan} = \frac{E.H}{E + H}$$

46 Si noti che

$$E^{tan} = \begin{cases} > 0, & \text{Hardening} \\ = 0, & \text{Perfectly-Plastic} \\ < 0, & \text{Softening} \end{cases}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

47 E_t è indipendente dal tipo di indurimento (isotropico o cinetico).

48 Nota: C'è una controparte nell'analisi strutturale non lineare in cui cerchiamo di determinare la matrice tangente rigidità di un elemento a un determinato momento. La procedura è concettualmente identica a quella che è stata fatta analiticamente nella prima parte.

49 Notare l'analogia con un resistore equivalente quando più sono in parallelo.

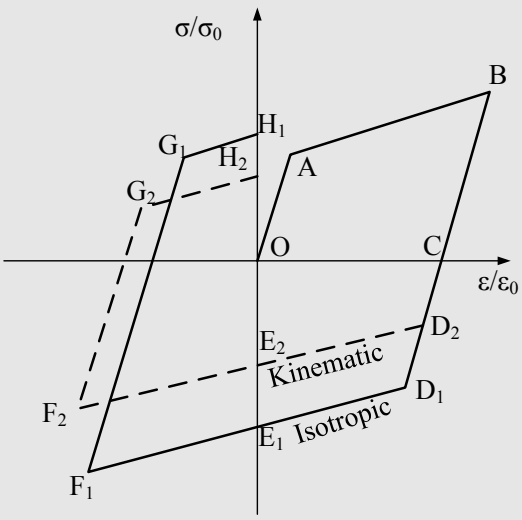
$$R_{eq} = \frac{R_1.R_2}{R_1 + R_2}$$

55.5.2.3 Ex 55.1: Modulo tangente

Il $\sigma - \varepsilon$ la risposta in una semplice tensione è approssimata dal seguente modello di indurimento lineare:

$$\begin{aligned} \sigma &= E\varepsilon; & 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0; \\ \sigma &= \sigma_0 + m\varepsilon^p; & \varepsilon_0 \le \varepsilon; \qquad \varepsilon_0 = \tfrac{\sigma_0}{E} \end{aligned}$$

dove $m = E/9$. Un elemento materiale subisce la seguente storia di ceppo non assiale: $\varepsilon = 0 \to \varepsilon_1$ (B) $\to 0$ (E) $\to -\varepsilon_1$ (F) $\to 0$ (H) e il caricamento iniziale termina a B dove $\varepsilon = \varepsilon_1$, $\sigma = (1.0+\alpha)\sigma_0$ con $0 \le \alpha \le 1.$. Cerchiamo di tabulare i risultati per A, B, C, D, E, F e G (stress e ceppo) in termini di α, e risultati della trama per $\alpha = 0.4$. Utilizzando la forma incrementale (dove sappiamo che la risposta dello stress-strain è lineare a seconda se è elastica o plastica), cerchiamo di risolvere per incremento della tensione totale: se elastico $d\varepsilon = d\sigma/E$ o se la plastica $d\varepsilon/dE^P$.



Indurimento iotropo

Premessa: Non dobbiamo confondere il modulo tangente e il modulo di plastica. Il modulo plastico: $d\varepsilon_p = d\sigma/E_p$ e il modulo tangente è $d\varepsilon = d\sigma/E_t$? $E^t = \frac{E.E_p}{E+E_p}$ dove $E_p = m = E/9$. Così, $E_t = E/10$.

A Questo è un punto intermedio in quanto la tensione sta aumentando da zero a $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$, e corrisponde a $\sigma_A = \sigma_0$ e $\varepsilon_A = \varepsilon_0$.

B Lo stress è dato da $\sigma_B = (1+\alpha)\sigma_0$. Per la tensione corrispondente, ci sono due modi per procedere

1. Utilizzo E_t: $\varepsilon_B = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{(1+\alpha)\sigma_0 - \sigma_0}{E/10} = (1+10\alpha)\varepsilon_0$
2. Utilizzo m $\sigma = \sigma_0 + m\varepsilon_p$; $\underbrace{(1+\alpha)\sigma_0}_{\sigma_B} = \sigma_0 + m(\varepsilon_B - \varepsilon_0)$; $\varepsilon_e = \frac{\sigma_0(1+\alpha)}{E}$; $\Rightarrow \varepsilon_B = (1+10\alpha)\varepsilon_0$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

C noi abbiamo $\sigma_C = 0$, e il materiale sta scaricando elasticamente con

$$\varepsilon_C = \varepsilon_B - \sigma_B/E = (1+10\alpha)\varepsilon_0 - \frac{(1+\alpha)\sigma_0}{E} = 9\alpha\varepsilon_0$$

D è un punto intermedio per la nostra escursione di ceppo $\varepsilon = \varepsilon_1$ to $\varepsilon = 0$. A questo punto, abbiamo **tempra isotropica**, così $\sigma_D = -\sigma_B = -(1+\alpha)\sigma_0$, e noi determinamo la tensione corrispondente dal punto B

$$\varepsilon_D = \varepsilon_B - 2\sigma_B/E = (1+10\alpha)\varepsilon_0 - 2\frac{(1+10\alpha)\sigma_0}{E} = (8\alpha - 1)\varepsilon_0$$

E Qui $\varepsilon_E = 0$, il materiale è sottoposto a carico di plastica e

$$\sigma_E = \sigma_D + \Delta\sigma = -(1+\alpha)\sigma_0 - E_t \underbrace{\Delta\varepsilon}_{\varepsilon_D} = \ldots = -(0.9+1.8\alpha)\sigma_0$$

F Lungo EF, il materiale è ancora nello stato di carico in plastica e $\varepsilon_F = -\varepsilon_B = -(1+10\alpha)\varepsilon_0$, il corrispondente σ_F si possono ottenere dalle seguenti relazioni: $\sigma_F = \sigma_D + \Delta\sigma$; $\Delta\sigma = E_t\Delta\varepsilon$; $\Delta\varepsilon = \varepsilon_F - \varepsilon_D$, sostituendo e andando indietro, otteniamo $\Delta\varepsilon = -18\alpha\varepsilon_0$; $\Delta\sigma = -1.8\alpha E\varepsilon_0$e $\sigma_F = -(1+2.8\alpha)\sigma_0$

G Il materiale è prima in uno stato di scarico e poi in un carico elastico inverso, e il caricamento plastico inizierà al punto G. A causa dell'assunzione di indurimento isotropico $\sigma_G = -\sigma_F = (1+2.8\alpha)\sigma_0$e $\varepsilon_G = \varepsilon_F + 2\sigma_F/E$ che corrisponde allo scarico elastico.

$$\varepsilon_G = -(1+10\alpha)\varepsilon_0 + 2(1+2.8\alpha) = (1-4.4\alpha)\varepsilon_0$$

H Il materiale è ora ricaricabile in plastica con $\varepsilon_H = 0$ e $\sigma_H = \sigma_G - E_t\varepsilon_G = (1+2.8\alpha)\sigma_0 + E_t(4.4\alpha - 1)\varepsilon_0$ or $\sigma_H = (0.9+3.24\alpha)\sigma_0$

Si nota come la determinazione di ogni stato n dipende semplicemente dagli stati a $n-1$.

Indurimento cinetico

Nota: i primi tre punti sono identici al modello di indurimento isotropico

A Questo è un punto intermedio in quanto la tensione sta aumentando da zero a $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$, e corrisponde a $\sigma_A = \sigma_0$ e $\varepsilon_A = \varepsilon_0$.

B Lo stress è dato da $\sigma_B = (1+\alpha)\sigma_0$. Per la tensione corrispondente, $\sigma = \sigma_0 + m\varepsilon_p$; $\underbrace{(1+\alpha)\sigma_0}_{\sigma_B} = \sigma_0 + m(\varepsilon_B - \varepsilon_e)$; $\varepsilon_e = \frac{\sigma_0(1+\alpha)}{E}$; $\Rightarrow \varepsilon_B = (1+10\alpha)\varepsilon_0$

C noi abbiamo $\sigma_C = 0$, e il materiale sta scaricando elasticamente con

$$\varepsilon_C = \varepsilon_B - \sigma_B/E = (1+10\alpha)\varepsilon_0 - \frac{(1+10\alpha)\sigma_0}{E} = 9\alpha\varepsilon_0$$

D è un punto intermedio per la nostra escursione di ceppo $\varepsilon = \varepsilon_1$ to $\varepsilon = 0$. A questo punto, abbiamo **indurimento cinematico**, così $\sigma_D = \sigma_B - 2\sigma_0 = (\alpha - 1)\sigma_0$, e noi determinamo la tensione corrispondente dal punto C

$$\varepsilon_D = \varepsilon_C + \sigma_D/E = 9\alpha\varepsilon_0 + \frac{(\alpha-1)\sigma_0}{E} = (10\alpha - 1)\varepsilon_0$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

E Qui $\varepsilon_E = 0$, il materiale è sottoposto a carico di plastica e

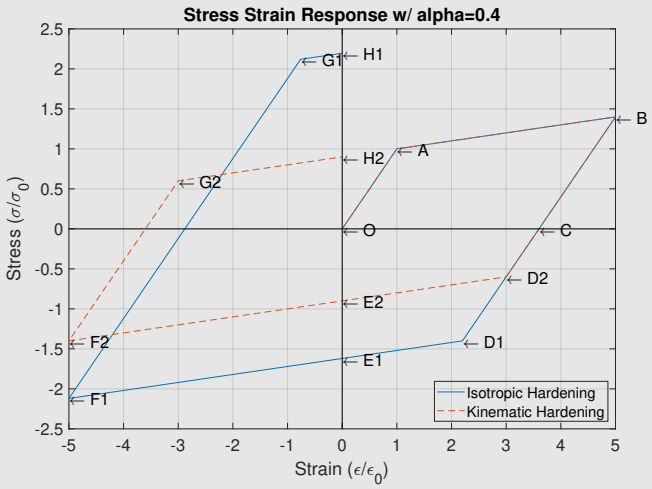
$$\sigma_E = \sigma_D + \Delta\sigma = (\alpha - 1)\sigma_0 - E_t \underbrace{\Delta\varepsilon}_{\varepsilon_D} = \ldots = -0.9\sigma_0$$

F Lungo EF, il materiale è ancora nello stato di carico in plastica e $\varepsilon_F = -\varepsilon_B = -(1 + 10\alpha)\varepsilon_0$, il corrispondente σ_F si possono ottenere dalle seguenti relazioni: $\sigma_F = \sigma_D + \Delta\sigma$; $\Delta\sigma = E_t\Delta\varepsilon$; $\Delta\varepsilon = \varepsilon_F - \varepsilon_D$, sostitutiva, otteniamo $\sigma_F = -(1 + \alpha)\sigma_0$

G Il materiale è prima in uno stato di scarico e poi in un carico elastico inverso, e il caricamento plastico inizierà al punto G. A causa dell'assunzione di **indurimento cinematico** $\sigma_G - \sigma_F = -(\sigma_D - \sigma_B)$ or $\sigma_G = -\sigma_0 - \alpha\sigma_0 + \sigma_0 + \alpha\sigma_0 - \alpha\sigma_0 + \sigma_0 = (1 - \alpha)\sigma_0$

$$\varepsilon_G = \varepsilon_F + \frac{\sigma_G - \sigma_F}{E} = -\varepsilon_0 - 10\alpha\varepsilon_0 + (1 - \alpha)\varepsilon_0 + (1 + \alpha)\varepsilon_0 = (1 - 10\alpha)\varepsilon_0$$

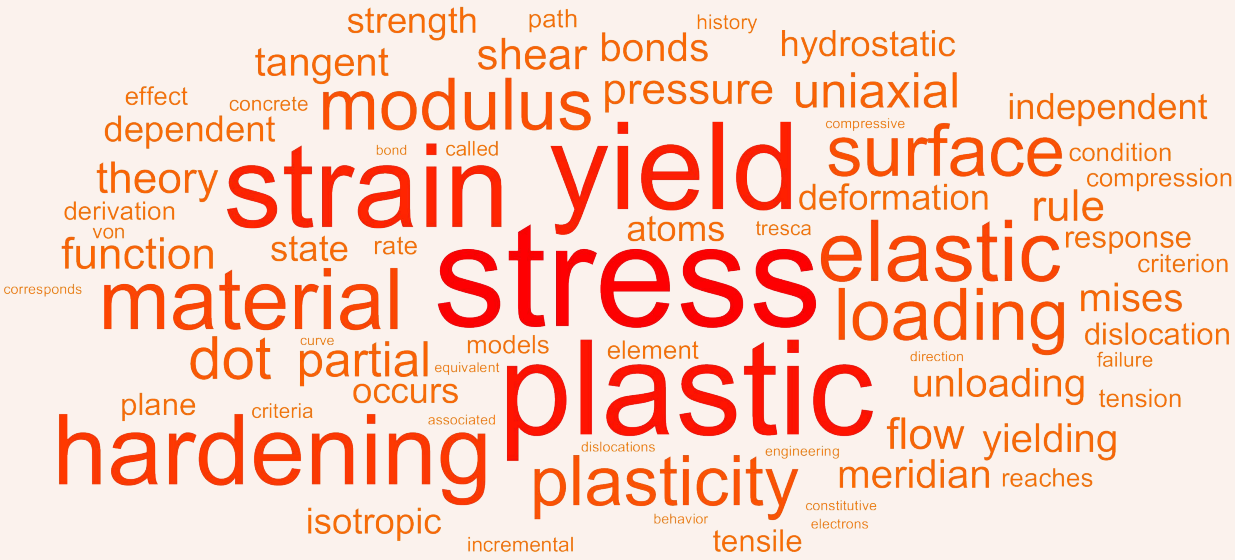
H Il materiale è ora ricaricabile in plastica con $\varepsilon_H = 0$ e $\sigma_H = \sigma_G - E_t\varepsilon_G = (1 - \alpha)\sigma_0 - \frac{1}{10}(1 - 10\alpha)\sigma_0 or \sigma_H = 0.9\sigma_0$



A MATLAB®La soluzione basata su questo problema è data nell'Appendice I.3.1.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

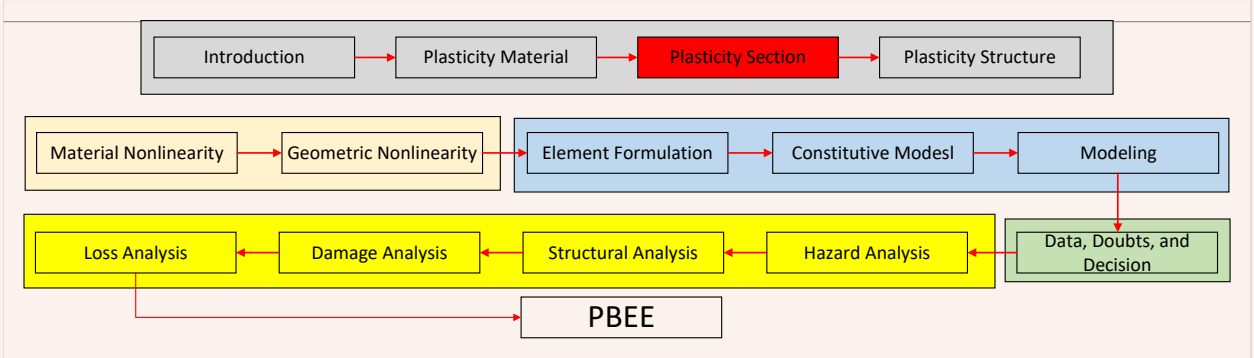
Capitolo 56

Plasticità II; Sezioni:

Abstract

In seguito alla plasticità del punto, questo capitolo si concentra sulla plasticità sezionale. Prima di tutto riesamineremo il rapporto della curvatura del momento e poi lo applicheremo all'analisi non lineare dello pushover di una colonna d'acciaio. Poi, partizioniamo la sezione in strati, e piuttosto che ricorrere a un $M-\phi$ relazione, si trarrà se dall'applicazione di un $\sigma-\varepsilon$ uno applicato sugli strati di secione, che verrà poi applicato allo stesso pushover precedentemente analizzato e lo applichiamo per verificare l'accuratezza del blocco dello stress Whitney nei travi in cemento armato. Infine, l'approccio a strati sarà generalizzato a sezioni arbitrarie mediante un procedimento analitico o numerico.

56.1 Introduzione 1922
56.2 Quadro teorico: ipotesi e risultati chiave 1922
56.3 Momento-curvatura; $M-\Phi$ 1924
56.3.1 Dal momento della curvatura relazione 1925
56.3.2 Dalla relazione tensione–deformazione 1928
56.4 Curvatura del momento, generalizzazione 1936
56.4.1 Approccio analitico 1936
56.4.2 Approccio numerico 1943



COPIA DI REVISIONE

56.1 Introduzione

1 Nel capitolo precedente, la nostra analisi si è concentrata sullo stress-strain ($\sigma - \varepsilon$) risposta a un punto Gauss specifico, che si basa su questa comprensione fondamentale, il presente capitolo si concentra sull'esplorazione della curvatura del momento ($M - \Phi$) relazione alla sezione trasversale di un elemento trave-colonna. Questo rapporto è un descrittore critico del comportamento strutturale in curva e può essere determinato sia attraverso l'osservazione sperimentale o decompondo computazionalmente la sezione trasversale in fibre discrete, ognuna governata dalle rispettive stress-strain ($\sigma - \varepsilon$) legge costitutiva.

56.2 Quadro teorico: ipotesi e risultati chiave

2 Per comprendere correttamente le derivazioni che seguono, è essenziale delineare diverse considerazioni critiche che sostituiscono il quadro teorico.

Assunzioni

Forza: Consideriamo entrambe le forze assiali, N, e momento di piegatura, M, come i carichi primari che agiscono sulla sezione.

Aereo Sezioni aeroplani (Ipotesi di Bernoulli): L'ipotesi che le sezioni piane rimangano sotto deformazione è fondamentale, assicurando la distribuzione lineare della tensione attraverso la profondità della sezione.

Bond perfetto (per cemento armato): Nel caso dei membri del cemento armato (R/C), presumiamo che esista un legame perfetto tra rinforzo in acciaio e calcestruzzo, consentendo la compatibilità delle tensioni tra materiali.

Equazioni di governo

Equilibrio delle Forze e dei Momenti: Le condizioni di equilibrio alla sezione trasversale assicurano che le forze interne e i momenti controbilanciano le condizioni di carico esterne.

Compatibilità di Strain e Curvatura: La distribuzione dello strain attraverso la sezione si presume correlare con curvatura, $\varepsilon = \Phi \cdot y = \frac{M}{E \cdot I} \cdot y$, collegando il momento applicato alla curvatura risultante attraverso proprietà materiali e geometriche.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Leggi costituenti

Relazione momento–curvatura ($M - \Phi$): Questa relazione caratterizza la rigidezza e la risposta flessionale della sezione, riflettendo la capacità del materiale di resistere alla flessione.

Stress-Strain Relationship (Raccolta)$\sigma - \varepsilon$): Governando ogni fibra materiale, questa legge definisce come ciascun segmento risponde allo stress, fondamentale per sezioni composte dove interagiscono più materiali.

Curvatura Definito come rotazione per unità di lunghezza del fascio (§22.3), curvatura Φ a qualsiasi sezione trasversale è espressa come:

$$\Phi = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

dove ρ rappresenta il raggio di curvatura, θ la rotazione angolare, e y la deflezione.

Reddito

Momento-Curvatura ($M - \Phi$): Un rapporto chiave per valutare le prestazioni flessografiche.

Risposta di carico-deflection (Pushover, $P - \Delta$): Valuta la progressiva deflezione della struttura sotto carico crescente, indicativo di comportamento duttile.

Diagramma di interazione ($M - N$): Descrive l'interazione tra momento e forza assiale, essenziale per il design sotto carico combinato.

Rapporto di duttilità[1]**:**

$$\xi = \frac{\Phi_u}{\Phi_y}$$

dove Φ_u è la curvatura finale a guasto (definita da una tensione di compressione del calcestruzzo limitante), e Φ_y è la curvatura a resa, marcando il rendimento iniziale del rinforzo della trazione.

[3] È importante notare che, per semplicità ed efficienza, un approccio non a strati è tipicamente impiegato nell'analisi $M - \Phi$ per i membri dell'acciaio, mentre un approccio stratificato è preferito per il cemento a tenere conto del suo comportamento più complesso e non lineare. Questa scelta riflette le caratteristiche di duttilità e legame variabili inerenti ad ogni materiale.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

56.3 Momento-curvatura; $M - \Phi$

4 Il *istante-curvatura* ($M - \Phi$) il rapporto è uno strumento fondamentale nell'ingegneria strutturale utilizzato per comprendere e prevedere il comportamento flessografico di travi e colonne sotto carichi pieganti.

5 Definisce il collegamento tra il momento di piegatura applicato (M) e la curvatura risultante (Φ), che è il tasso di cambio della rotazione angolare per lunghezza unitaria lungo la trave. Questo rapporto è fondamentale per analizzare gli elementi strutturali perché fornisce informazioni su come una sezione trasversale deforma e trasporta carichi, aiutando gli ingegneri a garantire la stabilità e la sicurezza delle strutture.

6 L'analisi della curvatura del momento è essenziale per diversi motivi:

- **Predivisione della rigidità flessorale:** Permette agli ingegneri di valutare la rigidità di una sezione, che è la resistenza della sezione alla flessione.
- **Comprendere la Duttilità:** La duttilità, o la capacità di una sezione per deformare senza fallire, è fondamentale per le strutture nelle regioni sismiche. Le relazioni tra il cambiamento e la curvatura aiutano a quantificare la duttilità mostrando quanto possa subire una sezione prima di raggiungere la sua forza finale.
- **Valutazione della capacità finale:** La capacità di momento finale (quando la sezione non riesce a piegarsi) è un parametro essenziale del design, in particolare per sezioni cementate o composte, dove il comportamento è spesso non lineare e complesso.

7 Quando si tratta di comportamenti non lineari in travi o colonne, l'analisi può procedere in due modi principali:

1. Direttamente utilizzando un **relazione non lineare di curvatura**.
2. A partire da un **rapporto stress-strain non lineare** e derivando la risposta del momento-curvatura.

8 Il calcolo della curvatura del momento comporta sia proprietà geometriche che materiali della sezione:

1. **Assunzioni e Geometria:** In genere, presumiamo che *sezioni piane rimangono* sotto la flessione (ipotesi di Bernoulli), il che significa che la distribuzione della tensione attraverso la profondità del tratto rimane lineare, semplificando così il rapporto tra sforzo e curvatura in tutta la sezione.
2. **Sezione/Legge costitutive materiali:** abbiamo una delle due possibili caratterizzazioni:

   Momento-Curvatura è dato come $M - \Phi$. questo è il caso più semplice, e questo sarebbe un *sezione* caratteristica.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Stress-Strain è il caso più generale. *strato o fibra* caratterizzazione.

Si noti che nel primo caso, l'intera sezione subisce la plastificazione simultaneamente, mentre nella seconda si verifica plastificata progressivamente attraverso la sezione.

3. **Decomposizione del livello o della fibra:** (solo quando viene somministrata la tensione di stress e non il rapporto di curvatura del momento). La sezione trasversale è divisa in piccoli elementi o fibre, ciascuno con una propria risposta a sforzo-strain. Per una determinata curvatura, la tensione in ogni fibra viene calcolata sulla base della sua distanza dall'asse neutro e le tensioni corrispondenti sono ottenute dalle leggi materiali. Si noti che questo può essere eseguito analiticamente (non ha bisogno di uno strato/fibra esplicita in quanto è sostituito da dy) o numericamente. Si noti che questo condurrà, intermediamente a una relazione di curvatura del momento.
4. **Integrazione delle Forze Interne:** Le forze interne (stress) in ogni sezione/fibra sono integrate attraverso la sezione per determinare il momento di piegatura risultante (M). Questo processo viene ripetuto per aumentare i valori di curvatura, creando un $M - \Phi$ curva che mostra come la sezione si comporta mentre subisce una flessione progressiva.
5. **Analisi non lineare:** Come aumenta la curvatura, $M - \Phi$ la relazione diviene tipicamente non lineare, soprattutto in sezioni di cemento armato dove il calcestruzzo inizia a rompere e i rendimenti d'acciaio. Questa risposta non lineare è cruciale per comprendere la piena capacità flessorale e il comportamento post-yield della sezione.

9 L'analisi della curvatura del momento è ampiamente applicata in:

- **Progettazione di api e colonne:** Determinare il comportamento della sezione sotto carichi di piegatura, che informa le decisioni sulle dimensioni, sui rinforzi e sulla selezione dei materiali.
- **Progettazione sismica:** Assicurare che gli elementi strutturali abbiano una duttilità sufficiente e capacità di dissipazione dell'energia.
- **Modello di elementi finiti non lineari:** Fornire input per simulazioni dettagliate di complessi sistemi strutturali in varie condizioni di carico.

10 Nel complesso, il $M - \Phi$ relazione offre una comprensione dettagliata delle prestazioni flessografiche, consentendo agli ingegneri di progettare strutture più sicure e resilienti predicendo con precisione come gli elementi si comporteranno in condizioni di carico reali.

56.3.1 Dal momento della curvatura relazione

11 la procedura è abbastanza molto semplice ed è illustrato dal prossimo esempio.

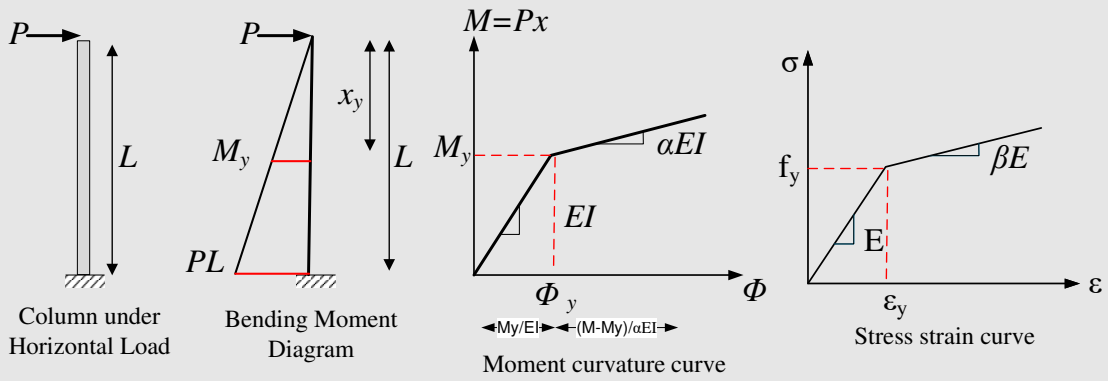
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

56.3.1.1 Ex 56.1: Analisi sezionale non lineare; analisi analitica

Parte I: Sezione

Cerchiamo di determinare e tracciare la relazione di curvatura del momento per il seguente problema.



Resa si verifica a x_y tale

$$x_y = \frac{M_y}{P} \leq L$$

Curvature sono dati da

$$\Phi = \begin{cases} \frac{P.x}{E.I} & \text{if } x < x_y \\ \frac{M_y}{E.I} + \frac{P.x - M_y}{\alpha.E.I} & \text{if } x > x_y \end{cases}$$

Slocamento si ottiene dal principio del lavoro virtuale complementare (forza virtuale)

$$\begin{aligned} \delta\overline{M} &= x \\ \delta\overline{P}\Delta &= \int_0^L \delta\overline{M}.\Phi dx = \int_0^L x\ .\Phi.dx \\ &= \int_0^{x_y} x\frac{P.x}{E.I}dx + \int_{x_y}^L x\left(\frac{M_y}{E.I} + \frac{P.x - M_y}{\alpha.E.I}\right)\cdot dx \\ &= \frac{P.{x_y}^3}{3.E.I} + \frac{3\left(-1+\alpha\right)M_y\left(L^2 - {x_y}^2\right) + 2.P\left(L^3 - {x_y}^3\right)}{6E.I.\alpha} \end{aligned}$$

Sostituzione of $x_y = M_y/P$ dà Slocamento forzato o Pushover

$$\Delta = \frac{2L^3P^3 - (\alpha - 1)M_y\left(M_y^2 - 3L^2P^2\right)}{6\alpha EIP^2}$$

che è chiaramente non lineare relazione.

```
clear all;clc;close all
% Initialization for figures
```

COPIA DI REVISIONE

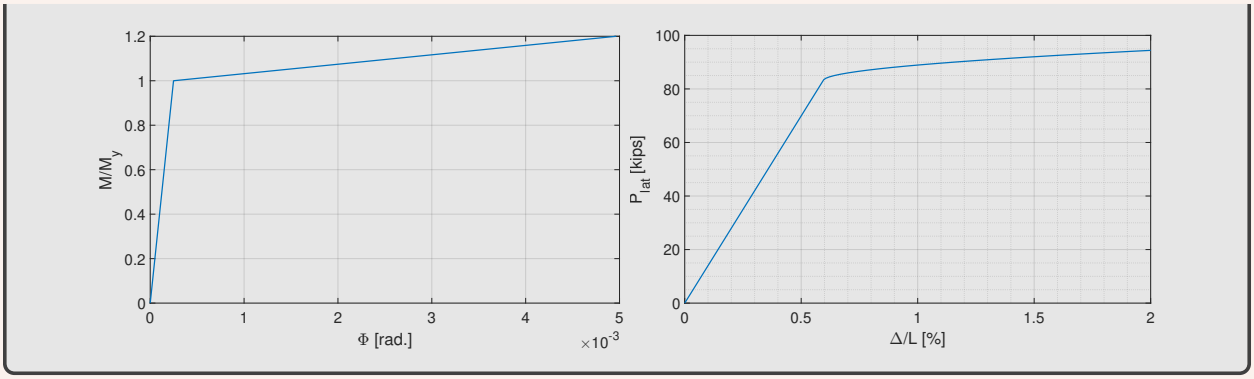
```
fs = 24;scrsz = get(0,'ScreenSize');figpos = [2 2 scrsz(3)/2 scrsz(4)/2];
% units: kips in; Rectangular section (to make it simpler)
E=29000;fy=36;h=10;h2=h/2;b=10;beta=0.01;I=b*h^3/12;
L=6*12;alpha=0.01;S=I/h2;%7 ft long column; 10x10 inch
EI=E*I; My=S*fy; Phiy=My/EI;A=b*h;
%
    ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

% P A R T  I;
%
    ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

%=======================
% MOMENT CURVATURE PLOT
%=======================
M(1) = 0; Phi(1) = 0.;M(2) = My; Phi(2) = Phiy;
M(3) = 1.2*M(2); Phi(3) = (M(3)-My)/(alpha*EI);
figure('Position',figpos); set(gca,'FontSize',28);
plot(Phi,M/My,'LineWidth',2)
xlabel('\Phi [rad.]'); ylabel('M/M_y');
grid ; set(gca,'fontsize',fs);set(gca, 'color', 'none');
exportgraphics(gca,'NonLayeredMomentCurvature.pdf','BackgroundColor','
    none')
%==========================
% LOAD DISPLACEMENT PLOT
%==========================
DeltaP=0.5;P(1)=0.0; Delta(1)=0;
for i=2:1000
P(i) = P(i-1)+DeltaP;
xy = My/P(i);
if xy>L
Delta(i) = P(i)*L^3/(3*E*I);
else
Delta(i) = (2*L^3*P(i)^3 - My*(My^2 - 3*L^2*P(i)^2)*(-1 + alpha))/...
(6.*EI*P(i)^2*alpha);
end
end
%
figure('Position',figpos); set(gca,'FontSize',28);
plot(100*Delta/L,P,'LineWidth',2)
xlabel('\Delta/L [%]'); ylabel('P_l_a_t [kips]');xlim([0,2])
grid;grid minor;
set(gca,'fontsize',fs);set(gca, 'color', 'none');
exportgraphics(gca,'NonLayeredLoadDisplacement.pdf','BackgroundColor','
    none')
Delta0=Delta;P0=P; % Store results for Part II
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



56.3.2 Dalla relazione tensione–deformazione

12 Nella sezione precedente abbiamo considerato l'intera sezione potenziale plastificazione, in realtà è un progressivo progresso che inizia alle fibre estreme e quello che gradualmente si muove verso l'asse neutro.

13 Si può garantire un approccio reined, che si realizzerà tenendo conto di *strati di strati* della sezione trasversale che può agire indipendentemente da quelle adiacenti, e cioè esamineremo la progressiva plastificazione degli strati esterni fino al raggiungimento dell'asse neutro.

14 Pertanto, dobbiamo caratterizzare ogni strato per la sua equazione costitutiva in termini di $\sigma - \varepsilon$, e poi derivare

1. Rapporto di curvatura non lineare del momento (da contrastare con quello bilineare precedentemente assunto.
2. Correspondente della forza di spostamento relazione.

15 Quando si parte da un rapporto non lineare tra stress e resistenza, la curvatura deriva dall'integrazione del comportamento non lineari del materiale attraverso la sezione trasversale.

16 In questo caso, stress σ è una funzione non lineare di sforzo ϵ:

$$\sigma = g(\epsilon)$$

dove $g(\epsilon)$ rappresenta la risposta materiale non lineare, come l'indurimento in metalli o compressione non lineari in calcestruzzo.

17 Analisi:

1. **Distribuzione di Strain in Bending**: Quando una sezione del fascio si piega, la tensione $\epsilon(y)$ a distanza y dall'asse neutro è proporzionale alla curvatura:

$$\epsilon(y) = -\kappa y$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

2. **Stress non lineare da Strain Nonlineare**: Applicare il rapporto non lineare tra stress e resistenza $\sigma = g(\epsilon)$, lo stress a qualsiasi fibra y is:

$$\sigma(y) = g(-\kappa y)$$

3. **Integrazione per il Bending Moment**: Il momento di piegatura M si ottiene integrando la distribuzione dello stress sull'area trasversale A:

$$M = \int_A \sigma(y) \cdot y \, dA = \int_A g(-\kappa y) \cdot y \, dA$$

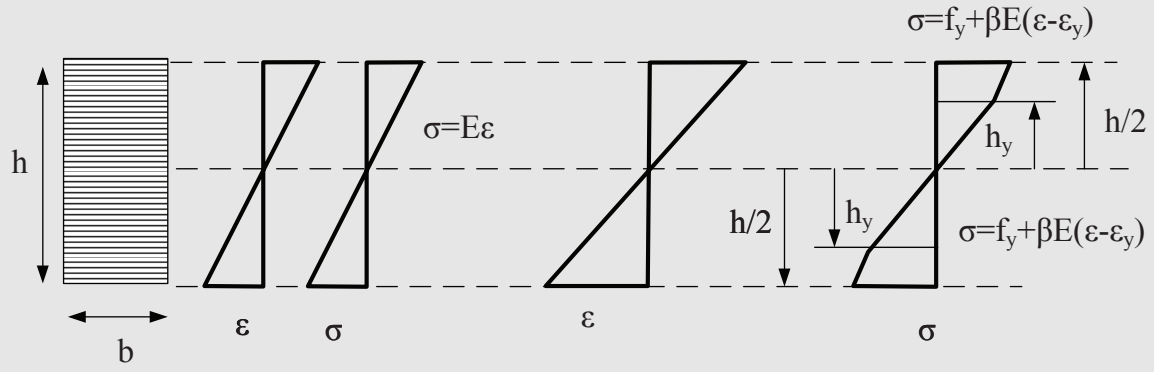
Questo integrale è tipicamente risolto numericamente a causa della non linearità di $g(\epsilon)$.

4. **Analisi dei pecess o degli incredibili**: Per una relazione di stress-strain senso pezzente, come ad esempio:

$$g(\epsilon) = \begin{cases} E\epsilon, & \epsilon \leq \epsilon_y \\ E'(\epsilon - \epsilon_y) + \sigma_y, & \epsilon > \epsilon_y \end{cases}$$

dove $E' < E$ rappresenta la rigidità post-yield, il rapporto di curvatura del momento diventa anche senso del pezzo e l'integrazione viene eseguita in sezioni.

56.3.2.1 Ex 56.2: Layered; acciaio



Considereremo la stessa sezione rettangolare come nell'esempio precedente

COPIA DI REVISIONE

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Parte I: derivazione dell'equazione momento–curvatura

- La risciacquo si verifica prima alle fibre esterne x_y tale che (e ricordando che $\Phi = \varepsilon/y$, Eq. 22.15):

$$P.x_y = E.I.\Phi_y = E.I\frac{\varepsilon_y}{h/2} \Rightarrow x_y = \frac{2.f_y.I}{P.h} \leq L$$

- La curvatura massima sotto la quale tutti gli stress sono elastici è data da

$$\Phi_y = \frac{2.f_y}{E.h}$$

- If $h \leq h_y$, poi abbiamo una distribuzione lineare dello stress elastico e

$$\Phi = \frac{M}{E.I} = \frac{P.x}{E.I}$$

- If $h > h_y$, poi a distanza h_y dall'indurimento dell'asse neutro inizia e

$$h_y = \frac{f_y}{E.\Phi} \leq \frac{h}{2}$$

- Le sollecitazioni sono date da

$$\sigma_{xx} = \begin{cases} E.\varepsilon & \text{if } h < h_y \\ f_y + \beta E.(\varepsilon - \varepsilon_y) & \text{if } h_y < h \end{cases}$$

- Ricordare che $\varepsilon = \Phi y$, il momento di resistenza interno sarà così dato da

$$\begin{aligned} M &= \int_{-h/2}^{h/2} b.\sigma_{xx}.y.dy \\ &= 2.b.\int_0^{h_y} E.(\Phi.y).y dy + 2b\int_{h_y}^{h/2} [f_y + \beta.E.(\Phi y - \varepsilon_y)].y.dy \\ &= 2E.b.\Phi\int_0^{h_y} y^2.dy + 2b\int_{h_y}^{h} \left[f_y.y + \beta.E.\Phi.y^2 - \beta f_y.y\right] dy \\ &= \frac{-\left(b\left(3.f_y\left(h^2 - 4.{h_y}^2\right)(-1+\beta) + E\Phi\left(8{h_y}^3(-1+\beta) - h^3\beta\right)\right)\right)}{12} \end{aligned}$$

  Sostituire (utilizzando Mathematica) il valore di h_y, questo riduce a Moment Curvatura relazione

$$M = \frac{b\left(4{f_y}^3(-1+\beta) - 3E^2 f_y h^2\Phi^2(-1+\beta) + E^3h^3\Phi^3\beta\right)}{12E^2\Phi^2}$$

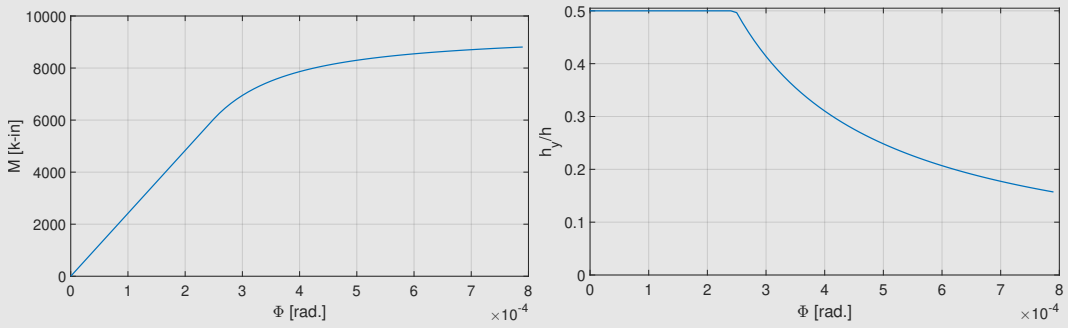
  che è essenzialmente un'espressione per il momento in termini di curvatura $\Phi > \Phi_y$.
- Armato di questa relazione, possiamo ripetere la procedura utilizzata nell'esempio precedente e applicare il principio della forza virtuale per determinare lo spostamento.
- Soluzione numerica:

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
%
    ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
% Note this is appended to the previoous Metlab code
% P A R T   II  L A Y E R E D   S E C T I O N
%
    ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

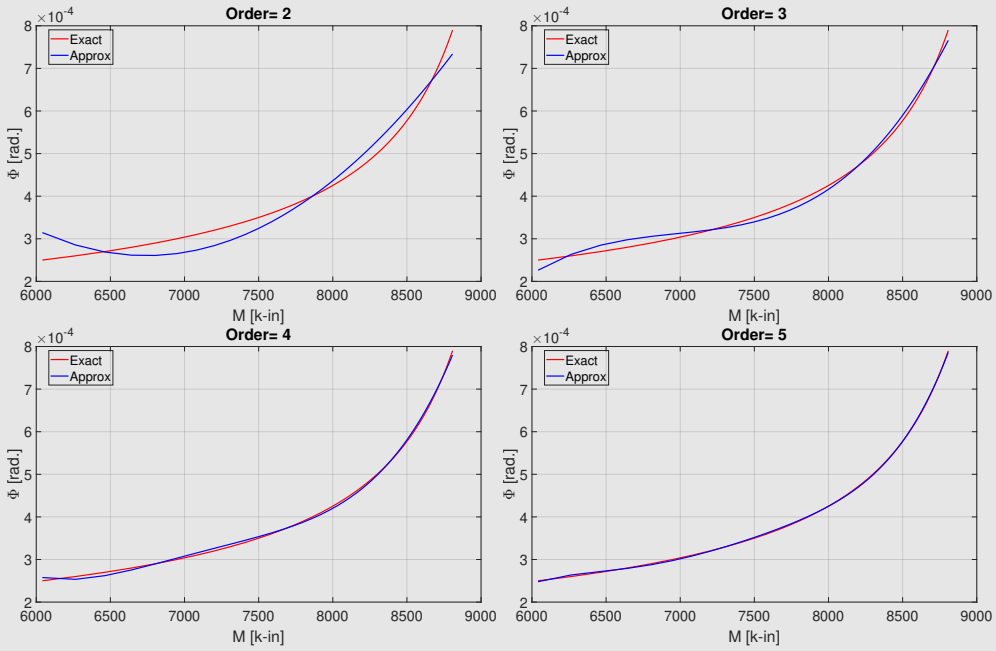
% Plot M-phi and h-phi for the section based on layers
% this is a section property, nothing to do with the actual column
%=========================================================================
clear P Delta phi M
epsiy=E/fy; phi_y=fy/(E*h2);delta=10^-5;phi(1)=0.;
M(1)=0.;hy(1)=h2;k=0;
for i=2:80
phi(i)=phi(i-1)+delta; hy(i)=fy/(E*phi(i));
if hy(i)>h2
M(i)=phi(i)*E*I; hy(i)=h2;
else
M(i)=(b*(4*fy^3*(-1 + beta) - 3*E^2*fy*h^2*phi(i)^2*(-1 + beta)...
+ E^3*h^3*phi(i)^3*beta))/(12.*E^2*phi(i)^2);
k=k+1;
nlphi(k)=phi(i); nlM(k)=M(i);
end
fprintf("i %6.0f hy %10.4e phi %10.4e phi_y %10.4e\n",i,hy(i),phi(i),
    phi_y);
end
figure('Position',figpos); set(gca,'FontSize',28);
plot(phi,M,'linewidth',2);
xlabel("\Phi [rad.]");ylabel("M [k-in]");grid;
set(gca,'fontsize',fs);set(gca, 'color', 'none');
exportgraphics(gca,'M-phi.pdf','BackgroundColor','none')
%
figure('Position',figpos); set(gca,'FontSize',28);
plot(phi,hy/h,'linewidth',2);
xlabel("\Phi [rad.]");ylabel('h_y/h');grid;
ylim([0.,0.505]);set(gca,'fontsize',fs);set(gca, 'color', 'none');
exportgraphics(gca,'h-phi.pdf','BackgroundColor','none')
```



COPIA DI REVISIONE

```
%=========================================================
% Fit polynomial in nonlinear portion of the curve
% =========================================================
for i=2:5
clear p
figure('Position',figpos); set(gca,'FontSize',28);
[p]=polyfit(nlM,nlphi,i); f=polyval(p,nlM);
fn=['Poly-fit-' num2str(i) '.pdf'];
plot(nlM,nlphi,'r',nlM,f,'b','linewidth',2);
asc=num2str(i);
lgnd=legend('Exact','Approx','Location','Best');
ylabel('\Phi [rad.]');
xlabel('M [k-in]');grid;title(['Order= ', asc])
set(gca,'fontsize',fs);set(gca, 'color', 'none');
fn=['Poly-fit-' num2str(i) '.pdf'];
exportgraphics(gca,fn,'BackgroundColor','none')
end
```

- Dal momento che avremo bisogno della relazione di curvatura-momento ($\Phi = \Phi(M)$), un polinomio viene quindi montato sulla parte non lineare della curvatura del momento.



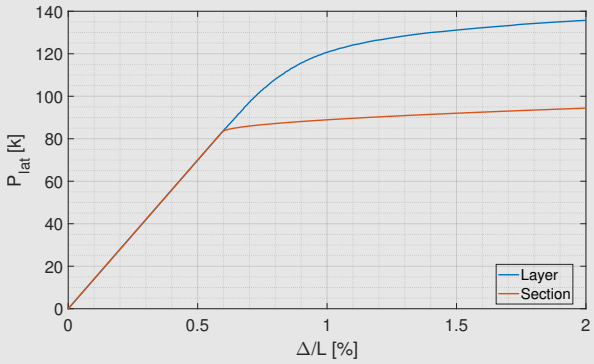
- Optando per uno di ordine 5, i coefficienti sono:

$$\Phi = 2.12\times10^{-20}M^5 - 7.58\times10^{-16}M^4 + 1.08\times10^{-11}M^3 - 7.71\times10^{-8}M^2 + 2.74\times10^{-4}M^2 - 3.88\times10^{-1}M$$

```
%=========================================================================
% Compute the deflection as in Part I but with the new M-phi relations
```

COPIA DI REVISIONE

```
%=========================================================================
P_y=2*fy*I/(h*L);
P_max=2*P_y;
np=400;
delta_P=P_max/np;
EI=E*I;delta_L=0.001*L;
%
P(1)=0.;delta(1)=0;
for i=2:np
P(i)=P(i-1)+delta_P; x_y(i)=2*fy*I/(h*P(i));
if x_y(i)>L
delta_1=P(i)*L^3/(3*EI);
% Entire Beam is in the linear range
delta_2=0.;
else
delta_1=P(i)*x_y(i)^3/(3*EI);
delta_2=0.;
for x=x_y(i):delta_L:L
M=P(i)*x; phi=polyval(p,M); delta_2=delta_2+phi*x*delta_L;
end
end
delta(i)=delta_1+delta_2;
end
%
figure('Position',figpos); set(gca,'FontSize',28);
plot(100*delta/L,P,100*Delta0/L,P0,'linewidth',2);grid;
xlabel("\Delta/L [%]");ylabel("P_l_a_t [k]");grid minor;
xlim([0,2]);lgd=legend('Layer','Section','location','best')
set(gca,'fontsize',fs);set(gca, 'color', 'none');set(lgd,'color','none');
exportgraphics(gca,'Pushover-Final.pdf','BackgroundColor','none')
```



Un'implementazione di un elemento finito stratificato sarà data tardi in §61.4.

COPIA DI REVISIONE

56.3.2.2 Ex 56.3: Strati; cemento/ACI

Cerchiamo di valutare l'adeguatezza dell'equazione ACI per la capacità flessorale ultima (Blocco dello stress del camino, Fig. 37.7) considerando la seguente curva di sforzo per cemento (Desayi, 1964) (altre equazioni sono state proposte da (Saenz, 1964), (Kent e Park, 1971) (Mander, Priestley e Park, 1988)).

$$\sigma = \frac{2\frac{f_c'}{\varepsilon_{max}}\varepsilon}{1+\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}}\right)^2}$$

dove f_c' corrisponde a ε_{max}. Determinaremo l'esatto rapporto di acciaio bilanciato per un raggio R/C con $b = 10''$, $d = 23''$, $f_c' = 4,000$ psi, $f_y = 60$ - Ok. $\varepsilon_{max} = 0.003$.

Momento finale M_u

Stress-Strain

$$\sigma = \frac{2\frac{4,000}{.003}\varepsilon}{1+\left(\frac{\varepsilon}{.003}\right)^2} = \frac{2.667\times 10^6\varepsilon}{1+1.11\times 10^5\varepsilon^2}$$

Compatibilità Assumere schiacciare a fallimento, quindi la distribuzione di tensione sarà data da

$$\varepsilon = \frac{0.003}{c}y$$

Combinate queste due equazioni:

$$\sigma = \frac{8,000\frac{y}{c}}{1+\left(\frac{y}{c}\right)^2}$$

La forza di compressione totale è data da

$$\begin{aligned} F &= \int_0^c dF = b\int_0^c \sigma dy = b\int_0^c \frac{8,000\frac{y}{c}}{1+\left(\frac{y}{c}\right)^2}dy = b\frac{8,000}{c}\int_0^c \frac{y}{1+\left(\frac{y}{c}\right)^2}dy \\ &= 8,000\frac{b}{c}\frac{1}{2\left(\frac{1}{c}\right)^2}\ln\left[1+\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]\Big|_0^c = 8,000\frac{b}{c}\frac{c^2}{2}\ln\left[1+\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]\Big|_0^c \\ &= 4,000bc\ln(2) = 2,773bc \end{aligned}$$

Equilibrio richiede che $C = T$

$$2,773bc = A_s f_y$$

Dal diagramma di deformazione:

$$\frac{.003}{c} = \frac{\varepsilon_y + .003}{d} \Rightarrow c = \frac{(.003)d}{\varepsilon_y + .003} \tag{56.1}$$

$$c = \frac{(.003)(23)}{\frac{60}{29,000} + .003} = 13.6\text{in.} \tag{56.2}$$

Combinando Eq. 56.3.2.2 con Eq. 56.2

$$A_s = \frac{(2,773)(10)(13.6)}{60,000} = 6.28\text{in.}^2$$

COPIA DI REVISIONE

Per determinare il momento, dobbiamo prima determinare il centroide della forza di compressione misurato dall'asse neutro

$$\overline{y} \overset{\text{def}}{=} \frac{\int y dA}{A} = \frac{b\int y \overbrace{\sigma dy}^{dC}}{C} = \frac{b\int_0^c y \frac{8,000\frac{y^2}{c}}{1+(y/c)^2} dy}{2,773bc} = \frac{8,000b}{2,773bc^2}\int_0^c \frac{y^2}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2 y^2} dy$$

$$= \frac{2.885}{c^2}\int_0^c \frac{y^2}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2 y^2} dy = \frac{2.885}{(13.61)^2}\left[\frac{y}{\left(\frac{1}{c}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{c}\right)^2}\int_0^c \frac{dy}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2 y^2}\right]$$

$$= .01557\left[yc^2 - c^2\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c^2}}}\tan^{-1} y\sqrt{\frac{1}{c^2}}\right]\right]\Bigg|_0^c$$

$$= .01557\left[c^3 - c^3\tan^{-1}(1)\right] = (.01557)(13.61)^3(1-\tan^{-1}(1)) = 8.43\text{in.}$$

Il prossimo risolviamo per il momento

$$M = A_s f_y(d - c + \overline{y}) = (6.28)(60)(23 - 13.61 - 8.43) = 6,713 \text{ k.in}$$

Utilizzo del Codice ACI

Con riferimento a §37.4.1

$$\rho_b = .85\beta_1 \frac{f_c'}{f_y}\frac{87}{87+60} = (.85)^2\frac{4}{60}\frac{87}{147} = .0285$$

$$A_s = \rho_b bd = (.0285)(10)(23) = 6.55\text{in.}^2$$

$$a = \frac{A_s f_y}{.85 f'cb} = \frac{(6.55)(60)}{(.85)(4)(10)} = 11.57\text{in.}$$

$$M = A_s f_y\left(d - \frac{a}{2}\right) = (6.55)(60)\left(23 - \frac{11.57}{2}\right) = 6,765\text{k.in}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{11.57}{.85} = 13.61\text{in.}$$

Sintesi

		Esatto	ACI
A_s	in^2	6.28	6.55
c	Kip	13.6	13.6
$\overline{y}'$	in.	5.18	5.78
M	K-in	6,713	6,765

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

56.4 Curvatura del momento, generalizzazione

19 In questa sezione si generalizzerà la procedura per determinare $M - \Phi$ relazione considerando una sezione trasversale arbitraria, Fig. 56.1.

nxt Prima prenderemo in considerazione un approccio analitico, e poi uno numerico.

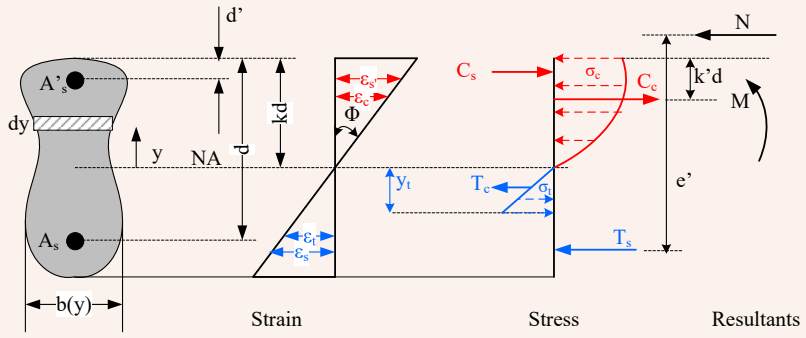


Figura 56.1: Sezione di croce arbitraria considerata per la determinazione della $M - \Phi$

20 Presumiamo la forza assiale esterna N_{ext}, applicato con eccentricità e', per essere ovviamente costante.

21 L'equilibrio interno delle forze richiede

$$N_{ext} = N_{int}; \quad M_{int} = N_{int}.e';$$

e cerchiamo di determinare $M - \Phi$ rapporto.

$$N_{int} = \underbrace{\int_0^{k.d} \sigma_c b_c dy}_{C_c} + \underbrace{A'_s f'_s}_{C_s} - \underbrace{\int_0^{y_t} \sigma_t b_t dy}_{T_c} - \underbrace{A_s f_s}_{Ts} \tag{56.3}$$

$$N_{int}e' + M = C_c(d - k'd) + C_s(d - d') - T_c(d - kd - \frac{2}{3}y_t) \tag{56.4}$$

dove: $\sigma_c = \sigma_c(\varepsilon_c)$, $b_c = b_c(y_c)$, $\sigma_t = \sigma_t(\varepsilon_t)$, $b_t = b_t(y_t)$.

56.4.1 Approccio analitico

22 Per il dato (e fisso) N_{ext}, noi aumenteremo gradualmente ε_c^{top} (i.e. Φ indiretta), e risolvi per k e la corrispondente M_{int}Fico. 56.2.

23 Il problema è non lineare, poiché c'è un solo valore di k che garantirà l'equilibrio delle forze assiali.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

[24] Attenzione: Se $N_{ext} \neq 0$, quindi deve aggiungere la tensione iniziale a causa della forza costante.

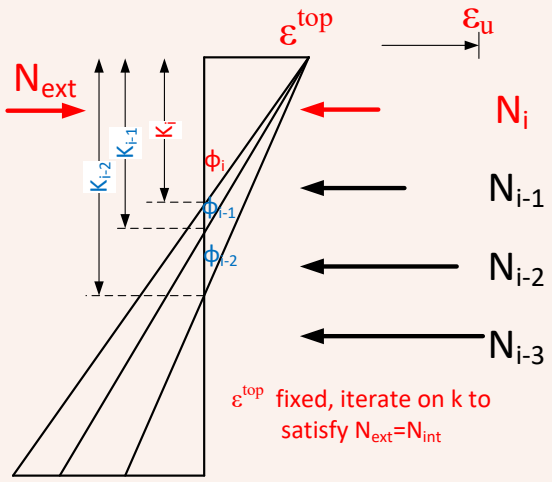


Figura 56.2: Procedura di calcolo $M - \Phi$ analiticamente

1. Incremento di ceppo superiore

$$\varepsilon_{n+1}^{top} = \varepsilon_n^{top} + \Delta\varepsilon^{top} < \varepsilon_u$$

2. Assumere k, forze di determinazione

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{\varepsilon_c^{top}}{k.d} = \frac{\varepsilon_s'}{k.d - d'} = \frac{\varepsilon_s}{d - kd}\\ \varepsilon_s &= \Phi(d - k.d)\\ f_s &= E_s\varepsilon_s\end{aligned}$$

3. Computo N_{int} da Eq. 56.3 If

$$|N_{ext} - N_{int}| > \varepsilon$$

   correct k and iterate, otherwise exit.
4. Risolvere per il corrispondente M da Eq. 56.4
5. Determinazione corrispondente curvatura da

$$\Phi_{i+1} = -\frac{\varepsilon_{i+1}^{top}}{k_{i+1}d}$$

   e rigidità

$$EI_{i+1} = \frac{dM}{d\Phi}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

25 Una volta completato, trama $M - \Phi$, e identificare Φ_{cr}, Φ_y e Φ_u,

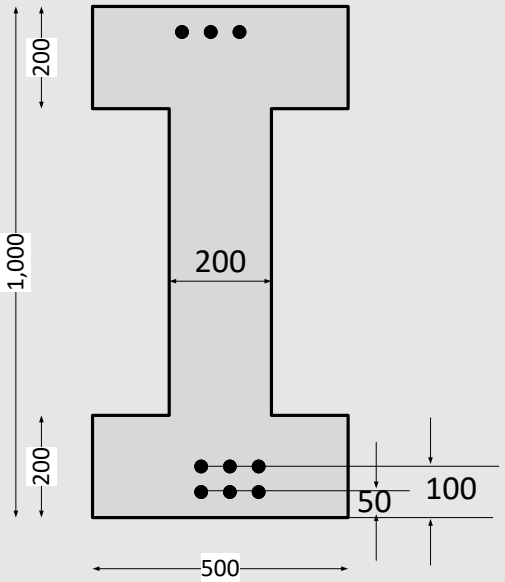
26 Determinare il

$$\xi = \frac{\Phi_u}{\Phi_y}$$

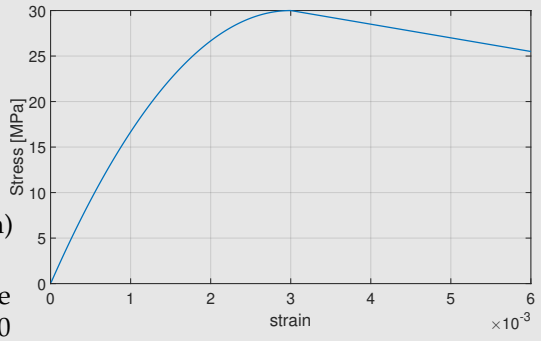
27 Nota che se ripetiamo l'analisi per diversi N, potremmo poi generare il fascio-colonna *diagramma di interazione* (correggere a M_u).

56.4.1.1 Ex 56.4: Curvatura del momento di una sezione I R/C

Cerchiamo di sviluppare un programma in Matlab per calcolare e tracciare la risposta della curvatura del momento per la sezione trasversale del cemento armato e calcolare la duttilità della curva.
Presumeremo che il cemento non supporti nessuna tensione di trazione quando la tensione della trazione è maggiore del ceppo cracking, ε_{cr}. La trama dovrebbe includere solo la risposta alla piegatura positiva (tensione sul viso inferiore).
Assumeremo che il carico assiale sia di circa 10% della capacità di compressione assiale di questa sezione trasversale (cioè. $N \simeq 0.1 A_g f_c'$).
Useremo i seguenti rapporti costitutivi: Calcestruzzo in compressione (Simple Parabolic) $f_c' = 30$ MPa con



$$f_c = \begin{cases} f_c' \left[\frac{2\varepsilon_c}{\varepsilon_0} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \text{for} \varepsilon_c < \varepsilon_0 \\ f_c' \left[1 - 0.15 \left(\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_0}{\varepsilon_u - \varepsilon_0} \right) \right] \text{for} \varepsilon_c > \varepsilon_0 \end{cases}$$



dove ε_0=0.003 e $\varepsilon_u = 2\varepsilon_0$.
Calcestruzzo in tensione: $f_{cr} = 0.6\sqrt{f_c'}$ (MPa)
$E_c = 5,500\sqrt{f_c'}$ (MPa) e $f_c = E_c \varepsilon_c \leq f_{cr}$.
Il rinforzo è elastico/perfettamente lineare con plastica $E_s = 200,000$ MPa e $f_y = 400$ MPa. Ogni bar è US#8 (metodo #25) e ha un A_s=510 mm^2

```
%%  Jordan Brennise & Dean Van
clear;clc,close
scrsz = get(0,'ScreenSize');figpos = [2 2 scrsz(3)/2 scrsz(4)/2];
h=1000;bw=200;bf=500;hf=200;
%
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
y_As=75; % distance from origin to bottom steel
As=6*510; % tension steel
y_Aps=950; % distance from origin to top steel
Aps=3*510; % compression steel
%
Es=200000; % MPa
fy=400;
%
fp_c=30; % MPa
Ec=5500*sqrt(fp_c); % MPa
epsip_c=0.003;
epsi_u=2*epsip_c;
f_cr=0.6*sqrt(fp_c); % MPa
%============================================================
Ac=bf*bw*2+bw*(h-2*hf); % mm^2
Nappl=0.1*fp_c*Ac; % Applied normal force
nl=100; % number of layers in tension or compression
epsilon=0.000001;
Bmin=1.0-epsilon;Bmax=1.0+epsilon;Nmax=Bmax*Nappl;Nmin=Bmin*Nappl;
% We bound phi, the angle between the vertical and the strain on a
linear stress-strain relationship. This is done by limiting the
failure strain epsip_c=0.003. Use plane sections and an estimate of c
 to find the failure phi associated with this failure strain.
c=0.1*h; % Estimate of c
phi_fail=epsip_c/c;
delta_phi=phi_fail/100; % estimate of upper limit of phi
% Start the loop to determine the curvature, phi, and N. Initialize
phi. Assign an initial internal moment and force of zero (KN-m and KN
, respectively). Limit neutral axis location  yn(iphi) to bounds
within the column depth, h. Begin the internal forces loop by
specifying that the neutral axis only be varied while internal force
N is outside established Nmin and Nmax bounds.
iphi=1;
phiM(1)=0;M(1)=0; % initialization of data to be plotted
EndRun=0; % flag to interupt iterations later
for phi=delta_phi:delta_phi:phi_fail % loop on phi
% initialization
iphi=iphi+1; % counter
phiM(iphi)=phi; % store for plotting
ymin=0; % initial values
ymax=h;
yn(iphi)=(ymin+ymax)/2; %start with neutral axis in the middle
%Iterate until convergence
iter=0; %counter
N=0;
while N < Nmin ||  N > Nmax %loop while B outside acceptable range
iter=iter+1;
% Use a while loop. If the previous internal force is outside of the
set force bounds, recalculate the internal stresses with the next phi
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
    until the internal force converge with the limits. These internal
    force calculations begin with the steel, both in tension and
    compression (and the top and bottom of the section, respectively).
    These internal stresses are calculated for a single layer of steel in
     both compression and tension. It is important to note to ensure that
     the steel stress is bounded by the yield stress of steel when in
    tension.
46  %Steel forces
47  fs= phiM(iphi)*(yn(iphi)-y_As)*Es; %stress in tension steel
48  if fs > fy
49  fs=fy; %check if steel is yielding
50  end
51  F_TR=As*fs; %tensile force in bottom steel
52  MF_TR=F_TR*y_As; %Moment caused by tension reinforcement
53  fps=phiM(iphi)*(y_Aps-yn(iphi))*Es; %stress in compression steel
54  if fps > fy
55  fps=fy; % check if steel is yielding
56  end
57  F_CR=-fps*Aps;  % Compressive force in top steel
58  MF_CR=F_CR*y_Aps; % Moment caused by compression reinforcement
59  % Next compute the internal forces for the concrete, both in tension
    and compression (and the top and bottom of the section, respectively)
    . Unlike the steel, which had its internal stresses calculated for a
    single layer of steel in both compression and tension, the concrete
    internal stresses are computed for a series of layers throughout the
    section. This began at the bottom (yc=0) and continued for a number
    of layers (nl) with height delta_yc. Included is an if statement to
    ensure that the change in width of the section from web to flange are
     captured depending on the location of yc(ic). In order to compute
    the internal stresses in compression, an external script was used,
    stress_strain(fp_c, epsip_c, epsi_u, epsi_c).  This script used the
    relationship for compressive stress in concrete as a function of
    strain, but accounting for failure. Tension in concrete is done
    similarly, but the stress for this was calculated using a simple
    relationship.
60  % Loop over the layers:
61  % Compression in concrete
62  yc=0;
63  ic=0;
64  delta_yc=(h-yn(iphi))/nl;
65  for ic=1:nl % loop over the layers
66  yc(ic)=yn(iphi)+(ic-0.5)*delta_yc; % store in array for possible
    plotting
67  b=bw; % check width
68  if yc(ic) > h-hf
69  b=bf;
70  end
71  epsi_c=phi*yc(ic); % strain at layer location
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

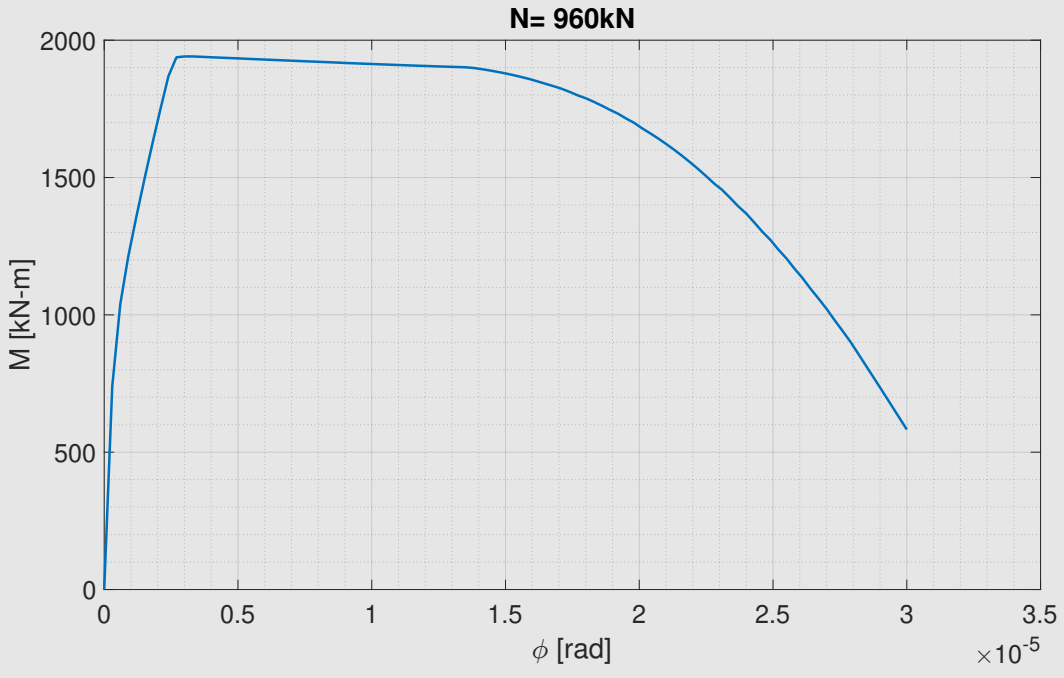
```
    F_CC(ic)=-b*delta_yc*stress_strain(fp_c,epsip_c,epsi_u,epsi_c); % concrete compression at that layer
    MF_CC(ic)=F_CC(ic)*yc(ic); % Moment contribution from layer force
    end
    % Tension in concrete
    it=0;
    yt=0;
    delta_yt=(yn(iphi))/nl;
    for it=1:nl
    yt(it)=(it-0.5)*delta_yt;
    b=bf; % Check for width
    if yt(it) > hf
    b=bw;
    end
    epsi_t=phi*(yn(iphi)-yt(it));
    ft=Ec*epsi_t;
    if ft > f_cr
    ft=0;
    end
    F_TC(it)=b*delta_yt*ft;
    MF_TC(it)=F_TC(it)*yt(it);
    end
    % Using the internal forces for steel and concrete (both in compression and tension), compute the total force through equilibrium. Assume compression to be negative and tension to be positive. The N value for internal force is compared to the bounds set earlier, and is recomputed with an increased phi if it is outside those bounds. If this is the case, then the neutral axis is shifted accordingly, phi will be increased, and N recomputed through the steps above. When the internal force are within the bounds set, then we will compute total moment for that phi and plot the moment curvature at equilibrium.
    % Compute total force should be -ve
    N=F_CR+sum(F_CC)+sum(F_TC)+F_TR;
    N=-N; % make it positive
    %%%
    % make adjustments
    if N < Nmin
    ymax=yn(iphi);
    yn(iphi)=0.5*(yn(iphi)+ymin);
    end
    if  N > Nmax
    ymin=yn(iphi);
    yn(iphi)=0.5*(yn(iphi)+ymax);
    end
    % sanity check in case yn(iphi) is getting to close to the top
    if yn(iphi)<0.01*h
    EndRun=1;
    break
    end
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
    end
    M(iphi)=-(MF_CR+sum(MF_CC)+sum(MF_TC)+MF_TR)/1000000; % convert N-mm
   to kN-m
    if EndRun == 1
    break
    end
    end
    figure('Position',figpos); set(gca,'FontSize',28);
    plot(phiM,M,'linewidth',2);grid minor; grid
    xlabel('\Phi [rad]');ylabel('M [kN-m]');titre=['N= ' num2str(Nappl
   /1000 ) 'kN'];
    title(titre);
    set(gca,'fontsize',20);set(gca, 'color', 'none');
    exportgraphics(gca,'Concrete-M-Phi.pdf','BackgroundColor','none')
    %
   ================================================================
    function fc= stress_strain(fp_c, epsip_c, epsi_u, epsi_c)
    if epsi_c < epsip_c
    fc=fp_c*(2*epsi_c/epsip_c -(epsi_c/epsip_c)^2);
    else
    fc=fp_c*(1-0.15*((epsi_c-epsip_c)/(epsi_u-epsip_c)));
    end
    end

```



COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

56.4.1.2 Schema di interazione $M - N$

28 Ripetizione della procedura precedente per vari N_{ext} possiamo derivare la colonna del fascio *diagramma di interazione*Fico. 56.3 che è un grafico del carico assiale P_n che una

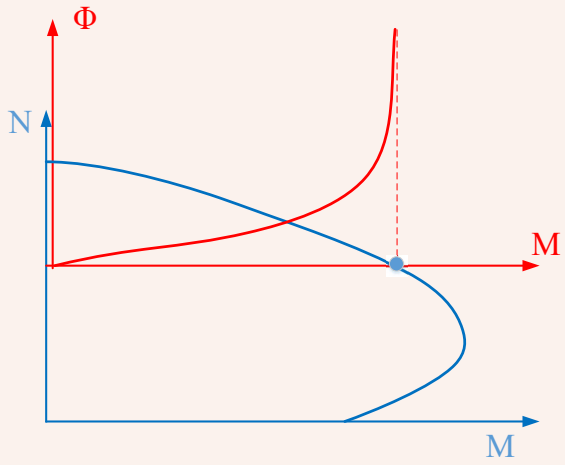


Figura 56.3: Curvatura del momento e diagrammi di forza assiale (interazione)

colonna potrebbe portare contro la sua capacità di momento, M_n[2].

56.4.2 Approccio numerico

29 L'approccio analitico descritto in precedenza può essere implementato numericamente. *discoretizzare* la sezione trasversale in strati[3]Fico. 56.4.

Quindi, si rompe la sezione di cemento in n_c strati (indice i), e l'acciaio in n_s strati (indice j)[4]. A_{ci} e $A_{sj} = A_s$ corrisponde alle aree di ogni strato di cemento e acciaio, y_i è la distanza della fibra i da NA.

30 Per un dato (e fisso) N_{ext}, noi aumenteremo gradualmente Φ by $\Delta\Phi$ [5]e risolvere per N_{int}. Quindi, cerchiamo di determinare M_{ext} per un dato Φ. In qualsiasi sezione $\varepsilon(y) = \varepsilon_0 + y\Phi$ dove ε_0 è il ceppo assiale causata da N_{ext}.

[2]Articolo n si riferisce a nominale.
[3]O fibre se abbiamo momento biassiale o torsione.
[4]Più tardi, ci distinguono tra confinato (all'interno della gabbia d'acciaio) e non confusi come hanno proprietà diverse.
[5]Si noti che nell'approccio analitico abbiamo aumentato ε_c^{top} e risolti per k.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

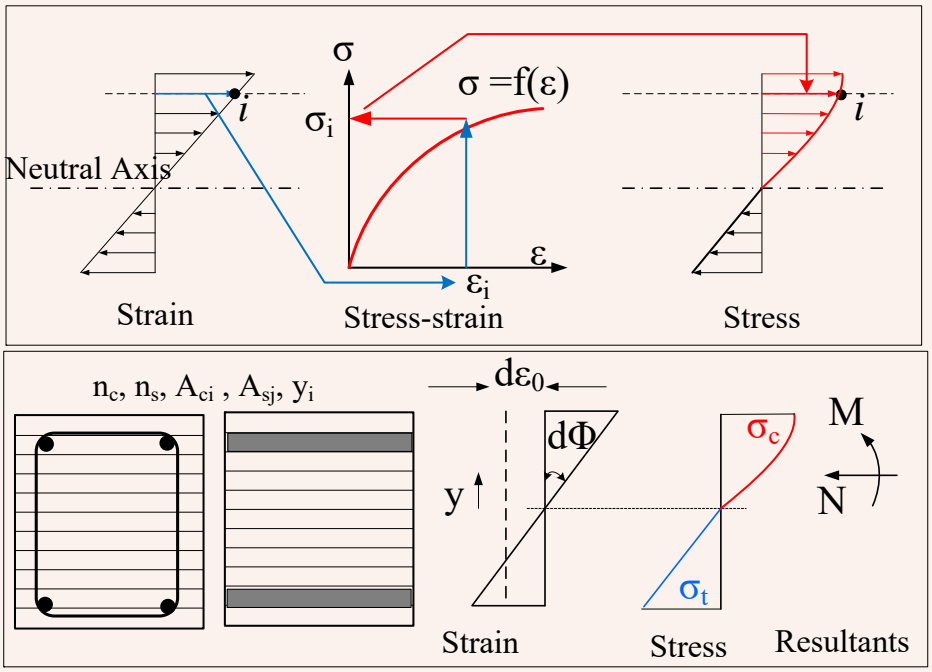


Figura 56.4: Discretizzazione di una sezione trasversale in strati

30 Per una determinata varietà, con conseguente forza interna:

$$N_{int} = \int Ed\varepsilon dA = \int EdAd\varepsilon_0 + \int EdAyd\Phi$$
$$= \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n_c} E_{ci}A_{ci} + \sum_{j=1}^{n_s} E_{sj}A_{sj}\right]}_{\text{Initial strain}} \varepsilon_0 + \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n_c} E_{ci}A_{ci}y_i + \sum_{j=1}^{n_s} E_{sj}A_{sj}y_i\right]}_{\text{curvature } \Phi} \Phi \tag{56.5}$$

$$M = \int Ed\varepsilon ydA \tag{56.6}$$

31 In senso onnipotente, Fig. 56.5:

1. Curvatura dell'incremento $\Phi^{n+1} = \Phi^n + \Delta\Phi$ (N_{ext} fisso).
2. Assumere la posizione dell'asse neutro (k) e l'aggiornamento del profilo delle varietà $\varepsilon(y_i) = d\varepsilon_0 + y_i d\Phi$ dove $d\varepsilon_0 = (\Delta N - E_x\Delta\Phi)/E_a$.
3. If $\varepsilon \geq \varepsilon_u$ (solitamente 0.003 per cemento), uscita.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

4. Determinazione N_{int} da Eq. 56.5

$$\begin{aligned} N_{comp} &= \sum_{i=1}^{n_c} \sigma_{ci} A_{ci} + \sum_{j=1}^{n_s} \sigma_{sj} A_{sj} \\ \sigma_{ci} &= \sum_{i=1}^{n_c} E_{ci} A_{ci} (\varepsilon_0 + y_i \Phi) \\ \sigma_{sj} &= \sum_{j=1}^{n_s} E_{sj} A_{sj} (\varepsilon_0 + y_j \Phi) \end{aligned}$$

5. If $|N_{ext} - N_{int}| > \varepsilon$ regolare k e iterare, altrimenti uscire.
6. Computo

$$M_{int} = \sum_{i=1}^{n_c} \sigma_{ci} A_{ci} y_i + \sum_{j=1}^{n_s} \sigma_{sj} A_{sj} y_i$$

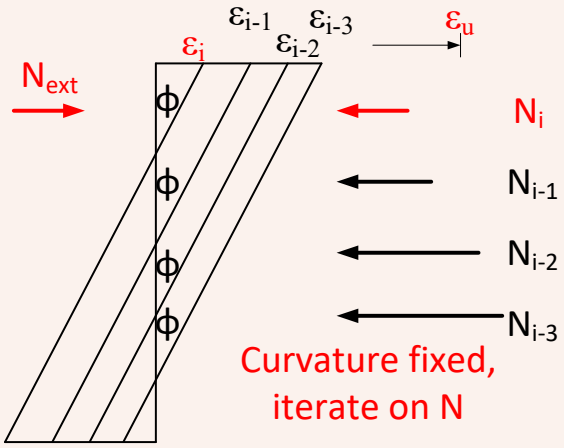


Figura 56.5: Approccio fondamentale per determinare $M - \Phi$ numericamente

[32] Garantire la convergenza può essere difficile, quindi definirà prima una grande scatola di confine per entrambi y_{min} e y_{max}, a ogni iterazione, ne aggiorneremo uno finché le due caselle di rilegatura non sono relativamente piccole.

Passo 1 Iniziare con una curvatura iniziale e un asse neutro, cioè assumere: Φ, $y_n(1), y_{min}(1), y_{max}(1)$

Sezione di compressione e trazione dovrebbe essere divisa in profondità dello strato uguale con lunghezza L_e. Attenzione a non finire assegnando troppo pochi strati in flange rispetto al web.

Nomi variabili consigliati:

COPIA DI REVISIONE

- Forza di compressione concreta F_{CC}
- Forza di trazione concreta F_{CT}
- Forza di trazione in acciaio F_{ST}
- Forza di compressione in acciaio F_{SC}
- F_{CT} : solo se lo strato non è rotto.

Passo 2 Determinare la forza normale

$$N_i = F_{cr} + F_{cc} - F_{ct} - F_{tr}$$

e specificare i confini B per y_{min} e y_{max} che sarà aggiornato alla fine di ogni iterazione

$$\underbrace{N_{min}}_{B_{min}N_{appl}} < N < \underbrace{N_{max}}_{B_{max}N_{appl}}$$

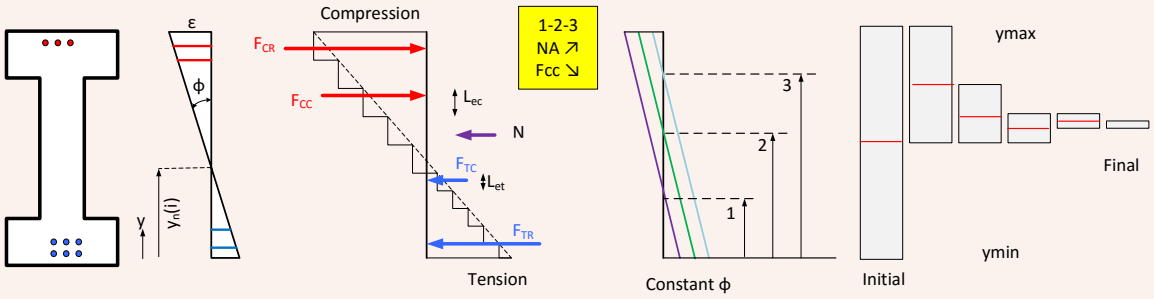
Forse, $[B_{min}, B_{max}] = [0.95, 1.05]$ che corrispondono a ±5% deviazione

Passo 3 Iniziare l'iterazione

`Mentre` $N < N_{min} \| N > N_{max}$

$$\text{if} \begin{cases} \text{if } N < N_{min} \Rightarrow y_{max} \downarrow \begin{cases} y_n(i) = 0.5(y_n(i-1) + y_{min} \\ y_{max} = y_n(i) \end{cases} \\ \text{if } N > N_{max} \Rightarrow y_{min} \uparrow \begin{cases} y_n(i) = 0.5(y_n(i-1) + y_{max} \\ y_{min} = y_n(i) \end{cases} \end{cases} \tag{56.7}$$

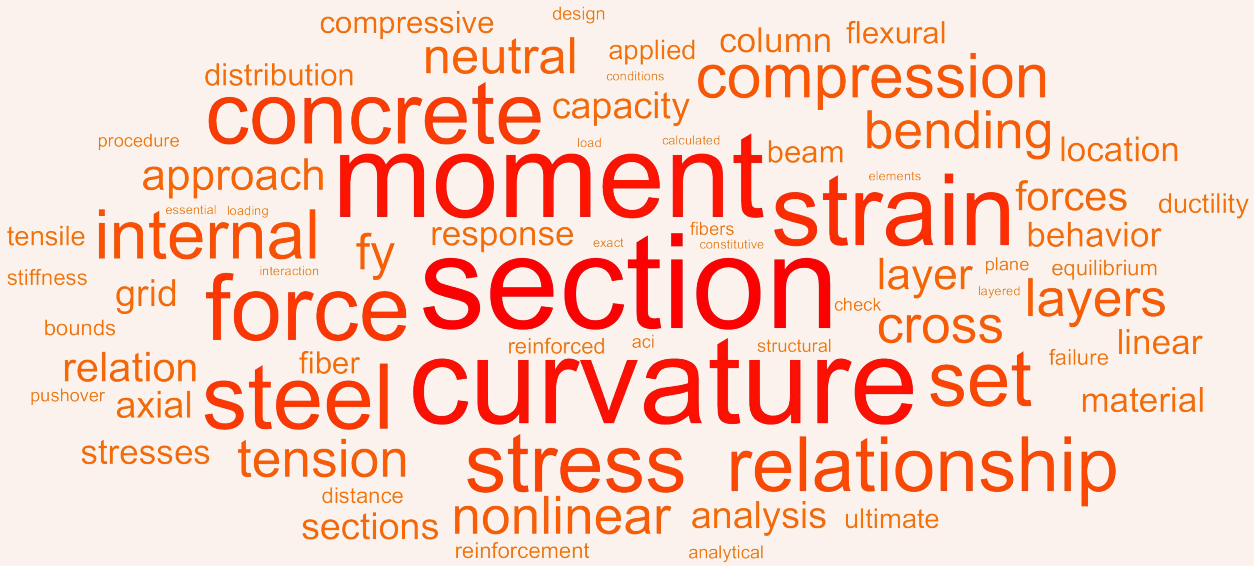
`aggiornamento` N_i
`if` $N_{min} < N_{appl} < N_{max}$ `Condizione soddisfatto uscita loop, momento di elaborazione`



[33] Questo approccio verrà rivisitato più tardi nella formulazione di rigidità elemosina in §61.4.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 57

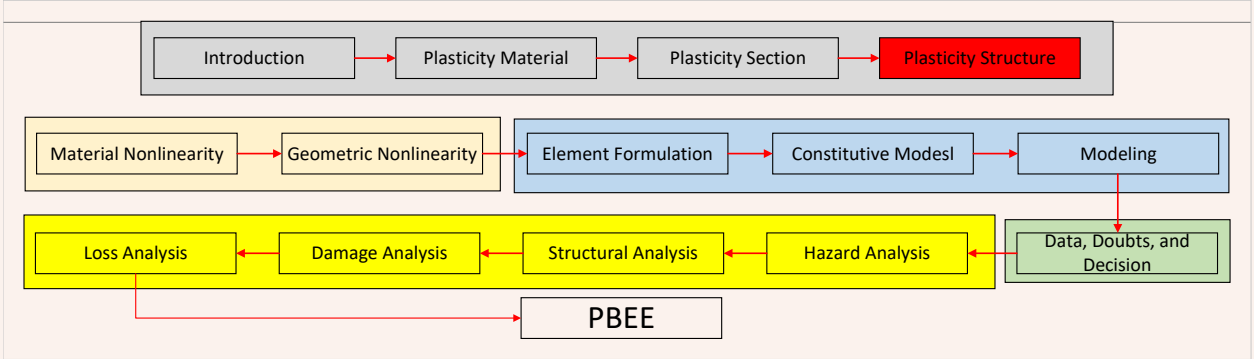
Plasticità III; Struttura: Linee di Rendimento

Abstract

In questo capitolo conclusivo della nostra serie sulla plasticità, espandiamo il focus dal comportamento di plastica localizzato negli elementi strutturali al comportamento di interi sistemi strutturali in condizioni di carico estreme. Il capitolo inizia con un'analisi del crollo del fascio, concentrandosi sulla formazione di cerniere in plastica che permettono alle travi di trasformarsi in meccanismi al raggiungimento della capacità di carico. Questo è seguito da un'esplorazione della teoria delle linee di rendimento per le lastre, dove i modelli di guasto si sviluppano lungo linee distinte sotto carico. La teoria della linea di resa offre un modo efficiente per prevedere meccanismi di collasso, anche con la natura complessa e distribuita del carico delle lastre. Infine, si discutono le analogie tra la teoria delle linee di snervamento, i modelli di plasticità concentrata e l'analisi pushover. Queste analogie illustrano i principi comuni dei metodi, che approssimano il comportamento al collasso concentrando la risposta inelastica in regioni specifiche e forniscono strumenti pratici per valutare la sicurezza strutturale allo stato limite.

57.1 Introduzione 1949
57.2 Elementi lineari (camere, cornici) 1951
57.2.1 Approccio cinematico: limite superiore 1951
57.2.2 Statici; limite inferiore . . 1957
57.3 Elementi planari (slab) 1966
57.3.1 Statici: limite inferiore 1967
57.3.2 Kinematics: il limite superiore 1968
57.4 Analisi del pushover 1971
57.5 Analogie tra analisi a più basso limite e 1972
57.5.1 Analisi del pushover 1972
57.5.2 Plasticità concentrata 1976
58.1 PROPOSTA SENZA DISPONIBILE ChatGPT 1979
58.1.1 Motivazione e fondazioni fisiche (~1.5 pagine) 1979
58.2 Quadro termodinamico (~2 pagine) 1979
58.3 Danni isotropici Scalari: il modello Mazars (~4 pagine) 1980
58.4 Tensione - asimmetria di compressione e l'effetto unilaterale (~2 pagine) 1980
58.5 Danni - accoppiamento di plastica (~2 pagine) 1980
58.6 Regolamentazione e mesh oggettività (~3 pagine) 1980
58.7 Applicazione a elementi di trave e colonne (~3 pagine) 1981
58.8 Identificazione del parametro e guida pratica (~1.5 pagine) 1981
58.9 Note bibliche e lettura ulteriore (~0,5 pagine) 1981

COPIA DI REVISIONE



57.1 Introduzione

1 Dopo aver esaminato il ruolo della plasticità a livello localizzato, prima ad un punto e poi in una sezione, ora estendiamo questa analisi a intere strutture. Questo capitolo esplora il ruolo della plasticità nell'analisi strutturale, in particolare concentrandosi su come le strutture raggiungono la loro capacità di carico finale.

2 Fino a questo punto, la nostra analisi strutturale è stata condotta utilizzando un approccio elastico lineare che ci ha permesso di determinare le relazioni di spostamento del carico. Tale analisi è spesso sufficiente quando l'obiettivo è quello di comprendere il comportamento generale di una struttura sotto carichi di servizio, dove le deflettori sono entro limiti accettabili. Tuttavia, un approccio puramente elastico non cattura pienamente il comportamento della struttura in quanto si avvicina al fallimento, soprattutto nei sistemi duttili dove la plasticità svolge un ruolo significativo.

3 In questo capitolo, il nostro focus si sposta per determinare il carico di collasso di una struttura, piuttosto che la sua relazione di spostamento del carico fino al fallimento. Come per la regolazione della colonna, il nostro obiettivo è quello di valutare l'ultimo meccanismo di resistenza o guasto della struttura, senza derivare dalla risposta incrementale di spostamento del carico fino a questo punto. 54.5.

4 Le differenze tra le soluzioni elastiche e plastiche sono significative e sono descritte di seguito:

Soluzione elastica soddisfa i seguenti criteri:

1. **Equilibrio**: La struttura è in uno stato di equilibrio sotto carichi applicati.
2. **Condizione elastica**: Tutti i momenti interni sono all'interno della gamma elastica, $|M| < M_{\text{yld}}$.
3. **Compatibilità (continuità)**: La compatibilità della deformazione viene mantenuta in tutta la struttura, garantendo campi di spostamento continui.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Soluzione di plastica soddisfa questi criteri:

1. **Equilibrio**: La struttura mantiene l'equilibrio sotto carichi applicati.
2. **Condizioni di rendimento**: I momenti raggiungono la capacità di momento in plastica, $|M| \leq M_{\text{pl}}$, indicando l'inizio del comportamento di plastica.
3. **Meccanismo**: Ulteriori deformazioni possono verificarsi senza un ulteriore aumento del carico, significando che la struttura è diventata un meccanismo.
4. **Principio di energia da lavoro a cerniere in plastica**:

$$\text{External Work } (W_e) = \text{Dissipation Energy } (D \geq 0) + \text{Strain Energy } (U = 0).$$

Assunzioni per l'analisi plastica

1. Tutti i carichi esterni aumentano in modo proporzionale.
2. Il comportamento dei materiali è elastico-plastica, permettendo lo sviluppo di cerniere in plastica.
3. Le deformazioni sono piccole, quindi la non linearità geometrica non è considerata.

5 Nelle travi e nei frame, il guasto avviene tipicamente dopo un numero sufficiente di *cerniere in plastica* forma, convertendo la struttura in una *meccanismo*, per analisi, di solito presumiamo una risposta elastica perfettamente plastica, dove il momento interno raggiunge M_p in una cerniera di plastica, senza ulteriore resistenza alla rotazione aggiuntiva.

6 Il massimo (o *limite*) i carichi di una struttura possono essere determinati utilizzando due approcci distinti, come riassunti nella tabella 57.1:

Altobondo; approccio cinematico: Questo approccio si basa sull'assunzione di un possibile meccanismo di collasso e sul calcolo del carico corrispondente, il carico derivato sarà sempre maggiore o uguale al vero carico finale. Presumiamo la formazione simultanea di tutte le cerniere in plastica necessarie per formare un meccanismo, senza considerare l'effettiva sequenza della formazione del cerniera. Questo approccio garantisce l'equilibrio e soddisfa le condizioni di plasticità, ma non può prevedere precisamente il meccanismo effettivo del collasso.

Basso Bound; Approccio statico: Qui, presumiamo una distribuzione del momento in equilibrio con i carichi applicati, assicurando che nessun momento interno superi M_p. Questa stima del carico sarà sempre inferiore o uguale al vero carico finale. Il metodo tenta di simulare la sequenza in cui si formano le cerniere e fornisce una stima del carico conservativo assicurando che la plasticità non sia superata, anche se potrebbe non soddisfare pienamente la condizione del meccanismo.

Esamineremo ogni approccio in dettaglio, analizzando i loro rispettivi meriti e limitazioni.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 57.1: Confronto degli approcci cinematici e statici per l'analisi del carico limite

Metodo	Bound	Assumazioni	Complementi	Maggio Violare
Kinematico	Tomaia	Meccanismo	Plastica	Formazione del Meccanismo
Statistiche	In basso	Equilibrio	Meccanismo	Plastica

57.2 Elementi lineari (camere, cornici)

57.2.1 Approccio cinematico: limite superiore

Definition 57.1: Teorema del Bound superiore

Una struttura crollerà se esiste un campo di deformazione cinematicamente ammissibile per il quale il tasso di lavoro svolto dalle forze esterne supera il ritmo della dissipazione dell'energia interna.

7 Il Teorema del Bound superiore, a volte indicato come il *Teorema di carico non sicuro*, fornisce un metodo per stimare il carico di collasso di una struttura analizzando i potenziali meccanismi di deformazione. Questo teorema afferma che qualsiasi carico in grado di provocare il collasso basato su un meccanismo di deformazione ipotetico e cineticamente ammissibile servirà come limite superiore al vero carico del crollo. L'implicazione è che, se questo carico supera la capacità della struttura, il collasso è inevitabile.

8 Questo teorema è strettamente legato al *Principio del lavoro virtuale* §48.3.3, In entrambi i principi, le condizioni di equilibrio e collasso sono valutate confrontando i tassi di lavoro esterni ed interni in un meccanismo di deformazione o di crollo assunto.

9 Il principio di lavoro virtuale afferma che, per l'equilibrio, il lavoro virtuale esterno svolto dai carichi durante uno spostamento virtuale deve pari al lavoro virtuale interno fatto dalle forze resistenti della struttura. Qui, un carico di collasso può essere identificato quando questo equilibrio viene interrotto in modo che induce un meccanismo.

Definizione di un campo tipicamente ammissibile

10 A *campo cinematico ammissibile* rappresenta uno stato di deformazione ipotetico che è coerente con le costrizioni della struttura e il meccanismo assunto del collasso.Per un campo di deformazione da considerare kinematicamente ammissibile:

- Il lavoro esterno, W_e, fatto dalle forze applicate $\mathbf{F}$ agire sulla deformazione $\mathbf{\Delta}_F$ deve essere positivo, il che significa che la struttura è deformata nella direzione dei carichi applicati.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

- Il lavoro interno, W_i, fatto dai momenti di plastica $\mathbf{M}_p$ agire sulle rotazioni $\boldsymbol{\theta}$ in posizioni di cerniera plastica, è anche positivo, significando che le resistenze interne stanno facendo il lavoro in risposta al carico esterno.

Determinazione del crollo utilizzando l'equivalenza lavorativa

11 Per valutare se un determinato carico causerà collasso, equateremo il lavoro esterno fatto dal carico applicato con il lavoro interno dissipato nelle cerniere di plastica. Questo approccio si basa sull'ipotizzare un meccanismo di collasso specifico e sul calcolo del lavoro ad esso associato. Per un potenziale meccanismo i, l'equilibrio del lavoro esterno e interno al punto di collasso richiede:

$$U_i = \lambda_i W_i$$

dove: W_i è il lavoro esterno fatto dal carico applicato durante uno spostamento virtuale nel meccanismo assunto; λ_i è un *moltiplicatore cinematico* che scala i carichi applicati per raggiungere lo stato di collasso per meccanismo i; U_i è l'energia interna totale dissipata dalle cerniere di plastica nel meccanismo.

12 Questa energia interna può essere espressa come:

$$U_i = \sum_{j=1}^{n} M_{p_j} \theta_{ij}$$

dove:M_{p_j} è la capacità di momento in plastica j^{th} posizione cerniera di plastica; θ_{ij} è la rotazione della cerniera j^{th} posizione per meccanismo i; n rappresenta il numero totale di potenziali cerniere in plastica o sezioni critiche nella struttura.

Spiegazione del processo di equivalenza lavorativa

Calcolo del lavoro esterno: Il lavoro esterno W_i dipende dallo spostamento causato dai carichi applicati. Ogni carico F_k applicato alla struttura contribuisce al lavoro svolto in base allo spostamento Δ_{F_k} La somma dei contributi di lavoro da tutti i carichi applicati rende il totale del lavoro esterno:

$$W_i = \sum_{k} F_k \Delta_{F_k}$$

dove F_k è il k^{th} carico applicato, e Δ_{F_k} è il suo spostamento corrispondente nel meccanismo di collasso assunto.

Calcolo interno dell'energia dissipata: Il lavoro interno U_i è l'energia dissipata dalle cerniere di plastica mentre ruotano. θ_{ij} sotto il momento di plastica M_{p_j} La somma di questi contributi energetici da ogni cerniera definisce l'energia dissipata totale per il meccanismo assunto, come mostrato nell'equazione sopra.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

13 Uguagliando U_i a $\lambda_i W_i$, si ricava λ_i, il moltiplicatore di carico necessario per portare la struttura al collasso secondo il meccanismo ipotizzato. Se si considerano più meccanismi, il valore minimo di λ_i fornisce il limite superiore più critico del carico di collasso.

Assunzioni per il metodo Kinematic (Upper Bound)

14 Il metodo di riferimento superiore si basa su diverse ipotesi semplificanti per rendere l'analisi del collasso trattabile:

- **Comportatore elastico-perfettamente di plastica**: I membri strutturali si assumono di comportarsi in modo elastico-perfettamente plastico. Ciò implica che una volta che si produce, i membri possono sostenere deformazioni di plastica senza alcuna resistenza aggiuntiva, il che significa che non c'è alcun indurimento di tensione al di là del punto di rendimento.
- **Plasticità localizzata a Cerniere**: La deformazione plastica si assume che avvenga solo in luoghi specifici noti come cerniere di plastica, formando le cernieri dove il momento raggiunge la capacità del momento plastico M_pTra cerniere, i membri sono assunti per rimanere elastici, che semplifica l'analisi concentrandosi sulle zone di plastica discreta.
- **Momento di plastica governa la collapse**: Il momento della plastica M_p in ogni sezione trasversale rappresenta il momento massimo che la sezione può resistere. Una volta raggiunta questa fase, la sezione è considerata completamente resa e non è possibile una resistenza aggiuntiva del momento. Il carico di collasso della struttura è quindi governato da queste capacità di momento in plastica.

Numero di Meccanismi Indipendenti

15 Il numero di possibili meccanismi indipendenti di collasso n in una struttura è influenzata dalle potenziali posizioni di cerniera della struttura e dalla sua ridondanza. n è determinato dal seguente rapporto:

$$n = h - r$$

dove: h è il numero di possibili posizioni di cerniera in plastica nella struttura; r è il grado di ridondanza, che rappresenta il numero dei vincoli in eccesso oltre la determinazione statica.

16 Questa relazione aiuta a comprendere le potenziali modalità di collasso. Strutture con maggiore ridondanza (più grande r) può sviluppare meccanismi di collasso più indipendenti, in quanto hanno una maggiore capacità di ridistribuzione del carico.

17 Calcolando n, possiamo identificare il numero totale di configurazioni di collasso realizzabili, ognuna corrispondente ad un meccanismo potenziale diverso. Esaminare questi meccanismi fornisce informazioni su come e dove il collasso è probabile che si verifichi sotto carico applicato, consentendo così una valutazione approfondita della sicurezza strutturale.

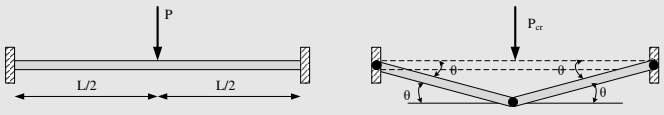
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

57.2.1.1 Ex 57.1: Trave fissa; carico centrale

- $n = 3 - 2 = 1$
- Lavoro interno

$$M_p\theta + M_p\theta + 2M_p\theta = 4M_p\theta$$



- Lavoro esterno effettuato dal carico del punto

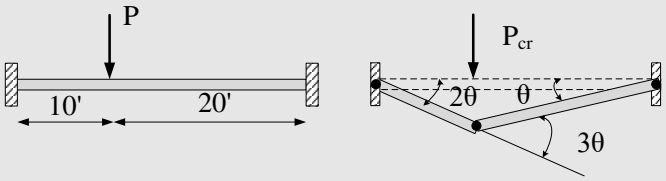
$$P_{cr}\theta L/2$$

- Equando i due, otteniamo

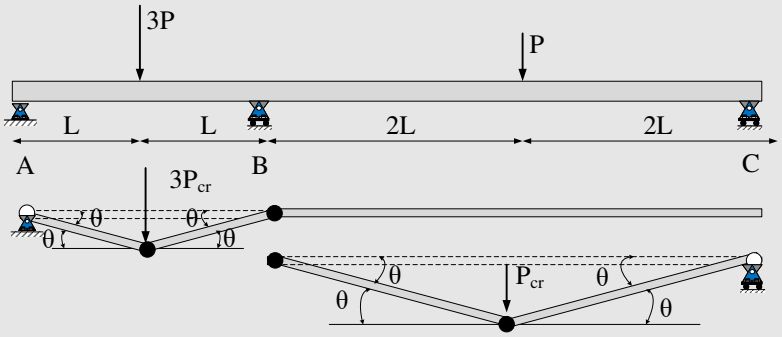
$$P_{cr} = 8M_p/L.$$

57.2.1.2 Ex 57.2: Trave fissa; carico compensato

$$\begin{aligned} W_{int} &= W_{ext} \\ M_p(\theta + 2\theta + 3\theta) &= P_{cr}\Delta \\ 6M_p\theta &= P_{cr}\theta(20) \\ \Rightarrow P_{cr} &= 6\frac{M_P}{20} \\ P_{cr} &= 0.3M_p \end{aligned}$$



57.2.1.3 Ex 57.3: Trave continua



Equazione del lavoro esterno svolto dalle forze verticali al lavoro interno:

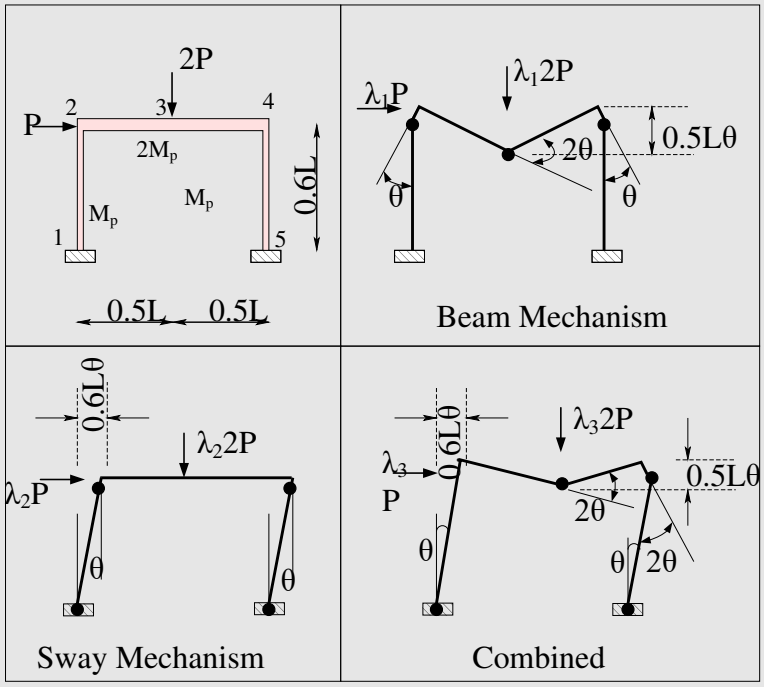
- Span AB: $3P_{cr}L\theta = 3M_p\theta$ or $P_{cr} = \frac{M_p}{L}$.
- Span BC: $2P_{cr}L\theta = 3M_p\theta$ or $P_{cr} = \frac{3}{2}\frac{M_p}{L}$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

57.2.1.4 Ex 57.4: Cornice ortogonale

- $n = 5 - 3 = 2$ modalità indipendenti.
- Il numero totale di possibili meccanismi è tre (uno dipende dagli altri due).
- Per verificare che λ è infatti il limite più basso, possiamo disegnare il diagramma del momento corrispondente e verificare che in nessuna sezione sia il momento maggiore di M_p.



Beam Mechanism $M_p(\theta+\theta)+2M_p(2\theta)=\lambda_1(2P)(0.5L\theta) \Rightarrow \lambda_1 = 6\dfrac{M_p}{PL}$

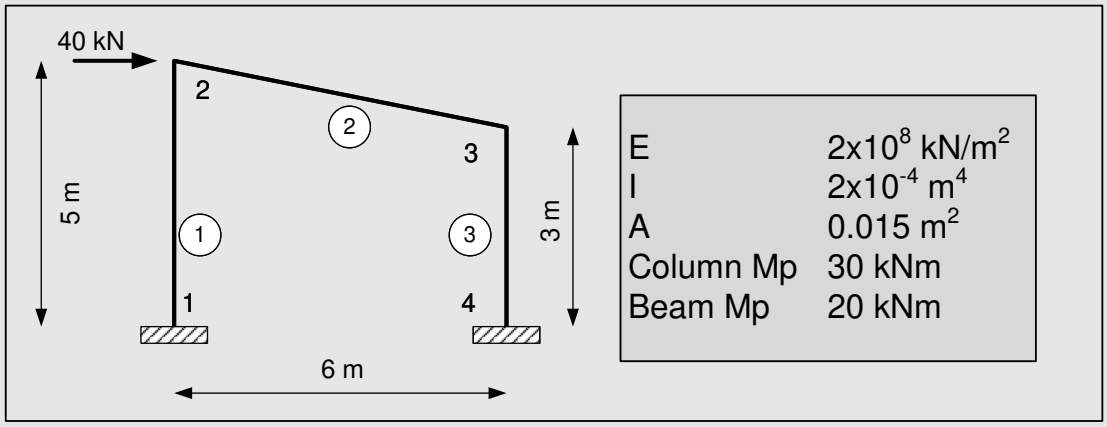
Sway Mechanism $M_p(\theta+\theta+\theta+\theta)=\lambda_2(P)(0.6L\theta) \Rightarrow \lambda_2 = 6.67\dfrac{M_p}{PL}$

Combined Mechanism $M_p(\theta+\theta+2\theta)+2M_p(2\theta)=\lambda_3\left(P(0.6L\theta)+2P(0.5L\theta)\right) \Rightarrow \lambda_3 = 5\dfrac{M_p}{PL}$

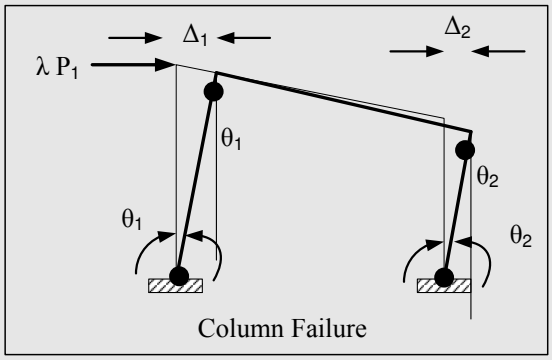
57.2.1.5 Ex 57.5: Telaio incline

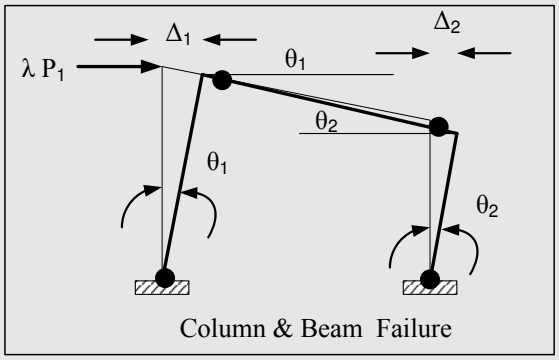
Cerchiamo di determinare il carico del collasso per la seguente cornice utilizzando l'approccio cinematico superiore al limite.

COPIA DI REVISIONE



Per prima cosa, troviamo le potenziali cerniere di plastica





e poi considerare ogni modalità di guasto separatamente:

Fallimento nelle colonne

$$\Delta_1 = \Delta_2$$
$$5\theta_1 = 3\theta_2$$
$$\theta_1 = 0.6\theta_2$$
$$\lambda_1 P(5\theta_1) = M_p^c(\theta_1 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_2)$$
$$\lambda_1 = \frac{16}{15}\frac{M_p^c}{P} = \frac{16}{15}\frac{30}{40} = 0.8$$

Insufficienza combinata

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \Delta_2 \\
5\theta_1 &= 3\theta_2 \\
\theta_1 &= 0.6\theta_2 \\
\lambda_2 P(5\theta_1) &= M_p^c(\theta_1+\theta_2) + M_p^b(\theta_1+\theta_2) \\
&= \frac{8}{3}M_p^c\theta_1 + \frac{8}{3}M_p^b\theta_1 \\
\lambda_2(40)(5) &= \frac{8}{3}(30) + \frac{8}{3}(20) \\
\lambda_2 &= \frac{2}{3} = 0.67
\end{aligned}$$

Pertanto, il secondo caso governa e $P_{crit} = (0.67)(40) = 26.8\text{kN}$

57.2.2 Statici; limite inferiore

Definition 57.2: Teorema del basso profilo

Una struttura non crollerà, o sarà al punto di collasso, se si può stabilire una distribuzione dell'equilibrio delle forze interne che bilancia i carichi applicati e rimane a o sotto il limite di resa in tutta la struttura.

18 Il Teorema del Bound inferiore, noto anche come *Teorema di carico statico o sicuro*, fornisce un metodo per stimare il carico di collasso di una struttura assicurando che le forze interne e i momenti siano in equilibrio con i carichi esterni senza superare la capacità di resa.

19 Questo teorema garantisce una stima sicura e conservatrice della capacità di carico, in quanto considera solo le distribuzioni che rimangono all'interno dell'intervallo elastico-plastica e non assume la formazione di meccanismi aggiuntivi oltre ciò che è strettamente necessario.

20 Questo teorema è analogo a quello *Principio del lavoro virtuale complementare*, §48.3.1, dove l'equilibrio è stabilito sulla base delle forze interne che controbilanciano i carichi esterni, rispettando le condizioni di resa. Nell'approccio statico, ci concentriamo sulla ricerca di una distribuzione della forza fattibile che è in equilibrio ed evita qualsiasi sovraffollamento del materiale, fornendo così un limite inferiore al carico di collasso.

Assunzioni per l'approccio basso del bound

21 Nell'applicazione del metodo di rilegatura inferiore, le seguenti ipotesi sono essenziali:

- **Equilibrio delle Forze Interne ed Esterne**: I carichi applicati devono essere in equilibrio con le forze interne e i momenti di tutti i punti della struttura, ciò richiede

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

che le forze e i tempi si saldinodi senza alcuna forza o momento netti sbilanciati in qualsiasi parte della struttura.

- **Formazione di antenne in plastica sufficienti**: Le forze e i momenti interni dovrebbero permettere la formazione di un numero sufficiente di cerniere in plastica, consentendo una forma di meccanismo di collasso. Un meccanismo di collasso si verifica quando la struttura raggiunge una configurazione in cui non può più resistere al carico aggiuntivo, spesso segnato dallo sviluppo delle cerniere in luoghi specifici.

22 Il carico calcolato in questo approccio si basa su una distribuzione assusa di momenti che:

- Mantiene l'equilibrio con il carico applicato.
- Assicura che nessun momento interno superi la capacità di istante in plastica, M_p.

23 Questo metodo fornisce intrinsecamente una stima conservatrice, poiché si concentra solo sulle distribuzioni del momento che impediscono la resa al di là del limite di rendimento specificato, producendo così un carico inferiore o uguale al carico effettivo del collasso.

Metodo statico di soluzione

24 Il metodo statico (o limite inferiore) per determinare il carico finale consiste nei seguenti passaggi dettagliati:

1. **Seleziona Momenti ridondanti:** Identificare i momenti ridondanti all'interno della struttura che contribuiscono all'equilibrio complessivo. In una struttura staticamente indeterminata, questi momenti sono i momenti interni aggiuntivi che devono essere risolti per mantenere l'equilibrio a causa dei vincoli eccessivi oltre la determinanza statica. Questo processo di selezione prevede l'individuazione delle posizioni in cui i momenti possono variare senza interrompere l'equilibrio generale.
2. **Costruisci il diagramma di Momento Determinazione statica:** Inizialmente, semplificare la struttura ad una configurazione statisticamente determinata rimuovendo concettualmente le sue ridondanze. Questo diagramma di base rappresenta la distribuzione del momento che esisterebbe se la struttura non avesse vincoli aggiuntivi o ridondanze.
3. **Momenti superimpositi ridondanti sul diagramma di determinazione del momento:** Dopo aver stabilito il diagramma di momento determinato, il passo successivo è quello di sovrapporre i momenti ridondanti su di esso. Questi momenti ridondanti sono aggiunti alla distribuzione del momento della linea di base per raggiungere la distribuzione effettiva del momento nella struttura completamente vincolata (indeterminata). Attraverso questa sovrapposizione, è possibile ottenere la distribuzione combinata o totale del momento, che rappresenta i veri momenti interni sotto il carico applicato.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

4. **Impostare i Momenti di picco per la capacità di movimento plastica M_p:** Regolare i momenti ridondanti per garantire che i momenti di punta nel diagramma totale del momento non superino la capacità di istante in plastica M_p in qualsiasi sezione della struttura. Questo passaggio è fondamentale perché rispetta la condizione di resa assicurando che nessuna sezione sia sovraffollata. M_p funge da confine che segna la transizione tra comportamento elastico e plastica, identificando le sezioni che hanno raggiunto la loro piena capacità di carico.
5. **Verificare la formazione di un Meccanismo:** Confermare che il numero di cerniere in plastica si è formato in luoghi dove i momenti raggiungono M_p è sufficiente per produrre un meccanismo. Un meccanismo si verifica quando la struttura può subire deformazioni aggiuntive senza aumento di carico, rendendolo instabile efficacemente. La formazione di un meccanismo indica che la struttura è sull'orlo del collasso, poiché qualsiasi ulteriore aumento di carico porterebbe a deformazioni incontrollate.
6. **Computare il carico finale utilizzando le condizioni di equilibrium:** Con la distribuzione finale del momento in atto, applicare equazioni di equilibrio per calcolare il carico definitivo che la struttura può sostenere senza violare le condizioni di resa. Questo carico finale corrisponde alla magnitudo del carico applicato a cui la struttura raggiunge uno stato di collasso secondo il metodo inferiore. Questo carico è una stima conservatrice della vera capacità della struttura, assicurando che nessuna parte della struttura superi il suo limite di plastica.

Riassunto dell'approccio del basso foro

25 L'approccio inferiore al limite fornisce un modo sistematico per valutare la capacità di carico-portante di una struttura da:

- Garantire l'equilibrio delle forze interne ed esterne.
- Rispettare le condizioni di resa attraverso una distribuzione accurata del momento.
- Evitare le ipotesi sulle sequenze di formazione della cerniera, dando così una stima sicura che può sottovalutare il carico effettivo del collasso.

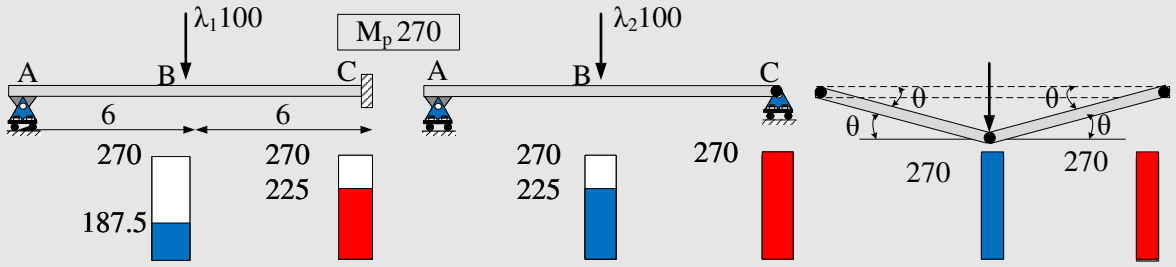
26 Questo approccio è particolarmente utile nell'ingegneria strutturale perché garantisce la sicurezza, producendo un carico di collasso che è, nel peggiore dei casi, uguale o inferiore al vero carico finale.

27 Utilizzando i vincoli di equilibrio e di rendimento da soli, il metodo a limite inferiore evita le ipotesi su meccanismi specifici di collasso e fornisce un modo robusto per valutare la sicurezza strutturale.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

57.2.2.1 Ex 57.6: Profilato cantiliver I

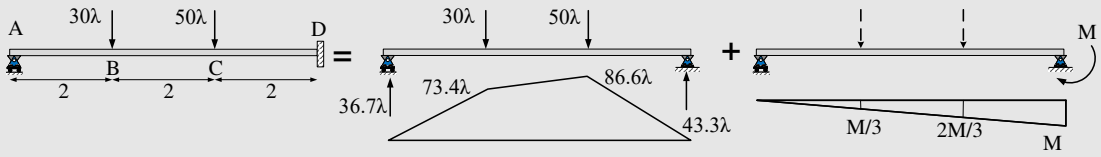


- Eseguire una incrementale analisi.
- Fase 1: Abbiamo un statically indeterminate struttura sottoposta a P=100 (la grandezza è irrilevante, potrebbe essere stato 1, 10, ecc), dopo l'analisi, otteniamo;

$$\begin{array}{rclcrcl} M_C &=& \frac{3}{16}PL = 225 &\Rightarrow& \lambda_1^C &=& \frac{270}{225} = 1.2 \\ M_B &=& \frac{5}{32}PL = 187.5 &\Rightarrow& \lambda_1^B &=& \frac{270}{187.5} = 1.44 \end{array}$$

  Così, prima forma di cerniera Ce P = 1.2(100) = 120, M_C^{total} = 1.2(225) = 270e M_B^{total} = 1.2(187.5) = 225
- Fase 2: Una cerniera si è formata a C (M_C = 0), ora abbiamo un staticamente determinato raggio con un punto carico medio di nuovo P=100 e $M_B = PL/4$=300. Il rimanente capacità di momento in plastica at B is 270-225=45, $\Rightarrow \lambda_2$ = 45/300=0.15
- Aggiungere i due carichi (a ora) M_C^{total}=270, e M_B^{total}=225+0.15(300)=270) e il totale $\lambda_C = \lambda_1 + \lambda_2 = 1.2 + 0.15 = 1.35$, così carico di collasso è 1.35(100) = 135

57.2.2.2 Ex 57.7: Cantiliver Propped II



- Struttura staticamente indeterminata, piuttosto che eseguire un'analisi per determinare dove si verifica la prima cerniera, facciamo due ipotesi
- Prima di tutto consideri la formazione cerniere a C e D

$$\left\{ \begin{array}{rcl} M^D &=& M_p \\ M^C = 86.6\lambda - \frac{2}{3}M^D &=& M_p \end{array} \right. \Rightarrow \lambda = \frac{M_p}{52}$$

- L'altra possibilità cerniere a B e D

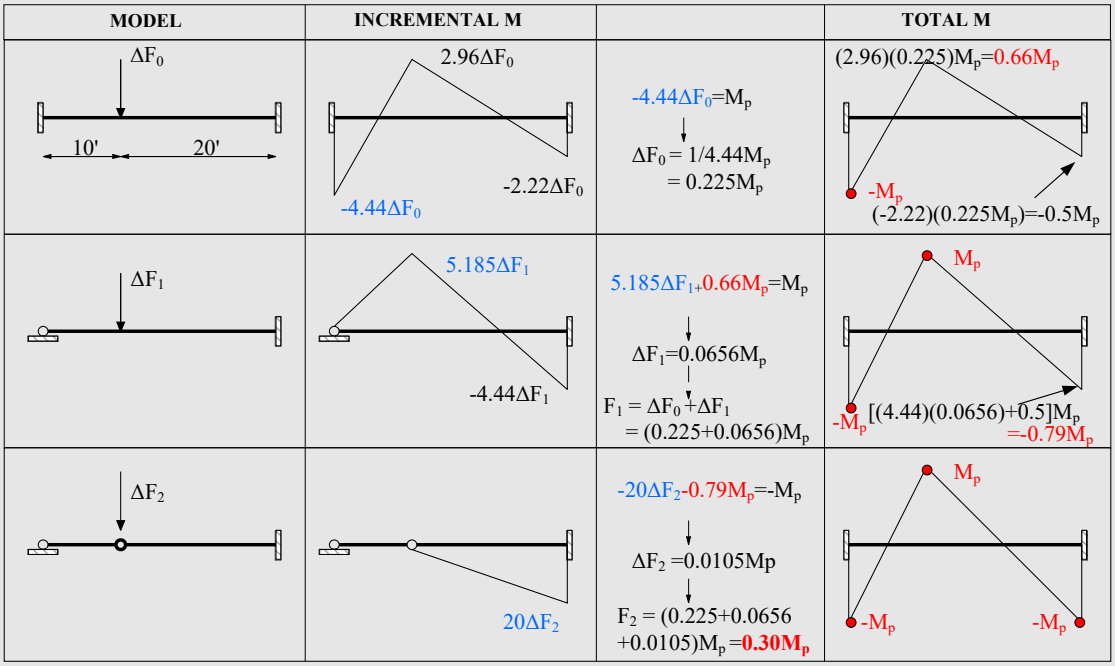
$$\left\{ \begin{array}{rcl} M^D &=& M_p \\ M^B = 73.4\lambda - \frac{1}{3}M^D &=& M_p \end{array} \right. \Rightarrow \lambda = \frac{M_p}{55}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

- Da qui, secondo caso governa.

57.2.2.3 Ex 57.8: Trave fissa



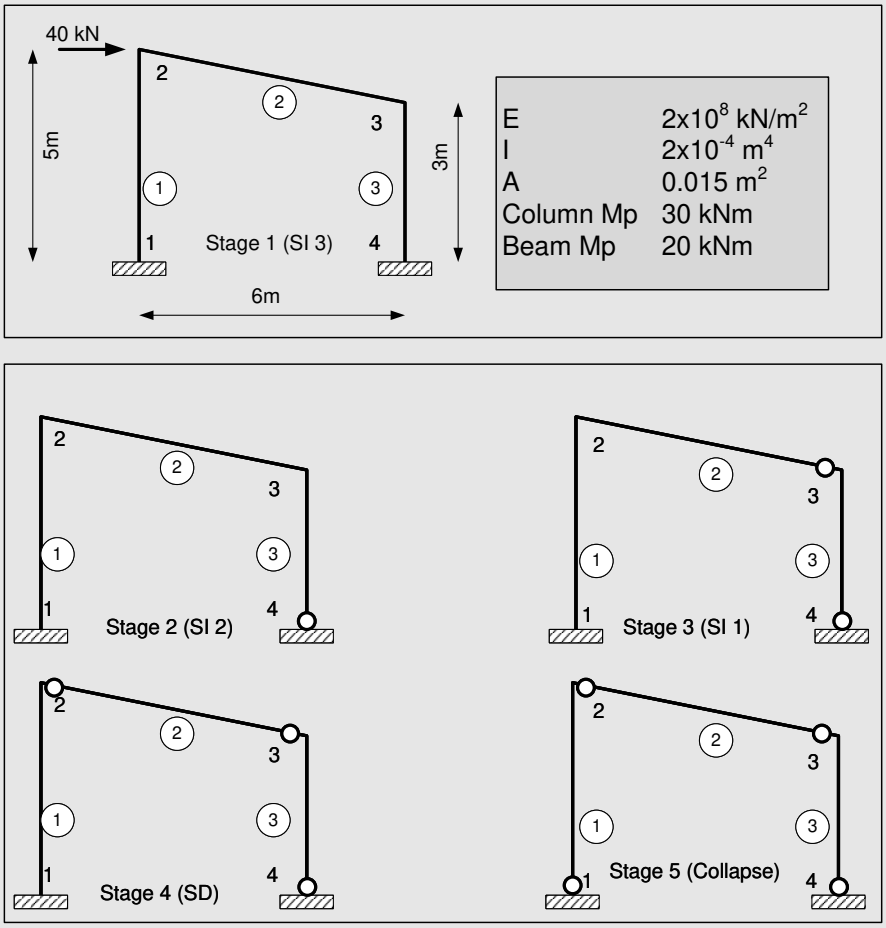
1. Prima di tutto consideriamo il struttura originale
   (a) Applicare un carico F_0., determinare il diagramma di momento corrispondente.
   (b) Identificare il momento più grande ($-4.44F_0$) e impostarlo uguale a M_P. Questo è il primo punto in cui si forma una cerniera di plastica.
   (c) Ridistribuiamo il diagramma del momento in termini di M_P.
2. Successivamente consideriamo la struttura con una cerniera di plastica sul supporto sinistro.
   (a) Applicare un incrementale carico ΔF_1.
   (b) Disegnare il diagramma di momento corrispondente in termini di ΔF_1.
   (c) Identificare il punto massimo **totale** momento come il punto sotto il carico $5.185\Delta F_1 + 0.666M_P$ e impostarlo uguale a M_P.
   (d) Risolvere per ΔF_1, e determinare il carico applicato esternamente totale.
   (e) Ora abbiamo due cerniere di plastica, ne abbiamo ancora bisogno per un terzo che abbia un meccanismo che possa crollare.
3. Infine, analizziamo la struttura riveduta con le due cerniere in plastica.
   (a) Applicare un carico incrementale ΔF_2.

COPIA DI REVISIONE

(b) Disegnare il diagramma di momento corrispondente in termini di ΔF_2.
(c) Impostare il nodo di momento totale sulla destra pari a M_P.
(d) Risolvere per ΔF_2, e determinare il carico esterno totale. Questo carico corrisponde al carico di guasto della struttura.

57.2.2.4 Ex 57.9: Telaio incline

Ora cerchiamo di rianalizzare il precedente telaio inclinato dall'approccio limitato statico inferiore.



Dovremo considerare varie fasi, A partire dalla fase 1 a 4 (collapse); 1-2-3 sono staticamente indeterminate al terzo, secondo e primo grado rispettivamente, la fase 4 è statisticamente determinata; e infine il stadio 5 è il meccanismo di collasso. Quindi, eseguiremmo la prima analisi 3 utilizzando un semplice programma per computer, il quarto a mano. M_p è il momento della plastica, M_i è il momento in ogni giunto (il valore di partenza pari ad uno), M_0 è il momento ottenuto dall'analisi strutturale alla fine di ogni fase.

Fase 1 Eseguire un'analisi e determinare α coefficienti:

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Membro 1:

$$\text{J1} \qquad M_0 = 27.21 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_1}{M_0} = \frac{30}{27.21} = 1.103$$

$$\text{J2} \qquad M_0 = -21.75 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_2}{M_0} = \frac{-30}{-21.75} = 1.379$$

Membro 2:

$$\text{J2} \qquad M_0 = -21.75 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_2}{M_0} = \frac{-20}{-21.75} = 0.916$$

$$\text{J3} \qquad M_0 = 31.00 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_3}{M_0} = \frac{20}{31} = 0.645$$

Membro 3:

$$\text{J3} \qquad M_0 = 31.00 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_3}{M_0} = \frac{30}{31} = 0.968$$

$$\text{J4} \qquad M_0 = -59.62 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_4}{M_0} = \frac{-30}{-59.62} = 0.503$$

Osserviamo che il fondo destro della colonna ha il più piccolo α, quindi la prima cerniera deve formarsi nel fondo destro. Aggiornare i momenti:

Membro 1:

$$M_1 = M_1 + \alpha M_0 = 0.503 \times 27.21 = 13.69$$
$$M_2 = M_4 + \alpha M_0 = 0.503 \times (-21.75) = -10.94$$

Membro 2:

$$M_2 = M_2 + \alpha M_0 = 0.503 \times (-21.75) = -10.94$$
$$M_3 = M_3 + \alpha M_0 = 0.503 \times 31.00 = 15.59$$

Membro 3:

$$M_3 = M_3 + \alpha M_0 = 0.503 \times 31.00 = 15.59$$
$$M_4 = M_4 + \alpha M_0 = 0.503 \times (-59.62) = -30$$

Fase 2 Eseguire un'altra analisi e determinare α coefficienti:

Membro 1:

$$\text{J1} \qquad M_0 = 65.09 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_1}{M_0} = \frac{30 - 13.69}{65.09} = 0.251$$

$$\text{J2} \qquad M_0 = -47.24 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_2}{M_0} = \frac{-30 + 10.94}{-47.24} = 0.403$$

Membro della Commissione 2

$$\text{J2} \qquad M_0 = -47.24 \qquad M_2 = -21.75 \qquad \alpha = \frac{M_p - M_2}{M_0} = \frac{-20 + 10.94}{47.24} = 0.192$$

$$\text{J3} \qquad M_0 = 52.61 \qquad M_3 = 31.00 \qquad \alpha = \frac{M_p - M_3}{M_0} = \frac{20 - 15.59}{52.61} = 0.083$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Membro della Commissione

J3 $M_0 = 52.61$ $\alpha = \dfrac{M_P - M_3}{M_0} = \dfrac{30 - 15.59}{52.61} = 0.273$

J4 $M_4 = 0$

Questa volta, il più piccolo α corrisponde alla fine giusta del fascio, che sarà la posizione della seconda formazione di cerniera. Aggiornamento dei momenti.

1

$$M_1 = M_1 + \alpha M_0 = 13.69 + 0.083 \times 65.09 = 19.09$$
$$M_2 = M_4 + \alpha M_0 = -10.94 + 0.083 \times (-47.24) = -14.86$$

Membro della Commissione 2

$$M_2 = M_2 + \alpha M_0 = -10.94 + 0.083 \times (-47.24) = -14.86$$
$$M_3 = M_3 + \alpha M_0 = 15.59 + 0.08 \times 52.61 = 20$$

Membro della Commissione

$$M_3 = M_3 + \alpha M_0 = 15.59 + 0.083 \times 52.61 = 20$$
$$M_4 = M_4 = -30$$

Fase 3 Eseguire un'analisi e determinare α coefficienti:

1

J1 $M_0 = 129.70$ $\alpha = \dfrac{M_p - M_1}{M_0} = \dfrac{30 - 19.09}{129.70} = 0.084$

J2 $M_0 = -70.31$ $\alpha = \dfrac{M_p - M_2}{M_0} = \dfrac{-30 + 14.86}{-70.31} = 0.215$

Membro della Commissione 2

J 2 $M_0 = -70.31; M_2 = -70.31$ $\alpha = \dfrac{M_p - M_2}{M_0} = \dfrac{-20 + 14.86}{-70.31} = 0.073$

Aggiornare i momenti

1

$$M_1 = M_1 + \alpha M_0 = 19.09 + 0.073 \times 129.70 = 28.56$$
$$M_2 = M_4 + \alpha M_0 = -14.86 + 0.073 \times (-70.31) = -20$$

Membro della Commissione 2

$$M_2 = M_2 + \alpha M_0 = -14.86 + 0.073 \times (-70.31) = -20$$
$$M_3 = M_3 = 20$$

Membro della Commissione

$$M_3 = M_3 = 20$$
$$M_4 = M_4 = -30$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Fase 4 La cerniera deve formarsi nella colonna inferiore sinistra

1

$$J1M_0 = 40 \times 5 = 200 \qquad \alpha = \frac{M_p - M_1}{M_0} = \frac{30 - 28.56}{200} = 0.007$$

Infine, la Commissione ha deciso di chiudere il suo progetto di bilancio.

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ &= 0.503 + 0.083 + 0.073 + 0.007 = 0.666\end{aligned}$$

Il carico di collasso sarà così

$$F_{cr} = \alpha F = 0.666 \times 40 = 26.64\text{KN}$$

Il risultato di queste analisi è meglio mostrato attraverso la seguente tabella.

Member	Joint	Moment M_0 (kNm)	Moment M_i (kNm)	Residual Plastic Moment M_p-M_i (kNm)	Load Factor $\alpha=(M_p-M_i)/M_0$	Critical Load Factor α_{cr}	Cumulative Load Factor α_{cum}	Cumulative Moment $M_{j+1}=M_j+\alpha_{cr}M_0$ $=\alpha_{cum}M_0$ (kNm)	Plastic Moment M_p (kNm)	Critical Load $P_{cr}=P*\alpha_{cr}$ (kN)
Stage 1										
1	1	27.21	0.00	30.00	1.10	0.50	0.50	13.69	30	20.13
	2	-21.75	0.00	-30.00	1.38			-10.94	-30	
2	2	-21.75	0.00	-20.00	0.92			-10.94	-20	
	3	31.00	0.00	20.00	0.65			15.60	20	
3	3	31.00	0.00	30.00	0.97			15.60	30	
	4	-59.62	0.00	-30.00	0.50			-30.00	-30	
Stage 2										
1	1	65.09	13.69	16.31	0.25	0.08	0.59	19.14	30	23.47
	2	-47.24	-10.94	-19.06	0.40			-14.90	-30	
2	2	-47.24	-10.94	-9.06	0.19			-14.90	-20	
	3	52.61	15.60	4.40	0.08			20.00	20	
3	3	52.61	15.60	14.40	0.27			20.00	30	
	4	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	-30	
Stage 3										
1	1	129.70	19.14	10.86	0.08	0.07	0.66	28.55	30	26.38
	2	-70.31	-14.90	-15.10	0.21			-20.00	-30	
2	2	-70.31	-14.90	-5.10	0.07			-20.00	-20	
	3	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	20	
3	3	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	30	
	4	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	-30	
Stage 4										
1	1	200.00	28.55	1.45	0.01	0.01	0.67	30.00	30	**26.67**
	2	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	-30	
2	2	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	-20	
	3	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	20	
3	3	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	30	
	4	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	-30	

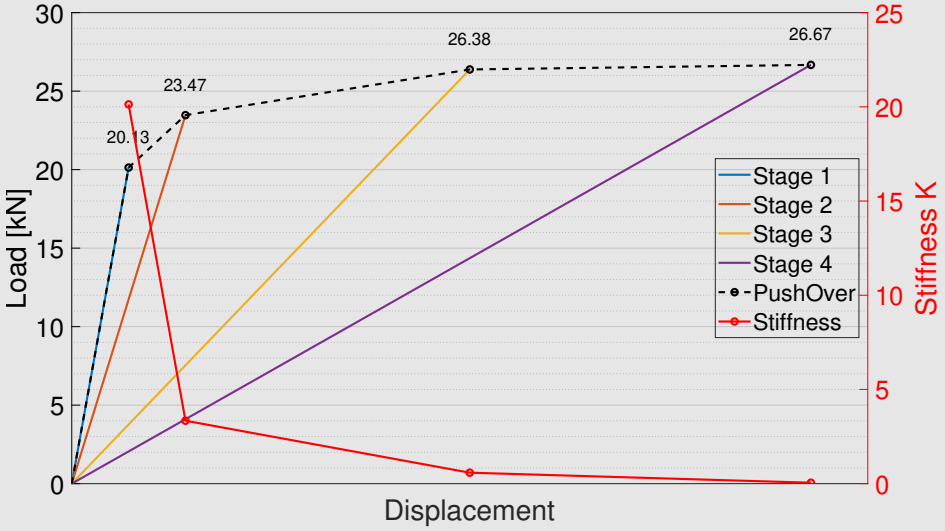
Quindi, $P_{crit} = 26.67$ kN M_p è il momento della plastica, M_i è il momento in ogni nodo, M_0 è il momento in ogni nodo in ogni elemento durante ogni fase.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Nota

Anche se gli spostamenti in ogni fase potrebbero essere stati determinati, non sono segnalati. Tuttavia, se li avessimo segnalati, avremmo un grafico simile



Si noti che, come l'aumento di carico, abbiamo più cerniere in plastica, quindi la rigidità diminuisce a zero al fallimento.

57.3 Elementi planari (slab)

28 ACI codice: Il design della lastra può essere realizzato attraverso l'uso combinato di soluzioni classiche basate su un continuum lineare elastico, soluzioni numeriche basate su elementi discreti o analisi delle linee di rendimento.

29 *Teoria della linea di rendimento* (YLT) indaga i meccanismi di fallimento allo stato limite finale. È semplice, ma richiede familiarità con i modelli di guasto (cioè la conoscenza di come le lastre possono fallire).

30 Quando una lastra è sull'orlo del collasso (numero insufficiente di cerniere reali o plastiche per formare un meccanismo) assi di rotazione si trova lungo linee di supporto o supporti a punto superiore come colonne. I segmenti della lastra possono essere considerati ruotare come corpi rigidi nello spazio su questi assi di rotazione.

31 Due tipi di YL: positivo (crack sotto) e negativo (cracking in cima).

32 Linee guida per la creazione di modelli YL:

1. YL sono linee rette (intersezioni di due piani).
2. YL sono assi di rotazione.

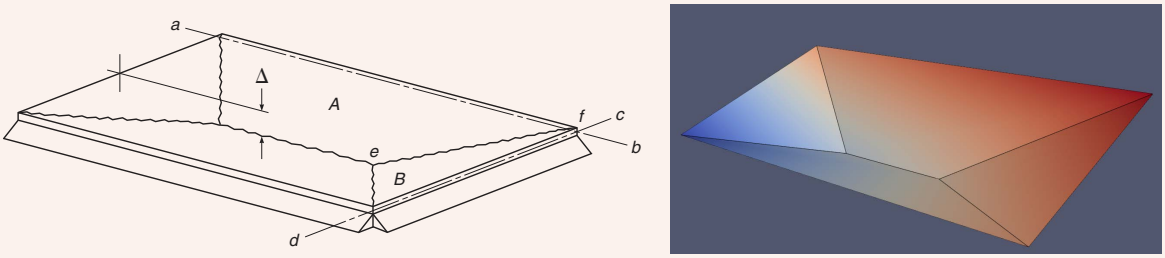
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

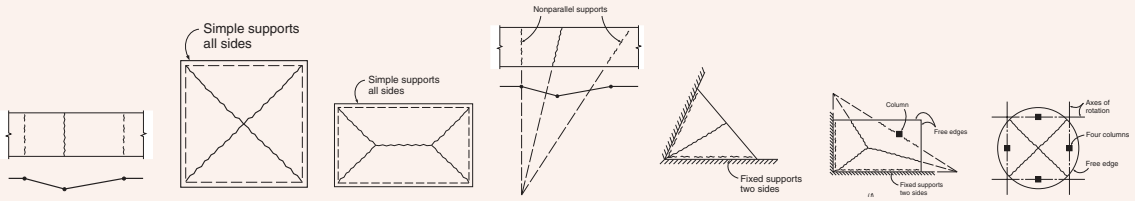
3. I bordi sostenuti di una lastra stabiliranno anche assi di rotazione. Se fissati: -ve YL; se libero: nessun restringimento.
4. Supporti continui repel e semplici supporti attraggono positivo o sagging YL.
5. L'asse di rotazione passa su qualsiasi supporto della colonna. Orientamento dipende da altre considerazioni.
6. Forma YL sotto carichi concentrati che irradiano verso l'esterno.
7. YL tra due segmenti di lastra deve passare attraverso il punto di intersezione degli assi di rotazione dei segmenti della lastra adiacenti.

33 Per esempio in una lastra rettangolare semplicemente appoggiata su quattro lati, Fig. 57.1a, avrà i suoi segmenti A e B ruotare intorno ab e cd.

34 L'obiettivo di indagare i modelli YL è quello di trovare il modello che dà la capacità minima del carico).



(a) Rettangolare



(b) Altri

Figura 57.1: Linee di respirazione in lastre

57.3.1 Statici: limite inferiore

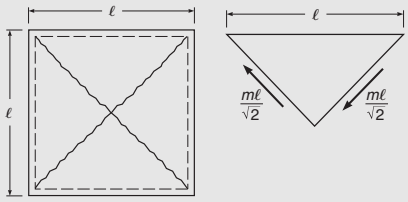
35 L'approccio inferiore al limite è ingombrante, ma non impossibile da usare per lastre.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

57.3.1.1 Ex 57.10: Lastra quadrata

Una lastra quadrata è semplicemente appoggiata su quattro lati ed è rinforzata isotropicamente, data il momento di plastica per piede lineare m_P, determinare l'uniforme w_{ult}. Nota, questo metodo è raramente usato per l'analisi della lastra. A causa della simmetria, il modello YL è come mostrato. Considerando l'equilibrio di momento di uno dei quattro segmenti di lastre circa il suo supporto:



$$M_{ext} = w \underbrace{\frac{l^2}{4}}_{\text{area}} \underbrace{\frac{L}{6}}_{\text{moment arm}}$$

$$M_{int} = 2 \underbrace{\frac{m_p l}{\sqrt{2}}}_{\text{moment}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\text{Hor. component}}$$

$$M_{ext} = M_{int} \Rightarrow w_{ult} = \frac{24 m_p}{l^2}$$

57.3.2 Kinematics: il limite superiore

36 Definire il lavoro nel contesto delle linee di rendimento in lastre:

Lavori esterni

$$W_{ext} = \sigma(N_i \delta_i)$$

dove N è la forza risultante, δ Per facilitare la determinazione del lavoro esterno, può essere auspicabile rompere la lastra in vari elementi, Fig. 57.2 e determinare gli spostamenti corrispondenti a un'unità $\delta = 1$ al centro.

Lavoro interno:

$$W_{int} = \sum ml\theta$$

dove m è il momento interno della lastra per unità di lunghezza, l è la lunghezza della linea di snervamento, o la sua proiezione sull'asse di rotazione della regione corrispondente, e θ è la rotazione della regione attorno al proprio asse.

37 Per quanto riguarda la procedura, è identico a quello utilizzato per le travi: conservazione dell'energia.

Please note that this section contains floating elements (figures and/or tables) that need to be printed before the next one. As a result, you may encounter blank spaces or gaps in here.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

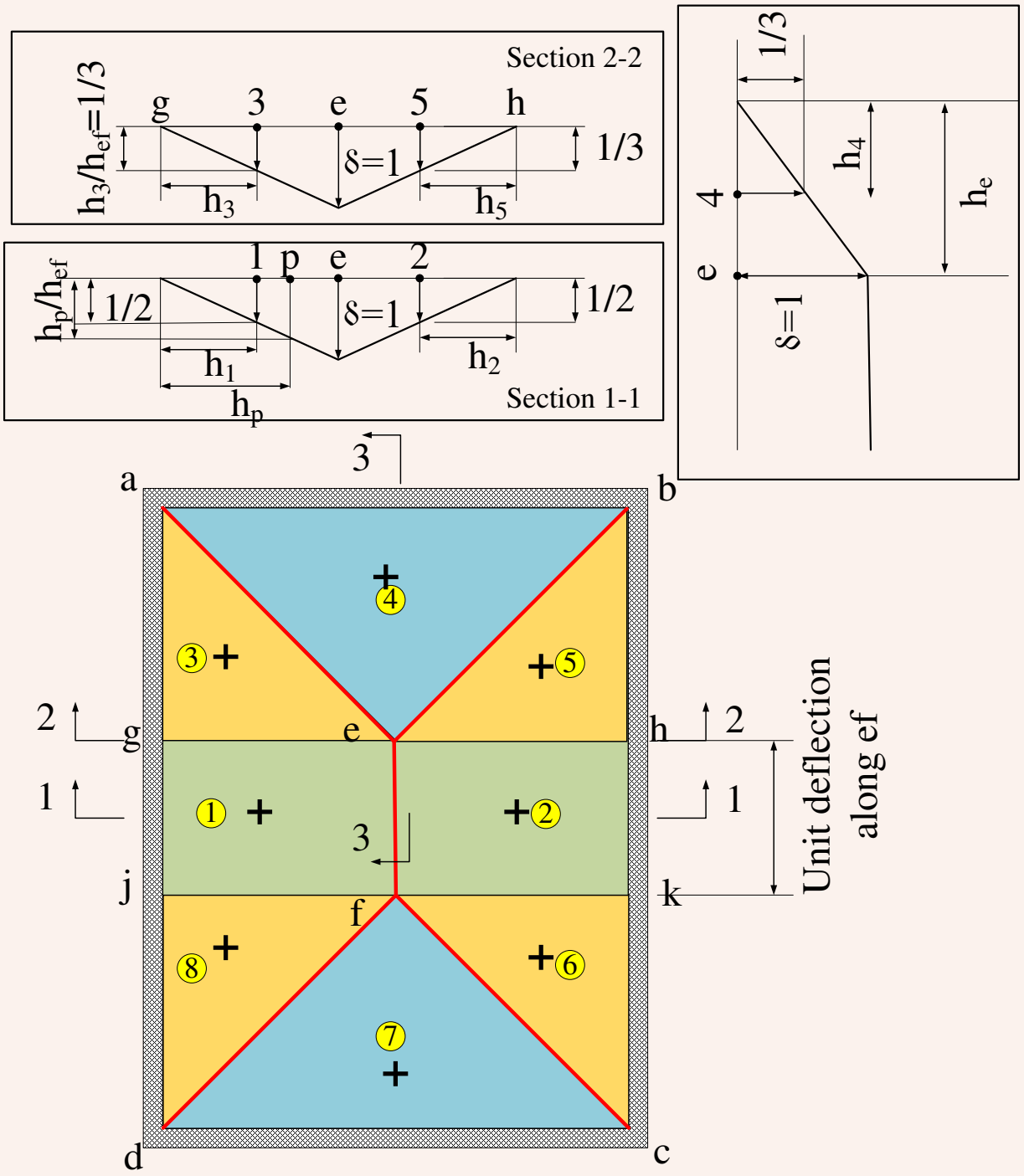


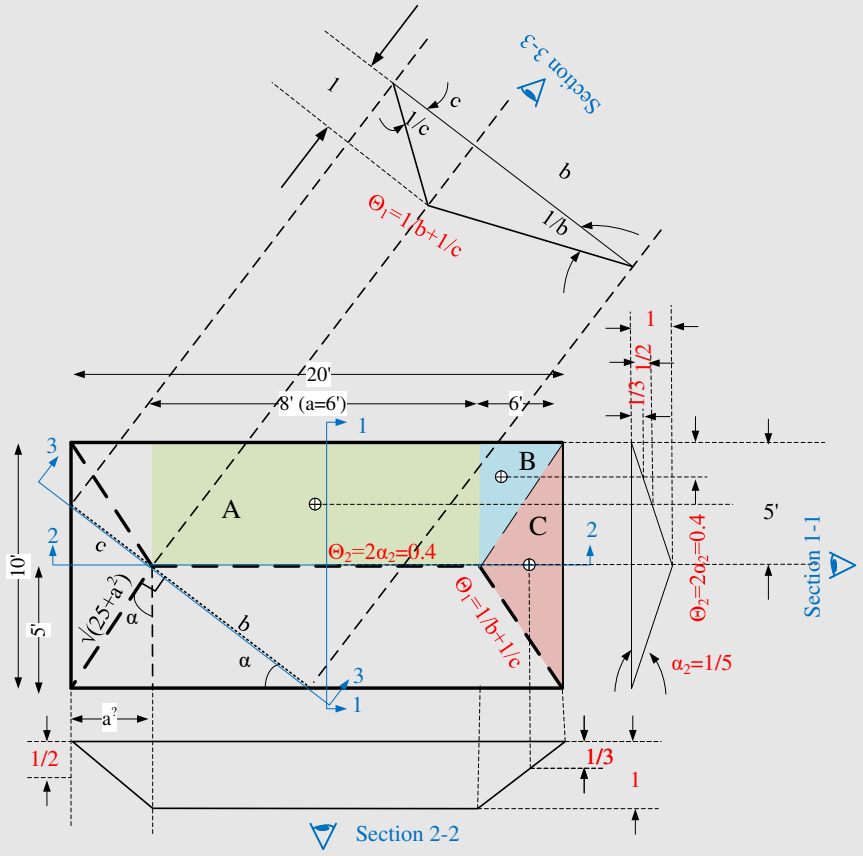
Figura 57.2: Determinazione delle linee di resa in lastre rettangolari

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

57.3.2.1 Ex 57.11: Lastra rettangolare

La lastra a due vie è semplicemente supportata su tutti e quattro i lati e supporta un carico uniforme w. Cerchiamo di determinare la resistenza necessaria per la lastra.



- +ve forma YL come mostrato, dimensione a è sconosciuto.
- Dalla geometria: lunghezza della diagonale $=\sqrt{25+a^2}$, e formare triangoli simili

$$\frac{b}{5}=\frac{\sqrt{25+a^2}}{a} \Rightarrow b=5\frac{\sqrt{25+a^2}}{a}$$
$$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{25+a^2}}{5} \Rightarrow c=a\frac{\sqrt{25+a^2}}{5}$$

- Corrispondente a una deviazione dell'unità, la rotazione della cerniera di plastica alla diagonale YL è

$$\theta_1=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{a}{5\sqrt{25+a^2}}+\frac{5}{a\sqrt{25+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{25+a^2}}\left(\frac{a}{5}+\frac{5}{a}\right)$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

- La rotazione della linea di rendimento parallela ai bordi lunghi della lastra

$$\theta_2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 0.40$$

- Assumere $a = 6$ ft, quindi la lunghezza della diagonale YL è $\sqrt{25+36} = 7.81$ ft.
- Corresponding rotation of the diagonal YL is:

$$\theta_1 = \frac{1}{7.81}\left(\frac{6}{5} + \frac{5}{6}\right) = 0.261$$

- Angolo di rotazione al centro YL: $\theta_2 = 0.4$.
- Il lavoro interno è

$$W_{int} = 4(m_p \times 7.81 \times 0.261) + (m_p \times (20 - 6 - 6) \times 0.4) = 11.36 m_p$$

- Il lavoro esterno

$$W_{ext} = \underbrace{2\left(10 \times 6 \times \frac{1}{2} w \times \frac{1}{3}\right)}_{\text{A}} + + \underbrace{4\left(6 \times 5 \times \frac{1}{2} w \times \frac{1}{3}\right)}_{\text{B}} + \underbrace{2\left(8 \times 5 w \times \frac{1}{2}\right)}_{\text{C}} = 80w$$

- Equazione $W_{int} = W_{ext}$ dà $w_{ult} = \frac{11.36 M_P}{80} = 0.14 m_P$

Prove di successo

a	W_{int}	W_{ext}	w_{ult}	
6.0	11.36 m_P	80.0 w	0.142 m_P	
6.5	11.08 m_P	78.4 w	0.141 m_P	Controlli
7.0	10.87 m_P	76.6 w	0.142 m_P	
7.5	10.69 m_P	75.0 w	0.143 m_P	

- Si noti che se una striscia di larghezza dell'unità è stata considerata invece, allora

$$m_p = \frac{w_{ult} L^2}{8} \Rightarrow w_{ult} = \frac{8 m_p}{L^2} = \frac{8 m_p}{10^2} = 0.08 m_p$$

invece di $0.141 m_p$.

57.4 Analisi del pushover

[38] L'analisi pushover è una procedura statica non lineare, comunemente utilizzata nel design sismico.

[39] È qui introdotto brevemente (con una discussione più dettagliata nel capitolo 69.4.1)

COPIA DI REVISIONE

evidenziare la sua somiglianza con l'analisi dei limiti inferiori, che sarà discussa nella sezione successiva.

40 L'analisi pushover si applica incrementando notevolmente i carichi laterali per simulare la risposta della struttura in condizioni terremotate:

- **Caricamento incredibile**: Nell'analisi pushover, i carichi vengono applicati in modo incrementale fino a quando la struttura non sviluppa un meccanismo di guasto, raggiungendo la sua capacità massima. La distribuzione del carico rappresenta tipicamente le forze laterali come previsto in un terremoto.
- **Comportamento inelastico progressivo**: Con l'aumento del carico, la struttura inizia a cedere in punti critici (cerniere di plastica), catturati attraverso una curva di spostamento del carico che rappresenta la risposta strutturale fino ad e oltre il limite elastico.
- **Formazione Meccanismo**: L'analisi pushover identifica i meccanismi di collasso, fornendo informazioni su come la struttura si deforma sotto carico grave e rivelando punti deboli e duttilità generale.
- **Comportamento materiale non lineare**: L'analisi cattura deformazione non lineare, inelastice, critica nel design sismico, come riflette il comportamento post-elastico e i modelli di guasto.

57.5 Analogie tra analisi a più basso limite e

57.5.1 Analisi del pushover

41 Ci sono forti analogie tra l'analisi dei limiti inferiori e l' analisi di pushover nell'ingegneria strutturale, Fig. 57.3.

42 Mentre entrambi i metodi mirano a determinare la capacità di carico della struttura, differiscono in metodologia e nel contesto delle applicazioni.

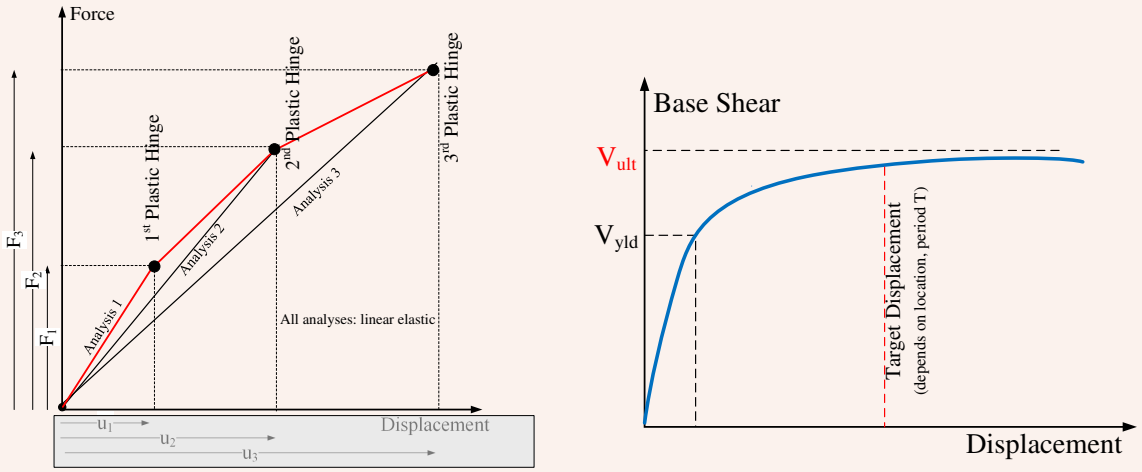
Analogie principali tra analisi al limite inferiore e analisi pushover

43 Mentre si applica in modo diverso, entrambe le analisi condividono somiglianze fondamentali:

- **Determinazione della capacità di carico finale**: Entrambi mirano a determinare la capacità massima di carico, anche se l'analisi dei limiti più bassi fornisce una stima conservatrice, mentre l'esame pushover fornisce una valutazione realistica.
- **Focus sulla sicurezza strutturale sotto carico estremo**: Entrambi i metodi valutano la capacità di carico in condizioni estreme, anche se con diversi tipi di carico. L'analisi

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Analisi del basso livello di carbonio (b) PushOver

Figura 57.3: Soluzione di limite inferiore Statics - *Si'*. Analisi del pushover

inferiore del limite è adatta per carichi statici, mentre l'analisi pushover viene comunemente utilizzata per carichi laterali e sismici.

- **Materiale inelastico comportamento**: Entrambi i metodi incorporano la teoria della plasticità, con un'analisi inferiore del limite che si concentra sull'equilibrio e sulla resa, mentre l'analisi pushover osserva una formazione progressiva di cerniera in plastica.

Differenze chiave tra analisi del basso profilo e analisi pushover

44 Le differenze tra i due metodi sono significative:

- **Approccio all'Equilibrio e ai Meccanismi**: L'analisi dei limiti più bassi garantisce l'equilibrio attraverso una distribuzione sicura della forza senza bisogno di un meccanismo di collasso.
- **Contesto di applicazione**: L'analisi dei limiti più bassi viene generalmente utilizzata per carichi statici nella progettazione plastica, mentre l'analisi del pushover è usata nel disegno sismico, simulando i carichi laterali.
- **Considerazione della deformazione non lineare**: L'analisi pushover rappresenta esplicitamente deformazioni inelastiche e produce una curva di spostamento del carico, mentre l'analisi dei limiti più bassi garantisce solo resa ed equilibrio senza modellare la deformazione.
- **Visualizzazione del meccanismo di colata**: L'analisi pushover consente la visualizzazione di meccanismi di collasso e punti deboli, che è essenziale per la valutazione delle prestazioni sismiche, a differenza dell'analisi dei limiti più bassi, che non modella il crollo.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

- **Carico Natura e Applicazione**: L'analisi dei limiti inferiori applica un carico statico senza progressione incrementale; l'analisi pushover aumenta in modo graduale il carico laterale fino al collasso, rendendolo adatto per i contesti di caricamento dinamico.

45 In sintesi:

- **Analisi del basso livello di carbonio**: Fornisce una stima conservatrice della capacità di carico trovando una distribuzione della forza che soddisfa le condizioni di equilibrio e resa. Non richiede un meccanismo di collasso o analisi non lineare della deformazione, concentrandosi esclusivamente sulla distribuzione sicura del carico.
- **Analisi del pushover**: Fornisce una stima realistica del carico finale attraverso il caricamento laterale incrementale fino a quando non si forma un meccanismo di collasso. Cattura deformazione non lineare, inelastice e visualizza modelli di guasto strutturale, rendendolo particolarmente utile nel design sismico.

46 In sostanza, entrambe le analisi, Tabella 57.2 utilizzare i principi della teoria della plasticità per valutare la capacità di carico, ma le loro differenze riflettono metodologie e applicazioni distinte: L'analisi dei limiti più bassi è focalizzata sull'equilibrio e conservatrice, mentre l'analisi del pushover è orientata alla deformazione e realistica, sottolineando i meccanismi di collasso sotto carico progressivo.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 57.2: Confronto tra analisi dei limiti inferiori e analisi pushover

Aspetti	Analisi al limite inferiore	Analisi pushover
Obiettivo	Fornisce una stima conservatrice della capacità di carico finale garantendo equilibrio e soddisfazione dei rendimenti.	Fornisce una stima realistica del carico finale applicando incrementalmente i carichi laterali fino a quando non si forma un meccanismo di guasto.
Equilibrio Requisito	Si concentra sulla ricerca di una distribuzione della forza che soddisfa sia l'equilibrio e le condizioni di resa senza richiedere un meccanismo di collasso.	Osserva la progressione della formazione di cerniera in plastica fino a quando non emerge un meccanismo di collasso.
Contesto di applicazione	Tipicamente applicato in plastica per carichi statici, soprattutto per strutture in acciaio e cemento.	Utilizzato principalmente nel design sismico, applicando carichi laterali per simulare gli effetti del terremoto.
Materiale comportamento	Considera il comportamento inelastico del materiale attraverso le condizioni di resa, ma non modella esplicitamente la deformazione non lineare.	Cattura deformazione non lineare, inelastice, producendo una curva di spostamento del carico per valutare il comportamento post-elastico.
Visualizzazione del meccanismo	Non visualizza meccanismi di collasso o modelli di spostamento, concentrandosi esclusivamente sul raggiungimento dell'equilibrio.	Consente la visualizzazione dei meccanismi di collasso, contribuendo a identificare punti deboli e duttilità complessiva sotto carichi crescenti.
Carico della natura	Applicazione statica di carico senza progressione incrementale; definisce un unico livello di carico sicuro.	Incrementale applicazione di carico laterale per imitare forze indotte dal terremoto, progredisce fino a quando il crollo si verifica.
Produzione	Livello di carico sicuro che soddisfa le condizioni di equilibrio e resa, senza dettagliare il comportamento della deformazione.	Curva di spostamento del carico che mostra la risposta progressiva della struttura, tra cui formazione di cerniera in plastica e capacità finale.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

57.5.2 Plasticità concentrata

47 Infine, l'analogia con la plasticità concentrata (§62.3) è notevole. Il modello di plasticità concentrata può essere interpretato come una rappresentazione semplificata del teorema del limite inferiore: la deformazione plastica è concentrata in zone discrete o cerniere plastiche, considerate come meccanismi di deformazione. Assumendo una plasticità perfetta in tali zone, il modello individua il carico associato alla formazione del meccanismo plastico.

48 Il modello di plasticità lumped (§62.3) e la teoria della linea di rendimento inferiore, sebbene sviluppata per diversi aspetti dell'analisi strutturale, condividono una profonda analogia concettuale nel modo in cui trattano la plasticificazione e il rendimento.

49 In entrambi i modelli, l'ipotesi è che la resa o la plastificazione siano altamente localizzate, concentrando la deformazione e la dissipazione dell'energia nelle regioni specifiche e vincolate della struttura. Questo approccio è particolarmente utile nei modelli semplificati, ma efficaci per valutare il comportamento strutturale finale.

Modello di plasticità lumpata: Concentrazione della formazione in plastica cerniera

50 Nel modello di plasticità lumped, tutta la plastificazione si assume che avvenga in luoghi discreti noti come cerniere di plastica, tipicamente nei punti dei massimi momenti di piegatura.

51 Questo approccio assume che il comportamento elastico persiste nel resto della struttura, che consente un'analisi semplificata del comportamento post-yield.

52 La formazione di una cerniera in plastica indica che il membro ha raggiunto la sua capacità di momento in quella posizione, quindi localizzando deformazioni inelastiche a queste cerniere. Man mano che aumenta il carico, la struttura forma cerniere di plastica aggiuntive fino a quando non viene creato un meccanismo, consentendo una previsione dei carichi del collasso.

53 Questa localizzazione della plastificazione riduce la complessità computazionale e pone l'accento sull'analisi delle sezioni critiche, rendendolo un prezioso approccio nella valutazione dell'ultima capacità di carico senza dover richiedere una dettagliata analisi non lineare su tutta la struttura.

Teoria della linea di reggimento del bound inferiore: localizzazione delle linee di Yield

54 La teoria della linea di rendimento inferiore, allo stesso modo si concentra sulla resa a linee o zone discrete—linee di latta—dove si presume che la lastra subisca deformazioni plastiche.

55 Questa teoria opera sotto la premessa che le linee di rendimento si formano lungo i sentieri del lavoro minimo per consentire il collasso, creando un meccanismo.

56 La teoria della linea di resa utilizza il principio del lavoro virtuale per stimare il carico di

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

collasso, assumendo deformazioni plastiche sono confinate a queste linee mentre il resto della lastra rimane rigida.

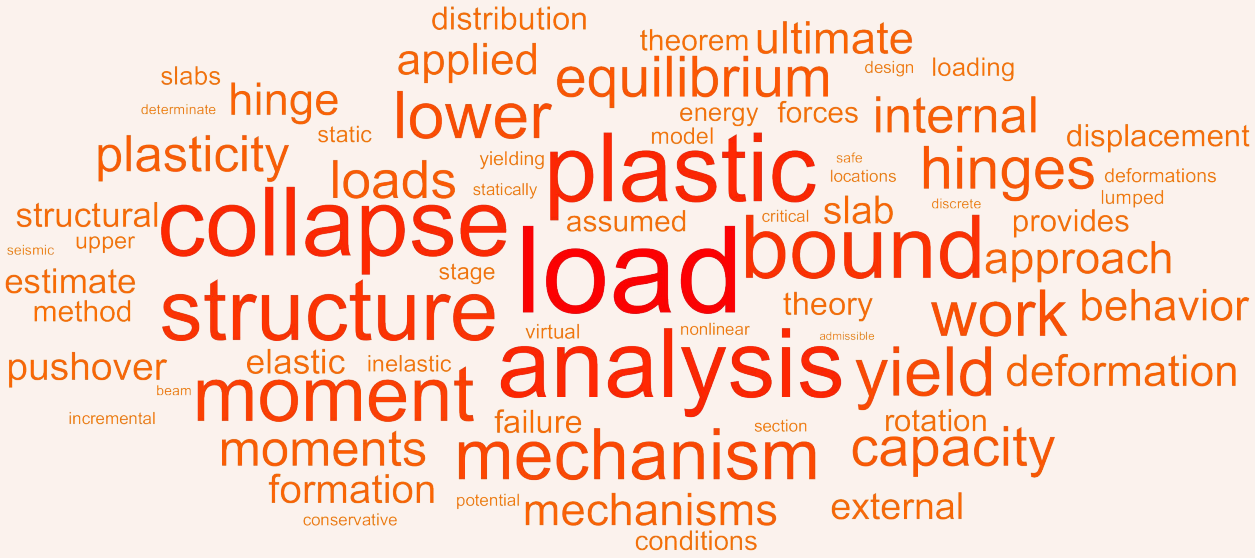
57 Come il modello di plasticità lumped, la teoria della linea di rendimento beneficia di una ridotta complessità individuando la plasticità. Questo permette agli ingegneri di approssimare il carico finale delle lastre e dei piatti con calcoli relativamente semplici rispetto all'analisi dettagliata della plasticità su tutta la superficie.

L'analogia concettuale: localizzazione del comportamento inelastice

58 Entrambi i modelli sfruttano l'idea che il comportamento inelastico possa essere limitato a regioni specifiche, riducendo così la necessità di analisi della plasticità su larga scala e semplificando la previsione dei meccanismi di collasso.

59 Il modello di plasticità lumped localizza la plastificazione a cerniere in plastica, mentre la teoria della linea di rendimento localizza il rendimento lungo le linee. Concentrando la deformazione a questi punti o linee localizzate, entrambi gli approcci consentono una stima più bassa della capacità della struttura, facilitando un'analisi più gestibile dei complessi sistemi strutturali.

60 Tabella 57.3 illustra le analogie tra i due approcci.



COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 57.3: Plasticità lussata e analisi a rilegatura inferiore

Aspetti	**Modello di plasticità lumpata**	**Teoria della linea di reflusso del bound inferiore**
Tipo di struttura	Cornici, travi e simili elementi lineari	Lastre e lastre
Localizzazione del comportamento inelastico	A cerniere di plastica (punti discrete)	Lungo le linee di rendimento (linee discrete)
Comportamento fuori zona localizzata	Presumo di rimanere elastica	Presumo di rimanere rigidi
Meccanismo di colata	Formazione di cerniere multiple in plastica fino a quando non viene creato un meccanismo	Formazione di linee di rendimento che creano un meccanismo di collasso
Approccio di analisi	Semplificato concentrandosi su sezioni critiche in cui si formano cerniere di plastica	Semplificate assumendo che la resa si verifichi lungo le linee di rendimento
Predizione del carico finale	Attraverso cerniere in plastica localizzate al massimo dei momenti	Attraverso linee di rendimento che rappresentano percorsi di lavoro minimo
Utilizzo dei principi del basso profilo	Fornisce una stima del limite inferiore di carico di collasso	Fornisce una stima del limite inferiore di carico di collasso
Applicazione primaria	Analisi della capacità di carico finale per i frame	Analisi della capacità di carico finale per lastre e piastre

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 58

Meccanica di danno

Questo capitolo sarà poi scritto da un esperto eminente di meccanica dei danni.

58.1 PROPOSTA SENZA DISPONIBILE ChatGPT

58.1.1 Motivazione e fondazioni fisiche (~1.5 pagine)

Inizia dal quadro sperimentale: microcracking come il meccanismo di degrado dominante in materiali quasi-brittle, e la necessità di distinguere i danni dalla plasticità. Una o due curve sperimentali emblematiche (tensione unitaria e compressione del cemento) aggiusteranno immediatamente la teoria nell'osservazione.

58.2 Quadro termodinamico (~2 pagine)

La disuguaglianza Clausius–Duhem, la variabile danno D (scala all'inizio), lo stress efficace $\tilde{\sigma} = \sigma/(1 - D)$, e l'energia elastica della tensione del materiale danneggiato. Questo quadro stabilisce che la meccanica dei danni non è una costruzione ad hoc, ma appartiene allo stesso formalismo termodinamico della plasticità – che è essenziale per i lettori già familiari con quest'ultimo.

COPIA DI REVISIONE

58.3 Danni isotropici Scalari: il modello Mazars (~4 pagine)

Questo è il nucleo del capitolo. $\tilde{\varepsilon}$, il criterio di danno $f(\tilde{\varepsilon}, \kappa) = \tilde{\varepsilon} - \kappa \leq 0$, la legge sull'evoluzione a due bracci (D_t, D_c, combinato attraverso α_t e α_c). Identificazione del parametro da test standard. Un esempio numerico tracciato passo dopo passo lungo il percorso di carico non assiale sarebbe particolarmente prezioso per gli studenti.

58.4 Tensione - asimmetria di compressione e l'effetto unilaterale (~2 pagine)

Chiusura a scatto sotto compressione e parziale restauro di rigidità — una delle più importanti sottigliezze per la modellazione di strutture in carico ciclico o piegatura combinata.

58.5 Danni - accoppiamento di plastica (~2 pagine)

Una presentazione concisa di modelli accoppiati — ceppi irreversibili e degrado della rigidità – che sono indispensabili per il cemento sotto compressione e per l'acciaio. L'efficace concetto di stress di Lemaitre e il suo ruolo nelle formulazioni accoppiate moderne (Grassl–Jirásek, Desmorat).

58.6 Regolamentazione e mesh oggettività (~3 pagine)

Questa è la sezione più importante per un pubblico di elementi finiti. L'ammorbidimento locale porta alla dipendenza patologica della rete. Il modello della banda crepa (Bažant) come rimedio pratico — regolando il ramo addolcimento dalla dimensione dell'elemento h per preservare l'energia frattura G_f. Danni non locali integrati e la formulazione di gradiente implicita come alternative più rigorose. Un'illustrazione numerica del problema e della sua risoluzione sarebbe altamente istruttiva.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

58.7 Applicazione a elementi di trave e colonne (~3 pagine)

Questa è la sezione che collega il capitolo al resto del libro. L'introduzione della variabile di danno nella rigidità della sezione — riduzione EI e EA come funzione del campo di danno integrato sulla sezione trasversale. La nozione di lunghezza caratteristica in un elemento di fascio. Se lo spazio permette, un esempio di una trave o colonna in cemento armato che illustra il progressivo degrado della rigidità e le sue conseguenze strutturali sarebbe l'illustrazione ideale.

58.8 Identificazione del parametro e guida pratica (~1.5 pagine)

Una tavola di parametri del modello Mazars con intervalli tipici per calcestruzzo ordinario e ad alte prestazioni. La procedura d'identificazione da test standard (test brasiliano, compressione uniassiale, piegatura a tre punti).

58.9 Note bibliche e lettura ulteriore (~0,5 pagine)

I riferimenti fondanti — Mazars 1984/1986, Lemaitre 1985, Pijaudier-Cabot & Bažant 1987, Bažants & Oh 1983 — e alcuni articoli di recente recensione per i lettori che desiderano esplorare ulteriormente.

—

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

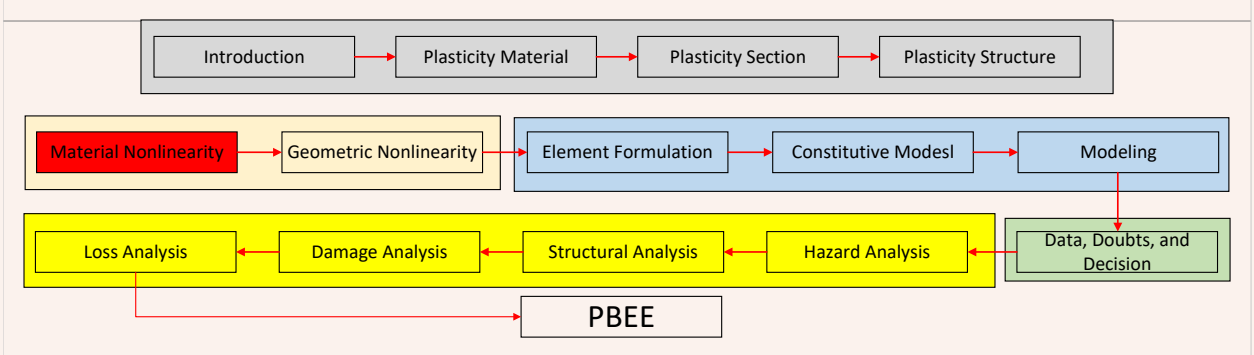
Capitolo 59

Analisi non lineare; Materiale

Abstract

In seguito alla breve introduzione all'analisi non lineare §54.1, questo capitolo approfondisce l'analisi non lineare del comportamento materiale nell'ingegneria strutturale, concentrandosi sulle tecniche di modellazione numerica e le loro applicazioni. A partire da una panoramica generale dei metodi di finanziamento delle radici per le equazioni non lineari, tra cui il metodo Newton, il metodo del secant e i progetti espliciti, questo capitolo mette in evidenza i punti di forza e limitazioni di ogni approccio nella risoluzione di complessi schemi strutturali. equazioni. In seguito, vengono introdotti metodi di controllo del carico incrementale basati sul metodo Newton per analizzare la risposta strutturale sotto forze applicate. Infine, il capitolo esplora le tecniche di controllo dello spostamento, che forniscono un approccio stabile e preciso per catturare risposte post-peak ed ammorbidimento, cruciali nell'analisi dei materiali fragili e addolcitori. Attraverso questi metodi, il capitolo offre un kit completo di strumenti per affrontare problemi non lineari nell'analisi strutturale, sottolineando l'importanza delle soluzioni iterative nel promuovere applicazioni ingegneristiche.

59.1 Rilevamento della radice numerica . 1983
59.1.1 Metodi di Newton 1983
59.1.2 Metodo di secant 1990
59.1.3 Esplicito 1991
59.2 Relazioni con la meccanica strutturale; implicita 1992
59.3 Metodi di integrazione 1993
59.3.1 Controllo del carico 1995
59.3.2 Controllo di spostamento . . 2003



COPIA DI REVISIONE

59.1 Rilevamento della radice numerica

1 Nell'analisi non lineare, i metodi di ricerca delle radici sono essenziali per risolvere le equazioni in cui non esistono soluzioni analitiche tradizionali.

2 Le tecniche numeriche offrono approcci iterativi per approssimare queste soluzioni, che sono critiche nell'analisi strutturale non lineare.

3 Questa sezione introduce diversi metodi chiave per la ricerca delle radici, concentrandosi sul metodo di Newton, il metodo del secant e le tecniche di root-finding esplicite.

4 Ogni metodo offre vantaggi unici ed è applicabile a scenari diversi. Il metodo di Newton, ad esempio, sfrutta i derivati per raggiungere una rapida convergenza, rendendolo adatto a problemi con funzioni ben condivise e derivati disponibili. Al contrario, il metodo di secant approssima i derivati numericamente, che possono essere utili quando i derivati analitici sono difficili o impossibili da ottenere.

5 Esploreremo l'applicazione di questi metodi di finanziamento delle radici alle non linearità materiali e esamineremo come si adattano all'interno del più ampio contesto dell'ingegneria strutturale.

59.1.1 Metodi di Newton

59.1.1.1 Introduzione

6 Il metodo di Newton è una tecnica iterativa ampiamente usata e più alta per trovare radici di equazioni non lineari, sfruttando il derivato della funzione per approssimare successivamente la soluzione.

7 Questo metodo ne perfeziona il ravvicinamento con ogni iterazione, mirando a una rapida convergenza quando l'ipotesi iniziale è vicina alla radice reale. A differenza dei metodi più semplici, l'approccio di Newton è particolarmente efficace per funzioni fluide e ben accolte a causa del suo tasso di convergenza quadratico, il che significa che l'errore diminuisce significativamente con ogni passo in condizioni favorevoli.

8 Nelle applicazioni di ingegneria strutturale, il metodo di Newton è particolarmente utile nell'analisi non lineare, dove può aiutare a risolvere le equazioni di equilibrio che si presentano in condizioni di carico. Per problemi lineari, il metodo di Newton converrà rapidamente alla soluzione unica.

9 Per le equazioni non lineari, la convergenza può essere più impegnativa, in quanto una soluzione potrebbe non esistere sempre, o ci possono essere radici multiple possibili. In questi casi, il metodo di Newton fornisce un percorso efficiente per una soluzione approssimativa se esiste, rendendolo inestimabile nei problemi pratici dell'ingegneria dove le soluzioni esatte sono spesso sfuggenti.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

10 Il metodo di Newton per la ricerca delle radici, va contrastato con il metodo di Euler (§53.3.4) usato per prevedere in base al valore iniziale e all'equazione differenziale di governo.

11 Per problemi lineari, ci sarà sempre una soluzione unica; tuttavia per quelli non lineari non possiamo garantire l'esistenza di una soluzione, né la sua unicità (ad esempio un parabola potrebbe non intersecare il x asse, mentre un polinomio cubico sempre farà).

12 Quando esiste una soluzione, al meglio possiamo ottenere una soluzione numerica approssimata.

13 La maggior parte delle classi di soluzione numerica utilizzate: "Newton Methods", o "Quasi Newton'. Altri metodi possono includere il metodo di bisezione (solo linearmente convergente).

59.1.1.2 Serie Taylor e linearizzazione

14 L'espansione della serie Taylor è uno strumento matematico fondamentale utilizzato per approssimare le funzioni non lineari esprimendole come una serie infinita intorno a un punto scelto.

15 Attraverso la tronca di questa serie per includere solo i primi termini, possiamo ottenere una forma lineare della funzione. Questa approssimazione lineare diventa particolarmente utile nei metodi iterativi, come il metodo di Newton, dove ogni passo successivo si basa sulla risoluzione di un'equazione semplificata e lineare.

16 Nelle applicazioni di root-finding, la linearizzazione fornisce un modo gestibile per approssimare il comportamento delle funzioni complesse e non lineari vicino a una ipotesi iniziale, consentendo una convergenza efficiente in una soluzione.

17 In sostanza il metodo cerca di risolvere $f(x) = 0$ linearizzare l'equazione circa il ravvicinamento attuale x_n e risolvere per l'equazione lineare risultante per la prossima approssimazione x_{n+1}.

18 Come con il metodo di Euler (Eq. 53.6) Il metodo di Newton inizia con la serie Taylor, dove esprimiamo una funzione come serie infinita rispetto al punto $\overline{x}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\overline{x}) + (x-\overline{x})f'(\overline{x}) + \frac{(x-\overline{x})^2}{2!}f''(\overline{x}) + \dots \\ &= f(\overline{x}) + (x-\overline{x})f'(\overline{x}) + O(\underbrace{|x-\overline{x}|^2}_{\xi^2}|) \end{aligned}$$

Ignorando i termini di ordine più alti, dà una funzione lineare

$$L(x) = f(\overline{x}) + (x-\overline{x})f'(\overline{x})$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

19 If **f**(**x**) è una funzione di due variabili, quindi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{x} = \lfloor\ x_1 \quad x_2\ \rfloor^T$. L'espansione della serie Taylor sul punto fisso $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ sarà

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2) + \frac{\partial f(\overline{x}_1, \overline{x}_2)}{\partial x_1}(x_1 - \overline{x}_1) + \frac{\partial f(\overline{x}_1, \overline{x}_2)}{\partial x_2}(x_2 - \overline{x}_2) \tag{59.1}$$

Ignorando i termini di ordine più alti, abbiamo ancora linearizzato l'equazione.

20 Se ci mettiamo $f(x) = 0 \Rightarrow x \simeq \overline{x} - \frac{f(\overline{x})}{f'(\overline{x})}$ Questa è una soluzione approssimativa, a $\overline{x}$, che presuppone anche noi abbiamo $f'(x)$Fico. 59.1.

21 In una procedura iterativa, questa equazione può essere riscritta come

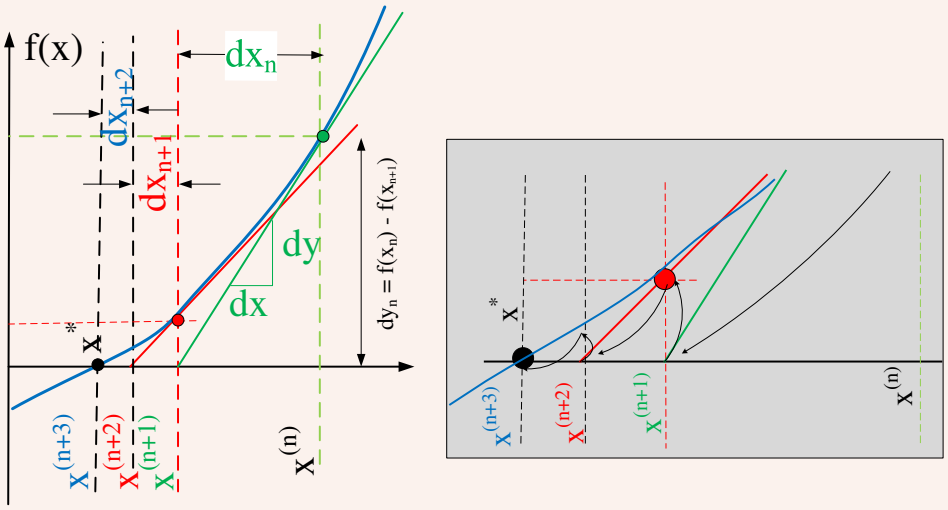


Figura 59.1: Metodo di Newton

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x_n) \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{f'(x_n)} = \frac{\overbrace{f(x_{n+1})}^{0} - f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$\Rightarrow x_{n+1} \simeq x_n \underbrace{- \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{\delta x_n}$$

La convergenza sarà garantita quando

$$|\delta x_n| \leq \varepsilon_\delta \ \text{ or } \ |f(x_{n+1})| \leq \varepsilon_f$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

```
1: procedure NEWTON.(f(x), f'(x), x_0- Sì.)
2:     x ← x_0
3:     while abs(f(x)) > tol do
4:         x ← x − f(x)/f'(x)
5:     end while
6: end procedure
```

59.1.1.2.1 Ex 59.1: Metodo di Newton, scalare

Risoluzioni $f(x) = Tan(x) - x = 0$ che corrisponde all'equazione di un cerniere governante di una colonna a cerniera (§29.3.2.1.3, Eq. 29.23).

```
clear
xn = 4.3;n = 0;epsi=1e-4;maxiter = 20;
disp("           ");disp("    n          xn                  norm")
xn_m1=0.;
for i = 1:maxiter
    f_x=tan(xn)-xn;df_dx=sec(xn)^2-1;
    xn = xn - f_x/df_dx;
    my_norm = abs(xn-xn_m1);
    disp(sprintf( "%5i  %16.15e  %16.15e",i, xn,my_norm"))
    if my_norm <epsi
      break
  end
  xn_m1=xn;
end

```

Si noti che questo è un problema particolarmente sensibile, perché tan x è discontinuo, un piccolo cambiamento nella ipotesi iniziale può cedere alla divergenza della soluzione.

22 per una singola variabile

$$x_{n+1} \simeq x_n \underbrace{-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{\delta x_n} \Rightarrow f(x) + f'(x)(x_2 - x_1) \simeq 0$$

23 Il metodo può ovviamente essere esteso a due funzioni $f_1(\mathbf{x})$ e $f_2(\mathbf{x})$ in termini di due sconosciuti

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\overline{\mathbf{x}}) + \mathbf{J}\overline{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \Rightarrow$$

or

$$L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\overline{\mathbf{x}}) + \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1}(x_1 - \overline{x}_1) + \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2}(x_2 - \overline{x}_2) \\ f_2(\overline{\mathbf{x}}) + \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1}(x_1 - \overline{x}_1) + \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2}(x_2 - \overline{x}_2) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove $\mathbf{J}\overline{\mathbf{x}})$ è la matrice giacobica

$$\mathbf{J}\overline{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} \end{bmatrix} \tag{59.2}$$

e $\mathbf{J}\overline{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}})$ è un prodotto vettoriale matrice;

24 Nota che i^{th} riga corrisponde al gradiente del i^{th} funzione componente f_i (∇f_i.), e il derivato scalare è stato sostituito dal 2×2 Matrice giacobiana di derivati parziali.

25 Possiamo inoltre generalizzare il problema a uno dei m equazioni non lineari con m Sconosciute

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{Bmatrix} \text{ and } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{Bmatrix}$$

La matrice giacobica $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ per questa matrice sarà $m \times m$ matrice con (i, j) voci corrispondenti al derivato parziale della funzione i rispetto alla variabile j or $\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$

26 Ad ogni passo del metodo Newton, abbiamo un valore approssimativo di $\mathbf{x}_n$ alla soluzione esatta $\mathbf{x}^*$ delle equazioni non lineari $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Noi quindi determinare $\mathbf{x}_{n+1}$ risolvendo il sistema lineare delle equazioni

$$\begin{aligned} L^{(n)}(\mathbf{x}_{n+1}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) + \mathbf{J}(\mathbf{x}_n)(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n - \mathbf{J}(\mathbf{x}_n)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \end{aligned}$$

Notare la somiglianza con $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = f'(x)$ per $m = 1$.

27 Ad ogni passo dovremmo valutare la matrice giacobiana in un nuovo punto, e poi risolvere un sistema lineare di equazioni utilizzando questa nuova matrice aggiornata.

28 La convergenza sarà garantita quando

$$\| \delta\mathbf{x}_n \| \leq \varepsilon_\delta \quad \text{or} \quad \| \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+1}) \| \leq \varepsilon_f$$

dove $\| \mathbf{v} \|$ è il *Norma europea* of $\mathbf{v}$ (in senso stretto, dovrebbe essere scritto come $\| \mathbf{v} \|_2$) calcolato come radice quadrata della somma dei componenti vettoriali quadrati,

$$\| \mathbf{v} \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} v_i^2}$$

in un N spazio dimensionale.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
1: procedure Newton.(f, J, x0, tol, max_E' un problema.)
2:     x ← x_0
3:     i ← 0
4:     while i < max_iter|norm(f(x) < tol do
5:         fx ← f(x)                          ▷ Valutare la funzione al punto attuale
6:         Jx ← J(x)                          ▷ Valutare Jacobian al momento attuale
7:         p = solve(Jx, −fx)                 ▷ Computa la direzione di ricerca utilizzando il
   Jacobian
8:         x = x + p                          ▷ Aggiorna il punto corrente
9:         i ← i + 1                          ▷ Contatore di iterazione dell'increment
10:    end while
11:    Ritorno x                              ▷ Ultimo iterare
12: end procedure
```

59.1.1.3 Convergenza e stima degli errori

29 Dobbiamo garantire la convergenza del metodo e l'ordine dell'errore

30 Dati $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ definire un fattore di convergenza $\rho^{(n)}$ come rapporto dell'errore in x_{n+1} all'errore x_n. Vicino alla soluzione esatta (x^*dove $g(x^*) = x^*$) $\rho^{(n)} \simeq g'(x^*)$ e viene chiamato il fattore di convergenza asintotico.

31 Determinazione $g'(x)$

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

if $f'(x^*) \neq 0$ e $f''(x^*)$ è finito, allora $g'(x^*)$=0 e concludiamo che il fattore di convergenza tende a zero quando e se $x_n \to x^*$.

32 Per determinare l'errore $x^* - x_n$,

$$x^* - x_{n+1} = x^* - x_n - \frac{f(x^*) - f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$\Rightarrow x^* - x_{n+1} = -\frac{1}{2}(x^* - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}$$

Così se l'iterazione converge a x^*, ci segue

$$\underbrace{x^* - x_{n+1}}_{\text{error at } n+1} \simeq -\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \underbrace{(x^* - x_n)^2}_{\text{error at } n} \text{ as } n \to \infty$$

fino a quando $f'(x^*)$ e $f''(x^*)$ sono sia finiti che nonzero.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

33 L'errore tende ad essere proporzionale al quadrato dell'errore in x_n as n tende all'infinito.

34 Altri metodi (come la bisezione) avranno una convergenza lineare.

59.1.1.4 Osservazioni finali

Il metodo Newton:

1. Richiede un espressione analitica del derivato
2. Se il valore iniziale è troppo lontano dal valore corretto, La convergenza non può essere garantita (per questo si deve porre un limite superiore al numero di iterazioni).
3. Non fa che pendenza è vicino a zero (come intorno al carico di picco).
4. Funziona meglio con curve a bassa curvatura.
5. La convergenza è quadratica.

$$\| x_{n+1} - x^* \| \leq c \| x_n - x^* \|^2$$

tuttavia, in pratica noi non sappiamo cosa c is

59.1.1.4.1 Ex 59.2: Metodo di Newton; vettore

Solve $f(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 9 \\ x_3 - x_2 \sin(x_1) \\ 3x_2 + 4x_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ -x_2 \cos(x_1) & -\sin(x_1) & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

```
f = @(x) [x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2-9
x(3)-x(2)*sin(x(1))
3*x(2)+4*x(3)] ;
% The Jacobian mat r i x :
J = @(x) [2*x(1) 2*x(2) 2*x(3)
-x(2)*cos(x(1)) -sin(x(1)) 1
0 3 4] ;
% i n i t i a l guess :
x = [-1;-2;1] ;
maxiter = 10;
tol = 1e-12;
disp(' ')
disp('iteration x(1) x(2) x(3) norm(delta) ')
for n=1:maxiter
delta = -J(x)\f(x);
x = x + delta ;
disp(sprintf( '%5i %10.5e %10.5e %10.5e %8.3e',...
n, x(1), x(2) , x(3) ,norm(delta, inf))) ;
if norm(delta, inf) < tol
break
end
end
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
if n==maxiter
disp("Warning: may not have converged  tolerance not satisfied")
end
```

59.1.2 Metodo di secant

Il metodo di secant è un algoritmo di root-finding che approssima in modo iterativo la radice di un'equazione non lineare per meglio approssimare una radice di una funzione $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ costruendo linee di secondo grado successive tra due ipotesi iniziali.

A differenza del metodo di Newton, che richiede il derivato della funzione, il metodo secant utilizza un'approssimazione a differenza finita, rendendolo particolarmente prezioso quando i derivati sono impegnativi o impossibili da calcolare.

In ogni iterazione, il metodo di secant approssima la radice estrapolando dal pendio della linea di secante costituita tra le ultime due approssimazioni. Questo pendio fornisce una stima del derivato, permettendo al metodo di convergere sulla radice con valutazioni solo funzionali, piuttosto che calcoli derivati espliciti.

Mentre il metodo di secant converge in genere più lentamente del metodo di Newton, la sua mancanza di dipendenza dai derivati può renderlo una scelta preferita nelle applicazioni complesse, tra cui l'analisi strutturale e la modellazione dei materiali, dove i derivati esatti può essere non disponibile.

Il metodo del secant può essere considerato come un'approssimazione a differenze finite del metodo di Newton, ma il metodo del secondo precede il metodo di newton.

Quando è quasi impossibile calcolare $\mathbf{J}(\mathbf{x})$, as $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ (che non può essere analiticamente definita), determineremo numericamente il giacobino sulla base della semplice approssimazione

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_{n+1}) \simeq \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1})}{\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}}$$

Sostituire per $\mathbf{J}\mathbf{x}_n)^{-1}$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \underbrace{\frac{\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}}{\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1})}}_{\simeq J^{-1}(\mathbf{x}_n)} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$$

Contrariamente al metodo di Newton, avremo bisogno di due prime ipotesi $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}_1$ per avviare il metodo.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
1: procedure SECANT_METODO(f, x_0, x1, tol, max_E' un problema.)
2:     fx0 ← f(x0)
3:     Inizializzare i valori
4:     fx1 = (x1)
5:     i ← 0
6:     Iterate fino a raggiungere la convergenza o il numero massimo di iterazioni
7:     while abs(fx1) > tol  &  i < max_iter do
8:         Computare nuova approssimazione alla radice
9:         x2 ← x1 − fx1 ∗ (x1 − x0)/(fx1 − fx0)
10:        fx2 ← f(x2)
11:        Valori di aggiornamento per la prossima iterazione
12:        x0 ← x1
13:        fx0 ← fx1
14:        x1 ← x2
15:        fx1 ← fx2
16:        i ← i + 1
17:    end while
18:    Restituisce la radice e il numero di iterazioni utilizzate
19:    Ritorno x1, i                                    ▷ Ultimo iterare
20: end procedure
```

59.1.3 Esplicito

42 In un integrazione esplicita schema (noto anche come "step by step'), il carico viene applicato in modo incrementale e alla fine di ogni incremento, Fig. 59.2:

1. Compute del rigidità tangente sulla base delle attuali spostamenti, questa è la pendenza della curva di spostamento del carico);
2. Invertire la matrice di rigidità e moltiplicarlo per il carico incrementale per ottenere lo spostamento incrementale corrispondente;
3. Aggiungere lo spostamento incrementale alla somma di quelli precedenti per ottenere la sostituzione effettiva corrispondente al carico effettivo (somma di tutti i carichi incrementali precedenti).

43 Maggiore vantaggio una soluzione sarà sempre trovata

44 Maggiore svantaggio: alla fine di ogni incremento non si verifica che l'equilibrio tra forze interne ed esterne sia soddisfatto, ciò può portare a una soluzione diversificante in quanto il carico aumenta. Tuttavia, alcuni programmi avanzati controllano l'equilibrio energetico invece di equilibrio.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

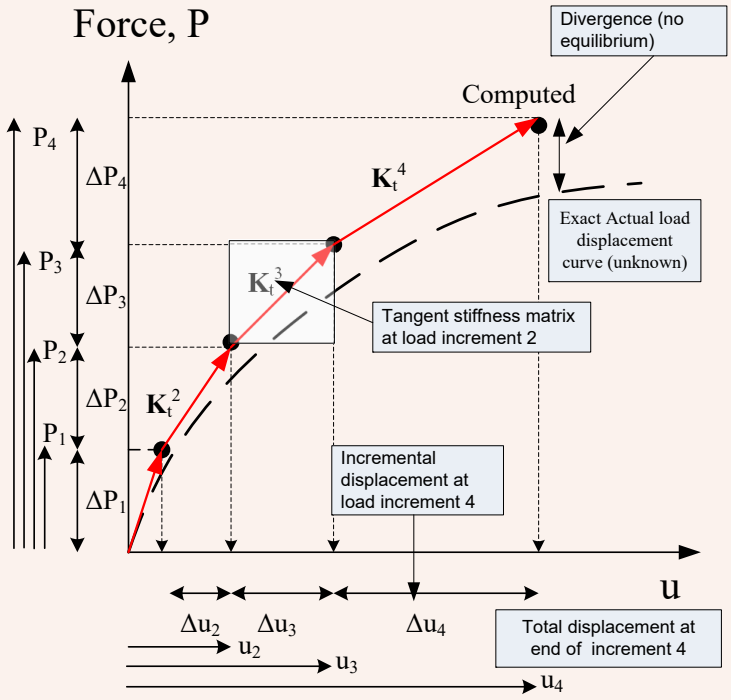


Figura 59.2: Schema di integrazione esplicita

45 Un palliativo parziale a questo problema, è l'adozione di incrementi di carico molto piccoli per minimizzare gli errori.

46 Questo metodo deve essere utilizzato con estrema attenzione, in quanto una soluzione sarà sempre ottenuta non importa quanto sia buono o cattivo il modello e i suoi parametri.

47 Purtroppo, ci sono alcuni modelli costitutivi che sono molto fragili quando si eseguono all'interno di un sistema implicito di integrazione, e di conseguenza vengono utilizzati (o abusati) in uno specifico.

59.2 Relazioni con la meccanica strutturale; implicita

48 I metodi impliciti sono un punto di riferimento della meccanica strutturale, in particolare quando si analizzano problemi non lineari dove l'equilibrio deve essere mantenuto sotto carico.

49 Nell'analisi strutturale, raggiungere l'equilibrio significa bilanciare le forze interne ed esterne attraverso i nodi di una struttura. Questo equilibrio è espresso come un'equazione

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

non lineare in cui il vettore di forza interna dipende dagli spostamenti, rendendo il problema intrinsecamente non lineari.

50 In questa sezione, esploriamo l'uso di metodi impliciti, in particolare il metodo di Newton, per risolvere l'equilibrio nelle analisi del carico incrementale. Ad ogni passo, la forza residua (la differenza tra forze esterne e interne) deve avvicinarsi a zero, significando uno stato di equilibrio.

51 Aggiornando iterativamente gli spostamenti, i metodi impliciti forniscono un approccio sistematico per raggiungere questo equilibrio, assicurandosi che la soluzione rimanga stabile e accurata durante il processo di carico.

52 Questo approccio è essenziale per i sistemi conservatori, dove le forze sono assunte indipendentemente dagli spostamenti, permettendoci di semplificare i comportamenti strutturali complessi mantenendo una precisione affidabile.

53 Ancora una volta, cerchiamo di risolvere l'Equazione 50.11 as

$$\underbrace{\mathbf{k}\overline{\boldsymbol{\Delta}} - \overline{\mathbf{F}}^{o}}_{\mathbf{P}^{int}} - \underbrace{\overline{\mathbf{F}} + \overline{\mathbf{F}}^{e}}_{\mathbf{P}^{ext}} = 0$$

Entrambi $\mathbf{P}_n^{ext}$ e $\mathbf{P}_n^{int}$ sono determinati dal principio di spostamento virtuale. Dal momento che il vettore della forza nodale interna $\mathbf{P}_n^{int}$ è una funzione di spostamenti nodali $\mathbf{u}_n$Il problema non è lineare.

54 Per un'analisi incrementale del carico, nella quale l'equilibrio era (quasi) soddisfatto alla fine dell'incremento n, si ha

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{P}_n^{ext} - \mathbf{P}_n^{int} = 0$$

che è la forza residua (dovrebbe avvicinarsi a zero con un numero crescente di iterazioni, n).

55 Così useremo il metodo di Newton per risolvere

$$\mathbf{R}_n(\mathbf{u}) = 0$$

56 Si noti che abbiamo assunto che le forze sono indipendenti dagli spostamenti *sistema conservativo* e ignorando $P - \Delta$ effetti.

57 Il parallelismo tra algoritmi di controllo del carico e analisi non lineari è mostrato in Tabella 59.1.

59.3 Metodi di integrazione

58 A seconda che si applichi un carico incrementale o uno spostamento incrementale, l'algoritmo varia leggermente.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 59.1: Parallelismo tra metodo quasi-newton in matematica e analisi implicita nella meccanica strutturale

Aspetti	**Metodo Quasi-Newton (matematica)**	**Meccanica strutturale (analisi implicita)**
Obiettivo	Trova la radice della funzione non lineare $f(x) = 0$	Ottenuti gli equilibri nei sistemi strutturali non lineari
Equazione	$f(x) = 0$	$\mathbf{P}^{ext} - \mathbf{P}^{int} = 0$ (equilibrio di forza)
Indovina iniziale	Valore iniziale per radice x_0	Prova iniziale di spostamento $\mathbf{u}_0$
Linearizzazione	Linearizza $f(x)$ vicino x_n utilizzando $f'(x)$	L'equilibrio lineare intorno $\mathbf{u}_n$ con rigidità tangente $\mathbf{K}_T$
Regola di aggiornamento	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n - \mathbf{K}_T^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{u}_n)$
Criteri di individuazione	Riduzione degli errori, ad esempio, $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \epsilon$	Riduzione della forza residua, ad esempio $\|\|\mathbf{R}(\mathbf{u}_{n+1})\|\| \leq \epsilon$
Requisito di convergenza	Derivati $f'(x)$ non dovrebbe essere zero	rigidità tangente $\mathbf{K}_T$ non dovrebbe essere singolare
Domanda computazionale	Calcola la funzione e il suo derivato ad ogni passo	Calcola le forze interne e tangente matrice di rigidità ad ogni passo
Tasso di convergenza	Convergenza Quadratica (condizioni ideali)	Convergenza quadrata in condizioni di equilibrio ideali
Risultato	Radice approssimativa di $f(x) = 0$	Configurazione approssimativa dell'equilibrio sotto carichi applicati

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

59.3.1 Controllo del carico

59.3.1.1 Metodo di rigidità Newton-raphson/tangent

59 Prima di entrare nei dettagli, l'approccio a due passi può essere spiegato attraverso Fig. 59.3.

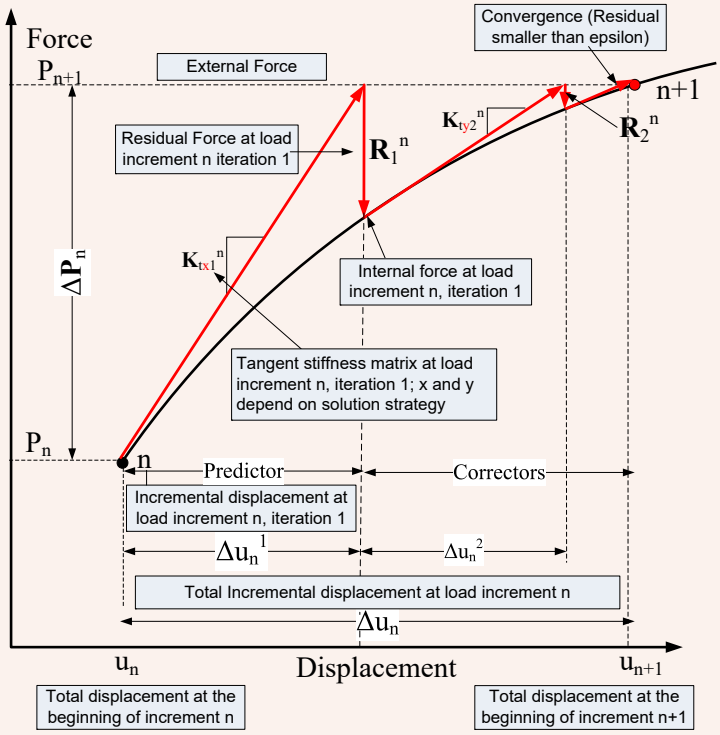


Figura 59.3: Metodo di Newton spiegato (per il controllo del carico)

Prestazione (associata ad un incremento di carico) per determinare lo spostamento incrementale come nel metodo esplicito, che si basa sulla matrice iniziale tangente rigidità.

Correttore fase in cui controlliamo per equilibrio iterativamente.

1. Sulla base degli spostamenti predetti, calcola le forze interne corrispondenti (non valutate nel metodo esplicito).
2. Compiti la forza residua che è la differenza tra le forze esterne e interne (dovrebbe essere zero se l'equilibrio viene raggiunto).
3. Se il residuo è più grande di un criterio di convergenza specificato dall'utente, quindi aggiorna lo spostamento moltiplicando l'inverso della matrice tangente rigidità (più su questo in seguito) dalla forza residua.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

4. Aggiornare il vettore di spostamento totale. Quindi per ogni incremento del carico, avremmo più iterazioni fino a quando l'equilibrio non è soddisfatto all'interno di una tolleranza numerica.

60 Alla fine di ogni incremento del carico, le forze interne devono essere in equilibrio con quelle esterne. forze residue $\mathbf{R}_n^k$ is

$$\mathbf{R}_n^k(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}) = \overline{\mathbf{P}}^{int}(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}) - \overline{\mathbf{P}}^{ext} = 0 \tag{59.3}$$

dove $\overline{\mathbf{P}}^{int}$ è il vettore delle forze interne, comunemente noto come il vettore di reazione .

61 All'inizio di ogni passo $n+1$, cominciamo dagli spostamenti $\overline{\mathbf{u}}_n$ che sono stati calcolati nel passo precedente attraverso l'equilibrio, $\mathbf{R}_n^k \approx 0$ or $\overline{\mathbf{P}}_n^{int} \approx \overline{\mathbf{P}}_n^{ext}$.

62 Le forze esterne sono ora aumentate

$$\overline{\mathbf{P}}_n^{ext} \longrightarrow \overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{ext} = \overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{ext} + \Delta\overline{\mathbf{P}}^{ext}$$

e cerchiamo di determinare gli spostamenti corrispondenti $\overline{\mathbf{u}}_{n+1}$ tale che l'equilibrio sarà soddisfatto

$$\mathbf{R}_{n+1}^k \approx 0 \Rightarrow \overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{int} \approx \overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{ext}$$

63 All'interno della fase corrente (identificata attraverso il sottoscritto n), saremo iteranti (tramite il superscritto) k) per raggiungere l'equilibrio.

64 Come prima ipotesi per $\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^0$ noi lo prendiamo per essere $\overline{\mathbf{u}}_n$, e sulla base della linearizzazione intorno a questo stato iniziale, abbiamo

$$\overline{\mathbf{P}}_{int}(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^0) + \mathbf{K}_T(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^0)\Delta\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^1 = \overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{ext}$$

dove $\Delta\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^1$ è la prima approssimazione per l'incremento di spostamento sconosciuto, $\Delta\overline{\mathbf{u}}_{n+1} = \overline{\mathbf{u}}_{n+1} - \overline{\mathbf{u}}_n$.

65 In alternativa, iniziamo da una linearizzazione dell'Equazione 59.3Fico. 59.4,

$$\mathbf{R}_n^k(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1}) \approx \mathbf{R}_n^k(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^i) + \left(\frac{\partial \mathbf{R}_n^k}{\partial \overline{\mathbf{u}}}\right)_{n+1}^i \delta\overline{\mathbf{u}}_n^i = 0 \tag{59.4}$$

dove i è un contatore a partire da $\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^1 = \overline{\mathbf{u}}_n$. Osserviamo che

$$\frac{\partial \mathbf{R}_n^k}{\partial \overline{\mathbf{u}}} = \frac{\partial \overline{\mathbf{P}}^{int}}{\partial \overline{\mathbf{u}}} = \mathbf{K}_T$$

66 Supponendo che $\overline{\mathbf{P}}^{ext}$ è costante e $\mathbf{K}_T$ è la matrice di rigidità tangente, e l'equazione 59.4 rendimenti

$$\mathbf{K}_T^i \delta\overline{\mathbf{u}}_n^i = -\mathbf{R}_{n+1}^i$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

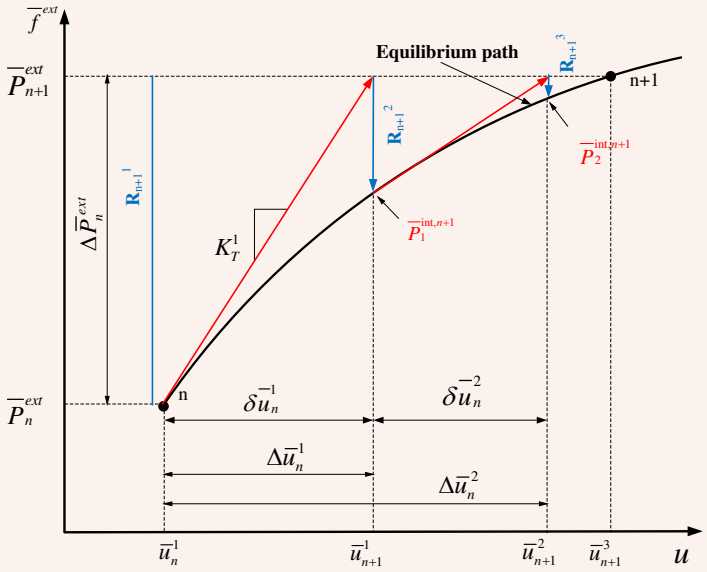


Figura 59.4: Metodo Newton-raphson per il controllo del carico

or

$$\delta\overline{\mathbf{u}}_n^i = -(\mathbf{K}_T^i)^{-1}\mathbf{R}_{n+1}^i \tag{59.5}$$

67 Una serie di approssimazioni successive rese

$$\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1} = \overline{\mathbf{u}}_n + \Delta\overline{\mathbf{u}}_n^i = \overline{\mathbf{u}}_{n+1}^i + \delta\overline{\mathbf{u}}_n^i$$

con

$$\Delta\overline{\mathbf{u}}_n^i = \sum_{k\le i}\delta\overline{\mathbf{u}}_n^k$$

68 Va notato che ogni iterazione comporta tre passaggi computazionalmente costosi:

1. Valutazione delle forze interne (o reazioni), $\overline{\mathbf{P}}^{int}$
2. Valutazione della matrice globale di rigidità tangente, $\mathbf{K}_T$
3. Soluzione di un sistema di equazioni lineari

69 Anche se questo metodo utilizzerà il numero più basso di iterazioni per convergere, può essere computazionalmente costoso (a causa della decomposizione matrice richiesta ad ogni incremento). 59.2.

70 Si noti che è quasi impossibile determinare *a priori* che di tali metodi sono più adatti per un problema particolare, si può dover provare molti (e alcuni possono avere problemi convergenti).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 59.2: Variazioni del metodo di degrado del nuovoton

Metodo	Matrice di rigidità tangente calcolato			
	Predittore (x in K^n_{txi})		Correttore (y in K^n_{tyi})	
	Incremento	Iterazione	Incremento	Iterazione
Newton-Raphson	n	1	n	i
Newton-Raphson modificato	n	1	n	1
Stiffamento iniziale	1	1	1	1

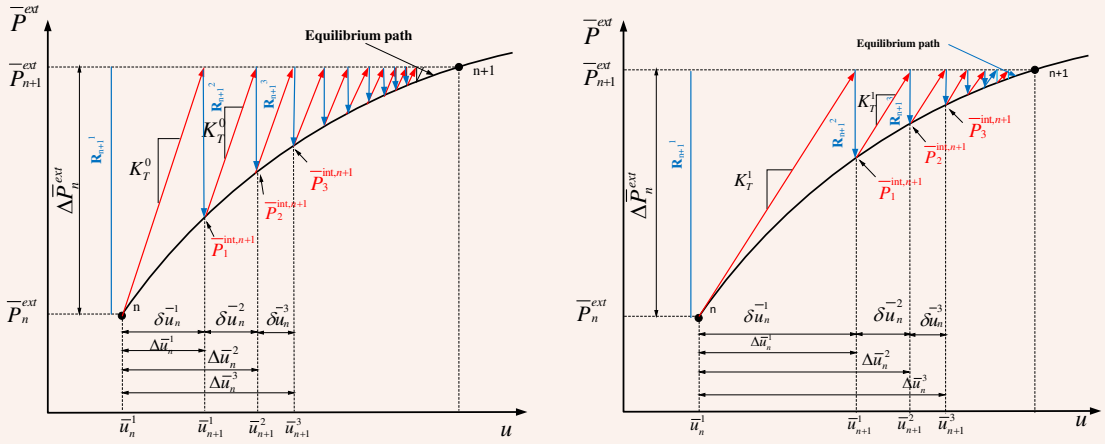
59.3.1.2 Nuovo e nuovo

71 Questo metodo è essenzialmente lo stesso di Newton-Raphson; tuttavia in Equazione 59.5, ($\mathbf{K}^i_T$) è sostituito da $\overline{\mathbf{K}}_T$ che è la matrice tangente rigidità della prima iterazione di entrambi:

- Primo incremento $\overline{\mathbf{K}}_T = \mathbf{K}^1_{T,0}$, Figura 59.5a
- Aumento attuale $\overline{\mathbf{K}}_T = \mathbf{K}^1_n$Fico. 59.5b.

e

$$\delta\overline{\mathbf{u}}^i_n = -(\overline{\mathbf{K}}_T)^{-1}\mathbf{R}^i_{n+1}$$



(a) Analizzazioni (b) A incremento

Figura 59.5: Metodo modificato di newton-raphson, tangente iniziale

72 In generale, il tempo della CPU richiesto per le ulteriori iterazioni richieste con questo metodo è meno del tempo salvato dall'assemblaggio e dalla decomposizione della matrice

COPIA DI REVISIONE

di rigidità per ogni iterazione. Va menzionato che la matrice di rigidità tangente non fa necessariamente coincidere con la matrice di rigidezza tangente esatta; un'approssimazione della matrice tangente, o anche la matrice di rigidezza iniziale, produrrà generalmente risultati soddisfacenti, sebbene al costo di ulteriori iterazioni.

59.3.1.3 Metodo di Newton secante

73 Questo metodo è un compromesso tra i primi due. Prima cerchiamo due spostamenti di due cicli di Newton-Raphson modificato; poi si stabilisce un secondo della curva tra questi due punti, e una fase viene fatta lungo di esso, Figura 59.6.

$$\delta\overline{\mathbf{u}}_n^i = -(\overline{\mathbf{K}}_T)^{-1}\mathbf{R}_{n+1}^i$$

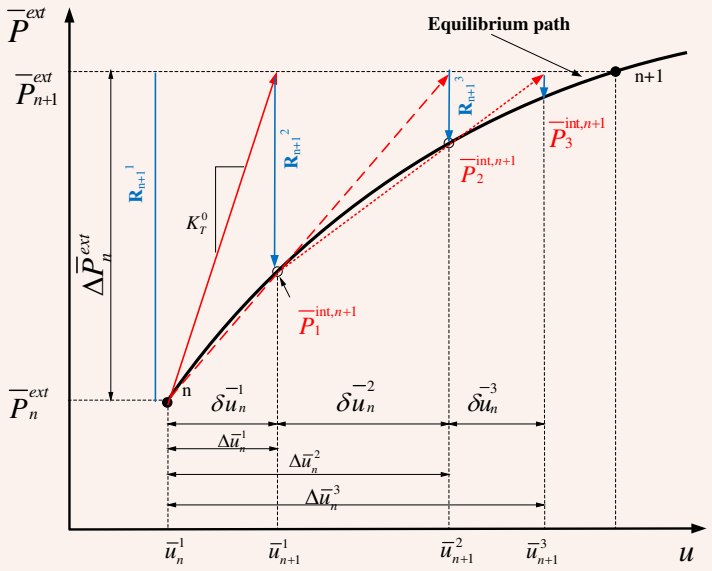


Figura 59.6: Segreto di incentivo, metodo quasi-newton

74 Successivamente, ogni passo sarà effettuato lungo un secondo che collega i due punti precedenti.

75 A partire da

$$\delta\overline{\mathbf{u}}_n^1 = -\mathbf{K}_T^{-1}\mathbf{R}_{n+1}^1$$

il pendio di secant può essere determinato

$$(\mathbf{K}_S^2)^{-1} = -\frac{\delta\overline{\mathbf{u}}_n^1}{(\mathbf{R}_{n+1}^1 - \mathbf{R}_{n+1}^2)}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

e poi

$$\delta\overline{\mathbf{u}}_n^2 = -(\mathbf{K}_S^2)^{-1}\mathbf{R}_{n+1}^2$$

Questo processo può essere generalizzato

$$\delta\overline{\mathbf{u}}_n^i = -(\mathbf{K}_S^i)^{-1}\mathbf{R}_{n+1}^i$$
$$(\mathbf{K}_S^i)^{-1} = -\frac{\delta\overline{\mathbf{u}}_n^i}{(\mathbf{R}_{n+1}^{i-1} - \mathbf{R}_{n+1}^i)}$$

59.3.1.4 Criteri di convergenza

76 In tutti i metodi precedenti, le iterazioni vengono effettuate fino a quando uno o tutti i criteri di convergenza sono soddisfatti. I criteri di convergenza relativi sono applicati facoltativamente sugli spostamenti, i carichi e/o l'energia incrementale per definire le condizioni di risoluzione.

77 È molto importante notare che una mancanza di convergenza significa un fallimento locale o globale della struttura, in altre parole il carico massimo corrisponde al carico associato all'ultimo incremento.

78 I criteri relativi di spostamento sono definiti in termini delle correzioni di spostamento, $\delta\overline{\mathbf{u}}^j$, e gli spostamenti incrementali aggiornati, $\delta\overline{\mathbf{u}}^{j+1}$, as

$$\varepsilon_u = \frac{\| \delta\overline{\mathbf{u}}^j \|_2}{\| \Delta\overline{\mathbf{u}}^{j+1} \|_2}$$

dove $\| \ldots \|_2$ è la norma euclidea.

79 La norma euclidea, che è anche conosciuta come L_2 norma, di un vettore $\mathbf{v}$ è definito come

$$\| \mathbf{v} \|_2 = \left[\sum_{i=1}^{N} v_i^2 \right]^{1/2}$$

dove N è la dimensione $\mathbf{v}$.

80 I criteri relativi di carico sono definiti in termini dei carichi residui aggiornati, $\mathbf{R}^{j+1}$, e le reazioni, $\overline{\mathbf{P}}_{j+1}^{int}$, come

$$\varepsilon_r = \frac{\| \mathbf{R}^{j+1} \|_2}{\| \overline{\mathbf{P}}_{j+1}^{int} \|_2}$$

or

$$\varepsilon_r = \frac{\| \mathbf{R}^{j+1} \|_\infty}{\| \overline{\mathbf{P}}_{j+1}^{int} \|_\infty}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove $\| \dots \|_\infty$ è la norma dell'infinito $\mathbf{v}$ definito come

$$\| \mathbf{v} \|_\infty = \max \left(\sum_{i=1}^{N} |v_i| \right)$$

dove N è la dimensione $\mathbf{v}$.

81 I criteri relativi di energia incrementale sono definiti in termini di correzioni di spostamento $\delta \overline{\mathbf{u}}^j$, i carichi residui aggiornati $\mathbf{R}^{j+1}$, gli spostamenti incrementali aggiornati $\Delta \overline{\mathbf{u}}^{j+1}$, e le reazioni aggiornate $\overline{\mathbf{P}}_{j+1}^{int}$ as

$$\varepsilon_W = \frac{\delta \overline{\mathbf{u}}^j \cdot \mathbf{R}^{j+1}}{\Delta \overline{\mathbf{u}}^{j+1} \cdot \overline{\mathbf{P}}_{j+1}^{int}}$$

dove il numeratore è la variazione dell'energia incrementale per l'iterazione j, e il denominatore è l'energia incrementale.

59.3.1.5 Tavola sinottica

82 Tabella 59.3 confronta i vari algoritmi di controllo del carico nell'analisi non lineare.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 59.3: Confronto degli algoritmi di controllo del carico nell'analisi non lineare

Aspetti	Newton-Raphson	Newton-Raphson modificato	Metodo di secant	Metodo esplicito
Obiettivo	Trovare la radice della funzione non lineare utilizzando matrice tangente rigidità; raggiungere l'equilibrio	Simile a Newton-Raphson ma semplifica riuscendo la matrice di rigidità	Trova radice senza derivato esplicito, utilizzando linee di secant tra punti	Applicare in modo incredibile carichi con rigidità tangente semplificata
Dipendenza da Derivative	Richiede derivato (matrice di rigidità di acquisizione)	Richiede la rigidità tangente iniziale ma non aggiorna ogni iterazione	Approfondimenti derivati utilizzando differenze finite	Non richiesto alcun derivato
Accuratezza	Alta (Convergenza Quadretica)	Moderato (più basso di Newton-Raphson ma spesso sufficiente)	Moderato (più basso di Newton-Raphson ma evita esplicitamente il derivato)	Precisione minore; la soluzione può divergere
Efficienza computazionale	Computazionalmente costoso a causa di ricalcolo della matrice di rigidità ogni iterazione	Moderato, riutilizza la matrice di rigidità iniziale	Moderato; evita ricalcature di rigidità, meno iterazioni rispetto a Esplicazione	Efficiente ma richiede piccoli incrementi di carico per precisione
Processo di individuazione	Ciclo predittore con equilibrio controlla ogni incremento	Utilizza la matrice di rigidità iniziale, meno ricalco	Due ipotesi iniziali e successive approssimazioni basate sul secondo	Calcolo passo-passo senza iterazione per carico
Criteri di convergenza	Convergenza quadrata vicino a indovinare iniziale corretta; richiede pendenza non vicina allo zero	Convergenza più lenta ma adatta a problemi in cui i ricalcoli di rigidità sono costosi	Convergenza lineare, buona per casi senza derivati espliciti	Convergenza non applicata; può divergere
Applicazioni comuni	Problemi strutturali non lineari con derivati disponibili	Adatto per problemi non lineari con costi di ricalcolo moderati rigidità	Situazioni con derivati sconosciuti o difficili da completare	Situazioni in cui è preferibile l'integrazione esplicita del tempo
Vantaggi	Convergenza rapida con meno iterazioni	Riduce il carico computazionale con una convergenza moderata	Evita i calcoli derivati	Produce sempre una soluzione
Svantaggi	Costo computazionale elevato per iterazione	Più iterazioni necessarie rispetto a Newton-Raphson	Convergenza più lenta, ha bisogno di buone prime ipotesi	Può produrre soluzioni inesatte a causa della mancanza di equilibri

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

59.3.2 Controllo di spostamento

83 Il metodo di controllo del carico descritto in precedenza è infatti molto potente e si visualizza facilmente. Tuttavia a volte la soluzione oscilla o diverge segni chiari che l'equilibrio non è stato ripristinato, Figura 59.7. Nella maggior parte dei casi questo è sinonimo di "fallimento" a un carico massimo. Il fallimento può essere strutturale o semplicemente localizzato in una sottoregione.

84 Nell'analisi strutturale non lineare, i metodi di controllo del carico sono spesso impiegati per applicare in modo incrementale carichi e tracciare la risposta delle strutture.[1] o comportamento post-peak, le tecniche tradizionali di controllo del carico possono diventare problematici. Poiché una struttura si avvicina alla sua capacità di carico superiore, la risposta di spostamento del carico può mostrare caratteristiche come l'instabilità dello snap-through o dello snap back, che rendono difficile o addirittura impossibile la convergenza basata sul carico.

85 Per affrontare questi problemi, i metodi di controllo dello spostamento forniscono una valida alternativa. Invece di applicare incrementalmente i carichi e alla ricerca dello spostamento risultante, le tecniche di controllo di spostamento impongano in modo progressivo spostamenti e calcolino le forze interne corrispondenti. Questo approccio garantisce stabilità nel processo di analisi mantenendo il controllo sugli spostamenti anche attraverso regioni in cui la curva di spostamento del carico mostra un comportamento complesso e non-monologico.

86 Il controllo dello spostamento è particolarmente vantaggioso per catturare le risposte post-peak e ammorbidimento, che sono spesso critiche per comprendere la piena duttilità o modalità di fallimento delle strutture, in particolare quelle con l'imbottigliamento o l'ammorbidimento materiali come il cemento. Con l'equilibrio di forza attraverso spostamenti controllati, questo metodo migliora la capacità di tracciare risposta strutturale al di là del carico massimo, fornendo informazioni essenziali sulla resilienza strutturale, la capacità residua e la duttilità.

87 Sotto il controllo dello spostamento (come spiegato di seguito), la forza di ripristino può essere sempre determinata (a meno che non vi sia uno snap-back).

88 Per il controllo di spostamento, definiamo il vettore degli spostamenti residui $\mathbf{R}_n^k$ as

$$\mathbf{R}_n^k(\overline{\mathbf{P}}_{n+1}) = \overline{\mathbf{u}}^{int}(\overline{\mathbf{P}}_{n+1}) - \overline{\mathbf{u}}^{ext} = 0 \tag{59.6}$$

nota la differenza con l'Equation 59.3.

89 Quindi per catturare la risposta post-peak dobbiamo adottare numericamente un algoritmo di controllo dello spostamento.

[1] Notare l'analogia con Figura O.11, poiché la determinazione del residuo diventa impossibile vicino a un picco.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

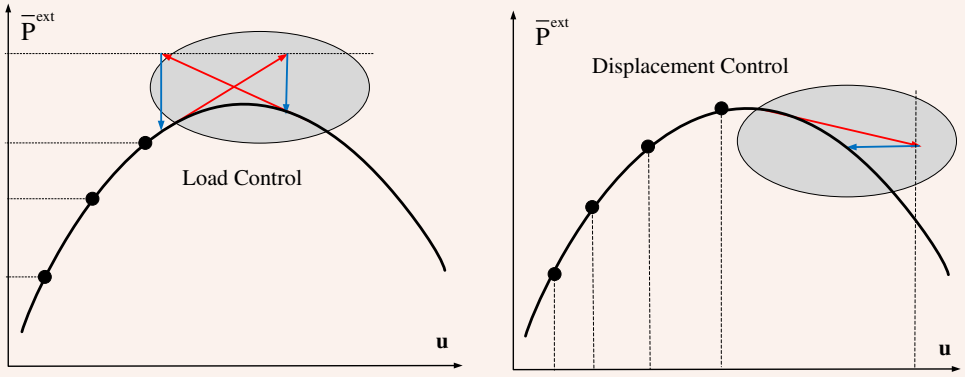


Figura 59.7: Metodo di Newton; carico contro controllo di spostamento

90 All'inizio di ogni passo $n+1$, noi partiamo dalle forze $\overline{\mathbf{P}}_n$ che sono stati calcolati nel passo precedente attraverso l'equilibrio, $\mathbf{R}_n^k \approx 0$ or $\overline{\mathbf{u}}_n^{int} \approx \overline{\mathbf{u}}_n^{ext}$, Figura 59.8.

91 Gli spostamenti esterni sono ora aumentati $\overline{\mathbf{u}}_n^{ext}$ to $\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{ext} = \overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{ext} + \Delta\overline{\mathbf{u}}^{ext}$, e cerchiamo di determinare le forze corrispondenti $\overline{\mathbf{P}}_{n+1}$ attraverso l'equilibrio, $\mathbf{R}_{n+1}^k \approx 0$ or $\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{int} \approx \overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{ext}$. All'interno della fase corrente (identificata attraverso il sottoscritto n), saremo iteranti (tramite il superscritto) k) per raggiungere l'equilibrio, Fig. 59.8

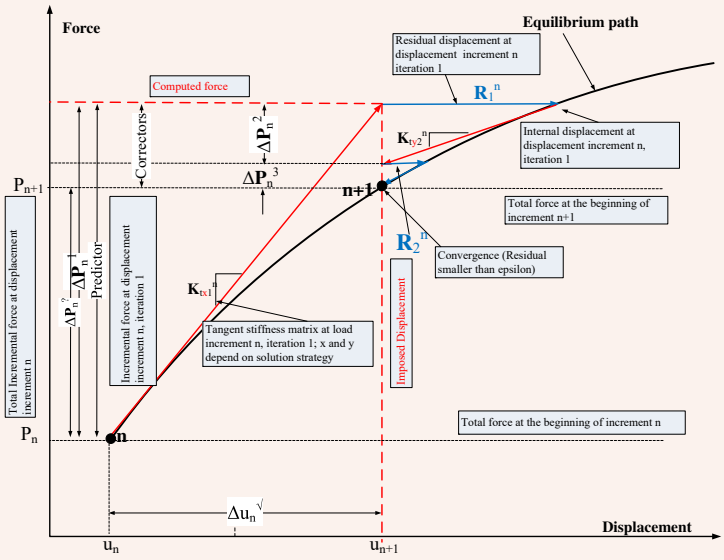


Figura 59.8: Metodo di Newton; controllo dello spostamento (confronto con figura 59.3)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

92 Come prima ipotesi per $\overline{\mathbf{P}}^0_{n+1}$ noi lo prendiamo per essere $\overline{\mathbf{P}}_n$, e sulla base della linearizzazione intorno a questo stato iniziale, abbiamo

$$\overline{\mathbf{u}}_{int}(\overline{\mathbf{u}}^0_{n+1}) + \mathbf{K}_T(\overline{\mathbf{P}}^0_{n+1})\Delta\overline{\mathbf{P}}^1_{n+1} = \overline{\mathbf{u}}^{ext}_{n+1}$$

dove $\Delta\overline{\mathbf{P}}^1_{n+1}$ è la prima approssimazione per l'incremento di spostamento sconosciuto, $\Delta\overline{\mathbf{P}}_{n+1} = \overline{\mathbf{P}}_{n+1} - \overline{\mathbf{P}}_n$.

93 In alternativa, iniziamo da una linearizzazione dell'Equazione 59.6Fico. 59.9

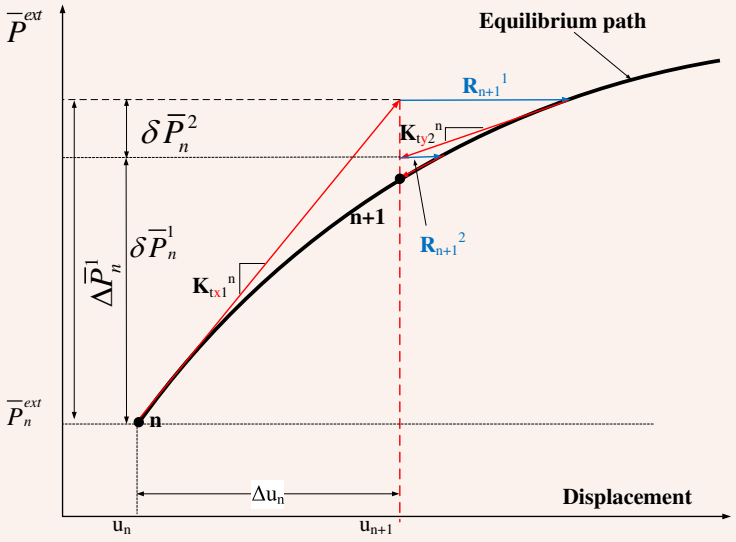


Figura 59.9: Metodo Newton-raphson; controllo di spostamento

$$\mathbf{R}^k_n(\overline{\mathbf{P}}^{i+1}_{n+1}) \approx \mathbf{R}^k_n(\overline{\mathbf{P}}^i_{n+1}) + \left(\frac{\partial \mathbf{R}^k_n}{\partial \overline{\mathbf{P}}}\right)^i_{n+1} \delta\overline{\mathbf{P}}^i_n = 0 \tag{59.7}$$

dove i è un contatore a partire da $\overline{\mathbf{P}}^1_{n+1} = \overline{\mathbf{P}}_n$. Osserviamo che

$$\frac{\partial \mathbf{R}^k_n}{\partial \overline{\mathbf{P}}} = \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}^{int}}{\partial \overline{\mathbf{P}}} = \mathbf{K}_T$$

94 Supponendo che $\overline{\mathbf{u}}^{ext}$ è costante e $\mathbf{K}_T$ è la matrice di rigidità tangente, Equazione 59.7 rendimenti

$$\mathbf{K}^i_T \delta\overline{\mathbf{P}}^i_n = -\mathbf{R}^i_{n+1}$$

or

$$\delta\overline{\mathbf{P}}^i_n = -(\mathbf{K}^i_T)^{-1}\mathbf{R}^i_{n+1}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

95 Così, una serie di approssimazioni successive produce

$$\overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{i+1} = \overline{\mathbf{P}}_n + \Delta\overline{\mathbf{P}}_n^i = \overline{\mathbf{P}}_{n+1}^i + \delta\overline{\mathbf{P}}_n^i$$

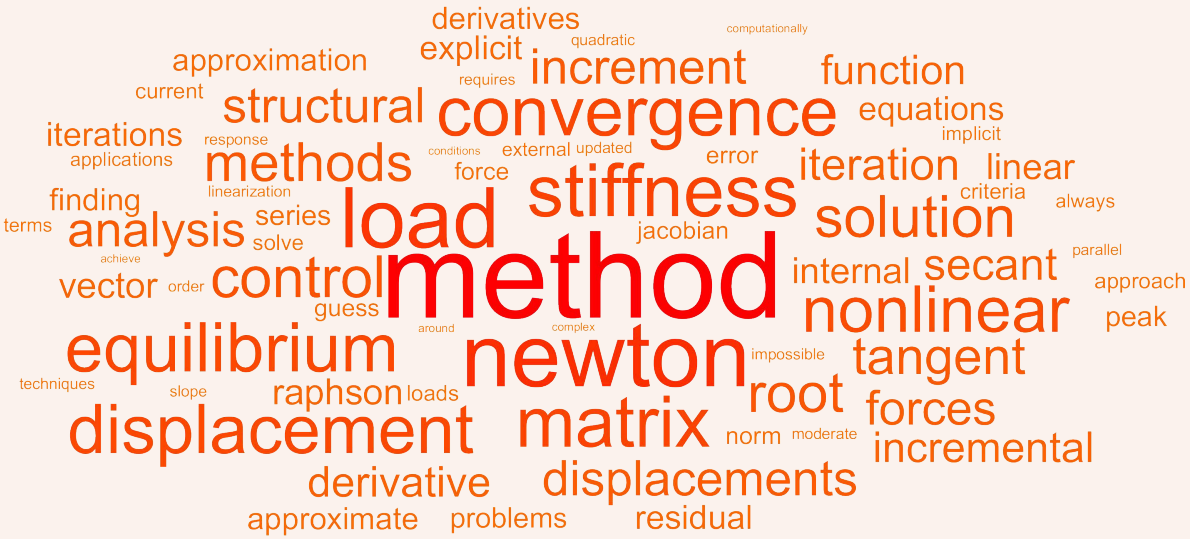
con

$$\Delta\overline{\mathbf{P}}_n^i = \sum_{k\le i} \delta\overline{\mathbf{P}}_n^k$$

molto rapidamente.

96 Va notato che ogni iterazione comporta tre passaggi computazionalmente costosi:

1. Valutazione degli spostamenti interni $\overline{\mathbf{u}}^{int}$
2. Valutazione della matrice globale di rigidità tangente, $\mathbf{K}_T$
3. Soluzione di un sistema di equazioni lineari



COPIA DI REVISIONE

Capitolo 60

Analisi non lineare; Geometrica

Abstract

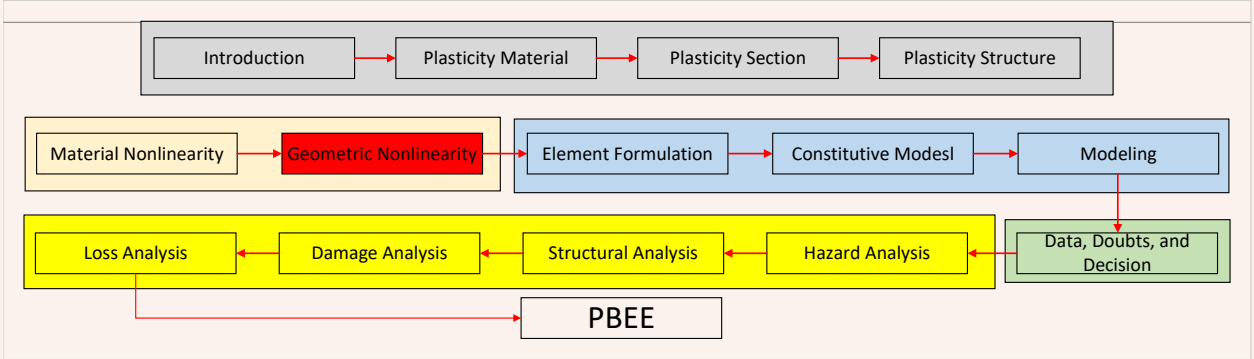
La non linearità geometrica, fondamentale nell'analisi strutturale, si manifesta in presenza di grandi deformazioni e/o grandi spostamenti, che richiedono approcci analitici specifici. Le grandi deformazioni richiedono modifiche della matrice di rigidezza elastica e conducono a un'analisi $P-\delta$, mentre i grandi spostamenti introducono effetti secondari che richiedono un'analisi $P-\Delta$. Nel loro insieme, questi effetti non lineari influenzano la capacità portante, la stabilità e la rigidezza della struttura, rendendo più impegnativa una modellazione accurata.

Questo capitolo inizia con una derivazione completa della matrice geometrica di rigidità $\mathbf{k}_g$, che integra la matrice elastica di rigidità per spiegare le non linearità geometriche indotte da grandi ceppi e spostamenti. Questa matrice è essenziale per prevedere con precisione i carichi di indurimento degli elementi strutturali e per valutare l'impatto dei carichi laterali sulla rigidità e sulle forze interne. Le sezioni successive esplorano gli effetti di ammorbidimento o indurimento che i carichi laterali possono imporre alle strutture, influenzando le caratteristiche di stabilità e deformazione sotto diversi scenari di carico.

Viene introdotto un algoritmo incrementale per affrontare la natura iterativa del comportamento strutturale non lineare. Questo approccio passo-passo ricalcola la rigidità strutturale in ogni fase, catturando la risposta dinamica delle strutture come subiscono deformazione. L'applicazione pratica è sottolineata attraverso numerosi codici MATLAB incorporati all'interno del capitolo, con script alternativi Mathematica forniti per coloro che preferiscono la programmazione compatta. Questi esempi permettono ai lettori di applicare i principi teorici nei casi reali, coprendo argomenti come l'analisi incerti delle colonne e dei frames e le grandi deflettori nelle travi cantilever, dove la non linearità geometrica svolge un ruolo critico. Attraverso questi esempi, i lettori acquisiscono una comprensione pratica di come la non linearità geometrica influisce sulle prestazioni strutturali, dotandole per risolvere efficacemente complesse sfide ingegneristiche del mondo reale.

60.1 Matrice di rigidità geometrica 2008
60.1.1 Ritiro 2008
60.1.2 Instabilità elastica; analisi biforcazione 2011
60.2 Analisi esplicita 2020
60.2.1 Ex 60.5: Grande deflettore del fascio di cantilever . . . 2022
60.3 $P-\Delta$ rivisitato 2026
60.3.1 Ex 60.6: Carico di chiusura senza $\mathbf{K}_{geom}$ 2026

COPIA DI REVISIONE



60.1 Matrice di rigidità geometrica

1 La matrice di rigidità geometrica è un ingrediente essenziale per l'analisi delle strutture soggette a grande ceppo (implicazione: grandi spostamenti).

2 Lo derivamo prima, e poi lo applichiamo a calcolare numericamente il carico di indurimento delle strutture, e quindi valuteremo il suo impatto sulla rigidità di un elemento (cioè addolcire o indurire).

60.1.1 Ritiro

3 In questa prima sezione, iniziamo con la derivazione del cosiddetto *matrice di rigidità geometrica* che è un "add-on' alla matrice elastica di rigidità derivata (§50.2.4) e che si riferisce esclusivamente alle grandi varietà (precedentemente ignorate).

60.1.1.1 Forma di bagnatura

4 La formulazione originale dell'elemento finito (con l'assunzione di piccoli ceppi) coperto §50.2 Ora bisogna rivisitare per spiegare le grandi varietà.

5 Come prima, per discostizzare il problema (attraverso l'elemento finito), dobbiamo prima ottenere la forma debole dell'equazione differenziale di governo e quindi applicare il principio della energia virtuale. Ancora una volta, contrariamente a prima, l'espressione della varietà sarà arricchita da ulteriori termini di ordine più alto (inizialmente trascurati).

60.1.1.2 Deformazione

6 La varietà in una trave-colonna può essere decomposta in due parti:

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Assiale: contabilità per grandi spostamenti (da Eq. O.6)

$$\varepsilon_{xx} = \underbrace{u_{,x}}_{\text{First Order}} + \underbrace{\frac{1}{2}(u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2)}_{\text{Second Order}}$$

dove u e v Il secondo termine d'ordine è il "controparte" di scrivere l'equazione dell'equilibrio nella forma deformata nella soluzione analitica (o semplicemente la contabilità per grandi ceppi).

Fexural: Dal presupposto Euler Bernoulli (§22.2)

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{d^2v}{dx^2} & = & \frac{M}{EI} \\ \sigma_{xx} & = & -\frac{My}{I} \end{array}\right\} \varepsilon_{xx} = -y\frac{d^2v}{dx^2}$$

Ripresa, la tensione totale diventa

$$\varepsilon_{xx}(x,y) = \underbrace{\underbrace{\frac{du}{dx}}_{\text{Axial}} \underbrace{- y\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)}_{\text{Flexure}}}_{\text{Small Deformation}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2}_{\text{Large Deformation}} \tag{60.1}$$

Nota che il secondo termine è negativo in quanto per positivo y (top) abbiamo stress di compressione, e i primi e secondi termini sono i componenti familiari delle ceppi assiali e flessori rispettivamente, e il terzo (che non è lineare) si ottiene da uno spostamento a grande difesa.

60.1.1.3 Energia da deformazione interna

L'energia virtuale Strain dell'elemento (originariamente Eq. 50.4) ora diventa

$$\delta U_i^{(e)} = \frac{1}{2}\int_\Omega \sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx}d\Omega = \frac{1}{2}\int_\Omega E\varepsilon_{xx}\delta\varepsilon_{xx}d\Omega$$

Sostituire Eq. 60.1 in $U_i^{(e)}$ noi otteniamo

$$\begin{aligned}\delta U_i^{(e)} = \frac{1}{2}\int_L\int_A \Bigg[& \frac{du}{dx}\frac{d\delta u}{dx} + y^2\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2\delta v}{dx^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\left(\frac{d\delta v}{dx}\right)^2 \\ & - 2y\left(\frac{du}{dx}\right)\frac{dv}{dx}\frac{d\delta v}{dx} - y\left(\frac{dv}{dx}\frac{d\delta v}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dx}\frac{d\delta v}{dx}\right)\Bigg] E\,dA\,dx\end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

11 Ricordare che $\int_A dA = A$e $\int_A ydA \overset{\text{def}}{=} 0$ e $\int_A y^2 dA \overset{\text{def}}{=} I$, scartando il più alto termine d'ordine e sotto l'assunzione di un'analisi pre-concerazione indipendente per il carico assiale dove

$$P^{(e)} = EA\frac{du}{dx} \Rightarrow A\frac{du}{dx} = \frac{P^{(e)}}{E}$$

Noi otteniamo

$$\delta U_i^{(e)} = \delta U_i^{(e,a)} + \delta U_i^{(e,f)} \tag{60.2}$$

$$\delta U_i^{(e,a)} = \frac{1}{2}\int_L EA\frac{d\delta u}{dx}\frac{du}{dx}dx \tag{60.3}$$

$$\delta U_i^{(e,f)} = \frac{1}{2}\int_L \left[EI\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2\delta v}{dx^2} + P^{(e)}\frac{dv}{dx}\frac{d\delta v}{dx}\right]dx \tag{60.4}$$

60.1.1.4 $\mathbf{K}_g$

12 Ancora una volta, seguiamo la stessa procedura di quella coperta §50.2.4 derivare la matrice di rigidità di una trave-colonna sottoposta a grandi ceppi. Assumendo una rappresentazione funzionale degli spostamenti trasversali in termini di quattro spostamenti congiunti

$$\begin{aligned} v &= \mathbf{N}\overline{\mathbf{u}} \\ \frac{dv}{dx} &= \mathbf{N}_{,x}\overline{\mathbf{u}} \\ \frac{d^2v}{dx^2} &= \mathbf{N}_{,xx}\overline{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

dove le funzioni di forma sono date da Eq. 49.3.

13 L'energia virtuale interna deve essere uguale al lavoro virtuale esterno

$$\begin{aligned} \delta U_i^{(e,f)} &= \frac{1}{2}\int_L \left[EI\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2\delta v}{dx^2} + P^{(e)}\frac{dv}{dx}\frac{d\delta v}{dx}\right]dx \\ \delta W_e &= P^{(e)}\int_0^L \left[\left(\frac{d\delta u}{dx}\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{d\delta v}{dx}\frac{dv}{dx}\right)\right]dx \\ \left[\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g\right]\mathbf{u}_e &= \mathbf{P} \\ \left[\mathbf{k}_e^{(e)}\right] &= \left[\int_L EI\underbrace{\{\mathbf{N}_{,xx}\}}_{\mathbf{B}^T}\underbrace{\lfloor\mathbf{N}_{,xx}\rfloor}_{\mathbf{B}}dx\right] \\ \left[\mathbf{k}_g^{(e)}\right] &= \left[P^{(e)}\int_L \{\mathbf{N}_{,x}\}\lfloor\mathbf{N}_{,x}\rfloor dx\right] \quad \text{Geometric Stiffness Matrix} \end{aligned} \tag{60.5}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Si noti che i termini di rigidità geometrica matrice dipendono esclusivamente da parametri geometrici (lunghezza).

14 Sostituire le funzioni di forma:

$$\mathbf{k}_g^{(e)} = \frac{P}{L}\begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & \frac{2}{15}L^2 & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & \frac{2}{15}L^2 \end{bmatrix} \end{array} \tag{60.6}$$

15 La relazione di equilibrio

$$\begin{aligned} \mathbf{k}\overline{\mathbf{u}} &= \overline{\mathbf{P}} \\ \mathbf{k}^{(e)} &= \mathbf{k}_e^{(e)} + \mathbf{k}_g^{(e)} \\ \mathbf{K} &= \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g \end{aligned}$$

Si nota che la struttura diventa più rigida per il carico di trazione P applicato attraverso $\mathbf{K}_g$e più debole nella compressione.

60.1.2 Instabilità elastica; analisi biforcazione

16 Dopo aver derivato la matrice di rigidità geometrica, vediamo come può essere utilizzato per determinare il carico di indurimento di una struttura. λ di un vettore iniziale del carico $\overline{\mathbf{P}}^*$ (che può essere unità) ottenuta da un'analisi elastica lineare di primo ordine che causerà l'indurimento,

$$\overline{\mathbf{P}}_{cr} = \lambda\overline{\mathbf{P}}^*$$

17 Poiché la matrice di rigidità geometrica è proporzionale alle forze interne,

$$\mathbf{K}_g = \lambda\mathbf{K}_g^*$$

dove $\mathbf{K}_g^*$ corrisponde alla matrice di rigidità geometrica per il carico di riferimento $\overline{\mathbf{P}}^*$ (di solito impostato all'unità).

18 Dal momento che la matrice elastica di rigidità $\mathbf{K}_e$ rimane una costante, possiamo scrivere

$$(\mathbf{K}_e + \lambda\mathbf{K}_g^*)\overline{\mathbf{u}} - \underbrace{\lambda\overline{\mathbf{P}}^*}_{\overline{\mathbf{P}}_{cr}} = 0$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

19 Gli spostamenti sono a loro volta dati da

$$\overline{\mathbf{u}} = (\mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{K}_g^*)^{-1} \lambda \overline{\mathbf{P}}^*$$

e per gli spostamenti tendere verso l'infinito (cioè buckling/bifurcation/instabilità), allora

$$|\mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{K}_g^*| = 0 \Rightarrow |\mathbf{K}_g^{*-1} \mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{I}| = 0$$

che è un problema di autovalore da cui possiamo risolvere i valori imperativi $\boldsymbol{\lambda}$.

20 Tuttavia, dal $\mathbf{K}_g^*$ ha alcuni termini zero lungo la diagonale (Eq. 60.6), usiamo una formulazione alternativa

$$|\mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_g^* + \frac{1}{\lambda} \mathbf{I}| = 0$$

Tuttavia, $\mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_g^*$ non può essere simmetrico.

21 Il valore minimo di λ, indicato con λ_{crit}, determina il carico critico di instabilità della struttura; i carichi critici sono dati da

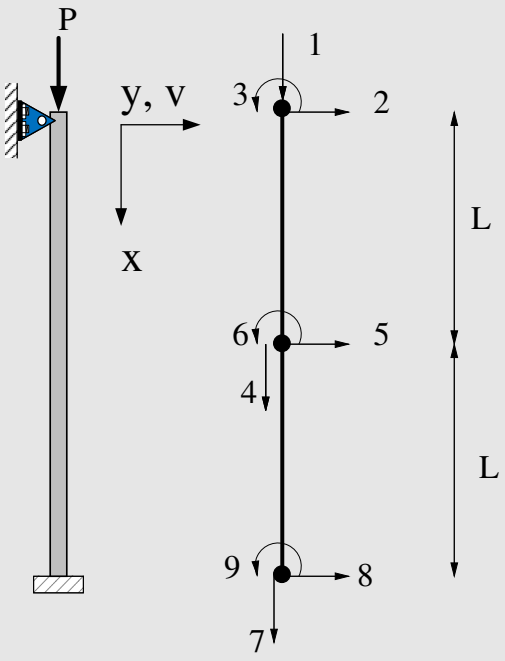
$$\overline{\mathbf{P}}_{crit} = \lambda_{crit} \overline{\mathbf{P}}^*$$

60.1.2.1 Ex 60.1: Arresto della colonna

Cerchiamo di determinare numericamente il carico di indurimento di una colonna fissa, e confrontare i risultati con la soluzione analitica di §29.3.2.1.3. Le matrici elastiche e geometriche di rigidità sono date da

$$\mathbf{k}_e^1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{k}_g^1 = \frac{-P}{L} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & \frac{2}{15}L^2 & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & \frac{2}{15}L^2 \end{bmatrix} \end{array}$$



COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

La rigidità della struttura matrici $\mathbf{K}_e$ e $\mathbf{K}_g$ Eliminare righe e colonne 2, 7, 8, 9 corrispondenti a zero spostamenti nella colonna, otteniamo

$$\mathbf{K}_e = \frac{EI}{L^3}\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AL^2}{I} & 2\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -6L & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 2L^2 & 0 & 8L^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{K}_g = \frac{-P}{L}\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{15}L^2 & \frac{-L}{10} & \frac{-L^2}{30} \\ 0 & 0 & \frac{-L}{10} & \frac{12}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-L^2}{30} & 0 & \frac{4}{15}L^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Notare che in questo caso $\mathbf{K}_g^* = \mathbf{K}_g$ per $P = 1$, il determinante $|\mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{K}_g^*| = 0$ porta a

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 4 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & \frac{AL^2}{I} & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -\frac{AL^2}{I} & 2\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4L^2 - \frac{2}{15}\frac{\lambda L^4}{EI} & -6L + \frac{1}{10}\frac{\lambda L^3}{EI} & 2L^2 + \frac{1}{30}\frac{\lambda L^4}{EI} \\ 5 & 0 & 0 & -6L + \frac{1}{10}\frac{\lambda L^3}{EI} & 24 - \frac{12}{5}\frac{\lambda L^2}{EI} & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 2L^2 + \frac{1}{30}\frac{\lambda L^4}{EI} & 0 & 8L^2 - \frac{4}{15}\frac{\lambda L^4}{EI} \end{array} = 0$$

Al suo punto possiamo risolvere numericamente o algebricamente, sia che siamo abbastanza coraggiosi e andiamo con il secondo: Introduzione $\phi = \frac{AL^2}{I}$ e $\mu = \frac{\lambda L^2}{EI}$, il determinante diventa

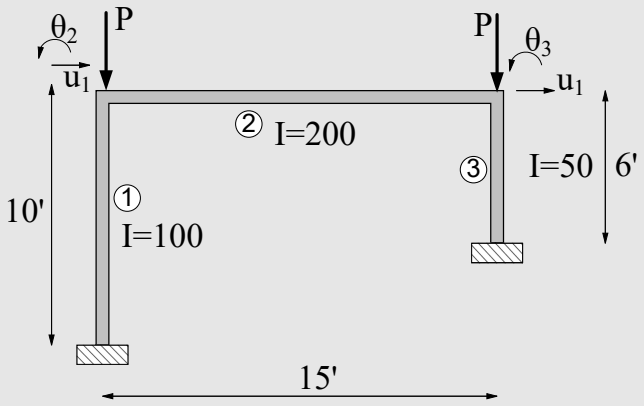
$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 4 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & \phi & -\phi & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -\phi & 2\phi & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2\left(2 - \frac{\mu}{15}\right) & -6L + \frac{\mu}{10} & 2 + \frac{\mu}{30} \\ 5 & 0 & 0 & -6L + \frac{\mu}{10} & 12\left(2 - \frac{\mu}{5}\right) & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 2 + \frac{\mu}{30} & 0 & 4\left(2 - \frac{\mu}{15}\right) \end{array} = 0$$

Espansione del determinante, otteniamo l'equazione cubica in μ $3\mu^3 - 220\mu^2 + 3,840\mu - 14,400 = 0$ e la radice più bassa di questa equazione è $\mu = 5.1772$. Quindi il carico di indurimento della colonna di lunghezza $2L$ is $P_{cr} = \lambda = \frac{5.1772EI}{L^2}$ La soluzione esatta per una colonna di lunghezza L is $P_{cr} = \frac{(4.4934)^2}{L^2}EI = \frac{(4.4934)^2}{(2L)^2}EI = 5.0477\frac{EI}{L^2}$ Così, il valore numerico è circa 2,6 per cento superiore a quello esatto.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

60.1.2.2 Ex 60.2: Guaina per telaio; soluzione Matlab



Il fattore di amplificazione del carico più piccolo λ è uguale a $2,017$ Kim.

Soluzione Matlab

```
% Main Function
% zero the matrices
k=zeros(6,6,3) ; K=zeros(6,6,3) ; Gamma=zeros(6,6,3) ;
% Structural properties units : in^2 , in^4 , and ksi
A=[24.5 34.6 18]; II=[100 200 50];EE=29000;
% Element 1
i =[0,0]  ; j =[0,120] ; [k(:,:,1),K(:,:,1),Gamma(:,:,1)]=stiff(EE, II(1)
    ,A(1),i, j ) ;
% Element 2
i =j ;     j =[180,120]; [k(:,:,2),K(:,:,2),Gamma(:,:,2)]=stiff(EE, II(2)
    ,A(2),i ,j ) ;
% Element 3
i =j;      j =[180, 48]; [k(:,:,3),K(:,:,3),Gamma(:,:,3)]=stiff(EE, II(3)
    ,A(3),i ,j ) ;
% Define ID matrix % Note that this is the transpose of what we use
ID=[-4 5 -6; 1 -7 2;1 -8 3; -9 -10 -11] ;
% Determine the LM matrix
LM=[-4 -5 -6 1 -7 2; 1 -7 2 1 -8 3; 1 -8 3 -9 -10 -11];
% Assemble augmented stiffness matrix
Kaug=zeros(11) ;
for elem=1:3
      for r=1:6
            lr=abs(LM(elem,r)) ;
            for c=1:6
                  lc=abs(LM(elem,c)) ;
                  Kaug(lr , lc )=Kaug(lr ,lc)+K(r,c ,elem ) ;
            end
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
      end
end
Ktt=Kaug (1:3 ,1:3 );
P=[1 0 1];
% zero the matrices
g=zeros(6,6,3) ; G=zeros(6,6,3) ; Gamma=zeros(6,6,3) ;
% Element 1
i =[0,0]  ; j =[0,120] ; [g(:,:,1),G(:,:,1),Gamma(:,:,1)]=gstiff(P(1),i,
   j ) ;
% Element 2
i =[0,120]; j =[180,120]; [g(:,:,2),G(:,:,2),Gamma(:,:,2)]=gstiff(P(2),i
   ,j ) ;
% Element 3
i =j;      j =[180, 48]; [g(:,:,3),G(:,:,3),Gamma(:,:,3)]=gstiff(P(3),i,
   j ) ;
% Assemble augmented geometric stiffness matrix
Gaug=zeros(11) ;
for elem=1:3
   for r=1:6
      lr=abs(LM(elem,r)) ;
      for c=1:6
         lc=abs(LM(elem,c)) ;
         Gaug(lr,lc)=Gaug(lr,lc)+G(r,c,elem) ;
      end
   end
end
Gtt=Gaug (1:3,1:3);
I=eye(3);
M=inv(Gtt).*Ktt          % try this first if not workable go to  M=inv(
   Ktt).*Gtt
[V,pcrit]=eig(M,-I)
%Stiffness Function
function [k ,K,Gamma]= stiff(EE, II ,A, i , j )
% Determine the length
L=sqrt ((j(2)-i(2))^2+(j(1)-i(1))^2) ;
% Compute the angle alpha
alpha=atan2 (j(2)-i(2),j(1)-i(1)) ;
% form rotation matrix Gamma
Gamma=[ cos(alpha)  sin(alpha)   0           0          0  0 ;
      -sin(alpha)  cos(alpha)   0           0          0  0 ;
                0           0   1           0          0  0 ;
                0           0   0  cos(alpha) sin(alpha)  0 ;
                0           0   0 -sin(alpha) cos(alpha)  0 ;
                0           0   0           0          0  1 ] ;
% form element stiffness matrix in local coordinate system
EI=EE*II ; EA=EE*A;
k= [EA/L,         0,         0 , EA/L,          0,        0 ;
      0 , 12*EI/L^3,   6*EI/L^2,    0, -12*EI/L^3,  *EI/L^2 ;
       0,  6*EI/L^2,     4*EI/L,    0,  -6*EI/L^2,   2*EI /L;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
   -EA/L,         0,          0, EA/L,          0,         0;
       0, 12*EI/L^3, -6*EI /L^2,    0,  12*EI/L^3, -6*EI/L^2;
       0,  6*EI/L^2,     2*EI/L,    0, -6*EI /L^2,     4*EI/L ] ;
% Element stiffness matrix in global coordinate system
K=Gamma'* k*Gamma;
end
% Geometric Stiffness Function
function [ g,G,Gamma ]= gstiff(P,i,j)
% Determine the l ength
L=sqrt ((j(2)-i(2))^2+(j(1)-i(1))^2) ;
% Element  geometric stiffness matrix in local  coordinate  system
g=-P/L*[0     0         0    0      0       0  ;
        0   6/5      L/10    0   -6/5      L/10;
        0  L/10  2*L^2/15    0  -L/10   -L^2/30;
        0     0         0    0      0       0   ;
        0  -6/5     -L/10    0    6/5     -L/10;
        0  L/10   -L^2/30    0  -L/10   2*L^2/15 ];
% Compute the angle alpha
alpha=atan2 (j(2)-i(2),j(1)-i(1)) ;
% form rotation matrix Gamma
Gamma=[ cos(alpha)  sin(alpha)  0           0           0  0 ;
       -sin(alpha)  cos(alpha)  0           0           0  0 ;
                 0           0  1           0           0  0 ;
                 0           0  0   cos(alpha)   sin(alpha)  0 ;
                 0           0  0  -sin(alpha)   cos(alpha)  0 ;
                 0           0  0           0           0  1 ] ;
%Element  geometric stiffness matrix in global  coordinate  system
G=Gamma'* g*Gamma;
end
```

60.1.2.3 Ex 60.3: Fissaggio telaio; soluzione Mathematica

Soluzione Mathematica

```
(* Initialize constants *)
a1=0 a2=0 a3=0 i1=100 i2=200 i3=50 l1=10 12 l2=15 12 l3=6 12 e1=29000 e2=
   e1 e3=e1
(* Define elastic stiffness matrices *)
ke[e_,a_,l_,i_]:={
{e a/l  , 0          , 0         , -e a/l , 0          , 0         },
{0      , 12 e i/l^3 , 6 e i/l^2 , 0      , -12 e i/l^3 , 6 e i/l^2 },
{0      , 6 e i/l^2  , 4 e i/l   , 0      , -6 e i/l^2  , 2 e i/l   },
{-e a/l , 0          , 0         , e a/l  , 0          , 0         },
{ 0     , -12 e i/l^3 , -6 e i/l^2 , 0      , 12 e i/l^3  , -6 e i/l^2 },
{ 0     , 6e i/l^2   , 2 e i/l   , 0      , -6 e i/l^2  , 4 e i/l   }
   }
```

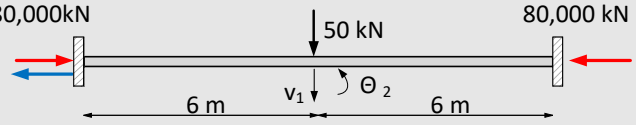
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
ke1=ke[e1,a1,l1,i1]; ke2=ke[e2,a2,l2,i2]; ke3=ke[e3,a3,l3,i3]
(* Define geometric stiffness matrices *)
kg[l_,p_]:=p/l{
{0 , 0    , 0        , 0 , 0      , 0        }, {0 , 6/5  ,  l/10    , 0
   , - 6/5  , l/10     },
{0 , l/10 , 2 l^2/15 , 0 , - l/10 , - l^2/30 }, {0 , 0    , 0        , 0
   , 0      , 0        },
{0 , -6/5 , - l/10   , 0 ,  6/5   , - l/10   }, {0 , l/10 , - l^2/30 , 0
   , - l/10 , 2 l^2/15 } }
kg1=kg[l1,1]
kg3=kg[l3,1]
(* Assemble structure elastic and geometric stiffness matrices *)
ke={
{ ke1[[2,2]]+ke3[[2,2]] , ke1[[2,3]]            , ke3[[2,3]]
   },
{ ke1[[3,2]]            , ke1[[3,3]]+ke2[[3,3]] , ke2[[3,6]]
   },
{ ke3[[3,2]]            , ke2[[6,3]]            , ke2[[6,6]]+ke3[[3,3]]
   } }
kg={
{ kg1[[2,2]]+kg3[[2,2]] , kg1[[2,3]] , kg3[[2,3]]  },
{ kg1[[3,2]]            , kg1[[3,3]] , 0           },
{ kg3[[3,2]]            , 0          , kg3[[3,3]]  } }
(* Determine critical loads in terms of p (note p=1) *)
p=1
keigen=Inverse[kg] . ke; pcrit=N[Eigenvalues[keigen]]; modshap=N[
   Eigensystems[keigen]]
```

60.1.2.4 Ex 60.4: Impatto di carico assiale sulla deformazione flessorale

In questo esempio cerchiamo di valutare l'impatto delle forze assiali della compressione o della trazione sulla rigidità di una colonna del fascio. §29.2.2.



Utilizzando due elementi per la colonna del fascio, gli unici gradi di libertà sono la deviazione e rotazione a metà dell'espansione (si trascurano la deformazione assiale).

Matlab

```
clear; close all;clc;
%% Initialization for a 2 element structure
% zero the matrices
k=zeros(6,6,2);K=zeros(6,6,2);kg=zeros(6,6,2);Kg=zeros(6,6,2);Gamma=zeros
   (6,6,2);
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
% Structural properties m^2, m^4, and Pa
A=1;II=2e-3;EE=2e9;
% Elements' axial loads
Fax=-8e4*[1,1];
%% Call the function stiff to compute the element stiffness matrices and
   the rotation ones
% Element 1
i=[0,0];j=[6,0];
[k(:,:,1),K(:,:,1),kg(:,:,1),Kg(:,:,1),Gamma(:,:,1)]=stiff_1(EE,II,A,i,j,
   Fax(1));
% Element 2
i=j;j=[12,0];
[k(:,:,2),K(:,:,2),kg(:,:,2),Kg(:,:,2),Gamma(:,:,2)]=stiff_1(EE,II,A,i,j,
   Fax(2));
%% Determine the LM matrix
LM=[
4 5 6 1 2 3;
1 2 3 7 8 9];
%% Assemble augmented stiffness matrix
Kaug=zeros(9);Kgaug=zeros(9);
for elem=1:2
   for r=1:6
      lr=abs(LM(elem,r));
      for c=1:6
         lc=abs(LM(elem,c));
                  Kaug(lr,lc)=Kaug(lr,lc)+K(r,c,elem);
                  Kgaug(lr,lc)=Kgaug(lr,lc)+Kg(r,c,elem);
            end
   end
end
%% Extract the structures Stiffness Matrix
Ktt=Kaug(1:3,1:3);Kgtt=Kgaug(1:3,1:3);
%% Find buckling load multiplier
B=inv(Ktt)*Kgtt;lambda=-1*eye(3,1)./eig(B);
%% Assemble the load vector for the unrestrained node
P=[0,-50,0];
%% Solve for the Displacements in meters
Displacements=inv(Ktt+Kgtt)*P'
%% Solve for the internal forces and do not forget to include the fixed
   end actions
dis_global(:,:,1)=[0,0,0,Displacements(1:3)'];dis_global(:,:,2)=[
   Displacements(1:3)',0,0,0];
for elem=1:2
  dis_local=Gamma(:,:,elem)*dis_global(:,:,elem)';
  int_forces=(k(:,:,elem)+kg(:,:,elem))*dis_local
end
%+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
function [k,K,kg,Kg,Gamma]=stiff_1(EE,II,A,i,j,P)
\red{from above exampes}
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Mathematica

```
(* Initialize constants *)
OpenWrite["mat.out"]; a1=1; a2=1; i1=1 l^3/12;i2=i1; l1=12;l2=12; e1=200000;e2=e1;e3=e1;
theta1=N[Pi/8];theta2=Pi-theta1; load i1=i i2=i1 l=6 l1=l l2=6 p=-80000 load={-50,0}
(* Define elastic stiffness matrices *)
ke[e_,a_,l_,i_]:={
  {e a/l  , 0           , 0          , -e a/l , 0           , 0
   },
  {0      , 12 e i/l^3  , 6 e i/l^2  , 0      , -12 e i/l^3 , 6 e i/l^2
   },
  {0      , 6 e i/l^2   , 4 e i/l    , 0      , -6 e i/l^2  , 2 e i/l
   },
  {-e a/l , 0           , 0          , e a/l  , 0           , 0
   },
  { 0     , -12 e i/l^3 , -6 e i/l^2 , 0      , 12 e i/l^3  , -6 e i/l^2 },
  { 0     , 6e i/l^2    , 2 e i/l    , 0      , -6 e i/l^2  , 4 e i/l
   } }
ke1=N[ke[e,a1,l1,i1]]; ke2=N[ke[e,a2,l2,i2]]
(* Assemble structure elastic stiffness matrices *)
ke=N[{
  { ke1[[5,5]]+ke2[[2,2]], ke1[[5,6]]+ke2[[2,3]]},
  { ke1[[6,5]]+ke2[[3,2]], ke1[[6,6]]+ke2[[3,3]]} }]
WriteString["mat.out",MatrixForm[ke1]]; WriteString["mat.out",MatrixForm[ke2]];
WriteString["mat.out",MatrixForm[ke]]
(* Define geometric stiffness matrices *)
kg[p_,l_]:=p/l {
  {0 , 0    , 0        , 0 , 0      , 0        }, {0 , 6/5  ,  l/10
  , 0 , - 6/5  , l/10     },
  {0 , l/10 , 2 l^2/15 , 0 , - l/10 , - l^2/30 }, {0 , 0    , 0
  , 0 , 0      , 0        },
  {0 , -6/5 , - l/10   , 0 ,  6/5   , - l/10   }, {0 , l/10 , - l^2/30
  , 0 , - l/10 , 2 l^2/15 } }
kg1=N[kg[p,l1]]; kg2=N[kg[p,l2]]
(* Assemble structure geometric stiffness matrices *)
kg=N[{
  { kg1[[5,5]]+kg2[[2,2]], kg1[[5,6]]+kg2[[2,3]]},
  { kg1[[6,5]]+kg2[[3,2]], kg1[[6,6]]+kg2[[3,3]]} }]
(* Determine critical loads and normalize wrt p  *)
keigen=Inverse[kg] . ke; pcrit=N[Eigenvalues[keigen] p]
(* Note that this gives lowest pcrit=1.11  10^6, exact value is 1.095  10^6 *)
(* Add elastic to geometric structure stiffness matrices *)
k=ke+kg
(* Invert stiffness matrix and solve for displacements *)
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
km1=Inverse[k] dis=N[km1 . load]
(* Displacements of element 1*)
dis1={0, 0, 0, 0, dis[[1]], dis[[2]]}
k1=ke1+kg1
(* Member end forces for element 1 with axial forces  *)
endfrc1=N[k1 . dis1]
(* Member end forces for element 1 without axial forces  *)
knopm1=Inverse[ke]; disnop=N[knopm1 . load]; disnop1={0, 0, 0, 0,
 disnop[[1]], disnop[[2]]}
(* Displacements of element 1*)
endfrcnop1=N[ke1 . disnop1]
```

Invertire la rigidità e le matrici geometriche assemblate:

$$\left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ \theta_2 \end{array} \right\} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} -0.00012123 \\ 0 \end{array} \right\}}_{P=-80{,}000} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} -0.0001125 \\ 0 \end{array} \right\}}_{P=0} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} -0.000104944 \\ 0 \end{array} \right\}}_{P=80{,}000}$$

Le forze di fine membro per l'elemento 1

$$\left\{ \begin{array}{c} P_{lft} \\ V_{lft} \\ M_{lft} \\ P_{rgt} \\ V_{rgt} \\ M_{rgt} \end{array} \right\} = \left[[\mathbf{k}_e^1] + [\mathbf{k}_g^1] \right] \left\{ \begin{array}{c} u_{lft} \\ v_{lft} \\ \theta_{lft} \\ u_{rgt} \\ v_{rgt} \\ \theta_{rgt} \end{array} \right\} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 25. \\ 79.8491 \\ 0. \\ -25. \\ 79.8491 \end{array} \right\}}_{P=-80{,}000} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 25. \\ 75. \\ 0. \\ -25. \\ 75. \end{array} \right\}}_{P=0} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 25. \\ 70.8022 \\ 0. \\ -25. \\ 70.8022 \end{array} \right\}}_{P=80{,}000}$$

La forza compressa aumentava gli spostamenti e i momenti finali, mentre una trazione si irrigidisce la struttura riducendole.

60.2 Analisi esplicita

22 Con riferimento ai diversi tipi di analisi non lineare, Fig. 54.5 (di nuovo per qui per chiarezza) ora ci concentriamo sull'analisi incrementale (tipo 3).

23 A partire da

$$\left[\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g \right] \overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{P}}$$

una procedura semplice per risolvere questa equazione non lineare è quella di utilizzare una procedura graduale o incrementale, la formulazione incrementale linearizzata corrispondente può essere ottenuta applicando un operatore incrementale Δ

$$\{\Delta \overline{\mathbf{u}}\}_i = \left[\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g \right]_i^{-1} \{\Delta \overline{\mathbf{P}}\}_i$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

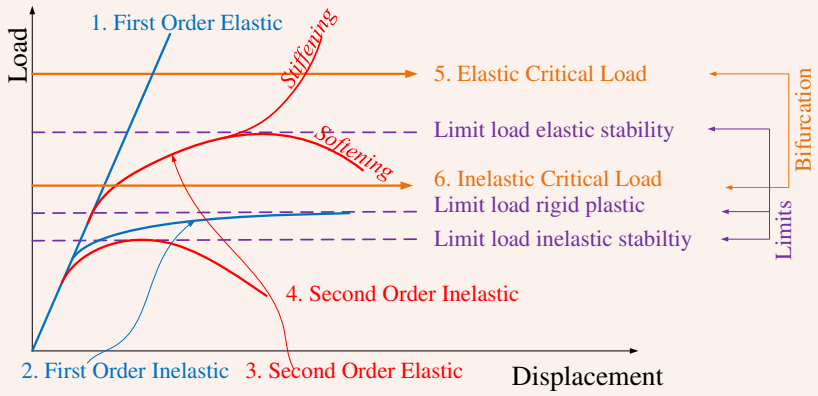


Figura 60.1: Livelli di analisi strutturale

[24] Il metodo è illustrato in Fig. 60.2 (che è una versione semplificata della corrispondente in Fig. 59.2).

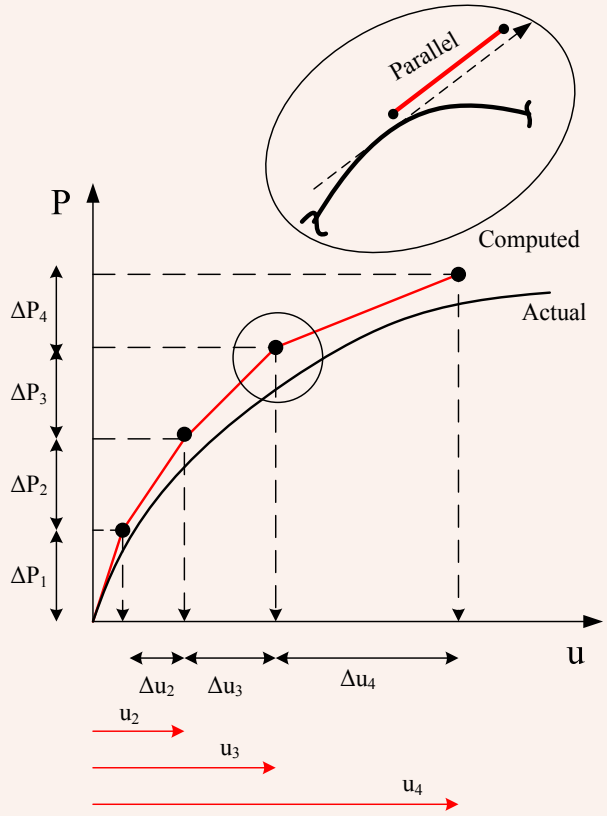


Figura 60.2: Approccio incrementale esplicito alla non linearità geometrica

COPIA DI REVISIONE

25 La procedura è abbastanza semplice e può essere programmata facilmente:

1. Applicare un carico incrementale ΔP_i a ogni incremento i.
2. Alla fine di ogni incremento:
   (a) Aggiornare lo spostamento totale $u_i = u_{i-1} + \Delta u_i$.
   (b) Aggiornare la geometria $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + \Delta \mathbf{u}_i$- No, no.
   (c) Aggiorna la matrice di trasformazione.
   (d) Aggiornare la matrice di rigidità elastica e geometrica
3. Si noti che non stiamo controllando l'equilibrio alla fine di ogni incremento (più su questo più tardi), e se prendiamo abbastanza piccoli passaggi, la soluzione non dovrebbe scavare troppo.
4. L'aggiornamento della geometria dovrebbe anche prendersi cura di $P-\Delta$ effetti.

26 Tenere presente che si tratta di un'analisi incrementale, ogni analisi è associata ad un incremento del carico.

$$\begin{array}{rll} \text{Displacements} & \Delta\mathbf{u}^i; & \mathbf{u}^i = \mathbf{u}^{i-1} + \Delta\mathbf{u}^i \\ \text{Nodal coordinates} & & \mathbf{x}^i = \mathbf{x}^{i-1} + \Delta\mathbf{u}^i \\ \text{Internal forces} & \Delta\mathbf{F}^i; & \mathbf{F}^i = \mathbf{F}^{i-1} + \Delta\mathbf{F}^i \\ \text{Total Reactions} & \Delta\mathbf{R}^i; & \mathbf{R}^i = \mathbf{R}^{i-1} + \Delta\mathbf{R}^i \end{array}$$

e all'inizio di ogni incremento abbiamo bisogno di ricomputere:

- Lunghezze, direzione coseni, matrice di trasformazione.
- Matrice di rigidità degli elementi basata su coordinate nodali aggiornate e matrice di trasformazione.
- Matrice di rigidità geometrica basata su una forza assiale totale aggiornata (da forze interne degli elementi) per ogni elemento.

Uso $\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}_g$ per calcolare le forze interne.

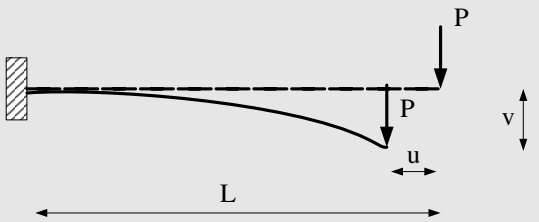
60.2.1 Ex 60.5: Grande deflettore del fascio di cantilever

La soluzione per una grande deflezione di un fascio cantilever1 non può essere ottenuta dalla teoria del raggio elementare poiché le ipotesi di base non sono più valide. In particolare, la teoria elementare trascura il quadrato del primo derivato nella formula di curvatura e non fornisce alcuna correzione per l'asportazione del braccio del momento come estremità caricata del fascio deflette. Per grandi carichi finiti, dà deflettori maggiori la lunghezza del fascio! La piazza dei primi fattori derivati e di correzione l'ammortizzazione del braccio di momento diventa il principale contributo alla soluzione di problemi di grande deviazione. considerando che la soluzione analitica è data §29.2.3, si cerca una soluzione numerica. E = 800 kN/mm^2, L = 4,000 mm, I_z = 1e7 mm^4, A=50 mm^2, P= 5.000 kN.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Discretizzeremo la barra in 5 membri di lunghezze uguali e useremo l'incremento di -10kN e x l'asse va da estremità libera (a sinistra),. Presumeremo che la piegatura non cambierà la lunghezza del fascio (intensibile). Cerchiamo di tracciare la fine libera normalizzata spostamenti nodali (u e v) in termini di carico senza dimensione.




```
% Load increment
dP=10000;
stepNo=5000000/dP;
% zero the matrices
nodeCoord=zeros(6,2);
k=zeros(6,6,5);K=zeros(6,6,5);kg=zeros(6,6,5);Kg=zeros(6,6,5);Gamma=zeros
    (6,6,5);
P=zeros(1,stepNo);dis_global=zeros(15,stepNo);deltaDis_global=zeros(5,6);
int_forces=zeros(6,5);
% Structural properties mm^2, mm^4, and kN/mm^2
A=50e-6;II=1e7*1e-12;EE=800e9; % convert to meters
% Determine the LM matrix
LM=[
16 17 18 13 14 15;
13 14 15 10 11 12;
10 11 12  7  8  9;
 7  8  9  4  5  6;
 4  5  6  1  2  3];
% Assemble the load vector for the unrestrained node
deltaP=[0 (-1*dP) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
% Initial elements axial forces
axF=zeros(5,1);
% Initial node coordinates
for node=1:6
  nodeCoord(node,:)=[(node-1)*0.8,0];
end
%% Incremental analysis
for step=1:stepNo
   P(step)=step*dP;
% Call the function stiff_1 to compute the element stiffness matrices and
    the rotation ones.
   for elem=1:5
      i=nodeCoord(elem,:);
      j=nodeCoord(elem+1,:);
      [k(:,:,elem),K(:,:,elem),kg(:,:,elem),Kg(:,:,elem),Gamma(:,:,elem)
   ]=stiff_1(EE,II,A,i,j,axF(elem));
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
   end
% Assemble augmented stiffness matrix
   Kaug=zeros(18);Kgaug=zeros(18);
%
   for elem=1:5
      for r=1:6
         lr=abs(LM(elem,r));
         for c=1:6
            lc=abs(LM(elem,c));
            Kaug(lr,lc)=Kaug(lr,lc)+K(r,c,elem);
            Kgaug(lr,lc)=Kgaug(lr,lc)+Kg(r,c,elem);
         end
      end
   end
% Extract the structures Stiffness Matrix
   Ktt=Kaug(1:15,1:15);Kgtt=Kgaug(1:15,1:15);
% Solve for the Displacements in meters
   deltaDis=inv(Ktt+Kgtt)*deltaP';
% Update nodal displacements
   if step==1
      dis_global(:,step)=deltaDis;
   else
      dis_global(:,step)=dis_global(:,step-1)+deltaDis;
   end
% Solve for the internal forces
   deltaDis_global(1,:)=[0,0,0,deltaDis(13:15)'];
   for elem=2:5
      deltaDis_global(elem,:)=[deltaDis((15-(elem-1)*3+1):(15-(elem-2)*3)
   )',deltaDis((15-elem*3+1):(15-(elem-1)*3))'];
   end
%
   for elem=1:5
      dis_local=Gamma(:,:,elem)*deltaDis_global(elem,:)';
      deltaInt_forces=(k(:,:,elem)+kg(:,:,elem))*dis_local;
      int_forces(:,elem)=int_forces(:,elem)+deltaInt_forces;
   end
% Update axial forces
   for elem=1:5
      axF(elem)=int_forces(4,elem);
   end
% Update node coordinates
   for node=2:6
      nodeCoord(node,:)=nodeCoord(node,:)+deltaDis((15-3*(node-1)+1)
   :(15-3*(node-1)+2))';
   end
end
%
plot(P*4^2/(EE*II),(4+dis_global(1,:))/4);
hold on
```

COPIA DI REVISIONE

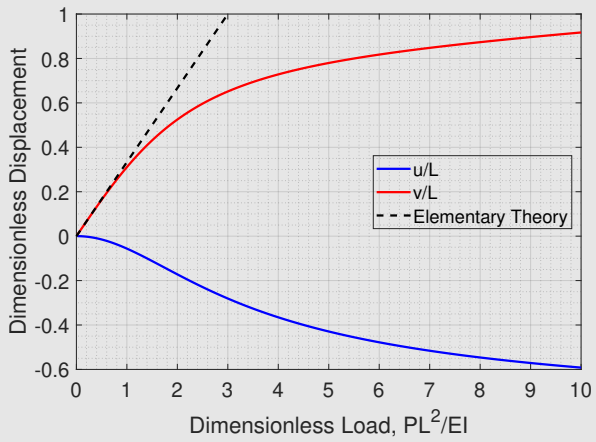
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
plot(P*4^2/(EE*II),(-dis_global(2,:))/4,'r--');
xlabel('Dimensionless Load, PL^2/EI');
ylabel('Dimensionless Displacement');
legend('u/L','v/L');
%
    ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

function [k,K,kg,Kg,Gamma]=stiff_1(EE,II,A,i,j,P)
% Determine the length
L=sqrt((j(2)-i(2))^2+(j(1)-i(1))^2);
% Compute the angle theta
alpha=atan2(j(2)-i(2),j(1)-i(1));
% form rotation matrix Gamma
Gamma=[cos(alpha) sin(alpha) 0 0 0 0;
-sin(alpha) cos(alpha)  0 0 0 0;
0 0 1 0 0 0;
0 0 0 cos(alpha) sin(alpha) 0;
0 0 0 -sin(alpha) cos(alpha) 0;
0 0 0 0 0 1];
%form stiffness matrix
EI=EE*II;EA=EE*A;
k=[EA/L,         0,         0, -EA/L,          0,         0;
0,    12*EI/L^3,  6*EI/L^2,     0, -12*EI/L^3,  6*EI/L^2;
0,     6*EI/L^2,    4*EI/L,     0,  -6*EI/L^2,    2*EI/L;
-EA/L,          0,         0,  EA/L,          0,         0;
0, -12*EI/L^3, -6*EI/L^2,     0,  12*EI/L^3, -6*EI/L^2;
0,   6*EI/L^2,    2*EI/L,     0,  -6*EI/L^2,    4*EI/L];
% Stiffness matrix global
K=Gamma'*k*Gamma;
% Form geometric stiffness matrix
kg=(P/(30*L))*[0, 0,   0,      0, 0,    0;
0, 36,  3*L,    0, -36,  3*L;
0, 3*L, 4*L^2,  0, -3*L, -1*L^2;
0, 0,   0,      0, 0,    0;
0, -36, -3*L,   0, 36,   -3*L;
0, 3*L, -1*L^2, 0, -3*L, 4*L^2];
% Geometric stiffness matrix global
Kg=Gamma'*kg*Gamma;
end
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



60.3 $P-\Delta$ rivisitato

27 Dobbiamo differenziare tra:

- $P-\Delta$ si riferisce all'effetto di secondo ordine causato dai carichi assiali e deformazioni in una struttura. Questo effetto avviene perché le deflettori della struttura sotto i carichi creano momenti aggiuntivi, che a loro volta causano ulteriori deformamenti. Questo effetto può essere significativo nelle strutture alte o snelle, dove le deflettezioni sono relativamente grandi.
- $P-\delta$ si riferisce alla non linearità geometrica della struttura causata dallo spostamento della struttura stessa. Questo effetto è legato al fatto che la rigidità di una struttura cambia come deforma la struttura, che a sua volta colpisce la distribuzione delle forze interne e degli stress.

28 Se molti (finiti) elementi modellano una colonna, nel limite si può ignorare $\mathbf{K}_g$e alla fine, e eseguire un $P-\Delta$ analisi e cattura il corrispondente carico di "coraggio" che avrebbe richiesto $P-\delta$ (e così) $\mathbf{K}_g$) analisi, Fig. 60.3.

60.3.1 Ex 60.6: Carico di chiusura senza $\mathbf{K}_{geom}$

Cerchiamo di stimare il carico di bucking P_{cr}^{est} di una colonna fissata ad un'estremità, libera all'altra eseguendo 10 *sequenziale secant primo ordine* analisi (cioè senza usare $\mathbf{k}_g$- Solo $\mathbf{k}_e$). Al termine di ogni analisi, si regolano le coordinate nodali per riflettere il cambiamento della geometria. i volontà $P = i.\Delta P$. Dovremmo prendere $\Delta P = P_{cr}^{exact}/20$. Per ogni analisi i Si noti che l'instabilità / instabilità si verifica improvvisamente.

```
%% Initialization for a 5 element strcture
```

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

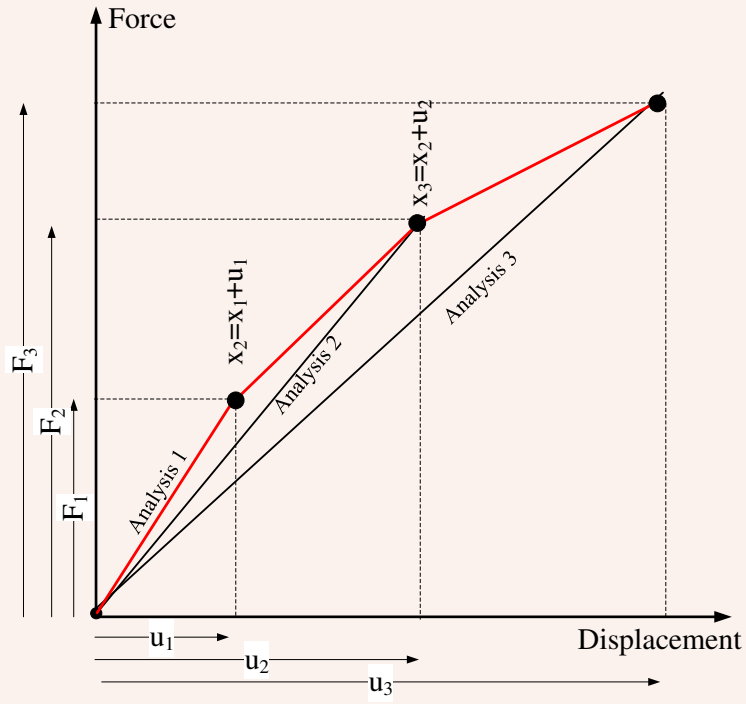


Figura 60.3: Determinazione del carico di indurimento senza matrice geometrica rigidità

```
% zero the matrices
k=zeros(6,6,5);K=zeros(6,6,5);Gamma=zeros(6,6,5);
% Structural properties mm^2, mm^4, and kN/mm^2
EE = 800;LL = 4000;II = 1e7;A=50;a=50;
% Number of iternations
nincr = 12;
%% Determine the buckling load analytically
initialdispl = LL/a;
Pcrit = EE*II*pi^2/(2*LL)^2;
  ID = [16 17 18;
        1  2  3;
        4  5  6;
        7  8  9;
        10 11 12;
        13 14 15];
  % elements going from left to right 1 2 3 are at the free end far right
  LM=[16 17 18  1  2  3;
      1  2  3  4  5  6;
      4  5  6  7  8  9;
      7  8  9 10 11 12;
      10 11 12 13 14 15];
  % Initialize matrices for storage
```

COPIA DI REVISIONE

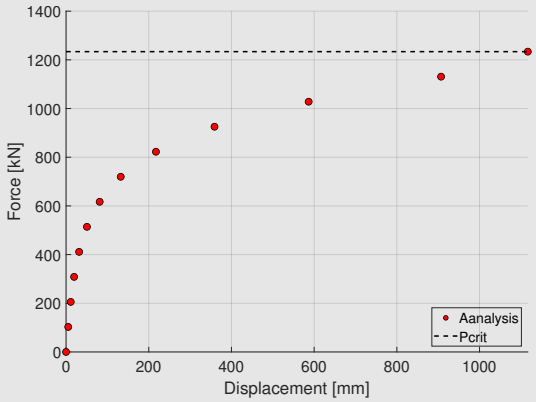
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
  u = zeros(6,2);
  %% Begin Iteration Analysis
  y=initialdispl;% itintial displacement at fee end
  theta = atan(y/LL);
  %% Goemetry and coordinates
  % Initialize global coordinates in meters
  coord = [0        0;
  LL/5    LL/5*tan(theta);
  2*LL/5  2*LL/5*tan(theta);
  3*LL/5  3*LL/5*tan(theta);
  4*LL/5  4*LL/5*tan(theta);
  LL      LL*tan(theta)];
  deltaP = Pcrit/nincr ;
  Pt(1)=0;delta(1)=0;
for iter=1:nincr
   for elem=1:5
      i=[coord(elem,1),coord(elem,2)];j=[coord(elem+1,1),coord(elem+1,2)
   ];
      [k(:,:,elem),K(:,:,elem),Gamma(:,:,elem)]=stiff(EE,II,A,i,j);
    end
   Kaug=zeros(18);
    for elem=1:5
       for r=1:6
          lr=abs(LM(elem,r));
          for c=1:6
            lc=abs(LM(elem,c));
            Kaug(lr,lc)=Kaug(lr,lc)+K(r,c,elem); % NO kg here +Kg(r,c,
   elem);
         end
      end
    end
   Ktt = Kaug(1:15,1:15); Pt(iter+1)=iter*deltaP;
   P=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -Pt(iter+1) 0 0 ];
   Displacements = inv(Ktt)*P';
   delta(iter+1)=Displacements(14,1);
   for inode=2:6 % loop from the second node (first is fixed) to the end
      for dof=1:2 % loop for x and y
          coord(inode, dof)=coord(inode,dof)+Displacements(ID(inode,dof)
   ,1);
      end
    end
end
%
xx(1)=0;xx(2)=max(delta);yy(1)=Pcrit;yy(2)=yy(1);
scatter(delta,Pt,60,'o','MarkerFaceColor','r','MarkerEdgeColor','k','
   LineWidth',1);
hold on
plot(xx,yy,'k--','LineWidth',2);grid
legend('Aanalysis','Pcrit','Location','SouthEast');
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
69 xlabel('Displacement [mm]');ylabel('Force [kN]');
70 xlim([0 inf]);
```



Vediamo che la curva di spostamento del carico si avvicina asintoticamente P_cr. Questo è stato raggiunto senza risolvere $\mathbf{K}_g$



COPIA DI REVISIONE

Capitolo 61

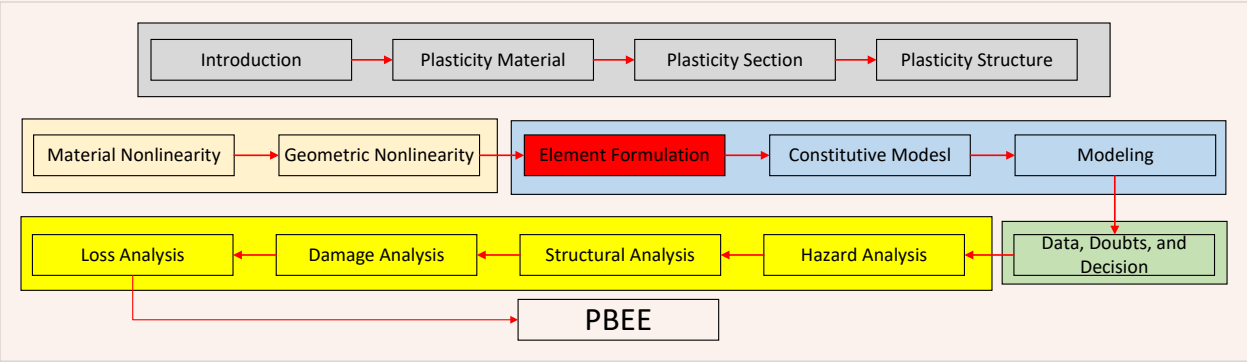
Non lineare; Formulazione degli elementi

Abstract

considerando che il regolamento (CEE) n. 50 ha coperto la derivazione dell'elemento del fascio elastico 1D nel contesto di un'analisi lineare semplificata, che si generalizzerà la derivation per l'analisi materiale non lineare. Partiremo con i semplici elementi di truss, e poi procedere alla colonna del fascio. Due formulazioni distinte saranno derivate una in base al metodo tradizionale di rigidità, e l'altra sulla base della flessibilità che si deve affrontare alcune limitazioni del primo. §56.3.2) saranno affrontate come quelle che permettono la graduale plastificazione della sezione trasversale; infine verranno coperti elementi di lunghezza zero e elementi di sezione. Ogni derivazione dell'elemento procederà attraverso i tre fondamentali: compatibilità, diritto costitutivo e equilibrio che culminano nella matrice di rigidità degli elementi. Infine, data la moltitudine di simboli, il capitolo si concluderà con una sezione dedicata alla notazione.

61.1 Introduzione 2031
61.2 Elemento di truss 2031
61.2.1 Sistema di coordinamento per elemento truss 2D 2033
61.2.2 Determinazione dello stato . 2034
61.3 formulazioni di elementi in schiuma-colonna 2034
61.3.1 Elemento di trave 2D a base di stiffness 2035
61.4 Sezione di livello/fibra 2046
61.4.1 Metodo di flessibilità elemento 2D trave-colonna 2050
61.4.2 Stiffa *vs.* elementi basati sulla flessibilità 2071
61.5 Formulazione di elementi 2D a lunghezza zero 2075
61.5.1 Sistema di coordinamento in elemento 2D a lunghezza zero 2075
61.5.2 Determinazione dello stato di elementi 2076
61.6 Elemento di sezione zero-lunghezza 2079
61.6.1 Matrice di afflizione 2079
61.6.2 Sistema coordinato 2080
61.6.3 Determinazione dello stato di elementi 2081
61.7 Integrazione numerica 2083
61.8 Forza di base 2083

COPIA DI REVISIONE



Dalla tesi di dottorato «An Optimized Computational Environment for Real Time Hybrid Simulation» by Kang, 2010.

61.1 Introduzione

1 Capitolo 50 derivava le matrici di rigidità dell'elemento degli elementi 1D nel contesto di un'analisi elastica lineare. Purtroppo la notazione qadottata (principalmente sottoscritti) non si è prestata alla generalizzazione all'analisi non lineare e alle sezioni di fibre che sono oggetto del presente capitolo.

2 Quindi, inizieremo rielaborando le matrici di rigidità dell'elemento più semplice: la tromba.

61.2 Elemento di truss

3 Iniziamo con la semplice considerazione di un elemento truss.

Matrice di afflizione

4 Nel contesto del metodo di rigidità classica, la derivazione della matrice di rigidezza truss è semplice.

5 Come con tutti gli elementi finiti, la rigidità matrice derivazione cerniere su tre requisiti.

1. **Compatibilità** di ceppi e spostamenti.

   Sviluppi rapporto generalizzato tra sezione dislocamento vettoriale $\mathbf{d}_s(x)$ e vet-

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

tore di spostamento nodale elemento $\overline{\mathbf{d}}_e$ si esprime attraverso le funzioni di interpolazione dello spostamento (funzioni dell'asse), $\mathbf{N}_d(x)$ as

$$\mathbf{d}_s(x) = \left\{ \begin{array}{c} u(x) \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} -\frac{x}{L}+1 & \frac{x}{L} \end{array} \right]}_{\mathbf{N}_d(x)} \cdot \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_{x1} \\ \overline{u}_{x2} \end{array} \right\}}_{\overline{\mathbf{d}}_e} \tag{61.1}$$

Deformazione di spostamenti: Sotto l'ipotesi che gli spostamenti siano piccoli, il vettore di deformazione sezione $\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$ è correlato al vettore di spostamento nodale dell'elemento da

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s(x) = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x(x) \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{array} \right]}_{\mathbf{B}_d(x)} \cdot \overline{\mathbf{d}}_e$$

dove $\mathbf{B}_d(x)$ è la matrice che riguarda lo spostamento a deformazione attraverso i derivati di $\mathbf{N}_d(x)$.

2. **Diritto costituzionale** si esprime come

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} N_x(x) \end{array} \right\}}_{\boldsymbol{\sigma}_s(x)} = \mathbf{k}_s(x) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$$

dove $\boldsymbol{\sigma}_s(x)$ è il sezione[1] forza vettoriale, e $\mathbf{k}_s(x)$ è il *sezione rigidità matrice*. Per analisi elastica lineare $\mathbf{k}_s(x)$ è semplicemente una scalare pari a $\mathbf{k}_s(x) = \left[\begin{array}{c} E(x) \cdot A(x) \end{array} \right]$ dove, $E(x)$ e $A(x)$ sono modulo elastico e area trasversale sezionale.

3. **Equilibrio** (nella sua forma debole) attraverso il principio del lavoro virtuale (slocamento), assumendo una distribuzione della forza che è in equilibrio, la relazione tra l'elemento vettore di forza nodale nel riferimento locale $\overline{\mathbf{f}}_e$ e la sezione vettoriale di deformazione è derivata dal principio di spostamento virtuale:

$$\underbrace{\delta\overline{\mathbf{d}}_e^T \cdot \overline{\mathbf{f}}_e}_{\text{External}} = \underbrace{\int_0^{L_e} \delta\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)^T . \boldsymbol{\sigma}_s(x)\, \mathrm{d}x}_{\text{Internal}}$$

La sostituzione porta a

$$\begin{aligned} \delta\overline{\mathbf{d}}_e^T \cdot \overline{\mathbf{f}}_e &= \int_0^{L_e} \delta\overline{\mathbf{d}}_e^T \cdot \mathbf{B}_d(x)^T \cdot \mathbf{k}_s(x) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(x)\, \mathrm{d}x \\ \Rightarrow \overline{\mathbf{f}}_e &= \int_0^{L_e} \mathbf{B}_d(x)^T \cdot \mathbf{k}_s(x) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(x)\, \mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^{L_e} \mathbf{B}_d(x)^T \cdot \mathbf{k}_s(x) \cdot \mathbf{B}_d(x)\, \mathrm{d}x}_{\overline{\mathbf{k}}_e} \cdot \overline{\mathbf{d}}_e \end{aligned}$$

[1] La nozione di sezione non è essenziale per comprendere la formulazione della matrice di rigidità dell'elemento truss, tuttavia viene introdotta in coerenza con la successiva formulazione del trave-colonna.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

or $\overline{\mathbf{f}}_e = \overline{\mathbf{k}}_e \cdot \overline{\mathbf{d}}_e$ La matrice di rigidità dell'elemento in riferimento locale è così data da

$$\overline{\mathbf{k}}_e = \int_0^{L_e} \mathbf{B}_d(x)^T \cdot \mathbf{k}_s(x) \cdot \mathbf{B}_d(x)\, \mathrm{d}x$$

61.2.1 Sistema di coordinamento per elemento truss 2D

6 Le forze e gli spostamenti dei nodali degli elementi sono espressi in relazione al riferimento globale, Fig. 61.1 $\mathbf{F}_e = \lfloor N_{X1},\ V_{Y1},\ N_{X2},\ V_{Y2} \rfloor^T$;
$\boldsymbol{\delta}_e = \lfloor u_{X1},\ v_{Y1},\ u_{X2},\ v_{Y2} \rfloor^T$

7 Le forze e gli spostamenti nodali elementari possono essere espressi anche in relazione al riferimento locale,

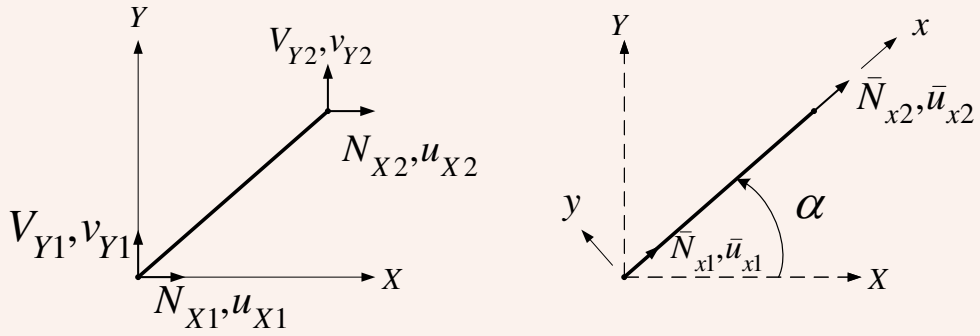
$$\overline{\mathbf{f}}_e = \lfloor \overline{N}_{x1},\ \overline{N}_{x2} \rfloor^T; \qquad \overline{\mathbf{d}}_e = \lfloor \overline{u}_{x1},\ \overline{u}_{x2} \rfloor^T$$

8 La matrice di rotazione che trasforma il riferimento globale al riferimento locale, è data da $\boldsymbol{\Gamma}_e$ tale

$$\overline{\mathbf{f}}_e = \boldsymbol{\Gamma}_e \cdot \mathbf{F}_e; \qquad \overline{\mathbf{d}}_e = \boldsymbol{\Gamma}_e \cdot \boldsymbol{\delta}_e; \qquad \mathbf{K}_e = \boldsymbol{\Gamma}_e^T \cdot \overline{\mathbf{k}}_e \cdot \boldsymbol{\Gamma}_e$$

dove, $\mathbf{K}_e$ è la matrice di rigidità dell'elemento nel riferimento globale e la matrix di rotazione è

$$\boldsymbol{\Gamma}_e = \begin{array}{c} \\ \overline{N}_{x1} \\ \overline{N}_{x2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} N_{X1} & V_{Y1} & N_{X2} & V_{Y2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \end{array}$$



(a) Global reference in an element

(b) Local reference in an element

Figura 61.1: Sistema di coordinamento per truffe 2D

COPIA DI REVISIONE

61.2.2 Determinazione dello stato

9 In termodinamica lo stato attuale del materiale può essere caratterizzato in modo unico da un insieme opportunamente selezionato di *variabili di stato*, cioè quello che dobbiamo prevedere gli stati futuri del sistema.

10 Nel contesto dell'analisi strutturale, la determinazione dello stato è il processo di determinare per una serie di spostamenti nodali degli elementi:

Matrice di rigidità tangente (§59.3.1.1) per applicare il metodo di Newton per risolvere il sistema non lineare in cui la matrice tangente rigidità corrisponde al giacobino (Eq. 59.2).

Forze interne per determinare le forze residue che dovrebbero essere quasi uguali a zero.

necessario per fare previsione per stato $n+1$ da stato n. Sarà discusso in §61.3.1.2 e §61.3.1.4.

61.3 formulazioni di elementi in schiuma-colonna

11 La formulazione della struttura non lineare con elementi in fibra può essere ottenuta utilizzando il metodo basato sulla rigidità (slocamento-basato) o il metodo flessibile-based (forza-base). Nella nostra copertura entrambi i metodi assumeranno che le deformazioni sono piccole e sezioni piane rimangono aeroplane durante la storia di carico.

12 Il metodo basato sulla rigidità assume funzioni di interpolazione dello spostamento lungo l'elemento, che richiede un numero sufficiente di elementi per ottenere una risposta accurata. D'altra parte, il metodo basato sulla flessibilità avrà funzioni di interpolazione forza lungo l'elemento e un numero più piccolo di elementi che per il metodo a base di rigidità sarà necessario per raggiungere lo stesso livello di accuratezza.

13 Tuttavia, la formulazione degli elementi nel metodo basato sulla flessibilità (capitolo 25) è più complesso di quello del metodo basato sulla rigidità a causa della richiesta del metodo di iterazione per ottenere ε da modelli costitutivi materiali di solito indicati come funzione $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, che è appropriato per il metodo basato sulla rigidità (Lee e Mosalam, 2004).

14 Inoltre, la formulazione degli elementi nel metodo basato sulla rigidità è più semplice e ampiamente utilizzato nel metodo convenzionale di elemento finito. In questo studio, sia la rigidità che i metodi basati sulla flessibilità saranno utilizzati per formulare il modello non lineare distribuito con la teoria del fascio di Bernoulli.

15 Gli elementi saranno caratterizzati da diverse sezioni trasversali situate nei punti di integrazione numerica, in particolare, dai punti di integrazione della regola quadratura Gauss-Legendre per il metodo basato sulla rigidità o dalla regola quadratura Gaus-Lobatto

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

per la flessibilità basata su Inoltre, ogni sezione avrà un numero adeguato di strati/fibre dove ognuno è sotto stato non assiale di stress.

61.3.1 Elemento di trave 2D a base di stiffness

16 Il metodo basato sulla rigidità presuppone che lo spostamento assiale sia descritto da una funzione di interpolazione polinomiale lineare mentre gli spostamenti trasversali sono modellati dalle funzioni di interpolazione polinomia cubica. La formulazione di elementi a trave 2D con base rigidezza consiste in tre principali requisiti:

Compatibilità

Slocamento Gli spostamenti di sezione sono determinati dagli spostamenti nodali dell'elemento attraverso le funzioni della forma. $\mathbf{d}_s(x)$ e vettore di spostamento nodale elemento $\overline{\mathbf{d}}_e$ può essere espresso come

$$\begin{aligned}\mathbf{d}(x) &= \left\{ \begin{array}{c} u(x) \\ v(x) \end{array} \right\} \\ &= \mathbf{N}_d(x) \cdot \underbrace{\lfloor\, u_{x1}^{(e)},\ v_{y1}^{(e)},\ \theta_{z1}^{(e)},\ u_{x2}^{(e)},\ v_{y2}^{(e)},\ \theta_{z2}^{(e)} \,\rfloor^T}_{\overline{\mathbf{d}}_e}\end{aligned}$$

dove $\mathbf{N}_d(x)$ è la matrice delle funzioni di interpolazione di spostamento.

$\mathbf{N}_d(x)$ è una matrice di funzioni lineari di interpolazione per spostamenti assiali e funzioni di interpolazione cubica per spostamenti trasversali:

$$\mathbf{N}_d(x) = \left[\begin{array}{cccccc} \psi_1(x) & 0 & 0 & \psi_2(x) & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1(x) & \phi_2(x) & 0 & \phi_3(x) & \phi_4(x) \end{array} \right]$$

con

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= -\tfrac{x}{L_e} + 1 & \qquad \psi_2(x) &= \tfrac{x}{L_e} \\ \phi_1(x) &= 2\tfrac{x^3}{{L_e}^3} - 3\tfrac{x^2}{{L_e}^2} + 1 & \qquad \phi_2(x) &= \tfrac{x^3}{{L_e}^2} - 2\tfrac{x^2}{L_e} + x \\ \phi_3(x) &= -2\tfrac{x^3}{{L_e}^3} + 3\tfrac{x^2}{{L_e}^2} & \qquad \phi_4(x) &= \tfrac{x^3}{{L_e}^2} - \tfrac{x^2}{L_e} \end{aligned}$$

Deformazione Sotto le ipotesi che gli spostamenti sono piccole e sezioni piane rimangono aeroplano, il vettore di deformazione sezione $\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$ è correlato al vettore di spostamento nodale dell'elemento da

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_s(x) &= \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x(x) \\ \phi_z(x) \end{array} \right\} \\ &= \mathbf{B}_d(x) \cdot \overline{\mathbf{d}}_e\end{aligned} \tag{61.2}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove $\mathbf{B}_d(x)$ è la matrice derivata dai derivati delle funzioni di interpolazione di spostamento.

$$\mathbf{B}_d(x) = \begin{bmatrix} \psi_1'(x) & 0 & 0 & \psi_2'(x) & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1''(x) & \phi_2''(x) & 0 & \phi_3''(x) & \phi_4''(x) \end{bmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} \psi_1'(x) &= -\frac{1}{L_e} & \psi_2'(x) &= \frac{1}{L_e} \\ \phi_1''(x) &= \frac{12x}{{L_e}^3} - \frac{6}{{L_e}^2} & \phi_2''(x) &= \frac{6x}{{L_e}^2} - \frac{4}{L_e} \\ \phi_3''(x) &= -\frac{12x}{{L_e}^3} + \frac{6}{{L_e}^2} & \phi_4''(x) &= \frac{6\,x}{{L_e}^2} - \frac{2}{L_e} \end{aligned}$$

Diritto costituzionale

La legge costitutiva della sezione è espressa come

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} N_x(x) \\ M_z(x) \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}_s(x)} = \mathbf{k}_s(x)\,\boldsymbol{\varepsilon}_s(x) \tag{61.3}$$

dove $\boldsymbol{\sigma}_s(x)$ è il vettore della forza di sezione, e $\mathbf{k}_s(x)$ è la matrice di rigidità sezione.

If $\mathbf{k}_s(x)$ non deriva da discorsi di strato/fibra della sezione trasversale, quindi per analisi elastica lineare $\mathbf{k}_s(x)$ è semplicemente uguale a

$$\mathbf{k}_s(x) = \begin{bmatrix} E(x)\cdot A(x) & 0 \\ 0 & E(x)\cdot I_z(x) \end{bmatrix} \tag{61.4}$$

dove, $E(x)$, $A(x)$e $I_z(x)$ sono modulo elastico, zona sezione e momento di inerzia su area della sezione.

Equilibrio

Presumendo una distribuzione della forza che è in equilibrio, il rapporto tra l'elemento nodale forza vettoriale nel riferimento locale $\bar{\mathbf{f}}_e$ e la sezione vettoriale di deformazione è derivata dal principio di spostamento virtuale:

$$\underbrace{\delta\bar{\mathbf{d}}_e^T \cdot \bar{\mathbf{f}}_e}_{\text{External}} = \underbrace{\int_0^L \delta\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{Internal}} \tag{61.5}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

che è una forma debole di equilibrio. Sostituzione di Eq. 61.2 Eq. 61.3 in Eq. 61.5 e poiché quest'ultimo deve essere tenuto per qualsiasi arbitrio $\delta\overline{\mathbf{d}}_e$ a

$$\begin{aligned}\delta\overline{\mathbf{d}}_e^T \cdot \overline{\mathbf{f}}_e &= \int_0^L \delta\overline{\mathbf{d}}_e^T \cdot \mathbf{B}_d(x)^T \cdot \mathbf{k}_s(x) \cdot \varepsilon_s(x) \underset{\cdot}{\mathrm{x}} \\ \overline{\mathbf{f}}_e &= \overline{\mathbf{k}}_e \cdot \overline{\mathbf{d}}_e \qquad (61.6)\\ \overline{\mathbf{k}}_e &= \int_0^L \mathbf{B}_d(x)^T \cdot \mathbf{k}_s(x) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(x)\, \mathrm{d}x \qquad (61.7)\end{aligned}$$

dove $\overline{\mathbf{k}}_e$ è la matrice di rigidità dell'elemento in riferimento locale.

61.3.1.1 Sistema di coordinamento in struttura a trave 2D con la teoria del fascio Bernoulli

17 Le forze e gli spostamenti dei nodali dell'elemento sono espressi in relazione al riferimento globale, Fig. 61.2(a) come: vettore di forza nodale elemento in riferimento globale

$$\mathbf{F}_e = \lfloor N_{X1},\ V_{Y1},\ M_{Z1},\ N_{X2},\ V_{Y2},\ M_{Z2} \rfloor^T$$

vettore di spostamento nodale elemento in riferimento globale

$$\boldsymbol{\delta}_e = \lfloor u_{X1},\ v_{Y1},\ \theta_{Z1},\ u_{X2},\ v_{Y2},\ \theta_{Z2} \rfloor^T$$

18 Inoltre, le forze e gli spostamenti dell'elemento nodale possono essere espressi in relazione al riferimento locale indicato nella figura. 61.2(b): vettore di forza nodale elemento in riferimento locale

$$\overline{\mathbf{f}}_e = \lfloor \overline{N}_{x1},\ \overline{V}_{y1},\ \overline{M}_{z1},\ \overline{N}_{x2},\ \overline{V}_{y2},\ \overline{M}_{z2} \rfloor^T$$

Vettore di spostamento nodale elemento in riferimento locale

$$\overline{\mathbf{d}}_e = \lfloor \overline{u}_{x1},\ \overline{v}_{y1},\ \overline{\theta}_{z1},\ \overline{u}_{x2},\ \overline{v}_{y2},\ \overline{\theta}_{z2} \rfloor^T$$

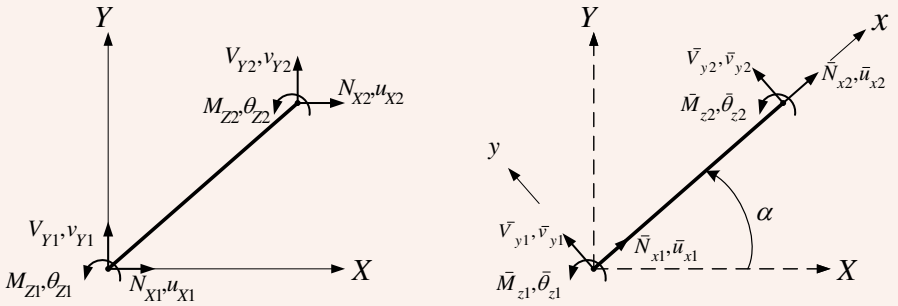
19 La matrice di rotazione che trasforma il riferimento globale Fig. 61.2(a) a riferimento locale Fig. 61.2b) è data da $\boldsymbol{\Gamma}_e$.

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{f}}_e &= \boldsymbol{\Gamma}_e \cdot \mathbf{F}_e \\ \overline{\mathbf{d}}_e &= \boldsymbol{\Gamma}_e \cdot \boldsymbol{\delta}_e \qquad (61.8)\\ \mathbf{K}_e &= \boldsymbol{\Gamma}_e^T \cdot \overline{\mathbf{k}}_e \cdot \boldsymbol{\Gamma}_e\end{aligned}$$

dove, $\mathbf{K}_e$ è la matrice di rigidità dell'elemento in riferimento globale.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Global reference in an element

(b) Local reference in an element

Figura 61.2: Forze interne e corrispondenti spostamenti nel sistema di coordinate globali e locali per l'elemento a fascio 2D basato sulla rigidità

20 La matrice di rotazione è definita.

$$\mathbf{\Gamma}_e = \begin{array}{c} \\ \overline{N}_{x1} \\ \overline{V}_{y1} \\ \overline{M}_{z1} \\ \overline{N}_{x2} \\ \overline{V}_{y2} \\ \overline{M}_{z2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} N_{X1} & V_{Y1} & M_{Z1} & N_{X2} & V_{Y2} & M_{Z2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

61.3.1.2 Determinazione dello stato

21 In un'analisi strutturale non lineare, il vettore di forza nodale ad ogni passo corrisponde a un vettore di forze nodali esterne incrementali alla struttura. Il vettore di spostamento nodale incrementale corrispondente della struttura è determinato da un vettore forza nodale esterno incrementale e i vettori di spostamento del nodali dell'elemento vengono estratti per ogni elemento. I vettori di spostamento nodale dell'elemento sono utilizzati per determinare i vettori della forza sezione interna.

22 Il processo di determinazione del vettore interno della forza nodale che corrisponde ai vettori di spostamento nodali dell'elemento è noto come determinazione dello stato. 61.3a:

Determinazione dello stato di sezione I vettori della forza di sezione interna sono calcolati da vettori di deformazione a sezione determinata da ciascun vettore di spostamento nodale elemento, Fig. 61.3a(c)

Determinazione dello stato di elementi Le matrici di rigidità tangente e gli elementi interni vettori forza nodale di ogni elemento sono determinati dai vettori della forza

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

sezione interna per ciascun elemento che a sua volta vengono calcolati da vettori di deformazione delle sezioni, Fig. 61.3a(b).

Determinazione dello stato della struttura Le matrici di rigidità tangente e i vettori interni della forza dell'elemento vengono assemblati per formare la matrice aggrettante di rigidezza $\mathbf{K}_S^{tan}$ e vettore forza nodale interna $\mathbf{P}_S^{int}$ ($\mathbf{P}_S^{int} = \mathbf{P}_t^{int} + \mathbf{P}_u^{int}$) della struttura, Fig. 61.3a(a). Dove, sottoscritto t significa dove le forze sono conosciute e sottoscritto u dove sono noti o zero spostamenti. t e u sono descritti in Sec. 59.

23 Una volta completata la determinazione dello stato della struttura, il vettore interno di forza nodale ($\mathbf{P}_{t,n}^{int}$) is rispetto con il vettore di forza nodale esterna applicata totale ($\mathbf{P}_{t,n}^{ext}$) e differenza ($\mathbf{P}_{t,n}^{R}$), è il vettore di forza nodale residuo che viene poi riapplicato alla struttura in un processo di soluzione iterativa fino a quando la convergenza (equilibrio) non è soddisfatta, Tabella 61.1.

Tabella 61.1: Determinazioni dello stato multilivello

Livello	Forza interna	Matrice di stiffamento tangente	"Spostamento"
Sezione	$\underbrace{\begin{Bmatrix} N_x(x) \\ M_z(x) \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}_s(x)} = \mathbf{k}_s(x)\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$	$\mathbf{k}_s(x) = \begin{bmatrix} E(x)A(x) & 0 \\ 0 & E(x)I_z(x) \end{bmatrix}$	$\boldsymbol{\varepsilon}_s(x) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x(x) \\ \phi_z(x) \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_d(x)\overline{\mathbf{d}}_e$
Elemento locale	$\overline{\mathbf{f}}_e^{int} = \int_0^{L_e} \mathbf{B}_{d,e}(x)^T \boldsymbol{\sigma}_{s,e}^{int}(x)\mathrm{d}x$	$\overline{\mathbf{k}}_e = \int_0^{L_e} \mathbf{B}_d(x)^T \mathbf{k}_s(x)\mathbf{B}_d(x)\mathrm{d}x$	$\boldsymbol{\delta}_e = \boldsymbol{\Gamma}_e^t \cdot \overline{\mathbf{d}}_e$
Elemento globale	$\mathbf{F}_{e,n}^{int,k} = \boldsymbol{\Gamma}_e^T \overline{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k}$	$\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} = \boldsymbol{\Gamma}_e^T \overline{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \boldsymbol{\Gamma}_e$	$\boldsymbol{\delta}_e$
Struttura	$\mathbf{P}_{t,n}^{int,k} = \Sigma_e \mathcal{A}_{b,e}^T \mathbf{F}_{e,n}^{int,k}$	$\mathbf{K}_{S,n}^{tan,k} = \Sigma_e \mathcal{A}_{b,e}^T \mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} \mathcal{A}_{b,e}$	$\boldsymbol{\delta}_e$

$\mathcal{A}_{b,e}^T$ è un operatore di montaggio della forza, e $\mathbf{K}_{S,n}^{tan,k}$ comprende le quattro sottomatrice, $\mathbf{K}_{tt,n}^{tan,k}$, $\mathbf{K}_{tu,n}^{tan,k}$, $\mathbf{K}_{ut,n}^{tan,k}$ e $\mathbf{K}_{uu,n}^{tan,k}$

24 La procedura di determinazione dello stato è semplice per un elemento 2D a base di rigidità-column. $\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$ sono determinati dal vettore di spostamento nodale dell'elemento $\overline{\mathbf{d}}_e$ come mostrato in Eq. 61.3. La sezione corrispondente tangente matrici di rigidità $\mathbf{k}_s^{tan}(x)$ e i vettori della forza di sezione interna $\boldsymbol{\sigma}_s^{int}(x)$ sono determinati dalla sezione legge costitutiva. L'elemento tangente rigidità matrici $\overline{\mathbf{k}}_e^{tan}$ sono ottenuti da Eq. 61.7, mentre l'elemento interno vettori di forza nodale $\overline{\mathbf{f}}_e^{int}$ sono determinati dal principio di spostamento virtuale:

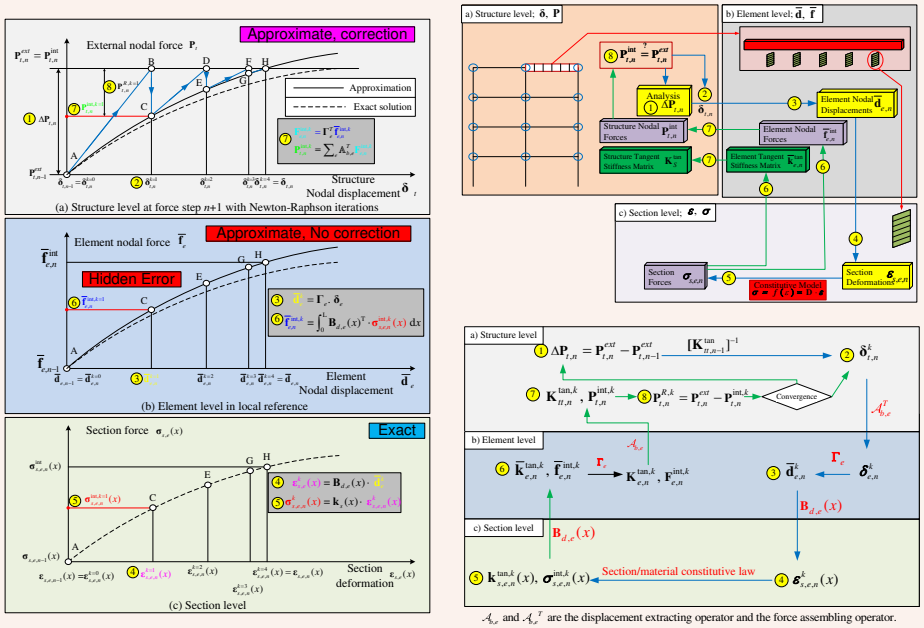
$$\overline{\mathbf{f}}_e^{int} = \int_0^L \mathbf{B}_d(x)^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s^{int}(x)\mathrm{d}x \tag{61.9}$$

25 È importante notare che questo metodo porta ad una risposta errata dell'elemento nel caso non lineare, illustrata dalla figura. 61.3a che mostra l'evoluzione della struttura, degli stati di elemento e sezione durante un vettore forza esterna incrementale a livelli liberi di libertà $\Delta\mathbf{P}_{t,n}$ che richiede diverse iterazioni k (Spacone, Ciampi e Filippou, 1992). Dove, sottoscritto n or $n-1$ è passo forza esterna corrente o precedente, superscript k is k^{th} iterazione e sottoscrizione t significa dove si conoscono le forze.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

26 Il metodo di iterazione Newton-Raphson viene utilizzato ai livelli globali della libertà. Ad ogni iterazione Newton-Raphson, il vettore di spostamento nodale incrementale a livello della struttura è determinato e i vettori di spostamento del nodo dell'elemento per ciascun elemento vengono estratti.



(a) (b)

Figura 61.3: Determinazione dello stato per il metodo basato sulla rigidità

27 Il mio sogno k^{th} Newton-Raphson iterazione, gli elementi nodali vettori di spostamento in riferimento locale $\overline{\mathbf{d}}_{e,n}$ del vettore di spostamento nodale $\mathbf{u}^k_{S,n}$ ($\mathbf{u}^k_{S,n} = \mathbf{u}^k_{t,n} + \mathbf{u}^k_{u,n}$) di gradi di libertà a livello della struttura sono determinati per ogni elemento. u significa dove sono conosciuti o zero spostamenti.

28 Usando Eq. 61.3 la sezione vettori di deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,n}(x)$ per ogni elemento è calcolato, questa è la prima approssimazione della determinazione dello stato dell'elemento, dal momento che $\mathbf{B}_d(x)$ è esatto solo nel caso elastico lineare di un membro prismatico.

29 Supponendo che la sezione costitutiva della legge sia esplicitamente nota, la sezione tangente rigidità matrici $\mathbf{k}^{tan,k}_{s,n}(x)$ e i vettori della forza di sezione interna $\boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,n}(x)$ sono facilmente calcolati da $\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,n}(x)$E poi, usando Eq. 61.7 Eq. 61.9 l'elemento rigidità matrici in riferimento locale $\overline{\mathbf{k}}^k_{e,n}$ e l'elemento interno vettori di forza nodale in riferimento locale $\overline{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n}$ sono determinati.

30 Da $\mathbf{B}_d(x)$ è solo approssimativo, sia i due integrali per la matrice di rigidità tangente elemento in riferimento locale e l'elemento interno nodale forza vettore nella resa di

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

riferimento locale risultati approssimativi. $\mathbf{B}_d(x)$ porta a una soluzione più rigida come mostrato in Fig. 61.3b (a) e b). Si noti che la curva denominata "Exact Solution" è solo esatta all'interno delle ipotesi della sezione costitutiva di legge e le approssimazioni cinematiche del problema come presupposto che deformazioni sono piccole e sezioni piane rimangono aeroplani durante la storia del carico.

31 Per superare gli errori numerici che derivano dal ravvicinamento delle $\mathbf{B}_d(x)$, gli analisti si rivolgono alla discretizzazione della rete fine della struttura, soprattutto nelle regioni di frame che subiscono comportamenti altamente non lineari, come le estremità dei membri. Questo è proprio il motivo per cui l'elemento basato sulla flessibilità darà risultati migliori.

Please note that this section contains floating elements (figures and/or tables) that need to be printed before the next one. As a result, you may encounter blank spaces or gaps in here.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

61.3.1.3 Errore di "Hidden'

32 un "hidden error"' si intrufola nella nostra soluzione, notando che il metodo di iterazione Newton-Raphson opera nel coordinate globali (livello strutturale) sistema, Fig. 61.3a, l'errore viene spiegato attraverso il seguente:

- Il mio sogno k^{th} iterazione: $\overline{\mathbf{d}}_{e,n} \rightarrow \mathbf{d}_{s,n}(x)$ (sezione di spostamenti da spostamenti nodali degli elementi in riferimento locale, Eq. 61.1) (③).
- Per ogni sezione: $\mathbf{d}_{s,n}(x) \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n}(x)$ (Deformazione di sezione da spostamenti degli elementi Eq, 61.2) (④), dal $\mathbf{B}_{d,e}(x)$ è esatto solo nella cassa elastica lineare.
- Presumendo che la sezione costitutiva della legge sia esplicitamente nota, $\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n}(x) \rightarrow \mathbf{k}^{tan,k}_{s,e,n}(x)$ Eq. 61.4 (matrice di rigidità del prodotto dalla deformazione della sezione); $\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n}(x) \rightarrow \boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}(x)$ (serie di forza sezione interna vettori dalla deformazione della sezione, Eq. 61.3 (⑤).
- Matrici di rigidità degli elementi $\overline{\mathbf{k}}^{k}_{e,n}$ in riferimento locale (Eq. 61.7) e gli elementi interni vettori di forza nodale nel riferimento locale $\overline{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n}$ (Eq. 61.6) sono determinati successivamente (⑥).
- Durante l'assemblaggio della matrice di rigidità globale, la matrice tangente di rigidezza e il vettore delle forze interne nodali sono determinati (⑦), prima che il residuo sia calcolato (⑧) per la convergenza.
- Da $\mathbf{B}_{d,e}(x)$ è solo approssimativo, allora elementi rigidità matrici $\overline{\mathbf{k}}^{k}_{e,n}$ (Eq. 61.7) e vettori di forza nodale dell'elemento interno $\overline{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n}$ (Eq. 61.6) sono anche approssimativi.

33 Il ravvicinamento delle legislazioni $\mathbf{B}_{d,e}(x)$ Si noti che la curva denominata "Exact Solution" è solo esatta all'interno delle ipotesi della sezione costitutiva e le approssimazioni cinematiche che le deformazioni sono piccole e piane rimangono aeroplani.

34 Per risolvere questo problema, possiamo o a) utilizzare una discorizzazione della maglia più fine della struttura, in particolare nelle regioni di cornice che subiscono comportamenti altamente non lineari, come le estremità dei membri; o b) uso elementi basati sulla flessibilità di seguito.

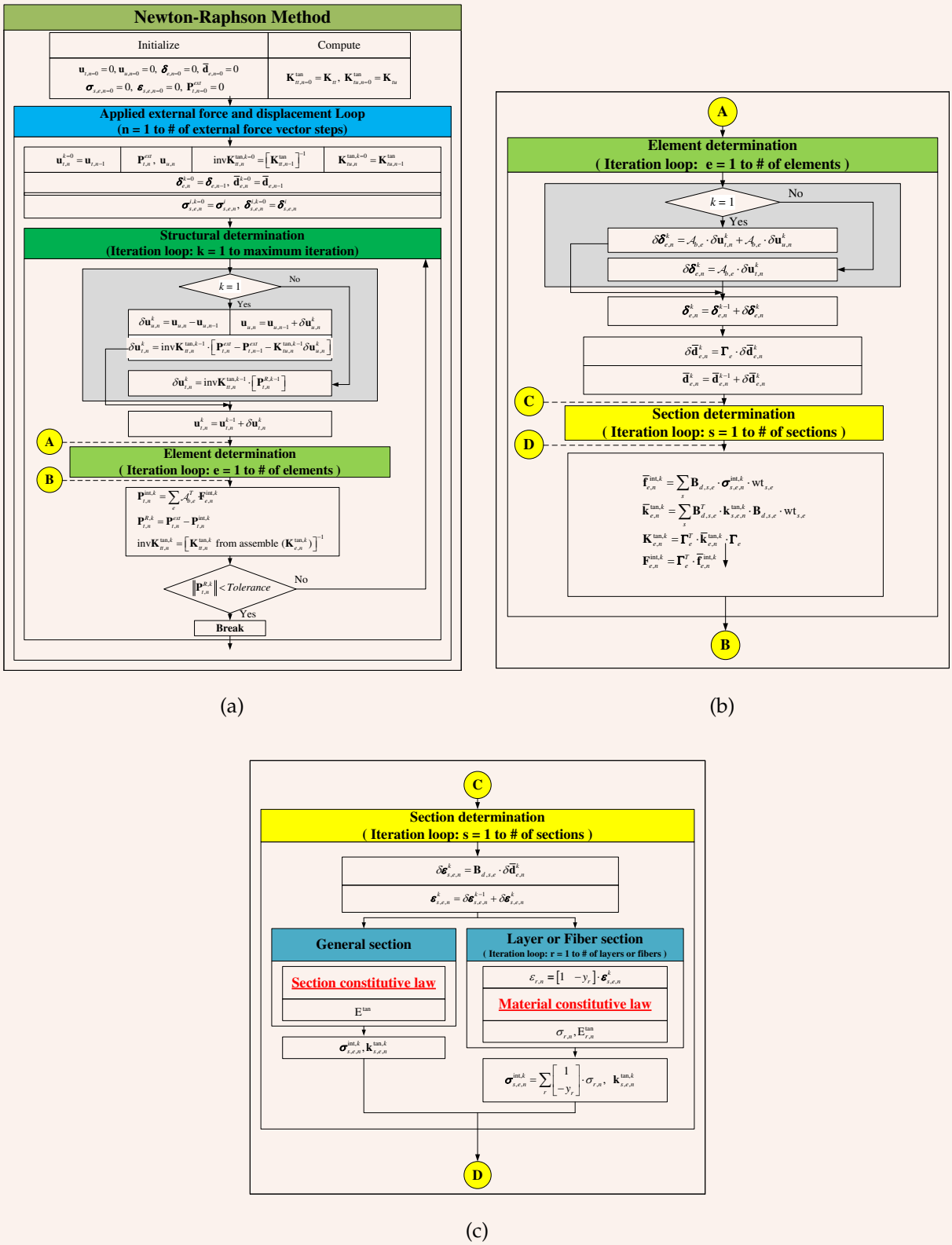
61.3.1.4 Analisi non lineare utilizzando il metodo basato sulla rigidità

35 Con riferimento a Fig. 61.4aFico. 61.4be Fig. 61.4c, esamineremo un unico passo del mehthod Newton-Raphson per l'analisi non lineare utilizzando il metodo basato sulla rigidità con la sezione legge costitutiva a causa di forza e controllo dello spostamento. 59. Procedura di sezione in fibra o strato in Fig. 61.4c sarà descritto in Sec. 61.4.

Passo 1: Compiti lo spostamento nodale incrementale $\delta\mathbf{u}_{t,n}$ e totale spostamento nodale $\mathbf{u}_{t,n}$ inizialmente, l'iterazione è iniziata da Eq. 61.10 e $k = 1$.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) (b)

(c)

Figura 61.4: Grafico di flusso dell'analisi non lineare utilizzando il metodo basato sulla ~~rigidità~~

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

If $k = 1$,

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{u}^k_{u,n} &= \mathbf{u}_{u,n} - \mathbf{u}_{u,n-1}\\ \mathbf{u}_{u,n} &= \mathbf{u}_{u,n-1} + \delta\mathbf{u}^k_{u,n}\\ \delta\mathbf{u}^k_{t,n} &= [\mathbf{K}^{tan,k-1}_{tt,n}]^{-1}\cdot[\mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \mathbf{P}^{ext}_{t,n-1} - \mathbf{K}^{tan,k-1}_{tu,n}\delta\mathbf{u}^k_{u,n}]\\ \mathbf{u}^k_{t,n} &= \mathbf{u}^{k-1}_{t,n} + \delta\mathbf{u}^k_{t,n}\end{aligned} \tag{61.10}$$

altrimenti, per iterazione usiamo

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{R,k}_{t,n} &= \mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \mathbf{P}^{int,k}_{t,n}\\ \delta\mathbf{u}^{k+1}_{t,n} &= [\mathbf{K}^{tan,k}_{tt,n}]^{-1}\cdot\mathbf{P}^{R,k}_{t,n}\\ \mathbf{u}^{k+1}_{t,n} &= \mathbf{u}_{t,n-1} + \Delta\mathbf{u}^{k+1}_{t,n} = \mathbf{u}^k_{t,n} + \delta\mathbf{u}^{k+1}_{t,n}\end{aligned} \tag{61.11}$$

dove, superscript k è il contatore di iterazione, $\mathbf{P}^R_t$ il vettore di forza nodale residuo a livello strutturale, $\Delta\mathbf{u}^{k+1}_{t,n}$ il vettore di spostamento incrementale totale dall'ultimo passo convergente, e $\delta\mathbf{u}^{k+1}_n$ l'ultimo vettore di spostamento incrementale.

In Eq. 61.10, è necessario descrivere il controllo della forza/slocamento spiega e la matrice di rigidità aumentata $\mathbf{K}_S$ con $\mathbf{K}_{tt}$, $\mathbf{K}_{tu}$, $\mathbf{K}_{ut}$e $\mathbf{K}_{uu}$ in dettaglio. Viene mostrato in Sec. 44.2. dove, la matrice di rigidità aumentata è diviso in due gruppi con il rispettivo sottoscritto 'u" dove sono noti gli spostamenti o zero, etDove sono conosciute le forze.

Fase 2: Si accaparra su tutti gli elementi e determina il loro stato.

Passo 3: Determinare il vettore di spostamento nodale dell'elemento.

If $k = 1$,

$$\delta\boldsymbol{\delta}^k_{e,n} = \mathbf{A}_{b,e}\cdot\delta\mathbf{u}^k_{t,n} + \mathbf{A}_{b,e}\cdot\delta\mathbf{u}^k_{u,n}$$

altrimenti, per iterazione usiamo

$$\delta\boldsymbol{\delta}^k_{e,n} = \mathbf{A}_{b,e}\cdot\delta\mathbf{u}^k_{t,n}$$

dove, $\mathbf{A}_{b,e}$ è l'operatore di estrazione dello spostamento.

$$\boldsymbol{\delta}^k_{e,n} = \boldsymbol{\delta}^{k-1}_{e,n} + \delta\boldsymbol{\delta}^k_{e,n}$$

dove, $\boldsymbol{\delta}^0_{e,n}$ corrisponde a $\boldsymbol{\delta}_{e,n-1}$.

$$\begin{aligned}\delta\overline{\mathbf{d}}^k_{e,n} &= \boldsymbol{\Gamma}_e\cdot\delta\boldsymbol{\delta}^k_{e,n}\\ \overline{\mathbf{d}}^k_{e,n} &= \overline{\mathbf{d}}^{k-1}_{e,n} + \delta\overline{\mathbf{d}}^k_{e,n}\end{aligned}$$

dove, $\overline{\mathbf{d}}^0_{e,n}$ corrisponde a $\overline{\mathbf{d}}_{e,n-1}$.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Passo 4: Avviare la determinazione dello stato della sezione attraverso l' looping sulle sezioni dell'elemento. Il numero totale di sezione può variare dall'elemento all'elemento, pertanto il numero totale delle sezioni in un elemento è nIp_e. Dipende dal numero di punti di integrazione da Gauss Legendre regola quadratura.

Passo 5: Per la determinazione dello stato di sezione, dobbiamo prima dividere la sezione in sezione generale e sezione fibra come descritto a Sec. 61.4. Qui consideriamo solo la sezione generale. La determinazione dello stato di ogni sezione è eseguita in loop i. i significa i^{th} sezione.

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{i,k}_{s,e,n} = \mathbf{B}^{i}_{d,e} \cdot \delta\overline{\mathbf{d}}^{k}_{e,n}$$

dove, $\mathbf{B}^{i}_{d,e}$ è la matrice derivata dalle funzioni di interpolazione dello spostamento a i^{th} sezione in e^{th} elemento.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{i,k}_{s,e,n} = \boldsymbol{\varepsilon}^{i,k-1}_{s,e,n} + \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{i,k}_{s,e,n}$$

dove, $\boldsymbol{\varepsilon}^{i,0}_{s,e,n}$ corrisponde a $\boldsymbol{\varepsilon}^{i}_{s,e,n-1}$.

Passo 6: Determinare la sezione tangente rigidità matrice e il vettore interno forza sezione. Se si presume che la sezione costitutiva della legge sia esplicitamente conosciuta, $\mathbf{k}^{tan,i,k}_{s,e,n}$ e $\boldsymbol{\sigma}^{int,i,k}_{s,e,n}$ sono determinati da $\boldsymbol{\varepsilon}^{i,k}_{s,e,n}$. Tuttavia, in sezione elastica, dobbiamo non calcolare $\mathbf{k}^{tan,i,k}_{s,e,n}$ di nuovo come è identico alla matrice della rigidità sezione iniziale $\mathbf{k}^{i}_{s,e}$.

Se abbiamo una sezione elastica,

$$\mathbf{k}^{tan,i,k}_{s,e,n} = \mathbf{k}^{i}_{s,e} \tag{61.12}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{int,i,k}_{s,e,n} = \mathbf{k}^{tan,i,k}_{s,e,n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{i,k}_{s,e,n} \tag{61.13}$$

dove, $\mathbf{k}^{tan,i,k}_{s,e,n}$ è la sezione tangente rigidità matrice a k^{th} iterazione.

Passo 7: Determinare l'elemento interno vettore forza nodale e la matrice tangente rigidità. 61.9 Eq. 61.7, noi decidiamo $\overline{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n}$ e $\overline{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n}$.

$$\overline{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n} = \sum_{(i,e)} \mathbf{B}^{i}_{d,e}{}^{T} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{int,i,k}_{s,e,n}\, \mathrm{wt}^{i}_{e}$$

dove, wt^{i}_{e} è il coefficiente di peso associato al giacobino i^{th} sezione e^{th} elemento.

$$\overline{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n} = \sum_{(i,e)} \mathbf{B}^{i}_{d,e}{}^{T} \cdot \mathbf{k}^{tan,i,k}_{s,e,n} \cdot \mathbf{B}^{i}_{d,e} \cdot \mathrm{wt}^{i}_{e} \tag{61.14}$$

dove, $\overline{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n}$ è l'elemento tangente matrice di rigidità in riferimento locale.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Da Eq. 61.8, noi decidiamo $\mathbf{F}_{e,n}^{int,k}$ e $\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k}$.

$$\mathbf{F}_{e,n}^{int,k} = \mathbf{\Gamma}_e^T \cdot \bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k}$$
$$\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} = \mathbf{\Gamma}_e^T \cdot \bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \mathbf{\Gamma}_e$$

Passo 8: Determinare il vettore della forza nodale interna e la matrice di rigidità tangente aumentata.

$$\mathbf{P}_{t,n}^{int,k} = \sum_{(e)} \mathbf{A}_{b,e}{}^T \cdot \mathbf{F}_{e,n}^{int,k}$$
$$\mathbf{K}_{S,n}^{tan,k} = \sum_{(e)} \mathbf{A}_{b,e}{}^T \cdot \mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} \cdot \mathbf{A}_{b,e}$$

dove, $\mathbf{A}_{b,e}{}^T$ è l'operatore di montaggio della forza, e $\mathbf{K}_{S,n}^{tan,k}$ è composto da $\mathbf{K}_{tt,n}^{tan,k}$, $\mathbf{K}_{tu,n}^{tan,k}$, $\mathbf{K}_{ut,n}^{tan,k}$e $\mathbf{K}_{uu,n}^{tan,k}$.

Passo 9: Compiti il vettore di forza nodale residuo a livello strutturale da Eq. 61.11. In seguito soddisfiamo la convergenza con il vettore forza nodale residuo.

Convergenza di controllo:

- If $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ è all'interno della tolleranza specificata, andare al prossimo incremento di forza.
- If $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ non è all'interno della tolleranza specificata, k è aggiornato a $k+1$ e i successivi iniziati di iterazione Newton-Raphson. Eq. 61.11 in **Passo 1** attraverso **Passo 9** si ripetono fino a quando la convergenza non avviene al livello della struttura.

61.4 Sezione di livello/fibra

36 Finora abbiamo assunto che una sezione è caratterizzata da un rapporto di curvatura del momento, cioè quando il momento raggiunge il momento della plastica/figlio, sezione intera plastificare. Tuttavia, questo è solo un ravvicinamento delle legislazioni, come in realtà c'è plastificazione graduale partendo dalle fibre esterne, e questa zona di plastificazione si diffonde gradualmente verso l'interno fino a quando tutta la sezione diventa infine plastica.

37 Pertanto, il miglior modello per l'analisi basata sulla plasticità (di elementi in acciaio o cemento armato) è quello basato su sezioni di strato/fibra (§56.3.2) come può catturare la

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

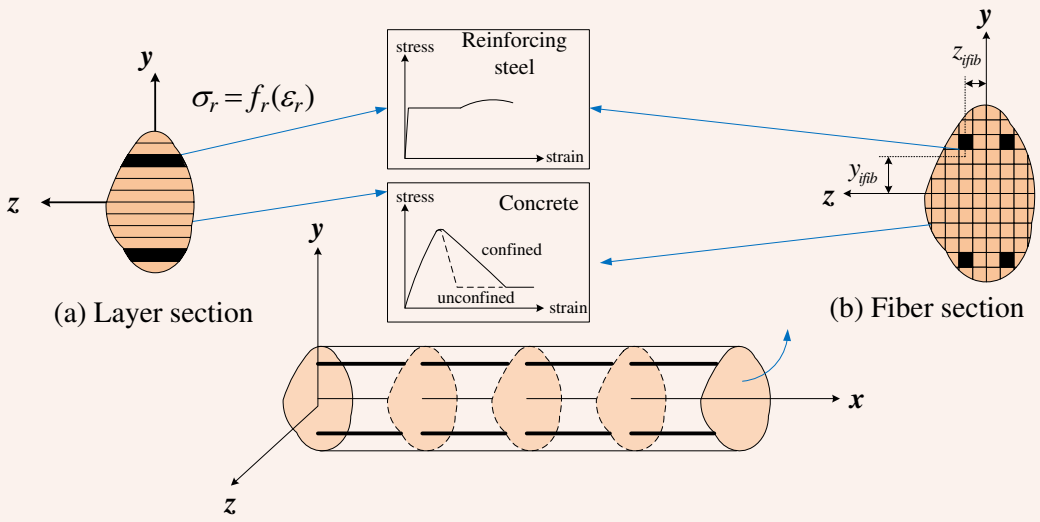


Figura 61.5: Sezione di fibre-distribuzione delle sezioni di controllo e suddivisione della sezione in fibre

graduale plastificazione della sezione trasversale; nella sezione strato/fibra, la sezione è suddivisa in strati longitudinali/fibre, come mostrato nella figura. 61.5.

38 Le caratteristiche geometriche degli strati/fibre sono la sua posizione nel locale y, z sistema di riferimento e la zona strato/fibra $A_{ir}(x)$, dove sottoscritto ir is ir^{th} strato/fibra. La relazione costitutiva della sezione non è esplicitamente specificata, ma deriva dall'integrazione della risposta degli strati/fibre, basata sulla relazione di stress-strain uniaxial del particolare materiale Fig.61.5.

39 Lo strato/fibra non può essere determinato dalla forza assiale e dal momento di piegatura della sezione, poiché ci sono solo due equazioni di equilibrio nel caso di flessione uniaxial per tre o più stress sconosciuti. Una possibile soluzione è quella di assumere una distribuzione dello stress all'interno della sezione, ma il problema è, quindi posticipato alla fase di determinazione dello stato strato/fibra dell'algoritmo, dal momento che le relazioni tra strati e fibre di sforzo-strain sono tipicamente espresse come funzioni esplicite di tensione.

40 Le sollecitazioni e le rigidità del livello/fibra sono così determinate dalle relazioni tra strato e fibra di stress. $\boldsymbol{\sigma}_s^{int}(x)$ sono calcolati dalla distribuzione dello stress strato/fibra e la sezione tangente matrici rigidità $\mathbf{k}_s^{tan}(x)$ sono assemblati da strati/fibra tangenti rigidità.

41 In definitiva, il nostro obiettivo rimane la derivazione di $\mathbf{k}_{s,e}^{tan}(x)$ tale

$$\left\{ \begin{array}{c} N(x) \\ M_z(x) \end{array} \right\} = \mathbf{k}_{s,e}^{tan}(x) \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon(x) \\ \phi_z(x) \end{array} \right\}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

42 Ignorando la deformazione trasversale della cesoia, e quindi supponendo una distribuzione lineare di deformazione (trave Euler-Bernouilli)Ma un *comportamento non lineare di stress-stain*, la distribuzione dello stress è

$$\sigma_t(x) = \frac{N_x(x)}{A(x)} \pm \frac{M_z(x)}{I_z(x)} y$$

43 A questo punto, Fig. 61.6, dallo spostamento nodale, possiamo determinare le deformazioni della sezione (sforzo assiale, $\varepsilon(x)$ e curvatura, $\phi(x)$) (e quindi la distribuzione lineare della deformazione), e poiché abbiamo un materiale non lineare, *la posizione esatta dell'asse neutro non è ancora nota*e ogni elevazione di fibra abbiamo un diverso $E_r^{tan}(x)$. r è il sottoscritto di fibra.

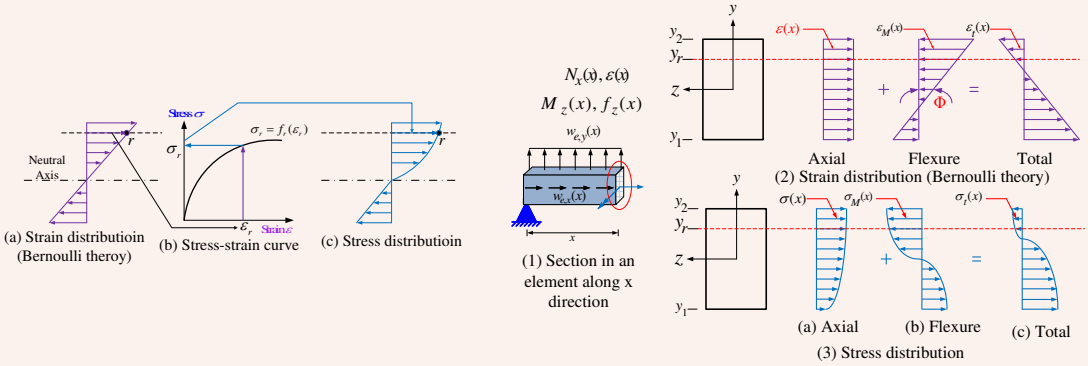


Figura 61.6: Distribuzione di stress trasversale non lineare

44 Noi sappiamo ε e Φ, deve determinare N e M, ci saranno due serie di termini: primario e secondario:

Termini primari sono quelli dovuti a pura assalizione e flessore:

Assilico a causa di $\sigma(x)$ è semplicemente determinato da

$$N_x(x) = \int_{-y_1}^{y_2} \sigma(x) dA = \int_{-y_1}^{y_2} \underbrace{E_r^{tan}(x) \cdot \varepsilon(x)}_{\sigma(x)} dA \simeq \sum_r E_r^{tan}(x) \cdot A_r(x) \cdot \varepsilon(x)$$

Flessibili a causa di $\sigma_M(x)$ è considerato il prossimo, e ancora una volta la

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

settimana un'espressione di $(M(x))$ in termini di curvatura e $E_r^{tan}(x)$e ricordando che $I = \int y^2 dA$ e $\sigma_M(x)_{@y_r} = E_r^{tan}(x) \cdot \phi_z(x) \cdot y_r$

$$M_z(x) = \int_{-y_1}^{y_2} \sigma_M(x) \cdot y dA = \int_{-y_1}^{y_2} \underbrace{E_r^{tan}(x) \cdot \underbrace{\phi_z(x) \cdot y}_{\varepsilon}}_{\sigma} \cdot y dA$$

$$= \phi_z(x) \int_{-y_1}^{y_2} E_r^{tan}(x) \cdot y^2 dA$$
$$\simeq \sum_r E_r^{tan}(x) \cdot A_r(x) \cdot y_r^2 \cdot \phi_z(x)$$

Termini di secondo piano sono dovuti a *accoppiamento* e si tradurrà in non zero off diagonale si nota che questo annulla in analisi elastiche lineari.

Forza assiale a causa della curvatura perché non c'è ragione per cui la distribuzione di stress flexural non lineare produrrà necessariamente una somma delle forze pari a zero.

$$dN_x(x) = -E_r^{tan}(x) \cdot \varepsilon_M(x) dA = -E_r^{tan}(x) \cdot \phi_z(x) \cdot y dA$$
$$N_x(x) = -\int_{-y_1}^{y_2} E_r^{tan}(x) \cdot \phi_z(x) \cdot y dA$$
$$\simeq -\sum_r E_r^{tan}(x) \cdot A_r(x) \cdot y_r \cdot \phi_z(x)$$

dove la tensione $(\varepsilon_M(x))$ si ottiene dalla curvatura $(\phi_z(x))$.

Momento dovuto a tensione assiale perché non c'è ragione per cui la posizione dell'asse neutro è effettivamente corretta, con conseguente sommazione di momento pari a zero.

$$dM_z(x) = -E_r^{tan}(x) \cdot \varepsilon(x) \cdot y \cdot dA \tag{61.15}$$
$$M_z(x) = -\int_{-y_1}^{y_2} E_r^{tan}(x) \cdot \varepsilon(x) \cdot y dA \tag{61.16}$$
$$\simeq -\sum_r E_r^{tan}(x) \cdot A_r(x) \cdot y_r \cdot \varepsilon(x) \tag{61.17}$$

45 Riassumendo una matrice, $\mathbf{k}_{s,e}^{tan}(x)$ prende il modulo:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}}_{\sigma_S} = \underbrace{\sum_{ir} \varepsilon(x) \kappa(x) \begin{bmatrix} N_x(x) & M_z(x) \\ E_{ir}^{tan}(x) \cdot A_{ir}(x) & -E_{ir}^{tan}(x) \cdot A_{ir}(x) \cdot y_{ir} \\ -E_{ir}^{tan}(x) \cdot A_{ir}(x) \cdot y_{ir} & E_{ir}^{tan}(x) \cdot A_{ir}(x) \cdot y_{ir}^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}_s^{tan,n}} \begin{Bmatrix} \varepsilon(x) \\ \phi_z(x) \end{Bmatrix} \tag{61.18}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

61.4.1 Metodo di flessibilità elemento 2D trave-colonna

46 Gli elementi 2D a base di flessibilità sono gli elementi finiti "non conformisti" poiché producono la matrice della flessibilità dell'elemento piuttosto che la matrix classica della rigidità, e si basano sulle equazioni dell'equilibrio anziché su quelle presupposte. campo di spostamento. Tuttavia, offrono alcuni vantaggi importanti.

47 Derivamo la matrice di flessibilità dell'elemento $\tilde{\mathbf{c}}_e$ senza modalità rigide del corpo e poi invertilo per ottenere la matrice di rigidità dell'elemento corrispondente $\tilde{\mathbf{k}}_e$ senza modalità rigide del corpo (§46.4.2). Questo è particolarmente interessante in quei casi in cui le formulazioni di metodo basate sulla rigidità sono approssimative e la flessibilità-basata formulazioni dei metodi sono esatte, come una sezione che varia lungo l'elemento ed elementi con non linearità materiale.

48 Useremo il principio del lavoro virtuale complementare attraverso i soliti tre passaggi principali.

Equilibrio Iniziamo con la forte forma dell'equazione di equilibrio, Fig. 61.7:

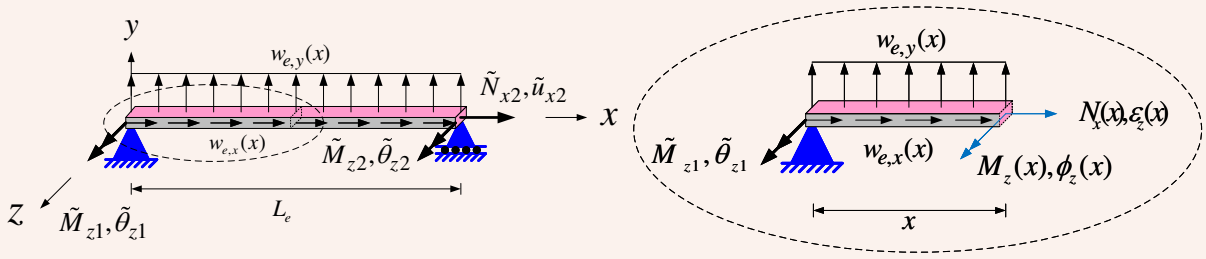


Figura 61.7: Elemento telaio 2D senza modalità rigide del corpo

$$\underbrace{\mathbf{w}_e(x)}_{\text{External}} + \underbrace{\mathbf{L}_f^T \boldsymbol{\sigma}_s(x)}_{\text{Internal}} = \mathbf{0}$$
$$\begin{Bmatrix} w_x^{(e)}(x) \\ w_y^{(e)}(x) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 \\ 0 & \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x(x) \\ M_z(x) \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \tag{61.19}$$

dove, $\mathbf{w}_e(x)$ è il vettore di forza dell'elemento esterno e $\mathbf{L}_f$ è l'operatore differenziale di forza.

Noi presumiamo che non ci sia il vettore di forza dell'elemento esterno, cioè $\mathbf{w}_e(x) = \mathbf{0}$. La selezione delle funzioni di interpolazione forza, $\mathbf{N}_f(x)$ risulta dall'esigenza che

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

l'equilibrio, come espresso in Eq. 61.19, deve essere soddisfatto nella forma forte. Così, per il fascio Euler-Bernoulli:

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 \\ 0 & \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x(x) \\ M_z(x) \end{Bmatrix} = \mathbf{0}$$

che produce

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}N_x(x)}{\mathrm{d}x} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2 M_z(x)}{\mathrm{d}x^2} &= 0 \end{aligned}$$

e così

$$\begin{aligned} N_x(x) &= c_3 \\ M_z(x) &= c_1 x + c_2 \end{aligned} \tag{61.20}$$



Figura 61.8: Firma convenzione sulla forza di sezione

Applicare la condizione di confine da Fig. 61.7 con convenzione di segno sulla forza della sezione, Fig. 61.8,

$$\begin{aligned} N_x(L) &= N_{x2} \\ M_z(0) &= -M_{z1} \\ M_z(L) &= M_{z2} \end{aligned}$$

Otteniamo:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{M_{z1} + M_{z2}}{L_e} \\ c_2 &= -M_{z1} \\ c_3 &= N_{x2} \end{aligned} \tag{61.21}$$

Sostituire Eq. 61.21 in Eq. 61.20,

$$\begin{aligned} N_x(x) &= N_{x2} \\ M_z(x) &= \left(\frac{x}{L_e} - 1\right) M_{z1} + \frac{x}{L_e} M_{z2} \end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

or

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} N_x(x) \\ M_z(x) \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}_s(x)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{x}{L_e} - 1 & \frac{x}{L_e} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}_f(x)} \underbrace{\begin{Bmatrix} M_{z1} \\ M_{z2} \\ N_{x2} \end{Bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{f}}_e} \tag{61.22}$$

dove, $\tilde{\mathbf{f}}_e$ è il vettore di forza nodale dell'elemento senza modalità rigide del corpo.

Infine, da Eq. 61.22, estraiamo la matrice delle funzioni di interpolazione forza.

$$\mathbf{N}_f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{x}{L_e} - 1 & \frac{x}{L_e} & 0 \end{bmatrix}$$

Diritto costituzionale L'inverso della relazione costitutiva classica utilizzata nel metodo a base di rigidità mostrato in Eq. 61.5 è ora data da:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s(x) = \mathbf{c}_s(x) \cdot \boldsymbol{\sigma}_s(x) \tag{61.23}$$

dove, $\mathbf{c}_s(x)$ è la matrice di flessibilità della sezione. Se $\mathbf{c}_s(x)$ non è derivato dalla sezione fibra che viene discusso a Sec. 61.4, poi per analisi elastica lineare $\mathbf{c}_s(x)$ è semplicemente.

$$\mathbf{c}_s(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{E(x) \cdot A(x)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{E(x) \cdot I_z(x)} \end{bmatrix}$$

Compatibilità Otteniamo l'equazione sulla compatibilità nella forma debole attraverso il principio del lavoro virtuale complementare (al contrario di un lavoro virtuale per il metodo basato sulla rigidità).

$$\underbrace{\delta \tilde{\mathbf{f}}_e{}^T \tilde{\mathbf{d}}_e}_{\text{External}} = \underbrace{\int_0^L \delta \boldsymbol{\sigma}_s(x)^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(x) \mathrm{d}x}_{\text{Internal}} \tag{61.24}$$

dove, e $\tilde{\mathbf{d}}_e$ è il vettore di spostamento nodale dell'elemento senza modalità rigide del corpo.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Sostituire Eq. 61.22 Eq. 61.23 in Eq. 61.24 e poiché quest'ultimo deve essere tenuto per qualsiasi arbitaria $\delta\tilde{\mathbf{f}}_e$, noi otteniamo

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{\mathbf{f}}_e{}^T\tilde{\mathbf{d}}_e &= \int_0^L \delta\tilde{\mathbf{f}}_e{}^T \cdot \mathbf{N}_f(x)^T \cdot \mathbf{c}_s(x) \cdot \boldsymbol{\sigma}_s(x)\, \mathrm{d}x \\
\tilde{\mathbf{d}}_e &= \int_0^L \mathbf{N}_f(x)^T \cdot \mathbf{c}_s(x) \cdot \boldsymbol{\sigma}_s(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\int_0^L \mathbf{N}_f(x)^T \cdot \mathbf{c}_s(x) \cdot \mathbf{N}_f(x)\, \mathrm{d}x}_{\tilde{\mathbf{c}}_e} \cdot \tilde{\mathbf{f}}_e \\
\tilde{\mathbf{d}}_e &= \tilde{\mathbf{c}}_e \cdot \tilde{\mathbf{f}}_e
\end{aligned} \tag{61.25}$$

La matrice di flessibilità dell'elemento senza modalità rigide del corpo in riferimento locale è così data da:

$$\tilde{\mathbf{c}}_e = \int_0^L \mathbf{N}_f(x)^T \cdot \mathbf{c}_s(x) \cdot \mathbf{N}_f(x)\, \mathrm{d}x \tag{61.26}$$

e la matrice di rigidità dell'elemento corrispondente senza modalità rigide del corpo in riferimento locale è

$$\tilde{\mathbf{k}}_e = [\tilde{\mathbf{c}}_e]^{-1}$$

61.4.1.1 Sistema coordinato in elementi 2D a raggi-colo basati sulla flessibilità con la teoria del fascio di Bernoulli

49 Contrariamente al sistema di riferimento del metodo basato sulla rigidità in Fig. 61.2, dobbiamo considerare forze e spostamenti in riferimento locale con e senza modalità rigide del corpo in Fig. 61.9.

50 vettore di forza nodale elemento senza modalità rigide del corpo in riferimento locale sono

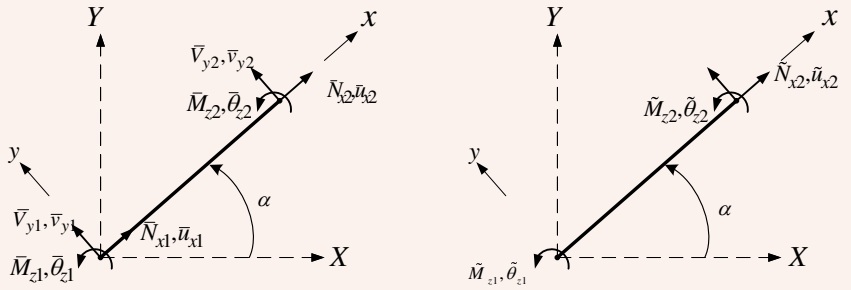
$$\tilde{\mathbf{f}}_e = \lfloor \tilde{M}_{z1},\ \tilde{M}_{z2},\ \tilde{N}_{x2} \rfloor^T$$

e l'elemento nodale spostamento vettoriale senza rigide modalità corporea in riferimento locale sono dati da

$$\tilde{\mathbf{d}}_e = \lfloor \tilde{\theta}_{z1},\ \tilde{\theta}_{z2},\ \tilde{u}_{x2} \rfloor^T$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Local reference in an element

(b) Local reference in an element without rigid body modes

Figura 61.9: Forze interne e spostamenti corrispondenti nel sistema di coordinate locale con o senza corpo rigido per l'elemento a fascio 2D basato sulla flessibilità

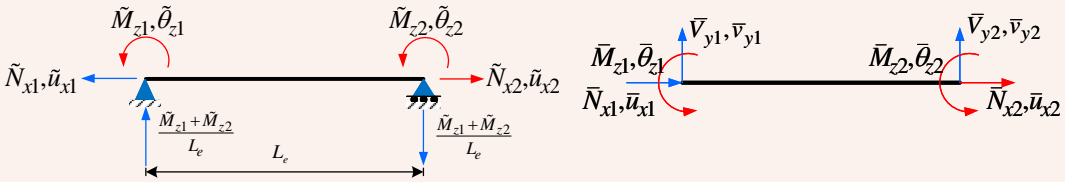


Figura 61.10: Il rapporto tra modalità corpo rigido e nessun modo di corpo rigido

51 Il rapporto tra modalità rigide del corpo e nessun modo rigido del corpo è ottenuto attraverso l'equilibrio in Fig. 61.10.

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{N}_{x1} \\ \overline{V}_{y1} \\ \overline{M}_{z1} \\ \overline{N}_{x2} \\ \overline{V}_{y2} \\ \overline{M}_{z2} \end{Bmatrix}}_{\bar{\mathbf{f}}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{L_e} & \frac{1}{L_e} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{L_e} & -\frac{1}{L_e} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{T}}_e^T} \underbrace{\begin{Bmatrix} M_{z1} \\ M_{z2} \\ N_{x2} \end{Bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{f}}_e}$$

COPIA DI REVISIONE

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{f}}_e &= \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e^T \cdot \tilde{\mathbf{f}}_e \\ \bar{\mathbf{d}}_e &= \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e^T \cdot \tilde{\mathbf{d}}_e \\ \mathbf{K}_e &= \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e^T \cdot \tilde{\mathbf{k}}_e \cdot \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e\end{aligned} \tag{61.27}$$

52 Infine, la matrice di rigidezza dell'elemento può essere ricavata dall'Eq. 46.22

$$\mathbf{k} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{d}^{-1} & \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \\ \hline \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1} & \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \end{array}\right]$$

dove $\mathcal{B}$ è la Matrice Statica (§46.2.1.2)

61.4.1.2 Determinazione dello stato

53 Gli studi si concentrano sui vantaggi del metodo basato sulla flessibilità Zeris e Mahin, 1988 non hanno fornito un metodo chiaro e coerente per il calcolo dei vettori di forza degli elementi interni dalle deformazioni degli elementi. Il motivo è che l'elemento flessibile (derivato dal principio complementare del lavoro virtuale) non ha funzioni di forma che riguardano il campo di deformazione all'interno dell'elemento con vettore di spostamento nodale, ma *funzioni di forma che riguardano le forze della sezione alle forze nodali*.

54 Il globale formulazione si basa sulla rigidità (spostamento) formulazione, la elemento si basa su un flessibilità (forza) formulazione; i due dovranno essere riconciliati (nella determinazione dei vettori di forza dell'elemento interno).

55 A livello degli elementi, l'elemento basato sulla flessibilità fornirà *spostamenti nodali che non sono necessariamente compatibili con quelli provenienti da elementi adiacenti* come nella formulazione basata sulla rigidità, le forze non erano compatibili a livello degli elementi.

56 Dobbiamo *garantire la compatibilità di spostamento nodale* (come abbiamo garantito l'equilibrio nodale nella formulazione basata sulla rigidità, che può essere realizzato in modo iterativo.

57 Si noti che nel metodo basato sulla rigidità, c'era una discontinuità nelle forze nodali.

58 Ci sono due algoritmi per i a base di rigidità mista e flessibile metodi: a) con iterazione Newton-Raphson nel livello degli elementi per determinare lo stato dell'elemento (Spacone, Ciampi e Filippou, 1992), b) senza iterazione nel livello dell'elemento per determinare lo stato degli elementi (Carol e Murcia, 1989).

61.4.1.2.1 Senza iterazione a livello di elemento

59 Come la determinazione dello stato della colonna a trave 2D basata sulla rigidità, in un'analisi strutturale non lineare, il processo di determinazione dello stato per il metodo basato sulla rigidità mista e flessibile senza iterazione a livello degli elementi è costituito da tre fasi come mostrato in Fig. 61.11 per la sezione, l'elemento e la struttura.

60 Una volta completata la determinazione dello stato della struttura, il vettore interno di forza nodale k^{th} iterazione $\mathbf{P}_{t,n}^{int,k}$ è confrontato con il vettore di forza nodale esterno

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

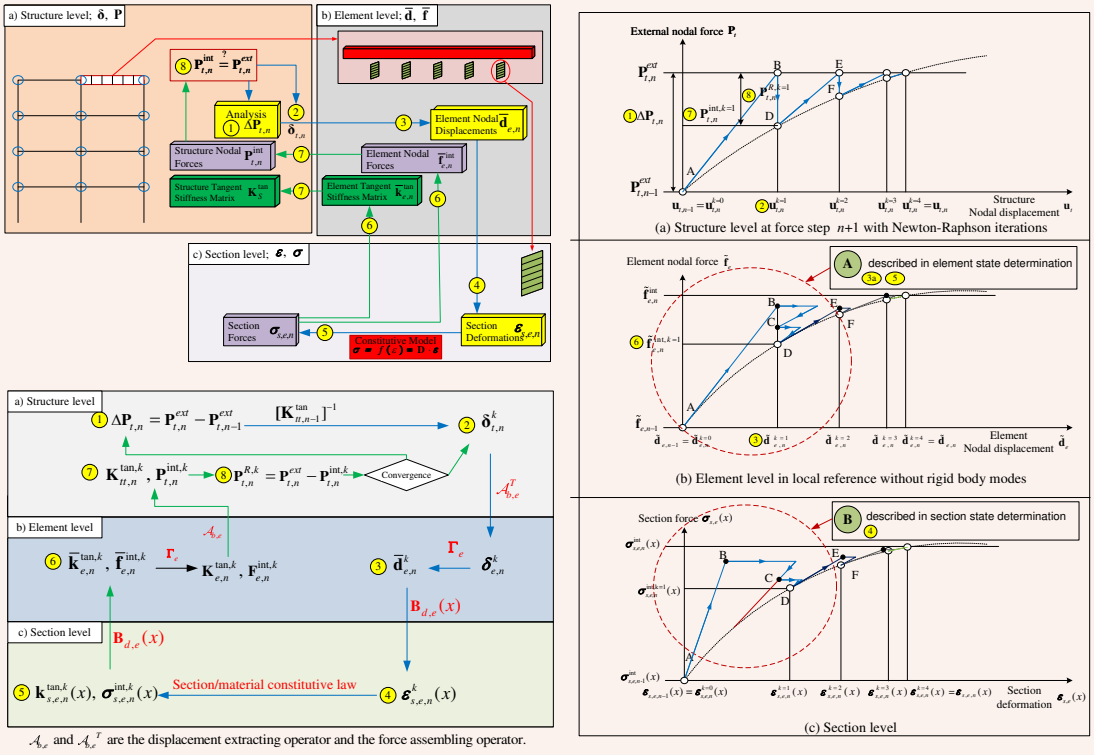


Figura 61.11: Determinazione dello stato per metodo basato sulla flessibilità senza iterazione degli elementi

applicato totale $\mathbf{P}^{ext}_{t,n}$ e la differenza, se del caso, cede il vettore forza nodale residuo $\mathbf{P}^{R,k}_{t,n}$ che viene poi riapplicata alla struttura in un processo di soluzione iterativa fino a quando la differenza del vettore di forza esterna applicata totale e il vettore interno della forza nodale soddisfa entro una tolleranza specificata.

61 La procedura di determinazione dello stato è semplice per un elemento 2D a base di flessibilità-colonna senza l'iterazione degli elementi come elemento di trave-column basato sulla rigidità. $\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e,n}$ senza modalità rigide del corpo a k^{th} l'iterazione è determinata da Eq. 61.27, e l'elemento nodale forza vettore $\tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n}$ senza modalità rigide corpo è determinato da Eq. 61.25

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e,n} &= \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{e}\cdot\delta\tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n}\\
\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e,n} &= \tilde{\mathbf{d}}^{k-1}_{e,n}+\delta\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e,n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n} &= \tilde{\mathbf{k}}^{tan,k-1}_{e,n}\cdot\delta\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e,n}\\
\tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n} &= \tilde{\mathbf{f}}^{k-1}_{e,n}+\delta\tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n}
\end{aligned}\tag{61.28}$$

62 I vettori della sezione forza k^{th} iterazione $\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n}(x)$ sono determinati dall'elemento vettore

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

forza nodale $\tilde{\mathbf{f}}^k_{e,n}$, e poi la sezione vettori deformazione a k^{th} iterazione $\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n}(x)$ sono determinati dai vettori di forza sezione $\boldsymbol{\sigma}^k_{s,e,n}(x)$ come mostrato in Eq. 61.29.

$$\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{\sigma}^k_{s,e,n}(x) &= \mathbf{N}_{f,e} \cdot \delta\tilde{\mathbf{f}}^k_{e,n} \\
\boldsymbol{\sigma}^k_{s,e,n}(x) &= \boldsymbol{\sigma}^{k-1}_{s,e,n}(x) + \delta\boldsymbol{\sigma}^k_{s,e,n}(x) \\
\delta\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n}(x) &= \tilde{\mathbf{c}}^{tan,k-1}_{s,e,n}(x) \cdot \delta\boldsymbol{\sigma}^k_{s,e,n}(x) \\
\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n}(x) &= \boldsymbol{\varepsilon}^{k-1}_{s,e,n}(x) + \delta\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n}(x)
\end{aligned} \tag{61.29}$$

63 Supponendo che la sezione di legge costitutiva sia esplicitamente conosciuta, la sezione tangente matrices flessibilità $\tilde{\mathbf{c}}^k_{s,e,n}(x)$ e i vettori della forza di sezione interna $\boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}(x)$ sono facilmente calcolati da $\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n}(x)$.

64 In questo approccio, le forze di sezione e i vettori di deformazione residui sono in primo luogo determinati con la sezione tangente matrici flessibilità $\tilde{\mathbf{c}}^k_{s,e,n}(x)$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}^{R,k}_{s,e,n}(x) &= \boldsymbol{\sigma}^k_{s,e,n}(x) - \boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}(x) \\
\boldsymbol{\varepsilon}^{R,k}_{s,e,n}(x) &= \tilde{\mathbf{c}}^k_{s,e,n}(x) \cdot \boldsymbol{\sigma}^{R,k}_{s,e,n}(x)
\end{aligned}$$

65 I vettori di deformazione della sezione residua sono integrati lungo l'elemento utilizzando su principio di forza virtuale per ottenere il vettore di spostamento nodale elemento residuo.

$$\tilde{\mathbf{d}}^{R,k}_{e,n} = \int_0^L \mathbf{N}_{f,e}(x)^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{R,k}_{s,e,n}(x)$$

66 La matrice di flessibilità dell'elemento senza modalità rigide del corpo $\tilde{\mathbf{c}}^k_{e,n}$ è determinato da Eq. 61.26, e poi l'elemento residuo vettore forza nodale è determinato forma il vettore di spostamento nodale elemento residuo.

$$\tilde{\mathbf{f}}^{R,k}_{e,n} = [\tilde{\mathbf{c}}^k_{e,n}]^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{d}}^{R,k}_{e,n} \tag{61.30}$$

67 Il vettore di forza nodale dell'elemento interno senza modalità rigide del corpo è determinato da Eq. 61.28 Eq. 61.30.

$$\tilde{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n} = \tilde{\mathbf{f}}^k_{e,n} - \tilde{\mathbf{f}}^{R,k}_{e,n}$$

68 Lì, l'elemento interno nodale forza vettore è ottenuto da Eq. 61.27.

$$\bar{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n} = [\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e]^T \cdot \tilde{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

69 L'elemento trave-colonna 2D basato sulla flessibilità, senza iterazione a livello di elemento, offre un metodo semplice per determinare lo stato dell'elemento, a differenza dell'elemento 2D basato sulla flessibilità con iterazione di Newton–Raphson a livello di elemento.

70 Questa formulazione di elementi utilizza le funzioni di interpolazione della forza senza alcun presupposto a differenza dell'elemento basato sulla rigidità con funzioni di spostamento interpolazione.

71 A causa del carattere esatto delle funzioni di interpolazione forza, non esistono errori intrinseci nella formulazione degli elementi a raggi 2D basati sulla flessibilità senza iterazione nel livello degli elementi da fare. *nessuna limitazione* alla dimensione degli elementi, se l'elemento ha sezione coerente lungo asse longitudinale, per questo motivo (Carol e Murcia, 1989)

61.4.1.2.2 Con il loop di iterazione Newton-Raphson nel livello degli elementi

72 Come la determinazione dello stato della colonna a trave 2D basata sulla rigidità, in un'analisi strutturale non lineare, il processo di determinazione dello Stato per il metodo basato su rigidità mista e flessibile con loop di iterazione Newton-Raphson nel livello degli elementi è composto di tre fasi, come mostrato in Fig. 61.12 per la sezione, elemento e struttura dove, superscript j in Fig. 61.12b) indica lo schema di iterazione a livello degli elementi nel processo di determinazione dello stato dell'elemento; questo anello di iterazione è necessario per la determinazione del vettore della forza nodale elemento interno $\tilde{\mathbf{f}}_e^{int,k}$ che corrispondono all'elemento nodale spostamento vettoriale $\tilde{\mathbf{d}}_e^k$ durante il k^{th} Iperazione di Newton-Raphson.

73 Per spiegare questo metodo, il Newton-Raphson viene utilizzato per il processo di iterazione a livello strutturale. Il processo di iterazione a livello strutturale non influisce sulla strategia per il processo di iserazione a livello degli elementi, che determina l'elemento interno vettore forza nodale $\tilde{\mathbf{f}}_e^{int}$ per il vettore di spostamento nodale dell'elemento dato $\tilde{\mathbf{d}}_e$.

74 In un elemento di profilo 2D basato sulla flessibilità, il primo passo è la determinazione del vettore della forza nodale dell'elemento $\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k,j}$ dal vettore di spostamento nodale dell'elemento corrente utilizzando la matrice tangente rigidità $\tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k,j-1}$ alla fine dell'ultima iterazione, e le funzioni di interpolazione forza $\mathbf{N}_{f,e}(x)$ cederà poi i vettori di forza sezione $\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k,j}(x)$ lungo l'elemento.

75 Il primo problema è la determinazione dei vettori di deformazione sezione $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k,j}(x)$ dal vettore di forza della sezione data, poiché il rapporto di deformazione-forza non lineare è comunemente espresso come funzione esplicita del vettore di deformazione delle sezioni. Il secondo problema nasce dal fatto che i cambiamenti nella sezione tangente rigidità matrici $\mathbf{k}_{s,e,n}^{tan}(x)$ produrre una nuova matrice di rigidità tangente elemento che, a sua volta, cambia l'elemento vettore forza nodale per il vettore di spostamento del nodale dell'elemento dato.

76 Questi problemi sono risolti da uno speciale metodo di soluzione non lineare. In questo metodo il vettore di spostamento nodale elemento residuo $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k,j}$ La compatibilità

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

sullo spostamento a livello strutturale richiede che questo vettore di spostamento nodale elemento residuo venga corretto. Questo viene realizzato a livello di elemento applicando il vettore della forza nodale dell'elemento correttivo basato sulla matrice tangente di rigidità dell'oggetto corrente.

77 I vettori corrispondenti della forza di sezione sono determinati dalle funzioni di interpolazione della forza in modo che l'equilibrio sia sempre soddisfatto lungo l'elemento. Questi vettori di forza sezione non possono cambiare durante la determinazione dello stato della sezione al fine di mantenere l'equilibrio lungo l'elemento.

78 Infine, il ravvicinamento lineare della relazione di deformazione forza-serie relativa all'attuale stato comporta in vettori di deformazioni sezione residua $\boldsymbol{\sigma}^{R,k,j}_{s,e,n}(x)$Questi sono poi integrati lungo l'elemento per ottenere nuovo vettore di spostamento nodale elemento residuo e l'intero processo viene ripetuto fino a quando non si verifica la convergenza.

79 È importante sottolineare che la compatibilità del vettore di spostamento nodale dell'elemento e l'equilibrio lungo l'elemento sono sempre soddisfatti in questo processo.

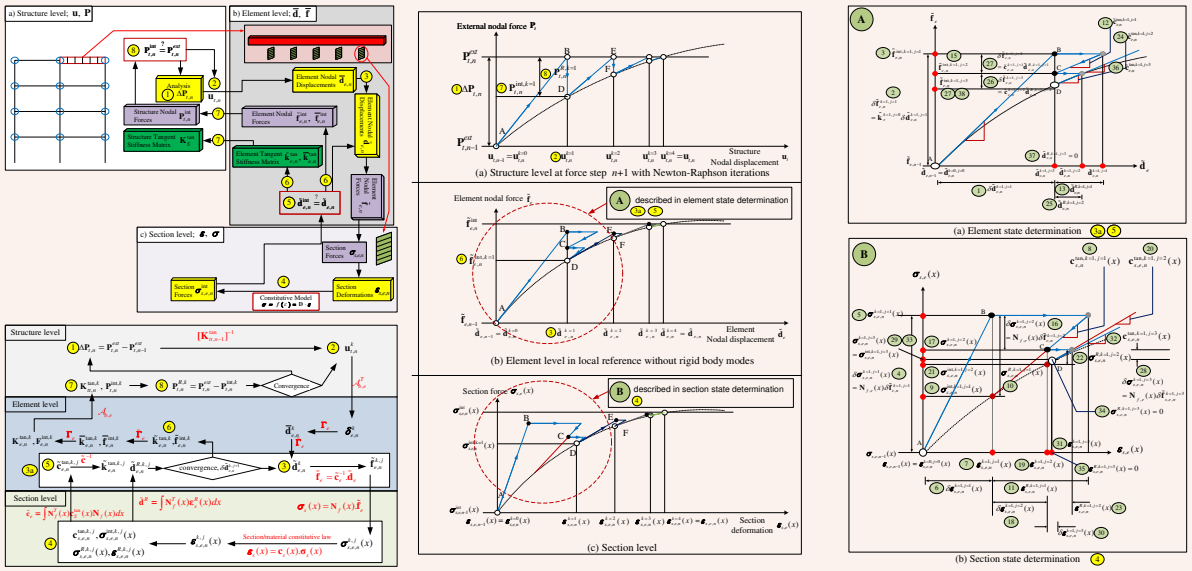


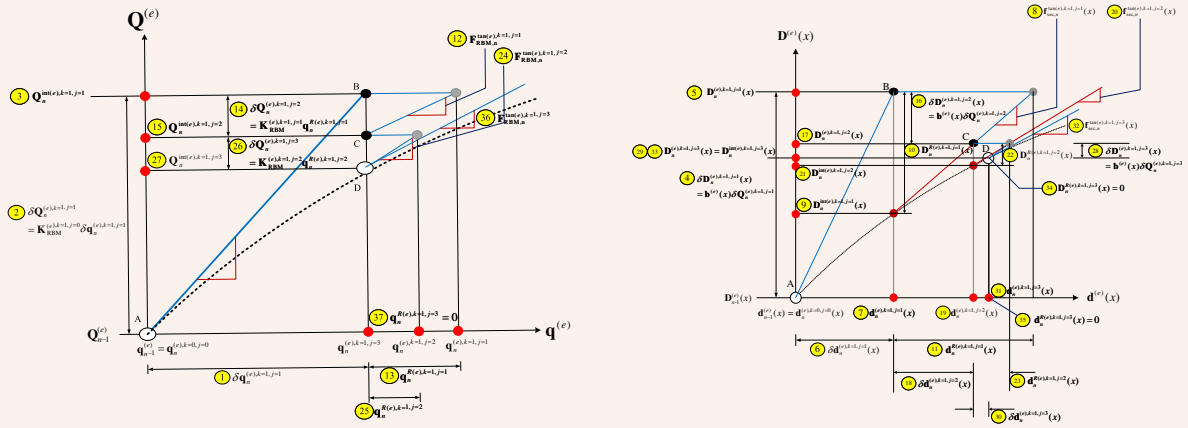
Figura 61.12: Determinazione dello stato per elemento di trave 2D basato sulla flessibilità (Taucer, Spacone e Filippou, 1991a)

80 La procedura di soluzione non lineare per la determinazione dello stato dell'elemento e della sezione è illustrata in Fig. 61.13a e 61.13b per un'iterazione Newton-Raphson k. Convergenza in loop j è raggiunto in tre iterazioni.

81 L'obiettivo del ciclo di iterazione Newton-Raphson a livello degli elementi è quello di determinare il vettore della forza nodale dell'elemento interno per il vettore dello spostamento nodale attuale elemento al k^{th} Iperazione di Newton-Raphson.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Livello di elemento

(b) Livello di sezione

Figura 61.13: Determinazione dello stato dell'elemento e della sezione per l'elemento a fascio 2D basato sulla flessibilità con loop di iterazione Newton-Raphson nel livello degli elementi

$$\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e,n} = \tilde{\mathbf{d}}^{k-1}_{e,n} + \delta\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e,n}$$

82 Un processo iterativo nella leva dell'elemento denotato attraverso il superscritto j introdotto all'interno k^{th} Iperazione di Newton-Raphson.

83 La prima iterazione corrisponde a $j = 1$. Lo stato iniziale dell'elemento, rappresentato dal punto **A**e $j = 0$ e $k = 0$ in Fig. 61.13a, corrisponde allo stato alla fine dell'ultima convergenza a livello strutturale; con l'elemento iniziale la rigidità tangente matrice data da:

$$\tilde{\mathbf{c}}^{tan,k=1,j=0}_{e,n} = \tilde{\mathbf{c}}^{tan}_{e,n-1}$$

e il vettore di spostamento nodale dell'elemento incrementale dato

$$\delta\tilde{\mathbf{d}}^{k=1,j=1}_{e,n} = \delta\tilde{\mathbf{d}}^{k=1}_{e,n}$$

quindi, il vettore di forza nodale elemento incrementale corrispondente è

$$\delta\tilde{\mathbf{f}}^{k=1,j=1}_{e,n} = \left[\tilde{\mathbf{c}}^{tan,k=1,j=0}_{e,n}\right]^{-1} \cdot \delta\tilde{\mathbf{d}}^{k=1,j=1}_{e,n}$$

84 I vettori di forza della sezione incrementale possono ora essere determinati dalle funzioni di interpolazione della forza

$$\delta\boldsymbol{\sigma}^{k=1,j=1}_{s,e,n}(x) = \mathbf{N}_{f,e}(x) \cdot \delta\tilde{\mathbf{f}}^{k=1,j=1}_{e,n}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Con la sezione tangente matrici di flessibilità alla fine dell'ultima convergenza a livello strutturale

$$\tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=0}(x) = \tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n-1}^{tan}(x)$$

la linearizzazione della relazione di deformazione forza-sezione produce i vettori di deformazioni sezione incrementale.

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x) = \tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=0}(x) \cdot \delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x)$$

85 I vettori di deformazione della sezione sono aggiornati allo stato che corrisponde al punto **B** in Fig. 61.13b.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x) = \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=0}(x) + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x)$$

Supponendo che la relazione di deformazione della forza sezione sia esplicitamente conosciuta per semplicità, allora la sezione vettori di deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x)$ corrisponderà a sezione interna forza vettori $\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{int,k=1,j=1}(x)$ e una nuova sezione tangente matrici di flessibilità $\tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=1}(x)$ in Fig. 61.13b in questo approccio i vettori di forza della sezione residua sono determinati per la prima volta

$$\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x) = \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x) - \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{int,k=1,j=1}(x)$$

e vengono poi trasformati in vettori di deformazione della sezione residua $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x)$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x) = \tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=1}(x) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x)$$

86 I vettori di deformazione della sezione residua sono quindi il ravvicinamento lineare all'errore di deformazione fatto nella linearizzazione del rapporto di forza-deformazione della parte (Fig. 61.13b). Mentre tutte le matrici di flessibilità della sezione adatta possono essere utilizzate per calcolare i vettori di deformazione del tratto residuo, la sezione tangente matrices flessibilità offrono il tasso di convergenza più veloce.

87 I vettori di deformazione della sezione residua sono integrati lungo l'elemento utilizzando sul principio della forza virtuale per ottenere il vettore di spostamento nodale elemento residuo.

$$\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k=1,j=1} = \int_0^L \mathbf{N}_{f,e}(x)^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x)\mathrm{d}x$$

88 A questo punto la prima iterazione $j = 1$ del corrispondente loop di iterazione è completo. L'elemento finale e la sezione indica per $j = 1$ corrisponde al punto **B** in Fig. 61.13a e Fig. 61.13b. I vettori di deformazione della sezione residua $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x)$ e l'elemento residuo nodale spostamento vettore $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k=1,j=1}$ sono determinati nella prima iterazione, ma

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

il vettore di spostamento nodale dell'elemento corrispondente non viene aggiornato; invece costituiscono il punto di partenza dei passi rimanenti all'interno del loop di iterazione j. La presenza di vettore di spostamento nodale elemento residuo $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k=1,j=1}$ viola la compatibilità, poiché elementi che condividono un nodo comune avrebbero ora diversi elementi vettori di spostamento nodale.

89 Per ripristinare la compatibilità inter-elementare, vettore forza correttiva $\delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=2}$ deve essere applicato alle estremità dell'elemento secondo Eq. 61.31.

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=2} &= -\left[\tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{k=1,j=1}\right]^{-1}\cdot\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k=1,j=1}\\ \tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{k=1,j=1} &= \int_0^L \mathbf{N}_{f,e}(x)^T\cdot\tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=1}(x)\cdot\mathbf{N}_{f,e}(x)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{61.31}$$

Così, nella seconda iterazione $j=2$, l'elemento nodale forza vettore è aggiornato a

$$\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=2} = \tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=1} + \delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=2}$$

e le sezioni forza e vettori di deformazione sono aggiornate a

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x) &= \mathbf{N}_{f,e}(x)\cdot\delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=2}\\ \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x) &= \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x) + \delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x)\\ \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x) &= \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x) + \tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=1}(x)\cdot\delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x)\\ \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x) &= \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x) + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x)\end{aligned}$$

90 Lo stato dell'elemento e le sezioni all'interno dell'oggetto alla fine della seconda iterazione $j=2$ corrisponde al punto **C** in Fig. 61.13a e Fig. 61.13b. Le nuove matrici di flessibilità tangente $\tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=2}(x)$ e i nuovi vettori di deformazione della sezione residua $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k=1,j=2}(x)$ sono calcolati per tutte le sezioni.

91 I vettori di deformazione della sezione residua sono poi integrati per ottenere il vettore di deformazione nodale elemento residuo $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k=1,j=2}$ e il nuovo elemento tangente matrice di flessibilità $\tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{k=1,j=2}$ è determinato dall'integrazione delle matrici di flessibilità sezione $\tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=2}(x)$ secondo Eq. 61.31. Questo completa la seconda iterazione all'interno del loop j.

92 La terza e la successiva iterazione seguono esattamente lo stesso schema. La convergenza si ottiene quando il criterio di convergenza selezionato è soddisfatto, con la conclusione del loop di iterazione j il vettore della forza nodale dell'elemento interno per il vettore di spostamento del nodale $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k=1}$ sono stabiliti, come rappresentato dal punto **D** in Fig. 61.12Fico. 61.13ae Fig. 61.13b. Il processo di iterazione Newton-Raphson può ora procedere con passo $k+1$.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

93 Quando l'elemento incrementale nodale spostamento vettore $\delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k,j=1} = \delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k}$ viene aggiunto al vettore di spostamento nodale elemento $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k-1}$ alla fine della precedente iterazione Newton-Raphson, è importante capire che il vettore di spostamento nodale elemento $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k}$ non cambia, tranne nella prima iterazione $j = 1$ durante il ciclo di iterazione j

94 L'equilibrio lungo l'elemento è sempre strettamente soddisfatto, poiché i vettori di forza della sezione sono derivati dal vettore di forza nodale dell'elemento dalle funzioni di interpolazione della forza secondo le

$$\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k}(x) = \mathbf{N}_{f,e}(x) \cdot \tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k} \quad \text{and} \quad \delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k}(x) = \mathbf{N}_{f,e}(x) \cdot \delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k}$$

95 La compatibilità è anche soddisfatta, non solo all'estremità dell'elemento, ma anche lungo l'elemento.

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k,j} &= -\left[\tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{k,j-1}\right]^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k,j-1} \\
\delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k,j}(x) &= \mathbf{N}_{f,e}(x) \cdot \delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k,j} \\
\delta\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k,j}(x) &= \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k,j-1}(x) + \tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k,j-1}(x) \cdot \delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k,j}(x)
\end{aligned}$$

Il secondo termine di Eq. 61.32 esprimere la relazione tra vettori di deformazione della sezione e vettore di spostamento nodale dell'elemento. $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k,j-1}(x)$ non soddisfano rigorosamente questa condizione di compatibilità. È possibile soddisfare questo requisito integrando i vettori di deformazione sezione residua $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k,j-1}(x)$ per ottenere $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k,j-1}$. Poiché questo è, tuttavia, piuttosto inefficiente da un punto di vista computazionale, il piccolo errore di compatibilità nel calcolo dei vettori di deformazione della sezione residua $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k,j-1}(x)$ è trascurato.

96 Mentre l'equilibrio e la compatibilità sono soddisfatti lungo l'elemento durante ogni iterazione di loop j, la relazione di deformazione della forza sezione e il rapporto di deformazione-forza dell'elemento sono soddisfatte soltanto in una tolleranza specificata quando si raggiunge la convergenza al punto Fig. 61.13a e Fig. 61.13b.

61.4.1.3 Analisi non lineare utilizzando il metodo basato sulla flessibilità

97 Con riferimento a Fig. 61.15a a Fig. 61.15c per il metodo con loop di iterazione Newton-Raphson a livello degli elementi e Fig. 61.14a a Fig. 61.14c per il metodo senza iterazione a livello di elemento, esamineremo un unico passo del metodo Newton-Raphson a livello strutturale per l'analisi non lineare utilizzando il metodo basato sulla flessibilità con la sezione legge costitutiva dovuta alla forza e allo spostamento controllo. Il controllo della forza e dello spostamento sono discussi in Sec. 59. Procedura di sezione del livello/fibra in Fig. 61.4c sarà descritto in Sec. 61.4.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

61.4.1.3.1 Senza iterazione a livello di elemento

98 Con riferimento a Fig. 61.14.

Passo 1 Computo del vettore di forza nodale $\Delta\mathbf{P}^{ext}_{t,n}$.

$$\Delta\mathbf{P}^{ext}_{t,n} = \mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \mathbf{P}^{ext}_{t,n-1}$$

Passo 2 Computa il vettore di spostamento nodale incrementale $\delta\mathbf{u}_{t,n}$ e vettore di spostamento nodale totale $\mathbf{u}_{t,n}$ inizialmente, l'iterazione è iniziata da Eq. 61.32 e $k = 1$.

If $k = 1$,

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{u}^k_{u,n} &= \mathbf{u}_{u,n} - \mathbf{u}_{u,n-1} \\
\mathbf{u}_{u,n} &= \mathbf{u}_{u,n-1} + \delta\mathbf{u}^k_{u,n} \\
\delta\mathbf{u}^k_{t,n} &= [\mathbf{K}^{tan,k-1}_{tt,n}]^{-1} \cdot [\mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \mathbf{P}^{ext}_{t,n-1} - \mathbf{K}^{tan,k-1}_{tu,n}\delta\mathbf{u}^k_{u,n}] \\
\mathbf{u}^k_{t,n} &= \mathbf{u}^{k-1}_{t,n} + \delta\mathbf{u}^k_{t,n}
\end{aligned} \tag{61.32}$$

If $k \neq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^{R,k}_{t,n} &= \mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \mathbf{P}^{int,k}_{t,n} \\
\delta\mathbf{u}^{k+1}_{t,n} &= [\mathbf{K}^{tan,k}_{tt,n}]^{-1} \cdot \mathbf{P}^{R,k}_{t,n} \\
\mathbf{u}^{k+1}_{t,n} &= \mathbf{u}_{t,n-1} + \Delta\mathbf{u}^{k+1}_{t,n} = \mathbf{u}^k_{t,n} + \delta\mathbf{u}^{k+1}_{t,n}
\end{aligned} \tag{61.33}$$

dove, superscript k è il contatore di iterazione, $\mathbf{P}^R_t$ il vettore di forza nodale residuo a livello strutturale, $\Delta\mathbf{u}^{k+1}_{t,n}$ il vettore di spostamento incrementale totale dall'ultimo passo convergente, e $\delta\mathbf{u}^{k+1}_n$ l'ultimo vettore di spostamento incrementale.

Passo 3 Si accaparra su tutti gli elementi e determina il loro stato.

- Determinare il vettore di spostamento nodale elemento in riferimento globale.

  If $k = 1$,

  $$\delta\boldsymbol{\delta}^k_{e,n} = \mathcal{A}_{b,e} \cdot \delta\mathbf{u}^k_{t,n} + \mathcal{A}_{b,e} \cdot \delta\mathbf{u}^k_{u,n}$$

  If $k \neq 1$,

  $$\delta\boldsymbol{\delta}^k_{e,n} = \mathcal{A}_{b,e} \cdot \delta\mathbf{u}^k_{t,n}$$

  dove, $\mathcal{A}_{b,e}$ è l'operatore di estrazione dello spostamento.

  $$\boldsymbol{\delta}^k_{e,n} = \boldsymbol{\delta}^{k-1}_{e,n} + \delta\boldsymbol{\delta}^k_{e,n}$$

  e $\boldsymbol{\delta}^0_{e,n}$ corrisponde a $\boldsymbol{\delta}_{e,n-1}$.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

- Determinare il vettore di spostamento nodale elemento in riferimento locale.

$$\delta\overline{\mathbf{d}}^{k}_{e,n} = \mathbf{\Gamma}_{e} \cdot \delta\boldsymbol{\delta}^{k}_{e,n}$$
$$\overline{\mathbf{d}}^{k}_{e,n} = \overline{\mathbf{d}}^{k-1}_{e,n} + \delta\overline{\mathbf{d}}^{k}_{e,n}$$

  e $\overline{\mathbf{d}}^{0}_{e,n}$ corrisponde a $\overline{\mathbf{d}}_{e,n-1}$.
- Determinare il vettore di spostamento nodale dell'elemento senza rigide modalità del corpo in riferimento locale.

$$\delta\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e,n} = \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{e} \cdot \delta\overline{\mathbf{d}}_{e,n}$$
$$\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e,n} = \tilde{\mathbf{d}}^{k-1}_{e,n} + \delta\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e,n}$$

  e, $\overline{\mathbf{d}}^{0}_{e,n}$ e $\tilde{\mathbf{d}}^{0}_{e,n}$ corrisponde a $\overline{\mathbf{d}}_{e,n-1}$ e $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n-1}$.

Passo 4 Determinare il vettore di forza nodale dell'elemento senza modalità rigide del corpo

$$\delta\tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n} = \tilde{\mathbf{k}}^{tan,k-1}_{e,n} \cdot \delta\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e}$$
$$\tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n} = \tilde{\mathbf{f}}^{k-1}_{e,n} + \delta\tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n}$$

e, $\tilde{\mathbf{f}}^{k=0}_{e,n}$ e $\tilde{\mathbf{k}}^{tan,k=0}_{e,n}$ corrisponde a $\tilde{\mathbf{f}}_{e,n-1}$e $\tilde{\mathbf{k}}^{tan}_{e,n-1}$.

Passo 5 Avviare la determinazione dello stato della sezione attraverso l' looping sulle sezioni dell'elemento. Il numero totale di sezione può variare dall'elemento all'elemento, pertanto il numero totale delle sezioni in un elemento è nIp_{e} e dipende dal numero di punti di integrazione nella regola quadratura Gauss Lobatto.

- Determinare il vettore della sezione forza.

$$\delta\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n} = \mathbf{N}_{f,s,e} \cdot \delta\tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n}$$
$$\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n} = \boldsymbol{\sigma}^{k-1}_{s,e,n} + \delta\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n}$$

  dove, $\mathbf{N}_{f,s,e}$ è la matrice derivata dalle funzioni di interpolazione forza al s^{th} sezione del e^{th} elemento, e $\boldsymbol{\sigma}^{k=0}_{s,e,n}$ corrisponde a $\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n-1}$.

Passo 6 Determinare il vettore di deformazione della sezione. Ancora una volta supporre una sezione generale. La determinazione dello stato di ogni sezione è eseguita in loop s.

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n} = \mathbf{c}^{tan,k-1}_{s,e,n} \cdot \delta\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n} = \boldsymbol{\varepsilon}^{k-1}_{s,e,n} + \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n}$$

e, $\mathbf{c}^{tan,k=0}_{s,e,n}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}^{k=0}_{s,e,n}$ corrisponde a $\tilde{\mathbf{c}}^{tan}_{s,e,n-1}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n-1}$.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Passo 7 Determinare la sezione tangente matrice di flessibilità e il vettore interno della forza sezione. Se si presume che la sezione costitutiva sia esplicitamente conosciuta, $\mathbf{c}_{s,e,n}^{tan,k}$ e $\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{int,k}$ sono entrambi determinati da $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k}$. Tuttavia, in sezione elastica, dobbiamo non calcolare $\mathbf{c}_{s,e,n}^{tan,k}$ di nuovo come è identico alla matrice della flessibilità sezione iniziale $\tilde{\mathbf{c}}_{s,e}$.

- Determinare il vettore di forza della sezione residua.

$$\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{R,k} = \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k} - \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{int,k}$$

Passo 8 Determinare il vettore di deformazione della sezione residua.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k} = \mathbf{c}_{s,e,n}^{tan,k} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{R,k}$$

Passo 9 Determinare la matrice di flessibilità degli elementi aggiornata e il vettore di spostamento nodale elemento residuo.

I vettori di deformazione della sezione residua e la sezione matrici flessibili tangenti sono integrati lungo l'elemento utilizzando sul principio gratuito del lavoro virtuale per ottenere il vettore di spostamento nodale elemento residuo e l'oggetto matrice di flessibilità tangente.

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k} &= \sum_{s} \mathbf{N}_{f,s,e}^{T} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k} \cdot \mathrm{wt}_{s,e} \\
\tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{tan,k} &= \sum_{s} \mathbf{N}_{f,s,e}^{T} \cdot \mathbf{c}_{s,e,n}^{tan,k} \cdot \mathbf{N}_{f,s,e} \cdot \mathrm{wt}_{s,e} \\
\tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} &= [\tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{tan,k}]^{-1}
\end{aligned}$$

dove, $\mathrm{wt}_{s,e}$ è il coefficiente di peso associato al giacobino s^{th} sezione del e^{th} elemento.

Passo 10 Determinare l'elemento interno nodale forza vettore e l' elemento tangente rigidità matrice.

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{R,k} &= \tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k} \\
\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} &= \tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k} - \tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{R,k} \\
\bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} &= \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{e}^{T} \cdot \tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} \\
\mathbf{F}_{e,n}^{int,k} &= \boldsymbol{\Gamma}_{e}{}^{T} \cdot \bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} \\
\bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} &= \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{e}^{T} \cdot \tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{e} \\
\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} &= \boldsymbol{\Gamma}_{e}^{T} \cdot \bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_{e}
\end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Passo 11 Determinare il vettore della forza nodale interna e la matrice di rigidità tangente aumentata.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{t,n}^{int,k} &= \sum_e \mathcal{A}_{b,e}^T \cdot \mathbf{F}_{e,n}^{int,k} \\ \mathbf{K}_{S,n}^{tan,k} &= \sum_e \mathcal{A}_{b,e}^T \cdot \mathbf{K}_{e,n}^{tan,k}\, \mathcal{A}_{b,e}\end{aligned}$$

dove, $\mathcal{A}_{b,e}^T$ è l'operatore di montaggio della forza.

Passo 12 Compiti il vettore di forza nodale residuo a livello strutturale da Eq. 61.35. In seguito soddisfiamo la convergenza con il vettore forza nodale residuo.

Verificare la convergenza

- If $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ è all'interno della tolleranza specificata, andare al prossimo incremento di forza.
- If $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ non è all'interno della tolleranza specificata, k è aggiornato a $k+1$ e i successivi iniziati di iterazione Newton-Raphson. Eq. 61.33 in **Passo 2** attraverso **Passo 12** si ripetono fino a quando la convergenza non avviene al livello della struttura.

61.4.1.3.2 Con il loop di iterazione newton-raphson nel livello degli elementi

99 Con riferimento a Fig. 61.15.

Passo 1 Computare il vettore forza nodale incrementale $\Delta\mathbf{P}_{t,n}^{ext}$.

$$\Delta\mathbf{P}_{t,n}^{ext} = \mathbf{P}_{t,n}^{ext} - \mathbf{P}_{t,n-1}^{ext}$$

Fase 2: Compiti lo spostamento nodale incrementale $\delta\mathbf{u}_{t,n}$ e totale spostamento nodale $\mathbf{u}_{t,n}$ inizialmente, l'iterazione è iniziata da Eq. 61.34 e $k=1$.

If $k=1$,

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{u}_{u,n}^k &= \mathbf{u}_{u,n} - \mathbf{u}_{u,n-1} \\ \mathbf{u}_{u,n} &= \mathbf{u}_{u,n-1} + \delta\mathbf{u}_{u,n}^k \\ \delta\mathbf{u}_{t,n}^k &= [\mathbf{K}_{tt,n}^{tan,k-1}]^{-1} \cdot [\mathbf{P}_{t,n}^{ext} - \mathbf{P}_{t,n-1}^{ext} - \mathbf{K}_{tu,n}^{tan,k-1}\delta\mathbf{u}_{u,n}^k] \\ \mathbf{u}_{t,n}^k &= \mathbf{u}_{t,n}^{k-1} + \delta\mathbf{u}_{t,n}^k\end{aligned} \tag{61.34}$$

If $k \neq 1$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{t,n}^{R,k} &= \mathbf{P}_{t,n}^{ext} - \mathbf{P}_{t,n}^{int,k} \\ \delta\mathbf{u}_{t,n}^{k+1} &= [\mathbf{K}_{tt,n}^{tan,k}]^{-1} \cdot \mathbf{P}_{t,n}^{R,k} \\ \mathbf{u}_{t,n}^{k+1} &= \mathbf{u}_{t,n-1} + \Delta\mathbf{u}_{t,n}^{k+1} = \mathbf{u}_{t,n}^k + \delta\mathbf{u}_{t,n}^{k+1}\end{aligned} \tag{61.35}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove, superscript k è il contatore di iterazione, $\mathbf{P}_t^R$ il vettore di forza nodale residuo a livello strutturale, $\Delta\mathbf{u}_{t,n}^{k+1}$ il vettore di spostamento incrementale totale dall'ultimo passo convergente, e $\delta\mathbf{u}_n^{k+1}$ l'ultimo vettore di spostamento incrementale.

In Eq. 61.34, è necessario descrivere il controllo della forza/slocamento spiega e la matrice di rigidità aumentata $\mathbf{K}_S$ con $\mathbf{K}_{tt}$, $\mathbf{K}_{tu}$, $\mathbf{K}_{ut}$e $\mathbf{K}_{uu}$ in dettaglio. Viene mostrato in Sec. 59. dove, la matrice di rigidità aumentata è diviso in due gruppi con il rispettivo sottoscritto 'u" dove sono noti gli spostamenti o zero, etDove sono conosciute le forze.

Passo 3: Si accaparra su tutti gli elementi e determina il loro stato.

- Determinazione del vettore di spostamento nodale dell'elemento nell'ambito della referenza globale If $k = 1$ If $k = 1$,

$$\delta\boldsymbol{\delta}_{e,n}^k = \mathbf{A}_{b,e} \cdot \delta\mathbf{u}_{t,n}^k + \mathbf{A}_{b,e} \cdot \delta\mathbf{u}_{u,n}^k$$

  If $k \neq 1$

$$\delta\boldsymbol{\delta}_{e,n}^k = \mathbf{A}_{b,e} \cdot \delta\mathbf{u}_{t,n}^k$$

  dove, $\mathbf{A}_{b,e}$ è l'operatore di estrazione dello spostamento.

$$\boldsymbol{\delta}_{e,n}^k = \boldsymbol{\delta}_{e,n}^{k-1} + \delta\boldsymbol{\delta}_{e,n}^k$$

  e $\boldsymbol{\delta}_{e,n}^0$ corrisponde a $\boldsymbol{\delta}_{e,n-1}$.
- Determinare il vettore di spostamento nodale dell'elemento in riferimento locale

$$\delta\overline{\mathbf{d}}_{e,n}^k = \boldsymbol{\Gamma}_e \cdot \delta\boldsymbol{\delta}_{e,n}^k$$
$$\overline{\mathbf{d}}_{e,n}^k = \overline{\mathbf{d}}_{e,n}^{k-1} + \delta\overline{\mathbf{d}}_{e,n}^k$$

  dove, $\overline{\mathbf{d}}_{e,n}^0$ corrisponde a $\overline{\mathbf{d}}_{e,n-1}$.
- Determinare il vettore di spostamento nodale dell'elemento senza rigide modalità del corpo in riferimento locale

$$\delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^k = \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e \cdot \delta\overline{\mathbf{d}}_{e,n}$$
$$\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^k = \tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k-1} + \delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^k$$

  dove, $\overline{\mathbf{d}}_{e,n}^0$ e $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^0$ corrisponde a $\overline{\mathbf{d}}_{e,n-1}$ e $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n-1}$.

Passo 3a: Avviare la determinazione dello stato dell'elemento. Loop su tutti gli elementi nella struttura. La determinazione di stato di ogni elemento viene eseguita in loop j.

- Determinare il vettore di forza nodale dell'elemento senza modalità rigide del corpo

$$\delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k,j} = \tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k,j-1} \cdot \delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k,j}$$
$$\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k,j} = \tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k,j-1} + \delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k,j}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove, $\delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k,j=1}$, $\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k,j=0}$e $\tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k,j=0}$ corrisponde a $\delta\tilde{\mathbf{d}}_{e}^{k}$, $\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k-1}$e $\tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k-1}$.

Passo 4 Avviare la determinazione dello stato della sezione attraverso l' looping sulle sezioni dell'elemento. Il numero totale di sezione può variare dall'elemento all'elemento, pertanto il numero totale delle sezioni in un elemento è nIp_e e dipende dal numero di punti di integrazione nella regola quadratura Gauss Lobatto.

- Determinare il vettore della sezione forza.

  Per la determinazione dello stato della sezione, dobbiamo prima differenziare tra sezione generale e sezione strato/fibra come descritto in Sec. 61.4. Per questo motivo consideriamo solo la sezione generale. La determinazione dello stato di ogni sezione viene eseguita all'interno del loop s dove il sottoscritto corrisponde al s^{th} sezione.

$$\delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k,j} = \mathbf{N}_{f,s,e} \cdot \delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k,j}$$
$$\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k,j} = \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k,j-1} + \delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k,j}$$

  dove, $\mathbf{N}_{f,s,e}$ è la matrice derivata dalle funzioni di interpolazione forza a s^{th} sezione e^{th} elemento, e $\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k,j=0}$ corrisponde a $\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k-1}$.
- Determinare la sezione vettori di deformazione.

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k,j} = \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k,j-1} + \mathbf{c}_{s,e,n}^{tan,k,j-1} \cdot \delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k,j}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k,j} = \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k,j-1} + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k,j}$$

  e, $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k,j=0}$ e $\mathbf{c}_{s,e,n}^{tan,k,j=0}$ corrisponde a $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k-1}$ e $\mathbf{c}_{s,e,n}^{tan,k-1}$e $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k,j=0} = 0$.
- Determinare la sezione tangente matrice di flessibilità e il vettore interno della forza sezione. Se si presume che la sezione costitutiva sia esplicitamente conosciuta, $\mathbf{c}_{s,e,n}^{tan,k,j}$ e $\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{int,k,j}$ sono entrambi determinati da $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k,j}$. Tuttavia, in sezione elastica, non abbiamo bisogno di calcolare $\mathbf{c}_{s,e,n}^{tan,k,j}$ di nuovo come è identico alla matrice della flessibilità sezione iniziale $\tilde{\mathbf{c}}_{s,e}$.
- Determinare la forza di sezione residua e il vettore di deformazione.

$$\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{R,k,j} = \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k,j} - \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{int,k,j}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k,j} = \mathbf{c}_{s,e,n}^{tan,k,j} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{R,k,j}$$

Passo 5 Determinare la matrice di flessibilità dell'elemento aggiornato e il vettore di spostamento nodale elemento residuo.

I vettori di deformazione della sezione residua e la sezione matrici flessibili tangenti sono integrati lungo l'elemento utilizzando il principio gratuito del lavoro virtuale

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

per ottenere il vettore di spostamento nodale elemento residuo e l' elemento tangente matrice di flessibilità.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k,j} &= \sum_s \mathbf{N}_{f,s,e}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k,j} \cdot \mathrm{wt}_{s,e} \\ \tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{tan,k,j} &= \sum_s \mathbf{N}_{f,s,e}^T \cdot \mathbf{c}_{s,e,n}^{tan,k,j} \cdot \mathbf{N}_{f,s,e} \cdot \mathrm{wt}_{s,e} \\ \tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k,j} &= [\tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{tan,k,j}]^{-1}\end{aligned}$$

dove, $\mathrm{wt}_{s,e}$ è il coefficiente di peso associato al giacobino s^{th} sezione del e^{th} elemento.

La convergenza a livello di elemento deve essere soddisfatta del vettore residuo di spostamento nodale.

- If $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k,j}$ è all'interno della tolleranza specificata, vai a **Passo 6**.
- If $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k,j}$ non è all'interno della tolleranza specificata, j e $\delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k,j+1}$ sono aggiornati a $j+1$ e $-\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k,j}$, e inizia la successiva iterazione Newton-Raphson. **Passo 3a** attraverso **Passo 5** fino a quando la convergenza si verifica al livello degli elementi.

Passo 6 Determinare l'elemento interno nodale forza vettore e l' elemento tangente rigidità matrice.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} &= \tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k,j} \\ \bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} &= \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e^T \cdot \tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} \\ \mathbf{F}_{e,n}^{int,k} &= \boldsymbol{\Gamma}_e^T \cdot \bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_{s,e,n}^{tan,k} &= \mathbf{c}_{s,e,n}^{tan,k,j} \\ \tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} &= \tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k,j} \\ \bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} &= \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e^T \cdot \tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e \\ \mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} &= \boldsymbol{\Gamma}_e^T \cdot \bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_e\end{aligned}$$

Passo 7 Determinare il vettore della forza nodale interna e la matrice di rigidità tangente aumentata.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{t,n}^{int,k} &= \sum_e \mathcal{A}_{b,e}^T \cdot \mathbf{F}_{e,n}^{int,k} \\ \mathbf{K}_{S,n}^{tan,k} &= \sum_e \mathcal{A}_{b,e}^T \cdot \mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} \cdot \mathcal{A}_{b,e}\end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove, $\mathcal{A}_{b,e}^{T}$ è l'operatore di montaggio della forza, e $\mathbf{K}_{S,n}^{tan,k}$ è composto da $\mathbf{K}_{tt,n}^{tan,k}$, $\mathbf{K}_{tu,n}^{tan,k}$, $\mathbf{K}_{ut,n}^{tan,k}$ e $\mathbf{K}_{uu,n}^{tan,k}$.

Passo 8 Compiti il vettore di forza nodale residuo a livello strutturale da Eq. 61.35. In seguito soddisfiamo la convergenza con il vettore forza nodale residuo.

- If $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ è all'interno della tolleranza specificata, andare al prossimo incremento di forza.
- If $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ non è all'interno della tolleranza specificata, k è aggiornato a $k+1$ e i successivi iniziati di iterazione Newton-Raphson. Eq. 61.35 in **Passo 2** attraverso **Passo 8** si ripetono fino a quando la convergenza non avviene al livello della struttura.

61.4.2 Stiffa *vs.* elementi basati sulla flessibilità

100 Tabella 61.2 e Fig. 61.16 evidenziare le differenze tra rigidità e flessibilità degli elementi basati.

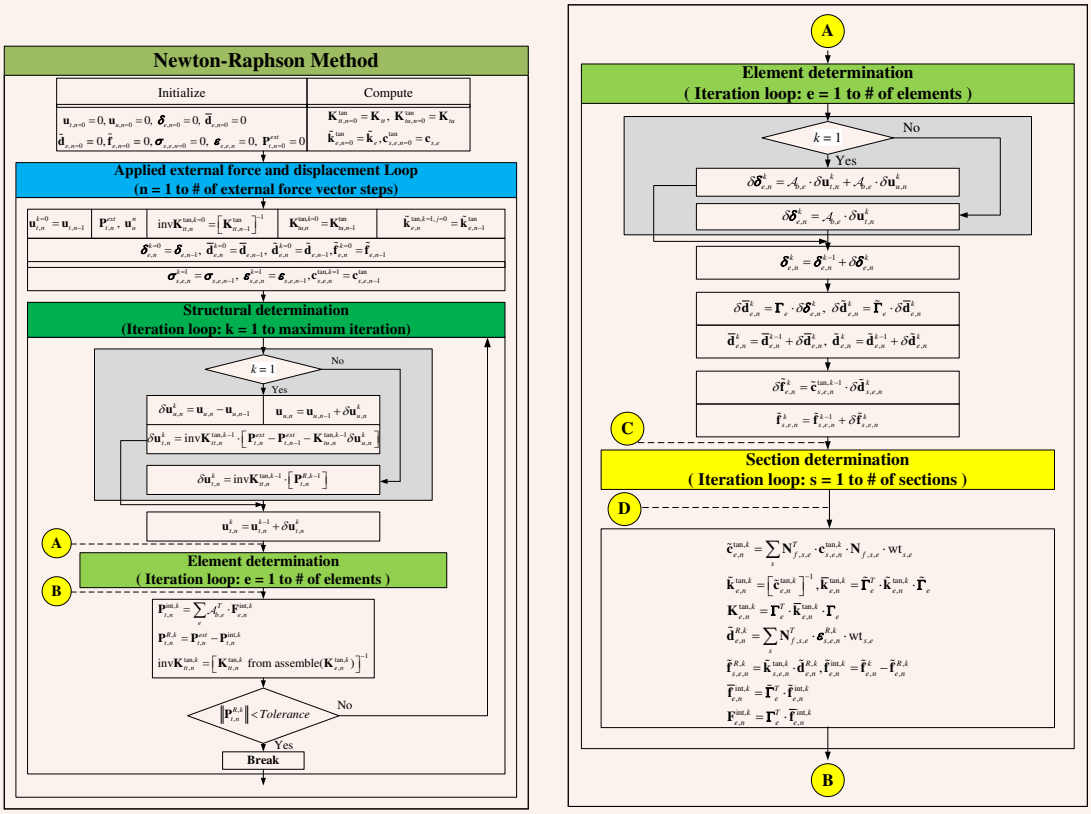
Tabella 61.2: Confronto della flessibilità con elementi basati sulla rigidità

	Flessibilità	**Stiffa**
Principio	Lavoro virtuale complementare	Lavoro virtuale
Indeterminanza	Statistiche	Kinematico
Forma forte	Kinematico	Equilibrio
Modulo di bagnatura	Equilibrio	Kinematico
Funzione di interpolazione	Campo di forza(Esatto)	Campo di sfolgorazione (Assunz
Diritto costituzionale	$\mathbf{D}(x) = \mathbf{k}(x)\mathbf{d}(x)$	$\mathbf{d}(x) = \mathbf{f}(x)\mathbf{D}(x)$
Sconosciuti primari	Forze di estremità degli elementi	Sostituzioni finali degli elementi
Divulgazione	$\mathbf{D}(x) = \mathbf{b}(x)\mathbf{Q}$	$\mathbf{u}(x) = \mathbf{N}(x)\overline{\mathbf{q}}$
Matrice	$\mathbf{F} = \int_0^L \mathbf{b}(x)^T \mathbf{f}(x)\mathbf{b}(x)\mathrm{d}x$	$\mathbf{k}_{(ele)} = \int_0^L \mathbf{B}(x)^T \mathbf{k}(x)\mathbf{B}(x)\mathrm{d}x$

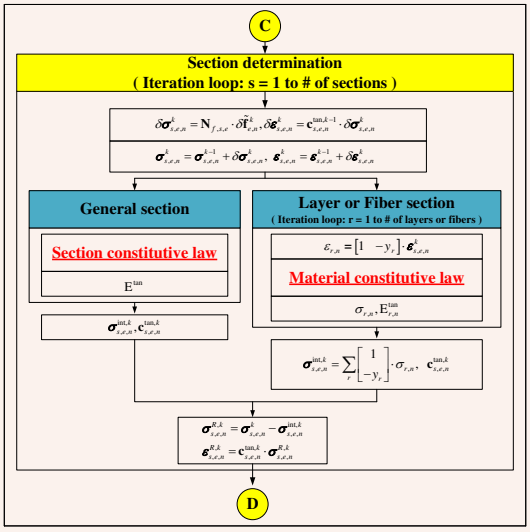
Please note that this section contains floating elements (figures and/or tables) that need to be printed before the next one. As a result, you may encounter blank spaces or gaps in here.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) (b)



(c)

Figura 61.14: Grafico di flusso dell'analisi non lineare utilizzando metodo basato sulla flessibilità senza iterazione nel livello degli elementi

COPIA DI REVISIONE

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

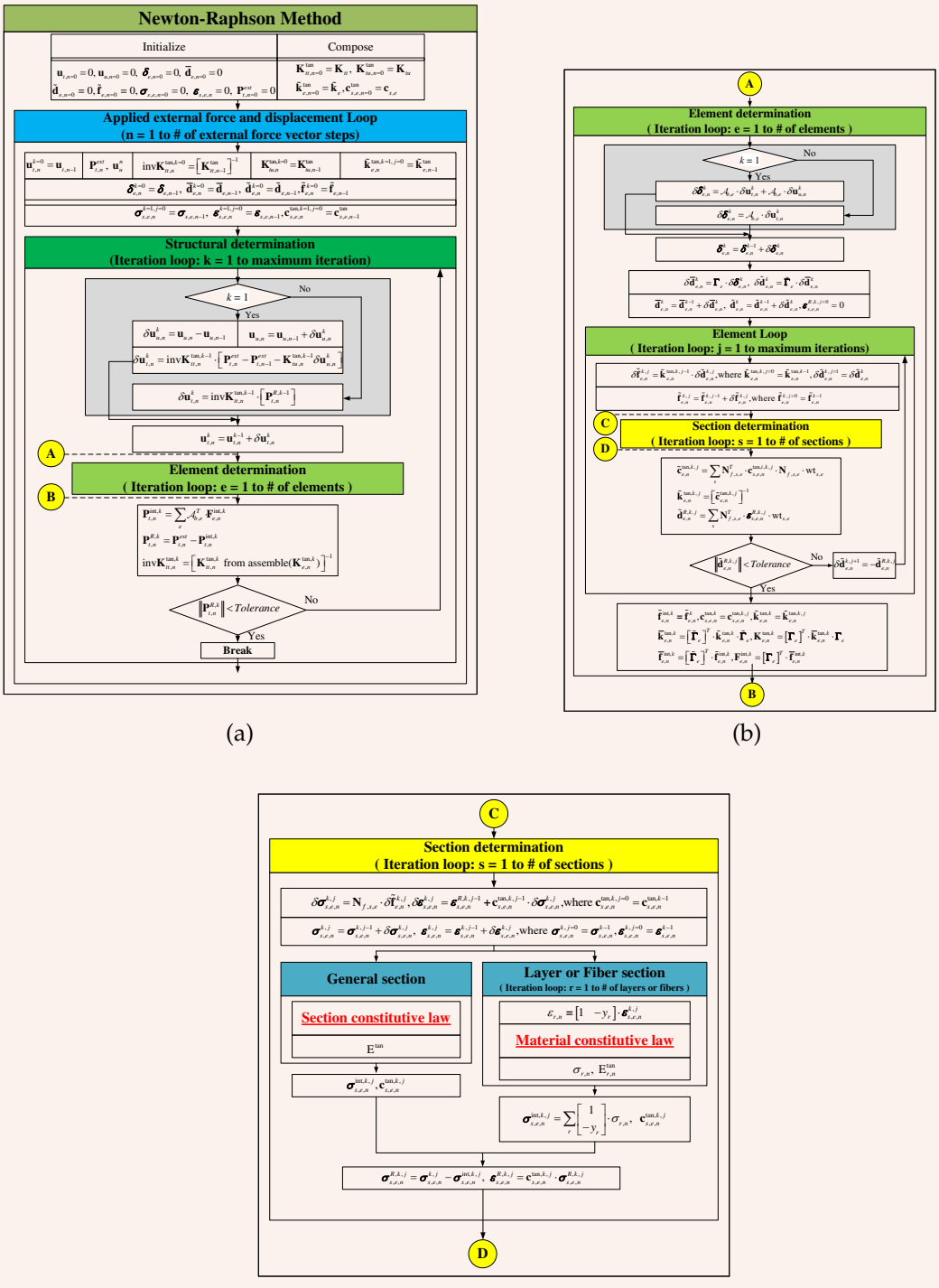


Figura 61.15: Grafico di flusso dell'analisi non lineare utilizzando metodo basato sulla flessibilità con l'iterazione Newton-Raphson nel livello degli elementi

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

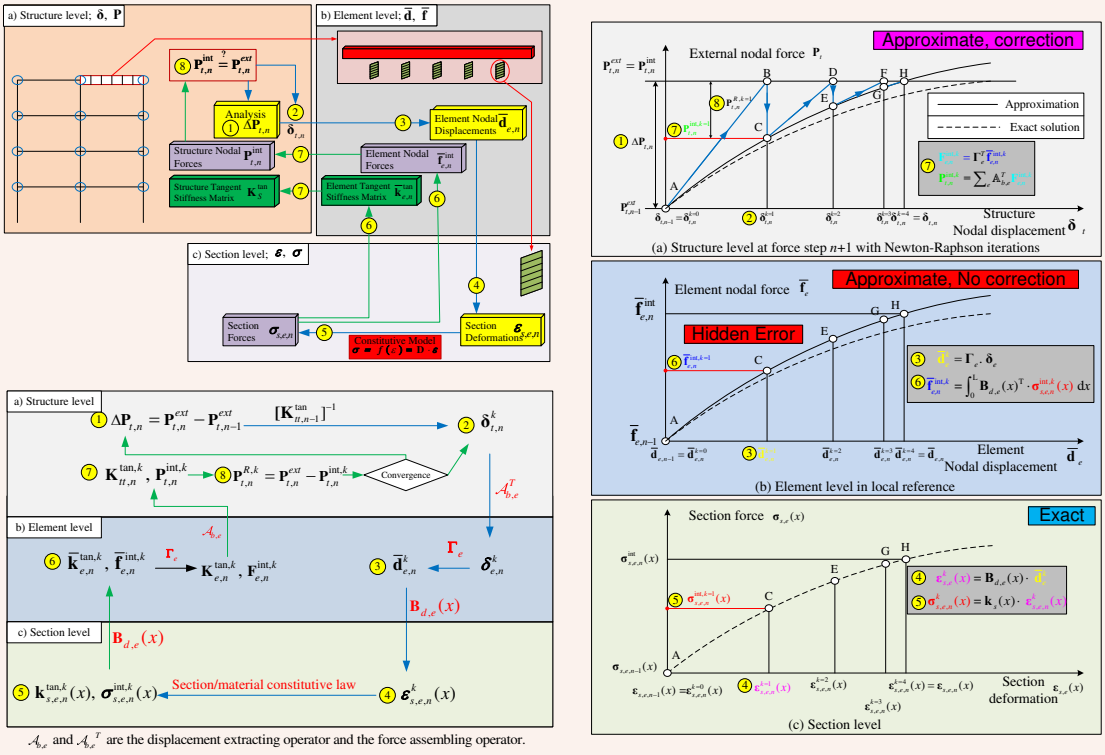


Figura 61.16: Confronto della rigidità *vs.* formulazione basata sulla flessibilità

COPIA DI REVISIONE

61.5 Formulazione di elementi 2D a lunghezza zero

101 Le giunzioni di elementi strutturali o di elementi con forza concentrata possono avere cerniere in plastica o non lineari; in questi casi, i nodi finali o i nodo con forza concentrato hanno bisogno di diversi modelli plastici costitutivi (§62.3).

102 Generalmente, l'elemento a lunghezza zero viene utilizzato alla fine di elementi trave o colonne per riprodurre la rotazione aggiuntiva o guasto della cinghia come Fig. 61.17a.

103 La formula dell'elemento si basa su Fig. 61.17. L'effetto accoppiato delle forze di sezione in questo elemento è ignorato.

Diritto costituzionale La legge costitutiva della sezione è espressa come

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} N_x \\ V_y \\ M_z \end{Bmatrix}}_{\mathbf{D}} = \underbrace{\begin{bmatrix} EA^{tan} & 0 & 0 \\ 0 & GA^{tan} & 0 \\ 0 & 0 & EIz^{tan} \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}^{tan}_{sec}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_{x2} - u_{x1} \\ v_{y2} - v_{y1} \\ \theta_{z2} - \theta_{z1} \end{Bmatrix}}_{.\mathbf{d}} \tag{61.36}$$

dove, EA^{tan}, GA^{tan} e EIz^{tan} sono rigidità tangente legate con assio, taglio e momento.

Equilibrio Il rapporto tra la forza nodale dell'elemento e il vettore di spostamento,

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{N}_{x1} \\ \overline{V}_{y1} \\ \overline{M}_{z1} \\ \overline{N}_{x2} \\ \overline{V}_{y2} \\ \overline{M}_{z2} \end{Bmatrix}}_{\bar{\mathbf{f}}_e} = \overline{\mathbf{k}}_e^{tan} \underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{u}_{x1} \\ \overline{v}_{y1} \\ \overline{\theta}_{z1} \\ \overline{u}_{x2} \\ \overline{v}_{y2} \\ \overline{\theta}_{z2} \end{Bmatrix}}_{\bar{\mathbf{d}}_e}$$

dove, $\overline{\mathbf{k}}_e^{tan}$ è la matrice di rigidità dell'elemento in riferimento locale.

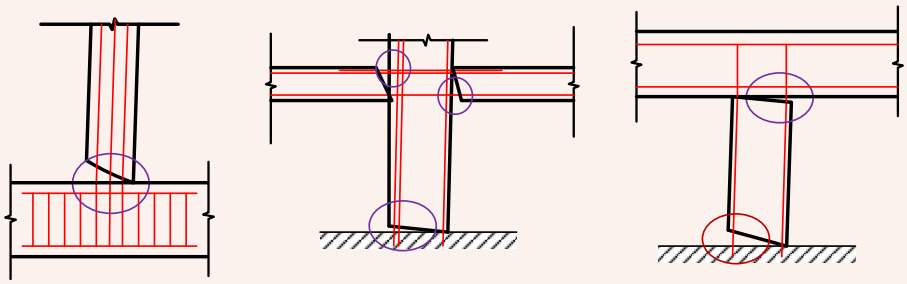
$$\overline{\mathbf{k}}_e^{tan} = \begin{bmatrix} EA^{tan} & 0 & 0 & -EA^{tan} & 0 & 0 \\ 0 & GA^{tan} & 0 & 0 & -GA^{tan} & 0 \\ 0 & 0 & EI_z^{tan} & 0 & 0 & -EI_z^{tan} \\ -EA^{tan} & 0 & 0 & EA^{tan} & 0 & 0 \\ 0 & -GA^{tan} & 0 & 0 & GA^{tan} & 0 \\ 0 & 0 & -EI_z^{tan} & 0 & 0 & EI_z^{tan} \end{bmatrix} \tag{61.37}$$

61.5.1 Sistema di coordinamento in elemento 2D a lunghezza zero

104 Il sistema di coordinamento in elemento 2D a zero-lunghezza è uguale a Sec. 61.3.1.1.

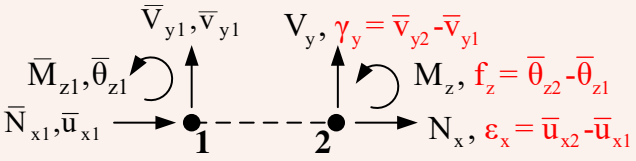
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

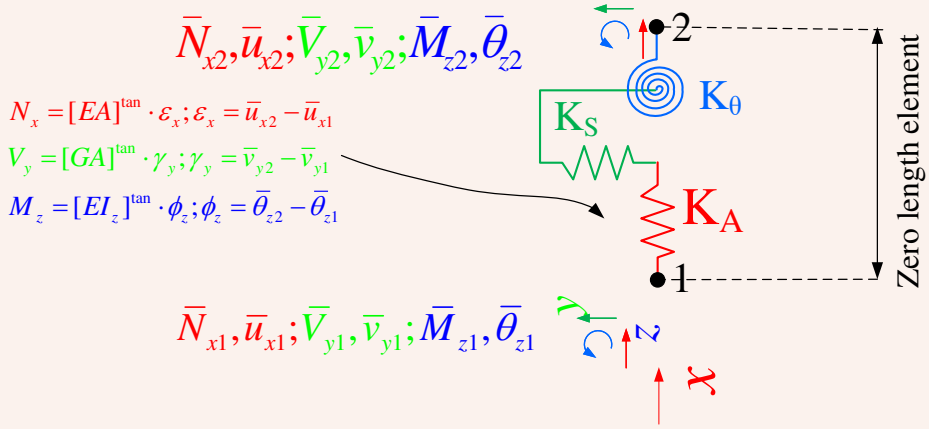


(1) Wall (2) Frame (3) Bridge

(a) Applicazione



(b) Connettività



(c) Equilibrio

Figura 61.17: Elemento 2D a lunghezza zero

61.5.2 Determinazione dello stato di elemento con 2 Dimensione e 3 gradi di libertà per nodo

105 Con riferimento Fig. 61.18, esamineremo un unico passo di elemento 2D a zero-lunghezza per l'analisi non lineare.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

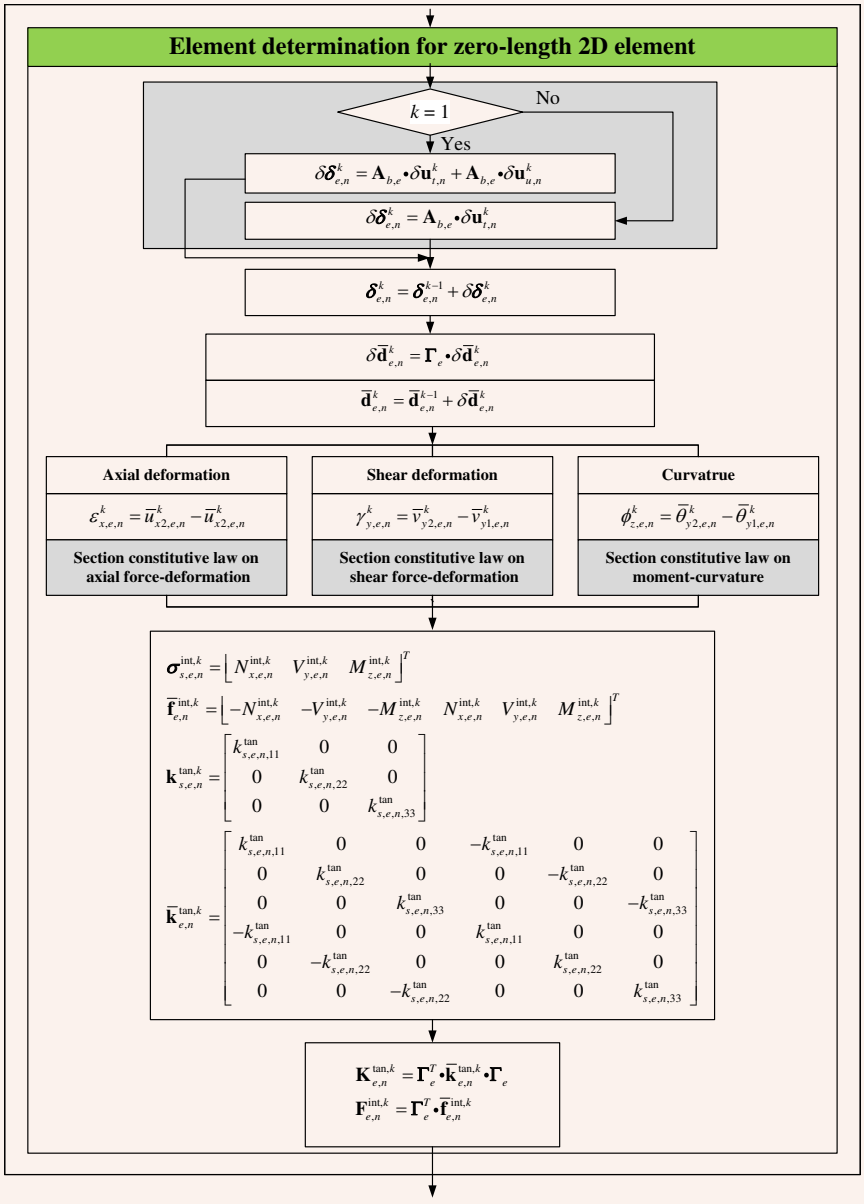


Figura 61.18: Grafico di flusso dell'elemento 2D a lunghezza zero per la determinazione dello stato degli elementi

Passo 1: Determinare la sezione vettori di deformazione, deformazione assiale, deformazioni e curvatura della tosa.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Per ogni deformazione, estraiamo i componenti associati da $\overline{\mathbf{d}}^k_{e,n}$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n} &= \lfloor \varepsilon^k_{x,n},\ \gamma^k_{y,n},\ \kappa^k_{z,n} \rfloor^T \\ \varepsilon^k_{x,n} &= \overline{u}^k_{x2,n} - \overline{u}^k_{x2,n} \\ \gamma^k_{y,n} &= \overline{v}^k_{y2,n} - \overline{v}^k_{y2,n} \\ \kappa^k_{z,n} &= \overline{\theta}^k_{z2,n} - \overline{\theta}^k_{z2,n}\end{aligned}$$

Le seconde, terza e quarta equazioni corrispondono alla deformazione della sezione assiale, la deformazione delle cesoie e la curvatura.

Fase 2: Determinare la sezione rigidità tangente associata con deformazione forza assiale, deformazione della forza-sveglia e curvatura del momento nella sezione leggi costitutive, per fare questo, possiamo usare le leggi costitutive di sezione modificate con diverse variabili in funzione di legge costitutiva materiale associata a rapporto tra stress e tensione non assiale (Ch. 62) E poi determinare il vettore interno della sezione forza, se si presume che la sezione legge costitutiva sia esplicitamente conosciuta, $\mathbf{k}^{tan,k}_{s,e,n}$ e $\boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}$ sono determinati da $\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n}$. Tuttavia, in sezione elastica, dobbiamo non calcolare $\mathbf{k}^{tan,k}_{s,e,n}$ di nuovo come è identico alla matrice della rigidità sezione iniziale $\mathbf{k}_{s,e}$.

Se abbiamo una sezione elastica,

$$\begin{aligned}\mathbf{k}^{tan}_{s,e,n} &= \mathbf{k}_{s,e} \\ \underbrace{\begin{Bmatrix} N^k_x \\ V^k_y \\ M^k_z \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}} &= \mathbf{k}^{tan}_{s,e,n} \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon^k_{x,n} \\ \gamma^k_{y,n} \\ \kappa^k_{z,n} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n}}\end{aligned}$$

dove, $\mathbf{k}^{tan,k}_{s,e,n}$ è la sezione tangente rigidità matrice a k^{th} iterazione.

Passo 3: Determinare l'elemento interno vettore forza nodale e la matrice tangente rigidità da Eq. 61.37.

$$\overline{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n} = \lfloor N^k_x, V^k_y, M^k_z, -N^k_x, -V^k_y, -M^k_z \rfloor^T$$

$$\overline{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e} = \begin{bmatrix} EA^{tan,k}_{e,n} & 0 & 0 & -EA^{tan,k}_{e,n} & 0 & 0 \\ 0 & GA^{tan,k}_{e,n} & 0 & 0 & -GA^{tan,k}_{e,n} & 0 \\ 0 & 0 & EI^{tan,k}_{z,e,n} & 0 & 0 & -EI^{tan,k}_{z,e,n} \\ -EA^{tan,k}_{e,n} & 0 & 0 & EA^{tan,k}_{e,n} & 0 & 0 \\ 0 & -GA^{tan,k}_{e,n} & 0 & 0 & GA^{tan,k}_{e,n} & 0 \\ 0 & 0 & -EI^{tan,k}_{z,e,n} & 0 & 0 & EI^{tan,k}_{z,e,n} \end{bmatrix}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove, $\overline{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k}$ è l'elemento tangente matrice di rigidità in riferimento locale.

Noi decidiamo $\mathbf{F}_{e,n}^{int,k}$ e $\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k}$.

$$\mathbf{F}_{e,n}^{int,k} = \mathbf{\Gamma}_e{}^T \cdot \overline{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k}$$
$$\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} = \mathbf{\Gamma}_e{}^T \cdot \overline{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \mathbf{\Gamma}_e$$

61.6 Elemento di sezione zero-lunghezza

106 L'elemento a sezione zero-lunghezza è analogo all'elemento di lunghezza zero, tuttavia utilizza strato/fibra. *modello il turno in centro di rotazione sezione che può verificarsi* (in slittamento a barre per esempio). L'elemento è formulato sulla base di forza assiale e momento accoppiatoFico. 61.19.

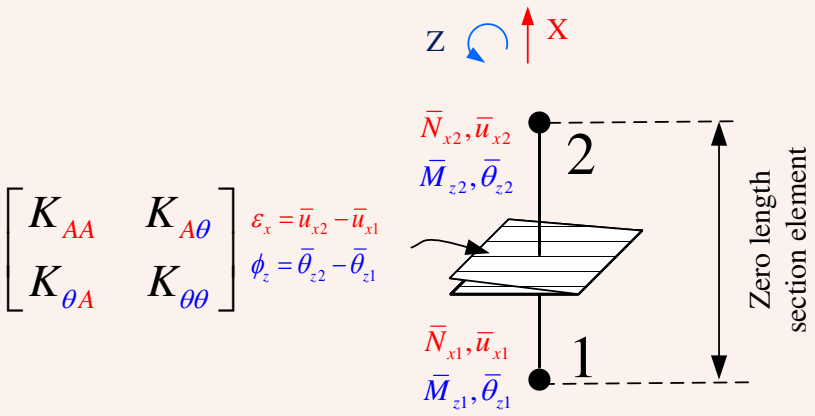


Figura 61.19: Elemento di sezione a lunghezza zero, equilibrio

61.6.1 Matrice di afflizione

Diritto costituzionale La legge costitutiva della sezione è espressa come

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} N_x \\ M_z \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}_s} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{k}_{s,11}^{tan} & \mathrm{k}_{s,12}^{tan} \\ \mathrm{k}_{s,21}^{tan} & \mathrm{k}_{s,22}^{tan} \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}_s^{tan}} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{u}_{x2} - \overline{u}_{x1} \\ \overline{\theta}_{z2} - \overline{\theta}_{z1} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_s}$$

dove, $\mathbf{k}_s^{tan}$ è la sezione tangente matrice di rigidità ottenuta dalla determinazione dello stato strato/fibra.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Equilibrio L'elemento a sezione zero-lunghezza si basa sulla teoria del fascio di Bernoulli. equazioni di equilibrio tra punto A e B.

$$\overline{N}_{x1} = k^{tan}_{s,11} \cdot (\overline{u}_{x1} - \overline{u}_{x2}) + k^{tan}_{s,12} \cdot (\overline{\theta}_{z1} - \overline{\theta}_{z2})$$
$$\overline{M}_{z1} = k^{tan}_{s,21} \cdot (\overline{u}_{x1} - \overline{u}_{x2}) + k^{tan}_{s,22} \cdot (\overline{\theta}_{z1} - \overline{\theta}_{z2})$$

Analogamente tra il punto B e il punto C,

$$\overline{N}_{x2} = k^{tan}_{s,11} \cdot (\overline{u}_{x2} - \overline{u}_{x1}) + k^{tan}_{s,12} \cdot (\overline{\theta}_{z2} - \overline{\theta}_{z1})$$
$$\overline{M}_{z2} = k^{tan}_{s,21} \cdot (\overline{u}_{x2} - \overline{u}_{x1}) + k^{tan}_{s,22} \cdot (\overline{\theta}_{z2} - \overline{\theta}_{z1})$$

107 Riscrivendo questi due set di equazioni in forma matrice, il rapporto tra la forza nodale elemento e vettore spostamento è dato da

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{N}_{x1} \\ 0 \\ \overline{M}_{z1} \\ \overline{N}_{x2} \\ 0 \\ \overline{M}_{z2} \end{Bmatrix}}_{\overline{\mathbf{f}}_e} = \overline{\mathbf{k}}^{tan}_e \underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{u}_{x1} \\ 0 \\ \overline{\theta}_{z1} \\ \overline{u}_{x2} \\ 0 \\ \overline{\theta}_{z2} \end{Bmatrix}}_{\overline{\mathbf{d}}_e}$$

dove, $\overline{\mathbf{k}}^{tan}_e$ è la matrice di rigidità dell'elemento in riferimento locale.

$$\overline{\mathbf{k}}^{tan}_e = \begin{bmatrix} k^{tan}_{s,11} & 0 & k^{tan}_{s,12} & -k^{tan}_{s,11} & 0 & -k^{tan}_{s,12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k^{tan}_{s,21} & 0 & k^{tan}_{s,22} & -k^{tan}_{s,21} & 0 & -k^{tan}_{s,22} \\ -k^{tan}_{s,11} & 0 & -k^{tan}_{s,12} & k^{tan}_{s,11} & 0 & k^{tan}_{s,12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k^{tan}_{s,21} & 0 & -k^{tan}_{s,22} & k^{tan}_{s,21} & 0 & k^{tan}_{s,22} \end{bmatrix}$$

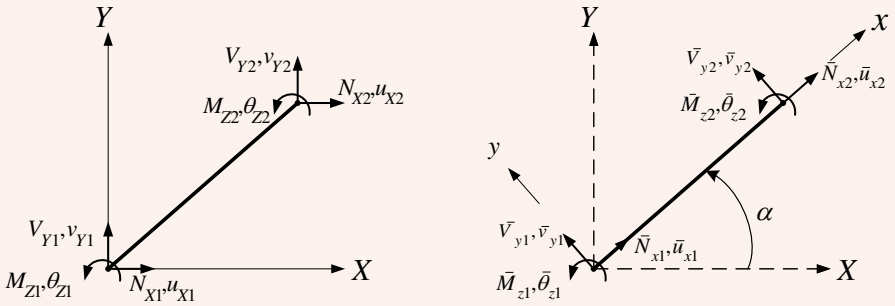
61.6.2 Sistema coordinato

107 Il sistema di coordinamento in elemento 2D a lunghezza zero è uguale a quello dell'elemento di rigidità 2D, Fig. 61.20

$$\mathbf{\Gamma}_e = \begin{array}{c} \\ \overline{N}_{x1} \\ \overline{V}_{y1} \\ \overline{M}_{z1} \\ \overline{N}_{x2} \\ \overline{V}_{y2} \\ \overline{M}_{z2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} N_{X1} & V_{Y1} & M_{Z1} & N_{X2} & V_{Y2} & M_{Z2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Global reference in an element

(b) Local reference in an element

Figura 61.20: Sistema di coordinamento per elemento sezione zero

61.6.3 Determinazione dello stato di elementi

108 Determinazione dello stato per l'elemento a sezione zero, Fig. 61.21 è il seguente:

Passo 1: Determinare la sezione vettori di deformazione, deformazione assiale e curvatura. Per ogni deformazione, estraiamo i componenti associati da $\overline{\mathbf{d}}^k_{e,n}$.

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{d}}^k_{e,n} &= \lfloor \overline{u}^k_{x1,e,n}\ 0\ \overline{\theta}^k_{z1,e,n}\ \overline{u}^k_{x2,e,n}\ 0\ \overline{\theta}^k_{z2,e,n} \rfloor^T \\
\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n} &= \lfloor \varepsilon^k_{x,e,n},\ \phi^k_{z,e,n} \rfloor^T \\
\varepsilon^k_{x,e,n} &= \overline{u}^k_{x2,e,n} - \overline{u}^k_{x2,e,n} \\
\phi^k_{z,e,n} &= \overline{\theta}^k_{z2,e,n} - \overline{\theta}^k_{z2,e,n}
\end{aligned}$$

Fase 2: Determinare la sezione rigidità tangente associata con deformazione forza assiale e curvatura del momento utilizzando lo strato/fibra di determinazione dello stato come in per Layer / fibra. Se si presume che la legge costituente materiale sia esplicitamente nota, $\mathbf{k}^{tan,k}_{s,e,n}$ e $\boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}$ sono determinati da $\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n}$. Tuttavia, nella sezione con materiale elastico, non dobbiamo calcolare $\mathbf{k}^{tan,k}_{s,e,n}$ di nuovo come è identico alla matrice della rigidità sezione iniziale $\mathbf{k}_{s,e}$. Se abbiamo una sezione con materiale elastico, allora

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}^{tan}_{s,e,n} &= \mathbf{k}_{s,e} \\
\underbrace{\begin{Bmatrix} N^{int,k}_{x,e,n} \\ M^{int,k}_{z,e,n} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}} &= \mathbf{k}^{tan}_{s,e,n} \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon^k_{x,e,n} \\ \phi^k_{z,e,n} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n}}
\end{aligned}$$

dove, $\mathbf{k}^{tan,k}_{s,e,n}$ è la sezione tangente rigidità matrice a k^{th} iterazione.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

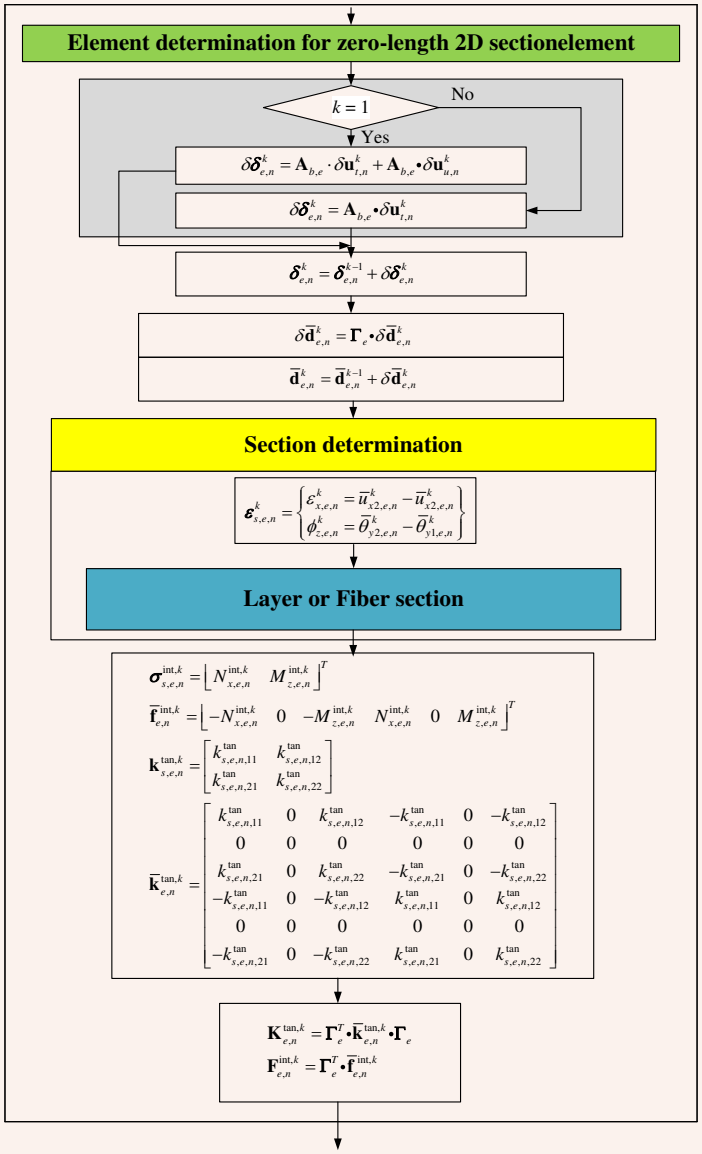


Figura 61.21: Grafico di flusso per elemento a sezione zero

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Passo 3: Determinare il vettore delle forze nodali interne e la matrice di rigidezza tangente dell'elemento.

$$\bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} = \lfloor N_{x,e,n}^{int,k}, 0, M_{z,e,n}^{int,k}, -N_{x,e,n}^{int,k}, 0, -M_{z,e,n}^{int,k} \rfloor^T$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} = \begin{bmatrix} \mathrm{k}_{s,e,n,11}^{tan,k} & 0 & \mathrm{k}_{s,e,n,12}^{tan,k} & -\mathrm{k}_{s,e,n,11}^{tan,k} & 0 & -\mathrm{k}_{s,e,n,12}^{tan,k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{k}_{s,e,n,21}^{tan,k} & 0 & \mathrm{k}_{s,e,n,22}^{tan,k} & -\mathrm{k}_{s,e,n,21}^{tan,k} & 0 & -\mathrm{k}_{s,e,n,22}^{tan,k} \\ -\mathrm{k}_{s,e,n,11}^{tan,k} & 0 & -\mathrm{k}_{s,12e,n,}^{tan,k} & \mathrm{k}_{s,e,n,11}^{tan,k} & 0 & \mathrm{k}_{s,e,n,12}^{tan,k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{k}_{s,e,n,21}^{tan,k} & 0 & -\mathrm{k}_{s,e,n,22}^{tan,k} & \mathrm{k}_{s,e,n,21}^{tan,k} & 0 & \mathrm{k}_{s,e,n,22}^{tan,k} \end{bmatrix}$$

dove, $\bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k}$ è l'elemento tangente matrice di rigidità in riferimento locale.

109 Noi decidiamo $\mathbf{F}_{e,n}^{int,k}$ e $\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k}$.

$$\mathbf{F}_{e,n}^{int,k} = \mathbf{\Gamma}_e{}^T \cdot \bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k}$$
$$\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} = \mathbf{\Gamma}_e{}^T \cdot \bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \mathbf{\Gamma}_e$$

61.7 Integrazione numerica

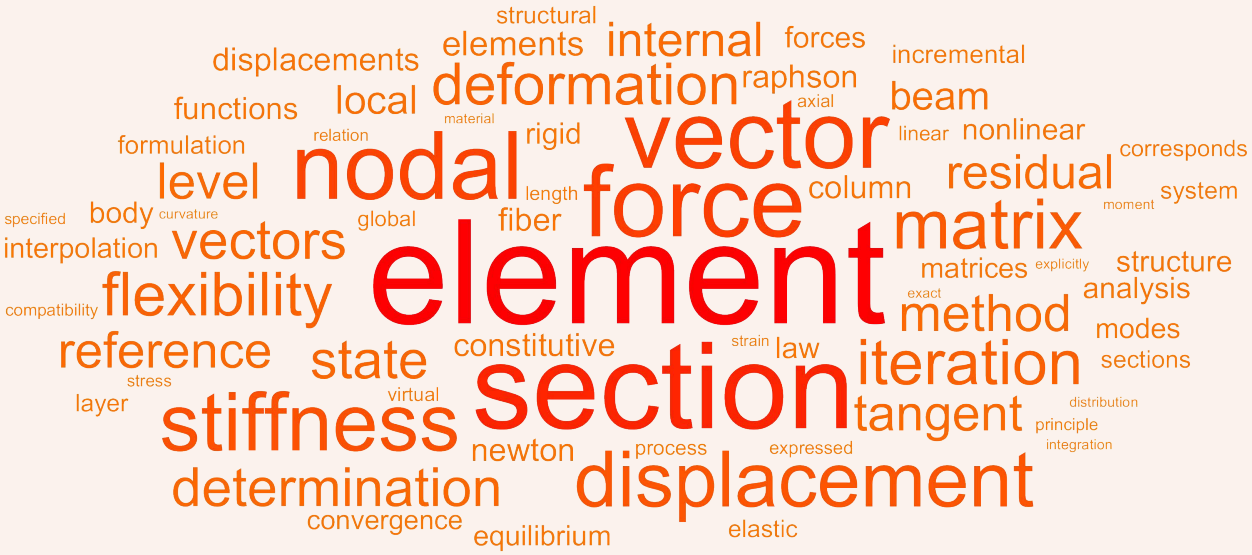
110 Punti di integrazione: tipicamente 3 (Gauss) per la rigidità a base, e 5 (Gausi-Lobatto) per flessibilità basata (§51.3).

61.8 Forza di base

111 Le forze nodali degli elementi sono determinate come §51.4.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 62

Modelli costitutivi per la plasticità distribuita e lussata

Abstract

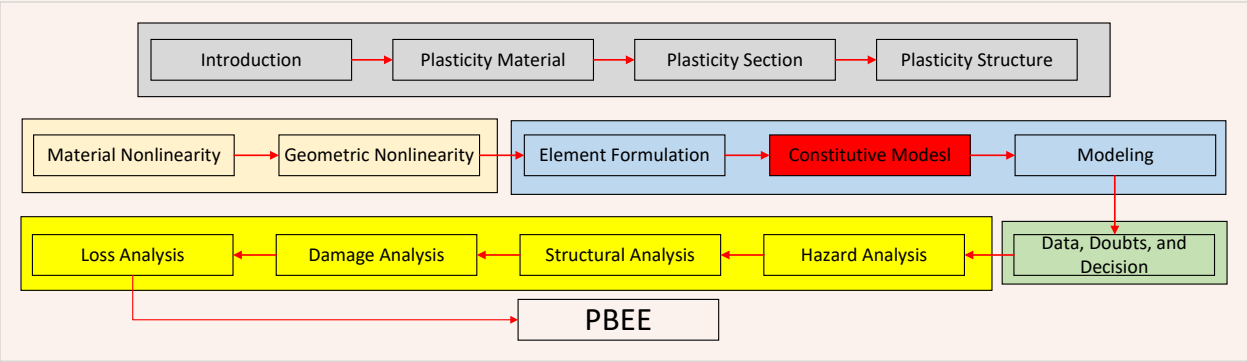
Questo capitolo si approfondisce sullo sviluppo e l'applicazione di modelli avanzati di analisi non lineari cruciali per l'ingegneria del terremoto basata sulle prestazioni (Chapter 72). Questi modelli mirano a simulare il comportamento delle strutture dall'inizio del danno al collasso completo, fornendo parametri di domanda ingegneristica che si correlano con misure di danneggiamento. $P-\Delta$ effetti, è fondamentale per rappresentare con precisione risposte dinamiche.

Il capitolo esamina in dettaglio gli approcci di plasticità distribuita e concentrata. Per la plasticità distribuita si studiano elementi a fibre o strati per sviluppare relazioni non lineari tensione–deformazione, mentre la plasticità concentrata è caratterizzata da relazioni non lineari momento–curvatura. La discussione comprende modelli costitutivi per acciaio e calcestruzzo, con particolare attenzione al carico ciclico, al degrado della rigidezza, all'incrudimento e all'effetto del confinamento sulle proprietà del calcestruzzo. Tra i modelli analizzati figurano il modello modificato di Kent e Park e il modello di Menegotto–Pinto per l'acciaio.

Sebbene i modelli euristici e fenomenologici dominano, il capitolo riconosce le loro limitazioni e introduce approcci raffinati per scenari specifici, tra cui i modelli di danno anisotropico. Questo quadro completo fornisce gli strumenti teorici e pratici necessari per prevedere e valutare le prestazioni strutturali in condizioni estreme, come eventi sismici, garantendo simulazioni affidabili e realistiche critiche per i moderni sviluppi strutturali applicazioni di ingegneria

62.1 Introduzione 2086
62.1.1 Termoplasticità lineare . . . 2086
62.1.2 Modelli euristici 2087
62.2 Plasticità distribuita 2089
62.2.1 Modelli in acciaio 2089
62.2.2 Modelli concreti 2099
62.2.3 Modello di danno anisotropico con danni effettivi e recupero della rigidità 2111
62.2.4 Aderenza–scorrimento . . . 2124
62.2.5 Elemento di sezione zero . . 2126
62.3 Plasticità lussuosa 2129
62.3.1 Lunghezza plastica 2129
62.3.2 Modello di guasto della cinghia (materiale stato limite) . 2139
62.3.3 I modelli isterici di Ibarra che incorporano dissipazione dell'energia 2144
62.3.4 Il modello di Ghannoum . . 2165

COPIA DI REVISIONE



62.1 Introduzione

1 I modelli costitutivi sono al centro dell'analisi non lineare (materiale) degli elementi finiti. In elemento finito di solidi come si snocciolano sulla valutazione $\mathbf{K}^{(e)}$ (Eq. 50.12). Tuttavia, nel contesto della nostra analisi non lineare di elementi a raggi-colonna, abbiamo bisogno $\overline{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k}$ (Eq. 61.14) o più specificamente E^{tan} (Eq. 61.18).

2 "Classical" (1D) modelli basati sulla plasticità per l'acciaio sono stati coperti nella prima conferenza di plasticità, tutti gli altri modelli sono "Euristicamente" basandosi sul fatto che meglio catturano la risposta ciclica non lineare, siamo principalmente interessati. Due parti, Fig. 62.1:

- Maggiore attenzione agli elementi in fibra/strato (cioè plasticità distribuita), dove cerchiamo non lineare stress-strain relazione[1].
- Plasticità lussuosa da caratterizzare relazioni non lineari con la curvatura.

62.1.1 Termoplasticità lineare

3 Questo è il modo in cui dovrebbe essere. *meccanica continuum*, selezioniamo per un convesso *potenziale termodinamico* una funzione quadratica positiva definita nei componenti del tenore di ceppo.

$$\Psi = \frac{1}{2\rho}\mathbf{a}{:}\boldsymbol{\varepsilon}{:}\boldsymbol{\varepsilon}$$

e per definizione $\boldsymbol{\sigma} = \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{a}{:}\boldsymbol{\varepsilon}$ che è la legge di Hooke.

4 Isotropia e linearità richiedono che il potenziale Ψ essere un invariante quadratico

[1] Gli elementi di lunghezza zero possono anche essere caratterizzati da relazioni non lineari tra stress e resistenza.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

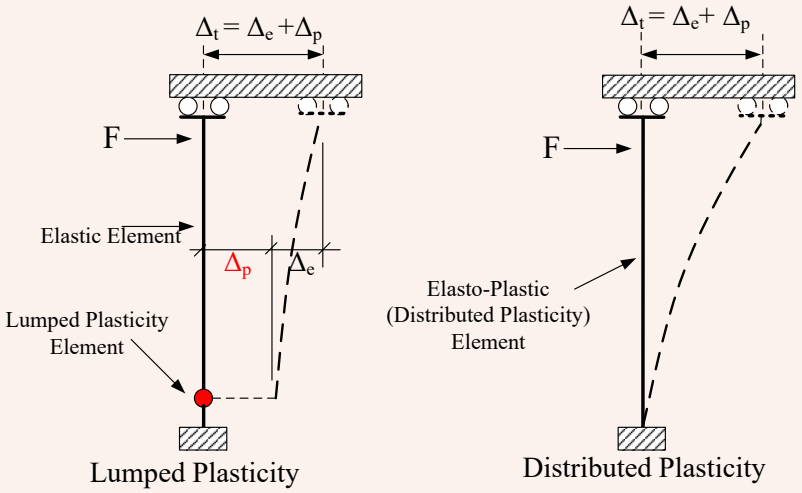


Figura 62.1: Modelli di plasticità lumpate e distribuite

del tenore di ceppo, cioè una combinazione lineare della piazza del primo invariant $\varepsilon_I^2 = [\text{tr}\,(\boldsymbol{\varepsilon})]^2$, e il secondo invariante $\varepsilon_{II}^2 = \frac{1}{2}\text{tr}\,(\boldsymbol{\varepsilon}^2)$

$$\Psi = \frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{2}\left(\lambda\varepsilon_I^2 + 4\mu\varepsilon_{II}\right) - (3\lambda + 2\mu)\alpha\theta\varepsilon_I\right] - \frac{C_\varepsilon}{2T_0}\theta^2$$

dove λ e μ sono Parametri di Lame.

5 Differenziazione

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} = &\quad \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} = \lambda\text{tr}\,(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\theta\mathbf{I}\\ \sigma_{ij} = &\quad \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\theta\delta_{ij}\end{aligned}$$

6 In definitiva, cerchiamo di catturare la complessa risposta non lineare delle strutture in acciaio e cemento armato soggette a carico ciclico inverso (quadri).

7 Ci sono pochissimi modelli termodinamicamente radicati che possono raggiungere questo (esclusi quelli basati su meccanica dei danni).

8 Quindi, ci affideremo *modelli euristici*

62.1.2 Modelli euristici

9 I modelli euristici sono sulla base di osservazioni di laboratorio che portano a relazioni empiriche.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

10 Tutti i modelli successivamente presentati(figura 62.2) cadrà in quella categoria e saranno così *fenomenologia* modelli.

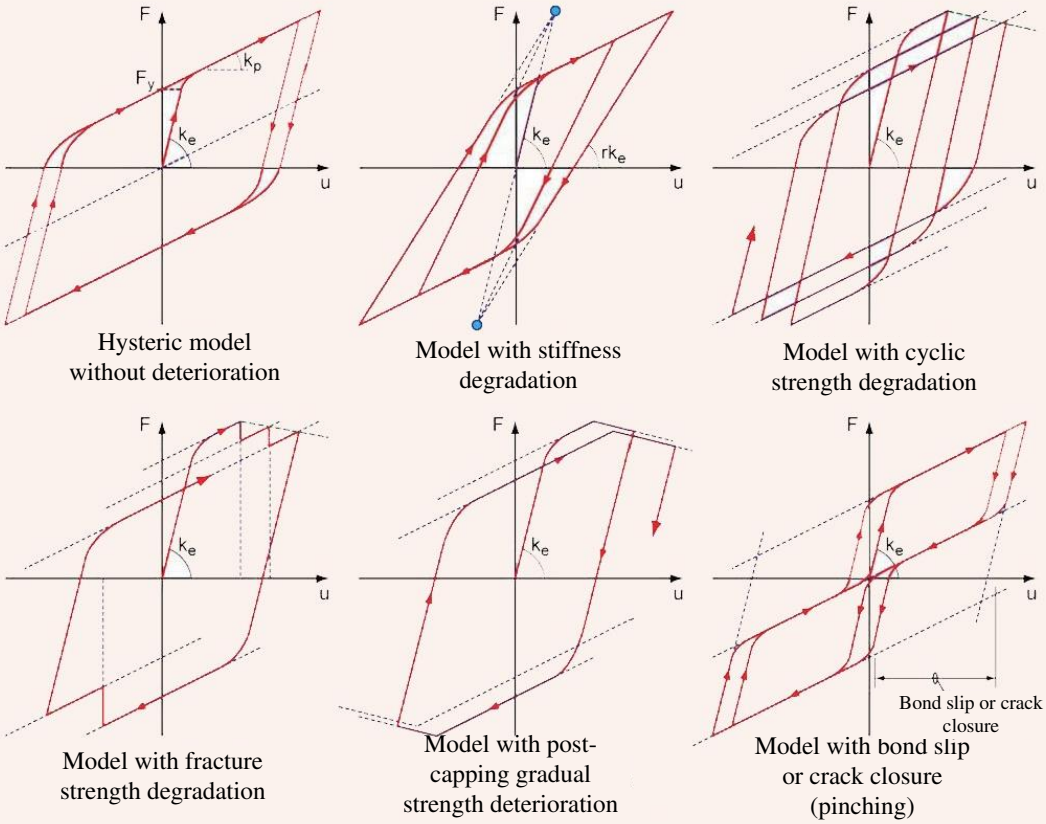


Figura 62.2: Modelli isterici

11 Cerchiamo di catturare

Degradazione del cemento

Forza di cemento o acciaio

- Tensione
- Tensione e compressione

Stiffa che diminuirà con danni

Chiusura con scaffalature a causa di inversione del carico.

12 Ci occuperemo separatamente di modelli in acciaio e cemento (come abbiamo fatto in §55.2).

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

62.2 Plasticità distribuita

62.2.1 Modelli in acciaio

Dalla tesi di dottorato «An Optimized Computational Environment for Real Time Hybrid Simulation» by Kang, 2010.

62.2.1.1 Introduzione

13 Modello in acciaio per eccitazione ciclica casuale presenta solo difficoltà minori. La maggior parte dei modelli sono euristici, analiticamente definiti, e quelli di maggior successo sono quelli con parametri variabili.

14 All'interno di questo gruppo, si distingue tre diverse formulazioni:

Algebraico esplicita equazione dello stress: $\sigma = f(\varepsilon)$.

Algebraico implicito equazione dello stress: $f(\sigma, \varepsilon) = 0$.

Equazione differenziale (Prima ordinazione): $\frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} = E^p = f(\sigma)$

15 Un modello esplicito comunemente usato è:

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = b\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + \frac{(1-b)\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}{\left[1+\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^R\right]1/R}$$

dove σ_0, ε_0, be R sono lo stress e la tensione di resa, il parametro di indurimento della deformazione e un coefficiente che rappresentano l'effetto Baushinger (Fig. 55.5b) e varia a seconda della grandezza dell'escursione ε_{max} nella gamma inelastica.

62.2.1.2 Modello bilineare con indurimento isotropico

16 Mentre il modello preceeding è radicato nella teoria della plasticità, la sua attuazione può essere problematica. (Filippou, Popov e Bertero, 1983) e come implementato in (Mazzoni et al., 2006).

62.2.1.2.1 Relazione tensione–deformazione

17 Invece di determinare E^{tan} con H da Eq. 55.12Fico. 62.3a

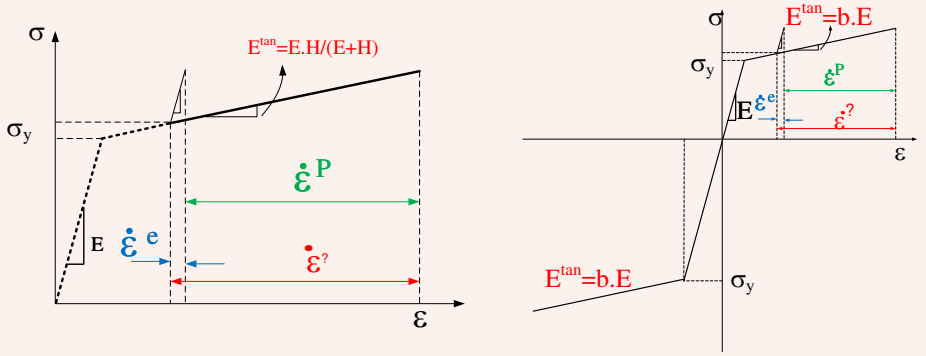
$$E^{tan} = \frac{E.H}{E+H}$$

questo modello semplificato lo calcola attraverso un coefficiente di indurimento b che è il rapporto del modulo tangente post-yield E^{tan} e il modulo elastico iniziale E, e considera solo indurimento isotropico, Fig. 62.3b

$$E^{tan} = b \cdot E$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Modello di plastica

(b) Bilinear & Modello Menegotto-Pinto

Figura 62.3: Paragone di modulo tangente; plasticità vs. Menegotto-Pinto

18 Per tener conto dell'evoluzione del dominio elastico in tempra isotropica, un cambiamento di stress σ_Δ è determinato come segue:

- Se lo sforzo incrementale $\Delta\varepsilon$ cambia un valore positivo in negativo:

$$\begin{aligned} \Delta^N &= 1 + a_1 \cdot \left(\frac{\varepsilon^{max} - \varepsilon^{min}}{2 \cdot a_2 \cdot \cdot \varepsilon_y} \right)^{0.8} \\ \sigma_\Delta &= \Delta^N \cdot \sigma_y \cdot (1 - b) \end{aligned} \tag{62.1}$$

- Se lo sforzo incrementale $\Delta\varepsilon$ cambia un valore negativo in positivo:

$$\begin{aligned} \Delta^P &= 1 + a_3 \cdot \left(\frac{\varepsilon^{max} - \varepsilon^{min}}{2 \cdot a_4 \cdot \cdot \varepsilon_y} \right)^{0.8} \\ \sigma_\Delta &= \Delta^P \cdot \sigma_y \cdot (1 - b) \end{aligned} \tag{62.2}$$

dove,

- a_1 e a_3 sono il parametro isotropic indurimento che riflette un aumento della busta di resa di compressione attraverso una frazione della resistenza alla resa dopo uno sforzo plastico $a_2 \cdot \frac{\sigma_y}{E}$, e la tensione di resa busta come una frazione della resistenza alla resa dopo uno sforzo plastico di $a_4 \cdot \frac{\sigma_y}{E}$.
- a_2 e a_4 sono parametro isotropic indurimento rispetto a a_1 e a_3e ε_{max} e ε_{min} sono la tensione al punto di inversione massima e minima della deformazione. a_1, a_2, a_3 e a_4 deve essere determinato attraverso il montaggio a curva del modello con risultati sperimentali. $a_1 = 0$, $a_2 = 55$, $a_3 = 0$e $a_4 = 55$ in (Mazzoni et al., 2006).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

62.2.1.2.2 Determinazione del modello bilineare

Fig. 62.4 mostra la procedura per ottenere stress non assiale
19 σ e modulo tangente E^{tan} da ceppo non assiale ε.

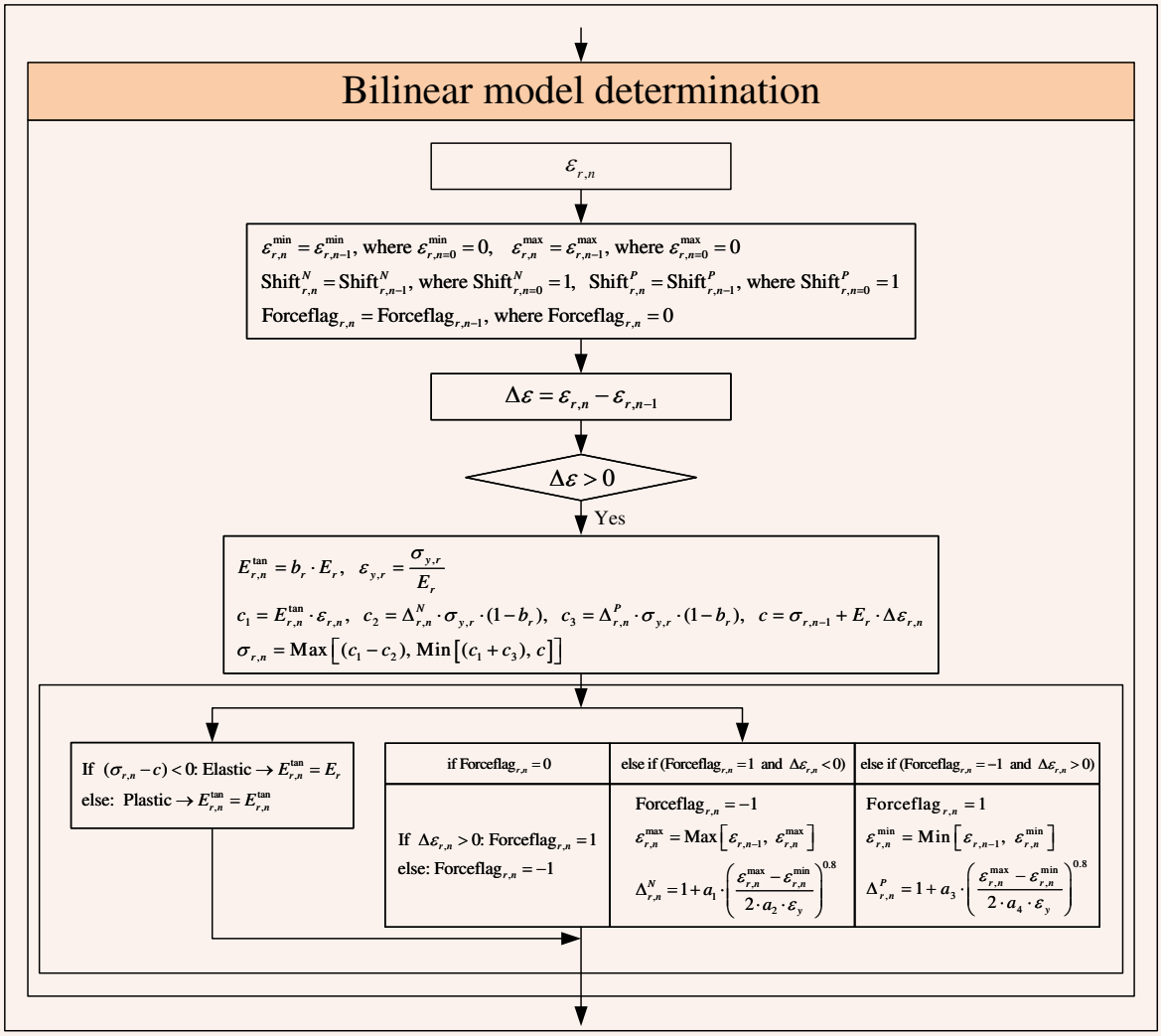


Figura 62.4: Determinazione del modello bilineare

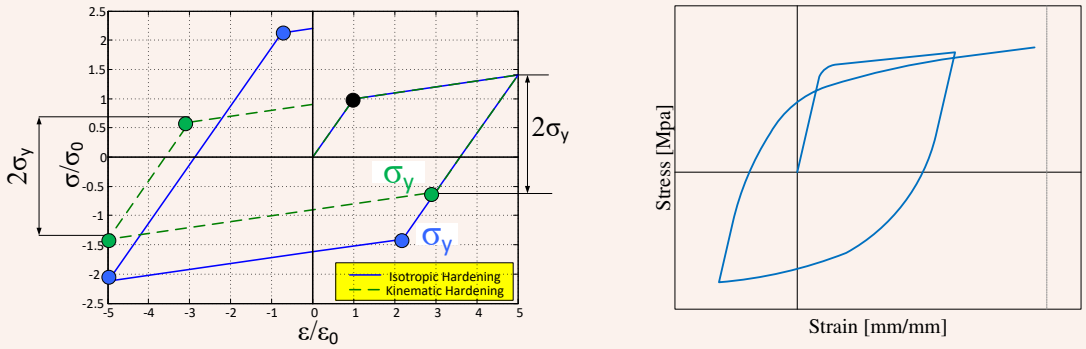
62.2.1.3 Modello Menegotto-pinto

20 Questo modello è essenzialmente un'estensione del precedente, introduce una curva liscia in quanto cattura meglio il comportamento dei dati sperimentali. Inoltre le discontinuità possono potenzialmente causare problemi di convergenza in un'analisi non lineare. Da qui,

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

è stato raffinato da Menegotto e Pinto, 1973 per avere curva liscia, e modificato da Filippou, Popov e Bertero, 1983 includere indurimento e indurenza di ceppo isotropica, Fig. 62.5b.



(a) Modello di plastica

(b) Modello in acciaio Pinto Menegotto

Figura 62.5: Paragone di modelli di carico ciclico inverso: plasticità *vs.* Menegotto-Pinto

21 Il modello è computazionalmente efficiente e concorda molto bene con risultati sperimentali da test ciclici su barre in acciaio rinforzato (Taucer, Spacone e Filippou, 1991b).

22 Ancora una volta, come nel modello bilineare, piuttosto che determinare E^{tan} da Eq. 55.12Fico. 62.3a questo lo calcola anche attraverso un coefficiente di indurimento b che è il rapporto del modulo tangente post-yield E^{tan} e il modulo elastico iniziale E, e considera solo indurimento isotropico, Fig. 62.3b

$$E^{tan} = b \cdot E$$

23 Passeremo attraverso la derivazione:

1. Inizia con stress empirico relazione

$$\sigma^* = b \cdot \varepsilon^* + \frac{(1-b)\cdot\varepsilon^*}{(1+\varepsilon^{*R})^{1/R}} \tag{62.3}$$

dove,

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon - \varepsilon_{rev}}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{rev}}; \quad \sigma^* = \frac{\sigma - \sigma_{rev}}{\sigma_0 - \sigma_{rev}}$$

2. σ_0 e ε_0 sono lo stress e la tensione al punto in cui i due asintoti del ramo sotto considerazione si incontrano (B); σ_{rev} e ε_{rev} sono lo stress e la tensione al punto in cui ultimo ceppo inversione si è svolta (A), Fig. 62.6.
3. Il modulo tangente E^{tan} si ottiene differenziando

$$E^{tan} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{\sigma_0 - \sigma_{rev}}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{rev}} \cdot \frac{\mathrm{d}\sigma^*}{\mathrm{d}\varepsilon^*}; \quad \frac{\mathrm{d}\sigma^*}{\mathrm{d}\varepsilon^*} = b + \left[\frac{1-b}{(1+\varepsilon^{*R})^{1/R}}\right] \cdot \left[1 - \frac{\varepsilon^{*R}}{1+\varepsilon^{*R}}\right]$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

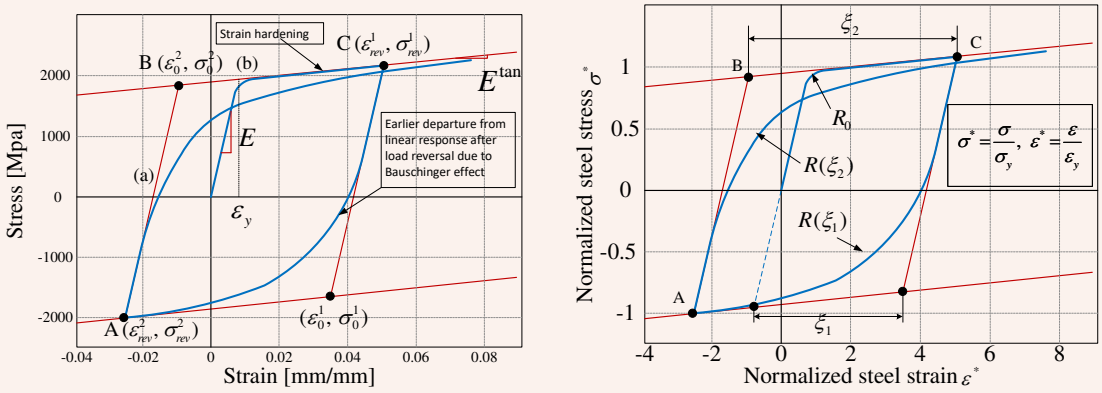


Figura 62.6: Menegotto pinto (Menegotto e Pinto, 1973) Modelli in acciaio

4. C'è una transizione curva da un asintote linea retta con pendenza E (a) ad un altro asintote con pendenza E^{tan} (b).
5. σ_{rev}, ε_{rev} sono i stress e tensione al punto di inversione di sforzo (punto A), che forma anche l'origine dell'asintoto con pendenza E (a).
6. σ_0 e ε_0 sono lo stress e la tensione al punto di intersezione dei due asintoti (punto B).
7. b è il rapporto di indurimento della tensione tra pendio E^{tan} e Ee R è un parametro che influenza la curvatura della curva di transizione tra i due asintoti e permette una buona rappresentazione dell'effetto Bauschinger.
8. σ_0, ε_0, σ_{rev} e ε_{rev} vengono aggiornati dopo ogni inversione di tensione.
9. R dipende dalla differenza di tensione assoluta tra il punto di intersezione attuale dell'asintote (punto B) e il precedente punto di inversione massima o minima della deformazione (punto C) a seconda che la corrente sia in aumento o in diminuzione, rispettivamente.
10. Ci sono due espressioni per $R(\xi)$:

    - Modello originale Menegotto-Pinto $R(\xi) = R_0 - \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$
    - Quello riportato in OpenSees: $R(\xi) = R_0 \left(1 - \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}\right)$

    dove, R_0 è il valore del parametro R durante il primo carico, e cR_1 e cR_2 sono parametri sperimentali determinati da definire insieme con R_0. ξ può essere espresso come

$$\xi = \left| \frac{\varepsilon^m - \varepsilon_0}{\varepsilon_y} \right|$$

    dove, ε^m è la varietà al punto di inversione massima o minima precedente a seconda che il ceppo attuale sia in aumento o in diminuzione, rispettivamente. ε_0 è la tensione al punto di intersezione attuale dei due asintoti.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

11. entrambi ε^m e ε_0 si trovano lungo lo stesso asintote e ε_y è la prima tensione di resa.
12. Finora, modello non si riferisce all'indurimento isotropico nel carico ciclico inverso. Filippou ha proposto turni di σ_0 e ε_0 nell'asintote a rendimento lineare come segue:

    - Se lo sforzo incrementale $\Delta\varepsilon$ cambia un valore positivo a un valore negativo:

$$\Delta^N = 1 + a_1 \cdot \left(\frac{\varepsilon^{max} - \varepsilon^{min}}{2 \cdot a_2 \cdot \varepsilon_y}\right)^{0.8}$$
$$\varepsilon_0 = \frac{-\sigma_y \cdot \Delta^N + E^{tan} \cdot \varepsilon_y \cdot \Delta^N - \sigma_{rev} + E \cdot \varepsilon_{rev}}{E - E^{tan}}$$
$$\sigma_0 = -\sigma_y \cdot \Delta^N + E^{tan} \cdot (\varepsilon_o + \varepsilon_y \cdot \Delta^N)$$

    - Se lo sforzo incrementale $\Delta\varepsilon$ cambia un valore negativo a un valore positivo,

$$\Delta^P = 1 + a_3 \cdot \left(\frac{\varepsilon^{max} - \varepsilon^{min}}{2 \cdot a_4 \cdot \varepsilon_y}\right)^{0.8}$$
$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_y \cdot \Delta^P - E^{tan} \cdot \varepsilon_y \cdot \Delta^P - \sigma_{rev} + E \cdot \varepsilon_{rev}}{E - E^{tan}}$$
$$\sigma_0 = \sigma_y \cdot \Delta^P + E^{tan} \cdot (\varepsilon_o - \varepsilon_y \cdot \Delta^P)$$

    dove, a_1 e a_3 sono parametro isotropic indurimento che riflettono un aumento della busta di resa di compressione attraverso una frazione del rendimento forza dopo uno sforzo plastico $a_2 \cdot \frac{\sigma_y}{E}$, e la tensione di resa busta come una frazione della resistenza alla resa dopo uno sforzo plastico di $a_4 \cdot \frac{\sigma_y}{E}$. a_2 e a_4 sono parametro isotropic indurimento rispetto a a_1 e a_3e ε_{max} e ε_{min} sono la tensione al punto di inversione massima e minima.
13. Il problema è che a_1, a_2, a_3 e a_4 deve essere determinato attraverso il montaggio a curva del modello con risultati sperimentali. I valori di default sono $a_1 = 0$, $a_2 = 55$, $a_3 = 0$e $a_4 = 55$. Nota somiglianza con modello precedente; Fig. 62.7,62.8, 62.9 e 62.10.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

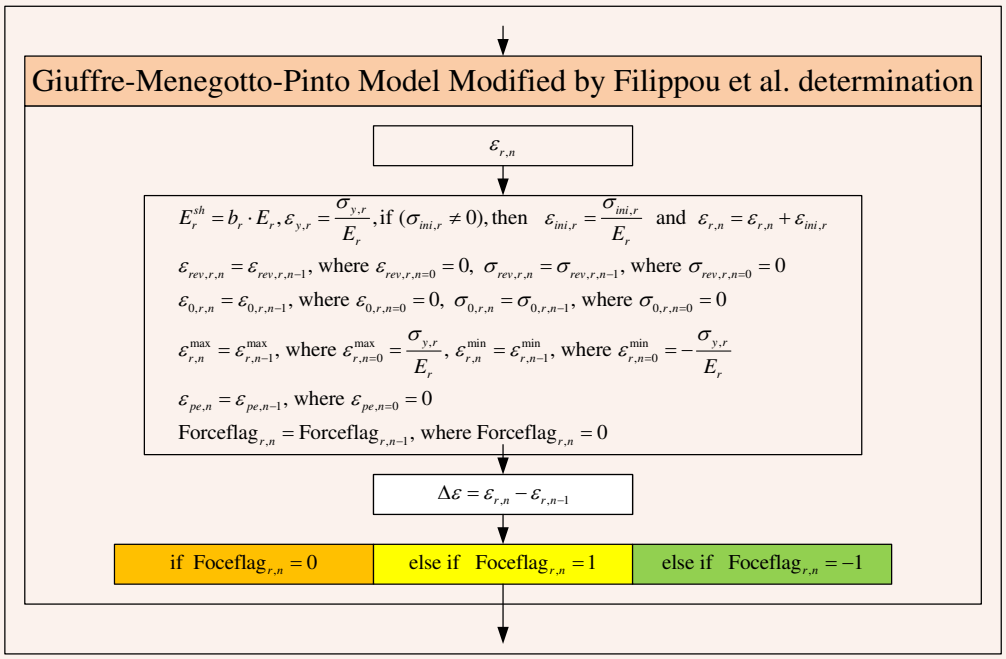


Figura 62.7: Determinazione (1) per modello giuffre-menegotto-pinto modificato da filippou et al.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

if $\text{Foceflag}_{r,n} = 0$

if $\Delta\varepsilon = 0$	else if $\Delta\varepsilon < 0$	else if $\Delta\varepsilon > 0$
$\varepsilon_{rev,r,n} = 0$	$\varepsilon_{rev,r,n} = 0$	$\varepsilon_{rev,r,n} = 0$
$\sigma_{rev,r,n} = 0$	$\sigma_{rev,r,n} = 0$	$\sigma_{rev,r,n} = 0$
$\varepsilon_{0,r,n} = 0$	$\varepsilon_{0,r,n} = \sigma_{y,r} / E_r$	$\varepsilon_{0,r,n} = -\sigma_{y,r} / E_r$
$\sigma_{0,r,n} = 0$	$\sigma_{0,r,n} = \sigma_{y,r}$	$\sigma_{0,r,n} = -\sigma_{y,r}$
$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \sigma_{y,r} / E_r$	$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \sigma_{y,r} / E_r$	$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \sigma_{y,r} / E_r$
$\varepsilon_{r,n}^{\min} = -\sigma_{y,r} / E_r$	$\varepsilon_{r,n}^{\min} = -\sigma_{y,r} / E_r$	$\varepsilon_{r,n}^{\min} = -\sigma_{y,r} / E_r$
$\text{Forceflag}_{r,n} = 0$	$\varepsilon_{pe,n} = \varepsilon_{r,n}^{\min}$	$\varepsilon_{pe,n} = \varepsilon_{r,n}^{\max}$
$\sigma_{r,n} = \sigma_{ini,r}$	$\text{Forceflag}_{r,n} = 1$	$\text{Forceflag}_{r,n} = -1$
$E_{r,n}^{\tan} = E_r$	$\xi = \left\lvert \frac{\varepsilon_{pe,n} - \varepsilon_{0,r,n}}{\varepsilon_{y,r}} \right\rvert$	$\xi = \left\lvert \frac{\varepsilon_{pe,n} - \varepsilon_{0,r,n}}{\varepsilon_{y,r}} \right\rvert$
	$R = R_0 - R_0^{nratio} \cdot \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$	$R = R_0 - R_0^{nratio} \cdot \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$
	$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$	$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$
	$c_1 = 1 + \lvert\dot{\varepsilon}\rvert^R$	$c_1 = 1 + \lvert\dot{\varepsilon}\rvert^R$
	$c_2 = c_1^{1/R}$	$c_2 = c_1^{1/R}$
	$\sigma_{r,n} = b_r \cdot \dot{\varepsilon} + (1 - b_r) \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{c_2}$	$\sigma_{r,n} = b_r \cdot \dot{\varepsilon} + (1 - b_r) \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{c_2}$
	$\sigma_{r,n} = \sigma_{r,n} \cdot (\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}) + \sigma_{rev,r,n}$	$\sigma_{r,n} = \sigma_{r,n} \cdot (\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}) + \sigma_{rev,r,n}$
	$E_{r,n}^{\tan} = b_r + \frac{(1 - b_r)}{c_1 \cdot c_2}$	$E_{r,n}^{\tan} = b_r + \frac{(1 - b_r)}{c_1 \cdot c_2}$
	$E_{r,n}^{\tan} = E_{r,n}^{\tan} \cdot \frac{\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$	$E_{r,n}^{\tan} = E_{r,n}^{\tan} \cdot \frac{\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$

Figura 62.8: Determinazione (2) per il modello giuffre-menegotto-pinto modificato da filippou et al.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

else if $\text{Foceflag}_{r,n} = 1$

if $\Delta\varepsilon < 0$	else if $\Delta\varepsilon > 0$
$\varepsilon_{rev,r,n}, \quad \sigma_{rev,r,n}$	$\varepsilon_{rev,r,n}, \quad \sigma_{rev,r,n}, \quad \varepsilon_{0,r,n}, \quad \sigma_{0,r,n}$
$\Delta^N = 1 + a_1 \cdot \left(\frac{\varepsilon_{r,n}^{\max} - \varepsilon_{r,n}^{\min}}{2 \cdot a_2 \cdot \varepsilon_y} \right)^{0.8}$	$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \text{Max}\left[\varepsilon_{r,n}^{\max}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$
$\varepsilon_{0,r,n} = \frac{-\sigma_{y,r} \cdot \Delta^N + E_r^{sh} \cdot \varepsilon_{y,r} \cdot \Delta^N - \sigma_{rev,r,n} + E_r \cdot \varepsilon_{rev,r,n}}{E_r - E_r^{sh}}$	$\varepsilon_{r,n}^{\min} = \text{Min}\left[\varepsilon_{r,n}^{\min}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$
$\sigma_{0,r,n} = -\sigma_{y,r} \cdot \Delta^N + E_r^{sh} \cdot (\varepsilon_{0,r,n} + \varepsilon_{y,r} \cdot \Delta^N)$	$\varepsilon_{pe,n} = \varepsilon_{r,n}^{\max}$
$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \text{Max}\left[\varepsilon_{r,n}^{\max}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$	$\text{Forceflag}_{r,n} = 1$
$\varepsilon_{r,n}^{\min} = \text{Min}\left[\varepsilon_{r,n}^{\min}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$	$\xi = \left\lvert \frac{\varepsilon_{pe,n} - \varepsilon_{0,r,n}}{\varepsilon_{y,r}} \right\rvert$
$\varepsilon_{pe,n} = \varepsilon_{r,n}^{\min}$	$R = R_0 - R_0^{nratio} \cdot \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$
$\text{Forceflag}_{r,n} = -1$	$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$
$\xi = \left\lvert \frac{\varepsilon_{pe,n} - \varepsilon_{0,r,n}}{\varepsilon_{y,r}} \right\rvert$	$c_1 = 1 + \lvert \dot{\varepsilon} \rvert^R$
$R = R_0 - R_0^{nratio} \cdot \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$	$c_2 = c_1^{1/R}$
$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$	$\sigma_{r,n} = b_r \cdot \dot{\varepsilon} + (1 - b_r) \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{c_2}$
$c_1 = 1 + \lvert \dot{\varepsilon} \rvert^R$	$\sigma_{r,n} = \sigma_{r,n} \cdot (\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}) + \sigma_{rev,r,n}$
$c_2 = c_1^{1/R}$	$E_{r,n}^{\tan} = b_r + \frac{(1 - b_r)}{c_1 \cdot c_2}$
$\sigma_{r,n} = b_r \cdot \dot{\varepsilon} + (1 - b_r) \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{c_2}$	$E_{r,n}^{\tan} = E_{r,n}^{\tan} \cdot \frac{\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$
$\sigma_{r,n} = \sigma_{r,n} \cdot (\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}) + \sigma_{rev,r,n}$	
$E_{r,n}^{\tan} = b_r + \frac{(1 - b_r)}{c_1 \cdot c_2}$	
$E_{r,n}^{\tan} = E_{r,n}^{\tan} \cdot \frac{\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$	

Figura 62.9: Determinazione (3) per il modello giuffre-menegotto-pinto modificato da filippou et al.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

else if $\text{Foceflag}_{r,n} = -1$

if $\Delta\varepsilon > 0$	else if $\Delta\varepsilon < 0$
$\varepsilon_{rev,r,n}, \quad \sigma_{rev,r,n}$	$\varepsilon_{rev,r,n}, \quad \sigma_{rev,r,n}, \quad \varepsilon_{0,r,n}, \quad \sigma_{0,r,n}$
$\Delta^P = 1 + a_3 \cdot \left(\frac{\varepsilon_{r,n}^{\max} - \varepsilon_{r,n}^{\min}}{2 \cdot a_4 \cdot \varepsilon_y} \right)^{0.8}$	$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \text{Max}\left[\varepsilon_{r,n}^{\max}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$
$\varepsilon_{0,r,n} = \frac{\sigma_{y,r} \cdot \Delta^P - E_r^{sh} \cdot \varepsilon_{y,r} \cdot \Delta^P - \sigma_{rev,r,n} + E_r \cdot \varepsilon_{rev,r,n}}{E_r - E_r^{sh}}$	$\varepsilon_{r,n}^{\min} = \text{Min}\left[\varepsilon_{r,n}^{\min}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$
$\sigma_{0,r,n} = \sigma_{y,r} \cdot \Delta^P + E_r^{sh} \cdot (\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{y,r} \cdot \Delta^P)$	$\varepsilon_{pe,n} = \varepsilon_{r,n}^{\min}$
$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \text{Max}\left[\varepsilon_{r,n}^{\max}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$	$\text{Forceflag}_{r,n} = -1$
$\varepsilon_{r,n}^{\min} = \text{Min}\left[\varepsilon_{r,n}^{\min}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$	$\xi = \left\lvert \frac{\varepsilon_{pe,n} - \varepsilon_{0,r,n}}{\varepsilon_{y,r}} \right\rvert$
$\varepsilon_{pe,n} = \varepsilon_{r,n}^{\max}$	$R = R_0 - R_0^{nratio} \cdot \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$
$\text{Forceflag}_{r,n} = 1$	$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$
$\xi = \left\lvert \frac{\varepsilon_{pe,n} - \varepsilon_{0,r,n}}{\varepsilon_{y,r}} \right\rvert$	$\text{c}_1 = 1 + \lvert \dot{\varepsilon} \rvert^R$
$R = R_0 - R_0^{nratio} \cdot \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$	$\text{c}_2 = \text{c}_1^{1/R}$
$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$	$\sigma_{r,n} = b_r \cdot \dot{\varepsilon} + (1 - b_r) \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{\text{c}_2}$
$\text{c}_1 = 1 + \lvert \dot{\varepsilon} \rvert^R$	$\sigma_{r,n} = \sigma_{r,n} \cdot (\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}) + \sigma_{rev,r,n}$
$\text{c}_2 = \text{c}_1^{1/R}$	$E_{r,n}^{\tan} = b_r + \frac{(1 - b_r)}{\text{c}_1 \cdot \text{c}_2}$
$\sigma_{r,n} = b_r \cdot \dot{\varepsilon} + (1 - b_r) \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{\text{c}_2}$	$E_{r,n}^{\tan} = E_{r,n}^{\tan} \cdot \frac{\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$
$\sigma_{r,n} = \sigma_{r,n} \cdot (\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}) + \sigma_{rev,r,n}$	
$E_{r,n}^{\tan} = b_r + \frac{(1 - b_r)}{\text{c}_1 \cdot \text{c}_2}$	
$E_{r,n}^{\tan} = E_{r,n}^{\tan} \cdot \frac{\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$	

Figura 62.10: Determinazione (4) per il modello giuffre-menegotto-pinto modificato da filippou et al.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

62.2.2 Modelli concreti

Dalla tesi di dottorato «An Optimized Computational Environment for Real Time Hybrid Simulation» by Kang, 2010.

62.2.2.1 Effetto della confinamento

24 Prima di procedere con modelli costitutivi concreti, è importante notare il ruolo del confinamento sulla curva dello stress-strain.

25 Richart, Brandtzæg e Brown, 1928 condotto uno dei primi e più completo studio in cui i nuclei di cemento all'interno di una cella di Hooke pressurizzata olio sono stati testati, Fig. 62.11. e ha scoperto che la pressione limitante aumenterà effettivamente la forza[2]

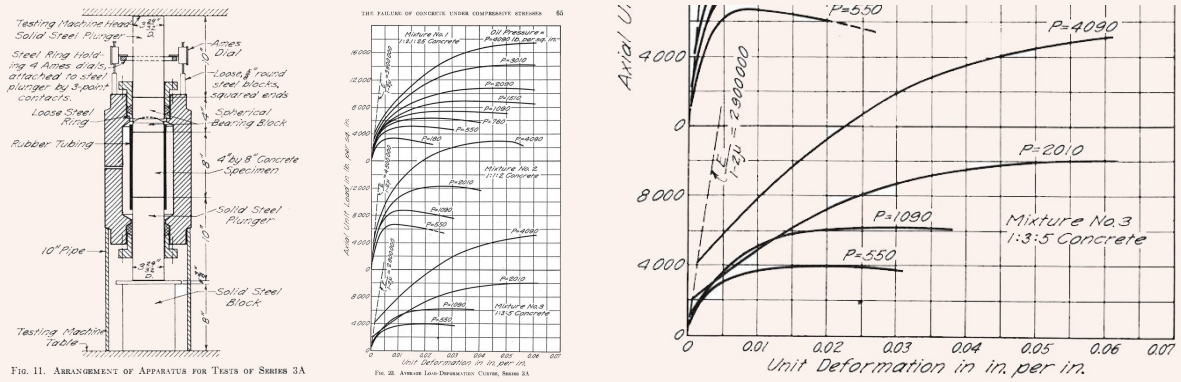


Fig. 11. Arrangement of Apparatus for Tests of Series 3A

Figura 62.11: Effetto di confinamento sulla forza concreta (Richart, Brandtzæg e Brown, 1928)

26 Da allora, molti modelli sono stati proposti per l'impatto del confinamento sulla forza concreta e soprattutto per Mander, Priestley e Park, 1988 che ha pubblicato lo studio sommario più autorevole sull'impatto del confinamento.

27 Questi risultati sono molto rilevanti per il nostro studio, come nel nostro caso la confinazione sarà fornita da legami/stirruzioni.

28 Il (Mander, Priestley e Park, 1988) modello, Fig. 62.12 definisce i seguenti valori:

ε_0 Ceppo concreto al massimo stress non compromesso
ε_{0c} $K\varepsilon_0$
ε_{20c} Ceppo concreto a 20% di massima sollecitazione
ε_{50U} $\frac{3+0.002 f_c'}{f_c'-1000}$

[2] Questo può essere facilmente verificato dalla costruzione del cerchio di Mohr supponendo una modalità di guasto scorrevole.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

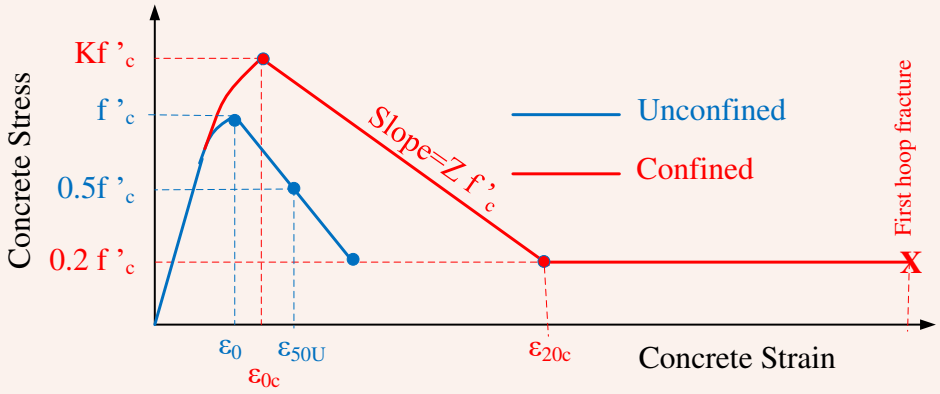


Figura 62.12: Confintato *vs.* forza di calcestruzzo compressivo non confusa (Mander, Priestley e Park, 1988)

.

$K \quad 1 + \rho_s \frac{f_y}{f_c'}$
$Z_c f_c' \quad \frac{\Delta f_c}{\Delta \varepsilon_c}$

29 L’impatto della confinazione sulla forza è mostrato in Fig. 62.13

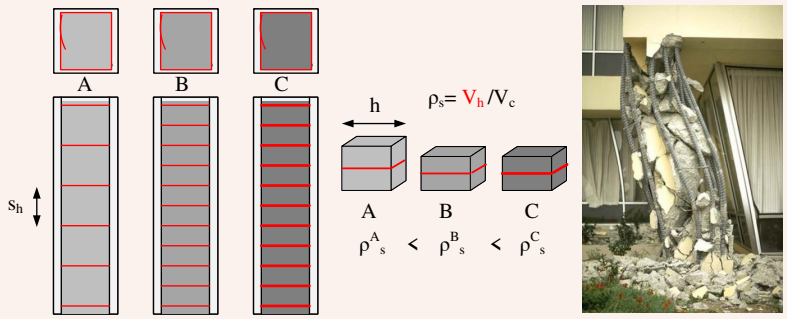


Figura 62.13: Ruolo di agitazioni nel fornire confinamento concreto

62.2.2.2 Modello modificato di Kent e Park

62.2.2.2.1 Relazione tensione–deformazione

30 Il modello concreto descrive la relazione concreta dello stress-strain in base a una storia arbitraria di ceppi ciclici, in particolare il modello implementato tiene conto di quattro fattori importanti:

1. Effetto di confinamento in calcestruzzo sulla curva della busta monotonica nella

COPIA DI REVISIONE

compressione, Fig. 62.12 (Mander, Priestley e Park, 1988) (Richart, Brandtzæg e Brown, 1928)

2. Degrado di successo della rigidità sia delle curve di scarico che di ricarica, per aumentare i valori di tensione di compressione
3. Effetto di tensione irrigidimento
4. Risposta isterica sotto carico ciclico in compressione

31 La curva di involucro monotonico del cemento in compressione segue il modello originale Kent e Park, 1971 e ampliato da Scott, Park e Priestley, 1982Anche se da allora sono stati pubblicati modelli più precisi e completi, il cosiddetto modello Kent and Park modificato offre un buon equilibrio tra semplicità e precisione.

32 Irrigidimento della tensione è la capacità di cemento tra crepe per resistere allo stress trasile e contribuire alla rigidità flessorale del membro. A causa della natura discreta delle crepe, il cemento tra le fessure rimane legato al rinforzo e contribuisce così alla rigidità del membro. Tuttavia, poiché aumenta la magnitudine del carico, si formano ulteriori crepe a intervalli più ravvicinati, riducendo così lo stress trasile che può essere sviluppato nel cemento. Pertanto, l'irrigidimento della tensione viene gradualmente ridotto in quanto il carico è aumentato nella fase post-cracking.

33 Gli investigatori passati hanno preso in considerazione la tensione irrigidante modificando il rapporto di sforzo concreto-strain tale che, dopo aver raggiunto la resistenza alla trazione (cracking), lo stress della trazione riduce gradualmente a zero come la tensione è aumentata. La riduzione graduale della resistenza alla trazione è spesso approssimata come lineare, multilineare o esponenziale; si adotta un approccio simile con una velocità di riduzione lineare.

34 Tuttavia, i risultati indicano che l'applicazione di tensione indurimento su tutte le fibre di un membro può portare a una significativa sovrastima della forza finale. Piuttosto l'irrigidimento della tensione è un fenomeno localizzato che colpisce il cemento nelle immediate vicinanze del rinforzo. In studi analitici, solo le fibre di cemento all'interno di un'area efficace intorno ai rinforzi sono assegnati ad ammorbidimento della tensione. Chiaramente, la dimensione dell'area effettiva ha un effetto significativo sul comportamento di irrigidamento della tensione del membro.

35 Nel modello Kent and Park modificato 1971 mostrata in Fig. 62.14, il rapporto monotonico di sforzo-strain concreto nella compressione è empiricamente definito da tre regioni.Adottare la convenzione che la compressione è positiva, le tre regioni sono:

- Regione OA: $\varepsilon_c \leq \varepsilon_0$

$$\sigma_c = K \cdot f_c \cdot \left[2 \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right]$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

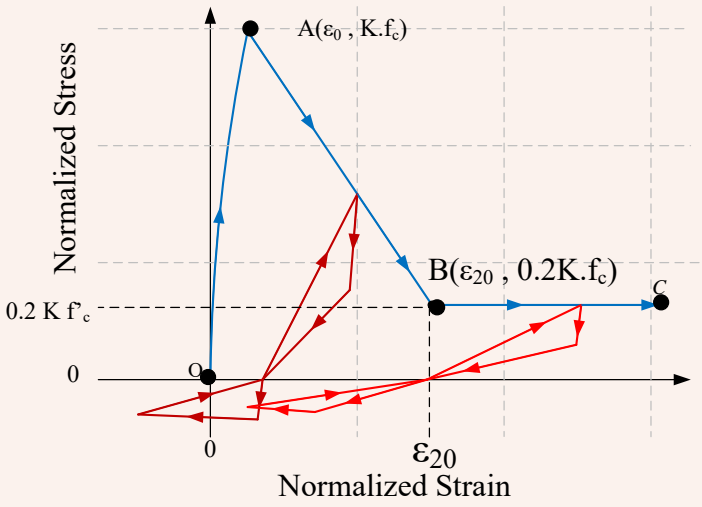


Figura 62.14: Modello di materiale in calcestruzzo a compressione (Yassin, 1994)

- Regione AB: $\varepsilon_0 < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{20}$

$$\sigma_c = K \cdot f_c \cdot [1 - Z(\varepsilon_c - \varepsilon_0)]$$

- Regione BC: $\varepsilon_c > \varepsilon_{20}$

$$\sigma_c = 0.2 \cdot K \cdot f_c$$

36 I moduli tangenti corrispondenti sono dati dalle seguenti equazioni

- Regione OA: $\varepsilon_c \leq \varepsilon_0$

$$E^{tan} = \frac{2 \cdot K \cdot f_c}{\varepsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}\right)$$

- Regione AB: $\varepsilon_0 < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{20}$

$$E^{tan} = -Z \cdot K \cdot f_c$$

- Regione BC: $\varepsilon_c > \varepsilon_{20}$

$$E^{tan} = 0$$

dove,

$$\varepsilon_0 = 0.002 \cdot K$$

$$K = 1 + \frac{\rho_s \cdot f_{ys}}{f_c}$$

$$Z = \frac{0.5}{\frac{3+0.29 \cdot f_c}{145 \cdot f_c - 1000} + 0.75 \cdot \rho_s \cdot \sqrt{\frac{h}{s_h}} - 0.002 \cdot K}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove

ε_0 ceppo di cemento corrispondente massima stress
ε_{20} ceppo di cemento al 20 per cento della massima sollecitazione
K fattore che rappresenta l'aumento di forza dovuto alla confinamento
Z deformazione ammorbidente
f_c forza cilindro di compressione in MPa (1 MPa = 145 psi)
f_{ys} forza di rendimento delle staffe in MPa
ρ_s rapporto del volume di rinforzo dell'hoop al volume del nucleo di cemento misurato all'esterno di staffe
h larghezza del nucleo di cemento misurato all'esterno delle staffe
s_h centro per centro spaziatura di staffe o gruppi hoop.

37 Il comportamento di scarico e ricarica ciclico è rappresentato da una serie di linee rette. Fig. 62.14 mostra che il comportamento isteretico si verifica sotto, sia, tensione e compressione stress.

38 Anche se i cicli di isteresi della compressione e della trazione sono continui, saranno discussi separatamente per il bene della chiarezza.

39 Tabella 62.1 riassumere le proprietà elasiche chiave e di forza del cemento confinato e non confuso. f_c in psi per f_t; Un'alternativa alla Kent e Park residuo stress/strain è da usare $f_{c,res}^{conf} = 0.9 f_c$ e ε_{res}^{conf} viene assegnato un valore "large' per garantire una discesa graduale. Questa combinazione garantisce analisi stabile (Ghannoum, 2010).

Tabella 62.1: Confintato *vs.* proprietà elastiche e di resistenza in calcestruzzo non confusi

	ε_0	f_c	f_t	E_0	E_t	$f_{c,20}$	ε_{20}
Non confinato	0.003	Test di prova	$7.5\sqrt{f_c^{unc}}$	$2\frac{f_c^{unc}}{\varepsilon_0^{unc}}$	$\frac{E_0^{unc}}{5}$	$f_c^{unc}/3$	$3\varepsilon_0^{unc}$
Confintato	$0.002K$	Kf_c^{unc}	$7.5\sqrt{f_c^{unc}}$	$2\frac{f_c^{conf}}{\varepsilon_0^{conf}}$	$\frac{E_0^{conf}}{5}$	$0.2f_c^{conf}$	$\varepsilon_0^{conf} + \frac{Kf_c^{unc} - f_{c,20}^{confined}}{ZKf_c^{unc}}$

Compressione

40 Sul lato della compressione del modello, c'è un *degrado successivo* di rigidità sia delle linee di scarico che di ricarica per valori crescenti della massima tensione, come mostrato in Fig. 62.14. Il degrado della rigidità è tale che le proiezioni di tutte le linee di ricarica si intersecano ad un punto comune R in Fig. 62.15. Punto R è determinata dall'intersezione del tangente alla curva di busta monotonica all'origine e dalla proiezione della linea di scarico dal punto B che corrisponde alla forza concreta di $0.2 \cdot f_c$ (Fig. 62.15).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

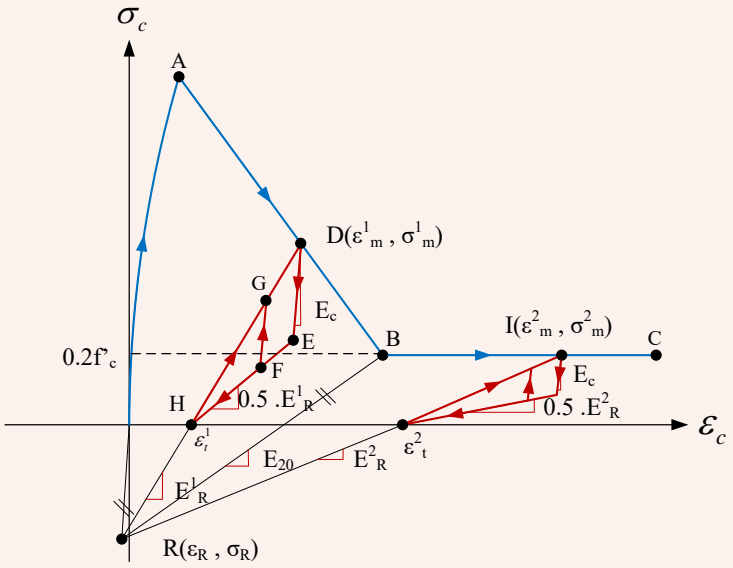


Figura 62.15: Modello di materiale calcestruzzo sotto carico ciclico in compressione (Yassin, 1994)

41 La tensione e lo stress al punto di intersezione sono date dalle seguenti espressioni

$$\varepsilon_R = \frac{0.2 \cdot K \cdot f_c - E_{20} \cdot \varepsilon_{20}}{E_c - E_{20}}$$
$$\sigma_R = E_c \cdot \varepsilon_R \tag{62.4}$$

dove E_c è il modulo tangente della curva di busta monotonica all'origine, E_{20} è il modulo di scarico al punto B della curva monotonica con una forza di $0.2 \cdot f_c$. La grandezza di E_{20} deve essere determinato sperimentalmente.

42 Dopo aver scaricato da un punto sulla busta monotonica di compressione (punto D in Fig. 62.15), e prima di raggiungere l'asse zero dello stress (punto H in Fig. 62.15), la risposta del modello segue due buste più piccole che sono definite dalle seguenti equazioni,

- Busta massima (linea HD)

$$\sigma_{max} = \sigma_m + E_R \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_m) \tag{62.5}$$

- Busta minima (linea HE)

$$\sigma_{min} = 0.5 \cdot E_R \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_t) \tag{62.6}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove,

$$\begin{aligned} E_R &= \frac{\sigma_m - \sigma_R}{\varepsilon_m - \varepsilon_R} \\ \varepsilon_t &= \varepsilon_m - \frac{\sigma_m}{E_R} \end{aligned} \tag{62.7}$$

σ_m e ε_m sono lo stress e la tensione al punto di scarico della busta monotonica comprimitiva, rispettivamente. Pertanto le posizioni delle due buste più piccole dipendono dalla posizione del punto di scaricamento.

43 Per cicli di carico e scarico parziali all'interno delle buste più piccole il modello segue la linea retta con modulo E_c.

44 Nell'implementazione numerica si assume uno stress di prova e modulo tangente basato sul comportamento elastico lineare con pendenza E_c,

$$\sigma_{c,n}^{tr} = \sigma_{c,n-1} + E_c \cdot \Delta\varepsilon_{c,n} \tag{62.8}$$

dove $\sigma_{c,n}^{tr}$ è lo stress di prova aggiornato, $\sigma_{c,n-1}$ è lo stato di stress precedente e $\Delta\varepsilon_{c,n}$ è l'incremento della tensione. Le seguenti regole vengono poi utilizzate per determinare lo stress effettivo e il modulo del modello

$$\begin{aligned} &\text{if} \quad \sigma_{min} \le \sigma_{c,n}^{tr} \le \sigma_{max} \ \text{ then } \ \sigma_{c,n} = \sigma_{c,n}^{tr} \ \text{ and } \ E^{tan} = E_c \\ &\text{if} \quad \sigma_{c,n}^{tr} < \sigma_{min} \ \text{ then } \ \sigma_{c,n} = \sigma_{min} \ \text{ and } \ E^{tan} = 0.5 \cdot E_r \\ &\text{if} \quad \sigma_{c,n}^{tr} > \sigma_{max} \ \text{ then } \ \sigma_{c,n} = \sigma_{max} \ \text{ and } \ E^{tan} = E_r \end{aligned} \tag{62.9}$$

45 Le regole che regolano il comportamento isterico del modello in compressione secondo Eq. 62.4 to 62.9 sono illustrati da una storia di esempio in Fig. 62.15.

46 Se lo scarico avviene dal punto D al punto E, il ricaricamento sarà sullo stesso percorso di ritorno a D. Se lo scaricamento raggiunge il punto F, l'isteresis loop DEFGD si tradurrà sul reloading. Se si verifica uno scarico completo al punto H, il ricaricamento comporterà l'esame isteresis loop DEHD. È importante notare che la linea di ricarica sarà sempre ricongiungere la busta monotonica a compressione al punto di scarico iniziale. Per il caso in cui lo scarico continua punto H passato e il modello inizia a ricaricarsi nella tensione, un diverso insieme di regole governano il comportamento isterico. Tuttavia, dopo il ricaricamento della compressione, il modello reinserirà la regione di compressione al punto sull'asse zero dello stress al completamento del caricamento (punto H) e qualsiasi cosa accada nella regione di tensione non influenzerà il comportamento del modello, una volta che ritorna nella regione di compressione.

Tensione

Il comportamento trasile del modello, come mostrato in Fig. 62.16, tiene conto dell'irrigidimento della tensione e del degrado della rigidità di scarico e ricarica per aumentare

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

i valori della massima tensione traslazione dopo la fessurazione iniziale. La massima resistenza alla trazione del calcestruzzo (modulo di rottura) è assunta pari a,

$$f_t = 0.6228\sqrt{f_c} \tag{62.10}$$

dove f_t e f_c sono espressi in MPa.

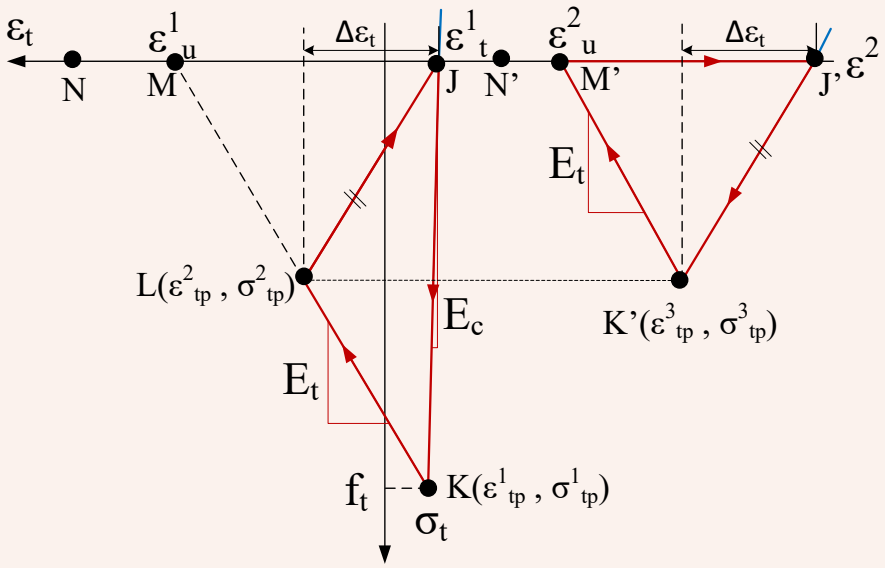


Figura 62.16: Modello di materiale calcestruzzo sotto carico ciclico in tensione (Yassin, 1994)

47 Fig. 62.16 mostra due loop isteresi trasili consecutivi che fanno parte di una storia ciclica campione che includono anche stress da compressione. Il modello assume che lo stress trasile possa verificarsi ovunque lungo l'asse di deformazione, sia a causa del carico iniziale della trazione o come risultato dello scarico da uno stato di compressione. La relazione trazione-strain di stress è definita da tre punti con coordinate $(\varepsilon_t, 0)$, $(\varepsilon_{tp}, \sigma_{tp})$ e $(\varepsilon_u, 0)$, come rappresentato dai punti J, K e M in Fig. 62.16, rispettivamente. ε_t è la tensione al punto in cui la linea di scarico dalla regione di stress della compressione attraversa l'asse di sforzo. ε_t è dato da Eq. 62.7 e modifiche con massima tensione di compressione. ε_{tp} e σ_{tp} sono la tensione e lo stress al picco della relazione trazione-strain e sono date dalle seguenti espressioni,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{tp} &= \varepsilon_t + \Delta\varepsilon_t \\ \sigma_{tp} &= f_t \cdot \left(1 + \frac{E_t}{E_c}\right) - E_t \cdot \Delta\varepsilon_t \end{aligned} \tag{62.11}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove $\Delta\varepsilon_t$ è il differenziale massimo precedente tra la tensione e la resistenza alla trazione ε_t come mostrato in Fig. 62.16.

48 Prima di cracking iniziale, $\Delta\varepsilon_t$ è uguale a f_t/E_c. E_t è il modulo di irrigidimento della tensione che dipende dai parametri numerici e fisici, ε_u è la tensione al punto in cui lo stress trasile viene ridotto a zero e viene data dall'espressione,

$$\varepsilon_u = \varepsilon_t + f_t \cdot \left(\frac{1}{E_t} + \frac{1}{E_c}\right) \tag{62.12}$$

49 Data questi tre punti di controllo, la relazione traslativa e moduli tangenti sono definite dalle seguenti equazioni (l'tensione è positiva),

- Regione JK: $\varepsilon_t < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{tp}$

$$\sigma_c = E^{tan} \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_t), \quad E^{tan} = \frac{\sigma_{tp}}{\varepsilon_{tp} - \varepsilon_t} \tag{62.13}$$

- Regione KM: $\varepsilon_{tp} < \varepsilon_c \leq \varepsilon_u$

$$\sigma_c = \sigma_{tp} + E^{tan} \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_{tp}), \quad E^{tan} = -E_t \tag{62.14}$$

- Regione MN: $\varepsilon_c > \varepsilon_u$

$$\sigma_c = 0, \quad E^{tan} = 0 \tag{62.15}$$

If $\varepsilon_{tp} \geq \varepsilon_u$ poi σ_{tp}, σ_c e E^{tan} sono tutti considerati zero. Il modulo E_t controlla il grado di irrigidimento della tensione controllando la pendenza di Eq. 62.14. Il più ripido del pendio, il più piccolo sarà l'effetto di irrigidimento della tensione. Lo scarico e il ricaricamento dei trazione sono regolati da Eq. 62.13 che comprende anche il degrado della rigidità per aumentare i valori del differenziale di sforzo $\Delta\varepsilon_t$. Il valore del $\Delta\varepsilon_t$ cambia ogni volta $\varepsilon_c - \varepsilon_{tp}$.

50 Il comportamento trasile del modello, come caratterizzato da Eq. 62.10 to 62.15, può essere meglio compreso seguendo i percorsi di carico dell'esempio in Fig. 62.16. Poiché il modello si scarica dalla compressione, attraversa l'asse di tensione al punto J. Poi carica in tensione fino a quando la fesura iniziale avviene al punto K. Oltre il punto K addolcimento inizia fino all'inversione della tensione punto L. Il percorso di scarico segue una linea retta dal punto L al punto J dove il modello si ricarica in compressione, la seconda volta che il modello entra in tensione è al punto G. Il percorso di ricarica J'K' è esattamente la duplicazione del precedente percorso di scarico LJ che è stato spostato una distanza JJ ′ lungo l'asse della tensione. Al punto K' il modello si ricongiunge al ramo di ammorbidimento che continua fino a quando lo stress della trazione viene ridotto allo zero al punto M. Lo sforzo rimane nullo attraverso il punto di inversione del ceppo N' fino a che il modello non ricarichi nella compressione al punto J'. Da allora la capacità di stress trasile del modello è ridotta a zero.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

51 L'attuale modello concreto è relativamente economico in termini di quantità di memoria necessaria alla storia dello stress-strain passato. I parametri che vengono utilizzati come memoria possono essere elencati come segue:

1. lo stress e la tensione al punto corrispondente all'ultimo modello di stato
2. la tensione all'ultimo punto di scarico sulla busta monotonica comprimitiva, ε_m
3. Il differenziale $\Delta\varepsilon_t$ tra la massima tensione precedente e ε_t

52 Il danno concreto considerato nel modello attuale è sotto forma di scarico e ricarica della degrado della rigidità per aumentare i valori del massimo sforzo. Ma il danno concreto effettivo comprende anche la riduzione delle buste monotoniche sotto carico ciclico.

62.2.2.2.2 Determinazione per il modello di kent e park modificato

Fig. 62.17 e 62.18 mostrare la procedura per ottenere stress non assiale σ e modulo tangente E^{tan} da ceppo non assiale ε.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

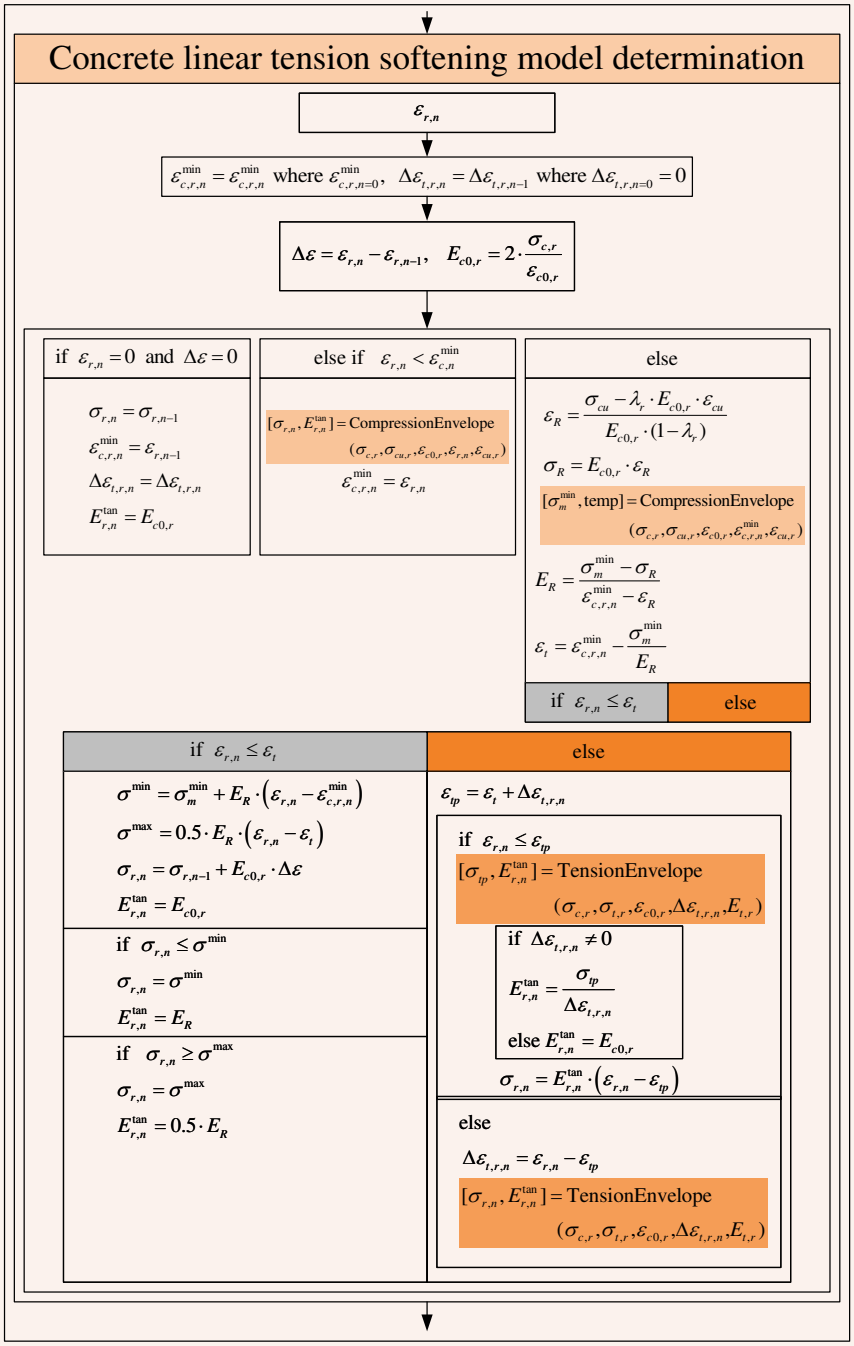


Figura 62.17: Determinazione (1) per il modello di kent e park modificato

COPIA DI REVISIONE

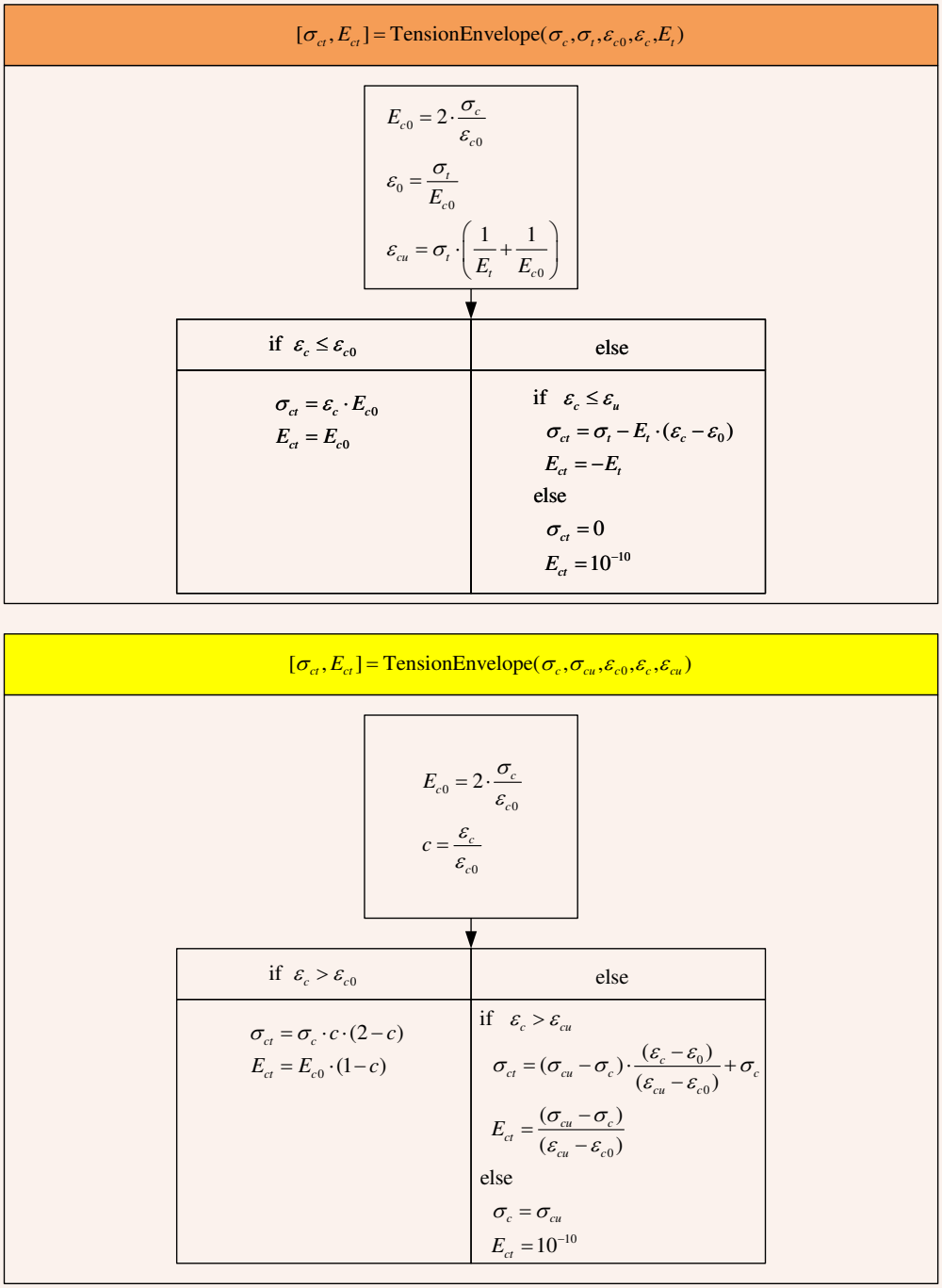


Figura 62.18: Determinazione (2) per il modello di kent e park modificato

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

62.2.3 Modello di danno anisotropico con danni effettivi e recupero della rigidità

Dalla tesi di dottorato «An Optimized Computational Environment for Real Time Hybrid Simulation» by Kang, 2010 e la gentile assistenza del Prof. Ragueneau e del Sig. Lebon di ENS/Cachan.

53 Mentre il modello Kent-Park modificato è stato utilizzato con successo nelle applicazioni di maggio, rimane un modello empirico euristico che prestazioni accurate non possono essere garantite nel contesto della simulazione ibrida in tempo reale con numero limitato di per affrontare questo possibile handicap un altro *modello costitutivo rigoroso e termodinamico* per il cemento è implementato.

62.2.3.1 Modello costitutivo

Potenziale termodinamico

54 Il potenziale di Gibbs (già discusso in§62.1.1) $\rho \cdot \phi^*$ si basa sul quadro di Ladeveze (Ladeveze, 1983) per modello di danno anisotropico. La divisione del tenore di stress in componenti deviatori e idrostatici ci permette di considerare Seperately la taglio e le parti idrostatiche. Furthemore, ogni componente è nuovamente diviso in due ulteriori: il positivo e il negativo per modellare l'effetto unilaterale, Fig. 62.19. Il danno influenza solo la parte positiva attraverso il tenore di danno $\mathbf{D}$.

$$\rho \cdot \phi^* = \frac{1+\nu}{2 \cdot E}\left[\mathrm{Tr}\left(\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\sigma}_+^D\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\sigma}_+^D\right) + \mathrm{Tr}\left(\langle\boldsymbol{\sigma}^D\rangle_-\langle\boldsymbol{\sigma}^D\rangle_-\right)\right] + \frac{1-2\nu}{6\cdot E}\left[\frac{\langle \mathrm{Tr}\boldsymbol{\sigma}\rangle_+^2}{1-D_H} + \langle \mathrm{Tr}\boldsymbol{\sigma}\rangle_-^2\right] \tag{62.16}$$

dove ρ, ν e E sono rispettivamente la densità, il rapporto di Poisson e il modulo Young. Il tenore $\mathbf{H}$ è definito da

$$\mathbf{H} = (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{\frac{1}{2}}$$

dove $(\cdot)^D$ è la deviazione di $(\cdot)$,

$$(\cdot)^D = (\cdot) - \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\cdot)\cdot\mathbf{1}$$

$\langle\cdot\rangle_{+,-}$ è la parte positiva o negativa di $(\cdot)$, e D_H è la parte idrostatica di $\mathbf{D}$,

$$D_H = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\mathbf{D}$$

Nel quadro di Ladeveze (Ladeveze, 1983), $\boldsymbol{\sigma}_+^D$ è una parte positiva insolita $\boldsymbol{\sigma}^D$: if $\boldsymbol{\lambda}_I$ sono i valori di $\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D$ e $\mathbf{T}^I$ il corrispondente eigenvectors, $\boldsymbol{\sigma}_+^D$ is

$$\boldsymbol{\sigma}_+^D = \sum_I \langle\boldsymbol{\lambda}_I\rangle_+ \left(\mathbf{H}^{-1}\cdot\mathbf{T}^I\right)\left(\mathbf{H}^{-1}\cdot\mathbf{T}^I\right)^T$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

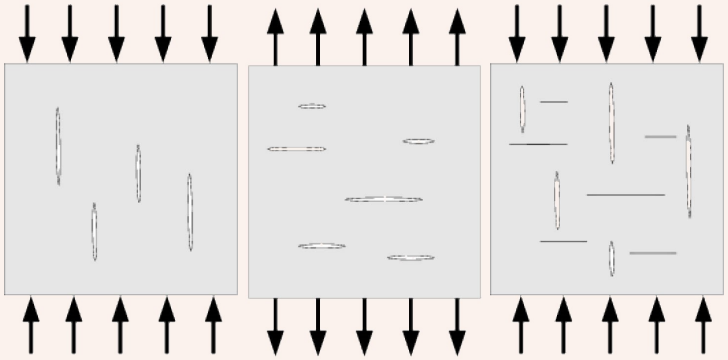


Figura 62.19: Cracks indotti da compressione, tensione, tensione e compressione

Diritto costituzionale

55 La legge costitutiva è derivata dal potenziale di Gibbs utilizzando Eq. 62.16:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \rho \cdot \frac{\partial \phi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ &= \frac{1+\nu}{E}\left[\left(\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\sigma}_+^D\mathbf{H}\right)^D + \langle\boldsymbol{\sigma}^D\rangle_-^D\right] + \frac{1-2\nu}{3\cdot E}\left[\frac{\langle \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\rangle_+}{1-D_H} + \langle \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\rangle_-\right]\cdot\mathbf{I} \\ &= \frac{1+\nu}{E}\cdot\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\cdot\mathrm{Tr}\,(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})\cdot\mathbf{I}\end{aligned}$$

dove $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ è lo stress efficace ottenuto riscrivendo la legge dello sforzo di stress in termini di stress effettivo:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \left[\left(\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\sigma}_+^D\mathbf{H}\right)^D + \langle\boldsymbol{\sigma}^D\rangle_-^D\right] + \left[\frac{\langle \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\rangle_+}{1-D_H} + \langle \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\rangle_-\right]\cdot\mathbf{I}$$

Diritto dell'evoluzione dei danni

56 La legge sull'evoluzione dei danni dovrebbe essere considerata il carico ciclico, quindi il criterio di danno f dovrebbe dipendere da un danno efficace d_ε (Ragueneau et al., 2006) tale

$$\begin{aligned} f &= \hat{\varepsilon} - \kappa\,(d_\varepsilon) \\ d_\varepsilon &= \frac{\mathbf{D} : \langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+}{\max\,(\boldsymbol{\varepsilon}_I)}\end{aligned}$$

dove $\hat{\varepsilon}$ è la tensione di Mazars (Mazars, 1986) definito da

$$\hat{\varepsilon} = \sqrt{\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+ : \langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+}$$

e κ la funzione di consolidamento,

$$\kappa\,(d_\varepsilon) = a\cdot\tan\left[\frac{d_\varepsilon}{aA} + \arctan\left(\frac{\kappa_0}{a}\right)\right]$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove A e a sono due coefficienti di danno, e κ_0 è la soglia iniziale di elasticità.

57 Quindi, se il criterio di danno è negativo, il materiale si trova nella gamma elastica lineare e se è positivo, il danno aumenta lungo la tensione positiva:

$$\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda}\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+$$

dove il danno Lagrange moltiplicatore $\dot{\lambda}$ è determinato dal *Kuhn-Tucker condizione* ($f = 0$ e $f' = 0$).

62.2.3.2 formulazione multifibra non assiale

58 La formulazione multifibra basata sulla teoria del fascio Euler-Bernoulli è equivalente a un carico non assiale, quindi il tenore di stress e il tensore della tensione sono ridotti al

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

59 Il tenore di danno diventa diagonale e la legge costitutiva può essere riscritta come (Desmorat et al., 2008),

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\left(D_1, D_2\right) \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{E} \tag{62.17}$$

dove $\mathbf{B}$ è un tenore diagonale che dipende dalla variabile di danno e dal carico, e D_1 e D_2 sono associati a tensioni e danni di compressione rispettivamente.

60 Riscrive Eq. 62.17 con forma matrice,

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix}$$

so

$$\boldsymbol{\sigma}^D = \begin{pmatrix} \frac{2\sigma}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1\sigma}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1\sigma}{3} \end{pmatrix} \boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-D_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1-D_2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-D_2}} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\sigma}\right) = \sigma \qquad D_H = D_1 + 2D_2$$

$$\varepsilon_e = \frac{1+\nu}{E}\left(\left(\boldsymbol{H}\boldsymbol{\sigma}_+^D\boldsymbol{H}\right)^D + \boldsymbol{\sigma}_-^D\right) + \frac{1-2\nu}{3E}\left[\frac{\langle\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\sigma}\right)\rangle_+}{1-D_H} + \langle\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\sigma}\right)\rangle_-\right]\boldsymbol{Id}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

61 Per la tensione ($\sigma > 0$), presumiamo che solo D_1 aumenta.

$$\varepsilon_e = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \frac{\sigma}{E}\boldsymbol{B^t} = \frac{\sigma}{E}\begin{pmatrix} B_1^t & 0 \\ 0 & B_2^t \end{pmatrix}$$

$$B_1^t = \frac{1+\nu}{9}\left(\frac{4}{1-D_1} + \frac{2}{1-D_2}\right) + \frac{1-2\nu}{3}\frac{1}{1-(D_1+2D_2)}$$
$$B_2^t = \frac{1+\nu}{9}\left(\frac{-2}{1-D_1} - \frac{1}{1-D_2}\right) + \frac{1-2\nu}{3}\frac{1}{1-(D_1+2D_2)}$$

62 Per compressione ($\sigma < 0$), presumiamo che solo D_2 aumenta.

$$\varepsilon_e = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \frac{\sigma}{E}\boldsymbol{B^c} = \frac{\sigma}{E}\begin{pmatrix} B_1^c & 0 \\ 0 & B_2^c \end{pmatrix}$$

$$B_1^c = \frac{1+\nu}{9}\left(\frac{4}{1-D_1} + \frac{2}{1-D_2}\right) + \frac{1-2\nu}{3}$$
$$B_2^c = \frac{1+\nu}{9}\left(\frac{-2}{1-D_1} - \frac{1}{1-D_2}\right) + \frac{1-2\nu}{3}$$

62.2.3.3 Determinazione del modello di danno anisotropico

62.2.3.3.1 Caricamento della tensione: $\varepsilon_{11} > 0$

Equazioni costitutive

63 If $f = \hat{\varepsilon} - \kappa_0 \geq 0$ e $\eta_t = 1$ poi:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{E}{B_{11}^t}\varepsilon \\ \sigma &= \frac{E}{\frac{1+\nu}{9}\cdot\left(\frac{4}{1-D_1}+2\right) + \frac{1-2\nu}{3\left(1-\frac{D_1+2D_2}{3}\right)}}\cdot\varepsilon \\ D_1 &= a\cdot A\left(\texttt{atan}\left(\frac{\varepsilon_{11}}{a}\right) - \texttt{atan}\left(\frac{\kappa_0}{a}\right)\right) \end{aligned} \tag{62.18}$$

dove, $\hat{\varepsilon} = \sqrt{\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+ : \langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+} = \varepsilon_{11} \geq 0$,

$$\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+ = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

64 D_2 è costante e tangente modulo è determinato con Eq. 62.18:

$$\dot{\sigma} = E^{tan} \cdot \dot{\varepsilon} \tag{62.19}$$

65 Tuttavia, se $f = \hat{\varepsilon} - \kappa_0 < 0$, il modulo tangente è uguale a quello del secant.

$$E^{tan} = \frac{E}{B^t_{11}}$$

Modulo di rigidità tangente coerenti in implementazione numerica

66 If $f = \hat{\varepsilon} - \kappa_0 \geq 0$ e $\eta_t = 1$, il modulo tangente è determinato con Eq. 62.18 e 62.19:

$$\begin{aligned}
E^{tan}_n &= \frac{\partial \sigma_n}{\partial \varepsilon_n} \\
B^t_{11,n} &= \frac{1+\nu}{9} \cdot \left(\frac{4}{1 - D_{1,n}} + 2 \right) + \frac{1 - 2\nu}{3 \cdot \left(1 - \frac{(D_{1,n} + 2 \cdot D_{2,n-1})}{3} \right)} \\
D_{1,n} &= a \cdot A \left(\texttt{atan}\left(\frac{\varepsilon_{11,n}}{a} \right) - \texttt{atan}\left(\frac{\kappa_0}{a} \right) \right)
\end{aligned}$$

dove n è passo di eccitazione attuale.

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial \varepsilon_n} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_n} \left(\frac{E}{B^t_{11,n}} \cdot \varepsilon_n \right) = \frac{E}{B^t_{11,n}} - E \cdot \varepsilon_n \frac{1}{(B^t_{11,n})^2} \cdot \frac{\partial B^t_{11,n}}{\partial \varepsilon_n}$$

dove,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B^t_{11,n}}{\partial \varepsilon_n} &= \frac{\partial B^t_{11,n}}{\partial D_{1,n}} \cdot \frac{\partial D_{1,n}}{\partial \varepsilon_n} \\
C_1 = \frac{\partial B^t_{11,n}}{\partial D_{1,n}} &= \frac{1+\nu}{9} \cdot \frac{4}{(1 - D_{1,n})^2} + \frac{1 - 2\nu}{9 \left(1 - \frac{D_{1,n} + 2 D_{2,n-1}}{3} \right)} \\
C_2 = \frac{\partial D_{1,n}}{\partial \varepsilon_n} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_n} \left(a \cdot A \left(\texttt{atan}\left(\frac{\varepsilon_n}{a} \right) - \texttt{atan}\left(\frac{\kappa_0}{a} \right) \right) \right) = \frac{A}{1 + \left(\frac{\varepsilon_n}{a} \right)^2}
\end{aligned}$$

67 Infine, otteniamo modulo tangente:

$$E^{tan}_n = \frac{E}{B^t_{11,n}} - E \cdot \varepsilon_n \cdot \frac{1}{(B^t_{11,n})^2} \cdot C_1 \cdot C_2$$

62.2.3.3.2 Caricamento a compressione: $\varepsilon_{11} < 0$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

Equazioni costitutive

68 If $f = \hat{\varepsilon} - \kappa_0 \geq 0$ e $\eta_t = 1$ poi:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{E}{\frac{1+\nu}{9} \cdot \left(\frac{2}{1-D_2} + 4\right) + \frac{1-2\nu}{3}} \cdot \varepsilon \\ D_2 &= \frac{a \cdot A}{2} \left(\texttt{atan}\left(\frac{\sqrt{2} \cdot \varepsilon_{22}}{a}\right) - \texttt{atan}\left(\frac{\kappa_0}{a}\right)\right) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{B^c_{22}}{B^c_{11}} \cdot \varepsilon_{11} \end{aligned} \tag{62.20}$$

dove, $\hat{\varepsilon} = \sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+} = \sqrt{2 \cdot \varepsilon_{22}^2} \geq 0$,

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} = \varepsilon_{22} \end{pmatrix}$$

69 D_1 è costante e tangente modulo è determinato con Eq. 62.20:

$$\dot{\sigma} = E^{tan} \cdot \dot{\varepsilon} \tag{62.21}$$

70 Tuttavia, se $f = \hat{\varepsilon} - \kappa_0 < 0$, il modulo tangente è uguale a quello del secant.

$$E^{tan} = \frac{E}{B^c_{11}}$$

Modulo di rigidità tangente coerenti in implementazione numerica

71 If $f = \hat{\varepsilon} - \kappa_0 \geq 0$ e $\eta_t = 1$, il modulo tangente è determinato con Eq. 62.20 e 62.21:

$$\begin{aligned} E^{tan}_n &= \frac{\partial \sigma_n}{\partial \varepsilon_n} \\ B^c_{11,n-1} &= \frac{1+\nu}{9} \cdot \left(4 + \frac{2}{1-D_{2,n-1}}\right) + \frac{1-2\nu}{3} \\ B^c_{22,n-1} &= -\frac{1+\nu}{9} \cdot \left(2 + \frac{1}{1-D_{2,n-1}}\right) + \frac{1-2\nu}{3} \\ B^c_{11,n} &= \frac{1+\nu}{9} \cdot \left(4 + \frac{2}{1-D_{2,n}}\right) + \frac{1-2\nu}{3} \\ B^c_{22,n} &= -\frac{1+\nu}{9} \cdot \left(2 + \frac{1}{1-D_{2,n}}\right) + \frac{1-2\nu}{3} \end{aligned}$$

dove n è passo di eccitazione attuale.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

$$\tilde{\nu}_{n-1} = -\frac{B^c_{22,n-1}}{B^c_{11,n-1}}, \quad \varepsilon^{tr}_{22,n} = -\tilde{\nu}_{n-1} \cdot \varepsilon_{11,n}$$
$$\tilde{\nu}_{n} = -\frac{B^c_{22,n}}{B^c_{11,n}}, \quad \varepsilon_{22,n} = -\tilde{\nu}_{n} \cdot \varepsilon_{11,n}$$

dove, $\varepsilon^{tr}_{22,n}$ è la tensione di prova su ε_{22}.

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial \varepsilon_n} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_n}\left(\frac{E}{B^c_{11,n}} \cdot \varepsilon_n\right) = \frac{E}{B^c_{11,n}} - E \cdot \varepsilon_n \frac{1}{(B^c_{11,n})^2} \cdot \frac{\partial B^c_{11,n}}{\partial \varepsilon_n}$$

dove,

$$\frac{\partial B^c_{11,n}}{\partial \varepsilon_n} = \frac{\partial B^c_{11,n}}{\partial D_{2,n}} \cdot \frac{\partial D_{2,n}}{\partial \varepsilon_n}$$
$$C_1 = \frac{\partial B^c_{11,n}}{\partial D_{2,n}} = \frac{2(1+\nu)}{9(1-D_{2,n})^2}$$
$$C_2 = \frac{\partial D_{2,n}}{\partial \varepsilon_n} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_n}\left(a \cdot A\left(\texttt{atan}\left(\frac{-\tilde{\nu}_{n-1} \cdot \sqrt{2} \cdot \varepsilon_{11,n}}{a}\right) - \texttt{atan}\left(\frac{\kappa_0}{a}\right)\right)\right)$$
$$= -\tilde{\nu}_{n-1}\frac{A}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{-\tilde{\nu}_{n-1} \cdot \sqrt{2} \cdot \varepsilon_{11,n}}{a}\right)^2}$$

Infine, otteniamo modulo tangente:

$$E^{tan}_n = \frac{E}{B^c_{11,n}} - E \cdot \varepsilon_n \cdot \frac{1}{(B^c_{11,n})^2} \cdot C_1 \cdot C_2$$

72 Fig. 62.20 descrive il rapporto tra sforzo e stress nel modello di danno anisotropico senza ceppo permanente.

73 Fig. 62.21 to 62.23 mostrare la procedura per ottenere stress non assiale σ e modulo tangente E^{tan} da ceppo non assiale ε.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

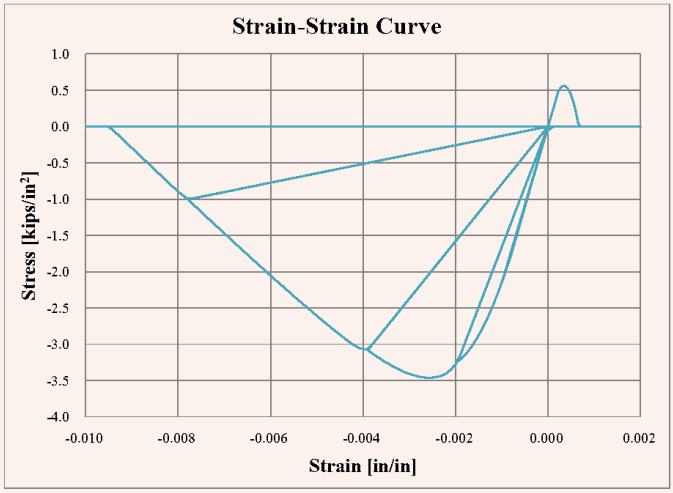


Figura 62.20: Curva tensione–deformazione del modello di danno anisotropico senza deformazione permanente

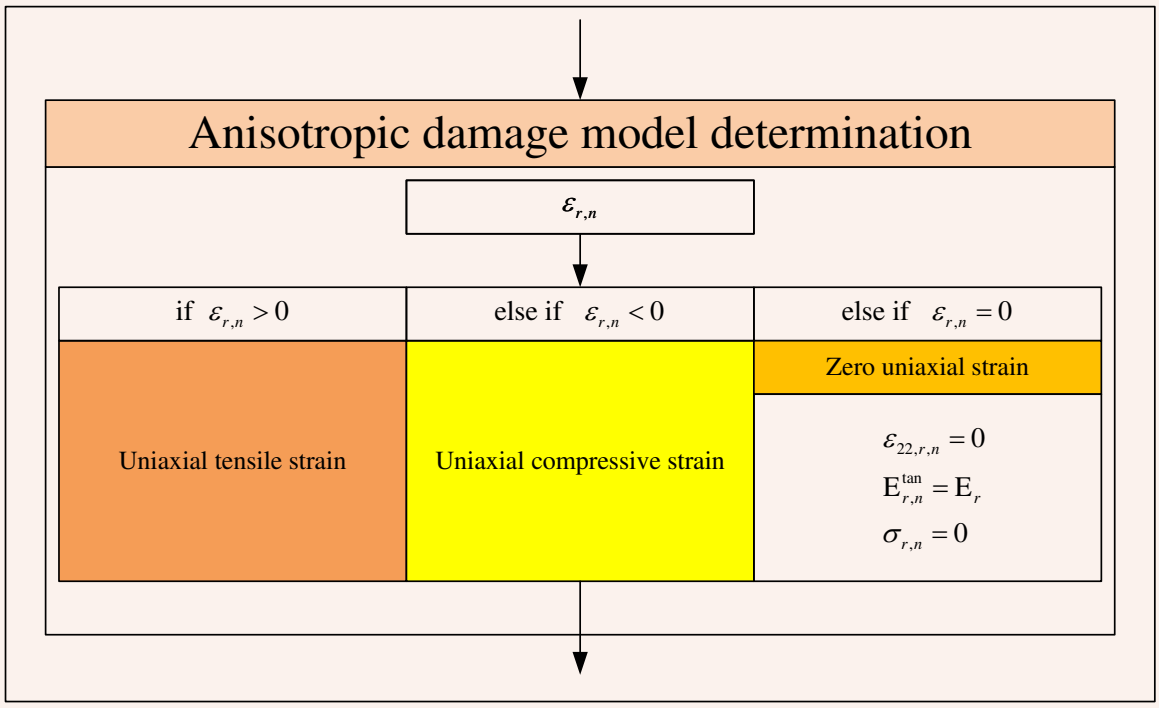


Figura 62.21: Determinazione (1) per il modello di danno anisotropico

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

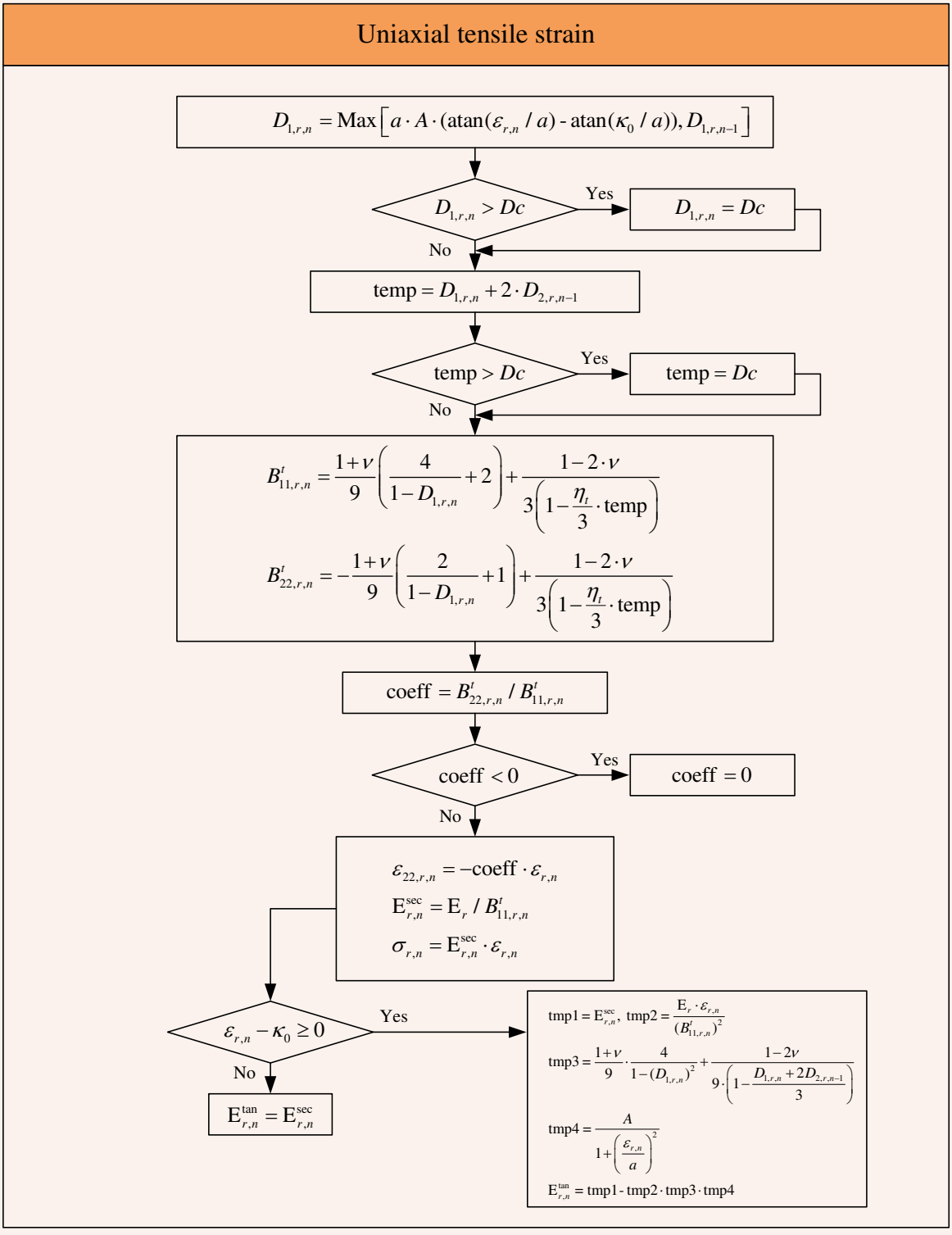


Figura 62.22: Determinazione (2) per il modello di danno anisotropico

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

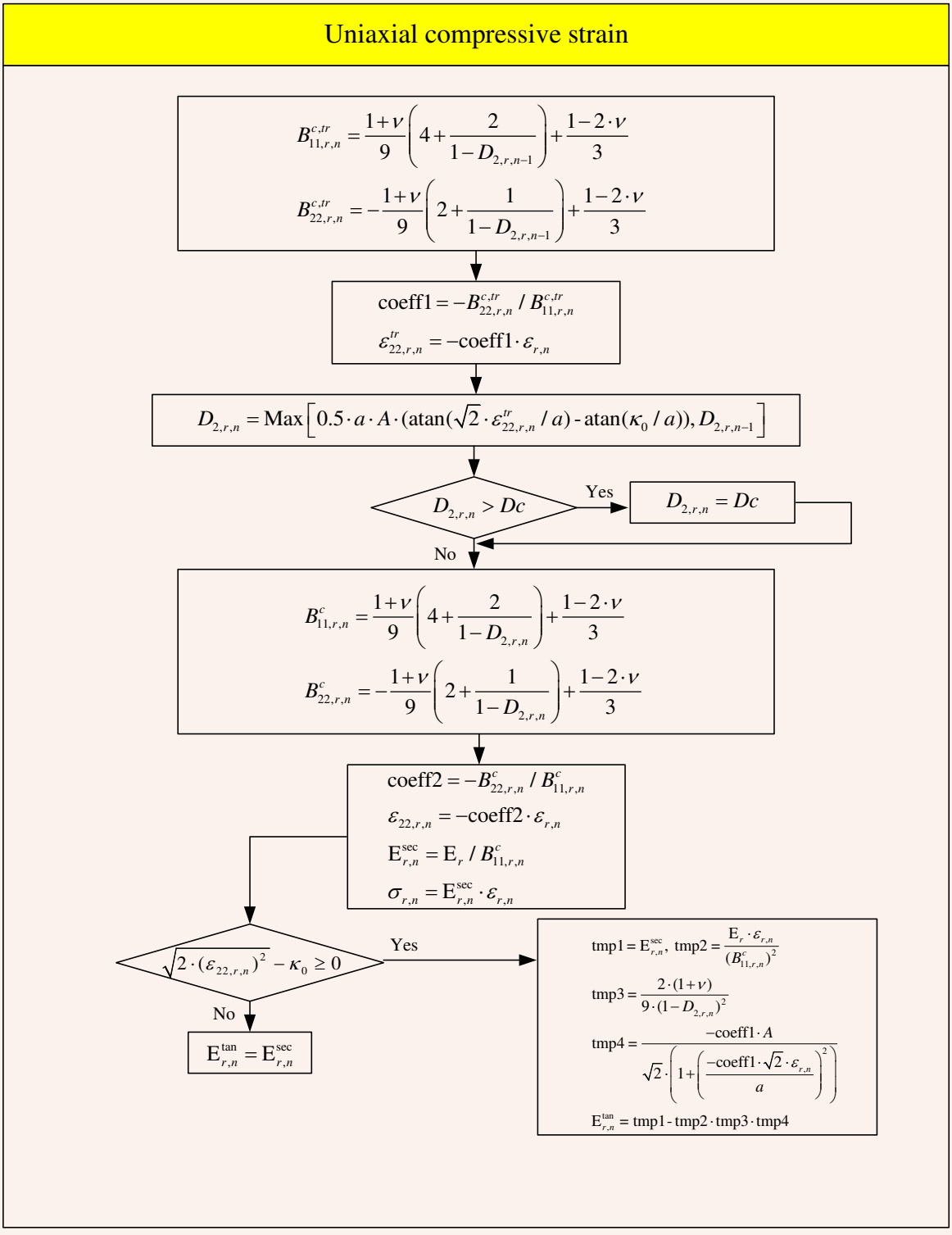


Figura 62.23: Determinazione (3) per il modello di danno anisotropico

COPIA DI REVISIONE

62.2.3.4 Modello di danno anisotropico con danni effettivi, recupero della rigidità e ceppi permanenti ε_{an}

Il modello di danno anisotropico precedente non ha rappresentato deformazioni permanenti, ma la seguente estensione della shell del modello è tale limitazione. Questo modello si basa sul modello di danno anisotropico ψ_e^* precedentemente identificato come ψ^*.

$$\rho\psi^* = \rho\psi_e^* + \rho\psi_{an}^*$$

Per la parte danneggiata del modello, la funzione di consolidamento viene alterata per prendere in considerazione il feedback elastico in compressione:

$$\kappa\left(d_\varepsilon\right) = \frac{d_\varepsilon}{A} + \kappa_0$$

dove A e κ_0 sono due parametri che dipendono dal materiale. Il criterio di danno dipenderà dalle ceppi elastici e non da quelli totali:

$$f = \hat{\varepsilon_{el}} - \kappa\left(d_\varepsilon\right)$$

La parte anelestica del modello è:

$$\rho\psi_{an}^* = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_{an}$$

Questo corrisponde alla partizione della tensione totale in un componente elastico e permanente.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial\rho\psi^*}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial\rho\psi_e^*}{\partial\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial\rho\psi_{an}^*}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_{an}$$

L'evoluzione dei ceppi permanenti è derivata dalle seguenti equazioni:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{an} = g_D\left(d_\varepsilon\right)\ \dot{\boldsymbol{D}}^D + g_H\left(d_\varepsilon\right)\ \dot{d}_\varepsilon\ \boldsymbol{Id}$$

con $g_D\left(d_\varepsilon\right)\ g_H\left(d_\varepsilon\right)$ due funzioni a seconda dell'attivazione danni al rispetto della tensione/compressione disordinata. Qui vengono proposte due funzioni bilinee continuum:

$$\begin{array}{lllll} \text{if } d_\varepsilon < 1 & g_D\left(d_\varepsilon\right) = \frac{k_D}{K_D} d_\varepsilon & \text{else} & g_D\left(d_\varepsilon\right) = \frac{k_D}{K_D} + k_D\left(d_\varepsilon - 1\right) \\ & g_H\left(d_\varepsilon\right) = \frac{k_H}{K_H} d_\varepsilon & & g_H\left(d_\varepsilon\right) = \frac{k_H}{K_H} + k_H\left(d_\varepsilon - 1\right) \end{array}$$

62.2.3.4.1 Schema numerico uniassiale

74 Lo stato di carico è definito dal segno della tensione elastica. Così per determinare lo stato di carico al momento n, l'incremento della tensione $\Delta\varepsilon$ è confrontato con la tensione elastica a passo di tempo $n-1$:

75 If $\varepsilon_{n-1}^e < 0$ e $\Delta\varepsilon < -\varepsilon_{n-1}^e$, lo stato di carico rimane in compressione, altrimenti passa alla tensione.

76 If $\varepsilon_{n-1}^e > 0$ e $\Delta\varepsilon < -\varepsilon_{n-1}^e$, lo stato di carico rimane in tensione, altrimenti passa alla compressione.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tensione

- Previsioni elastiche: $\varepsilon^e_{1,n} = \varepsilon^e_{1,n-1} + \Delta\varepsilon_1$
- Test di criterio di danno: f
  - if $f < 0$, comportamento elastico:

$$\begin{aligned} D_{1,n} &= D_{1,n-1} \\ D_{2,n} &= D_{2,n-1} \\ \varepsilon^{an}_{1,n} &= \varepsilon^{an}_{1,n-1} \\ \varepsilon^{an}_{2,n} &= \varepsilon^{an}_{2,n-1} \end{aligned}$$

  - altro, comportamento dannoso:

$$\begin{aligned} D_{1,n} &= A\left(\varepsilon^e_{1,n} - \kappa_0\right) \\ D_{2,n} &= D_{2,n-1} \\ \varepsilon^{an}_{1,n} &= \varepsilon^{an}_{1,n-1} + \left(\frac{2k_D}{3K_D} + \frac{k_H}{K_H}\right) D_{1,n} \\ \varepsilon^{an}_{2,n} &= \varepsilon^{an}_{2,n-1} + \left(\frac{-k_D}{3K_D} + \frac{k_H}{K_H}\right) D_{1,n} \end{aligned}$$

- Computazione σ e $\varepsilon^e_{2,n}$:

$$\begin{aligned} B_{1,n} &= \frac{1+\nu}{9} \cdot \left(\frac{4}{1-D_{1,n}} + 2\right) + \frac{1-2\nu}{3 \cdot \left(1 - \frac{(D_{1,n}+2\cdot D_{2,n-1})}{3}\right)} \\ B_{2,n} &= \frac{1+\nu}{9} \cdot \left(\frac{2}{1-D_{1,n}} + 1\right) + \frac{1-2\nu}{3 \cdot \left[1 - \frac{\eta_t}{3} \cdot (D_{1,n} + 2 \cdot D_{2,n-1})\right]} \\ \sigma_n &= \frac{E}{B_{1,n}} \varepsilon^e_n \\ \varepsilon^e_{2,n} &= \frac{B_{2,n}}{B_{1,n}} \varepsilon^e_{1,n} \end{aligned}$$

Compressione

- Previsioni elastiche: $\varepsilon^e_{1,n} = \varepsilon^e_{1,n-1} + \Delta\varepsilon_1$
- Test di criterio di danno: f

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

– if $f < 0$, comportamento elastico:

$$\begin{aligned} D_{1,n} &= D_{1,n-1} \\ D_{2,n} &= D_{2,n-1} \\ \varepsilon^{an}_{1,n} &= \varepsilon^{an}_{1,n-1} \\ \varepsilon^{an}_{2,n} &= \varepsilon^{an}_{2,n-1} \end{aligned}$$

– altro, comportamento dannoso:
L'evoluzione della tensione permanente deve essere stimata:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^{an}_{1,n} &= \gamma\left(d_{\varepsilon n-1}\right) * d_{\varepsilon 2,n} \\ \dot{\varepsilon}^{an}_{1,n} &= 2\gamma\left(d_{\varepsilon n-1}\right) * \left(D_{2,n} - D_{2,n-1}\right) \end{aligned}$$

L'evoluzione dei danni diventa:

$$D_{2,n} = \frac{A\left(-\sqrt{2}\tilde{n}u_{n-1}\left(\varepsilon - \varepsilon^{an}_{1,n-1} - \dot{\varepsilon}^{an}_{1,n}\right) - \kappa_0\right)}{2}$$

$$D_{2,n} = \frac{A\left(-\sqrt{2}\tilde{n}u_{n-1}\left(\varepsilon - \varepsilon^{an}_{1,n-1} + 2\gamma\left(d_{\varepsilon n-1}\right)D_{2,n-1} - \kappa_0\right)\right)}{2\left(\sqrt{2}A\tilde{n}u_{n-1}\gamma\left(d_{\varepsilon n-1}\right)\right)}$$

$$\begin{aligned} {\varepsilon^{e}_{2,n}}^{trial} &= \frac{B_{2,n-1}}{B_{1,n-1}}\varepsilon^{e}_{1,n} \\ D_{1,n} &= D_{1,n-1} \\ \varepsilon^{an}_{1,n} &= \varepsilon^{an}_{1,n-1} + \left(\frac{-2k_D}{3K_D} + \frac{k_H}{K_H}\right)D_{1,n} \\ \varepsilon^{an}_{2,n} &= \varepsilon^{an}_{2,n-1} + \left(\frac{k_D}{3K_D} + \frac{k_H}{K_H}\right)D_{1,n} \end{aligned}$$

- Computazione σ e $\varepsilon^{e}_{2,n}$:

$$\begin{aligned} B_{1,n} &= \frac{1+\nu}{9}\cdot\left(4 + \frac{2}{1-D_{2,n}}\right) + \frac{1-2\nu}{3} \\ B_{2,n} &= -\frac{1+\nu}{9}\cdot\left(2 + \frac{1}{1-D_{2,n}}\right) + \frac{1-2\nu}{3} \\ \sigma_n &= \frac{E}{B_{1,n}}\varepsilon^{e}_{n} \\ \varepsilon^{e}_{2,n} &= \frac{B_{2,n}}{B_{1,n}}\varepsilon^{e}_{1,n} \end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

La Figura 62.24 descrive la relazione tensione–deformazione del modello di danno anisotropico con deformazione permanente.

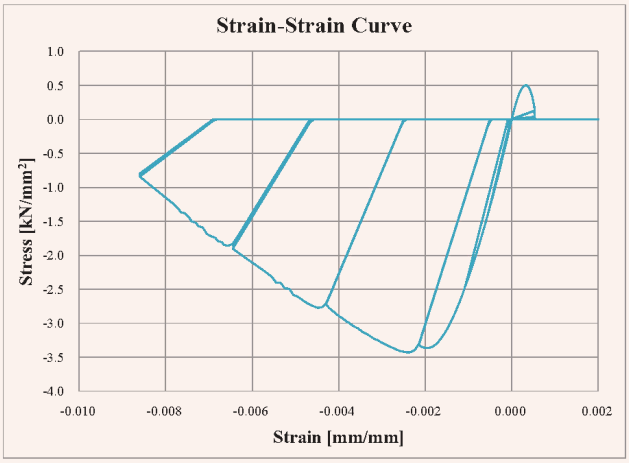


Figura 62.24: Curva tensione–deformazione del modello di danno anisotropico con deformazione permanente

62.2.4 Aderenza–scorrimento

77 Quando è prevista una lunghezza di sviluppo insufficiente, sarà disponibile un'inversione di legame (tra barra e cemento) che viene illustrata in Fig. 62.25.

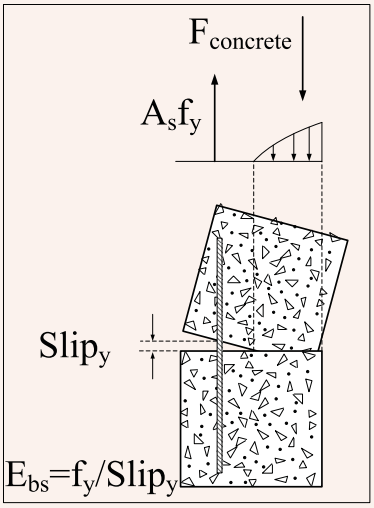


Figura 62.25: Modello di slittamento

COPIA DI REVISIONE

78 Lo scivolamento dovuto alla barra di rinforzo longitudinale vicino alla colonna e dall'ancoraggio può essere facilmente determinato se si assume una pressione uniforme del legame u_b lungo le barre all'interno della lunghezza di sviluppo all' interno del piedino o il giunto a trave.

79 Dall'equilibrio

$$u_b(\pi d_b)l_d = \frac{\pi d_b^2}{4} f_s$$

dove d_b è il diametro della barra, l_d è la lunghezza di sviluppo su cui si verifica lo slip, risolvendo per l_d,

$$l_d = \frac{d_b f_s}{4u_b}$$

80 Supponendo che il la massima tensione si verifica alla fine della colonnae variazione lineare della tensione lungo la lunghezza di sviluppo, l'integrale della curva di sforzo darà la barra totale scivolare all'interfaccia footing-colonna o interfaccia a raggi-colombi è lo slip dato da

$$S = \frac{\varepsilon_s l_d}{2} = \frac{f_s l_d}{2E_s}$$

Sostituire

$$S = \frac{\varepsilon_s d_b f_s}{8u_b}$$

81 Assumendo che la sezione trasversale ruota circa il suo asse neutro quando si verifica lo scivolamento ($\phi_y = \varepsilon_y/(d-c)$), lo spostamento relativo alla barra scivolare ad un punto a distanza L dalla base della colonna sarà

$$\Delta_{slip} = \frac{\phi_y d_b f_y L}{8u_b}$$

82 Un modello semplificato per lo stress legato in termini di stress effettivo dell'acciaio assume una costante pressione del legame $u_e = 12\sqrt{f_c'}$ prima della resa dell'acciaio, e un altro costante stress legato di $u_p = 6\sqrt{f_c'}$ produzione di acciaio passato

$$u_e = 12\sqrt{f_c'} \qquad \text{prior to steel yielding}$$
$$u_p = 6\sqrt{f_c'} \qquad \text{past steel yielding}$$

83 Sulla base di questa ipotesi, il bar slip totale S al bordo dell'ancoraggio si ottiene integrando le ceppi di acciaio sulla lunghezza incorporata.

84 Questo modello è stato utilizzato per ottenere una relazione monotonica per lo scorrimento a barre rispetto allo stress a barra alla base della colonna.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

85 Assumendo un'ancoraggio sufficiente:

$$S_1 = \frac{\varepsilon_s f_s}{8u_e} d_b;\ \varepsilon_s \le \varepsilon_y;\ S_2 = \frac{\varepsilon_y f_y}{8u_e} d_b + \frac{(\varepsilon_s + \varepsilon_y)(f_s - f_y)}{8u_p} d_b;\ \varepsilon_s > \varepsilon_y$$

dove d_b è il diametro della barra, u_e è lo stress elastico del legame = $12\sqrt{f_c'}$ (psi) e u_p è lo stress del legame di plastica = $6\sqrt{f_c'}$. figura 62.27

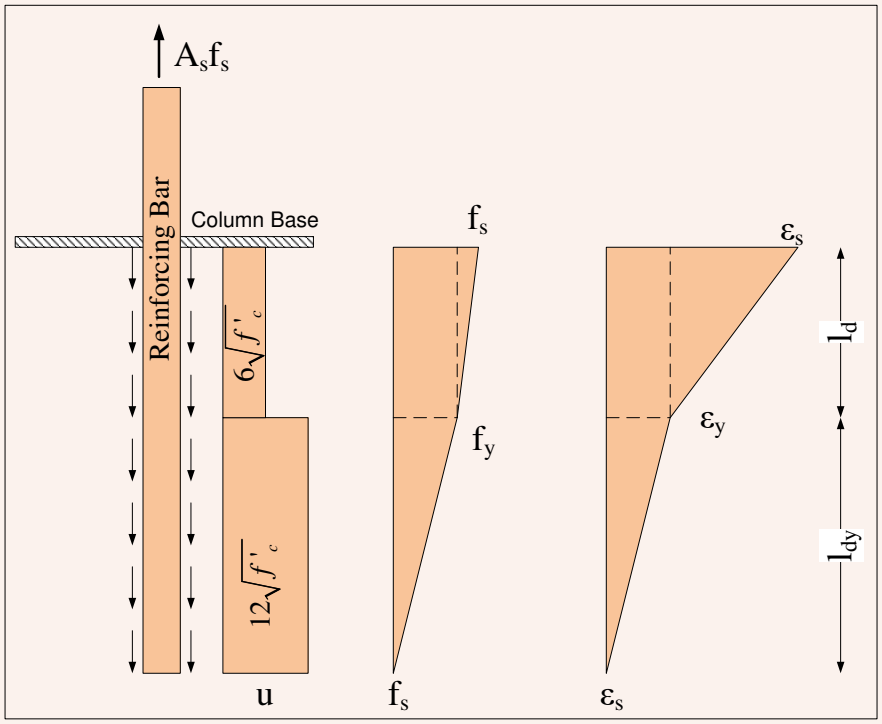


Figura 62.26: Modello di legame semplificato

62.2.5 Elemento di sezione zero

`Questa sezione è un adattamento del modello di Ghannoum`

86 L'elemento a sezione zero dovrebbe essere utilizzato solo quando gli elementi in fibra vengono utilizzati se vogliamo catturare lo slip di legame tra calcestruzzo e barra.

87 Abbiamo una risposta non lineare post-peak di stress del legame vs slittamento dei legami, e abbiamo bisogno di linearizzare, e poi risolvere per u_p (che sarà diverso dal valore precedentemente dato di $6\sqrt{f_c'}$ adatto per il segmento di indurimento non lineare.

88 Si impone che il segmento linearizzato intersechi quello non lineare a $1.25 f_y$; pertanto

$$\varepsilon_u = \varepsilon_y + 0.25\frac{f_y}{E_s/h} = \frac{f_y}{E_s} + 0.25h\frac{f_y}{E_s} = 0.26h\varepsilon_y$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

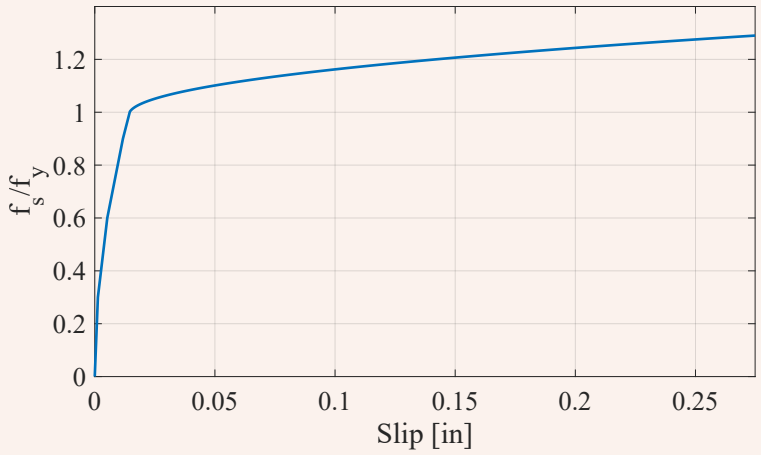


Figura 62.27: Curva di scorrimento del legame

dove h è il parametro di indurimento impostato a 100. Sostituire con

$$S_2 = \frac{\varepsilon_y f_y}{8u_e} d_b + \frac{(\varepsilon_s + \varepsilon_y)(f_s - f_y)}{8u_p} d_b;$$

noi otteniamo

$$S_u = S_y + \frac{6.75\varepsilon_y f_y}{8u_p} d_b$$

89 We can reasonably assume that

$$S_u = \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_y} S_y = 26 S_y$$

su sostituzione, otteniamo:

$$u_p = 3.24\sqrt{f_c'}$$

u_p può essere utilizzato nei cosiddetti elementi di stato limite per valutare guasto indotto da una scheda obbligazionaria.

90 Indipendentemente dal modello di acciaio utilizzato nella trave-colonna, si raccomanda di utilizzare quello bilineare per questo elemento. $h = 100$ sarà equivalente ad avere una curva di slittamento della barra in modo che il secondo segmento interseca quello esatto a $f_s = 1.25 f_y$ con $u_p = 3.24\sqrt{f_c'}$

91 Nel modello bilineare in acciaio, il modulo di Young dovrebbe essere regolato per riflettere lo slip del legame, sostituendo E_s by E_{bs};

$$E_{bs} = \frac{f_y}{S_y}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

92 Va notato che inerente a questa ipotesi è un Lunghezza unitaria dell'elemento di lunghezza zero.

93 Infine, per mantenere lo stesso rapporto di rigidezza tra l'acciaio del modello di scorrimento della barra nell'elemento di sezione a lunghezza nulla e quello dell'elemento di telaio (acciaio longitudinale), si moltiplicano le tensioni del materiale di scorrimento per E_s/E_{bs}.

94 Le proprietà concrete per l'elemento sezione della lunghezza zero sono tali che la posizione dell'asse neutro nell'elemento trave-colonna e la sezione fibra di lunghezza zero è la stessa, Fig. 62.28. Così

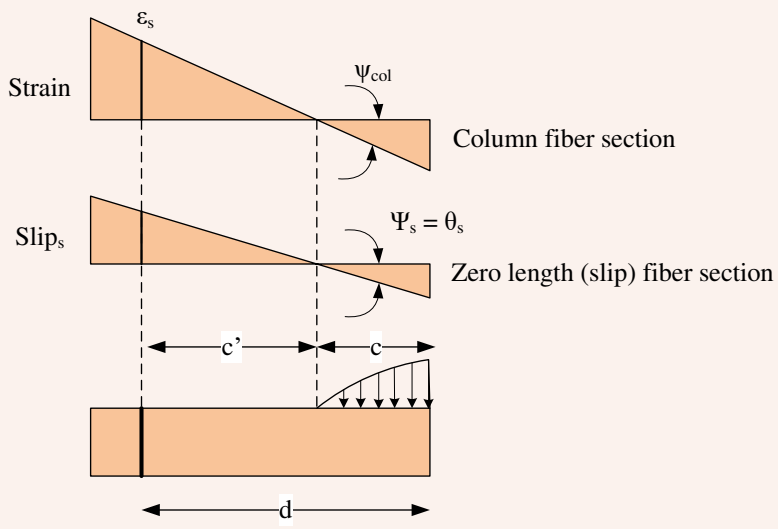


Figura 62.28: Ubicazione dell'asse neutro

$$\left.\begin{array}{rcl} \theta_s & = & \frac{S_s}{\xi'} \\ \Psi_{col} & = & \frac{\varepsilon_s}{c'} \end{array}\right\} \theta_s = \Psi_{col}\frac{S_s}{\varepsilon_s} \tag{62.22}$$

95 Da qui le fibre (corrispondenti all'acciaio e al cemento) nella sezione di lunghezza zero devono essere scalate da $\frac{S_s}{\varepsilon_s}$

96 Questo può essere facilmente raggiunto in alterazione dei dati di input del materiale, tale che

- Tutti i valori di stress rimangono invariati
- Le frane sono scalate da $\frac{S_y}{\varepsilon_y}$

COPIA DI REVISIONE

62.3 Plasticità lussuosa

97 Il modello di plasticità lumped approssima il comportamento di un materiale considerando che la deformazione plastica avviene in regioni distinte note come *cerniere in plastica* o zone di plastica[3]. Queste zone di plastica sono concentrate in posizioni specifiche nella struttura, comunemente presenti ai punti finali delle connessioni o dei supporti.

98 Il modello assume che il materiale subisca la rotazione plastica all'interno di queste zone plastiche, mentre il resto della struttura mantiene la sua elasticità.

99 Una somiglianza degna di nota può essere osservata con le teorie della linea di rendimento (Chapter 57) Tuttavia, è importante notare che i teoremi di rilegatura inferiore e superiore sono principi più ampi che comprendono l'analisi plastica nel suo complesso, mentre il modello di plasticità lumped è una tecnica specifica di approssimazione all'interno di un quadro più ampio. I teoremi di rilegatura inferiore e superiore servono come basi teoriche cruciali per l'analisi plastica, mentre il modello di plasticità a lutto offre uno strumento pratico di ingegneria per un'analisi semplificata e progettazione.

100 In plasticità lumped la risposta non lineare è regolata da

1. Sesso non lineare di lunghezza L_p Adjacen al nodo.
2. Molle non lineari poste al giunto.

Ci occuperemo di ciascuna di queste due considerazioni singolarmente.

101 In primo luogo, è importante notare che l'approccio per la derivazione L_p non è un compito banale. Una derivazione completa e comprensibile L_p richiede la rivisitazione di concetti che sono stati precedentemente discussi, come il rapporto tra curvatura e deflettore (riferirsi a §22.3.4). Inoltre, si tratta di considerare il momento efficace dell'inerzia dei travi in cemento armato che non possono essere stati coperti in questo libro particolare ma è generalmente indirizzato nei libri di testo di base sul calcestruzzo rinforzato. Rivisitando il concetto di deflettorazione della curvatura e incorporando il momento efficace dell'inerzia dei travi in cemento armato, possiamo arrivare ad una corretta e comprensibile derivazione di L_p.

62.3.1 Lunghezza plastica

102 La lunghezza della cerniera di plastica influenzerà notevolmente lo spostamento in plastica (§62.3.1.4.1), quindi dobbiamo determinarlo il più possibile in modo affidabile.

103 Per la determinazione della lunghezza di plastica, la sequenza sarà la seguente:

[3] Nota analogia con zona di plastica hte alla punta di una crepa in metalli, o la zona di processo frattura intorno a una fessura in cemento

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

1. Mentre molti riferimenti affrontano un fascio a trave per spiegazioni, mostreremo più precisamente dove sono quelle lunghezze di plastica e come li consideriamo nel quadro del diagramma corpo libero più semplice possibile.
2. Rapporto teorico tra curvatura e deformazione.
3. (Craco) elementi in cemento armato momento di inerzia e curvatura corrispondente
4. Determinazione delle lunghezze di plastica

Seguendo questa sequenza sistematica, possiamo determinare in modo affidabile le lunghezze di plastica, che a sua volta influenzano notevolmente lo spostamento plastico della struttura (riferire a §62.3.1.4.1).

62.3.1.1 Possibili posizioni di cerniere in plastica

104 Per determinare la lunghezza di plastica L_p e identificare potenziali cerniere di plastica, inizieremo da disegno un diagramma del corpo libero *Lunghezza* tra due punti: A, un punto adiacente di contraflessione (momento zero o fine libero), e B, la sezione critica. 62.29.

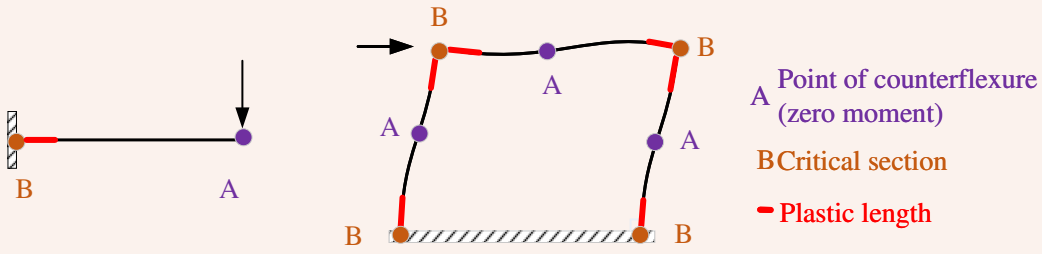


Figura 62.29: Identificazione delle zone di plastica

62.3.1.2 Deformazione da curvatura ($\Delta(\phi)$)

105 Per prevedere la duttilità di una struttura, è essenziale determinare la deformazione che si è svolta quando il momento finale è raggiunto. Ciò comporta comprendere la rotazione e deflettore del membro nella condizione definitiva. Questi valori possono essere ottenuti analizzando la distribuzione effettiva della curvatura all'interno della struttura.

106 La rotazione e la deflezione del membro possono essere determinate integrando le curve lungo la lunghezza del membro.§22.3, Eq. 22.7) è definito come *tasso di rotazione tra due punti*,

$$\phi(x) = \frac{d\theta(x)}{dx}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Considerando le curve in diverse posizioni e integrandoli, possiamo quantificare la rotazione e la deflezione del membro, fornendo preziose informazioni sul suo comportamento in condizioni definitive.

$$\theta(x) = \int_A^B \phi(x) dx$$

dove dx è un elemento di lunghezza del membro. Fig. 62.30

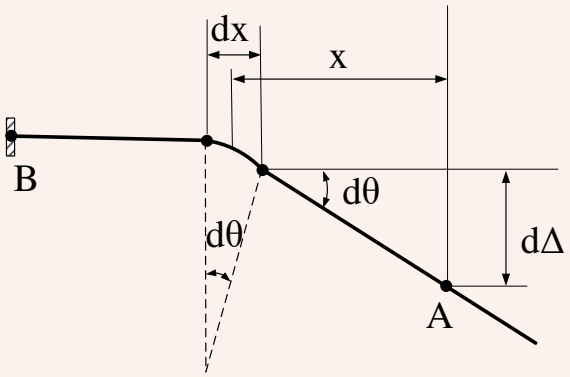


Figura 62.30: Sfiorazione della deformazione flessorale di un elemento

107 Fig. 62.30 mostra un cantilever con deformazione a causa della rotazione $d\theta$ sopra l'elemento di lunghezza dx solo. La rotazione $d\theta$ is

$$d\theta = \phi dx$$

dove ϕ è la curvatura dell'elemento. La deflezione trasversale $d\Delta$ al punto A *dal tangente* all'asse del membro alla fine fissa B, a causa della rotazione $d\theta$ tra le estremità dell'elemento, è

$$d\Delta = x d\theta = x\phi dx$$

Quindi la deviazione trasversale del punto A dal tangente all'asse del membro al punto B a causa della curvatura lungo tutta la lunghezza di un membro tra questi punti sarà

$$\Delta_{AB} = \int_A^B x\phi dx$$

108 È importante notare che queste equazioni rappresentano una semplice generalizzazione dei teoremi della curvatura-area, che si applicano sia alle curve elastiche che plastiche, consentendo un'applicazione più ampia del concetto. Considerando queste equazioni, possiamo analizzare il comportamento della struttura in regimi elastici e plastici. .

109 Tuttavia, vale la pena menzionare che questo approccio ignora l'influenza di *tensione irrigidimento*. L'indurimento della tensione si riferisce all'aumento di rigidità dei membri a

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

causa del cemento che porta la tensione tra le fessure. Questo fenomeno non è rappresentato nelle equazioni sopra indicate. L'irrigidimento della tensione può avere un impatto significativo sul comportamento generale e sulla risposta della struttura, ed è importante considerarlo in analisi e disegni più avanzati.

62.3.1.3 Rinforzato momento efficace del cemento di inerzia e curvatura

110 Per comprendere il modello di plasticità lumped, è fondamentale avere una comprensione approfondita della curvatura in un fascio di cemento armato e la corrispondente definizione del momento efficace dell'inerzia.

111 Nel caso del carico uniforme, semplicemente supportato in cemento armato raffigurato nella figura 62.31, sorge una domanda critica: qual è il momento effettivo dell'inerzia I Tuttavia, in questo contesto particolare, la nostra intenzione è di sottolineare la complessità associata alla determinazione della distribuzione della curvatura.

112 Determinare la distribuzione della curvatura in un fascio di cemento armato comporta considerare vari fattori, come il comportamento dell'acciaio calcestruzzo e rinforzante, l'influenza del cracking, e l'interazione tra tensione e compressione zone. Questi fattori contribuiscono alla natura intricata del calcolo della distribuzione di curvatura, e una comprensione completa di questa complessità è fondamentale per analizzare con precisione il comportamento della struttura.

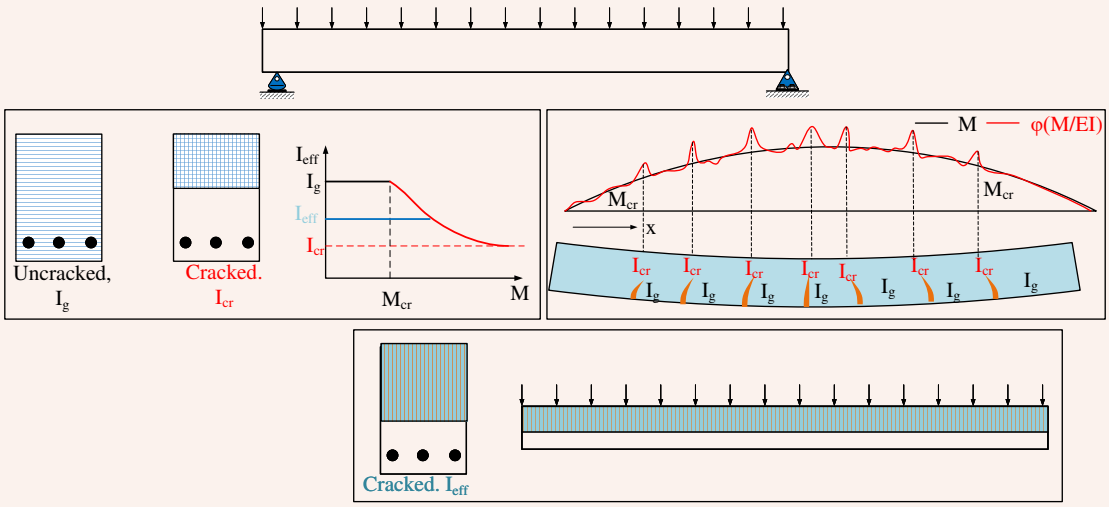


Figura 62.31: Efficace momento di inerzia in R/C

113 Prima di caricare, il fascio ha un momento costante di inerzia corrispondente a quello lordo (basato su una sezione non graffiata) I_g. Poiché il carico viene gradualmente applicato, il diagramma di momento (parabolico) sale fino a raggiungere il valore massimo del $wL^2/8$.

COPIA DI REVISIONE

114 Da qualche parte lungo il fascio, il momento raggiunge e poi supera il momento locale di inerzia (l'asse neutro si muove mentre il momento è aumentato). In definitiva il raggio avrà molte crepe. I_{cr}, e in mezzo semplicemente I_g.

115 La variazione del momento dell'inerzia trasformerà il diagramma di momento parabolico liscio $M(x)$ in una curvatura ruvida ($\phi(x) = M(x)/EI(x)$).

116 Per scopi di deflettorazione, è necessario un momento "equivalente" dell'inerzia e ACI, basato sulla proposizione originale Branson et al., 1963, raccomanda di utilizzare un'espressione media ponderata[4] per $I \to I_{\text{eff}}$

$$I_{\text{eff}} = \left(\frac{M_{\text{cr}}}{M_a}\right)^3 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{\text{cr}}}{M_a}\right)^3\right] I_{\text{cr}} \quad \textbf{(ACI 9.5.2.3)}$$

dove

$$I_{\text{eff}} \leq I_g$$
$$M_{\text{cr}} = f_r' \frac{I_g}{y_b}$$
$$f_r' = 7.5\sqrt{f_c'}$$

e M_a è il momento massimo (servizio) in cui si calcola la deviazione

117 La valutazione della dissoluzione è un problema non lineare, come $w \nearrow M \nearrow \frac{M_{\text{cr}}}{M_a} \searrow I_{\text{eff}} \searrow$ e per un fascio continuo

$$\Delta = \frac{5}{384}\frac{wL^4}{EI} \begin{cases} w \nearrow & \Delta \nearrow \\ I \searrow & \Delta \nearrow \end{cases}$$

Tuttavia, spesso trascuriamo questa non linearità.

62.3.1.4 Deformazione in termini di lunghezza della cerniera plastica

62.3.1.4.1 Calcets rinforzato

118 Come accennato in precedenza, elementi di cemento armato sono inclini a sviluppare più crepe in condizioni di carico. Questo evento richiede l'introduzione di un momento efficace di inerzia per tenere conto della ridotta rigidità della sezione cracked.

119 Quando una struttura in cemento armato sperimenta deformazioni flessografiche inelastiche dovute a sovraccarichi da gravità o forze laterali, queste deformanze si concentrano tipicamente all'interno di una lunghezza di cerniera finita. Ciò significa che la deformazione plastica e la ridistribuzione associata di momenti sono localizzati all'interno di questa regione cerniera.

[4] L'equazione menzionata non sarà utilizzata in questo libro, la cui inclusione è esclusivamente destinata a stabilire un legame con il tema del cemento armato.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

120 L'inserimento di una cerniera in plastica in un'analisi strutturale offre un vantaggio significativo consentendo *redistribuzione del momento*. Questa ridistribuzione dei momenti può aumentare notevolmente la forza della struttura oltre a quanto è previsto dalla teoria elastica.

121 Cerchiamo quindi di determinare le espressioni per le deformazioni basate su L_p.

122 Il contributo elastico alla rotazione e alla deflettorazione può essere facilmente calcolato. D'altra parte la cerniera di plastica rappresenterà la presenza delle crepe, l'aumento della rigidità dei membri a causa della tensione portata dal cemento tra la fesura, così come le deformazioni aggiuntive causate da scivolone di legame del rinforzi.

123 Data la quasi impossibilità di determinare con precisione la curva della curvatura effettiva in pratica, è comune approssimarla utilizzando un modello bilineare (elasto-plastico o elasto-indurimento). Questa idealizzazione semplifica l'analisi rappresentando la distribuzione della curvatura con due regioni distinte.

124 Fare riferimento alla Figura 62.32, l'approssimazione bilineare è definita dai punti A (il punto di inflessione) e B, dove si è raggiunta la curvatura finale (o sezione critica). Questo modello assume un aumento lineare della curvatura fino al punto A, seguito da una costante curvatura oltre il punto A fino a raggiungere il punto B.

125 La distribuzione della curvatura lungo il membro è illustrata nella figura, ed è importante notare che la variazione del momento dell'inerzia (come raffigurato in Figura 62.31) si tradurrà in fluttuazioni nella curvatura; ogni picco di curvatura corrisponde ad una corrispondente fesura all'interno del membro.

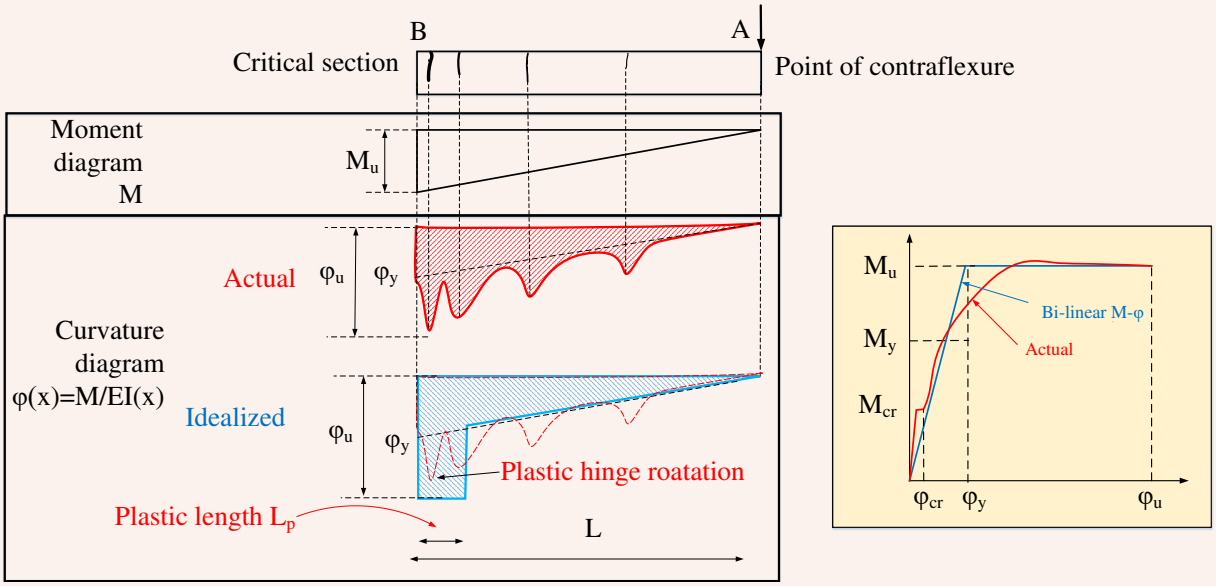


Figura 62.32: Ubicazione delle lunghezze di plastica (Park e Paulay, 1991)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

126 Mentre il diagramma del momento (M) è lineare, il diagramma di curvatura ($\phi = \frac{M}{EI}$) non è, questa non linearità nasce a causa del diverso momento di inerzia, che può essere influenzata dalla presenza di crepe nella struttura. Il diagramma di curvatura esporrà un aumento della curvatura in luoghi di crepa a causa della diminuzione del momento dell'inerzia associata alle fessure.

127 Nell'analisi, identificheremo due punti distinti corrispondenti a ϕ_y e ϕ_u. Tra questi due punti ($\phi_y < \phi < \phi_u$), ci sarà una regione localizzata di rotazione inelastice, inducendo la formazione di un *cerniera di plastica*. Questa rotazione inelastica contribuisce allo sviluppo di deformazioni plastiche all'interno della struttura.

128 Per semplificare l'analisi, definiamo un *cerniera di plastica equivalente* Questa semplificazione ci permette di catturare il comportamento essenziale delle deformazioni plastiche, riducendo al minimo la complessità dell'analisi.

129 La rotazione θ è dato da

$$\theta_{AB} = \int_A^B \phi dx = \begin{cases} \theta_e &= \int_A^B \frac{M}{EI} dx & \text{Elastic rotation} \\ \theta_p &= (\phi_u - \phi_y) L_p & \text{Inelastic rotation} \end{cases} \tag{62.23}$$

130 Se il carico esterno a A è un carico di punto θ_{AB} è dato dal primo momento teorema di curvatura[5].

$$\theta_{AB} = \int_A^B \phi dx = \underbrace{\phi_y \frac{L}{2}}_{\text{Elastic}} + \underbrace{(\phi_u - \phi_y) L_p}_{\text{Plastic}}$$

131 Lo spostamento tra A e BFico. 62.33 è dato dal secondo momento teorema curvatura[6]

$$\begin{aligned} \Delta^u_{AB} &= \int_A^B x \phi_{AB} dx \\ &= \underbrace{\left(\frac{\phi_y L}{2}\right)\left(\frac{2L}{3}\right)}_{\text{Elastic}} + \underbrace{(\phi_u - \phi_y) L_p \left(L - \frac{L_p}{2}\right)}_{\text{Plastic}} \end{aligned} \tag{62.24}$$

[5] La differenza di pendenza tra due sezioni di un membro flessore caricato è uguale all'area della M/EI diagramma tra questi due punti, (Eq. 22.16)

[6] La deviazione tangenziale del punto 2 su un membro flessorale caricato, da un tangente alla curva di deflettorazione al punto 1 (t_{21}) è uguale al momento della zona del diagramma di curvatura tra 1 e 2 circa 2, (Eq. 22.3.4.3).

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

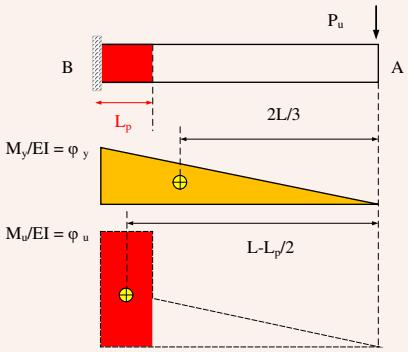


Figura 62.33: Sostituzione della punta di un raggio cantilevered R/C con assunzione di plasticità lumped

dove x è la distanza di dx da A. Nota che se sostituiamo i termini nel componente elastico, recuperaremo il familiare $PL^3/3EI$[7]. or

$$\Delta^u_{AB} = \frac{1}{EI}\left[\underbrace{\left(\frac{M_y L}{2}\right)\left(\frac{2L}{3}\right)}_{\text{Elastic}} + \underbrace{(M_u - M_y)L_p\left(L - \frac{L_p}{2}\right)}_{\text{Plastic}}\right] \tag{62.25}$$

132 Per determinare la lunghezza di plastica, i test sui travi a sbalzo[8] Questi test prevedono la misurazione delle relazioni di forza-spostamento e di curvatura del momento, che si possono ricavare dai risultati della prova un modello bilineare elastico perfettamente plastico. *taratura*

133 La procedura prevede la costruzione di una curva bilineare equivalente basata sui risultati del test. L'area sotto la curva originale (spostamento forza o curva di momento) è calcolata, e una linea con lo stesso pendio iniziale come la curva viene tracciata attraverso l'origine. Una linea orizzontale viene quindi disegnata per garantire che la zona sotto le due linee sia uguale alla superficie sottostante la curva originale. Il punto di intersezione tra le due linee rappresenta lo spostamento/curvatura dei rendimenti, mentre il valore massimo nella gamma inelastica è considerato il valore finale.

134 Utilizzo dell'equazione 62.24, possiamo risolvere per la lunghezza di plastica L_p in base alla sostituzione/curvatura dei rendimenti e allo spostamento finale/valutazione ottenuta dai risultati del test.

[7] Sostituire ϕ_y by ϕAllora... $\Delta^{el} = \left(\frac{\phi_y L}{2}\right)\left(\frac{2L}{3}\right) = \left(\frac{ML}{2EI}\right)\left(\frac{2L}{3}\right) = \left(\frac{PL^2}{2EI}\right)\left(\frac{2L}{3}\right) = \frac{PL^3}{3EI}$.

[8] Ricordiamo che questa struttura semplificata è semplicemente rappresentativa di un segmento degli elementi tra sezione critica e punto di contraffazione.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

135 In assenza di una calibrazione specifica dei problemi L_p, basandosi su equazioni empiriche diventa necessario; queste equazione empirica forniscono stime per la lunghezza plastica in base alle caratteristiche della struttura e alle specifiche condizioni di carico.

Calcestruzzo non inconfinato Una tale equazione è il modello comunemente usato di (Baker, 1956) e successivamente adottato dall'istituzione degli ingegneri civili (Bate et al., 1962)

$$L_p = k_1 k_2 k_3 \left(\frac{Z}{d}\right)^{0.25} c$$

dove

$$k_1 = \begin{cases} 0.7 & \text{for mild steel} \\ 0.9 & \text{for cold worked steel} \end{cases}$$

$$k2 = 1 + 0.5\frac{P}{P_u}$$

$$k_3 = 0.9 - \frac{0.3}{23.5}(f_c' - 11.7)$$

Assumendo $f'c$ = 0,85 x cubo di forza del cemento) dove f_c' è in MPa
z distanza della sezione critica al punto di contraflessione
P carico assiale sul membro
P_u capacità finale del membro sotto carico assiale quando nessun momento di piegatura agisce.

Confintato sulla base (Baker e Amarakone, 1964)

$$L_p = 0.8 k_1 k_3 \frac{z}{d} c$$

dove c è la profondità dell'asse neutro al collasso.

62.3.1.4.2 Acciaio inossidabile

136 Per l'acciaio, ricordando che abbiamo $M_y = SF_y$e $M_u = ZF_u$, Eq. 62.25 può essere riscritto come

$$\Delta_{AB}^u = \frac{F_y}{EI}\left[\underbrace{\left(\frac{S}{2}L\right)\left(\frac{2L}{3}\right)}_{\text{Elastic}} + \underbrace{(Z-S)(L_p)\left(L - \frac{L_p}{2}\right)}_{\text{Plastic}}\right] \tag{62.26}$$

137 Dobbiamo ancora determinare la lunghezza di plastica L_p. Per affrontare questo, si fa presumere che la diffusione della plasticità possa essere approssimata come lineare, come raffigurato in Figura 62.34Per trovare la lunghezza equivalente di una sezione completamente plastificata, consideriamo l'area sotto le due regioni triangolari che rappresentano la diffusione della plasticità. Trovando la lunghezza equivalente con lo stesso spazio, possiamo stabilire una lunghezza di plastica efficace.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

138 Questo approccio ci permette di semplificare l'analisi considerando una zona plastica concentrata con una lunghezza equivalente. Benché sia un'approssimazione, fornisce un metodo pratico e fattibile per stimare la lunghezza della plastica in assenza di soluzioni analitiche dettagliate o dati empirici per una struttura specifica.

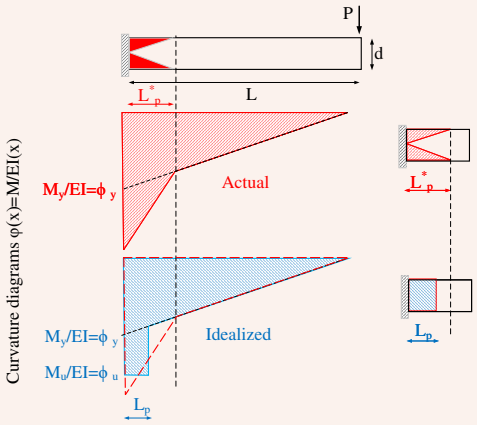


Figura 62.34: Sostituzione della punta di un fascio in acciaio con trave a sbalzo con assunzione di plasticità lumped

139 Da triangoli simili

$$L_p^* = L\left(\frac{M_p - M_y}{M_p}\right) = L\left(1 - \frac{M_y}{M_p}\right)$$

ma

$$\frac{M_y}{M_p} = \frac{S}{Z}$$

da

$$L_p^* = L\left(1 - \frac{S}{Z}\right)$$

140 Abbiamo assunto una variazione lineare della plastificazione, per semplificare, cerchiamo di determinare una lunghezza plastica equivalente L_p con un'area pari al precedente:

$$2\left(\frac{1}{2}\frac{d}{2}L_p^*\right) = L_p d \Rightarrow L_p = \frac{L_p^*}{2} = \frac{S-Z}{2S}L$$

141 La lunghezza vera della cerniera di plastica dovrebbe essere tra L_p e L_p^*.

142 Per quanto riguarda lo spostamento, rivisitiamo Eq. 62.26

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

62.3.1.5 Ex 62.1: Cerniera di plastica in una colonna d'acciaio

Se consideriamo una colonna di 12 ft (144 in) con un W14×90 sezione con le seguenti proprietà della sezione $S = 143$ in^3, $Z = 157$ in^{3}e F_y36 - Ok. $E = 29,000$ e $I = 999$ in^4, allora la lunghezza caratteristica sarà

$$\begin{aligned} L_p &= \frac{S-Z}{2S}L \\ &= \frac{157-143}{2\times 143}(144) = 0.049\times 12\times 7.0 \text{ inch} \end{aligned}$$

Lo spostamento è ottenuto da Eq. 62.26

$$\Delta^u_{AB} = \frac{F_y}{EI}\left[\underbrace{\left(\frac{S}{2}L\right)\left(\frac{2L}{3}\right)}_{\text{Elastic}} + \underbrace{(Z-S)(L_p)\left(L-\frac{L_p}{2}\right)}_{\text{Plastic}}\right]$$

$$= \frac{36}{29,000\times 999}\left[\underbrace{\left(\frac{143}{2}(144)\right)\left(\frac{2\times 144}{3}\right)}_{\text{Elastic}} + \underbrace{(157-143)(7)\left(2\times 144-\frac{7}{2}\right)}_{\text{Plastic}}\right]$$

$$= \underbrace{1.23''}_{\text{Elastic}} + \underbrace{0.017''}_{\text{Plastic}}$$

Hum, non sembra giusto, equazioni di controllo triplo! Infine, la duttilità di spostamento sarà

$$\mu = \frac{\Delta^{(el)}+\Delta^{(pl)}}{\Delta^{(el)}} = \frac{1.23+0.017}{1.23} = 1.014$$

62.3.2 Modello di guasto della cinghia (materiale stato limite)

Dalle tesi della M.S. «Implementation Of Lumped Plasticity Models And Developments In An Object Oriented Nonlinear Finite Element Code» by Segura, 2011.

62.3.2.1 Introduzione

143 Il modello di plasticità concentrata considera soltanto il degrado della resistenza flessionale, assegnando proprietà elastiche lineari alle molle assiali e di taglio. Le modalità di collasso per taglio e per azione assiale non vengono quindi rappresentate, benché i loro effetti siano critici. In particolare, il collasso a taglio della colonna è una delle modalità più gravi e può condurre rapidamente alla perdita della capacità portante assiale per effetto della ridotta resistenza a taglio della sezione.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

144 Uno strumento computazionale in grado di prevedere l'inizio del fallimento strutturale è uno strumento critico per gli ingegneri nel campo dell'ingegneria terremotata basata sulle prestazioni (Chapter 72) (PBEE). Ciò è particolarmente vero quando si considera la vulnerabilità delle strutture in cemento armato più vecchie per collassare a causa di cesoia e guasto assiale. Queste strutture sono particolarmente vulnerabili al collasso perché il loro leggero rinforzo trasversale non promuove comportamenti duttili sotto carico trasverso, un problema nelle strutture in cemento armato più vecchi (pre anni '70) progettati prima disposizioni di progettazione sismica attuali.

145 Come strumento per prevedere il comportamento di una tale struttura, Elwood e Moehle, 2002 sviluppato un modello empirico per catturare l'inizio del fallimento e il successivo degrado di resistenza che porta a collassare. I modelli di stato limite per l'insufficienza sia della cinghia che dell'assiale sono stati suggeriti in base alla deriva interstoria della colonna a cui si prevede un guasto per la modalità di interesse del fallimento.

146 Il modello di stato limite è stato scelto per l'attuazione a Mercurio (Saouma, Kang e Haussmann, 2012) come per simulare il guasto della canapa di colonne in cemento armato, il modello presenta applicazioni sia nella modellazione di plasticità distribuite che lumped, anche se è indubbiamente più utile come componente complementare a un modello di plasticity lumpe.

62.3.2.2 Modello di stato limite

147 Il modello di materiale dello stato limite della cinghia è adottato come mezzo per fornire Un altro strumento, oltre ai modelli di degrado della forza, per indagare la perdita di resistenza della struttura, è importante sottolineare che il modello è empirico in natura e quindi limitato nelle sue applicazioni. Il modello si applica alle colonne con bassi rapporti di rinforzo trasverso ($\rho'' \leq 0.002$) si prevede di fallire nel taglio dopo che è avvenuto il rendimento flessorale.

148 Un elemento a lunghezza zero-sale viene utilizzato per definire un modello di risposta costitutiva della tosaia. 62.35 per includere il modello di stato limite, un modello di plasticità lumped includerebbe un ulteriore elemento a zero-lunghezza nella parte superiore della colonna (nodo 3) con Mercurio *Isteresi* modello assegnato alla molla rotazionale, un rigido modello elastico lineare assegnato alla molla assiale e il modello di stato limite assegnato alla molletta Fig. 62.35.

149 Il modello di taglio Limit State definisce la curva della deformazione della forza come tre linee, Fig. 62.36: un ramo elastico iniziale (0-1), un ramo di forza degradante (ammorbidimento) (1-2), e una divisione residua di resistenza (2-3).

150 Una superficie di guasto (capacità del motore) (Fig. 62.37) è definita dall'Equazione, suggerita da Elwood e Moehle, 2002. La superficie di guasto definisce la deriva laterale $\left(\frac{\Delta}{L}\right)$ in cui la colonna dovrebbe fallire nella cesoia *dopo che la resa flessorale è avvenuta*. È una funzione del rapporto di rinforzo trasversale (ρ''), resistenza alla cesoia (v), forza

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

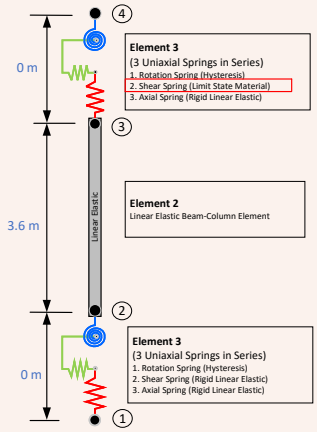


Figura 62.35: Modello plasticità lumpata con guasto della cinghia

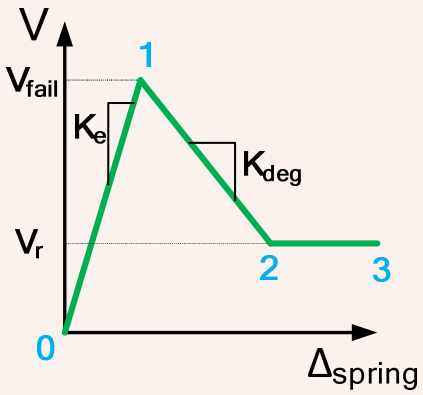


Figura 62.36: Limitare il guasto della cinghia

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

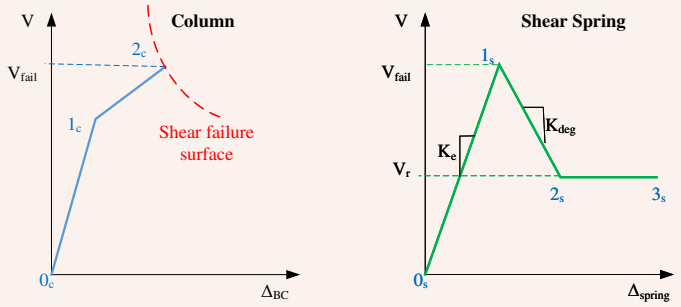


Figura 62.37: Risorso di primavera

di compressione concreta (f_c), carico assiale (P), e area di sezione lorda (A_g). Poiché il modello è empirico, la superficie di guasto viene definita separatamente per le unità S.I. e Inglese

$$\frac{\Delta_s}{L} = \frac{3}{100} + 4\rho'' - \frac{1}{40}\frac{v}{f_c'} - \frac{1}{40}\frac{P}{A_g f_c'} \geq \frac{1}{100} \qquad \text{S.I. Units}$$

$$\frac{\Delta_s}{L} = \frac{3}{100} + 4\rho'' - \frac{1}{500}\frac{v}{f_c'} - \frac{1}{40}\frac{P}{A_g f_c'} \geq \frac{1}{100} \qquad \text{English Units Units}$$

dove

Δ_s interstory spostamento a guasto della cinghia
L Altezza colonna
ρ'' rapporto di rinforzo trasversale
A_g colonna area trasversale mm^2 o^2
v capacità di taglio (V/A_g [MPa o psi]
f'_c forza di compressione in calcestruzzo MPa o psi
P = carico assiale della colonna

151 Il modello opera confrontando la risposta della forza-deformazione del taglio la parte superiore della colonna (Fig. 62.35 nodo 4) alla superficie della capacità di deriva.

152 Fig. 62.37 separa la colonna e le risposte di primavera. La colonna deformazione laterale (Δ_{BC}) è lo spostamento al n. 4 e la deformazione della molla (Δ_{spring}) è lo spostamento orizzontale dal nodo 3 al n° 4. Fino a quando la colonna raggiunge la superficie di guasto della tomaia (Fig. 62.37 punto 2_c), la risposta della molla di taglio è elastica lineare ($0_s - 1_s$). Una volta raggiunta la superficie di guasto, la rigidità della molla del taglio viene degradata ($1_s - 2_s$) dal punto di picco (V_{fail}) a cui il guasto della cinghia è stato previsto dalla superficie di fallimento.

153 Fig. 62.38 dettagli la risposta della colonna (Δ_{BC}), la primavera risposta (Δ_{spring}), e la risposta totale (Δ_{total}): a) prima che la superficie di guasto sia soddisfatta, b) durante il

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

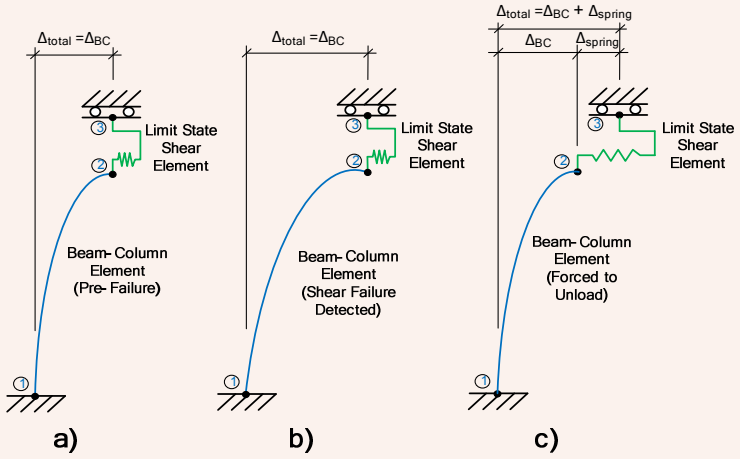


Figura 62.38: Limita risposta della colonna di stato

passaggio in cui viene raggiunta la superficie del guasto e c) quando si trova la guaina la rigidità è degradata.

154 L'elemento blu trave-colonna è composto dall'elemento 1, elemento 2 e dalle molle assiali e rotazionali dell'elemento 3 (Fig. 62.35). Se la rigidità iniziale della molla di taglio è impostata ad un valore molto elevato, la risposta totale pre-fallitura è uguale alla colonna Risposta flessorale ($\Delta_{total} = \Delta_{BC}$). Durante il periodo di tempo in cui l'insufficienza viene rilevata dalla superficie di guasto della cinghia, la rigidità della molla del taglio diventa negativa e la risposta totale è una combinazione della risposta flessorale della colonna e della reazione della molla dello shear non assiale come taglio Quando la superficie di guasto viene soddisfatta e la rigidità della molla del taglio diventa negativa, in quanto le deformazioni laterali aumentano a causa della rigidità del cesoio degradante, l'elemento colonna è permesso di scaricare. Ciò si traduce in una ridotta deformazione della colonna flessorale, mentre la deformazione a molla aumenta.

155 Determinazione dello stato della risposta pre-fallibile, e la risposta quando si avvia il degrado di rigidità a molla, utilizza la rigidità combinata dell'elemento colonna e l'elemento primavera.

$$\frac{1}{K_t} = \frac{1}{K_{BC}} + \frac{1}{K_{spring}}$$

Se la molla è inizialmente molto rigida, la rigidità totale è uguale a quella del K_{BC}.

$$\frac{1}{K_t} = \frac{1}{K_{BC}} + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{K_{BC}}$$
$$K_t = K_{BC}$$

156 Una volta che il fallimento è iniziato, la rigidità della molla di taglio viene degradata

COPIA DI REVISIONE

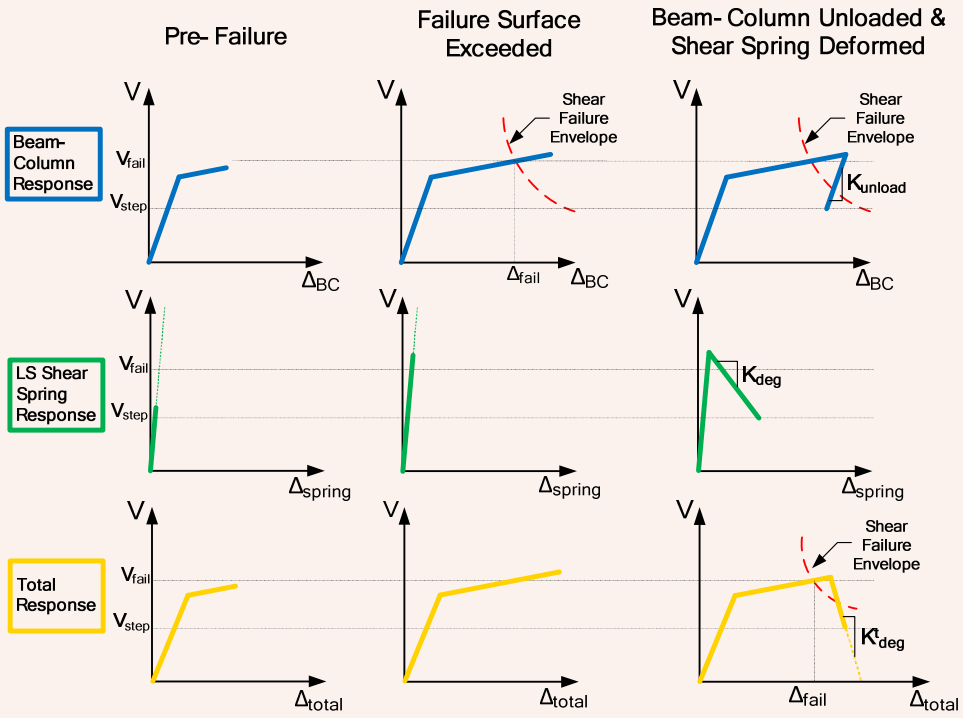


Figura 62.39: Limitare le risposte individuali dello stato

(K_{deg}) e la colonna inizia a scaricare ($K_{BC} = K_{unload}$). La rigidità totale degradata diventa la combinazione di questi (Fig. 62.39).

62.3.3 I modelli isterici di Ibarra che incorporano dissipazione dell'energia

157 La barra Il modello Ibarra-Krawinkler (IKM) è un modello isteretico ampiamente usato per simulare il comportamento delle strutture soggette a carico ciclico, in particolare durante i terremoti.

158 L'IKM è notevole per la sua capacità di catturare una varietà di comportamenti inelastici, come il degrado della forza, pizzicare e deterioramento della rigidità, che sono spesso osservati nelle strutture reali durante gli eventi sismici.

159 Di seguito è una copertura dettagliata di questo modello ampiamente usato.

Dalle tesi della M.S. «Implementation Of Lumped Plasticity Models And Developments In An Object Oriented Nonlinear Finite Element Code» by Segura, 2011.

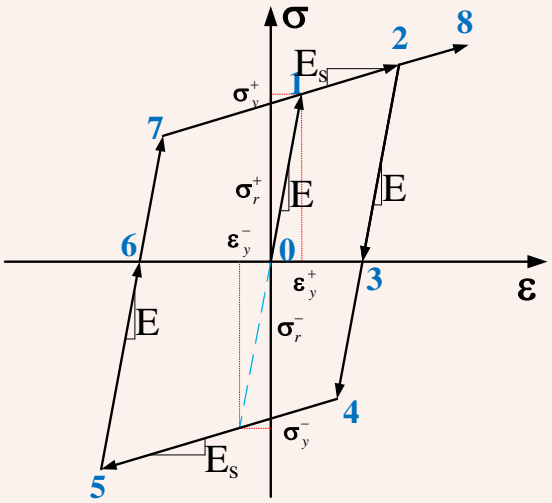
160 Un modello isteretico costitutivo è quello che cattura determinati materiali. Alcune risposte isteretiche idealizzate sono: carico elastico, indurimento delle tensioni, scarico

COPIA DI REVISIONE

elastico e ricarica elastica. Un modello costitutivo di indurimento a ceppo, ad esempio, cattura ciascuna di queste risposte idealizzate durante la durata di un singolo ciclo di carico.

161 In figura 62.40, un ciclo di isteresi è indicato per un materiale indurimento della tensione. Il carico elastico viene mostrato tra i punti 0 e 1, seguito da durezza del ceppo da 1-2, quindi scarico elastico (2-3) su una deformazione. Il ricarica elastico (3-4) è seguito da un carico di indurimento del ceppo (4-5), scarico elastico (5-6), recarico elastico (6-7), e ricaricamento dell'indurimento della tensione (7-8).

162 Osservare similitudine con l'effetto Bauschinger nella plasticità §55.3.1, e l'esempio in §55.5.2.3.


σ
ε
0
1
2
3
4
5
6
7
8
E
E
E

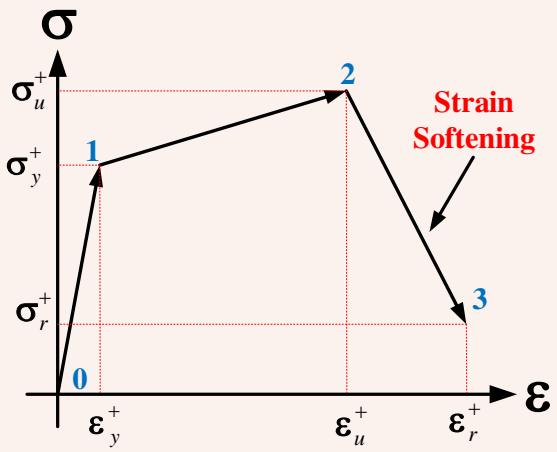


Figura 62.41: Strain addolcimento della resistenza

165 La ricerca indica che il degrado della capacità di resistenza si verifica durante la durata di una storia del carico ciclico inverso, a prescindere dal materiale, che significa l'importanza di un modello computazionale capace di catturare questo degradamento isteretico della forza. Questo tipo di perdita di forza si traduce in punti di indicatore di resistenza del modello costitutivo (cioè punto di forza di picco, punto di rendimento) che si traducono verso l'origine nel corso di una storia di carico ciclico, portando a guasto. 62.42 dettagli questo processo, indicando proprietà di resistenza degradate ad un punto X come X' e X'. È importante sottolineare che i punti di rendimento (3 e 6), i punti massimi (3 e 8) e i punti residui di resistenza (4 e 9) si traducono verso l'origine causando il punto di non verificarsi a un valore di ceppo inferiore a quello dell'originale Ceppo residuo.

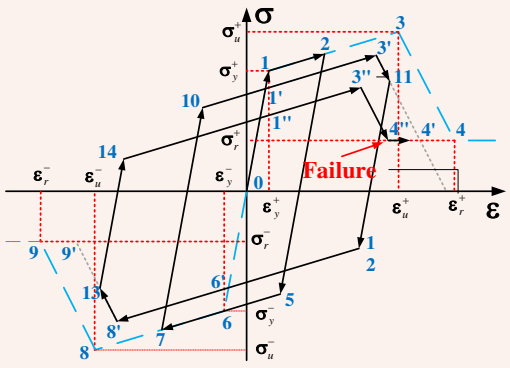


Figura 62.42: Degrado della forza ciclica inversa

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

166 Diversi modelli sono stati sviluppati per catturare la perdita di forza isterica. Possono essere divisi in due gruppi: modelli lineari a senso pezzo e modelli lisci con rigidità in continuo cambiamento.

167 I modelli Bilinear e Modified Kent and Park sono modelli lineari a senso unico in grado di catturare alcune caratteristiche comportamentali isteretiche. Il modello Bilinear, tuttavia, non cattura il comportamento post-peak e nessun deterioramento della resistenza è rappresentato per carico ciclico inverso. *fa* cattura il comportamento post-peak, deterioramento della forza non è rappresentato dal modello.

168 I modelli proposti da Clough, 1966 e Takeda, Sozen e Nielsen, 1970 sono modelli lineari pezzetti che rappresentano ricaricare la rigidità e scarico della rigidità, rispettivamente, sulla base deformazione massima sperimentata nella direzione di carico in precedente cicli. Il modello Wen-Buoc (Wen, 1976) è un modello liscio capace di catturando il deterioramento della rigidità. Wang et al., 2001 proposto un modello liscio che incorpora rigidità e degrado di resistenza; tuttavia, il modello non include una filiale post-peak ammorbidimento. Ogni modello cattura efficacemente le caratteristiche evidenti nei test strutturali, e una combinazione di queste caratteristiche pone in ultima analisi la base per i modelli isterici implementati a Mercurio. Per fornire queste capacità, vengono implementati due modelli costitutivi basati sulla ricerca di Ibarra, 2004, come strumenti computazionali per prevedere la risposta della struttura in funzione dell'energia isterica dissipata durante tutta la durata dei cicli di carico.

169 Tre modelli isteretici sono presentati da Ibarra, il primo è un modello bilineare modificato, seguendo regole isteretiche simili come quelle della *Bilinear* I due modelli sono le modifiche del modello di Clough, indicato come modello orientato al picco, differenziati l'uno dall'altro solo con l'inclusione degli effetti pizzicanti nel cosiddetto modello di pizzico.

170 Entrambi i modelli di picco-orientati e pizzicanti seguono una spina dorsale simile, Fig. 62.43 da cui la forza è deteriorata. La spina dorsale segue un ramo elastico iniziale fino al punto di resa (0-1), una branca indurente alla vetta (ultima) punto di forza (1-2), un ramo addolcitore alla capacità massima di deformazione (2-3), e un ramo di resistenza residuo oltre il punto di deformazione (3-4).

171 La spina dorsale rappresenta il percorso di carico sotto carico monotonico, quando non si verifica una perdita di forza isterica (§62.3.4.1). Ai fini dell'illustrazione, le seguenti figure esprimono i modelli costitutivi in termini di stress-strain; tuttavia la descrizione si applica anche alle relazioni forza-spostamento e momentanea-curvature. r, ye u corrisponde al residuo, la resa e l'ultimo capacità rispettivamente. Il sottoscritto s corrisponde al branca di indurimento e il sottoscritto c corrisponde al post-capping (ammorbidimento) ramo.

172 La relazione tra stress e resistenza è separata in quattro regioni per i percorsi di carico positivi e negativi: un ramo elastico, una branca di tempra a ceppo, un ramo di ammorbidimento e un ramo residua della forza. Nella tabella viene presentato un riassunto della colonna vertebrale monotonica 62.2, compreso la determinazione del modulo tangente.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

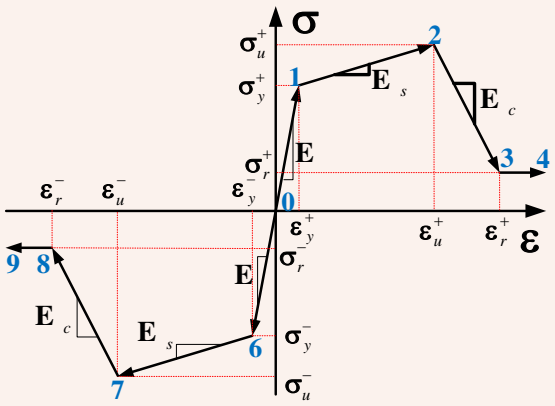


Figura 62.43: Modello Hysteresis spina dorsale

Tabella 62.2: Modulo tangente

Path	Description	Loading in Positive Direction		Loading in Negative Direction	
		$E_{\tan}$	Strain (ε)	$E_{\tan}$	Strain (ε)
$0-1\&0-6$	Elastic Loading	$E^{+}-\frac{\sigma_y^{+}}{\varepsilon_y^{+}}$	$0 \le \varepsilon < \varepsilon_y^{+}$	$E^{-}-\frac{\sigma_y^{-}}{s_y^{-}}$	$\varepsilon_y^{+} < \varepsilon < 0$
$1-2\&6-7$	Strain Hardening	$E_s^{+}-\frac{\left(\sigma_u^{+}-\sigma_y^{+}\right)}{\left(\varepsilon_u^{+}-\varepsilon_y^{+}\right)}$	$\varepsilon_y^{+} \le \varepsilon < \varepsilon_u^{+}$	$E_s^{-}-\frac{\left(\sigma_u^{-}-\sigma_y^{-}\right)}{\left(s_u^{-}-\varepsilon_y^{-}\right)}$	$\varepsilon_u^{-} < \varepsilon \le \varepsilon_y^{-}$
$2-3\&7-8$	Strain Softening	$E_c^{+}-\frac{(\sigma_r^{+}-\sigma_u^{+})}{(\varepsilon_r^{+}-s_u^{+})}$	$\varepsilon_u^{+} \le \varepsilon < \varepsilon_r^{+}$	$E_c^{-}-\frac{(\sigma_r^{-}-\sigma_u^{-})}{(s_r^{-}-\varepsilon_u^{-})}$	$\varepsilon_r^{-} < \varepsilon \le \varepsilon_y^{-}$
$3-4\&8-9$	Residual Strength	0	$\varepsilon \ge \varepsilon_r^{+}$	0	$\varepsilon \le \varepsilon_r^{-}$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

173 Notare che la spina dorsale mostrata in Fig. 62.43 ha la sua controparte per taglio e flessore, Fig. 62.44.

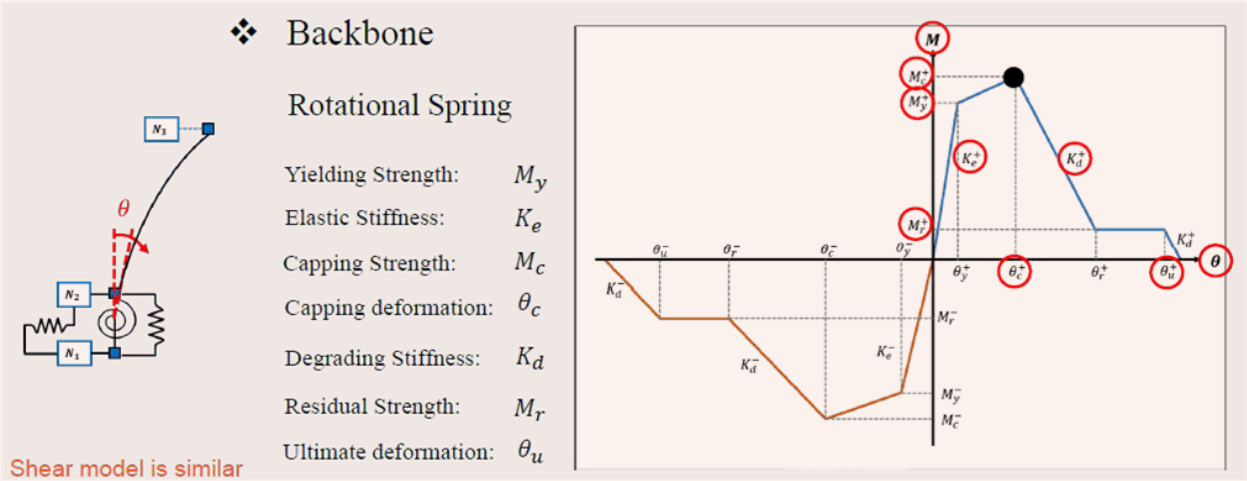


Figura 62.44: Curva a spina dorsale per flessore (Ghannoum, 2020)

62.3.3.1 Modelli di Hysteresi

174 Fig. 62.45 visualizza il percorso di base del ciclo dei modelli orientati al picco e pizzicanti adottati per l'implementazione in Mercurio. Le somiglianze tra i modelli sono etichettate come frecce nere, e le differenze come blu (orientato dal rumore) e rosso (pinching). I modelli sono legati dalla spina dorsale monotonica. Il primo ciclo visualizza il carico elastico seguito dall'indurimento della tensione. Su un inversione di sforzo, si verifica uno scarico elastico (2 a 3). Entrambi i modelli operano sotto il target di ricarica dove il percorso di ricarica mira allo stato della massima deformazione in tutti i cicli precedenti. Poiché la deformazione non è ancora avvenuta nella direzione di stress negativo, il carico obiettivo per il primo ciclo mira al punto di rendimento negativo (3-5). Per il modello di punta, la strada di ricarica si rivolge direttamente a questo stato massimo di deformazione (3-5).Per il modello pizzicante viene prima mirato un "punto di rottura" (4). Il punto di rottura rappresenta il punto in cui vengono riempite le crepe sezionali e viene ripristinata una certa resistenza attrito, oltre al punto di pausa il percorso di ricarica mira allo stato target (4-5).

175 Proseguendo con il caricamento oltre lo stato di destinazione, si verifica l'indurimento delle tensioni (5-6) e un inversione di tensione provoca uno scarico elastico (6-7). Per il modello di punta, il percorso di ricarica si rivolge direttamente allo stato massimo di deformazione (7-2).Per il modello pizzicante che ricarica prima mira al punto di rottura (7-8) e poi dirige verso lo stato di destinazione (8-2). La determinazione del punto di rottura è discussa in §62.3.3.1.2.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

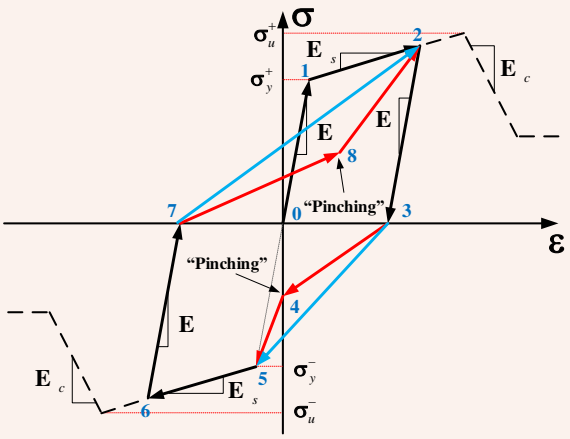


Figura 62.45: Modelli picchi e orientati al picco

62.3.3.1.1 Modello orientato al picco

176 Le regole base del percorso di carico ciclico per il modello orientato al picco sono indicate in Fig. 62.46. Il termine "peak-oriented" si riferisce al punto di deformazione massima nei cicli di carico precedenti (punti 2 e 6 in Figura 62.45. Il caricamento, nel modello di punta, si verifica direttamente a questo punto. 62.46, carico elastico si verifica da 0-1, seguito dal caricamento lungo il ramo di indurimento della tensione dall'1-11.

177 Un inversione di tensione si traduce nello scarico elastico tra 11 e 5. Il carico ciclico è diretto verso un rappresentante di stato target dello stato-strain allo stato massimo della deformazione sperimentata in tutti i cicli precedenti (punto massima di deformazione orientato al picco). Poiché la resa è avvenuta nella direzione di carico positiva (punto 1), su un inversione di tensione, lo stato di destinazione viene memorizzato come punto a cui si è verificato l'inversione (punto 11) *se questo punto supera la deformazione in tutti i cicli di carico precedenti*. Il ricaricamento, per la prima escursione nella direzione di carico negativa, si rivolge al punto di resa (punto 6).Il ricarico degradato avviene tra 5 e 6, visualizzando il degrado della rigidità inerente al modello a picco. Il carico lungo il ramo di indurimento (6-13) è seguito da un'inversione e scarico elastico (13-10).

178 Lo stato di destinazione nella direzione di carico negativo viene memorizzato a 13. Caricamento per il ciclo successivo mira a questo stato obiettivo. Ricaricare lungo la branca positiva, quindi, obiettivi punto 11. Il sottoscritto t corrisponde allo stato di destinazione. È importante sottolineare che il modulo di carico target (E_t) non deve essere confuso con il modulo tangente ($E_{\tan}$); anche se, quando si carica direttamente a lo stato di destinazione, sono gli stessi.

179 Fare riferimento alla Figura 62.47, quando si verifica un inversione di tensione sul ramo positivo (punto 11), lo stato target positivo viene aggiornato se la deformazione all'inversione supera il precedente stato massimo di deformazione. Lo scarico elastico

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

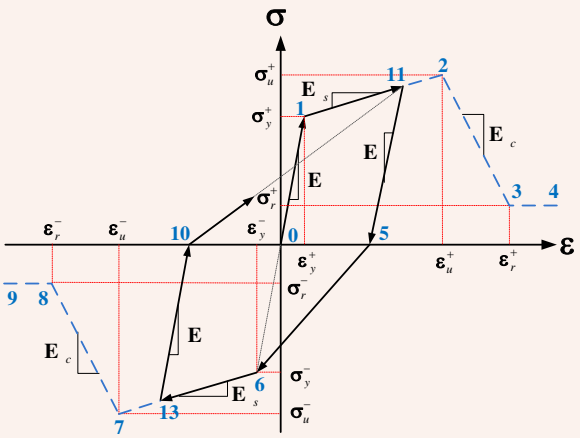


Figura 62.46: Ciclo di base del modello orientato al picco

avviene (11'-5'), e il ricaricamento degradato si verifica verso il punto di destinazione negativo (13).

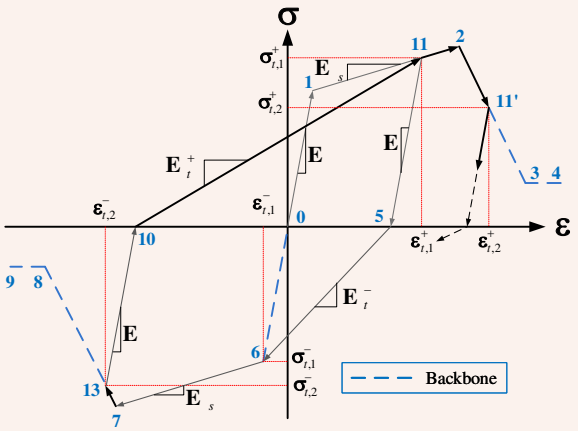


Figura 62.47: Caricare inversione e l'aggiornamento dello stato di destinazione

180 Nel corso di una storia del carico ciclico in aumento di magnitudine, il modello orientato al picco segue la spina dorsale monotonica verso il ramo dello stress residuo come mostrato nella figura 62.48.

62.3.3.1.2 Modello di Pining

181 Il modello di pizzicamento rappresenta il comportamento di ricarica inerente al cemento armato. Evidente nei test strutturali, come si verifica la fessura sezionale durante il carico inelastico, viene fornita una resistenza attrito inferiore nella direzione di caricamento mentre le crepe rimangono aperte. Mentre il carico continua e le crepe sono autorizzate

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

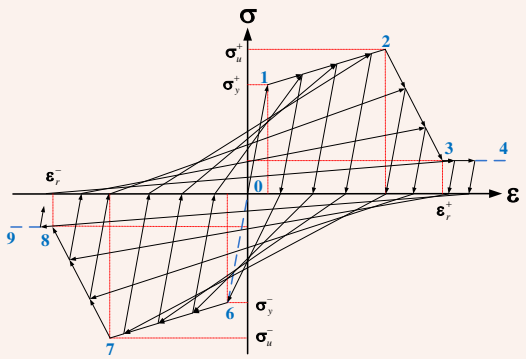


Figura 62.48: Aumentare la cronologia dei carichi ciclici seguendo il modello orientato al picco

a riempire, viene ripristinata una certa resistenza attrito. *forza pizzicata* ramo di ricarica risultante dalla ridotta resistenza attrito.

182 Il modello di pizzico segue la stessa spina monotonica del modello a picco e lo stesso ricarico "peak-oriented", mirando al punto della massima deformazione nei cicli precedenti. Il caricamento non si rivolge direttamente allo stato di deformazione massimo, tuttavia. Invece, come si riempiono le crepe sezionali, il modulo tangente mira ad un cosiddetto pizzico "break-point' (punti 14 e 15 rispettivamente nelle direzioni di carico negative e positive). Il punto di rottura rappresenta il punto in cui le crepe sezionali sono riempite e viene ripristinata una certa resistenza attrito, oltre al punto di pausa, il modulo tangente mira allo stato di destinazione. Come il modello orientato al picco, elastico (0-1) e indurimento del ceppo (1-11) il carico è seguito da un inversione di tensione e scarico elastico (11-5).

183 Lo stato positivo dell'obiettivo è memorizzato al punto 11. Il ricaricamento degradato si rivolge innanzitutto al punto negativo (14) a cui si colloca una parte della rigidità originale (modulo) che viene ripristinata e ricaricata mira al punto di destinazione (6), il punto di rendimento durante la prima escursione.

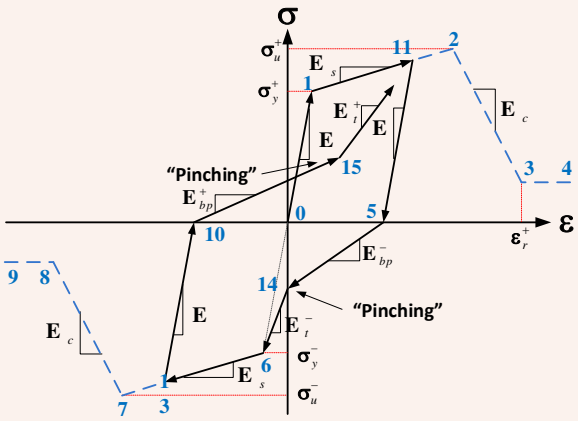
184 Il caricamento segue lungo il ramo di indurimento della tensione (6-13) e quando si verifica un'inversione di sforzo, lo stato negativo dell'obiettivo viene aggiornato (13) e lo scarico elastico avviene tra 13 e 10. Il ricaricamento nella direzione positiva si rivolge prima al punto di rottura positivo (10-15), seguito da un rinforzo rafforzato all'obiettivo (15-11).

185 Lo stato di break-point è determinato utilizzando i parametri κ_f e κ_d che determinano lo stress di destinazione e la tensione al punto di inflessione tra scarico e ricarica nella direzione opposta (ε_5 e ε_{10}), rispettivamente. La tensione di break-point viene determinata direttamente dalla varietà target da

$$\varepsilon_{bp}^{+/-} = (1 - \kappa_d)\varepsilon_{5/10}^{+/-}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.


σ
ε
"Pinching"
"Pinching"
E
E
E

di carico positiva (punto 15) che determina lo stress positivo di riferimento break-point e break-Point.

$$\varepsilon^+_{bp} = (1-\kappa_d)\varepsilon^+_5$$
$$\sigma^+_{ref,bp} = \kappa_f \sigma^+_t$$

187 Il modulo tangente al punto di rottura positivo (E^+_{bp}) è determinato da

$$E^+_{bp} = \frac{\sigma^+_{ref,bp}}{(\varepsilon^+_t - \varepsilon_{10})}$$

e usato per calcolare lo stress di break-point (σ^+_{bp})

$$\sigma^+_{bp} = E^+_{bp}(\varepsilon^+_{bp} - \varepsilon_{10})$$

188 Poi, il modulo tangente allo stato di destinazione è determinato utilizzando il stato di stress-strain al punto di rottura.

$$E^+_t = \frac{(\sigma^+_t - \sigma^+_{bp})}{(\varepsilon^+_t - \varepsilon^+_{bp})}$$

189 La determinazione dei valori di stato del punto di rottura negativo segue lo stesso processo; Tuttavia, è importante sottolineare ancora una volta che i valori di punto di rottura sono una funzione lo stato di destinazione, a seconda della deformazione direzionale massima vissuta nei cicli precedenti. Poiché il carico inelastice è stato raggiunto per la prima volta sul ramo di stress positivo (punto 11), la deformazione inelastica non si è ancora verificata sulla branca negativa, quindi lo stato target è lo stato negativo del rendimento (punto 6) fino a quando la deformazione resa è stata in questo caso, il primo punto di rottura è determinato per la direzione di carico negativa e il punto di interruzione, quindi, cade sull'asse verticale, corrispondente a zero sforzo.

190 Utilizzando queste informazioni i primi valori di stress-strain breakpoint sono calcolato di seguito.

$$\varepsilon^-_{bp} = 0$$
$$\sigma^-_{ref,bp} = \kappa_f \sigma^-_t$$
$$E^-_{bp} = \frac{\sigma^-_{ref,bp}}{(\varepsilon^-_t \varepsilon_5)}$$
$$\sigma^-_{bp} = -E^-_{bp}\varepsilon_5$$

191 Durante il ciclo successivo, Fig. 62.52 quando lo scarico avviene sul ramo di stress positivo (11'-5') e il ricaricamento inizia sulla filiale negativa (5'-14'), i valori di break-point

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

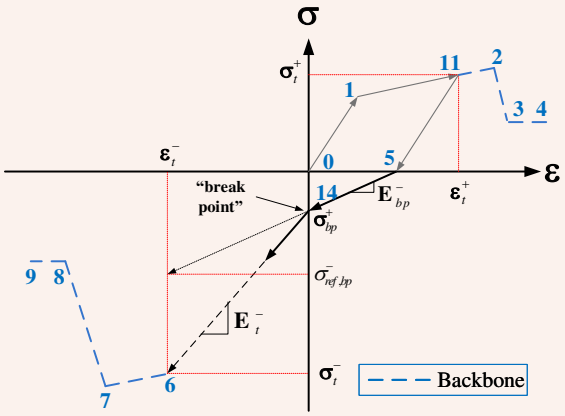


Figura 62.51: Determinazione del primo punto di rottura

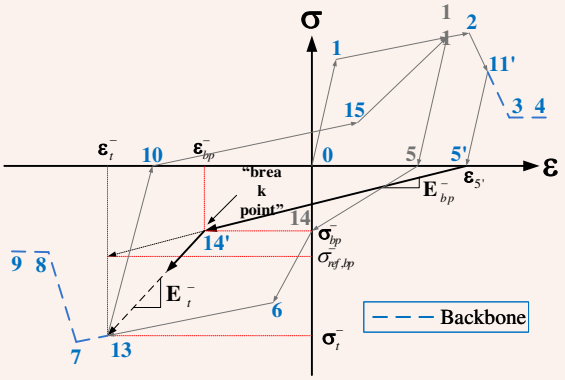


Figura 62.52: Aggiornamento punto di rottura

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

sono determinati come funzione dello stato target negativo (punto 13) dopo il processo descritto per determinazione del punto di rottura positivo.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{bp}^{-} &= (1-\kappa_d)\,\varepsilon_{10}^{-} \\
\sigma_{ref,bp}^{-} &= \kappa_f \sigma_t^{-} \\
E_{bp}^{-} &= \frac{\sigma_{rf,,bp}^{-}}{\left(\varepsilon_t^{-} - \varepsilon_5\right)} \\
\sigma_{bp}^{-} &= E_{bp}^{-}\left(\varepsilon_{bp}^{-} - \varepsilon_{5'}\right) \\
E_t^{-} &= \frac{\left(\sigma_t^{-} - \sigma_{bp}^{-}\right)}{\left(\varepsilon_t^{-} - \varepsilon_{bp}^{-}\right)}
\end{aligned}$$

192 Quando si verifica un inversione di tensione lungo il percorso di ricarica Fig. 62.53 e scarico elastico (16-10') porta a ricaricare oltre il punto di rottura (15), ricaricando gli obiettivi direttamente allo stato target (11').

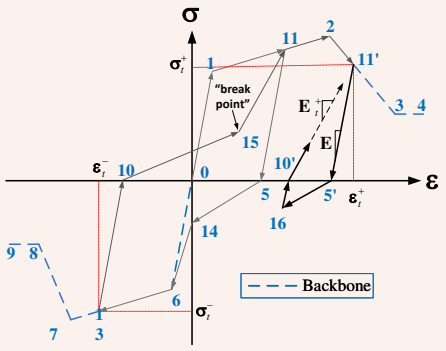


Figura 62.53: Ricaricare oltre il punto di rottura

193 Nel corso di una storia di carico ciclico in aumento di magnitudo, il modello di pizzicaggio segue la spina dorsale monotonica verso lo stress residuo attraverso il percorso "pinched Strength" mostrato in Fig. 62.54.

62.3.3.2 Modalità di degrado della resistenza

194 I modelli isteretici introdussero sopra i modelli efficaci per simulare il comportamento post-ielding. I risultati del laboratorio indicano, tuttavia, che come struttura è sottoposta a carichi ciclici inversa, la struttura subisce perdite di resistenza e il ricaricamento tipicamente non si verifica completamente alla spina dorsale monotonica.

COPIA DI REVISIONE

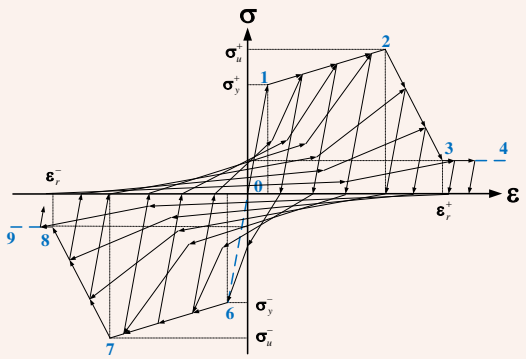


Figura 62.54: Aumentare la cronologia del carico ciclico seguendo il modello di pizzicaggio

195 Per spiegare questo comportamento, quattro forza modalità di degrado sono proposti da Ibarra, 2004È importante sottolineare che le modalità di degrado della forza presentate in questa sezione sono destinate ad essere utilizzate insieme a un modello isteretico costitutivo e non come modelli standalone(s). queste quattro modalità di degrado sono incluse nei modelli a picco e pizzicanti implementati in Mercury. Le modalità di degrado della forza rappresentano la perdita delle capacità strutturali dovuta to:

1. Resistenza all'emissione (forza di base) degradazione
2. Forza di picco (post-capping)degradazione
3. Scarico della rigidità (modulo) degradazione
4. Ricaricare la rigidità (modulo) degradazione

196 Fig. 62.55 fornisce risultati da test eseguiti presso l'Università della California, San Diego (Ibarra, 2004). La linea blu presenta i risultati di un test di carico monotonico, definendo la spina dorsale monotonica. I risultati dei test ciclici inversa sono tracciati in rosso e gli indicatori sono inclusi per descrivere gli effetti di ciascuna delle quattro modalità di degradazione. La modalità di degradazione 1 mostra un punto di rendimento in diminuzione, poiché la struttura subisce escursioni cicliche.La modalità 2 visualizza una traduzione nel ramo addolcitore, che influisce direttamente sulla forza di picco. La modalità 3 mostra il deterioramento della rigidità di scarico (modulo) e la modalità 4 visualizza un cambiamento di tensione.

197 Ciascuna delle quattro modalità di degrado è stata implementata utilizzando il parametro di dissipazione isterica β presentato da Rahnama e Krawinkler(Rahnama & Krawinkler,

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

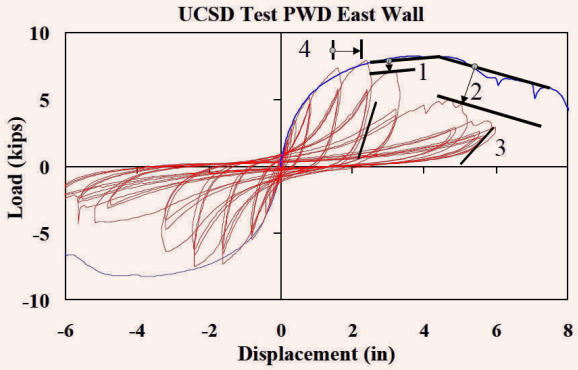


Figura 62.55: Risultati del laboratorio strutturale UCSD (Ibarra, 2004)

1993) per degradare una capacità energetica isterica definita dall'utente (E_{hys}). La capacità isterica è definito come un fattore dell'energia necessaria per raggiungere la resa.

$$\beta_i = \left(\frac{E_i}{E_{hys} - \sum_{j=1}^{i} E_j} \right)^c$$

$$E_{hys} = \gamma \sigma_y \varepsilon_y$$

dove

E_i energia isterica dissipata sopra l'escursione di carico i
$\sum E_j$ energia isterica dissipata su tutte le precedenti escursioni di carico
c parametro tasso di degrado
γ fattore di capacità energetica isterica

198 Una escursione di carico inizia quando l'asse orizzontale viene raggiunto e termina quando l'asse orizzontale ha attraversato nuovamente. Pertanto, le escursioni di carico separate si verificano sui rami dello stress positivo e negativo e vengono utilizzate per aggiornare i parametri di resistenza sul ramo opposto.$\beta_i \ll 1$), in aumento, poiché l'energia viene dissipata durante una storia di carico. Poiché la totale energia dissipata si avvicina alla capacità di riferimento, il parametro di dissipazione si avvicina all'infinito indicando il crollo strutturale. Per tutta la durata della storia del carico, valori di β dovrebbe mentire all'interno della gamma di $0 \leq \beta_i \leq 1$ per scopi computazionali. I valori inferiori a zero e superiori ad uno indicano che la capacità di riferimento isterica è stata esaurita e il degrado della capacità strutturale provocherà una perdita del carico strutturale Rahnama e Krawinkler suggeriscono una gamma $1 \leq c \leq 2$ per il parametro della velocità di deterioramento.

199 Le modalità di degrado cominciano a deteriorare la capacità strutturale una volta che si è ottenuta la resa in almeno una direzione. Gli aggiornamenti sono fatti per ciascuna delle modalità, ad eccezione della modalità di scarico rigidità, quando l'asse orizzontale

COPIA DI REVISIONE

del modello è attraversato, corrispondente a un cambiamento da stress positivo a negativo o viceversa. fatto indipendentemente per ogni stato di stress (positivo o negativo) quando il carico attraversa l'asse orizzontale e procede in quella direzione di caricamento. Ad esempio, quando lo scarico avviene sul ramo positivo e il carico inizia sul ramo negativo, gli aggiornamenti sono fatti per la capacità di base della forza, la capacità post-capping e la rigidità del ricaricamento (modulo) sul lato negativo. Gli aggiornamenti per la rigidità di scarico (modulo), d'altra parte, vengono fatti quando si verifica un inversione di tensione.

200 Le figure presentate per le modalità di degrado evidenziano il modello di pizzico, anche se l'idea è estesa al modello orientato al picco eliminando i punti di rottura e ricarica direttamente ai punti target.

62.3.3.2.1 Modalità di degradazione della forza di base

201 La modalità di degrado della forza di base rappresenta la riduzione della resistenza come ricarica avviene verso il ramo d'indurimento dello sforzo, fisicamente rappresentante della modalità 1 in Fig. 62.55. Cambia il ramo di indurimento della tensione, Fig. 62.56, verso l'origine riducendo lo stress di resa (1 a 1') e il modulo indurente ($E^{\mp}_{s,o}$ to $E^{\mp}_{s,1}$) utilizzando il parametro di dissipazione β_s.

202 Gli aggiornamenti sono fatti allo stress del rendimento e al modulo indurimento quando l'asse orizzontale è attraversato (punto 5 o punto 10) per la direzione di carico solo. Ancora una volta, le figure presentate in questa sezione dettaglio incorporazione delle modalità di degrado nel modello di pizzico, anche se sono implementate allo stesso modo nel modello orientato al picco. L'unica differenza è il ramo di ricarica aggiuntivo che si rivolge ai punti di rottura pizzicanti. I valori degradati sono determinati da

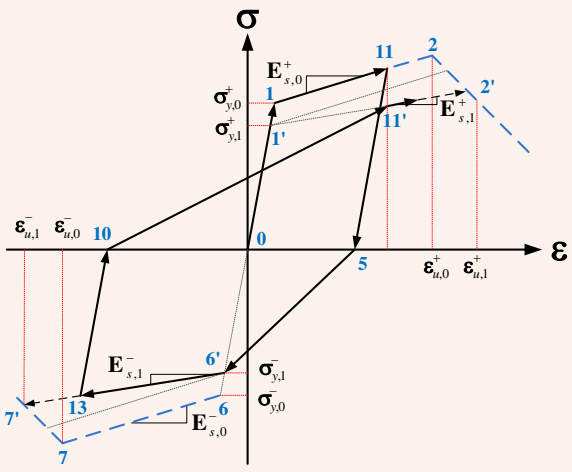


Figura 62.56: Modalità di degradazione della forza di base

COPIA DI REVISIONE

$$\sigma_{y,i}^{+/-} = \left(1 - \beta_{s,i}\right) \sigma_{y,i-1}^{+/-}$$
$$E_{s,i}^{+/-} = \left(1 - \beta_{s,i}\right) E_{s,i-1}^{+/-}$$

dove

$\beta_{s,i}$ parametro di dissipazione della forza base per passo del tempo *i*
$\sigma_{y,i-1}^{+/-}$ stress di resa direzionale per passo di tempo *i-1*
$\sigma_{y,i}^{+/-}$ stress di resa direzionale per passo di tempo *i*
$E_{s,i-1}^{+/-}$ modulo di indurimento del ceppo direzionale per passo di tempo *i-1*
$E_{s,i}^{+/-}$ modulo di indurimento del ceppo direzionale per passo di tempo *i*

$$\sigma_{y,i}^{+/-} = \left(1 - \beta_{s,i}\right) \sigma_{y,i-1}^{+/-}$$
$$E_{s,i}^{+/-} = \left(1 - \beta_{s,i}\right) E_{s,i-1}^{+/-}$$

203 Come precedentemente indicato, gli aggiornamenti indipendenti sono fatti a valori positivi e negativi durante il passaggio quando il carico attraversa l'asse orizzontale e inizia in quella direzione.$\beta_{s,i}$) si avvale di una capacità isterica legata alla forza fondamentale, determinata dal fattore di capacità isteretica γ_s.

$$E_{hys,s} = \gamma_s \sigma_y \varepsilon_y$$
$$\beta_{s,i} = \left(\frac{E_i}{E_{hys,s} - \sum_{j=1}^{i} E_j} \right)^c$$

204 Avviso che in base al requisito $0 \leq \beta_{s,i} \leq 1$, i valori dello stress di resa e del pendio indurimento non si degradano mai al di sotto dello zero. A causa del degrado dello stress di resa e del modulo indurente, lo stress di picco (2 a 2') e lo stress obiettivo (11-11') sono ciascuno ridotto e il percorso di carico si sposta più rapidamente verso la filiale residua.

62.3.3.2.2 Modalità di degrado della forza post-capping

205 La modalità di degrado post-capping rappresenta la riduzione della forza come ricarica avviene verso il ramo post-rubazione (ammorbidimento), fisicamente rappresentante della modalità 2 in Fig. 62.55Questa modalità di degrado sposta il ramo addolcitore verso l'origine, spostando il punto di forza del picco (2 a 2") e degradando un valore di riferimento dello stress che rappresenta il valore di sollecitazione superiore estrapolato all'asse verticale (cioè. punto di zero sforzo) dal modulo ammorbidente. Gli aggiornamenti vengono effettuati quando l'asse orizzontale è attraversato solo per la direzione del carico. Fig. 62.57 mostra questa modalità di degrado della forza per il codice degli elementi finiti Mercury scritto dagli autori (Saouma, Kang e Haussmann, 2012). Lo stress di riferimento

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

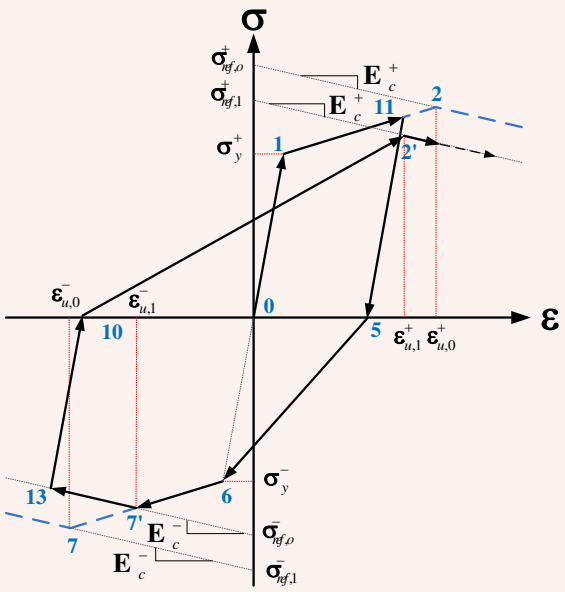


Figura 62.57: Modalità di degrado della forza post-capping

degradato è determinato utilizzando il parametro dissipazione $\beta_{c,i}$ corrispondente alla modalità di degrado della forza di tappatura.

$$\beta_{c,i} = \left(\frac{E_i}{E_{hys,c} - \sum_{j=1}^{i} E_j} \right)^c$$
$$\sigma^{+/-}_{ref,i} = \left(1 - \beta_{c,i}\right) \sigma^{+1-}_{ref,i-1}$$
$$E_{hys,c} = \gamma_c \sigma_y \varepsilon_y$$

dove

γ_c fattore energetico isterico associato al degrado della forza di tappatura
$\beta_{c,i}$ parametro di dissipazione della forza di tappatura per passo del tempo i
$\sigma^{+/-}_{ref,i-1}$ stress di riferimento direzionale per passo di tempo *i-1*
$\sigma^{+/-}_{ref,i}$ stress di riferimento direzionale per passo di tempo i

206 È importante sottolineare che il modulo addolcitore è tenuto costante e lo stress di punta viene degradato solo alterando lo stress. Una volta che lo stress di riferimento è stato degradato, gli aggiornamenti devono essere fatti allo stress di picco, allo stato dello sforzo-strain target e alla tensione residua.

62.3.3.2.3 Scarico della modalità di degrado della rigidità

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

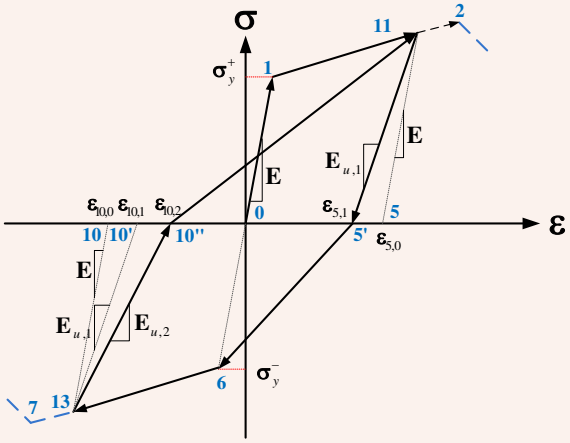
207 La modalità di degrado della rigidità di scarico rappresenta la modalità di degradazione 3 in Fig. 62.55. È unico rispetto alle altre modalità di degrado. In primo luogo, non si aggiorna indipendentemente per i rami di stress positivi e negativi. Invece, gli aggiornamenti sono fatti per entrambe le direzioni, il che significa che lo scarico di degrado della rigidità può verificarsi più rapidamente rispetto alle altre modalità.

208 Inoltre, il degrado non si verifica quando si carica attraversa l'asse orizzontale. Gli aggiornamenti vengono effettuati alla rigidità di scarico quando si verifica un inversione di tensione, al momento del primo caricamento avviene Fig. 62.58. Questa modalità degrada il modulo di scarico utilizzando parametro di dissipazione associato $\beta_{k,i}$.

$$
\begin{aligned}
E_{hys,k} &= \gamma_k \sigma_y \varepsilon_y \\
\beta_{k,i} &= \left(\frac{E_i}{E_{hys,k} - \sum_{j=1}^{i} E_j} \right)^c \\
E_{u,i} &= \left(1 - \beta_{k,i}\right) E_{u,i-1}
\end{aligned}
$$

dove

γ_k fattore di energia isterica associato al degrado della rigidità di scarico
$\beta_{k,i}$ scarico del parametro di dissipazione della rigidità per il passo temporale i
$E_{u,i-1}$ scarico del modulo per passo di tempo i-1
$E_{u,i}$ scarico del modulo per passo di tempo i


σ
ε
σ+y
σ−y
1
2
11
E
E
E

la dissipazione dell'energia comparabile è prevista in entrambe le direzioni (Ibarra, 2004). Se un adeguato γ valore non è scelto, la esaurimento della capacità isterica si verificherà prematuramente e il valore del $\beta_{k,i}$ si avvicinerà all'infinito e cadrà sotto zero ben prima che la esaurimento della capacità isterica avvenga per le altre modalità.

210 Un'altra caratteristica unica della modalità di degrado della rigidità di scarico è che gli aggiornamenti sono fatti solo se lo scarico si è verificato completamente su un ramo (positivo o negativo) e il ricaricamento ha iniziato sul ramo opposto, Fig. 62.59. Quando lo scarico non è completato e il ricaricamento inizia dalla stessa parte, viene considerato un'interruzione e il valore aggiornato ($E_{u,2a}$ in Figura 3.19) è trascurata. Quando si verifica un altro rovesciamento di ceppi, il valore degradato non considerato viene sostituito da un nuovo valore ($E_{u,2b}$ in Fig. 62.59) sulla base della nuova energia dissipata.

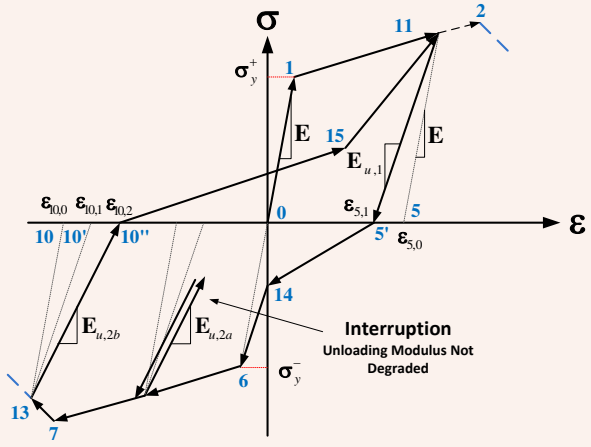


Figura 62.59: Scarico interruzione

211 Una volta che si è verificato il pieno scarico, l'attuale valore degradato viene memorizzato e degradato al successivo inversione di tensione. Poiché la rigidità di scarico è degradata, è evidente che si verificherà una crescente dissipazione dell'energia isterica, con conseguente rapido degrado delle altre modalità.

62.3.3.2.4 Modalità di degrado della rigidità accelerata

212 La modalità di degrado della rigidità accelerata è la modalità 4 in Fig. 62.55. La modalità di ricarica accelerata aumenta il valore assoluto del valore della deformazione direzionale; così i punti di riferimento (11-11') e le interruzioni (15-15' e 14-14') si allontanano dall'origine, causando la diminuzione del modulo di ricarica. Gli aggiornamenti vengono effettuati quando l'asse orizzontale viene attraversato solo per la direzione di carico.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

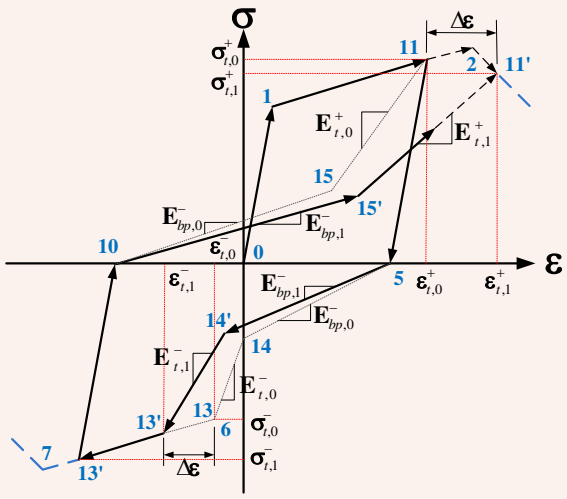


Figura 62.60: Modalità di degrado della rigidità accelerata

213 La tensione di destinazione viene spostata regolando il valore utilizzando il parametro di dissipazione del carico accelerato $\beta_{a,i}$.

$$E_{hys,a} = \gamma_a \sigma_y \varepsilon_y$$
$$\beta_{a,i} = \left(\frac{E_i}{E_{hys,a} - \sum_{j=1}^{i} E_j} \right)^c$$
$$\varepsilon_{t,i}^{+/-} = \left(1 + \beta_{a,i}\right) \varepsilon_{t,j-1}^{+/-}$$

dove

γ_a	fattore energetico isterico associato al degrado della rigidità di ricarica accelerato
$\beta_{a,i}$	parametro di dissipazione del ricaricamento accelerato per passo di tempo i
$\varepsilon_{t,i-1}^{+/-}$	ceppo di destinazione direzionale per passo di tempo *i-1*
$\varepsilon_{t,i}^{+/-}$	ceppo di destinazione direzionale per passo di tempo i

214 Come risultato del turno di deformazione target, il ricaricamento è accelerato e il percorso di carico si rivolge al ramo residuo molto più rapidamente in quanto aumenta la dissipazione dell'energia isterica.

62.3.3.3 Sintesi

215 I modelli costitutivi isterici e isteretici pizzicanti discussi in §62.3.3.1.1 e 62.3.3.1.2 Entrambi i modelli seguono la stessa spina dorsale monotonica che comprende un ramo di carico elastico, una branca di indurimento della tensione, un ramo post-capping e un ramo residuo di resistenza. Ogni modello aderisce al caricamento orientato al picco verso

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

il punto di deformazione massima sperimentata nei cicli di carico precedenti, l'unica differenza è che il modello di pizzico include un secondo ramo di ricarica che mira al punto di rottura di pignoramento prima di puntare allo stato massimo della deformazione, per tener conto della perdita di resistenza isterica, delle modalità di degradazione della forza e della rigidità presentate in sezioni 62.3.3.2.1-62.3.3.2.4 sono stati scelti per essere inclusi sia nei modelli di picco-oriented implementati e pizzico.

62.3.4 Il modello di Ghannoum

216 Il lavoro più precedente nella quatificazione del comportamento ciclico isteretico dei membri concreti è stato stymied da dati di prova limitati e difficoltà a rappresentare con metriche semplici la forma curvilinea delle relazioni laterali di deformazione del carico durante il ciclismo.

62.3.4.1 Curva della spina dorsale

217 La risposta della busta di spina dorsale del modello può essere definita per comportamenti simmetrici e asimmetrici, Fig. 62.61. I primi quattro rami in ogni direzione di carico rappresentano rispettivamente gli intervalli comportamentali elastici, indurenti, degradanti e residui. Per i due rami residui, percorsi di carico 4^+ or 4^-, si introduce un leggero pendio negativo per alleviare i problemi di convergenza numerica. I rami seconda degradanti, percorsi di carico 5^+ or 5^-, sono introdotti a raggiungere gradualmente zero forza e vengono assegnati lo stesso pendio del primo ramo degradante nella loro rispettiva direzione di carico (passi di carico 3^+ or 3^-).

218 Questa pendenza degradante è stata scelta per semplicità poiché i dati sperimentali nella gamma residua-forza sono scarse. Sono necessari quattordici parametri di ingresso dell'utente in totale per definire le curve della spina dorsale (sette parametri per ogni direzione di carico). Questi parametri sono la rigidità elastica (K_e), momento di rendimento (M_y), momento di tappatura (M_c), rotazione della tappatura (θ_c), rigidità del ramo degradante (K_d), momento residuo (M_r), e rotazione finale (θ_u).

219 I parametri della spina dorsale possono essere calibrati per rappresentare una risposta monotonica o una busta di comportamento ciclico, a seconda che il dataset della colonna sperimentale contenga test di colonne con un comportamento pushover o un comportamento ciclico completamente invertito.

62.3.4.2 Comportamento ciclabile

220 Il focus è la definizione del comportamento di deformazione della forza laterale delle colonne in cemento attraverso parametri globali come dissipazione dell'energia, resistenza e relazioni di rigidità (Suselo, 2021). Le relazioni per aspetti comportamentali ciclici chiave rispetto alle proprietà geometriche e di dettaglio della colonna, così come altre condizioni

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

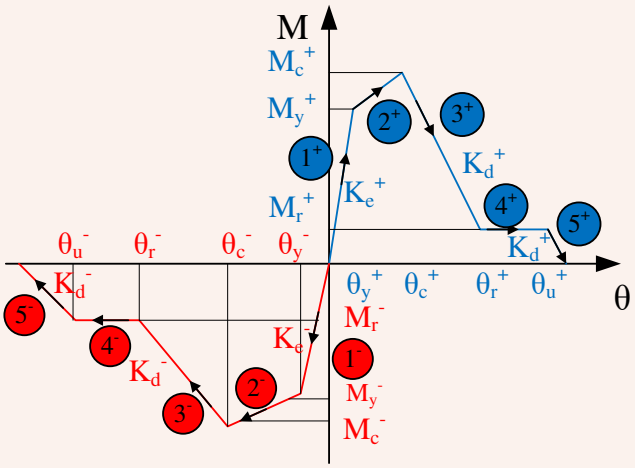


Figura 62.61: Curva della spina dorsale (Ghorbani et al., 2022)

limite rilevanti, sono definite da un database sviluppato separatamente (§63.3.2.3) con quasi 700 test di colonna.

221 Un obiettivo primario del modello era quello di introdurre un'espressione matematica che può replicare queste caratteristiche sull'intero percorso di carico scarico-ricaricamento, pur essendo ancora definita da relativamente pochi parametri che possono essere estratte oggettivamente dai dati di prova e essere facilmente relabile ai comportamenti fisici, che è stato realizzato da una curva B-spline di terzo grado con cinque punti di controllo introdotti nel modello computazionale.

222 Le curve isteresi richiedono solo tre parametri fisicamente significativi per calibrare, Fig. 62.62.

223 Una curva B-spline di terzo grado con cinque punti di controllo richiede nove nodi. Impostando una pendenza Scarico e un pendio ricaricabile ai punti finali di una curva a B-spina, la prima $p+1 = 4$e l'ultimo $p+1 = 4$ I nodi devono essere identici, Fig. 62.62. I punti di controllo ultimi e primi rappresentano, il punto in cui inizia lo scarico (Scarica Punto), e il punto di destinazione nella direzione di ricarica del carico (Punto di caricamento). Questi punti sono determinati sulla base delle regole isteresi. Punti di controllo P_1 e P_3 sono collegati alle piste di fine-punto e un fattore di forma attraverso

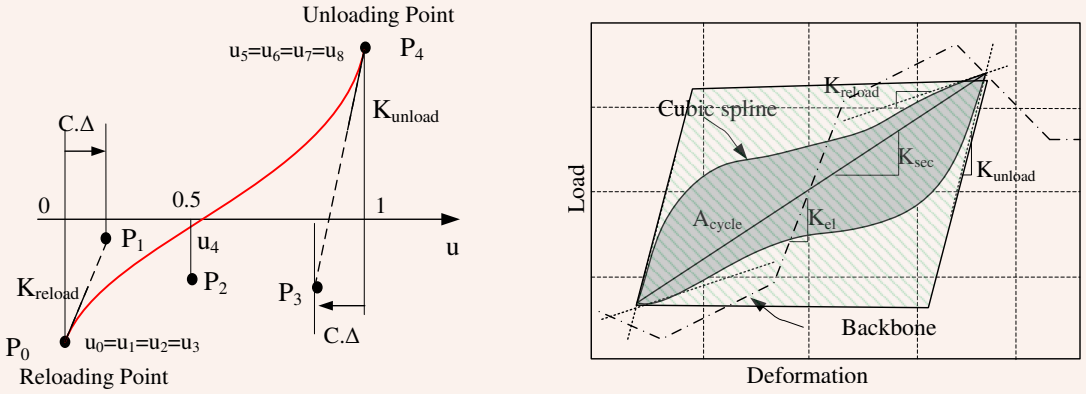
$$P_1 = P_0 + K_{unload}(C.\Delta)$$
$$P_3 = P + 4 - K_{reload}(C.\Delta)$$

Dove? Δ è definito da

$$\Delta = \frac{u_8 - u_0}{4}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) (b)

Figura 62.62: Modello di isteresi a base di spline cubico (Suselo, 2021)

e C è un fattore di forma che controlla la forma della curva e varia tra 0 a 1. Dopo aver valutato molte alternative, una costante $C = 0.1$ fattore è stato adottato perché ha prodotto un rappresentante della forma curva splina del comportamento ciclico delle colonne di cemento.

224 Il punto di controllo P_2 è collegato al Rapporto Energia (ER) attraverso

$$P_2 = (C.\Delta)(K_{reload} - K_{reload}) - \frac{1}{2}\frac{ER}{\Delta} + \frac{1}{2}(P_0 + P_4)$$

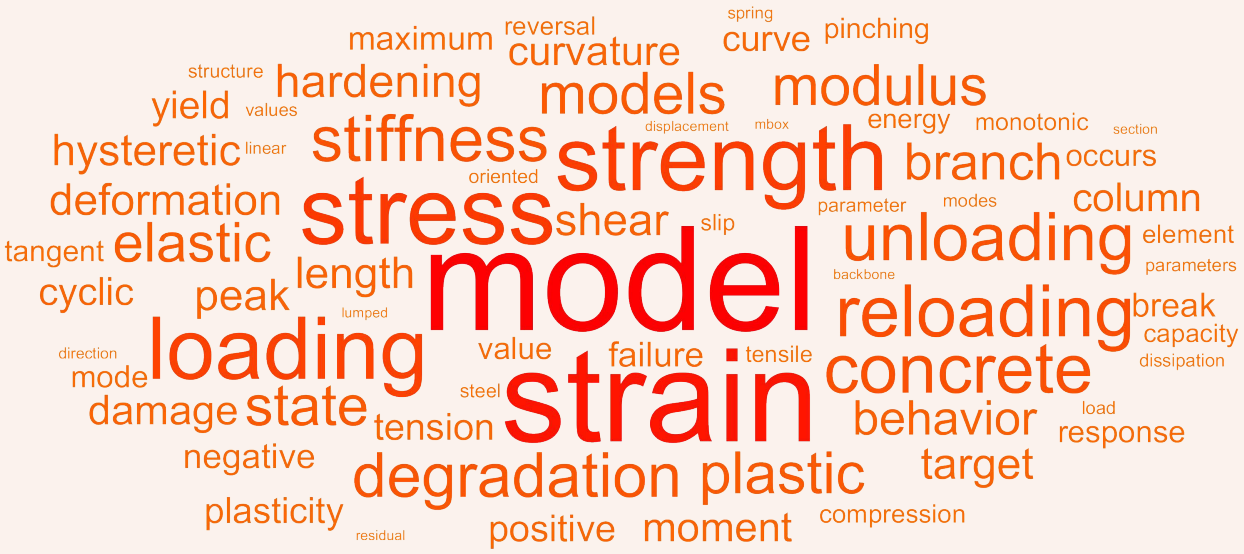
225 Il ER è definita come l'energia all'interno della curva isterica (zona di guarnizione in granaio) nella Fig. 62.62b diviso per l'energia all'interno di una curva elastica-plastica a ciclo che inizia e termina con gli stessi punti con la stessa rigidità di scarico (area verde solida intagliata). Questo parametro, in combinazione con le piste di fine punto, determina il livello di pizzicaggio o in alternativa il livello della dissipazione dell'energia modello esibisce durante il caricamento ciclico.

226 Ridurre il valore di ER aumenta il livello di comportamento pizzicante in questo modello.

227 Il numero totale di parametri necessari per definire il comportamento ciclico di una molla con questo modello è quindi cinque: Punto di scarico, Piste di scarico e punto di ricarica, Ricarica della Piattaforma e Rapporto Energia.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 63

Scienza e Arte della modellazione degli elementi finiti

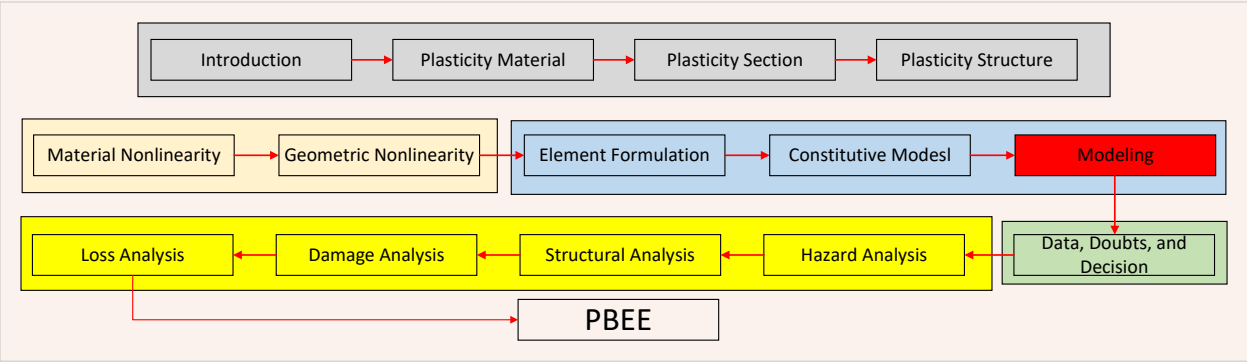
Abstract

Un fattore chiave nell'analisi degli elementi finiti è spesso trascurato: modellare, come suggerisce questo capitolo, si tratta di un'arte e una scienza il cui esercizio può avere effetti negativi.

Questo capitolo fornisce al lettore raccomandazioni di base prima che si tratti di qualsiasi più specificamente, come capire e articolare e poi definire matematicamente il problema, come raccogliere i dati richiesti da fonti multiple e sintetizzarli, come definire il modello matematico (elemento finito). In particolare, si rivolgerà alla modellazione che (in questo contesto) è la scienza e l'arte di affrontare tutto quanto sopra.

63.1 Introduzione 2170
63.1.1 Verifica della mesh/analysis dell'elemento finito 2173
63.1.2 Concetti di verifica e validazione del modello 2173
63.2 Mesh 2175
63.2.1 Elementi Macro 2176
63.2.2 Sezione trasversale 2181
63.2.3 "Pick and stick" 2182
63.2.4 Conclusioni 2182
63.3 Determinazioni dei parametri di deteriorazione 2183
63.3.1 Calibrazione 2184
63.3.2 Database dei parametri di modellazione 2184

COPIA DI REVISIONE



63.1 Introduzione

1 La corretta modellazione di una struttura è fondamentale per un'analisi riuscita, che si rafforza quando si tratta di analisi non lineare.

2 Contro intuitivamente, modellare una struttura con elementi 1D (come discusso nel capitolo 61) non è così semplice come potrebbe inizialmente apparire. Questo capitolo affronta tali complessità.

3 L'analisi degli elementi finiti non lineari delle strutture incorniciate è infine un equilibrio tra:

- Necessità e vincoli di tempo computazionali,
- La corretta comprensione dei principi di analisi del problema e non lineare
- Gli strumenti computazionali e le competenze disponibili in-house.
- Qualità dei risultati previsti.

Processo di analisi

4 L'analisi deve essere attentamente pianificata, eseguita e valutata; nell'approccio più rigoroso si tratta delle seguenti fasi (Fig. 63.1):

Analisi preliminare: Di solito elastico lineare, questo passo testa la definizione di proprietà materiali, condizioni limite e carichi.

Valutazione preliminare: Eseguire un "controllo di realtà" sui risultati. Sono entro limiti ragionevoli o significativamente diversi da quelli previsti nel rapporto preliminare? Verificare errori palesi nelle voci dei dati, unità miste, o risultati inaspettati. Identificare le zone di rete che richiedono raffinatezza, la necessità di diversi incrementi o sistemi di integrazione.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

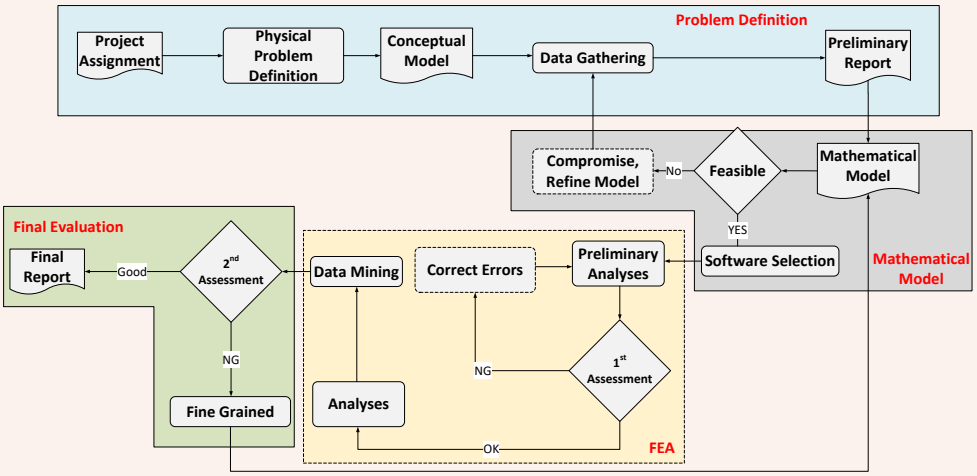


Figura 63.1: Processo di elementi finiti (ispirato da Bathe, 1996)

Errori corretti: Problemi di indirizzo che hanno portato a risultati preliminari inaccettabili.

Analisi: Incrementalmente analizzare la struttura, a partire dai modelli più semplici ai più complessi.

Estrazione di dati: Alcuni software consentono l'esportazione di dati specifici, mentre altri non lo fanno. I risultati possono essere recuperati da post-processori grafici o file di output ASCII e memorizzati. È meglio consolidare tutti i dati recuperati in un foglio Excel e utilizzare strumenti come MATLAB o Python per tracciare i dati secondo le necessità.

5 Spesso, i fallimenti su larga scala derivano da piccoli dettagli trascurati che, in retrospettiva, avrebbero potuto e avrebbe dovuto essere contabilizzati nel modello. È necessario un'attenta considerazione per distinguere ciò che è essenziale da quello che non lo è.

6 Pertanto, l'attenzione ai dettagli deve essere applicata uniformemente durante tutto il processo (Figura 63.2). La sottovalutazione dell'importanza di un aspetto specifico della modellazione può portare a guasto, ad esempio il fallimento del legame, sebbene spesso trascurato, è fondamentale sotto carichi sismici alla base delle colonne.

Requisiti di analisi non lineari

7 Il fatto che si tratti di un'analisi elastica lineare, quando è richiesta l'analisi non lineare può essere sia costosa che pericolosa; questa dipendenza dipende spesso da una sentenza altamente conservatrice e arbitraria (e diminuente) "ingegneria".

8 Il mancato individuazione del carico di guasto può portare a "overshooting", con conseguente fragile sovra-design. 63.3).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

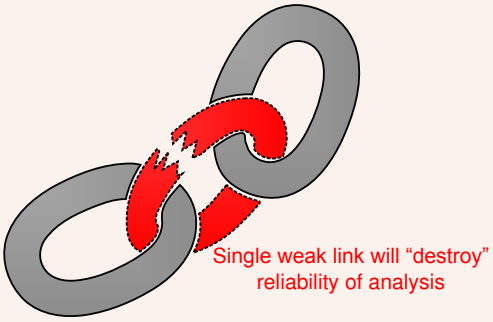


Figura 63.2: Complessità del modello uniformemente distribuita

9 I problemi complessi possono, a volte, richiedere analisi complesse.

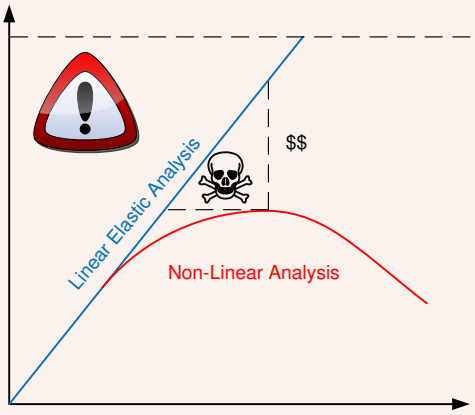


Figura 63.3: Pitfalls dell’analisi lineare rispetto all’analisi non lineare

10 A differenza di soluzioni elastiche lineari, l’analisi non lineare fornisce molteplici soluzioni accettabili. Diversi software, modelli e analisti possono produrre risultati diversi, che non significa necessariamente tutti sono “wrong’ (anche se alcuni potrebbero essere), tuttavia devono essere adeguatamente interpretati.

11 Attenzione, l’analisi non lineare non è un sostituto del giudizio tecnico sonoro. Dovrebbe essere un ultimo ricorso, utilizzato solo dopo il buon senso, analisi lineari e metodi semplificati sono stati esauriti.

12 Idealmente, l’analisi non lineare dovrebbe essere utilizzata per convalidare o quantificare un’ipotesi ben fondata *prima di* all’analisi.

13 Eseguire un’analisi non lineare richiede grande cura nella preparazione dei dati e l’interpretazione dei risultati.

14 I risultati dovrebbero essere esaminati in primo luogo qualitativamente; si dovrebbe

COPIA DI REVISIONE

evitare di sovraanalizzare la precisione o concentrandosi su dettagli insignificanti come il "terzo decimale'.

Definition 63.1: Ruolo degli studi di elementi finiti

L'analisi degli elementi finiti è solo uno strumento per confermare o quantificare una risposta anticipata attraverso un giudizio di ingegneria solido corretto.

Selezione degli esperti

15 Se si deve effettuare un'analisi non lineare, occorre prestare grande attenzione nella scelta di "esperti' che potrebbero eseguire tale analisi. La maggior parte degli ingegneri delle aziende di consulenza sono abituati a eseguire analisi elastiche lineari e design regolamentato in codice.

16 D'altra parte, ci sono una manciata di ricercatori in accademia che sono ben versi nella condotta dell'analisi non lineare di una struttura complessa; tuttavia spesso tendono a semplificare gli aspetti periferici del modello e concentrarsi su un aspetto stretto.

17 Va tenuto presente che i problemi straordinari richiedono tecniche straordinarie per indagare da analisti molto ben qualificati.

63.1.1 Verifica della mesh/analysis dell'elemento finito

Una volta che una maglia elemento finito è stata messa insieme, è auspicabile verificare la sua rappresentatività. Questo può essere valutato confrontando l'elemento finito e modelli modali sperimentali. Il primo è determinato da un'analisi modale e dalla determinazione della prima frequenza naturale del modello di elemento finito, che può essere ottenuta attraverso una vibrazione forzata della struttura da uno shaker con massa eccentricamente posizionata.

18 Mesh per un'analisi non lineare potrebbe essere verificata da un' analisi "pushover" per identificare se è in grado di replicare una modalità di fallimento anticipato (ad esempio, sono gli elementi comuni adeguatamente definiti per consentire il fallimento previsto?). Infine, il modello non lineare dovrebbe essere convalidato indipendentemente sulla base di una componente strutturale rappresentativa con una risposta sperimentale nota (vedi sotto §63.3.1 per la calibrazione.

63.1.2 Concetti di verifica e validazione del modello

19 Troppo spesso i codici degli elementi finiti non lineari sono presumibilmente considerati "validati" semplicemente catturando i dati sperimentalmente osservati (lo spostamento in genere). Spesso, questo è accompagnato da figure molto colorate e giustapposizioni. Va tenuto presente che i modelli non lineari hanno variabili sufficienti per "tune" molti di loro

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

e poi ottenere ciò che è percepito come un modello accettabile. Un modello del genere dovrebbe essere esaminato per assicurarsi che tutte le ipotesi siano solide e ragionevoli e che le proprietà materiali adottate siano realistiche, in altre parole non basta un semplice confronto pittorico superficiale.

20 Si dice comunemente che un codice degli elementi finiti deve essere convalidato o verificato. (Thacker et al., 2004) (Stewart, 2009).

Verifica Il processo di determinazione del modello rappresenta con precisione la descrizione concettuale dello sviluppatore del modello e della soluzione al modello. Si tratta di identificare e rimuovere gli errori nel modello confrontando soluzioni numeriche a soluzioni di benchmark analitiche o altamente accurate, in breve, la verifica si occupa della matematica associata al modello.

Validazione Processo di determinazione del grado a cui un modello è una rappresentazione accurata Il mondo reale, dal punto di vista degli usi previsti del modello, si occupa della quantificazione dell'accuratezza del modello confrontando le soluzioni numeriche ai dati sperimentali. In breve, la validazione si occupa della fisica associata al modello.

Calibrazione Processo di regolazione dei parametri di modellazione numerica o fisica nel modello computazionale al fine di migliorare l'accordo con i dati sperimentali.

Verifica del codice Processo di determinare che il codice del computer è corretto e funzionante come previsto.

Modello del computer implementazione numerica del modello matematico, di solito sotto forma di discretizzazione numerica, algoritmi di soluzione e criteri di convergenza.

Modello concettuale Raccolta di ipotesi, algoritmi, relazioni e dati che descrivono la realtà d'interesse da cui si può costruire il modello matematico e l'esperimento di validazione.

Confidenza Probabilità che una stima numerica si trova all'interno di un intervallo specificato.

Errore è una carenza riconoscibile in qualsiasi fase o attività di modellazione e simulazione che non sia dovuta alla mancanza di conoscenza.

Fideltà La differenza tra simulazione e risultati sperimentali.

Irreducibile chap: regione della fiducia Variazione inerente associata al sistema fisico da modellare.

Modello matematico Le equazioni matematiche, i valori limite, le condizioni iniziali e i dati di modellazione necessari per descrivere il modello concettuale.

Modello Descrizione concettuale/matematica/numerale di uno scenario fisico specifico, inclusi dati geometrici, materiali, iniziali e al contorno.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Revisione del modello Il processo di modifica delle ipotesi di base, della struttura, delle stime dei parametri, dei valori limite o delle condizioni iniziali di un modello per migliorare l'accordo con i risultati sperimentali.

Pregiudizio Utilizzo di un modello per prescrivere lo stato di un sistema fisico in condizioni per cui il modello non è stato convalidato.

Reducibile chap: regione della fiducia Potenzionale carenza che è dovuto alla mancanza di conoscenza, ad esempio informazioni incomplete, scarsa comprensione del processo fisico, descrizione implicita o non specifica delle modalità di fallimento, ecc.

63.2 Mesh

21 Dopo aver coperto (non lineare) formulazione degli elementi e modelli costitutivi non lineari, siamo ora pronti a mettere insieme questi due e affrontare come sono i frames realmente modellati, cioè. *mesh*. È per lo più scienza con una piccola dose di arte.

22 Mesh influenza l'accuratezza, la convergenza e la velocità di una simulazione.

23 La modellazione metterà così insieme un *modello matematico*, cioè mesh, proprietà materiali, carico per la successiva analisi degli elementi finiti. E' importante sottolineare immediatamente che non esiste un modo unico e "proper" di modellare una struttura in quanto sia la modellazione scienza e arte.

24 Prima di iniziare, dovremmo porci: alcune domande importanti

- 2D o 3D?
- Sezione a strati o forze sezionali?
- Stato limite?
- - Rayleigh e/o isterica?
- Analisi singola rigorosa o ca. analisi multiple (Monte-Carlo)?
- Plasticità lumpata o distribuita?
- - Un'infiltrazione?
- Analisi pushover o transient
- Quanta non linearità ci si attende: fino al picco oppure anche nel ramo post-picco?

25 È sempre un *compromesso* tra:

- Aspetti e vincoli di tempo/costo.
- La nostra comprensione del problema e dell'analisi non lineare.
- Software/esperti disponibili.
- Qualità dei risultati previsti.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

63.2.1 Elementi Macro

26 Contrariamente agli elementi finiti a base continuum, nel contesto di un'analisi non lineare, gli elementi devono essere utilizzati in coppia (o anche triplici) per modellare semplicemente una connessione o una colonna del fascio. La combinazione di questi elementi individuali (formulati nel capitolo 61) è quello che verrà definito "macro-elementi"[1].

27 Gli elementi di base a nostra disposizione sono quelli indicati in Fig. 63.4. Sono i "atoms" che possono essere combinati in "molecole' che sono i componenti strutturali.

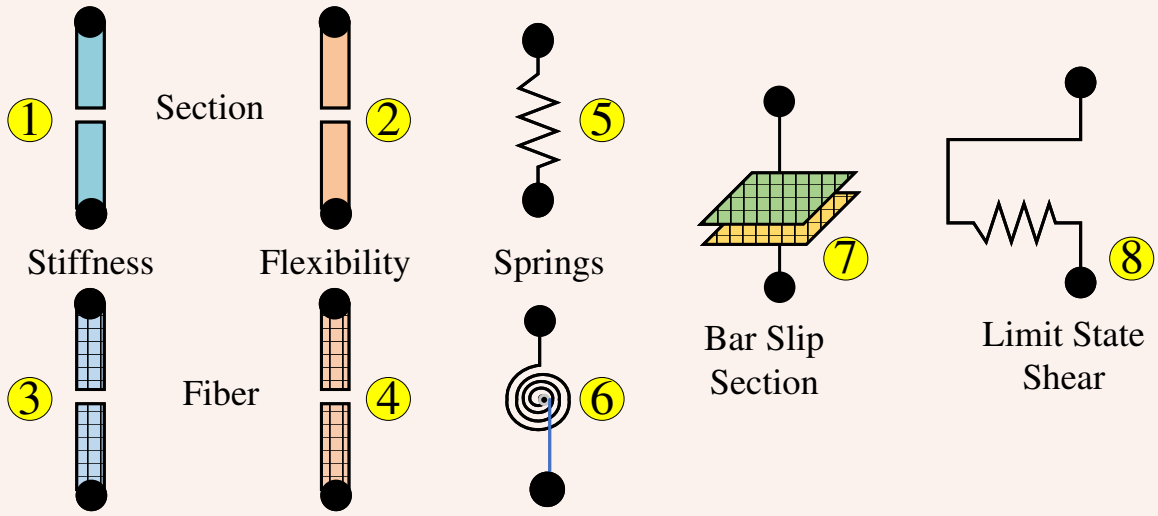


Figura 63.4: Elementi finiti per l'analisi non lineare dei frame

28 Va tenuto presente che la preoccupazione principale per la sicurezza della vita sono colonne.

29 Di importanza fondamentale sono le connessioni a fine colonna, che vengono mostrate in Fig. 63.5. Si vanno dal più semplice (cioè niente), al più complesso (spruzzi e sottoelementi di stato limite).

30 Nel modello di plasticità lumped, l'elemento a zero-lunghezza multiassiale comprende i modelli materiali e permette l'accoppiamento del DOF, e richiede solo l'ingresso di materiale della colonna e proprietà geometriche. Tabella 63.1 espandere ulteriormente la figura.

31 Le colonne di fascio a loro volta possono essere semplici come un tipo di elemento

[1]Nell'elemento finito classico, un macro-elemento è la combinazione di più elementi in uno e i gradi interni della libertà sono ridotti in pochi per connettersi con il resto della maglia. Qui non ci sarà una condensazione di gradi di libertà, e conseguentemente, potrebbe esserci più (internal) dof a un nodo.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

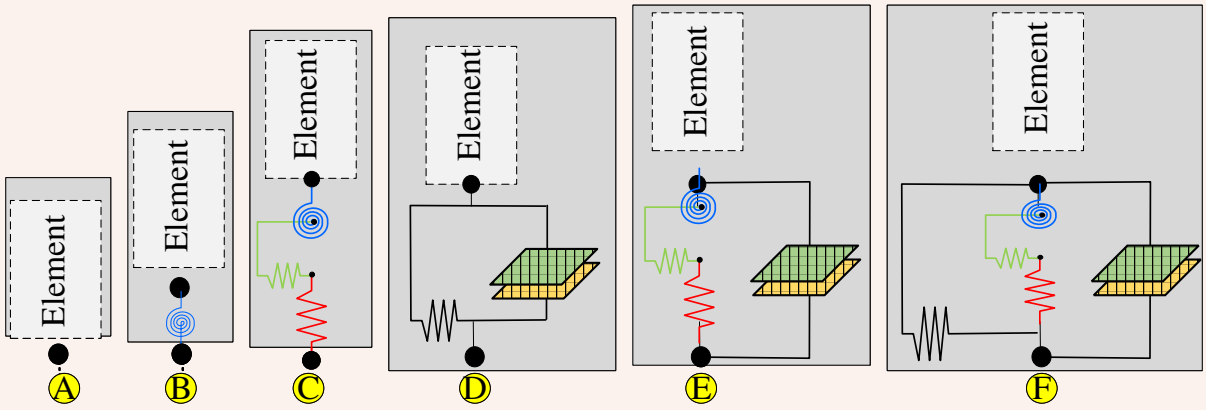


Figura 63.5: Collegamento a colonna

Tabella 63.1: Collegamenti a colonna

	A	B	C	D	E	F
Cerniera semplice	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Molla girevole		✓	✓		✓	✓
Rotazionale & molle traduttive			✓		✓	✓
Limite di Stato Shear				✓		✓
Slip di Bond					✓	✓

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

individuale, o possono essere composte da un assemblaggio di elementi (tipicamente per gestire la localizzazione dei danni plastici, cioè cerniera plastica).

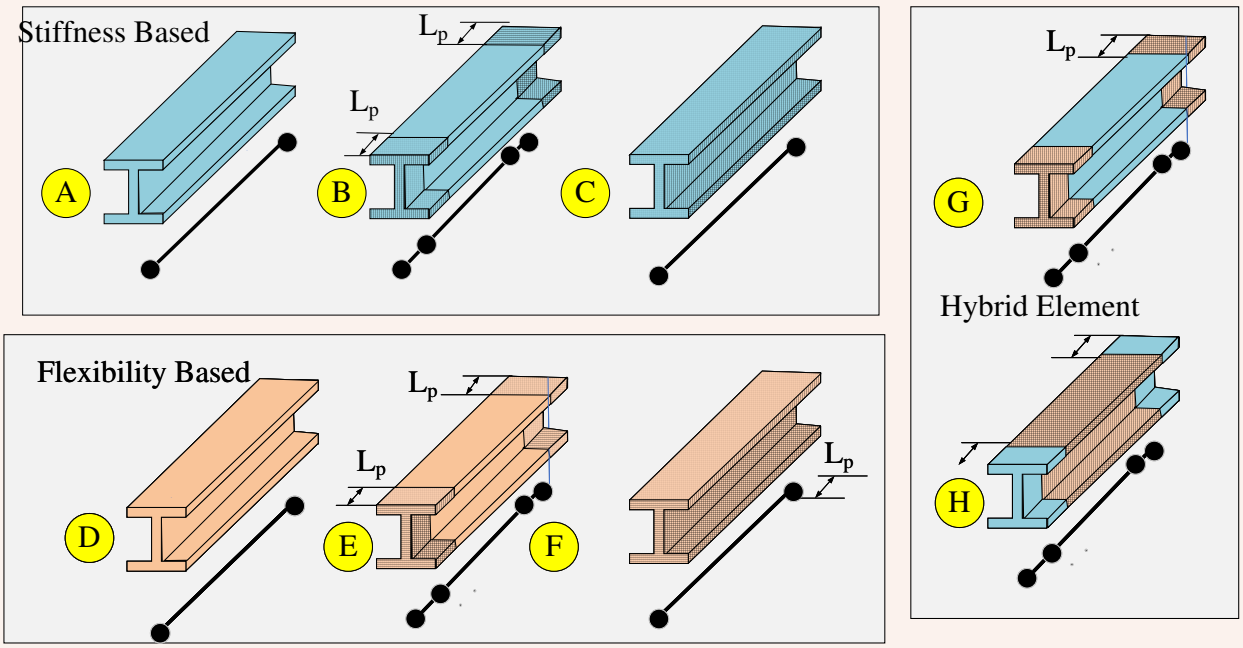


Figura 63.6: Elementi di aspirazione o colonna

32 Possibile accoppiamento di connessioni (Fig. 63.1) e elementi (Fig. 63.6) è indicato nella tabella 63.2.

Tabella 63.2: Confronto-elemento

Colonna di vapore	A	B	C	D	E	F	G	H
Collegamenti	1	3|1	3	2	4|2	4	[2|4],[1|3]	[1|3],[2|4]

33 Per i collegamenti non possiamo collegare elementi di lunghezza zero tra loro. Inoltre, il collegamento diretto dell'elemento impedisce la deformazione autonoma del taglio e della rotazione delle articolazioni (cioè è una connessione rigida). 63.7.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

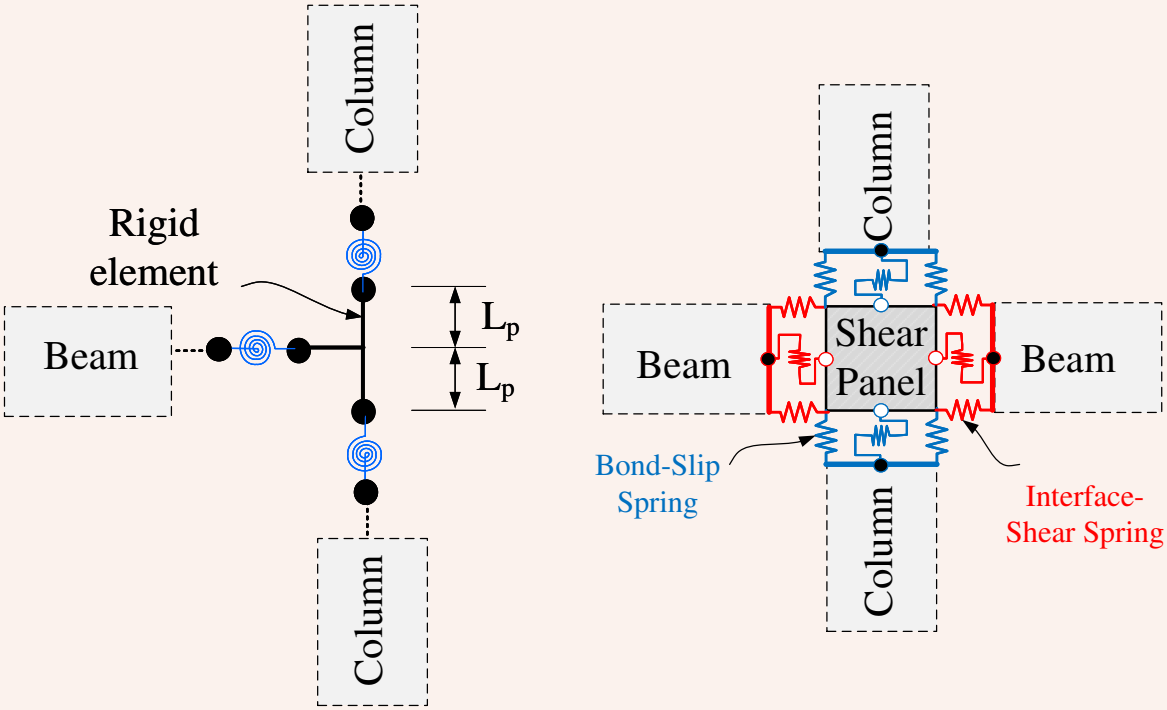
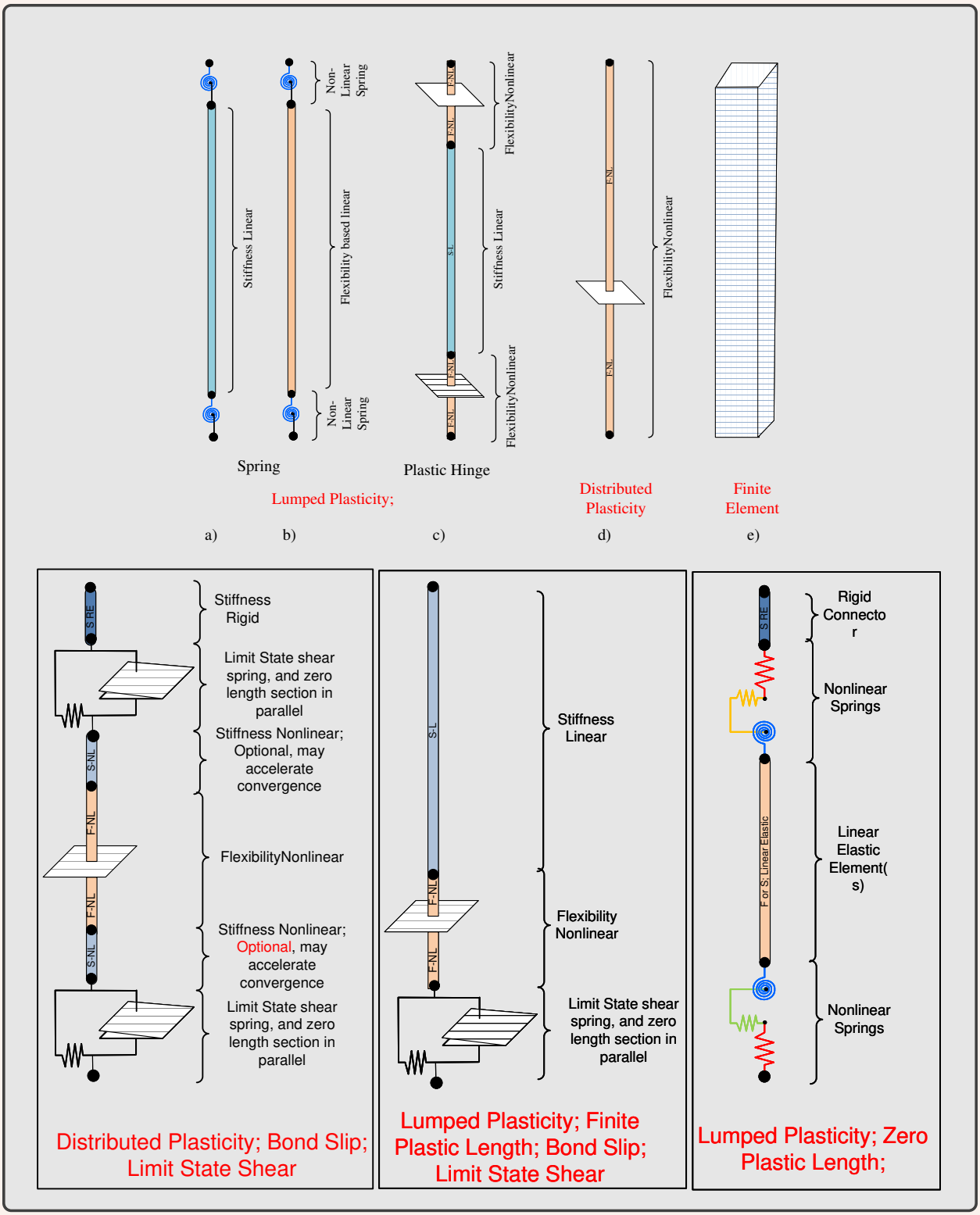


Figura 63.7: Collegamenti a colonna

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

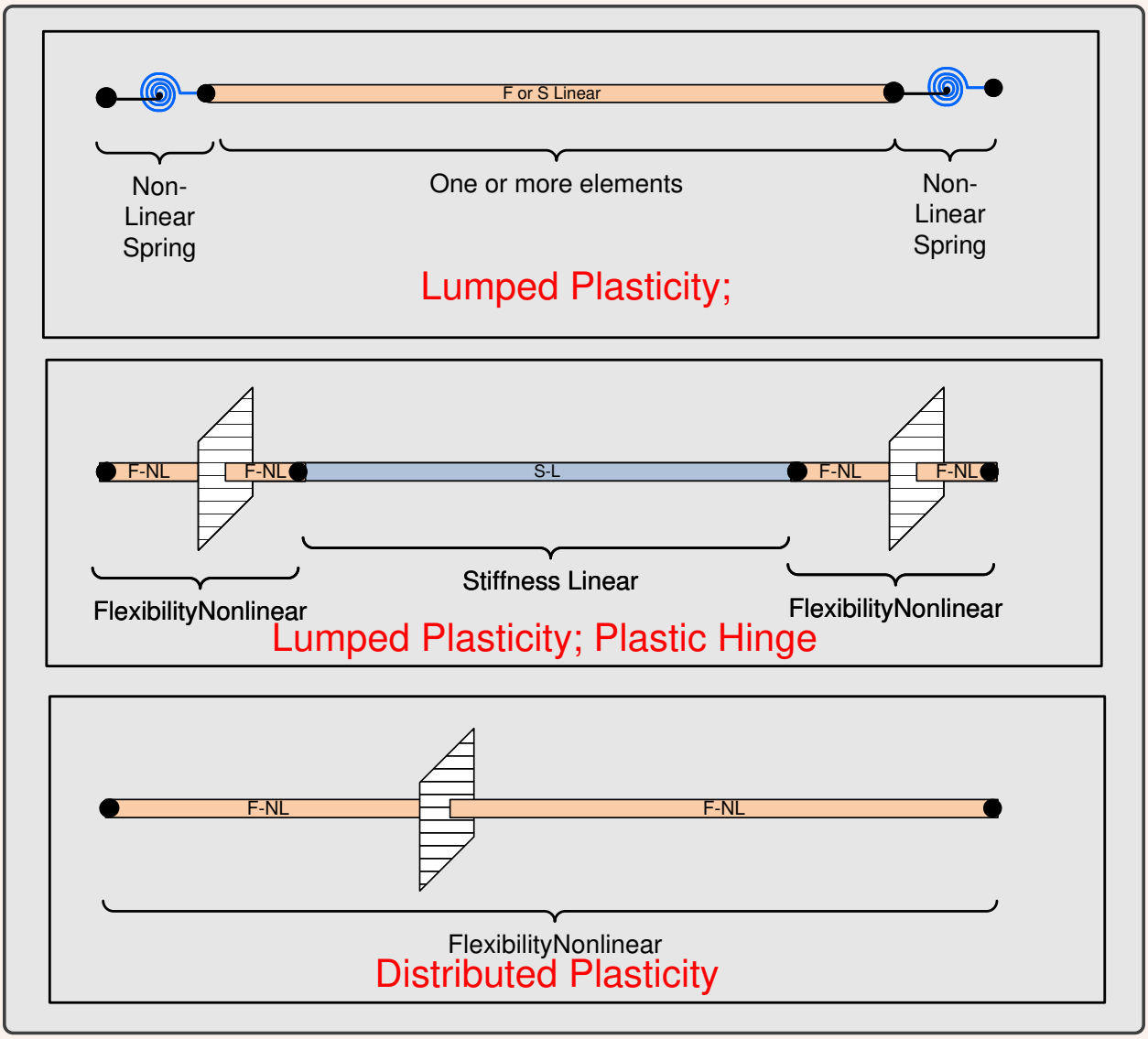
63.2.1.1 Ex 63.1: Modelli a colonna



COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

63.2.1.2 Ex 63.2: Modellazione di fascio



63.2.2 Sezione trasversale

34 La modellazione trasversale è di particolare importanza nella plasticità distribuita. Nell'analisi 2D, ci riferiamo a strati e in 3D si riferiscono alle fibre.

35 Dovrebbe essere evidente che in 2D, z la posizione dello strato è irrilevante (e non deve essere specificato), Fig. 63.8.

36 Dovremmo distinguere tra

- calcestruzzo non confutato
- Calcetù conficcata

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

- Rinforzo

poiché ognuno di essi avrà caratteristiche diverse dello stress-strain, Fig. 62.12.

37 Si noti che possiamo avere più strati contemporaneamente y elevazioni.

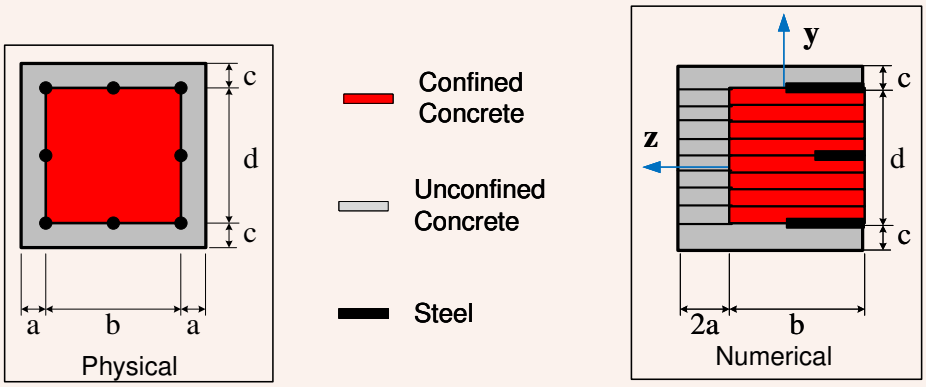


Figura 63.8: Tracciare la modellazione della sezione in strati

63.2.3 "Pick and stick"

38 Nell'elemento finito a base di continuum, nella maggior parte dei due tipi di elemento coesiste: continuo e giunto.

39 Nell'analisi dei frame, le cose sono molto più complesse in quanto possiamo mescolare diversi tipi di elementi in un "macro-element" per raggiungere i modelli desiderati.

40 Utilizzando le librerie e i collegamenti degli elementi precedenti, possiamo avere varie permutazioni per un frame

41 Tutti i modelli possono essere definiti dalla tabella 63.3.

Tabella 63.3: Modelli "pick and stick" opzioni

Condizione di boundary	Colonna		Connessione	Signora
Fig. 63.7	Fig. 63.5		Fig. 63.7	Fig. 63.6
	In fondo	Tomaia		

63.2.4 Conclusioni

42 Alcune osservazioni

COPIA DI REVISIONE

1. Nella plasticità lumped, la molla rotazionale può essere non lineare o elasto perfettamente plastica (EPP)
2. Se si prevede una eccessiva deformazione non lineare nel modello di plasticità distribuito, elementi a base di rigidità non lineari devono essere aggiunti ad ogni fine.

    [43] L'elemento basato sulla flessibilità è quasi invariabilmente utilizzato con elementi strati (potrebbe anche essere definito in termini di forze di sezione (N_x e M_z)).
3. Di solito, non include lo slip di legame per le travi.
4. Se lo slip di legame deve essere modellato, si può posizionare l'elemento sezione zero-lunghezza in parallelo con l' elemento a lunghezza zero.
5. In caso di lieve non linearità, un elemento flessibile dovrebbe bastare, tuttavia, almeno 3-4 elementi basati sulla rigidità sarebbero necessari.
6. Per l'elemento basato sulla rigidità utilizzare tre punti di integrazione (Gauss), tuttavia per gli elementi flessibili si dovrebbero usare cinque punti di integrazione (Gausi-Lobatto che include i punti di integrazione a ogni estremità).
7. La scelta tra rigidità o elemento basato sulla flessibilità non è evidente.

63.3 Determinazioni dei parametri di deteriorazione

[43] I parametri di inserimento della plasticità (sezioni in fibra) distribuiti sono quelli generalmente associati alla curva dello stress-strain.

[44] Un modello di plasticità lumped dovrebbe essere in grado di simulare esplicitamente gli effetti di interazione assiale-flessivo, il comportamento di cracking concreto, lo smorzamento della tensione e altri effetti di diffusione della plasticità. $P - \Delta$ or $M - \theta$ relazioni che costituiscono una "segnatura" di un disegno specifico della colonna e quindi catturano l'elemento "parametri di deteriorazione'.

[45] Queste curve sono uniche per ogni configurazione del trave-colonna, la loro firma deve essere identificata. 63.4:

1. Calibrazione
2. Database

Tabella 63.4: Quantifica della deteriorazione

Metodo	Parametro numerico	Trama
Calibrazione	No	Sì.
Database	Sì.	No

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

46 Poiché le colonne sono gli elementi più critici rispetto alla stabilità degli edifici durante i terremoti, di solito non vengono calibrate le travi.

63.3.1 Calibrazione

47 La calibrazione comporta

1. Cerca nella letteratura per una trave-colonna analoga (dimensioni, rinforzi, proprietà concrete) a quelle che vengono analizzate e con risultati di test di laboratorio segnalati. Si noti che questi dati non includono i valori di rigidità corrispondenti (quelli sarebbero riportati separatamente nei database, §63.3.2).
2. Eseguire una serie di parametri di simulazione numerica e di input "tweak' fino a quando la curva predittiva non è soddisfacentemente vicina a quella sperimentale.

48 Quindi i parametri del modello sono essenzialmente "tweaked", in modo che la risposta predittiva sia il più possibile vicina a quella determinata sperimentalmente.

49 Ovviamente, tale determinazione "manuale" può essere dispendiosa e non comportare parametri quasi ottimali. Il processo può essere automatizzato e migliorato attraverso un approccio di identificazione dei parametri descritto di seguito.

63.3.1.1 Identificazione dei parametri

50 Questo metodo è descritto dettagliatamente nel capitolo 65, in quanto applicabile ad altri argomenti discussi nel presente libro.

63.3.2 Database dei parametri di modellazione

63.3.2.1 Pari/Bibbia

51 Un'alternativa alla calibrazione è identificare i database che elencano le specifiche della colonna e i parametri corrispondenti del deterioramento. (Berry, Parrish e Eberhard, 2004).

52 Una base dati ampiamente utilizzata per la costruzione di frame è stata sviluppata da Berry, Parrish e Eberhard, 2004 Contiene risultati pubblicati di test ciclici e monotonici statici di diverse centinaia di colonne a raggi RC. Per ogni prova, il database riporta la geometria della colonna, le proprietà di rinforzo e materiale, la storia dello spostamento forzale, la modalità di fallimento governante e altre informazioni rilevanti.

53 Tutti i dati sono riportati in termini di configurazione equivalente cantilever, come mostrato nella figura. 63.9. Per le colonne testate in doppia curvatura, la traduzione a una colonna equivalente è fatta da Berry, Parrish e Eberhard, 2004, assumendo un punto di inflessione fisso, tipicamente alla colonna dell'altezza intermedia.

54 Il database può essere facilmente accessibile attraverso il web, Fig. 63.11.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

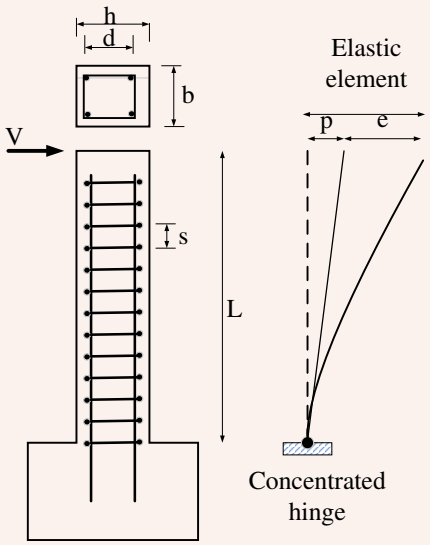


Figura 63.9: Modello in cantilever idealizzato di rc trave-colonna (Haselton et al., 2016)

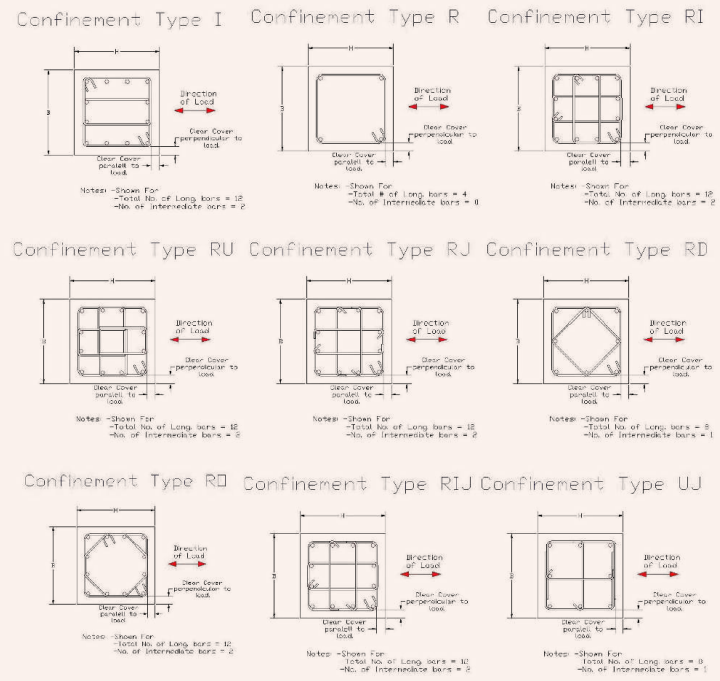


Figura 63.10: Tipi di confinamenti (Berry, Parrish e Eberhard, 2004)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

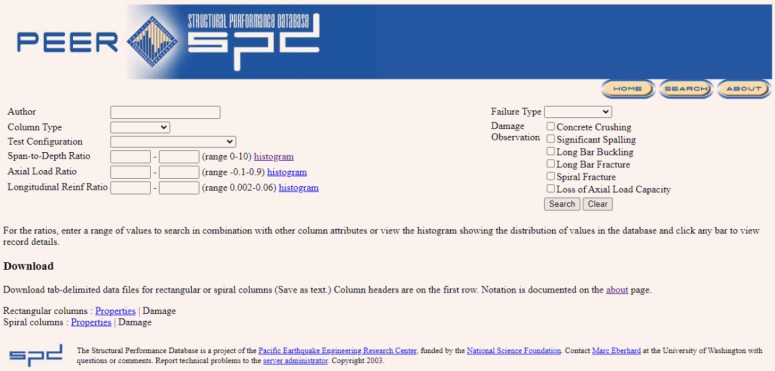


Figura 63.11: Interfaccia utente grafica per il database delle prestazioni strutturali pari (Berry, Parrish e Eberhard, 2004)

63.3.2.1.1 Proprietà della colonna

55 Tavole a partire da (Berry, Parrish e Eberhard, 2004) illustrare l'insieme dei dati che si trovano in questo e database simili (Tabella 63.5-63.7).

Tabella 63.5: Proprietà materiali

Materiale	Notazione	Descrizione della proprietà	Tipo di colonna
Calcestruzzo	f_c'	Resistenza caratteristica a compressione del calcestruzzo (MPa)	R, S
Armatura longitudinale	f_{yl}	Tensione di snervamento dell'armatura longitudinale (MPa)	S
	f_{su} long.	Resistenza ultima dell'acciaio dell'armatura longitudinale (MPa)	S
	f_{yl} angolo	Tensione di snervamento delle barre longitudinali d'angolo (MPa)	R
	f_{yl} interm.	Tensione di snervamento delle barre longitudinali intermedie (MPa)	R
	f_{su} angolo	Resistenza ultima delle barre longitudinali d'angolo (MPa)	R
	f_{su} interm.	Resistenza ultima delle barre longitudinali intermedie (MPa)	R
Armatura trasversale	f_{yt}	Tensione di snervamento dell'armatura trasversale (MPa)	R, S
	f_{su} trasv.	Resistenza ultima dell'acciaio dell'armatura trasversale (MPa)	R, S

COPIA DI REVISIONE

Tabella 63.6: Classificazione delle sezioni

Notazione	Forma di sezione trasversale	Codice
O	Ottagonale	2
C	Circolare	0
S	Piazza	3

Tabella 63.7: Codici di modalità guasto

Ricorso	Codice
Flessibili	1
Shear	2
Flexure-Shear	3

Tabella 63.9: Dettagli di finitura

Notazione	Designazione delle merci	Cod. di Confinement
I	Tie di interbloccaggio	1
R	Cravatte rettangolari (perimetro a tutto tondo)	2
RI	Cravatta rettangolare e interbloccante	4
RU	Cravatte rettangolari e barre U	8
RJ	Cravatta rettangolare con J-hooks	6
RD	Cravatta rettangolare e diagonale	3
RO	Cravatta rettangolare e ottagonale	7
RIJ	Cravatta rettangolare e interbloccante, con J-hooks	5
UJ	U-bar con J-hooks	9

Tabella 63.10: Dettagli di finitura

Designazione delle merci	Codice di confidenzialità
Cantilever	C
Doppia Curvatura	DC
Doppia entrata	DE
Base flessibile	CFB
Testa di martello	HH

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 63.8: Geometria della colonna

	Notazione	Designazione delle merci	Colonna Tipo di
Complessivamente Colonna Dimensioni	H or D	Profondità della colonna (mm)	R, S
	B	Larghezza colonna (mm)	R
	Area (A_g)	Area trasversale della colonna (mm^2)	R, S
	L	Lunghezza del cantilever equivalente (mm)	R, S
Lungo il percorso Rinforzo	Totale # Bar	Numero di barre di rinforzo longitudinali	R, S
	Bar Dia.	Diametro delle barre di rinforzo longitudinali (mm)	S
	Bar Dia.Corner	Diametro delle barre di angolo longitudinali (mm)	R
	Bar Dia.Interm.	Diametro delle barre intermedie longitudinali (mm)	R
	L'ingiunzione	Lunghezza della giunzione longitudinale di rinforzo	R, S
	Reinf. Ratio	Rapporto di rinforzo longitudinale (calcolato).	R, S
Trasversale Rinforzo	Bar Dia.	Diametro della rinforzo trasversale (mm)	R, S
	Spaziatura	Spaziatura di forza trasversale (mm)	R, S
	Vol. Trans	Rapporto di forza trasversale volumetrico (riportato)	R, S
	Nv	Numero di barre trasversali in sezione trasversale	R, S
	Copertura trasparente (Retto)	Distanza dalla superficie esterna della colonna al bordo esterno di rinforzo trasversale (mm)	R
	Copertura trasparente (Spirale)	Distanza dalla superficie esterna di colonna al centro del rinforzo trasversale (mm)	S

63.3.2.1.2 Riassunto delle capacità flessografiche

56 Nella tabella si riporta un riepilogo delle capacità flessografiche calcolate 63.11

63.3.2.1.3 Esempio

57 Un esempio dell'utilizzo del database PEER è fornito da Haselton et al., 2008 che ha cercato la colonna del fascio soddisfando i seguenti criteri,

$$\rho_{sb}(\text{area confinement ratio}) > 0.006(\text{ACI 318-05 Eq. 21-4 requires } \rho_{sh} > 0.0075)$$

$$\frac{P}{A_g} f_c' < 0.30$$

$$f_c' < 40 \text{ MPa}$$

Ciò ha portato a 30 test sperimentali che soddisfano i criteri e quelli indicati nella tabella 63.12.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

63.3.2.2 Stanford/Lignos

58 Lignos e Krawinkler, 2013 ha sviluppato tre basi di dati per la modellazione dei componenti strutturali:

Travi in acciaio a sezione W: La maggior parte di questi esemplari sono ampie travi a flangia (W o H) che vanno da W43×13 a W36×300. La modalità di deterioramento primario delle sottoassemblaggi in acciaio raccolti è locale e laterale, perché l'attenzione si concentra sul comportamento ciclico dei collegamenti travi a colonna post-nord che sono ampiamente utilizzati nella costruzione moderna dell'acciaio. I cinquantuno-quattro esemplari includono travi che non riescono a causa della frattura prematura (non duttile) alle connessioni. Gli obiettivi che non sono in grado di rompere con le fragili fratture alle connessioni non fanno parte della seguente discussione, perché l'attenzione è sulle connessioni trave e colonne che si deteriorano in modo duttile.

Colonne in acciaio quadrato tubolare Sono stati sviluppati 120 punti di dati sperimentali per le colonne HSS (44 test monotonici e 76 ciclici), che sono stati sottoposti a carichi assiali combinati e momenti di piegatura monotonica o ciclica. N per produrre carico assiale N_y(N/N_y dei campioni raccolti varia da 0 a 0,60. La profondità della colonna D a spessore t rapporti (D/t) del set di dati varia da 18 a 100. f_y delle colonne HSS raccolte vanno da 276 a 500 MPa.

Travi RC: Solo le sottoassemblazioni che includono travi che non riescono in flessione sono state incluse in questo set di dati. curvatura, testa di martello e campioni fissi.

59 Tutte e tre le basi di dati dei componenti strutturali contengono le seguenti informazioni:

Metadati: Geometria di configurazione, proprietà dei materiali misurati, dettagli della lastra (in caso di esemplari compositi), layout e dettagli del rinforzo (per RC), ecc.

Estratti di relazione che contengono un riassunto delle prove di subassemblaggio e/o dei componenti.

Risultati segnalati (cioè, misurazioni e osservazioni come riportato nella documentazione di prova) comprese le storie digitalizzate dei diagrammi isterici a spostamento globale del carico.

Dati dedotti in formato digitalizzato (cioè, le informazioni dedotte dai metadati e i dati segnalati allo scopo di calibrazione dei modelli analitici) inclusi gli storici digitalizzati delle rotazioni isteretiche di momento dedotto e la zona del pannello shear V_{pz} contro la distorsione della cinghia γ di sostegni in acciaio trave a colonne. Questi dati sono stati ottenuti direttamente dai singoli investigatori, che hanno condotto l'esperimento (se le informazioni erano disponibili digitalmente), o digitalizzando i suddetti diagrammi isterici direttamente dalle relazioni sperimentali. Il set completo di dati insieme a una documentazione completa che descrive la notazione per le tre basi di dati dei componenti strutturali può essere scaricato attraverso il magazzino centrale NEES.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

60 Per ogni dato è stato utilizzato un modello di calibrazione del deterioramento, e le funzioni di distribuzione cumulativa per i parametri di deterioramento sono tracciate (usando una distribuzione lognormal).

63.3.2.3 UTSA/Ghannoum

61 Come parte dello sviluppo di un nuovo modello plasticità lumped per la colonna del fascio (§62.3.4), Suselo, 2021, Chapter 3 ha sviluppato il database sperimentale della colonna di cemento armato UTSA per la convalida del loro modello.

62 Un'interessante (unicità possibilmente) caratteristica di questo database è la sua cura. Si compone di due parti: a) Dati primari (cioè dati raccolti "as is"); e b) dati secondari calcolati ed estratti che contengono proprietà derivate da Dati Primari, sia calcolati a partire da due o più parametri (ad esempio, rapporto di carico assiale) o estratti da carichi – dati di spostamento.).

63.3.2.4 Elemento finito di continuum/Dolati

63 La maggior parte degli esperimenti sulle colonne in cemento, da cui derivano i modelli di database, sono stati condotti utilizzando protocolli di carico ciclico completamente invertiti, con solo una piccola frazione di test a colonna che viene testato sotto Il precedente database della colonna UTSA (forse ormai il più grande), contiene 689 test di colonne, con solo otto dei quali esplorano protocolli di caricamento diversi da quelli completamente invertiti. In quanto tali, mentre i modelli attualmente disponibili catturano gli effetti delle proprietà della colonna e delle condizioni di confine, non acquisiscono l'effetto di varie storie di caricamento sulle capacità della colonna.

64 Per colmare le lacune dei dati sperimentali rispetto all'effetto delle storie di carico sulle capacità di forza e deformazione delle colonne in cemento, Dolati, Matamoros e Ghannoum, 2023 analisi degli elementi finiti continuum eseguite.

65 I modelli di elementi finiti continuum non lineari sono stati calibrati a prove sperimentali per sette colonne soggette a vari protocolli di carico laterale. Le colonne sono state selezionate per coprire una gamma di sollecitazioni della cinghia, sezione trasversale, carichi assiali, spaziature e rapporti del rinforzo trasverso e rapporti di rinforzi longitudinali. Tutte le colonne testate hanno subito un crollo assiale dopo danni cumulativi dal carico laterale. I modelli di colonne calibrate sono stati poi sottoposti a una serie di protocolli di carico, tra cui il pushover monotonico e i protocolli di caricamento ciclico completamente invertiti con un numero variabile di cicli. Vengono discussi gli effetti dei protocolli di carico laterali sulla progressione del danno, la forza e le capacità di deformazione.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

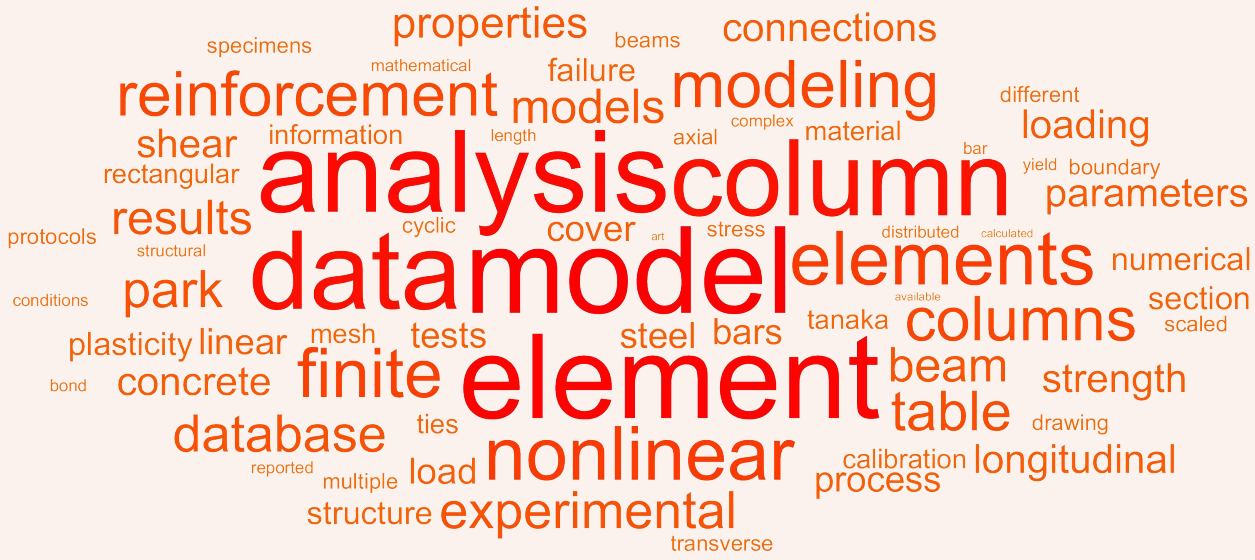
63.3.2.5 ACI-437-A

66 ACI-437 (Valutazione della forza delle strutture in calcestruzzo esistenti) ha recentemente creato un sottocomitato (ACI 437-A) con il compito di creare (ancora un altro) database che raccoglierà informazioni sui dati dei test di laboratorio e sul campo.

67 Le informazioni da raccogliere includono:

- Tipo di struttura: RC, PC, PT
- Elemento Descrizione: età, tipo, campata, profondità, sezione trasversale, rinforzo, resistenza alla compressione, capacità prevista/calcolata
- Motivo per il test: flexural, shear, foratura cesoia, altre informazioni di sfondo
- Protocollo di prova: monotonico o CLT, campo o laboratorio
- Carico e geometria: carico distribuito, carichi di punti, campate multiple, ecc.
- TLM: metodo per calcolare, DL/LL ratio, applicato TLM
- Codice: ACI 318 o 562, anno di pubblicazione, magnitudo del carico
- Struttura riparata o nuova

68 Data la composizione del comitato (industria e accademia), e la sua esistenza all'interno di una grande organizzazione nazionale (ACI), è probabile che presto diventi un riferimento.



COPIA DI REVISIONE

Intermezzo: Dall'analisi in avanti all'identificazione del parametro

I due capitoli successivi sviluppano strumenti complementari per l'analisi strutturale in incertezza. 64 (*Dati e Dobbarchi*) stabilisce come rappresentare, propagare e analizzare l'incertezza preventiva in input. Capitolo 65 (*Decisioni*) inverte quel problema: date misurazioni, quali valori di parametri sono supportati dai dati e come dovremmo calibrare i modelli computazionali?

Capitolo 64: Analisi del futuro

Dati e Dobbarchi
|
+— Qualità dei dati
|
+— Quantificazione dell'incertezza
| (Representazione, Propagazione)
|
+— Analisi della sensibilità
| (Morris, Sobol, Tornado)
|
+- Inferenza baieana
(Prior, Posterior, MCMC)

Capitolo 65: Analisi inversa

Decisioni
|
+— Problema inverso
|
+— Applicazioni Framework
|
+— Data Robustezza
| (RANSAC Preprocessing)
|
+— Levenberg...
| (Stime punto)
|
+— Identificazione baieana
| (Posterior per i parametri)
|
+— MATLAB Attuazione
|
+— Flussi ibridi di lavoro

Complementarità: C-10-A fornisce il toolkit di analisi avanzata: rappresentano l'incertezza preventiva, la propagano attraverso i modelli, identificano parametri importanti. schermare i candidati utilizzando sensibilità, misurare i parametri dai dati, quantificare l'incertezza posteriore. Insieme completano il ciclo: → propagazione → screening della sensibilità → calibrazione dei parametri → previsioni di sostegno decisionale.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 63.11: Riassunto delle prove di colonne rinforzate rettangolari (Berry, Parrish e Eberhard, 2004)

Test di prova #	Riferimento	Designazione delle colonne	Osservazioni	M_{max} (kN-m)	$\frac{M_{max}}{M_{ACI}}$	V_{max} (kN)	Δ_y (mm)	Modalità di fallimento
1	Gill et al. (1979)	No. 1		838	1.22	657	7.12	1
2	Gill et al. (1979)	No. 2		953	1.05	764	7.13	1
3	Gill et al. (1979)	No. 3		817	1.20	642	4.85	1
4	Gill et al. (1979)	No. 4		903	1.44	697	4.09	1
5	(1981)	No. 3	bar spacing 120mm-75mm-120mm	337	1.24	192	9.61	1
6	(1981)	No. 4	bar spacing 120mm-75mm-120mm	298	1.14	169	12.19	1
7	Soesian. et al. (1986)	No. 1		354	1.17	200	10.36	1
8	Soesian. et al. (1986)	No. 2		481	1.18	279	9.16	1
9	Soesian. et al. (1986)	No. 3		474	1.17	277	8.77	1
10	Soesian. et al. (1986)	No. 4		457	1.19	265	9.59	1
11	Zahn et al. (1986)	No. 7		398	1.35	213	11.88	1
12	Zahn et al. (1986)	No. 8		554	1.44	269	10.27	1
13	Watson e Park (1989)	No. 5		535	1.42	292	8.09	1
14	Watson e Park (1989)	No. 6		528	1.41	295	6.19	1
15	Watson e Park (1989)	No. 7		525	1.75	293	4.02	1
16	Watson e Park (1989)	No. 8		523	1.81	295	4.16	1
17	Watson e Park (1989)	No. 9		602	2.08	310	4.76	1
18	Tanaka and Park (1990)	No. 1	I cerchi di rinforzo trasversali sono stati saldati	290	1.14	167	13.81	1
19	Tanaka and Park (1990)	No. 2		291	1.14	168	13.04	1
20	Tanaka and Park (1990)	No. 3		302	1.18	175	11.37	1
21	Tanaka and Park (1990)	No. 4		292	1.15	170	12.35	1
22	Tanaka and Park (1990)	No. 5		704	1.15	386	13.55	1
23	Tanaka and Park (1990)	No. 6		717	1.17	409	11.96	1
24	Tanaka and Park (1990)	No. 7		1070	1.34	588	9.68	1
25	Tanaka and Park (1990)	No. 8		1090	1.36	619	8.39	1
26	Park and Paulay (1990)	No. 9		727	1.21	393	10.71	1
27	Arakawa et al. (1982)	No. 102	supporto flessibile	60	1.15	153	3.78	1
28	Nagasaka (1982)	HPRC10-63	copertina scalata dal disegno	27	1.02	87	2.74	3
29	Nagasaka (1982)	HPRC19-32	copertina scalata dal disegno	34	1.08	111	1.94	3
30	Ohno e Nishioka (1984)	L1	copertina scalata dal disegno	201	1.30	119	9.49	1
31	Ohno e Nishioka (1984)	L2	copertina scalata dal disegno	186	1.20	111	9.05	1
32	Ohno e Nishioka (1984)	L3	copertina scalata dal disegno	172	1.11	104	9.79	1
33	(1985)	2D16RS	copertura scalata dal disegno, rottura-bond guasto	41	1.08	98	4.55	3
34	(1985)	4D13RS	copertura scalata dal disegno, spaccatura	44	1.01	108	4.59	3

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 63.12: Risultati dello studio di taratura per 30 test sperimentali (Haselton et al., 2008)

Proprietà della colonna fisica							Dati calibrati								Confronto a Fardis		
Numero di prova (Badial Eberhard)	$P/A_g f'_c$	P/P_b	ρ_{sh}	s (mm)	f'_c (Mpa)	θ_y	EI_{eff}/EI_g	EI_{sstf2}/EI_g	EI_{sstf1}/EI_g	α_c	$\theta_{cap,pl}$ (rad)*	1 se il tappo è osservato*	λ	c	Fardis $\theta^{pl}_{u,mono}$ (rad)	$\theta_{cap,pl}$ con Fardis θ^{pl}_u (rad)	$\theta_{cap,pl}$ Fardis / Taratura
1	0.26	0.65	0.0071	80	23.1	0.008	0.25	0.47	0.01	–	0.028	0	136	1.0	0.032	0.010	0.36
6	0.21	0.55	0.0087	90	25.0	0.009	0.31	0.83	0.04	–	0.036	0	64	1.0	0.045	0.023	0.63
11	0.22	0.58	0.0067	117	28.3	0.010	0.34	0.75	0.07	–	0.078	0	74	1.0	0.046	0.024	0.31
18	0.20	0.58	0.0106	80	25.6	0.010	0.30	0.65	0.02	–	0.083	0	114	1.0	0.050	0.028	0.33
19	0.20	0.58	0.0106	80	25.6	0.009	0.33	0.77	0.02	–	0.069	0	89	1.0	0.050	0.028	0.40
20	0.20	0.58	0.0106	80	25.6	0.009	0.34	1.92	0.02	–	0.065	0	41	1.0	0.050	0.028	0.42
21	0.20	0.58	0.0106	80	25.6	0.009	0.32	1.14	0.01	–	0.073	0	159	1.0	0.050	0.028	0.38
22	0.10	0.30	0.0075	110	32.0	0.010	0.18	0.35	0.03	–	0.038	0	132	1.0	0.075	0.053	1.41
23	0.10	0.30	0.0075	110	32.0	0.010	0.19	0.40	0.03	–	0.070	0	145	1.0	0.075	0.053	0.76
24	0.30	0.89	0.0091	90	32.1	0.010	0.28	0.79	0.04	–	0.050	0	105	1.0	0.057	0.035	0.69
25	0.30	0.89	0.0091	90	32.1	0.011	0.27	0.73	0.01	–	0.046	0	127	1.0	0.057	0.035	0.75
26	0.10	0.26	0.0106	80	26.9	0.008	0.27	0.61	0.04	–	0.055	0	200	1.0	0.079	0.057	1.03
88	0.10	0.27	0.0061	76	29.1	0.010	0.34	0.55	0.05	–	0.016	0	123	1.0	0.060	0.038	2.37
90	0.10	0.27	0.0061	76	29.2	0.010	0.30	0.54	0.06	–	0.022	0	127	1.0	0.060	0.038	1.73
92	0.20	0.56	0.0061	76	29.4	0.014	0.30	0.64	0.02	–	0.019	0	82	1.0	0.052	0.030	1.58
94	0.26	0.72	0.0061	76	33.3	0.012	0.36	0.61	0.06	–	0.026	0	44	1.0	0.047	0.025	0.98
96	0.28	0.76	0.0061	76	31.0	0.010	0.43	0.67	0.01	–	0.028	0	45	1.0	0.045	0.023	0.83
- Non lo so.	0.20	0.55	0.0078	76	29.2	0.011	0.27	0.50	0.04	-0.08	0.070	0.00	109	1.0	0.064	0.042	0.75
- Si'.	0.17	0.48	0.0079	76	30.0	0.013	0.25	0.59	0.05	-0.09	0.063	0.13	106	1.0	0.065	0.043	0.80
C.O.V.:	0.45	0.45	0.21	0.24	0.16	0.32	0.32	0.59	0.76	0.37	0.46	2.59	0.39	0.00	0.27	0.41	0.57

*La rotazione di plastica è un limite inferiore se non si osservava nei dati un tappo (cioè una pendenza ammorbidimento della tensione).

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese, potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

Capitolo 64

Dati e Dobbt: Analisi di incertezze e sensibilità

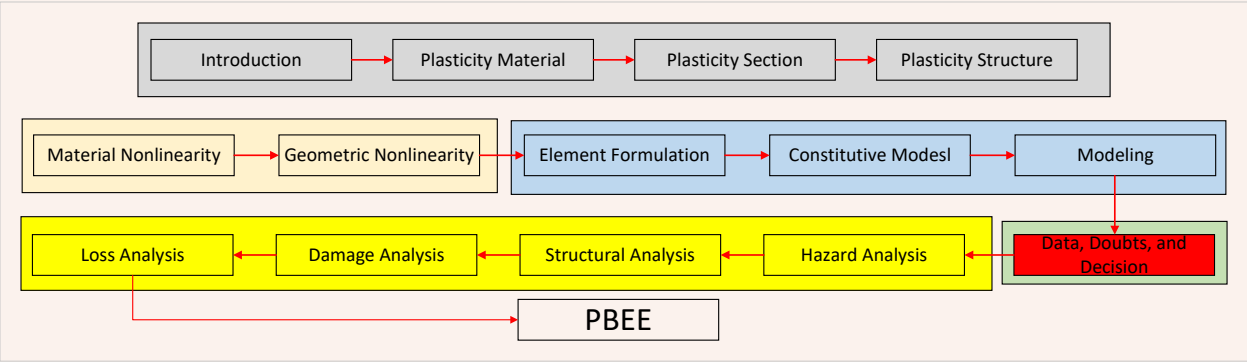
Abstract

Questo capitolo sviluppa gli strumenti di analisi avanzata necessari per passare dai dati imperfetti alle previsioni strutturali defensabili, distinguendo prima la variabilità alearia, l'incertezza epistemica, l'errore di misura e la discrepanza modello-forma; mostra poi come l'incertezza sia rappresentata, correlata e propagata attraverso modelli computazionali. Simulazione Monte Carlo, campionamento ipercubo latino, approssimazioni linearizzate e di punto-stima, e espansioni del caos polinomiale sono introdotti con le loro ipotesi e limitazioni.

La seconda metà affronta l'analisi della sensibilità. Le misure locali a tempo pieno, il metodo di screening Morris, gli indici Sobol basati su varianza e i diagrammi del tornado vengono utilizzati per determinare quali input incerti controllano la risposta e che possono essere fissati o assegnati priorità inferiore. Il capitolo si chiude mostrando come i parametri influenti diventino candidati all'identificazione. 65 poi formula e risolve quel problema inverso.

64.1 Introduzione 2196
64.2 Qualità dei dati e fonti di dominio . 2196
64.3 incertezza Quantificazione e analisi 2197
64.3.1 Caratterizzazione dell'incertezza di Input 2198
64.3.2 Dipendenza e campionamento correlato 2199
64.3.3 Propagazione dell'incertezza 2201
64.3.4 Interpretazione dell'incertezza di uscita 2212
64.4 Analisi della sensibilità 2212
64.4.1 Metodo di Morris 2213
64.4.2 Indici di sensibilità basati sulla variazione del sobol 2218
64.4.3 Confronto dei metodi di propaganda e sensibilità 2220
64.4.4 Determinazione delle variabili casuali importanti 2220
64.4.5 Diagrammi di Tornado . . . 2225
64.5 Dall'analisi della sensibilità all'identificazione del parametro 2225

COPIA DI REVISIONE



64.1 Introduzione

1 Le proprietà materiali variano all'interno di un membro e attraverso una struttura; i carichi e le azioni ambientali sono casuali; le misurazioni sono incomplete e rumorose; le condizioni limite sono idealizzate; La questione centrale non è quindi se esiste l'incertezza, ma che sia stata rappresentata con sufficiente disciplina per sostenere la decisione.

2 In primo luogo, i dati disponibili devono essere esaminati per rilevanza, coerenza, pregiudizio, osservazioni mancanti e outliers. In secondo luogo, la restante incertezza deve essere rappresentata e propagata attraverso il modello in modo che si conosca la diffusione delle risposte plausbili. Trattare questi compiti separatamente impedisce un grande volume di dati da errare per informazioni affidabili.

3 Questo capitolo affronta il problema in avanti

$$\mathbf{X} \longmapsto Y = g(\mathbf{X}),$$

dove il vettore di ingresso incerto $\mathbf{X}$ è mappato attraverso un modello strutturale ad una o più quantità di interesse Y. Capitolo 65 si riferisce al problema complementare inverso: data la misurazione Y, determinare i componenti sconosciuti di $\mathbf{X}$ o del vettore parametro $\boldsymbol{\theta}$.

64.2 Qualità dei dati e fonti di dominio

4 Prima di assegnare le distribuzioni delle probabilità, l'analista dovrebbe distinguere l'incertezza dai dati difettosi. Osservazioni ripetute possono contenere errori di misura casuali, bias sistematici, deriva del sensore, errori di trascrizione, unità inconsistenti, valori censurati o intervalli mancanti. L'errore casuale può essere incorporato in una matrice di covarianza o di misura; il pregiudizio richiede la correzione o un parametro bias esplicito;

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

un'osservazione corrotta isolata può giustificare una stima robusta; e i dati mancanti non devono essere sostituiti silenziosamente senza documentare la regola dell'imputazione.

5 Altrettanto importante è la distinzione tra *incertezza dei parametri* e *modello discrepanza*. L'incertezza del parametro riflette la conoscenza incompleta delle quantità che esistono all'interno del modello adottato, come il modulo elastico o un tempo di degrado costante. La discrepanza del modello è la differenza tra il sistema fisico e la migliore risposta che il modello adottato può produrre, anche quando i suoi parametri sono scelti in modo ottimale. Forcing parametri per compensare una discrepanza sistematica del modello può produrre un'eccellente misura ma fisicamente ingannevole valori dei parametri.

6 Un'analisi defensibile registra quindi: la provenienza e le unità di ogni osservazione; precisione della misura e ripetibilità; campionamento spaziale e temporale; esclusioni dei dati; ipotesi utilizzate per colmare i vuoti; e la gamma su cui verrà utilizzato un modello calibrato, che diventa parte del modello di incertezza piuttosto che una fase informale di pre-elaborazione.

64.3 incertezza Quantificazione e analisi

7 La terminologia varia in base alle discipline. In questo libro, *quantificazione dell'incertezza* (UQ) indica il processo di analisi anteriori completa: identificare le fonti d'incertezza, caratterizzare gli input incerti e la loro dipendenza, propagarli attraverso il modello, riassumere l'incertezza dell'output risultante e determinare quali input importa. *analisi dell'incertezza* La distinzione è una delle caratteristiche più che una rigida separazione: UQ produce e organizza le informazioni sull'incertezza, mentre l'UA spiega cosa significa per la decisione di ingegneria.

Tabella 64.1: Terminologia adottata in questo libro per l'incertezza quantificazione e analisi dell'incertezza

Aspetti	incertezza quantifica (UQ)	analisi dell'incertezza (UA)
Ambito	Flusso di lavoro completo dalla caratterizzazione degli input attraverso la propagazione, la sensibilità e il reporting	Interpretazione e segnalazione dell'incertezza nelle uscite dei modelli
Ingressi	Modelli marginali, dipendenza, intervalli, prove e ipotesi di modello	Utilizza il modello di input e propagazione stabilito dallo studio UQ
Uscite	Distribuzioni, momenti, quantili, probabilità di superamento e guasti, misure sensibili	Sintesi, intervalli, probabilità di coda e confronti decisivi
Role	Produce e organizza informazioni sull'incertezza	Spiega cosa significa l'incertezza propagata per la decisione di ingegneria

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

64.3.1 Caratterizzazione dell'incertezza di Input

8 Uno studio di propagazione è solo degnibile come il suo modello d'ingresso. L'analista deve identificare la fonte di ogni incertezza, decidere se una descrizione probabilistica è giustificata, specificare intervalli o distribuzioni credibili e documentare qualsiasi dipendenza tra variabili. L'incertezza di misura e la discrepanza della forma del modello devono essere mantenute distinte dalla variabilità fisica ogni volta che le informazioni disponibili lo consentono.

64.3.1.1 Tipi di incertezze

Incertezze di alerazione: intrinseca variabilità che rimane anche con perfetta conoscenza, come la variabilità di movimento terra evento-evento o una reale variabilità spaziale nelle proprietà materiali. È normalmente rappresentato in modo probabilistico e non viene eliminato raccogliendo più informazioni su una particolare realizzazione.

Incertezze epistemiche: conoscenza incompleta del sistema, dei suoi parametri o dell'ambiente; può spesso essere ridotta da test aggiuntivi, misurazioni migliorate o modelli fisici migliori.

Incertezza di misura: errore casuale, risoluzione finita, errore di calibrazione e pregiudizio nelle osservazioni utilizzate per caratterizzare o calibrare il modello.

Incertezza modello: La discrepanza causata da idealizzazioni, meccanismi omessi, presupposti costitutivi, discorsizzazione o approssimazioni numeriche.

Incertezze miste: problemi pratici di solito contengono diverse delle fonti precedenti contemporaneamente. Ad esempio, la variabilità di movimento terra è aleatoria, l'incertezza nella caratterizzazione del sito è epistemica, le accelerazioni registrate contengono errori di misura, e il modello strutturale ha discrepanza modello-forma.

64.3.1.2 Rappresentanza matematica

Distribuzioni probabili: le distribuzioni marginali descrivono variabili individuali; è necessario un modello di distribuzione o dipendenza delle articolazioni quando sono correlate alle variabili. Le distribuzioni comuni sono riassunte nell'allegato M.

Intervalli e set fuzzy: utile quando i limiti sono credibili, ma le frequenze o le probabilità non lo sono. $X \in [X_{\min}, X_{\max}]$. Le descrizioni Fuzzy aggiungono l'appartenenza al grado e possono essere utili per informazioni linguistiche o di esperti, ma non devono essere interpretate come probabilità senza ulteriori ipotesi.

Momenti e quantili: i mezzi, la varianza, la covarianza, lo skewness e le quantitazioni selezionate sintetizzano una distribuzione. I momenti sono convenienti per la propagazione lineare, mentre le probabilita' di quantili e superanza sono spesso piu' informative per decisioni a livello limite. I momenti statistici sono riesarati §M.4.1.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

64.3.2 Dipendenza e campionamento correlato

9 Le distribuzioni marginali non definiscono un modello comune di incertezza, quando le quantità incerte condividono cause fisiche comuni, tendenze spaziali, esposizione ambientale o processi di misura, la loro dipendenza deve essere rappresentata esplicitamente. Ignorare la dipendenza può esagerare o sopprimere le probabilità di variazione e coda della risposta strutturale.

64.3.2.1 Covarianza e Correlazione

10 Per due variabili casuali X e Y,

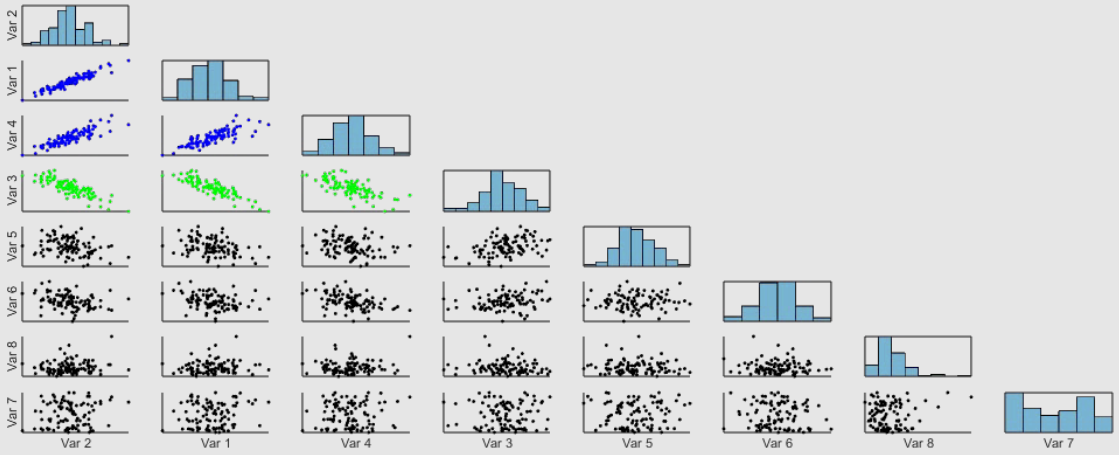
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\big[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\big], \qquad \rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}. \tag{64.1}$$

Il coefficiente di correlazione è indissolubile e si trova tra -1 e $+1$. Un valore zero significa assenza di *lineare* La correlazione non necessariamente l'indipendenza, ma anche la correlazione non determina il causamento e gli outlier possono fortemente distorcere il coefficiente normale Pearson.

64.3.2.1.0.1 Ex 64.1: Matrice di correlazione

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

La trama matrice qui sotto combina istogrammi marginali e diagrammi di spargimento binomi per otto variabili.La dipendenza è stata introdotta deliberatamente quando i campioni sono stati generati; l'utilizzo di diverse distribuzioni marginali da solo non creerebbe correlazione. Tale trama è utile per rilevare tendenze lineari, dipendenza non lineare, cluster e osservazioni isolate prima che venga accettata una matrice di correlazione formale.



Il valore numerico di ρ I descrittori come "weak" o "strong" sono solo euristici e non devono sostituire una valutazione ingegneristica di come la dipendenza influisce sulla quantità di interesse.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 64.2: Descrittori qualitativi illustrativi per la grandezza di un coefficiente di correlazione Pearson

Magnitudine	Possibile termine descrittivo
$0.0 \le \lvert\rho\rvert < 0.1$	trascurabile o molto debole
$0.1 \le \lvert\rho\rvert < 0.3$	debole
$0.3 \le \lvert\rho\rvert < 0.5$	moderato
$0.5 \le \lvert\rho\rvert < 0.7$	forte
$0.7 \le \lvert\rho\rvert < 0.9$	molto forte
$0.9 \le \lvert\rho\rvert \le 1.0$	associazione lineare estremamente forte e perfetta

11 Tabella 64.2 I confini non sono universali e non trasmettono né significato statistico né importanza ingegneristica; entrambi dipendono dalla dimensione del campione, dalla qualità dei dati e dalla decisione presa.

64.3.2.2 Covarianza spaziale

12 Una proprietà che varia spazialmente è rappresentata come campo casuale $X(\mathbf{s})$. La sua funzione di covarianza è

$$C_X(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \mathrm{Cov}[X(\mathbf{s}), X(\mathbf{s}')] \,. \tag{64.2}$$

Per un campo isotropico omogeneo, la covarianza dipende solo dalla distanza di separazione $h = \|\mathbf{s} - \mathbf{s}'\|$. Un modello illustrativo comune è

$$C_X(h) = \sigma_X^2 \exp\!\left(-\frac{h}{\ell_c}\right), \tag{64.3}$$

dove ℓ_c è una lunghezza di correlazione. Piccolo ℓ_c produce una rapida variazione spaziale; grande ℓ_c L'anisotropia può essere introdotta permettendo di ottenere diverse lunghezze di correlazione in direzioni differenti. La covarianza spaziale è essenziale quando si assegnano proprietà materiali agli elementi finiti: campi di campionamento indipendente elemento per elemento genera solitamente in modo irrealistico.

64.3.2.3 Covarianza temporanea

13 Per un processo stocastico X_t,

$$C_X(t, s) = \mathbb{E}\big[(X_t - \mu_t)(X_s - \mu_s)\big] \,. \tag{64.4}$$

Se il processo è debolemente stazionario, $C_X(t, s) = C_X(\tau)$ dipende solo dal ritardo $\tau = |t - s|$. Ad esempio, il processo di autoregressiva di primo ordine stazionario $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$con $|\phi| < 1$, ha un'autocovarianza che decade geometricamente con lag. Il rumore bianco è il caso limitante in cui l'autocorrità teorica è zero per ogni nonzero ritardo; i campioni finiti tuttavia mostrano piccole stime casuali intorno a zero.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

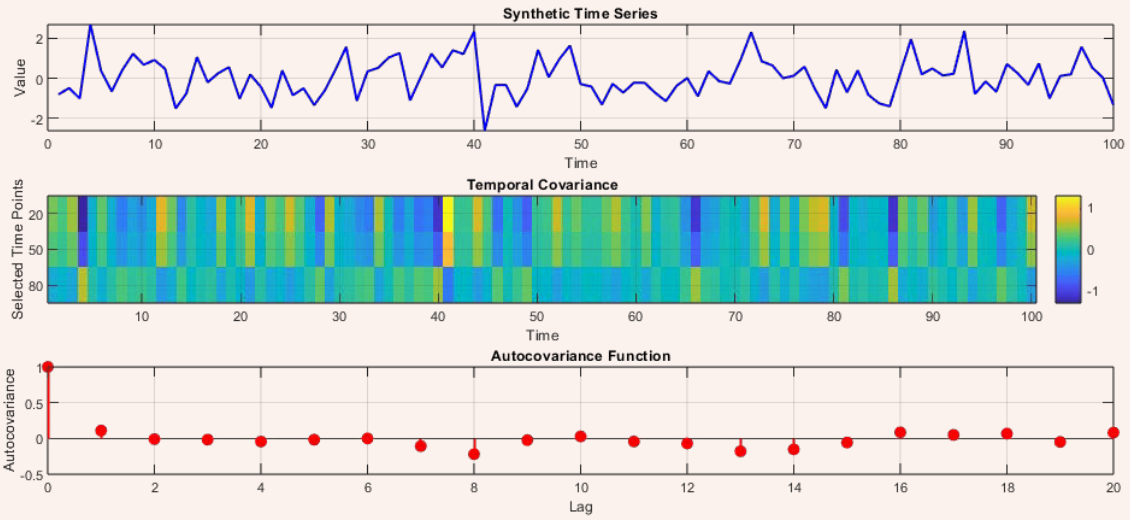


Figura 64.1: Sequenza temporale sintetica, covarianza empirica e autocovarianza stimata.

14 La figura illustra una sequenza stazionaria simulata, un display di covarianza empirica e una funzione autocovariance stimata. Un prodotto empirico da un singolo paio di osservazioni non è di per sé una stima della covarienza; la covarianza richiede un'aspettativa o una media su realizzazioni ripetute o origini del tempo sotto l'assunzione di stazionaria.

64.3.2.4 Generando campioni correlati

15 Il campionamento indipendente è inappropriato quando gli input hanno una dipendenza significativa. $\mathbf{R}$, uno può calcolare un fattore di Cholesky $\mathbf{L}$ tale $\mathbf{R} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$, generare $\mathbf{z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, e set

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{D}_\sigma \mathbf{L}\mathbf{z}, \tag{64.5}$$

dove $\mathbf{D}_\sigma$ contiene le deviazioni standard marginali.

16 Per gli emarginati non gaussiani, spesso viene utilizzata una costruzione Gaussian-copula: genera variabili normali correlate $\mathbf{z}_c = \mathbf{L}\mathbf{z}$, trasformarli in uniformi $u_i = \Phi(z_{c,i})$e finalmente ambientato $x_i = F_i^{-1}(u_i)$. La correlazione prescritta è esatta nello spazio gaussiano latente; le correlazioni di Pearson risultante nello spazio fisico possono differire e può richiedere la calibrazione. La dipendenza più generale può essere rappresentata da altre copula o dalle distribuzioni articolari direttamente stimate.

64.3.3 Propagazione dell'incertezza

17 La propagazione dell'incertezza valuta come il modello di ingresso comune influisca sulla risposta del sistema strutturale. Il metodo richiesto dipende dal costo del modello, dalla non linearità, dalla dimensionalità, dall'importanza del comportamento della coda e se l'obiettivo è una distribuzione completa dell'output o solo momenti selezionati e quantili.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

64.3.3.1 Simulazione Monte Carlo (MCS)

18 La simulazione di Monte Carlo è una procedura numerica diretta per la propagazione dell'incertezza:

1. campione il modello di ingresso congiunto per $X_1, X_2, \ldots, X_n$, compresa qualsiasi dipendenza prescritta;
2. valutare $Y = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ per ogni realizzazione;
3. stimare la distribuzione di output richiesta, i momenti, quantili, le probabilità di superamento o le probabilità guasti dal campione risultante.

19 Il metodo è concettualmente semplice e asintotico generale, ma la sua convergenza statistica è lenta e il costo computazionale può essere proibitivo quando ogni valutazione del modello è costoso. L'errore di campionamento dovrebbe quindi essere valutato piuttosto che rinviato da un singolo run.

64.3.3.2 Ipercubo latino Sampling (LHS)

20 LHS migliora la copertura, stratificante ogni distribuzione marginale (Olsson e Sandberg, 2002). Per molti modelli lisci riduce la varianza di campionamento rispetto ad un campione casuale semplice egualmente dimensionato, anche se il vantaggio dipende dalla funzione di risposta e da come la dipendenza tra gli input è rappresentata.

LHS è una tecnica di campionamento stratificato, che divide il CDF di ogni input in N Strata di parità, seleziona un valore da ogni strato marginale e combina i valori in N La stratificazione è esatta in ogni proiezione unidimensionale; la copertura dello spazio multidimensionale dipende dall'accoppiamento o dalla permutazione dei campioni marginali.

21 LHS fornisce spesso stime utili con meno valutazioni di modelli rispetto al campionamento casuale normale, ma non garantisce per sé precisione; la convergenza dovrebbe essere ancora verificata aumentando le dimensioni del campione o ripetendo il disegno.

1. Dividere le distribuzioni dell'ingresso: Per ogni variabile di input X, dividere la sua funzione di distribuzione cumulativa (CDF) in N intervalli di probabilità uguali:
$$X_1, X_2, \ldots, X_N, \quad \text{where } P(X_i) = \frac{1}{N}.$$
2. Sampling Stratified: Seleziona un valore da ogni strato di probabilità.
3. Combina Campioni di input: Per variabili d'ingresso multiple $X_1, X_2, \ldots, X_n$, permuto casualmente i campioni per creare N combinazioni di input uniche.
4. Eseguire simulazioni di modello. Per ogni vettore input, valutare
$$Y = g(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

5. incertezza di produzione: utilizzare i risultati per calcolare le misure statistiche (§M.4.1)

22 Tabella 64.3 confronta Monte Carlo con Latin Hypercube Sampling.

Tabella 64.3: Confronto tra MCS e LHS

Aspetti	Monte Carlo Sampling	Ipercubo latino Sampling (LHS)
Copertura marginale	I campioni possono raggruppare e lasciare vuoti.	Esattamente un punto occupa ogni strato di probabilità marginale.
Efficienza	Metodo di base con semplice teoria della convergenza.	Spesso riduce la varianza per risposte lisce, ma il guadagno è dipendente dal problema.
Dipendenza	Disegna direttamente dal modello di articolazione specificato.	Richiede una costruzione di conservazione della dipendenza o riordinare quando gli input sono correlati.
Verifica	Aumento N o ripeti le corse indipendenti.	Aumento N, ripeti i disegni e verifica la sensibilità alla permutazione o al design ottimizzato.

23 Figura 64.2 illustra le differenze tra Classical Monte Carlo Sampling (MCS) e Latin Hypercube Samping (LHS) per i dati bidimensionali.

1. Nella trama sinistra (MCS), i campioni vengono distribuiti in modo casuale, portando a clustering evidente in alcune regioni e lacune in altri. Questa diffusione irregolare riflette la casualità intrinseca di MCS, che non applica una copertura uniforme nello spazio campione.
2. Nella trama destra (LHS), ogni strato marginale è rappresentato esattamente una volta. La permutazione visualizzata dà anche una proiezione bidimensionale più equilibrata, sebbene questo grado di uniformità multidimensionale non sia garantito da ogni disegno LHS.
3. I trame superiori corrispondono a distribuzioni uniformi, e quelli inferiori alla distribuzione normale ($\mu = 0$, $\sigma = 0.3$).

24 Il confronto illustra il vantaggio principale di LHS: copertura marginale controllata con

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

un campione limitato. La precisione dipende ancora dalla dimensione del campione, la modellazione della dipendenza, la funzione di risposta e la permutazione selezionata.

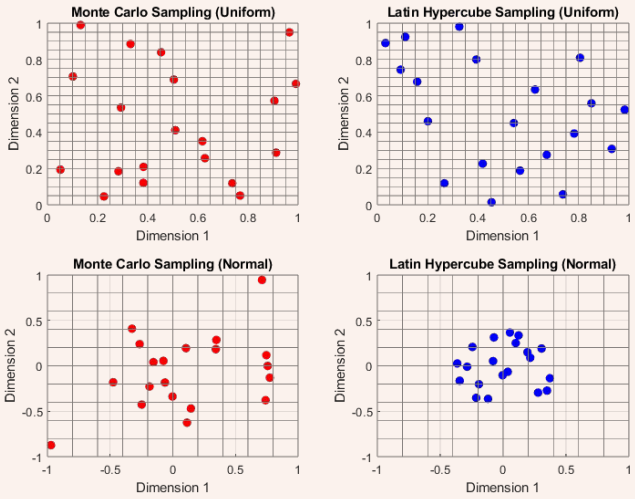


Figura 64.2: Confronto tra MCS e LHS

25 Il termine *Ipercubo latino Sampling (LHS)* combina l'idea latina-quare di utilizzare ogni strato una volta con la rappresentazione ipercubo di un dominio multidimensionale d'ingresso.

Piazza latina: un array combinatorio in cui ogni simbolo si verifica esattamente una volta in ogni riga e ogni colonna. 3×3 Piazza latina:

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{bmatrix}$$

ogni riga e colonna ha esattamente un evento di A, Be C, garantendo una distribuzione stratificato attraverso la piazza.

Questo concetto è stato adattato al campionamento più grande, assicurando che ogni campione sia stratificato in ogni dimensione.

Ipercubo: l'estensione di un intervallo, quadrato e cubo a n dimensioni; rappresenta lo spazio campione normalizzato di n variabili di input.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

64.3.3.2.0.1 Ex 64.2: Latin Hypercube: esempio lavorato con due variabili

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Considera un semplice problema a due variabili: modellare lo spostamento strutturale Y come funzione del modulo di Young E e carico applicato P. Presumiamo:

$$E \sim \mathcal{N}\left(200\ \text{GPa}, (10\ \text{GPa})^2\right), \tag{64.6}$$
$$P \sim \mathcal{U}(10\ \text{kN}, 20\ \text{kN}), \tag{64.7}$$

e vogliamo generare $N = 4$ combinazioni di input uniche utilizzando LHS.

Passo 1: Dividere le distribuzioni dell'ingresso Per E (normale distribuzione), dividiamo il suo CDF in $N = 4$ intervalli di probabilità uguali:

$$\text{Intervals}: \left[0, \frac{1}{4}\right), \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), \left[\frac{3}{4}, 1\right].$$

I quantili corrispondenti a questi intervalli sono:

$$\Phi^{-1}(0.125) \approx -1.150 \implies E_1 \approx 188.5\ \text{GPa}, \tag{64.8}$$
$$\Phi^{-1}(0.375) \approx -0.319 \implies E_2 \approx 196.8\ \text{GPa}, \tag{64.9}$$
$$\Phi^{-1}(0.625) \approx +0.319 \implies E_3 \approx 203.2\ \text{GPa}, \tag{64.10}$$
$$\Phi^{-1}(0.875) \approx +1.150 \implies E_4 \approx 211.5\ \text{GPa}. \tag{64.11}$$

Per P (distribuzione uniforme), gli intervalli e i campioni corrispondenti sono semplici:

$$P_1 = 10 + 0.125 \times 10 = 11.25\ \text{kN}, \tag{64.12}$$
$$P_2 = 10 + 0.375 \times 10 = 13.75\ \text{kN}, \tag{64.13}$$
$$P_3 = 10 + 0.625 \times 10 = 16.25\ \text{kN}, \tag{64.14}$$
$$P_4 = 10 + 0.875 \times 10 = 18.75\ \text{kN}. \tag{64.15}$$

Passo 2–3: Sampling e Permutazione Stratificata Un campione viene estratto da ogni intervallo, quindi i campioni vengono permutati casualmente tra le variabili per formare combinazioni uniche.

Esempio	E (GPa)	P (kN)	Note
1	188.5	13.75	Da intervalli 1 e 2
2	196.8	18.75	Da intervalli 2 e 4
3	203.2	11.25	Da intervalli 3 e 1
4	211.5	16.25	Da intervalli 4 e 3

Questa permutazione garantisce che ogni intervallo marginale venga campionato esattamente una volta, non garantisce spaziature uniformi nel pieno spazio multidimensionale, quindi le permutazioni alternative o i disegni LHS ottimizzati possono fornire migliori proprietà di proiezione.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Passo 4: Eseguire simulazioni di modello Per ogni combinazione, il modello viene valutato. Assumere che il modello di spostamento è:

$$Y = \frac{PL^3}{48EI}$$

dove $L = 2$ m e $I = 1 \times 10^{-5}$ m^4 sono fissi. Le uscite sono:

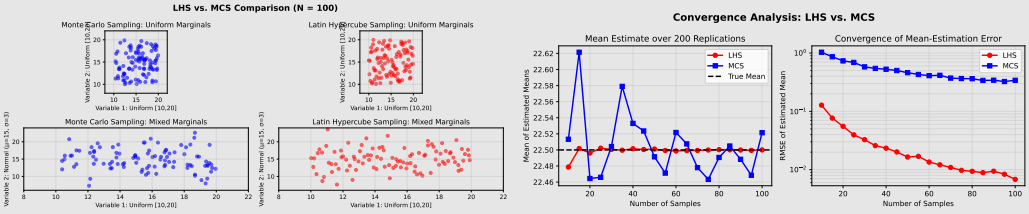
Esempio	E (GPa)	P (kN)	Y (mm)
1	188.5	13.75	1.216
2	196.8	18.75	1.588
3	203.2	11.25	0.923
4	211.5	16.25	1.281

Fase 5: Quantifica l'incertezza dell'output Dal $N = 4$ uscite:

$$\bar{Y} = \frac{1}{4}(1.216 + 1.588 + 0.923 + 1.281) \approx 1.252 \text{ mm}, \tag{64.16}$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(Y_i - \bar{Y})^2} \approx 0.236 \text{ mm}. \tag{64.17}$$

Con solo $N = 4$ campioni, questa stima è approssimativa; le dimensioni dei campioni più grandi forniscono una migliore convergenza statistica.



MATLAB®il codice è dato in §I.5.7; visto anche §64.3.3.2.

64.3.3.3 Alternative approssimative e surrogate a Sampling diretto

26 La simulazione di Monte Carlo può richiedere molte valutazioni dei modelli, le due approssimazioni che seguono riducono il costo sostituendo campionamento casuale con un piccolo insieme di valutazioni prescritte. La loro economia è ottenuta da ipotesi più forti, quindi la loro accuratezza deve essere verificata contro la non linearità, dipendenza e dimensionalità del problema.

64.3.3.3.1 Metodo di stima del punto (PEM)

27 Il termine *metodo di stima del punto* La versione semplice utilizzata qui è un design a due livelli: ogni input viene assegnato ai valori $\mu_i - k\sigma_i$ e $\mu_i + k\sigma_i$, e il modello viene valutato in tutti gli angoli che ne risultano; non deve essere confuso con schemi di valutazione punti-valutazione più economici che utilizzano solo un numero limitato di punti ponderati.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

PEM funziona come segue:

1. Per ogni variabile di input X_i, identificarne la media μ_i e deviazione standard σ_i.
2. Definire due valori per ogni input: $\mu_i - k\sigma_i$ e $\mu_i + k\sigma_i$.
3. Valutare il modello a tutti 2^n combinazioni di valori di input, dove n è il numero di variabili d'ingresso.
4. Compiti il mezzo di output, la varianza e altri momenti statistici basati sulle valutazioni del modello.

[28] Il design degli angoli può esporre la risposta su un range di due livelli prescritti, ma non riproduce generalmente la distribuzione delle probabilità dei input originali o dei momenti di uscita più alti. k e i pesi del punto devono essere dichiarati. Il suo costo cresce anche esponenzialmente con il numero di ingressi.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

64.3.3.3.1.1 Ex 64.3: Esempio di metodo di stima del punto

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Un sistema ha due variabili di input:

- $X_1 \sim N(10, 2^2)$: media = 10, deviazione standard = 2.
- $X_2 \sim N(20, 3^2)$: media = 20, deviazione standard = 3.

L'uscita del sistema è data da:

$$Y = X_1^2 + 3X_2$$

Obiettivo: Utilizzare il metodo di stima del punto (PEM) per valutare la media e la varianza Y.

Punti:

1. Definire due valori per ogni variabile di input:

$$X_1 = \mu_{X_1} \pm \sigma_{X_1}, \quad X_2 = \mu_{X_2} \pm \sigma_{X_2}.$$

2. Valutare la funzione $Y = X_1^2 + 3X_2$ a tutte le combinazioni di X_1 e X_2:

$$Y = f(X_1, X_2), \quad \text{for } (X_1, X_2) \in \{(8, 17), (8, 23), (12, 17), (12, 23)\}.$$

3. Con pesi uguali ai quattro angoli, calcolate i momenti approssimativi:

$$\widehat{\mu}_Y = 164, \qquad \widehat{\mathrm{Var}}(Y) = 1681.$$

Per il confronto, i momenti esatti sotto gli input normali indipendenti dichiarati sono $\mu_Y = 164$ e $\mathrm{Var}(Y) = 1713$. L'accordo è chiuso per questo esempio quadratico ma non è garantito per una risposta generale non lineare.

64.3.3.3.2 Uno alla volta (Serie Taylor stima di differenza finita TSFD)

[29] Questo approccio semplificato inizia con un'espansione Taylor di primo ordine sul vettore dei mezzi di input e mantiene solo termini lineari (Benjamin e Cornell, 1970)È quindi più affidabile quando la risposta è localmente liscia e solo leggermente non lineare rispetto alla gamma di interesse.

$$\mu_F \approx F(\boldsymbol{\mu})$$

dove $\boldsymbol{\mu}$ È il vettore dei mezzi di input, questa uguaglianza è un'approssimazione del primo ordine; per una risposta non lineare $\mathbb{E}[F(\mathbf{X})]$ non deve essere uguale $F(\mathbb{E}[\mathbf{X}])$. Per variabili casuali indipendenti, la corrispondente approssimazione della varianza di primo ordine è

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

$$
\begin{aligned}
Var(F) = \sigma_F^2 &= \sum \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \sigma_i \right)^2 \\
\frac{\partial F}{\partial x_i} &\approx \frac{F_i^+ - F_i^-}{2\sigma_i} \\
F_i^+ &= F(\mu_1, \cdots, \mu_i + \sigma_i, \cdots, \mu_n) \\
F_i^- &= F(\mu_1, \cdots, \mu_i - \sigma_i, \cdots, \mu_n)
\end{aligned}
$$

dove σ_i sono le deviazioni standard delle variabili.

$$
\sigma_F = \sqrt{\sum_i \left(\frac{F_i^+ - F_i^-}{2} \right)^2}
$$

[30] Procedura (Bryant, Brokaw e Mlakar, 1993) può essere riassunto come segue:

1. Eseguire un'analisi iniziale con tutte le variabili ai loro mezzi, la risposta risultante è l'approssimazione del primo ordine al mezzo di uscita.
2. Esecuzione $2n$ analisi, in cui tutte le variabili sono impostate pari ai valori medi, eccetto variabili i, che assume un valore pari a $\mu_i + \sigma_i$e poi $\mu_i - \sigma_i$. Quindi, questo metodo richiede $2n + 1$ analisi.
3. Per ogni variabile x_i, calcolare il contributo di primo ordine firmato $c_i = (F_i^+ - F_i^-)/2$. La sua magnitudine fornisce un'indicazione locale della sensibilità a quella variabile.
4. Per variabili indipendenti, quadrate i contributi, aggiungeteli e prendete la radice quadrata: $\sigma_F \approx \sqrt{\sum_i c_i^2}$. Per le variabili correlate, devono essere inclusi anche i corrispondenti cross-terms covarianza.
5. Ordinare i risultati in ordine discendente e formare il cosiddetto "Tornado diagram'.

[31] Poiché TSFD è locale, la scala di perturbazione e il modello di probabilità adottato dovrebbe essere segnalato. $\pm\sigma_i$ lo studio è significativo solo quando σ_i è una misura di incertezza degni di nota e la risposta rimane sufficientemente liscia su quell'intervallo.

64.3.3.3.2.1 Ex 64.4: Metodo di differenza finito della serie Taylor Esempio

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Utilizzare gli stessi input e la risposta normali indipendenti come nell'esempio precedente PEM:

$$
X_1 \sim N(10, 2^2), \qquad X_2 \sim N(20, 3^2), \qquad Y = X_1^2 + 3X_2.
$$

COPIA DI REVISIONE

Al punto medio,

$$\widehat{\mu}_Y = F(10, 20) = 160.$$

I due contributi di differenza finiti sono

$$c_1 = \frac{F(12, 20) - F(8, 20)}{2} = \frac{204 - 124}{2} = 40,$$
$$c_2 = \frac{F(10, 23) - F(10, 17)}{2} = \frac{169 - 151}{2} = 9.$$

Perciò,

$$\widehat{\sigma}_Y = \sqrt{40^2 + 9^2} = 41, \qquad \widehat{\mathrm{Var}}(Y) = 1681.$$

I momenti esatti sono $\mu_Y = 164$ e $\mathrm{Var}(Y) = 1713$. Il metodo di primo ordine manca la correzione media causata dal termine quadratico e poco sottovaluta la varianza; il confronto illustra sia la sua economia che la sua limitazione locale-lineare.

64.3.3.3.3 Espansione di caos polinomiale (PCE)

32 L'espansione del caos polinomiale (PCE) è un metodo usato nella quantificazione dell'incertezza per rappresentare variabili casuali o funzioni stocastiche come una serie di polinomi ortogonali.

33 Concetti chiave in PCE:

Rappresentanza spettrale La rappresentazione spettrale si riferisce all'esprimere una funzione in termini di una serie di funzioni base, simili a come la serie Fourier rappresenti segnali utilizzando le funzioni sinusoide e cosene. *Polinomi ortogonali*, adattato alla distribuzione delle probabilità della variabile casuale di input.

Polinomi ortogonali I polinomi ortogonali costituiscono le funzioni di base in PCE. Questi polinomi sono ortogonali rispetto ad una data funzione peso, che corrisponde alla distribuzione probabilità della variabile casuale.

- *Polinomi leggendari*: Utilizzato per variabili casuali con distribuzioni uniformi.
- *Polinomi dell'ermelite*: Utilizzato per variabili casuali con distribuzioni normali (Gaussian).
- *Polinomi Laguerre*: Utilizzato per variabili casuali con distribuzioni esponenziali.

Funzione variabile casuale e di risposta A *variabile casuale* è un input che segue una distribuzione specifica di probabilità (ad esempio, uniforme, normale). *funzione di risposta* è l'uscita deterministica di un sistema dipendente dalla variabile casuale. x è una variabile casuale, la funzione di risposta potrebbe essere $f(x) = \sin(\pi x) + 0.1\cos(5\pi x)$.

Coefficienti PCE I coefficienti di PCE quantificano il contributo di ogni termine polinomiale per approssimare la funzione di risposta. Questi coefficienti sono calcolati utilizzando tecniche come il minimo-quares che si adattano per ridurre al minimo l'errore tra la funzione reale e la sua approssimazione polinomiale.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

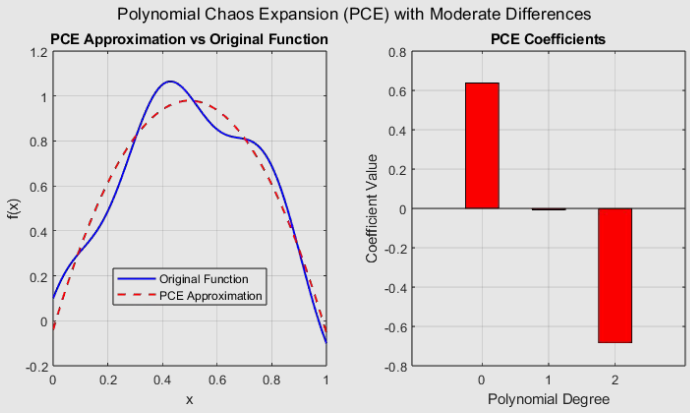
64.3.3.3.3.1 Ex 64.5: Espansione di caos polinomiale

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Considerare la funzione di risposta $f(x) = \sin(\pi x) + 0.1\cos(5\pi x)$dove x è uniformemente distribuito sopra $[0, 1]$. Ci approfittiamo f utilizzando i polinomi a turni Legendre, equivalentmente ordinari dei polinomi Legendre valutati $2x - 1$, in modo che la base sia ortogonale rispetto alla densità uniforme su $[0, 1]$.

1. Generare la variabile casuale: un insieme di campioni casuali distribuiti uniformemente x nella gamma $[0, 1]$.
2. Costruisci funzioni di base: Utilizzare i polinomi della leggendari spostati su $[0, 1]$, o equivalentemente ordinario polinomi Legendre valutati a $2x - 1$, fino a un determinato grado.
3. Compute PCE Coefficienti: Misura i coefficienti dell'espansione utilizzando un metodo meno-quares.
4. Approssimativo della funzione: combinare le funzioni di base con i relativi coefficienti per approssimare $f(x)$.

I risultati del PCE possono essere visualizzati come segue:



Paragone: un appezzamento che confronta la funzione originale $f(x) = \sin(\pi x) + 0.1\cos(5\pi x)$ La funzione originale è mostrata come una linea blu continua, mentre l'approssimazione PCE è rappresentata come una riga tratteggiata rossa. L'approssimazione è ragionevolmente accurata ma devia leggermente a causa della complessità della funzione originale e del grado polinomiale limitato utilizzato nell'espansione. Questo evidenzia il trade-off tra semplicità computazionale e precisione di approssimazione in PCE.

Trama coefficiente: un grafico a barre che visualizza i coefficienti del PCE per ogni grado polinomiale. Le altezze delle barre indicano l'importanza relativa di ciascun termine nell'espansione della serie. Per questa particolare risposta e grado polinomiale, dominano i coefficienti di ordine inferiore; questo modello non è universale: gradienti affilati, discontinuità o oscillazioni possono richiedere termini sostanziali di ordine superiore.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

64.3.4 Interpretazione dell'incertezza di uscita

34 Una volta propagata la distribuzione della risposta, l'analisi dell'incertezza lo traduce in quantità che portano direttamente sulla questione ingegneristica. A seconda della decisione, i riassunti utili includono la densità di probabilità e le funzioni di distribuzione cumulativa, mezzi e varianze, predizione o intervalli credibili, quantili, probabilità di superamento e probabilità di fallimento. Una risposta media può essere adeguata per il confronto a livello di servizio, mentre la valutazione di uno stato limite richiede tipicamente attenzione alla coda rilevante della distribuzione.

35 La misura indicata deve essere abbinata alla sua interpretazione: un intervallo di fiducia descrive l'incertezza in una quantità stimata della popolazione; un vano di previsione descrive la gamma di un'osservazione futura sotto il modello adottato; e un intervallo credibile baiese descrive la probabilità posteriore per una quantità incerta condizionata sul modello, i dati e le presupposti.Questi intervalli rispondono a diverse domande e non devono essere utilizzati intercambiabili.

36 Un UA defensibile segnala anche le ipotesi che controllano il risultato: l'adozione di distribuzioni marginali e modello di dipendenza, il trattamento dell'errore di misura e la discrepanza del modello, convergenza numerica o campionamento, e la sensibilità della conclusione a ipotesi plausbili alternative. Se la decisione dipende da una piccola probabilità di fallimento, l'analista deve dimostrare che il metodo di campionamento o approssimazione risolve la coda rilevante con precisione adeguata piuttosto che affidarsi solo a momenti globali.

37 La propaganda stabilisce *quanto* la risposta può variare; l'analisi della sensibilità stabilisce *perché*. La seguente sezione quindi le apporzioni di uscita variabilità tra gli input incerti e identifica quelli che garantiscono una migliore caratterizzazione, la conservazione esplicita nelle analisi successive o l'eventuale identificazione dei parametri.

64.4 Analisi della sensibilità

38 La propagazione dell'incertezza chiede quanto possa variare l'output. L'analisi della sensibilità richiede il perché varia, la distinzione è essenziale: due modelli possono avere la stessa variazione di uscita ma parametri di controllo molto diversi.

39 I metodi di sensibilità possono essere organizzati in quattro gruppi:

- **Metodi derivati locali o one-at-a-time**, che descrivono la risposta vicino a un punto base selezionato;
- **Metodi di screening globali**, come Morris, che identificano in modo efficiente gli input trascurabili e influenti nel pieno dominio;

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

- **Metodi basati sulla varianza globale**, come gli indici Sobol, che allocano la varianza di uscita agli effetti principali e alle interazioni;
- **Sintesi grafica**, come i diagrammi del tornado, che mostrano la gamma indotta dalle perturbazioni prescritte una tantum.

40 La proiezione è appropriata quando il modello ha molti input e ogni valutazione è costosa. Gli indici basati sulla variazione forniscono una decomposizione più completa ma richiedono sostanzialmente più valutazioni. I derivati locali sono poco costosi ma possono mancare comportamenti non lineari e interazioni lontano dal punto di base.

64.4.1 Metodo di Morris

41 Il metodo Morris è una tecnica di screening globale per modelli con molti input incerti e valutazioni costose (Morris, 1991). Distribuisce le perturbazioni una tantum in tutto lo spazio di ingresso ammissibile, mantenendo così gran parte dell'economia delle differenze finite locali rilevando i cambiamenti nella sensibilità lontano da un unico linea base. Le sue principali uscite sono variabili influenti e contrassegnano possibili non linearità o interazioni; esse non costituiscono una completa decomposizione di varianza.

Metodo originale Morris

42 L'approccio di stima della serie-finite (TSFD) di Taylor perturba una variabile casuale (RV) alla volta (solitamente tramite $\pm\sigma$), come descritto in precedenza. Questo approccio, denominato metodo One-at-a-Time (OAT) serve come base per l'estensione *Metodo di Morris*.

43 Il design degli effetti elementari cambia un RV alla volta lungo ogni traiettoria, ma la raccolta di effetti è globale perché le traiettiere iniziano in diverse posizioni nello spazio input. piuttosto, una grande dispersione degli effetti elementari indica la non linearità, le interazioni con altri RV o entrambi. L'influenza di ogni RV è riassunta attraverso **effetti elementari (EE)**.

44 Nel Metodo Morris, gli EE sono calcolati per ogni RV e agiscono come indicatori di sensibilità. Un grande valore EE significa che il corrispondente RV ha una notevole influenza sull'output del modello. Il primo passo del Metodo Morris prevede la selezione casuale dei punti iniziali nell'iperspazio discreto di RV, che vengono rappresentati come cerchi neri riempiti in Figura 64.3.

45 Spesso, il set di k I RV per un punto iniziale sono rappresentati nell'iperspazio quantile, dove:

$$F_i(X_i^j) = \frac{2j-1}{2m}, \tag{64.18}$$

con X_i^j come j^{th} valore discreto del i^{th} RV, F_i come funzione di distribuzione cumulativa (CDF), $i = [1:k]$, $j = [1:m]$e m come il numero di livelli discreti nel CDF.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

46 Il secondo passo prevede perturbare un RV da un piccolo incremento Δ, pur mantenendo tutti gli altri RV fissi.

47 Il terzo passo si applica alla stessa perturbazione Δ a un altro RV, ripetendo il processo fino a tutti k I RV sono stati perturbati una volta, questi passaggi vengono illustrati come cerchi riempiti di rosso in Figura 64.3. La sequenza in cui i camper sono perturbati, così come la direzione della perturbazione ($+\Delta$ or $-\Delta$), viene scelto casualmente.

48 Per un sistema con k RV, una sola traiettoria richiede $k+1$ valutazione del modello (ilustrata da frecce rosse in Figura 64.3). If r vengono utilizzate traiettorie, il numero totale di valutazioni diventa $r \times (k+1)$. Gli EE per ogni RV in una traiettoria sono calcolati utilizzando la seguente equazione:

$$EE_i = \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \Delta, x_{i+1}, \ldots, x_k) - f(x_1, \ldots, x_k)}{\Delta}, \tag{64.19}$$

dove EE_i è l'effetto elementare per i^{th} RV, e $f(x_i)$ è l'uscita del modello corrispondente al valore RV x_i.

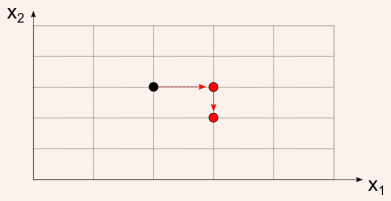


Figura 64.3: Esempio di una traiettoria per $k = 2$.

49 Morris. (Morris, 1991) due misure di sensibilità proposte in base agli EE:

- Il **significa** di EEs (μ_i), che indica l'impatto complessivo dell'azione i^{th} RV sull'uscita.
- Il **deviazione standard** di EEs (σ_i), che riflette il contributo del i^{th} RV a non linearità o interazioni con altri RV.

50 Per affrontare potenziali effetti di cancellazione quando gli EE hanno valori positivi e negativi, il mezzo dei valori assoluti degli EE (μ_i^*) è comunemente usato invece di μ_iQuesta modifica garantisce che le misure di sensibilità rimangano robuste anche quando EEs esibisce segni opposti.

Metodo Morris migliorato

51 Le traiettorie di Morris generate casualmente possono sovrapporre o raggruppare, specialmente su una griglia grossolana. Le valutazioni ripetute o strettamente distanziate riducono la diversità dello spazio di input esplorato e possono rendere gli indici stimati meno stabili per un bilancio computazionale fisso.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

52 Figura 64.3 ha introdotto una singola traiettoria. Figura 64.4 mostra il fenomeno di interesse aggiuntivo: le traiettorie generate in modo indipendente possono coincidere o raggrupparsi, riducendo così la diversità dello spazio di ingresso esplorato.

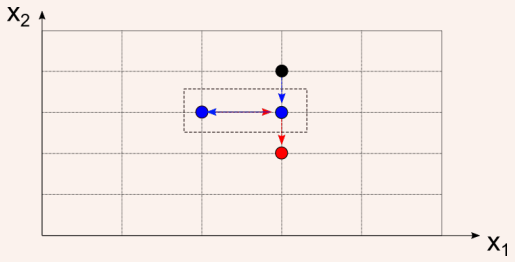


Figura 64.4: Overlapping o punti strettamente raggruppati da diverse traiettorie Morris.

53 Per questo motivo sono state proposte varianti di tipo traiettorio e punto radiale (Sohier, Farges e Piet-Lahanier, 2014)Il loro scopo è quello di ridurre la sovrapposizione evitabile e migliorare la copertura; non possono garantire che ogni caratteristica non lineare della risposta sia campionata.

54 **Mapping RVs a quantile spazio.** Nel miglioramento dell'approccio:

- Tutti k I camper si trasformano in uno spazio quantile normalizzato $[0, 1]$, dove ogni dimensione corrisponde alla funzione di distribuzione cumulativa (CDF) $F_i(X_i^j)$ del RV.
- Il j^{th} valore quantile del i^{th} RV è dato da:

$$F_i(X_i^j) = \frac{2j-1}{2m},$$

dove m Questa mappatura garantisce una rappresentazione uniforme delle variabili in tutti i loro range, a prescindere dalle distribuzioni originali.

Questo processo di mappatura è illustrato in Figura 64.5.

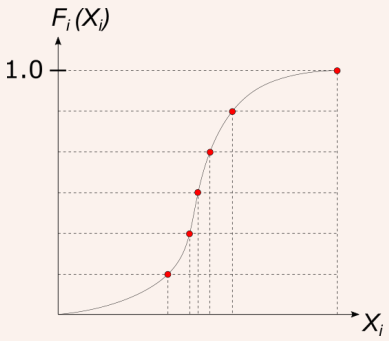


Figura 64.5: Variazione casuale e la sua funzione di distribuzione cumulativa (CDF).

55 La strategia di campionamento migliorata comprende:

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

- *Latin Hypercube Sampling (LHS):* I punti iniziali sono scelti utilizzando LHS per migliorare la copertura dello spazio di input e ridurre il rischio di selezionare i punti di partenza identici o sovrapposti.
- *Dimensioni del passo fisso (Δ):* Una dimensione di passo fissa (Δ = 0.5) nello spazio quantile assicura perturbazioni coerenti tra le traiettorie. **ordine fisso** piuttosto che casualmente, impedendo ulteriormente sovrapposizioni.

56 **Dimensioni di passo invariate.** Sohier, Piet-Lahanier e Farges, 2015 introdotti formati di gradino alternato (Δ = 0.5 e Δ = 0.375) gestire efficacemente le risposte periodiche o oscillatorie. Figura 64.6 mostra un esempio in cui una dimensione del passo fisso non riesce a catturare la variabilità in una risposta periodica di modello.

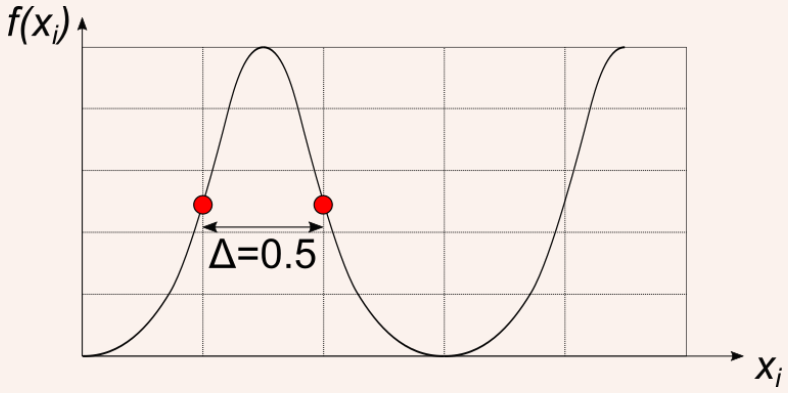


Figura 64.6: Risposta periodica di una variabile casuale x_i. Le dimensioni dei passaggi fissi non possono rilevare variazioni periodiche.

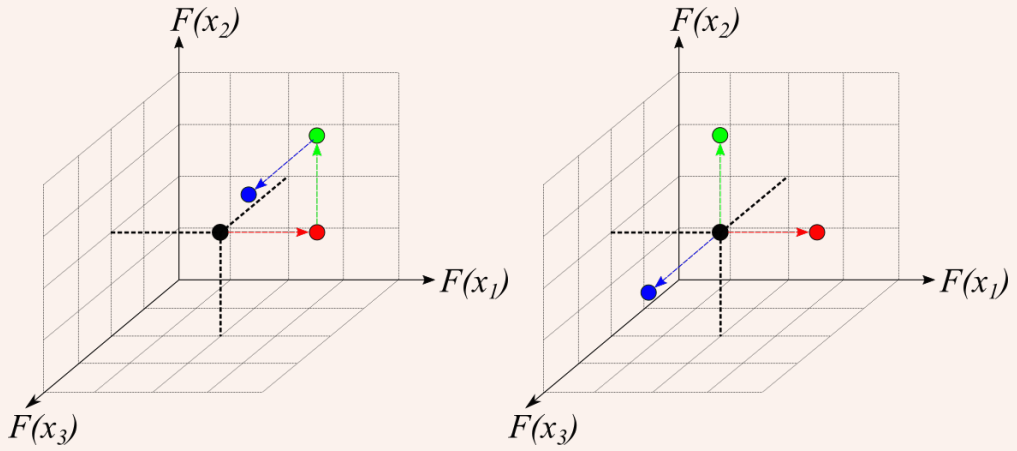
57 **Design a punto radiale.** Un ulteriore affinamento sostituisce ogni traiettoria con perturbazioni da un centro comune:

- Invece di costruire una traiettoria perturbando sequenziali variabili, il metodo migliorato utilizza un punto centrale nello spazio quantile.
- Ogni variabile è perturbata indipendentemente da questo centro, eliminando ridondanze e migliorando l'efficienza di campionamento.

Figura 64.7 confronta l'approccio tradizionale basato sulla traiettoria (a) con l'impostazione radiale-punto (b).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Traiettoria (b) Punti di riferimento

Figura 64.7: Confronto traiettoria (a) e radiale-punto (b) per i metodi di $k = 3$ RV in iperspazio quantile.

58 In sintesi, il metodo migliorato Morris incorpora i seguenti miglioramenti chiave:

- Mapping a Quantile Space: assicura una rappresentazione uniforme delle variabili.
- LHS inizializzazione: migliora la copertura marginale e può ridurre la sovrapposizione.
- Dimensioni di passo fissi o alternativi: riduce il rischio che un singolo passaggio manchi le caratteristiche di risposta selezionate.
- Sampling punto radiale: evita la dipendenza sequenziale di passi traiettoria e può ridurre le valutazioni ridondanti.

Queste raffinazioni possono migliorare la copertura spaziale e ridurre le valutazioni ridondanti, il loro vantaggio dovrebbe essere valutato per la risposta a portata di mano, in particolare quando periodicità, discontinuità o interazioni forti sono plausbili.

64.4.1.1 Ex 64.6: Metodo di Morris

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Considerare lo stesso sistema dagli esempi precedenti:

$$Y = X_1^2 + 3X_2$$

dove sono gli input:

- $X_1 \sim N(10, 2^2)$: media = 10, deviazione standard = 2.
- $X_2 \sim N(20, 3^2)$: media = 20, deviazione standard = 3.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

L'obiettivo è quello di utilizzare il metodo Morris per identificare gli effetti elementari X_1 e X_2 sull'uscita Y.

Passi del metodo Morris

1. Normalizzare gli intervalli di input per $[0, 1]$.
2. Generare un punto di riferimento $\mathbf{X}_{\text{baseline}}$.
3. Perturbare una variabile di input alla volta per passo Δ, pur mantenendo gli altri costanti.
4. Compiti gli effetti elementari per ogni variabile come:

$$EE = \frac{f(\mathbf{X}_{+i}) - f(\mathbf{X})}{\Delta},$$

   dove $\mathbf{X}_{+i}$ è l'ingresso perturbato.
5. Ripetere per traiettorie multiple e risultati aggregati (strumento medio e standard) EE).

64.4.2 Indici di sensibilità basati sulla variazione del sobol

59 Gli indici Sobol forniscono una decomposizione globale della varianza di uscita per un modello

$$Y = g(X_1, \ldots, X_k), \tag{64.20}$$

in base alle condizioni standard di integrazione quadrata, la risposta può essere scritta come decomposizione funzionale dell'analisi-divarianza

$$g(\mathbf{X}) = g_0 + \sum_i g_i(X_i) + \sum_{i<j} g_{ij}(X_i, X_j) + \cdots + g_{1\cdots k}(X_1, \ldots, X_k), \tag{64.21}$$

e la varianza si decompone in contributi ortogonali,

$$V(Y) = \sum_i V_i + \sum_{i<j} V_{ij} + \cdots + V_{1\cdots k}. \tag{64.22}$$

Questa decomposizione è la base degli indici di sensibilità globali presentati da Sobol', 2001.

64.4.2.1 Indici di primo ordine

60 Il contributo di primo ordine dell'ingresso X_i is

$$V_i = \mathrm{Var}_{X_i}(\mathbb{E}[Y \mid X_i]), \tag{64.23}$$

e il suo indice Sobol normalizzato è

$$S_i = \frac{V_i}{V(Y)}. \tag{64.24}$$

Così S_i è la frazione di variazione di uscita spiegata cambiando X_i da solo, mediamente sulle distribuzioni di tutti gli altri input. Se $S_i = 0.60$, l'effetto principale X_i conti per 60% della varianza di uscita.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

64.4.2.2 Indici di interazione e effetto totale

61 Indice di secondo ordine $S_{ij} = V_{ij}/V(Y)$ misure varianza causata dall'interazione di X_i e X_j che non è già attribuito a entrambi gli effetti principali. Gli indici di ordine superiore sono definiti allo stesso modo.

$$\sum_i S_i + \sum_{i<j} S_{ij} + \cdots + S_{1\cdots k} = 1. \tag{64.25}$$

Di conseguenza, $1 - \sum_i S_i$ è il contributo combinato di tutte le interazioni.

62 L'indice di effetto totale raccoglie ogni termine di variazione che coinvolge X_i:

$$S_{T_i} = 1 - \frac{\mathrm{Var}_{\mathbf{X}_{\sim i}}(\mathbb{E}[Y \mid \mathbf{X}_{\sim i}])}{V(Y)} \tag{64.26}$$

$$= \frac{\mathbb{E}_{\mathbf{X}_{\sim i}}\left(\mathrm{Var}_{X_i}[Y \mid \mathbf{X}_{\sim i}]\right)}{V(Y)}, \tag{64.27}$$

dove $\mathbf{X}_{\sim i}$ denota tutti gli input tranne X_i. La differenza $S_{T_i} - S_i$ misure di misura in cui X_i partecipa alle interazioni.

64.4.2.3 Interpretazione

- Un grande S_i indica un forte effetto diretto.
- Un grande S_{T_i} con un piccolo S_i indica che la variabile conta principalmente attraverso le interazioni.
- If S_{T_i} è vicino a zero, X_i di solito può essere fissato ovunque all'interno della sua distribuzione prescritta con poco effetto sulla variazione di uscita.
- Se la somma degli indici di primo ordine è vicina a uno, il modello è quasi additivo sul dominio indagato.

64.4.2.4 Computazione e costo

63 Gli indici Sobol sono comunemente stimati con matrici di campionamento abbinate e valutazioni "pick-freeze'. $N(k+2)$ valutazione del modello per stimare tutti gli indici di primo ordine e effetto totale per k ingressi; stimare tutti gli indici di secondo ordine aumenta generalmente il costo a circa $N(2k+2)$ (Saltelli, 2002). Poiché gli indici sono essi stessi Monte Carlo stima, la convergenza dovrebbe essere controllata e intervalli di fiducia deve essere segnalato quando possibile.

64 Il metodo può diventare proibitivo quando ogni analisi non lineare degli elementi finiti è costoso. I modelli di surrogati, le espansioni del caos polinomiale o i modelli di ordine ridotto possono essere montati prima, con gli indici Sobol valutati sul surrogato dopo la sua precisione predittiva è stata verificata.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

64.4.2.5 Relazione con la proiezione di Morris

65 I metodi Morris e Sobol rispondono a domande correlate ma diverse. Morris è principalmente un metodo di screening: con $r(k+1)$ valutazioni che classifica gli input utilizzando μ_i^* e indica possibili non linearità o interazioni attraverso σ_i. L'analisi di Sobol è una decomposizione quantitativa della varianza: separa i contributi diretti e totali ma richiede solitamente più valutazioni. Una sequenza pratica è quindi quella di utilizzare Morris per rimuovere gli input trascurabili e poi applicare l'analisi Sobol al set ridotto.

66 La classica decomposizione in Equazione 64.22 Con ingressi correlati, gli effetti principali e di interazione non sono più separati da una classica decomposizione ANOVA. Indici condizionali o raggruppati, o misure di allocazione come gli effetti Shapley, dovrebbero quindi essere considerati; al minimo, il modello di dipendenza deve essere dichiarato esplicitamente.

64.4.3 Confronto dei metodi di propaganda e sensibilità

67 Tabella 64.4 I modelli di campionamento come LHS possono sostenere sia il compito, ma non sono misure di sensibilità da soli.

Tabella 64.4: Confronto tra metodi di incertezza-propagazione e sensibilità

Metodo	ruolo primario	Costo tipico	Interazioni	Limitazioni principali
Pianura Monte Carlo	Incertezze di uscita	N valutazioni	Catturato implicitamente	Convergenza statistica lenta per modelli costosi
L'ho fatto.	Progettazione di campionamento per UQ o SA	N valutazioni	Catturato attraverso il modello valutato	Il guadagno di efficienza dipende dal trattamento della risposta e della dipendenza
TSFD/OAT di primo ordine	Propagazione locale e classifica	$2k+1$ valutazioni	Non risolti	Valido solo vicino alla linea di base; debole per la forte non linearità
Design angolare di due livelli	Momenti di uscita approssimativi	2^k valutazioni	Incluso in angoli campionati	Crescita esponenziale e rappresentazione a due livelli greggio
Morris.	Proiezione globale	$r(k+1)$ valutazioni	Indicato congiuntamente con la non linearità attraverso σ_i	Non allocare i contributi di interazione separati
Sobolle	Decomposizione globale della varianza	Arrosto $N(k+2)$ per indici primi e totali	Quantificato attraverso gli effetti primi, superiori e totali	Costo computazionale elevato; forma classica assume input indipendenti

64.4.4 Determinazione delle variabili casuali importanti

68 La proiezione standard di Morris è solitamente interpretata attraverso μ_i^* e σ_i. La procedura radiale modificata utilizzata nell'esempio seguente introduce una regola di

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

sollecito aggiuntivo (Gakuhari, 2021). Poiché questa regola è specifica per tale procedura, non dovrebbe essere presentata come parte del metodo universale Morris.

[69] Lasciamo perdere. M_i^* essere il più grande effetto elementare assoluto osservato per RV i. Ad ogni aggiornamento:

1. Ordinare M_i^* valori in ordine crescente e definire lacune adiacenti $d_j = M^*_{(j+1)} - M^*_{(j)}$.
2. Lasciamo perdere. $d^{(q)}_{\max} = \max_j d_j$ dopo l'aggiornamento qContinuare l'inizializzazione fino a tre valori consecutivi soddisfano

$$\min\left(d^{(q-2)}_{\max}, d^{(q-1)}_{\max}, d^{(q)}_{\max}\right) \geq \frac{1}{2}\max\left(d^{(q-2)}_{\max}, d^{(q-1)}_{\max}, d^{(q)}_{\max}\right). \tag{64.28}$$

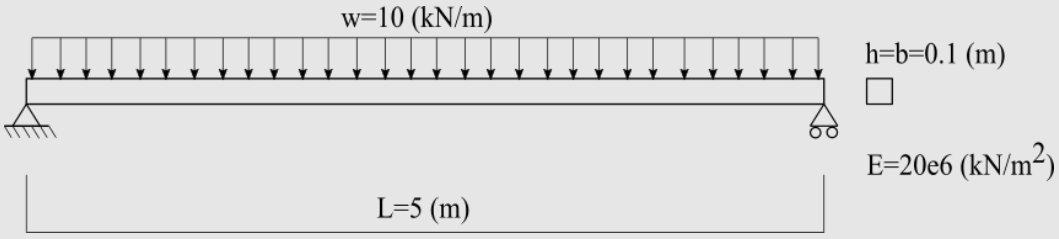
3. Dopo l'inizializzazione, eseguire la scansione dei valori ordinati dalla fine della sensibilità bassa e posizionare la soglia al primo gap adiacente soddisfacendo $d_j \geq d_{\max}/10$. Le variabili al di sopra della soglia sono classificate provvisoriamente come importanti.
4. Ricomputare gli effetti elementari per le variabili sotto la soglia. Se la classificazione cambia, ripristinare la variabile appena ammessa e ripetere l'aggiornamento precedente.

64.4.4.1 Ex 64.7: Metodo Morris; identificazione di variabili importanti

Da Gakuhari, 2021

La procedura a punto radiale modificata è illustrata con un fascio semplicemente supportato sottoposto ad un carico uniformemente distribuito.

Il carico uniforme w, lunghezza del fascio L, e altezza sezione h sono trattati come RV1, RV2, e RV3, rispettivamente. Ciascuna è assegnata una distribuzione normale con un coefficiente di variazione di 10%, e la massima esecuzione M_i^* degli effetti elementari assoluti sono valutati.



Poiché l'output di questa analisi è la deformazione verticale al centro del fascio, l'impatto di ogni RV può essere valutato in anticipo dalle seguenti equazioni:

COPIA DI REVISIONE

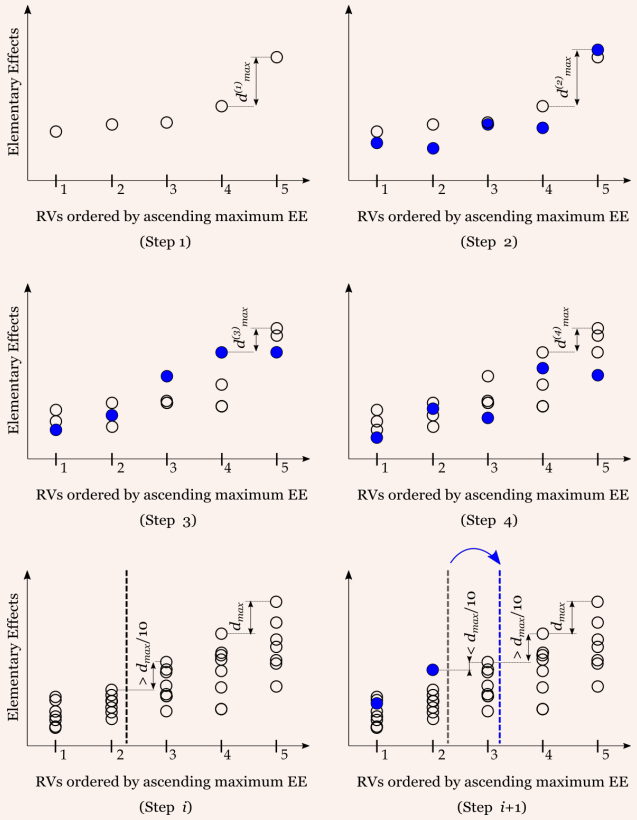


Figura 64.8: Inizializzazione e post-inizializzazione nella procedura di screening a punti radiali modificati

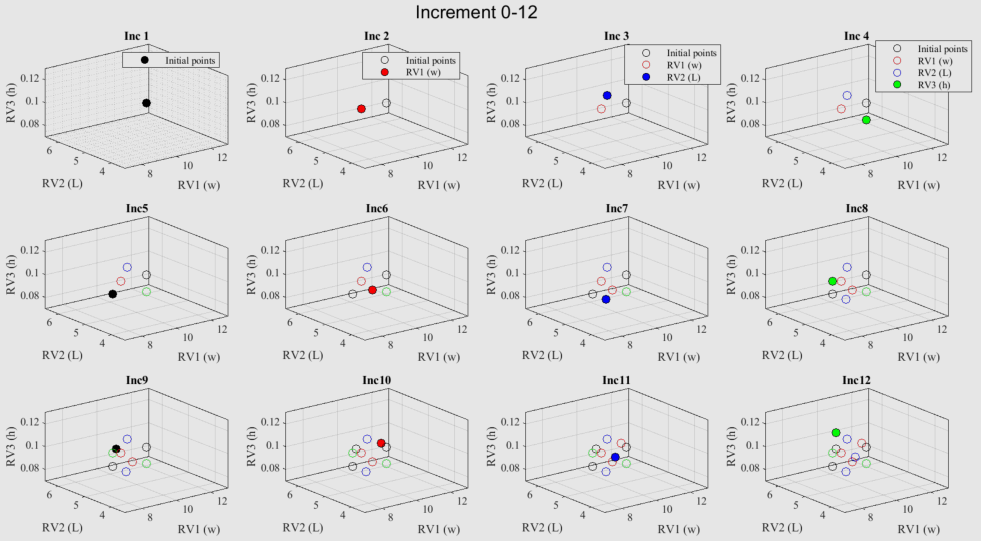
$$
\begin{aligned}
I &= \frac{bh^3}{12} \\
\delta &= \frac{5wL^4}{384EI} \\
&= \frac{5wL^4}{32Ebh^3}
\end{aligned}
\tag{64.29}
$$

Gli esponenti analitici anticipano la classifica: L (RV2) dovrebbe dominare perché $\delta \propto L^4$, seguito da h (RV3), per cui $\delta \propto h^{-3}$. Il carico w (RV1) entra lineare.

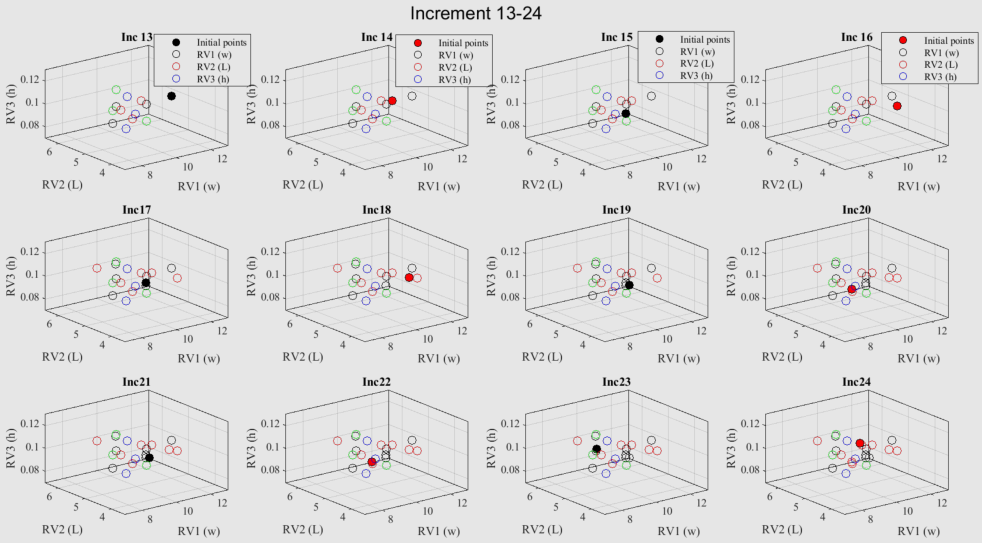
I pannelli sottostanti mostrano, in quantile spazio $[0, 1]$, i punti selezionati in successive valutazioni di effetto elementare. Ogni riga di inizializzazione aggiunge un centro e tre punti radiali, producendo un effetto elementario per ogni RV. Tre tali aggiornamenti forniscono $d_{\max}^{(1)}$, $d_{\max}^{(2)}$e $d_{\max}^{(3)}$. Perché la condizione di stabilità in Equation 64.28 è soddisfatto, l'inizializzazione termina all'incremento 12 e RV2 e Rv3 sono provvisoriamente classificati come importanti.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Inizializzazione

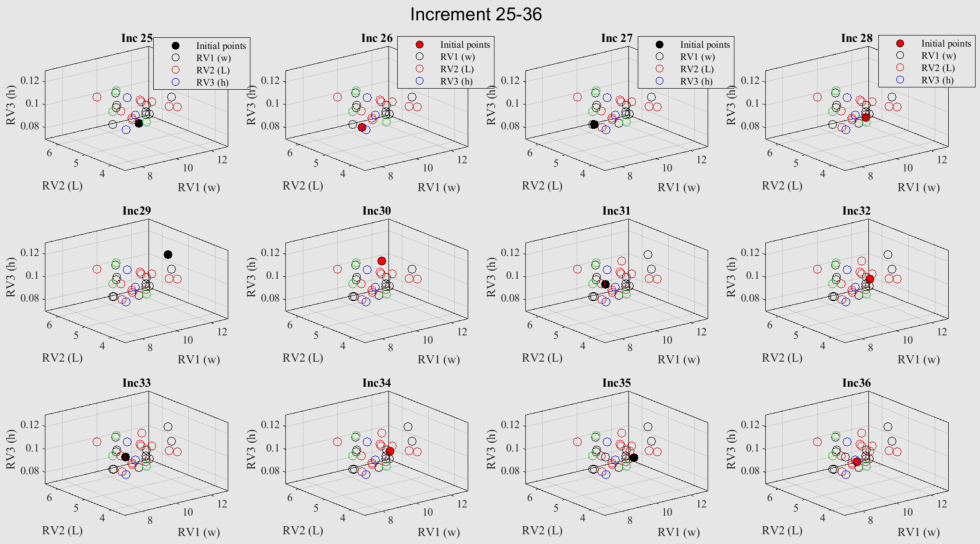


Post-initializzazione (RV2 e RV3 sono fissi)

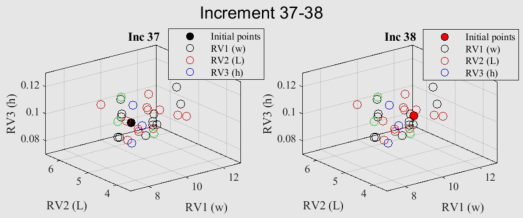
I RV selezionati nel loro spazio quantile (Inc=0-24)

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Post-initializzazione (RV2 e RV3 sono fissi)



Post-initializzazione (RV2 e RV3 sono fissi)

I RV selezionati nel loro spazio quantile (Inc=25-38)

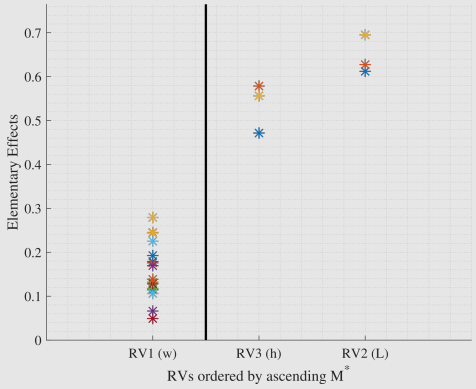
Dopo l'inizializzazione, RV2 e RV3 rimangono nel set importante; le successive valutazioni post-initializzazione si concentrano su RV1 per determinare se la sua classificazione cambia.

Il bilancio prescritti è $(n_{\text{RV}} + 1) \times 10 = 40$ valutazioni degli effetti elementari (Sohier, Farges e Piet-Lahanier, 2014). Poiché le due valutazioni finali di programma corrispondono a RV2 e RV3, che sono già state conservate, non si ottengono ulteriori informazioni di classificazione da loro e la procedura illustrata si ferma all'incremento 38.

La classifica risultante concorda con l'Equation 64.29: la lunghezza del fascio ha la più grande influenza sullo spostamento, seguita dall'altezza della sezione, mentre il carico uniformemente distribuito ha la minore influenza basata sugli esponenti rispetto a intervalli relativi comparabili.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Risultati del test di sobrietà.

64.4.5 Diagrammi di Tornado

70 Un diagramma del tornado è un riassunto grafico di uno studio prescritti a tempo pieno. Per ogni input, il modello viene valutato in valori bassi e alti selezionati mentre tutti gli altri input rimangono alla base. L'intervallo di uscita risultante viene tracciato come una barra orizzontale, e le barre sono ordinati per lunghezza.

71 I diagrammi Tornado sono facili da spiegare e utili per la proiezione preliminare, ma sono locali alla linea base selezionata e agli intervalli. Non rivelano da soli interazioni, e la loro classifica può cambiare quando l'intervallo di base o perturbazione cambia. μ^*–σ trama, mentre i risultati Sobol vengono visualizzati come indici di primo ordine e effetto totale; un grafico a barre può riassumere sia, ma dovrebbe essere etichettato secondo la misura sottostante.

72 Figura 64.9 mostra un caso in cui solo le prime sei variabili hanno una influenza materiale sotto la regola di perturbazione adottata, che può supportare una riduzione del parametro impostato prima dell'inizio dell'analisi inversa.

64.5 Dall'analisi della sensibilità all'identificazione del parametro

73 L'analisi della sensibilità identifica quali parametri possono cambiare le previsioni; l'identificazione dei parametri chiede quali valori di tali parametri sono supportati dalle misurazioni. Un parametro con sensibilità totale trascurabile non può essere identificato solitamente dalla risposta selezionata, indipendentemente da quanto sofisticato l'ottimizzatore. Al contrario, un parametro altamente sensibile può ancora essere difficile da

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

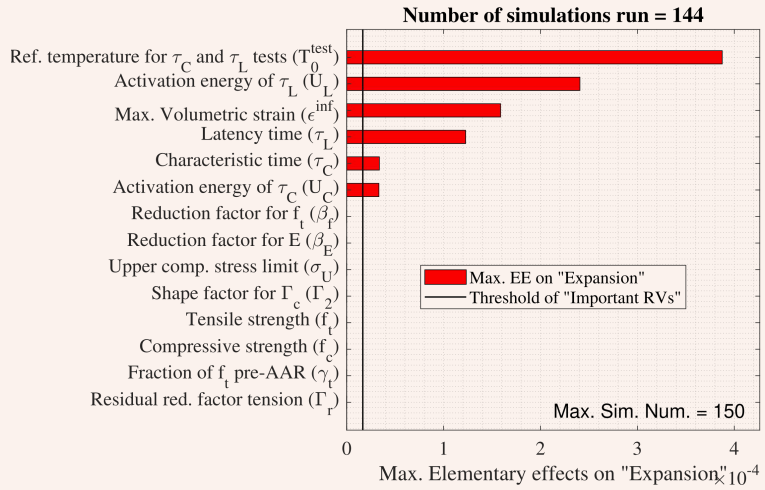


Figura 64.9: Esempio di valutazione della sensibilità (Gakuhari, 2021)

identificare se il suo effetto è quasi indistinguibile da quello di un altro parametro, Fig. 64.10.

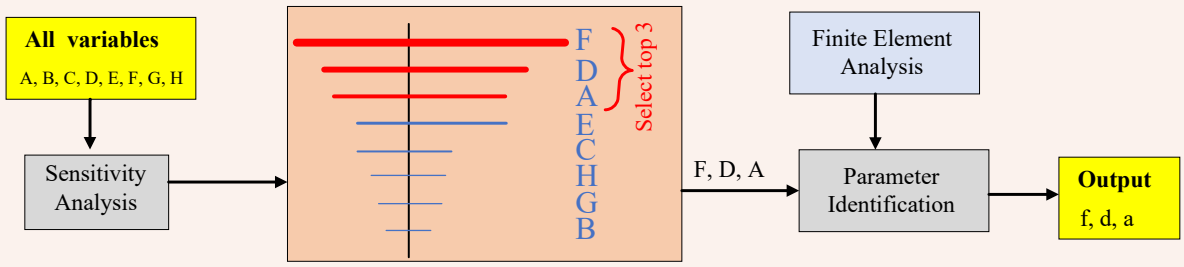


Figura 64.10: L'analisi della sensibilità identifica i parametri del candidato; l'identificazione dei parametri determina i valori sostenuti dalle osservazioni

74 La sequenza pratica è quindi:

1. definire le quantità di interesse e gli intervalli dei parametri plausbili;
2. schermare i parametri e conservare quelli con l'influenza materiale;
3. esaminare se i parametri conservati hanno firme di risposta differenziabili;
4. identificare solo il sottoinsieme defensibile, durante la fissazione, raggruppamento o regolarizzazione del resto.

75 Capitolo 65 Esso formula meno quadrati non lineari, esamina identifiabilità e discrepanza modello, e confronta Levenberg–Marquardt, RANSAC e approcci Bayesian. Il presente capitolo si conclude quindi quando inizia il problema della decisione: con un insieme di

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 64.5: ruoli distinti ma complementari di analisi della sensibilità e identificazione dei parametri

Aspetti	Analisi della sensibilità	Identificazione del parametro
Domanda	Quali input possono cambiare materialmente le uscite selezionate?	Quali valori di parametro sono supportati dalle osservazioni?
Informazioni utilizzate	Gamma plausibili o distribuzioni e modello in avanti	Misure, modello residuo e modello in avanti
Risultato principale	Attribuzione di classificazione, screening o varianza	Valori dei parametri calibrati e loro incertezza o diagnostica
Avvertenza di errore	Un parametro insensibile non può essere imparato dalla risposta scelta	Un parametro sensibile può rimanere non identifiable quando gli effetti sono confondati

parametri ridotto e fisicamente significativo, ed una descrizione esplicita dell'incertezza che rimane.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 65

Decisioni: Metodi di identificazione del parametro

Abstract

Capitolo 64 ha stabilito come gli input incerti sono caratterizzati e propagati attraverso modelli computazionali, e come la loro influenza è classificata tramite analisi della sensibilità. determinare i valori dei parametri supportati da osservazioni e quantificare la fiducia che dovrebbe essere posto in loro.

Il capitolo formula meno quadrati non lineari ponderati e spiega identifiabilità, scaling, limiti, regolarizzazione, discrepanza modello, calibrazione e validazione. Poi confronta Levenberg-Marquardt ottimizzazione, RANSAC per i dati contaminati da grossi outliers e inferenza Bayesiana per l'incertezza dei parametri posteriori. Un manuale completo MATLAB–Finite Element Analysis traduci la teoria in un flusso di lavoro finito di elementi a foglio di calcolo. La sezione finale integra le parti A e B e i ponti ai capitoli successivi che portano alla Performance-Based Earthquake Engineering (PBEE).

65.1 Identificazione del parametro come problema inverso 2229
65.2 Applicazioni e Quadro delle decision2230
65.2.1 Dall'analisi della sensibilità all'identificazione del parametro 2231
65.2.2 Quadro di decisione: quale metodo quando? 2231
65.3 Qualità dei dati e robustezza 2231
65.3.1 Fonti di contaminazione dei dati 2231
65.3.2 Stima coerente del consenso: RANSAC 2232
65.4 Il Levenberg...Marquardt Algorithm 2236
65.4.1 Modelli e selezione dei modelli 2236
65.4.2 Pesato non lineare Piazze di latta 2236
65.4.3 Levenberg–Marquardt Aggiornamento Passo e Intuizione Algoritmo 2237
65.4.4 Ex 65.1: Fissare un modello iperbolico non lineare . . 2237
65.4.5 Scala, bobine e regolarizzazione 2240
65.4.6 Identità 2240
65.4.7 Modello di discrepanza . . . 2242
65.5 Identificazione del Parametro Bayesian 2242

COPIA DI REVISIONE

65.5.1 Identificazione del parametro Bayesian: Setup 2243
65.5.2 Valutazione MAP e Stime Point 2243
65.5.3 Sampling posterior e MCMC per parametri 2244
65.5.4 Ex 65.2: Risalto Bayesiano con una Baside Quadratica e Metropolis–Hastings Sampling 2244
65.5.5 Esempio di lavoro: Inferenza baieana per i parametri di degradazione 2245
65.5.6 Quando usare l'identificazione baiesca 2246
65.6 Il Levenberg - Marquardt Algorithm in pratica 2246
65.6.1 Pratica di minimo-quares . . 2248
65.7 Flussi ibridi di lavoro e migliori pratiche 2257
65.7.1 Calibrazione e convalida . . 2257
65.7.2 Applicazioni strutturali . . . 2257
65.7.3 Quadro di decisione del flusso di lavoro 2257
65.8 Ponte a Performance Basato su Terremoto Ingegneria 2258

65.1 Identificazione del parametro come problema inverso

1 L'identificazione del parametro è fondamentale per diverse applicazioni chiave: (i) *Calibrazione del modello*—allineare i modelli di elementi finiti con risultati sperimentali ottenuti da prove di laboratorio o di campo; *Monitoraggio della salute strutturale*— ottimizzare i modelli di elementi finiti per soddisfare i dati dei sensori e monitorare le modifiche nel tempo; *Determinazione del modello di domanda*— la creazione di modelli sismici di domanda per il design basato sulle prestazioni (cfr. §68.5).

Il flusso di lavoro dell'identificazione del parametro

2 Il processo di identificazione dei parametri segue un flusso di lavoro iterativo e basato sui dati illustrato in Figura 65.1. I passi chiave sono:

1. **Impostazione iniziale:** Ottenere risultati di laboratorio o campo (misure), e stabilire un insieme iniziale dei valori dei parametri $\mathbf{x}_0$ basato su conoscenze, standard di progettazione o letteratura precedenti.
2. **Valutazione del modello:** Eseguire un'analisi degli elementi finiti (FE) utilizzando i valori dei parametri attuali per ottenere le previsioni del modello.
3. **Valutazione degli errori:** Confrontare le previsioni del modello contro le misurazioni di laboratorio/campo calcolando i residui (errori). La norma residua quantifica quanto bene siano i parametri attuali che si adattano ai dati.
4. **Controllo di convergenza:** Se i residui sono accettabilmente piccoli (dati di corrispondenza del modello), si bloccano—i parametri vengono identificati.
5. **Aggiornamento del parametro:** Utilizzare un algoritmo di ottimizzazione per calcolare i valori dei parametri migliorati $\mathbf{x}_{new}$ che dovrebbe ridurre i residui.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

6. **Iterate:** Ritorna al passo 2 con i parametri aggiornati e ripeti fino alla convergenza.

3 Questo loop di feedback è l'essenza dell'identificazione dei parametri: il modello viene trattato come funzione $f(\mathbf{x})$ che mappa i parametri alle previsioni, e l'ottimizzazione viene utilizzato per trovare i valori dei parametri che meglio corrispondono osservazioni.

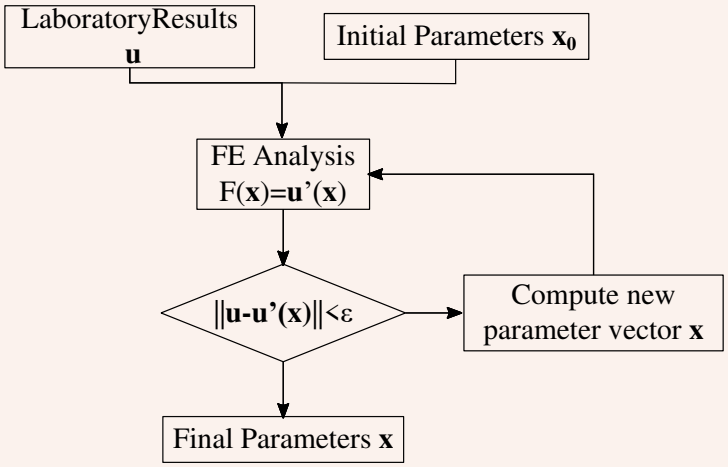


Figura 65.1: Principio dell'approccio di identificazione del sistema: raffinatezza iterativa dei parametri per minimizzare la discrepanza dei dati modello.

4 Matematicamente, lascia $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ contenere le misure e lasciare $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$ contengono le previsioni del modello corrispondente. Il vettore residuo è

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{y}. \tag{65.1}$$

5 Il problema inverso è difficile quando il modello non lineare, i dati sono radi o correlati, diverse combinazioni di parametri producono risposte simili, o le osservazioni contengono outliers o discorpia sistematica.

65.2 Applicazioni e Quadro delle decisioni

6 I tre domini applicativi sopra elencati—tabella del modello, monitoraggio della salute strutturale e determinazione della domanda sismica—condivide una struttura comune: le osservazioni devono informare i parametri sconosciuti che influiscono sulle previsioni. La scelta di quale metodo di stima dei parametri da utilizzare dipende dalla qualità dei dati, dal modello non linearità, dal bilancio computazionale e dalle conseguenze dell'incertezza.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

65.2.1 Dall'analisi della sensibilità all'identificazione del parametro

7 L'analisi della sensibilità è un prerequisito, non un sostituto, per l'identificazione. 64 identifica i parametri che possono influenzare le risposte selezionate. L'analisi inversa dovrebbe iniziare con quel set ridotto. I parametri con sensibilità totale trascurabile sono fissi; parametri con effetti quasi indistinguibili sono raggruppati, regolarizzati o informati da misure aggiuntive, che migliorano l'efficienza computazionale e l'interpretabilità.

65.2.2 Quadro di decisione: quale metodo quando?

8 Il presente capitolo illustra tre approcci:

Levenberg-Marquardt (Sezione 65.4): La scelta predefinita per la maggior parte dei problemi. Veloce, stabile e computazionalmente efficiente quando i dati sono in gran parte Gaussian. Produce una stima del punto e l'incertezza approssimativa dei parametri.

RANSAC (Sezione 65.3.2): Raccomandato quando gli outlier lordi sono sospettati o confermati. Identificare un consenso di dati in più prima di rifitting con meno quadrati. Robusto alla contaminazione che avrebbe fuso L-M.

Inferenza bavarese (§ 65.5): È essenziale quando è necessaria una piena incertezza posteriore per il processo decisionale. Computativamente più costoso, ma fornisce intervalli credibili, correlazioni posteriori e sensibilità alle presupposti precedenti.

9 Un flusso di lavoro pratico può combinare questi: utilizzare RANSAC per pulire i dati, applicare L-M per la calibrazione e la validazione iniziale, e impiegare l'inferenza Bayesian se l'incertezza dei parametri influisce materialmente sulle decisioni a valle.

65.3 Qualità dei dati e robustezza

65.3.1 Fonti di contaminazione dei dati

10 Misurazioni reali da laboratori e siti di campo contengono varie fonti di errore e contaminazione:

- **Rumore di misurazione:** Errori casuali, approssimativamente gaussiani inerenti a sensori e strumenti.
- **Bias sistemico:** Consistente offset o deriva nelle misurazioni a causa della calibrazione degli strumenti o effetti ambientali.
- **Disfunzione del sensore:** Insufficienza temporanea o permanente di uno strumento di monitoraggio, producendo letture erratiche o congelate.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

- **Grossi outliers:** Punti isolati causati da errori di inserimento dati, interferenze transitorie o guasti dell'attrezzatura.
- **Modello sbagliato:** Differenza sistemica tra predizioni e osservazioni del modello a causa di condizioni non modellate o limite.

11 Il rumore di misura gaussiano viene gestito naturalmente da meno quadrati (Sezione 65.4). Gli esteri e la contaminazione sistematica lorda richiedono metodi preprocessivi o robusti.

65.3.2 Stima coerente del consenso: RANSAC

12 Il Consenso del Campione Casuale (RANSAC) stima un modello da dati contaminati da outlier lordi (Fischler e Bolles, 1981)I parametri dei candidati sono montati su sottoinsiemi minimi o piccoli casuali; tutte le osservazioni vengono classificate con una soglia residua; il più forte insieme di consenso è mantenuto; e i parametri finali sono riadattati utilizzando tutti gli inlier accettati.

65.3.2.1 Algoritmo

1. Selezionare un sottoinsieme casuale abbastanza grande da stimare il modello.
2. Adattare un vettore di parametro candidato a quel sottoinsieme.
3. Compiti residui per l'insieme dei dati e classifica le osservazioni utilizzando una soglia specificata.
4. Punteggi il candidato da conteggio inlier e, se del caso, dalla qualità adatta all'interno del consenso impostato.
5. Ripetere per il numero di prove prescritti o adattativamente aggiornato.
6. Risolvere il modello utilizzando tutti gli inliers del miglior set di consenso.
7. Esclusi le osservazioni e testare la misura finale sui dati indipendenti.

13 Se la frazione di inlier è approssimativamente w, la dimensione minima del campione è s, e la probabilità desiderata di disegno almeno un sottoinsieme all-inlier è p, l'approssimazione della pianificazione familiare è

$$N \geq \frac{\log(1-p)}{\log(1-w^s)}. \tag{65.2}$$

Perché? w è inizialmente sconosciuto e le ipotesi di campionamento possono essere imperfette, il conteggio del processo dovrebbe essere aggiornato conservativamente come meglio i set di consenso sono trovati.

14 La soglia di inlier dovrebbe essere legata all'incertezza della misura o ad una stima robusta su scala, non selezionata semplicemente per massimizzare il numero dei punti accettati. non sostituisce un modello di probabilità per il rumore normale della misura.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Esempio di regressione lineare semplice

15 Un esempio di RANSAC applicato alla semplice regressione lineare è mostrato in Figura 65.2. L'algoritmo seleziona in modo iterativo sottoinsiemi casuali, si adatta a ciascuna delle linee e conta quanti punti di dati rientrano all'interno di una soglia definita dall'utente. La linea che cattura i più pinze è selezionata come il modello migliore.

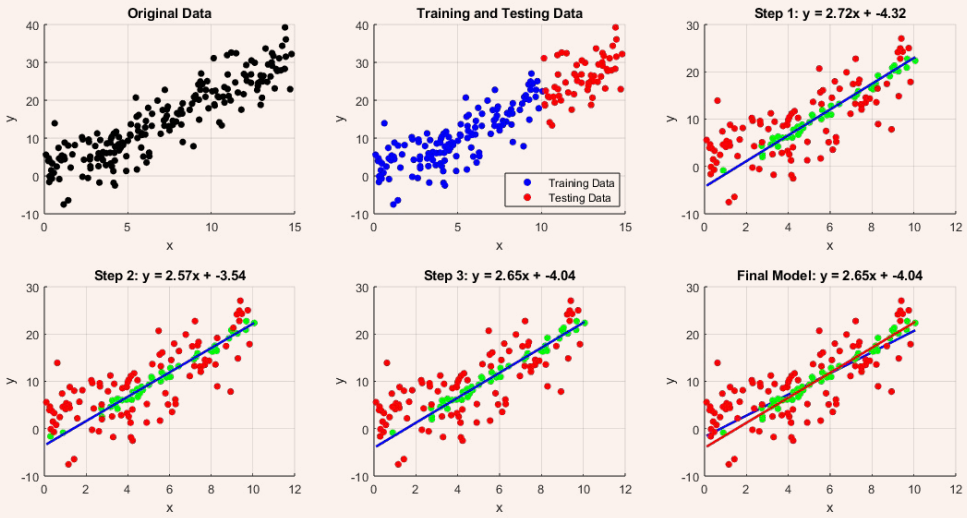


Figura 65.2: Esempio illustrativo di regressione lineare con RANSAC

Applicazione alla degradazione del calcestruzzo

16 Un esempio più pratico e dettagliato è mostrato in Figura 65.3, che dimostra RANSAC applicato per identificare i modelli di degrado primi principi in nuclei concreti recuperati da un sito. L'obiettivo è quello di stimare i parametri di una funzione analitica che disciplina il deterioramento del cemento dovuto alla reazione alcali-aggregata (AAR).

17 Dai nuclei di campo recuperati alla Diga Seminoe, modulo elastico (E), resistenza alla trazione (f_t), e resistenza alla compressione (f_c') sono stati misurati a diverse profondità e età, l'obiettivo era quello di adattare un modello primo-principio a questi dati di degradazione mentre filtrava il rumore di misurazione e gli outlier sperimentali.

18 La quantità di interesse (QoI)—proprietà del calcestruzzo degradato—segue:

$$\frac{\text{QoI}}{\text{QoI}_0}(d,t) = 1 - f(d) \cdot D(t) \tag{65.3}$$

dove QoI_0 è il valore iniziale (inondato) di proprietà concreta, $D(t)$ è danno normalizzato come funzione di tempo te $f(d)$ è un fattore di correzione che rappresenta la variazione dei danni dipendente dalla profondità nella diga.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

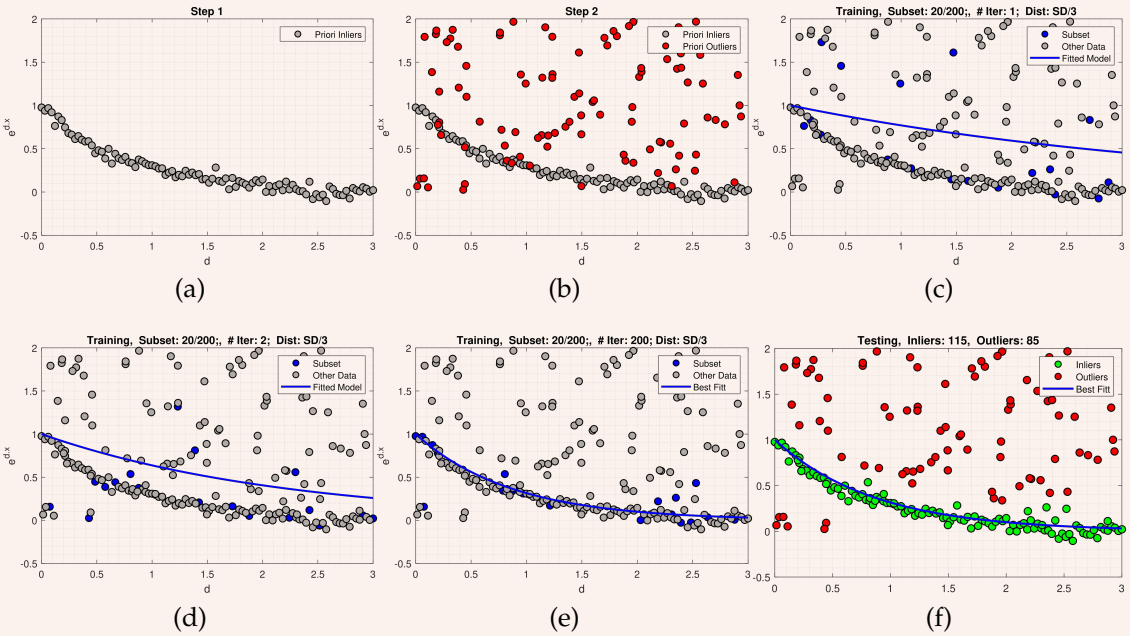


Figura 65.3: RANSAC applicato al degrado concreto: studio caso (Gakuhari, 2021)

19 Il fattore di profondità è modellato come:

$$f(d) = A \cdot d + B \tag{65.4}$$

con parametri A e B rappresentando progressione di danni dipendente dalla profondità.

20 Per danni a tempo dipendente, due modelli in prima linea concorrenti sono stati considerati basati sulla cinetica AAR:

$$D(t)|_{\text{Model 1}} = (1-\beta)\frac{(1-e^{-t/\tau_C})}{1+e^{(\tau_L - t)/\tau_C}} \tag{65.5}$$

or:

$$D(t)|_{\text{Model 2}} = (1-\beta)\frac{\int_0^t \frac{(1-e^{-s/\tau_C})}{1+e^{(\tau_L - s)/\tau_C}} ds}{\int_0^{t_{\text{end}}} \frac{(1-e^{-s/\tau_C})}{1+e^{(\tau_L - s)/\tau_C}} ds} \tag{65.6}$$

dove τ_C è il tempo caratteristico, τ_L è il periodo di latenza, e β rappresenta danni asintotici a lungo termine.

21 **Il processo RANSAC:**

22 Poiché le misurazioni sul campo da dighe coprono molti anni e più sedi di coring, i dati contengono inevitabilmente errori di misura e possono contenere outlier. La maggior parte

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dei punti dovrebbe, in linea di principio, adattarsi al modello AAR primo-principio se solo gli outlier potessero essere identificati e rimossi. la revisione ingegneristica è ancora richiesta prima che i punti esclusi siano trattati come invalidi.

Fase di ricerca del consenso:
- **Inizializzazione:** L'utente specifica il numero di iterazioni N, dimensione del campione n per iterazione e soglia di tolleranza agli errori (ETT).
- I dati sul campo (profondità, età, proprietà concrete) sono caricati.
- Loop attraverso N iterazioni: Per ogni iterazione, selezionare casualmente n punti di dati.
- Adattare il modello di degrado AAR al n-Punto sottoset.
- Punteggio: Conta quanti punti di dati totali hanno magnitudine residue sotto la soglia di tolleranza agli errori (ETT).
- Dopo N iterations, mantieni il modello con la punteggio più alto (la maggior parte dei pinze).

Classificazione e rifinanziamento fase:
- Selezionare il modello di punteggio più alto ottenuto durante la ricerca del consenso.
- Utilizzando questo modello migliore, classificare tutti i punti di dati come inlier o outliers.
- Risolvi i parametri utilizzando tutti gli inlier identificati, e esamina le osservazioni escluse prima di scartarle definitivamente.

23 **Insight critico:** Per questa applicazione di degrado concreto, un modello basato sulla fisica dà al criterio inlier una interpretazione ingegneristica defensibile: si giudica un punto contro un meccanismo di degradazione previsto piuttosto che contro una curva flessibile arbitraria. RANSAC può essere applicato anche a modelli empirici e data-driven, ma un modello eccessivamente flessibile può assorbire la contaminazione invece di esponerla, ed l'estrapolazione rimane particolarmente pericolosa.

24 Una volta individuato il miglior set di pinze, i parametri (A, B, τ_C, τ_L, β) sono raffinati utilizzando regressioni convenzionali meno quadrate solo sui dati inlier, fornendo stime che sono meno influenzate dalla contaminazione lorda esclusa.

25 RANSAC è particolarmente importante nel monitoraggio della salute strutturale dell'infrastruttura di invecchiamento, perché i dati reali dei sensori e le misurazioni sperimentali contengono spesso letture spurie, guasti dei sensori ed errori transitori. Proponendo un consenso riproducibile per la revisione ingegneristica, RANSAC può ridurre l'influenza delle letture gravemente danneggiate; non dimostra che ogni osservazione esclusa è errata.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

65.4 Il Levenberg...Marquardt Algorithm

26 L'algoritmo Levenberg–Marquardt (L-M) è il cava di lavoro del parametro Identificazione in pratica. Combina elementi di Gauss–Ottimizzazione Newton e discesa gradiente, rendendolo robusto su una vasta gamma di non linearità mentre rimane efficiente computazionalmente. Il suo parametro di smorzamento adattivo si regola automaticamente tra convergenza veloce vicino a una soluzione e cauto passi in un terreno difficile – un equilibrio che ha reso la scelta predefinita per problemi non lineari di minorquare nell'ingegneria strutturale, idrologia, scienza dei materiali, e molti altri campi.

27 Per la teoria algoritmica completa dei metodi e della convergenza di fiducia-regione analisi, vedi Appendice Q. Questa sezione sviluppa la formulazione pratica: come impostare l'obiettivo ponderato, gestire la scala e limiti, diagnosticare identifiabilità ed estrarre l'incertezza dei parametri dal ravvicinamento della covarianza locale. Un esempio di iperbola-fitting lavorato illustra l'algoritmo in azione.

65.4.1 Modelli e selezione dei modelli

28 L'identificazione del parametro inizia con una scelta della classe di modello:

Modelli basati sulla fisica: derivato da meccanica, termodinamica, trasporti o cinetica. I loro parametri hanno tipicamente significato fisico, che supporta l'estrapolazione e l'interpretazione ingegneristica, ma la discrepanza del modello può rimanere.

Modelli azionati da dati: inferiscono una relazione funzionale dalle osservazioni con struttura fisica limitata, che può adattarsi efficacemente a tendenze complesse ma sono vulnerabili all'estrapolazione e possono richiedere più dati.

Modelli ibridi: combinare un core fisico con una correzione empirica, surrogato o termine discrepanza. Possono migliorare le previsioni mantenendo i vincoli fisici, a condizione che i ruoli dei due componenti siano identificabili.

29 Per una determinata applicazione, la scelta di modelli di classe vincoli quali parametri sono stimabili dai dati disponibili. Un modello con troppi gradi di libertà rispetto ai dati soffrirà di debole identifiabilità; un modello con troppi pochi possono ignorare la fisica importante e produrre bias (modello discrepanza).

65.4.2 Pesato non lineare Piazze di latta

30 I quadrati non lineari ordinari minimi minimi minimi

$$\Phi(\theta) = \frac{1}{2}\mathbf{r}^T\mathbf{r}. \tag{65.7}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Quando le misurazioni hanno unità diverse, varianze o correlazioni, l'obiettivo defensibile è ponderato meno quadrati,

$$\Phi_W(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\mathbf{r}^T\mathbf{W}\mathbf{r}, \qquad \mathbf{W} = \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1}, \tag{65.8}$$

dove $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon$ è la matrice di covarianza-error. Con osservazioni indipendenti delle deviazioni standard s_i, questo equivale a minimizzare i residui normalizzati r_i/s_i. ponderazione numerica arbitraria dovrebbe essere evitato perché cambia silenziosamente il significato di ingegneria della misura.

65.4.3 Levenberg–Marquardt Aggiornamento Passo e Intuizione Algoritmo

31 Con Jacobian $\mathbf{J} = \partial\mathbf{r}/\partial\boldsymbol{\theta}$Il passo Levenberg... Marquardt risolve

$$\left(\mathbf{J}^T\mathbf{W}\mathbf{J} + \lambda\mathbf{D}\right)\Delta\boldsymbol{\theta} = -\mathbf{J}^T\mathbf{W}\mathbf{r}, \tag{65.9}$$

dove λ controlli di smorzamento e $\mathbf{D}$ fornisce scaling.

32 **Intuito algoritmo:** Il parametro di smorzamento λ controlla l'efficace regione di fiducia, ma non è esso stesso il raggio della regione trust. λ produce un passo breve e fortemente umido, che corrisponde qualitativamente ad una piccola regione di fiducia; quando $\mathbf{D}$ è diagonale e positivo, la direzione diventa gradiente-come dopo la scalata. λ diminuisce, il passo si avvicina al passo Gauss–Newton e può convergere rapidamente vicino a un minimo ben-assumibile. La convergenza Quadratica è possibile solo in condizioni favorevoli aggiuntive e non deve essere assunta generalmente. L'algoritmo rimane locale e può convergere a diverse soluzioni da diversi punti di partenza.

65.4.4 Ex 65.1: Fissare un modello iperbolico non lineare

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Questo esempio è volutamente abbastanza piccolo da riprodursi a mano o con un poche linee di MATLAB®, ma è veramente non lineare in uno dei suoi sconosciuti parametri. Considerare il modello

$$g(x;\boldsymbol{\theta}) = \frac{a}{b+x}, \qquad \boldsymbol{\theta} = [a,b]^T, \qquad a > 0, \quad b > 0. \tag{65.10}$$

A differenza di un polinomio lineare nei suoi coefficienti, questo modello è non lineare in b, e il suo giacobino cambia così come le iterazioni Procedi.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Dati sintetici e Convenzione Residenziale

Per l'auditability, le osservazioni sono generate esattamente da

$$\boldsymbol{\theta}_\star = [6, 2]^T$$

in cinque posizioni $x_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Così,

x_i	0	1	2	3	4
$y_i = 6/(2 + x_i)$	3.000000	2.000000	1.500000	1.200000	1.000000

Non viene aggiunto alcun rumore di misura in questo esempio pedagogico, quindi il minimo obiettivo è esattamente zero in aritmetica esatta. Con dati rumorosi reali, la stima di meno-quares non coinciderebbe generalmente esattamente con il parametri utilizzati per generare la risposta senza rumore sottostante.

Nel corso dell'esempio, definire

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{y}, \qquad \Phi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\mathbf{r}^T\mathbf{r}, \tag{65.11}$$

che non sia

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\theta}}.$$

Per ogni osservazione,

$$\frac{\partial g_i}{\partial a} = \frac{1}{b + x_i}, \qquad \frac{\partial g_i}{\partial b} = -\frac{a}{(b + x_i)^2}.$$

Regola di punto e smorzamento iniziale

Iniziare da

$$\boldsymbol{\theta}_0 = [4, 1]^T, \qquad \lambda_1 = 10^{-2},$$

e utilizzare Marquardt scaling

$$\mathbf{D}_k = \operatorname{diag}\left(\mathbf{J}_k^T\mathbf{J}_k\right).$$

In ogni processo, risolvere

$$\left(\mathbf{J}_k^T\mathbf{J}_k + \lambda_k\mathbf{D}_k\right)\Delta\boldsymbol{\theta}_k = -\mathbf{J}_k^T\mathbf{r}_k. \tag{65.12}$$

Se il punto di prova diminuisce Φ, accettarlo e impostare $\lambda_{k+1} = \lambda_k/10$; altrimenti rifiutarlo, conservare l'attuale parametri, e set $\lambda_k \leftarrow 10\lambda_k$ prima di ricomputare fase di prova. Questa regola semplice fattore-of-ten viene utilizzato solo per fare l'esempio trasparente. Le implementazioni di produzione usano comunemente il rapporto tra reale e riduzione prevista per aggiornare l'umidità più liscia.

Prima Iterazione in Pieno

At $\boldsymbol{\theta}_0 = [4, 1]^T$,

$$\mathbf{g}_0 = \begin{bmatrix} 4.000000 & 2.000000 & 1.333333 & 1.000000 & 0.800000 \end{bmatrix}^T,$$

e quindi

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} 1.000000 & 0 & -0.166667 & -0.200000 & -0.200000 \end{bmatrix}^T, \qquad \Phi_0 = 0.553888889.$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Il giacobino è

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} 1.000000 & -4.000000 \\ 0.500000 & -1.000000 \\ 0.333333 & -0.444444 \\ 0.250000 & -0.250000 \\ 0.200000 & -0.160000 \end{bmatrix}.$$

I prodotti richiesti sono

$$\mathbf{J}_0^T\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} 1.46361111 & -4.74264815 \\ -4.74264815 & 17.28563086 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{J}_0^T\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} 0.85444444 \\ -3.84392593 \end{bmatrix}.$$

Perché? $\mathbf{D}_0 = \text{diag}(1.46361111, 17.28563086)$ e $\lambda_1 = 0.01$, il primo sistema lineare è

$$\begin{bmatrix} 1.47824722 & -4.74264815 \\ -4.74264815 & 17.45848717 \end{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\theta}_0 = \begin{bmatrix} -0.85444444 \\ 3.84392593 \end{bmatrix}.$$

Risolvere i doni

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_0 = \begin{bmatrix} 0.99934608 \\ 0.49165043 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\theta}_1 = \begin{bmatrix} 4.99934608 \\ 1.49165043 \end{bmatrix}.$$

Al punto di prova accettato,

$$\Phi_1 = 0.071941238 < \Phi_0,$$

così il passo è accettato e il prossimo valore di smorzamento è $\lambda_2 = 10^{-3}$.

Esecuzioni successive

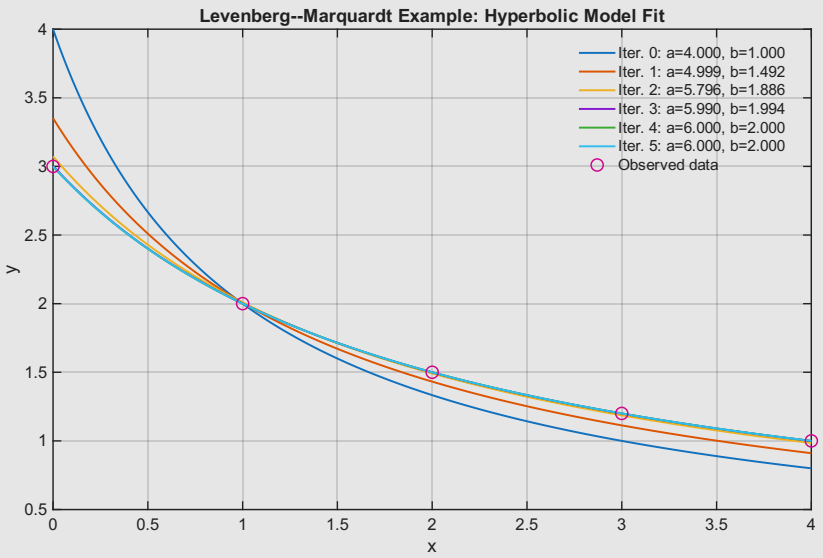
Rivalutare il residuo e giacobino ad ogni punto accettato dà tutti i calcoli sono stati effettuati in doppia precisione; i valori riportati sono arrotondate solo per la visualizzazione.

Indagine accettata	λ_k	a_k	b_k	$\Phi_k = \frac{1}{2}\mathbf{r}_k^T\mathbf{r}_k$
0	–	4.000000	1.000000	5.538889×10^{-1}
1	10^{-2}	4.999346	1.491650	7.194124×10^{-2}
2	10^{-3}	5.795603	1.885772	2.971964×10^{-3}
3	10^{-4}	5.990433	1.994207	8.259246×10^{-6}
4	10^{-5}	5.999974	1.999984	6.810857×10^{-11}
5	10^{-6}	6.000000	2.000000	2.295319×10^{-20}

Il giacobino cambia con b, confermando che questo è un vero e proprio problema non lineare di meno-quadrati. Gli iterates accettati si avvicinano all'esatto soluzione $\boldsymbol{\theta}_\star = [6, 2]^T$, e gli approcci obiettivi zero alla precisione della macchina. Una prova rifiutata lascerebbe il vettore dei parametri invariato e aumento λ prima che un nuovo passo fosse calcolato.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



A MATLAB®script che riproduce la tabella di iterazione è dato in Appendice I.5.1. Utilizza la stessa convenzione residua, matrice di scaling e regola d'umidificazione come derivazione sopra.

Tratta il contatore di registrazione accettato separatamente dal controverso di processo. Di conseguenza, un processo respinto aumenta λ e ricompute il passo senza falsamente avanzare la tabella di iterazione.

65.4.5 Scala, bobine e regolarizzazione

33 I parametri misurati su scale numeriche molto diverse dovrebbero essere prima di tutto non dimensionati o assegnati magnitudine rappresentative. I bound possono impedire i valori fisicamente impossibili, ma un parametro ripetutamente guidato a un limite può indicare dati inadeguati, scaling poveri o discorpanza modello piuttosto che identificazione di successo.

34 Per problemi individuati o meno, può essere utilizzato un obiettivo regolamentato:

$$\Phi_R(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\mathbf{r}^T\mathbf{W}\mathbf{r} + \frac{\alpha}{2}\left\|\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)\right\|_2^2 . \tag{65.13}$$

Il secondo termine penalizza la partenza da valori precedenti o di riferimento. La regolarizzazione seleziona una soluzione tra molti; non crea informazioni e la sua forza α deve essere segnalato.

65.4.6 Identità

35 *Identità strutturale* chiede se le osservazioni esatte, senza rumore potrebbero determinare in modo unico i parametri in linea di principio. *Identità pratica* chiede se le osservazioni disponibili rumorose e finite li determinano con precisione accettabile.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

36 Vicino a una soluzione candidato, l'identità pratica viene diagnosticata dal peso Jacobian $\mathbf{W}^{1/2}\mathbf{J}$:

- **Deficienza del rank:** Il rank meno del numero di parametri implica che almeno una combinazione dei parametri è localmente identificabile.
- **Piccoli valori singolari:** I valori singolari molto piccoli indicano indicazioni poco informate; i parametri corrispondenti sono scarsamente determinati.
- **Numero di grandi condizioni:** $\kappa = \sigma_{\max}/\sigma_{\min} > 10^6$ indica grave ill-condizionamento e identifiabilità debole.
- **Colonne giacobiche collineari:** Le colonne di collinari indicano parametri i cui effetti non possono essere distinti dai dati.
- **Correlazioni di parametri forti:** Correlazioni stimate > 0.95 indicare combinazioni di parametri compensanti; cambiarne uno per adattarsi ai dati richiede la modifica di un altro.

37 È quindi necessaria una piccola norma residua, ma non sufficiente: un modello può adattarsi alle osservazioni quasi esattamente mentre i singoli parametri rimangono non unitari. I rimedi includono l'aggiunta di tipi di risposta indipendenti, la modifica delle posizioni dei sensori o i percorsi di carico, il fissaggio dei parametri insenssibili, il raggruppamento dei parametri correlati, utilizzando regolarizzazione o precedenti informativi e ripetendo l'analisi da più punti di partenza.

38 Per i dati di laboratorio e sperimentali, questo processo può essere notevolmente facilitato dalla stima del consenso robusto (RANSAC, Sezione 65.3.2), che rimuove gli outlier lordi prima della stima dei parametri L-M.

65.4.6.1 Ravvicinamento dell'incertezza locale

39 Se il modello residuo è appropriato, la soluzione è interna e la linearizzazione è adeguata, una covarianza locale approssimazione è

$$\mathrm{Cov}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) \approx c \left(\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J}\right)^{-1}, \tag{65.14}$$

40 Quando $\mathbf{W} = \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1}$ è la matrice di precisione assoluta conosciuta (varianti di misura), $c = 1$ e la covarianza è adeguatamente scalata. Quando $\mathbf{W}$ contiene solo pesi relativi (ad esempio, inversa dei valori nominali), c è comunemente stimato come la variazione residua ponderata:

$$c \approx \frac{\mathbf{r}^T \mathbf{W} \mathbf{r}}{m - n_p}, \tag{65.15}$$

dove m è il numero di osservazioni e n_p Questo garantisce che l'incertezza dei parametri rifletta sia la qualità della misura che la precisione di misurazione. L'approssimazione è

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

inaffidabile per vincoli attivi, non linearità pronunciata, identifiabilità debole, obiettivi multimodali o discrepanza modello.

65.4.7 Modello di discrepanza

41 Un'utile osservazione concettuale [1] is

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{65.16}$$

dove $\boldsymbol{\varepsilon}$ è errore di misura e $\boldsymbol{\delta}$ è la discrepanza del modello sistematico. Se $\boldsymbol{\delta}$ è ignorato, l'ottimizzatore può falsare parametri fisicamente significativi per compensare i meccanismi mancanti. La calibrazione Bayesian può rappresentare la discrepanza esplicitamente (Kennedy e O'Hagan, 2001); la taratura deterministica dovrebbe almeno esaminare i modelli residui per dipendenza sistematica dal tipo di carico, tempo, posizione o risposta.

65.5 Identificazione del Parametro Bayesian

42 L'inferenza Bayesiana fornisce un quadro generale per l'aggiornamento del precedente conoscenza con dati osservazionali. Nell'identificazione dei parametri, l'ignoto i parametri del modello sono trattati come variabili casuali, e la combinazione di precedenti le informazioni con una funzione di probabilità produce una distribuzione posteriore caratterizzare i valori dei parametri supportati da entrambe le fonti di informazione.

43 Il metodo Levenberg–Marquardt (Sezione 65.4) e RANSAC (Sezione 65.3) sono ottimizzazione fondamentale approcci: producono stime dei punti, integrate da linearizzazioni locali incertezza o informazioni di consenso. L'identificazione Bayesian invece produce una distribuzione a posteriori completa. Può rappresentare asimmetrico o multimodale incertezza, correlazioni dei parametri, l'influenza delle presupposti e la propagazione dell'incertezza dei parametri nelle previsioni successive e decisioni.

44 L'inferenza baieana è più preziosa quando l'incertezza posteriore materialmente influisce sui margini di sicurezza, sulle previsioni della vita utile, sulle stime dell'affidabilità o Decisioni di risposta al rischio. È anche naturale quando le informazioni provenienti da precedenti prove, letteratura, vincoli fisici o giudizio esperto dovrebbero influenzare l'identificazione, e quando l'aggiornamento sequenziale è richiesto come nuovi dati diventare disponibile.

[1] Equazione (65.16) è formalmente analogo a Eq. (47.2), introdotto nella derivazione variazionale di l'equazione Euler-Lagrange: entrambi esprimono una quantità di riferimento aumentata perturbazione additiva. L'analogia è solo strutturale. In Eq. (47.2), δu denota una variazione ammissibile, mentre in Eq. (65.16), $\boldsymbol{\delta}$ denota la discrepanza sistematica del modello e $\boldsymbol{\varepsilon}$ denota l'errore di misura.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

65.5.1 Identificazione del parametro Bayesian: Setup

45 Il teorema di Bayes combina la conoscenza preventiva dei parametri sconosciuti con le informazioni contenute nelle osservazioni:

$$p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{y})}. \tag{65.17}$$

Ecco, $p(\boldsymbol{\theta})$ è la distribuzione precedente, $p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta})$ è la probabilità, $p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y})$ è la distribuzione posteriore, e

$$p(\mathbf{y}) = \int p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta})\, d\boldsymbol{\theta} \tag{65.18}$$

La prova è la probabilità, o marginale. Le prove normalizzano il posterior. Non è richiesto esplicitamente da Metropolis–Hastings campionamento perché esso cancella dal rapporto di accettazione.

46 Assumendo errore di misura Gaussian additivo con matrice di covarianza $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon$La probabilità è

$$p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}\,|\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}))^T \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}))\right], \tag{65.19}$$

dove m è il numero di osservazioni. La discrepanza del modello può essere rappresentata separatamente, ad esempio attraverso il termine additivo introdotto in Eq. (65.16). Se la discrepanza è omessa, posterior l'incertezza è condizionata dal modello assunto e non deve essere interpretata come la contabilità automaticamente per errore di forma modello.

47 I precedenti del parametro possono codificare positività, limiti ammissibili, letteratura o valori del database, risultati dei test di compagno o altre informazioni defensibili. Quando le informazioni precedenti sono deboli, i priori poco informativi sul fisicamente gamme credibili sono preferibili a precedenti arbitrariamente diffusi. Prior-predictive simulazione—campionamento parametri dal precedente, l'esecuzione del modello e esaminare le risposte implicite — è una diagnostica importante prima dei dati sono utilizzati.

65.5.2 Valutazione MAP e Stime Point

48 Se è richiesto un vettore di parametro, il *massimo a posteriori* (MAP) la stima è il modo del posterior:

$$\boldsymbol{\theta}^*_{\text{MAP}} = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}} p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}). \tag{65.20}$$

49 Per una probabilità gaussiana, la stima del MAP è equivalentemente ottenuta da minimizzare un termine minimo di squali ponderati aumentato dal negativo log-prior:

$$\boldsymbol{\theta}^*_{\text{MAP}} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}} \left[\frac{1}{2}\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta})^T \mathbf{W}\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}) - \log p(\boldsymbol{\theta})\right]. \tag{65.21}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Questo è computazionalmente simile a ponderato meno quadrati (Sezione 65.4.2), con il log-prior che agisce come un Con un'uniforme precedente nella regione ammissibile, il MAP La stima coincide con la stima massima probabilità. includere la mediana posteriore e posterior; né solo trasmette il forma o struttura di dipendenza del posterior completo.

65.5.3 Sampling posterior e MCMC per parametri

50 Per ottenere la distribuzione completa posterior piuttosto che una stima del punto, I metodi della catena Markov Monte Carlo (MCMC) generano campioni da $p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y})$ senza richiedere la valutazione In Metropolis, un algoritmo di Hastings, una prova vettore $\boldsymbol{\theta}'$ è tratto da una densità di proposta $q(\boldsymbol{\theta}' \mid \boldsymbol{\theta}^{(s)})$ e accettata con probabilità

$$\alpha = \min\left[1, \frac{p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}')p(\boldsymbol{\theta}')q(\boldsymbol{\theta}^{(s)} \mid \boldsymbol{\theta}')}{p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}^{(s)})p(\boldsymbol{\theta}^{(s)})q(\boldsymbol{\theta}' \mid \boldsymbol{\theta}^{(s)})}\right]. \tag{65.22}$$

Per una proposta simmetrica a cammini casuali, le due proposte negano la cancellazione, quindi

$$\alpha = \min\left[1, \frac{p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}')p(\boldsymbol{\theta}')}{p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}^{(s)})p(\boldsymbol{\theta}^{(s)})}\right]. \tag{65.23}$$

Gli stati accettati e ripetuti formano una catena di Markov la cui stazionaria la distribuzione è il posterior nelle normali condizioni di regolarità.

51 I campioni iniziali colpiti fortemente dal punto di partenza sono comunemente scartato come burn-in. I campioni di successo sono correlati, quindi il numero i disegni memorizzati non è il numero di estrazioni indipendenti. Diagnostica dovrebbe includere traccia trame, funzioni di autocorrelazione, dimensione del campione efficace e più catene inizializzate da punti dispersi, per analisi a catena multipla $\widehat{R}$ valori vicini a uno forniscono prove, ma non prova... che il catene hanno raggiunto una distribuzione stazionaria comune. La lunghezza della catena richiesta è dipendente dai problemi e dovrebbe essere determinato dalla miscelazione ed efficace campione dimensione piuttosto che da un conteggio di iterazione universale.

65.5.4 Ex 65.2: Risalto Bayesiano con una Baside Quadratica e Metropolis–Hastings Sampling

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Considerare il modello di regressione

$$y_i = \theta_1 x_{1i}^2 + \theta_2 x_{2i} + \varepsilon_i, \qquad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \tag{65.24}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove θ_1 e θ_2 la risposta usa un quadratico base in x_1, ma il modello è lineare nei parametri sconosciuti. struttura è intenzionale: con precedenti gaussiani e conosciuti σ, l'esatto il posterior è disponibile analiticamente e può quindi essere utilizzato per l'audit implementazione MCMC.

Le osservazioni sintetiche sono generate con

$$\boldsymbol{\theta}_{\text{true}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T, \qquad \sigma = 1, \qquad n = 50, \tag{65.25}$$

e i precedenti gaussiani indipendenti sono assegnati:

$$\theta_j \sim \mathcal{N}(0, 10^2), \qquad j = 1, 2. \tag{65.26}$$

Viene utilizzata una proposta simmetrica di marcia casuale Gaussiana, quindi l'accettazione probabilità è data da Eq. (65.23). Lo script genera 10.000 stati, scarta i primi 2.000 come burn-in e calcola posterior significa, deviazioni standard, 95% intervalli credibili, correlazione dei parametri, tracciare trame, funzioni di autocorrelazione e una risposta posterior-predictive band. E confronta anche le stime MCMC con l'esatta posterior Gaussian e con la stima ordinaria di menoquari.

L'implementazione compatta utilizza una catena per la chiarezza pedagogica. analisi di produzione dovrebbe utilizzare più catene dispersive e rapporto $\widehat{R}$ e la dimensione del campione efficace. La deviazione standard rumore è trattata come noto; in un'analisi più completa può essere assegnato un precedente e rinviato insieme ai parametri di regressione.

Il corrispondente MATLAB®il codice è dato in § I.5.8.

65.5.5 Esempio di lavoro: Inferenza baieana per i parametri di degradazione

52 Considerare il modello di degrado dipendente dal tempo introdotto in Sezione 65.3.2:

$$\frac{\text{QoI}}{\text{QoI}_0}(d, t) = 1 - f(d) \cdot D(t),$$

dove $D(t)$ segue un modello cinetico AAR primi principi con parametri τ_C (tempo di carattere), τ_L (periodo di latenza), e β (danni asintotici).

53 Un'analisi Bayesiana assegna precedenti defensibili a ciascun parametro:

- $\tau_C > 0$: scala temporale caratteristica, per esempio un precedente lognormale incentrata sui valori della letteratura.
- $\tau_L > 0$: periodo di latenza, con un anticipo potenzialmente informato temperatura e contenuto alcalino.
- $\beta \in (0, 1)$: danni frazionari a lungo termine, rappresentati ad esempio da un'uniforme o beta prima.

54 La probabilità combina misurazioni di campo di quantità come elastico modulo e forza a più profondità ed età con il loro misura-errore stima. Il campionamento MCMC produce poi disegni posteriori, consentendo:

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

- densità marginale posteriore per ogni parametro;
- 95% intervalli credibili basati su quantili o la più alta densità posterior regioni;
- correlazioni dei parametri posteriori e identificazione del confondamento;
- curve di degrado retroattivo-predictive con bande di incertezza.

55 Se il posterior rivela una forte correlazione tra due parametri, tale as τ_C e τ_L, i dati disponibili non possono separare i loro effetti. Ulteriori tipi di risposta, misure in tempi o località differenti, o un più informativa prima può quindi essere necessario. risposte osservate con risposte replicate generate sotto estrazioni posteriori e aiutare a rivelare inadeguatezza del modello sistematico.

65.5.6 Quando usare l'identificazione baiesca

56 L'identificazione dei parametri Bayesian è particolarmente preziosa quando:

- **Le informazioni prioritarie sono sostanziali:** prove storiche, vincoli teorici, o conoscenze di esperti dovrebbero influenzare la calibrazione.
- **L'incertezza posteriore completa è critica:** le decisioni dipendono probabilità di coda o intervalli credibili, non solo su stime punto.
- **La correlazione del parametro deve essere quantificata:** l'analisi deve rivelare se i parametri sono identificati o confondati in modo indipendente dal set di misura.
- **È necessario un aggiornamento sequenziale:** nuove osservazioni arrivano il tempo, e il posterior da un'analisi diventa il precedente per la successiva.
- **La discrepanza del modello è significativa:** trattamento esplicito errore di modello sistematico è necessario per evitare di attribuire tutti i errori al parametri.

57 I metodi Bayesian sono computazionalmente più esigenti di quanto non sia Levenberg–Marquardt ottimizzazione e richiedono un'attenta diagnostica di campionamento. ritorno, forniscono intervalli credibili, dipendenza dei parametri congiunti, incertezza retropredittiva e una rappresentazione trasparente di precedente informazioni—quantità che possono essere essenziali in alta consequenza strutturale decisioni.

65.6 Il Levenberg - Marquardt Algorithm in pratica

58 Per la teoria completa algoritmica dei metodi di fiducia e l'analisi della convergenza Levenberg-Marquardt, vedere Appendice Q. Questa sezione si concentra sulla pratica implementazione MATLAB dell'algoritmo Levenberg-Marquardt, accoppiato all'analisi degli elementi finiti.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

MATLAB®codice [59] Il MATLAB®il codice è descritto in Fig. 65.4 ed è relativamente semplice da seguire.

[60] Si noti che in questo caso, l'analisi si concentra su una diga interessata da reazioni aggregate alcali (AAR). L'obiettivo è quello di determinare i parametri del modello AAR in modo che gli spostamenti della cresta dall'analisi degli elementi finiti corrispondano strettamente alle misurazioni sul campo.

1. Le misurazioni sul campo sono lette e regolate.
2. Il file di controllo è letto e diviso in tre parti: una centrale contenente le linee da modificare dal codice (associata alle proprietà AAR), e quelle adiacenti che resteranno immutate. I numeri corrispondenti delle linee di separatore sono registrati per un successivo utilizzo dalla funzione di minimizzazione.
3. Le variabili definite dall'utente vengono lette da un file Excel esterno.
4. I parametri di ottimizzazione sono impostati
5. Il `L'articolo` funzione, §Q.3, viene chiamato.

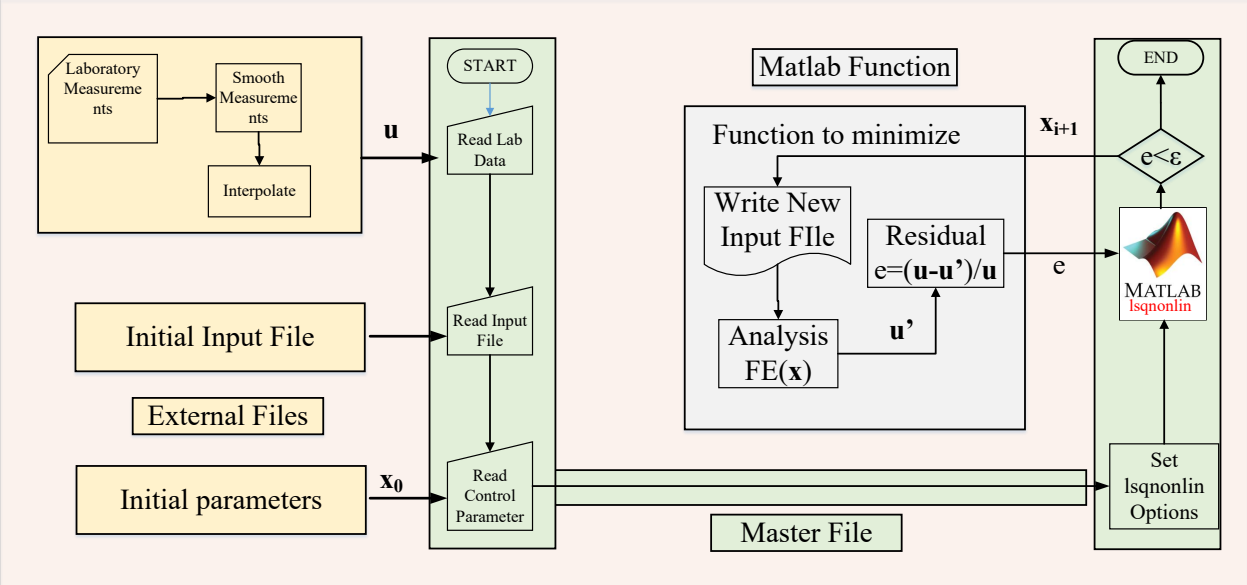


Figura 65.4: Grafico del flusso della procedura di identificazione dei parametri

Definizione della funzione [61] Una parte critica dell'algoritmo è la definizione della funzione da minimizzare.

1. Scrivere un nuovo file di input in termini di $\mathbf{x}$; sulla prima iterazione, utilizzare i valori predefiniti $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. Questo è facilitato dal precedente partizionamento del file di controllo.
2. Eseguire l'analisi degli elementi finiti (utilizzando Merlin in questo caso).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

3. Estrarre dal file di uscita gli spostamenti calcolati, $\mathbf{x}_{\text{fea}}(t)$.
4. Computare il residuo $\mathbf{r}(t) = \mathbf{x}_{\text{fea}}(t) - \mathbf{x}_{\text{meas}}(t)$.
5. Computa la norma e dei residui.
6. Restituite il nuovo vettore residuo all'ottimizzatore.

62 Completamento del programma è regolato da `L'articolo` sulla base del vettore residuo e delle opzioni precedentemente selezionate (§ Q.3). Poiché la funzione oggettiva richiede dati oltre al vettore dei parametri, quantità extra (come ad esempio $\mathbf{x}_{\text{meas}}(t)$) sono passati come `globale` variabili in questa implementazione.

63 Il MATLAB®codice per l'ottimizzazione non lineare dei minimi-quari è dato in § I.6.1.

Visualizzazione in tempo reale 64 Poiché la simulazione di elementi finiti non lineari dei problemi complessi è computazionalmente costosa, e l'identificazione dei parametri richiede molte analisi del genere, il processo complessivo è computativamente intensivo.

65 Quindi, viene utilizzata un'interfaccia utente grafica, Figura 65.5. Il primo quadrante è un appezzamento degli spostamenti intermedi ($\mathbf{x}_{\text{fea}}(t)$) rispetto a quelli misurati ($\mathbf{x}_{\text{meas}}(t)$). Gli altri tre quadranti sono trame di variabili selezionate da identificare (ε^{∞}, τ_le τ_c) in termini di numeri di iterazione.

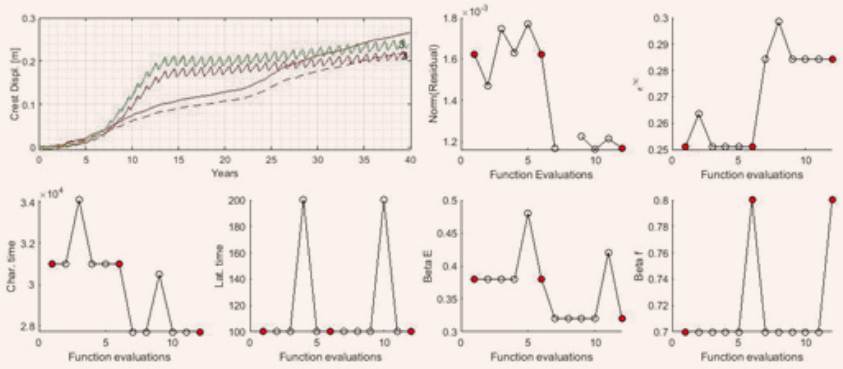


Figura 65.5: Interfaccia grafica per un'unica funzione residua e cinque variabili. 65.7 per un esempio più completo.

65.6.1 Pratica di minimo-quares

66 Per la calibrazione degli elementi finiti convenzionali, la sequenza raccomandata è: normalizzare o residui di peso; parametri dello schermo; esaminare il grado giacobino; scegliere i limiti fisicamente defensibili e punti di partenza; eseguire da diversi inizi; ispezionare la struttura residua; e convalidare in modo indipendente. Capitolo Q sviluppa gli algoritmi numerici, e Appendice I.4 contiene il corrispondente MATLAB®codice, la cui descrizione completa segue.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

65.6.1.1 MATLAB Parameter Identification Program: Descrizione

67 Le sezioni precedenti forniscono il quadro matematico, che documenta un'implementazione basata sui dati che accomuna MATLAB `L'articolo` ottimizzatore per un solvente esterno degli elementi finiti. Sebbene questa versione sia implementata con ATENA (il programma di analisi degli elementi finiti, FEAP), l'architettura modulare del programma lo rende semplice da adattare al codice a qualsiasi altro pacchetto di analisi dei componenti finito. L'implementazione aggiorna i parametri materiali selezionati, lancia il risolutore, legge le risposte monitorate, valuta i residui e registra la cronologia di identificazione senza modificare i file originali di input.

Panoramica del programma 68 Tutte le informazioni specifiche dei problemi sono lette da un unico foglio di calcolo, `Log.xlsx`. Misure di campo o laboratorio e un modello FEAP la cui risposta dipende da parametri sconosciuti, il programma esegue la seguente sequenza:

1. leggere i nomi dei file, i parametri, i nomi del monitor, le espressioni di aggregazione, i valori target e le opzioni del risolutore `Input` foglio;
2. leggere il vettore di parametro iniziale $\mathbf{x}_0$ e intervalli consigliati dal file di ingresso FEAP;
3. creare una copia di lavoro temporanea del file input;
4. creare un nuovo foglio di registro a riga chiamato `PI #n`;
5. eseguire una corsa a secco $\mathbf{x}_0$ per verificare l'intera catena MATLAB-FEAP;
6. lancio `L'articolo`; in ogni valutazione della funzione, aggiornare l'ingresso temporaneo, eseguire FEAP, analizzare l'output, predizioni aggregate e restituire il vettore residuo;
7. aggiornare una dashboard che mostra rapporti predizione-to-target, magnitudine residue su scala logaritmica e evoluzione dei parametri;
8. log ogni iterazione dell'ottimizzazione rilevata con il suo timestamp, tempo trascorso, valori dei parametri, rapporti di previsione-a-target e residui;
9. segnalare i parametri identificati, norma residua, bandiera di uscita e statistiche di iterazione.

69 L'implementazione è destinata a rimanere indipendente dai problemi, il numero di parametri, previsioni, espressioni di aggregazione e misurazioni dei target può variare senza modifiche alla sorgente MATLAB. Le conversioni delle unità sono scritte esplicitamente nelle espressioni del foglio di calcolo; nel codice non viene applicato nessun fattore ceppo-microstraina nascosto.

Struttura della cartella

```
FEAP/
|-- Main.m                    <- entry point: ParIdentification()
|-- ParIdentification.m       <- main function and nested minfunc
```

COPIA DI REVISIONE

```
|-- Log.xlsx                  <- control spreadsheet and PI logs
|-- input.dat                 <- original FEAP input (never modified)
|-- input_temp.dat            <- working copy (overwritten)
|-- output.dat                <- FEAP output (overwritten)
|
‘-- functions/
    |-- createTempInputFile.m
    |-- extractEvaluateValues.m
    |-- initPISheet.m
    |-- logIterationToSheet.m
    |-- readInputSheet.m
    |-- readModelPredValues.m
    |-- runAnalysis.m
    |-- runLSQnonlin.m
    |-- updateEvaluateValues.m
    |-- updatePlots.m
    |
    ‘-- private/
        |-- buildFieldAggFunctions.m
        |-- findKey.m
        |-- isMissingLike.m
        |-- normalizeText.m
        |-- readNumericVectorByKey.m
        |-- readScalarByKey.m
        |-- readTextVectorByKey.m
        ‘-- toText.m
```

[70] L’ex aiutante `xlsColletter.m` non è richiesto dal logger PI corrente riga-saggio. L’aiutante `buildFieldAggFunctions.m` compila le espressioni del foglio di calcolo esattamente come scritto, senza appending un fattore di scala.

Controllo foglio di calcolo: Log.xlsx [71] Il `Input` Lastra, Fig. 65.6 La colonna A contiene un’etichetta descrittiva, la colonna B contiene il tasto letto da MATLAB e le colonne C in avanti contengono uno o più valori.

Il codice cerca per chiave piuttosto che per numero di riga fisso.

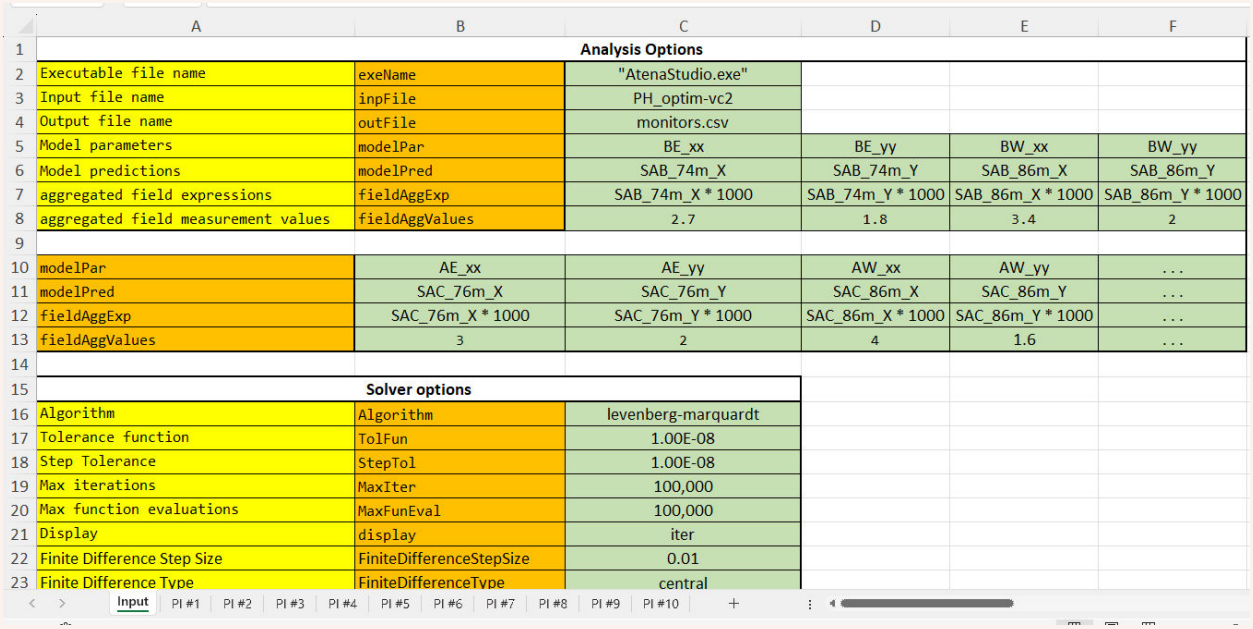
[72] La capitalizzazione e l’ortografia esatta di ogni chiave del foglio di calcolo devono corrispondere alla versione prevista per `readInputSheet.m`. Internamente, il lettore può normalizzare questi nomi —per esempio, `Passo` può essere memorizzato come `S.tolX`–ma il foglio di calcolo stesso deve usare la chiave implementata.

Unità e espressioni di aggregazione [73] Se le uscite FEAP si estendono mentre gli obiettivi sono in microstraina, la conversione appartiene all’espressione del foglio di calcolo, ad esempio

```
fieldAggExp    = 1e6*(M02+M08+M12)/3
fieldAggValues = 136  237  228  132
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



	A	B	C	D	E	F
1	**Analysis Options**					
2	Executable file name	exeName	"AtenaStudio.exe"			
3	Input file name	inpFile	PH_optim-vc2			
4	Output file name	outFile	monitors.csv			
5	Model parameters	modelPar	BE_xx	BE_yy	BW_xx	BW_yy
6	Model predictions	modelPred	SAB_74m_X	SAB_74m_Y	SAB_86m_X	SAB_86m_Y
7	aggregated field expressions	fieldAggExp	SAB_74m_X * 1000	SAB_74m_Y * 1000	SAB_86m_X * 1000	SAB_86m_Y * 1000
8	aggregated field measurement values	fieldAggValues	2.7	1.8	3.4	2
9						
10	modelPar	AE_xx	AE_yy	AW_xx	AW_yy	...
11	modelPred	SAC_76m_X	SAC_76m_Y	SAC_86m_X	SAC_86m_Y	...
12	fieldAggExp	SAC_76m_X * 1000	SAC_76m_Y * 1000	SAC_86m_X * 1000	SAC_86m_Y * 1000	...
13	fieldAggValues	3	2	4	1.6	...
14						
15	**Solver options**					
16	Algorithm	Algorithm	levenberg-marquardt			
17	Tolerance function	TolFun	1.00E-08			
18	Step Tolerance	StepTol	1.00E-08			
19	Max iterations	MaxIter	100,000			
20	Max function evaluations	MaxFunEval	100,000			
21	Display	display	iter			
22	Finite Difference Step Size	FiniteDifferenceStepSize	0.01			
23	Finite Difference Type	FiniteDifferenceType	central			

Input | PI #1 | PI #2 | PI #3 | PI #4 | PI #5 | PI #6 | PI #7 | PI #8 | PI #9 | PI #10

Figura 65.6: File di dati di input per l'ottimizzazione Levenberg–Marquardt non lineare dei minimi-quari

Tabella 65.1: Entrate di configurazione rappresentative `Log.xlsx`

Configurazione	Chiave	Valore di rappresentanza
File eseguibile	`ex-Name`	`D:\FEAP\AtenaConsole.exe`
File di input	`InpFile`	`PH_optim-vc2`
File di uscita	`fuoriFile`	`monitors.csv`
Parametri del modello	`modelloPar`	`BE_xx, BE_- Sì, BW._xx, BW_yy, ...`
Previsioni del modello	`modelloPred`	`SAB_74m_X, SAB_74m_Y, ...`
Espressioni di aggregazione	`campoAggExp`	`SAB_74m_X*1000, ...`
Misurazione del bersaglio	`campoValore di uova`	`2.7, 1.8, 3.4, 2, ...`
Algoritmo	`Algoritmo`	`Levenberg-marquardt`
Tolleranza della funzione	`TolFun`	`1e-8`
Tolleranza relativa ai gradi	`Passo`	`1e-8`
Massime iterazioni	`MaxIter`	`100000`
Valutazioni massime	`MaxFunval`	`100000`
Fase di differenza	`FiniteDiffusore`	`0.01`
Tipo di differenza	`FiniteDifforti`	`centrale centrale`
Visualizzazione	`display`	`E' un problema.`

Ciò rende visibile la convenzione dell'unità e impedisce che lo stesso fattore venga applicato due volte.

Fogli di log PI [74] Ogni run crea il prossimo foglio disponibile, `PI #1`, `PI #2`e così via. L'intestazione a riga è

```
Iter | Timestamp | IterTime_hr | <parameters...> |
     <Pred/Target...> | <Residual...>
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

La riga 2 è iterazione 0 e contiene $\mathbf{x}_0$ Ogni successiva iterazione rilevata applica il vettore dei parametri, i rapporti predizione-target e i residui. Questo formato è selezionabile direttamente ed adatto per la trama o l'elaborazione post indipendente.

File di ingresso e output FEAP [75] I parametri da identificare sono situati in `VALUTAZIONE` dichiarazioni. Il valore attuale fornisce l'ipotesi iniziale e il commento facoltativo fornisce la gamma consigliata:

```
EVALUATE "EcD1 = /*# EcD1 */ 62000"
         // Recommended range 10000 - 50000
```

Il file originale non è mai sovrascritto; tutti gli aggiornamenti sono scritti alla copia temporanea.

[76] Il parser di output esegue la scansione dei blocchi del monitor richiesto ed estrae l'ultimo valore di risposta valido per ogni monitor. `modelloPred`. I valori mancanti, non finiti o ineguagliabili dovrebbero fermare la corsa a secco piuttosto che essere passati silenziosamente all'ottimizzatore.

Ottimizzazione del flusso di lavoro e dell'obiettivo [77] Lasciamo perdere. $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ essere il vettore delle previsioni FEAP aggregate e $\mathbf{y}$ il vettore di destinazione. Il programma ritorna

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}) - \mathbf{y} \tag{65.27}$$

to `L'articolo`, che minimizza $\mathbf{r}^T\mathbf{r}$. Se gli obiettivi hanno unità sostanzialmente diverse o livelli di incertezza, devono essere normalizzati o ponderati come descritto in §65.4.2; altrimenti i residui numerici più grandi dominano la vestibilità.

Residui ponderati e correlati nell'attuazione [78] L'obiettivo può essere convertito in meno quadrati statisticamente ponderati senza modificare l'ottimizzatore. s_i, restituiscono residui normalizzati:

```
res = (predicted - target) ./ sigmaMeasurement;
```

Poi `L'articolo` minimizza $\sum_i r_i^2/s_i^2$. I residui di ingegneria grezzi devono ancora essere conservati nel registro in modo che la normalizzazione non nasconda l'entità o le unità del guasto.

[79] Per errori di misura correlati con matrice di covarianza $\mathbf{\Sigma}_\varepsilon$, calcolare un fattore di Cholesky inferiore $\mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{\Sigma}_\varepsilon$ e restituiscono residui prebiancati:

```
rawRes = predicted(:) - target(:);
L      = chol(SigmaMeasurement,'lower');
res    = L \ rawRes;
```

La norma quadrata risultante è $\mathbf{r}^T\mathbf{\Sigma}_\varepsilon^{-1}\mathbf{r}$. La matrice di covarianza deve essere definita positiva ed espressa in unità conformi al vettore residuo grezzo.

Corsa a secco [80] Prima dell'ottimizzazione, `minfunc` viene valutato una volta $\mathbf{x}_0$. Questo verifica l'aggiornamento dei file, l'esecuzione del risolutore, la parsing di uscita, l'ag-

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

gregazione e la valutazione residua. Il risultato viene riproposto come iterazione 0 alla valutazione della funzione 0 e non è considerato come un iteration ottimizzatore.

Estersioni e valutazioni delle funzioni [81] Con una differenza finita Jacobian, un'iterazione ottimizzatrice può richiedere approssimativamente $n_{\text{par}} + 1$ valutazioni delle funzioni per differenze in avanti e approssimativamente $2n_{\text{par}} + 1$ Per le differenze centrali, oltre a misure di prova rifiutate o altre valutazioni interne, è quindi un'approssimazione che fa riferimento alle vere iterazioni unicamente da uno schema fisso del conte funzione. Una funzione di uscita ottimizzatrice è preferibile quando sono necessari eventi di iterazione precisi.

Scala, tolleranze e limiti [82] Le magnitudine dei parametri rappresentativi vengono fornite attraverso `Tipico`; il codice utilizza valori di fascia media quando sono disponibili gamme consigliate finite; la tolleranza del passo del foglio di calcolo è indissolubile e può essere convertita internamente ad una scala assoluta. Le tolleranze molto piccole non garantiscono una soluzione più accurata e possono causare inutili cicli di elementi finiti.

[83] Gamme consigliate sono preziose per il controllo $\mathbf{x}_0$, rilevando la deriva verso valori implausibili e configurando algoritmi che applicano i limiti. L'analista deve verificare che l'eletto `L'articolo` algoritmo e rilascio MATLAB applicano i vincoli previsti per le dimensioni del problema. Una vestibilità sottodeterminata può convergere numericamente rimanendo non-unica.

Dashboard e diagnostica [84] Il cruscotto separa le valutazioni delle funzioni da iterazioni e display accettati:

- rapporti predizione-target su scala lineare;
- residui assoluti su scala logaritmica;
- l'evoluzione di ogni parametro;
- un marcatore distinto per iterazione 0 e marcatori separati per le iterazioni accettate.

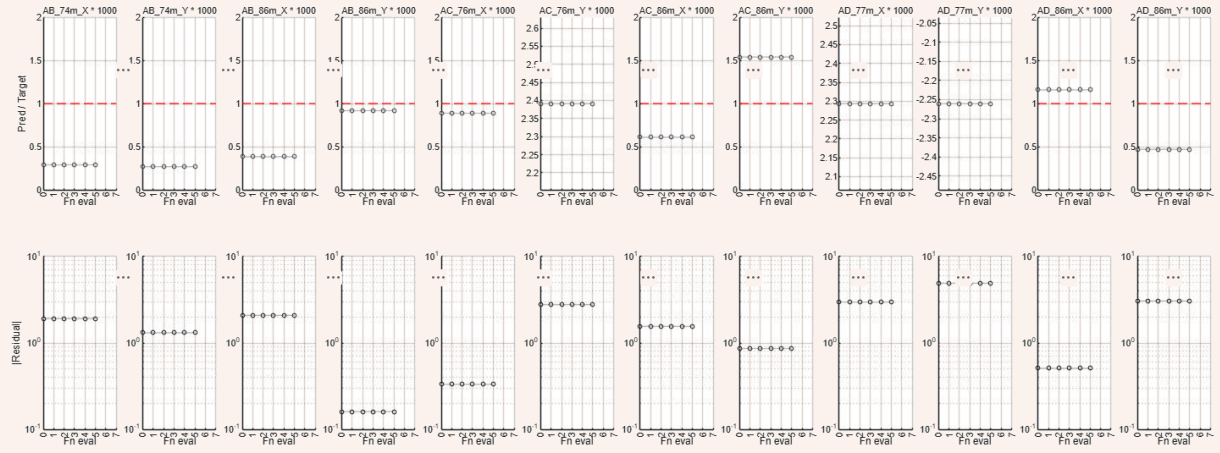
[85] La convergenza non deve essere giudicata solo dalla norma residua. La revisione finale dovrebbe includere la bandiera di uscita, le posizioni dei parametri relative ai limiti, i modelli residui, le correlazioni dei parametri o i valori singolari giacobini, la sensibilità all'ipotesi iniziale e la validazione contro osservazioni che non sono stati utilizzati per calibrazione.

Diagnostica per identifiabilità post-run consigliata [86] Quando richiesto come output, `L'articolo` ritorna il residuo giacobino al punto finale. Le seguenti quantità devono essere archiviate con i parametri appiattiti:

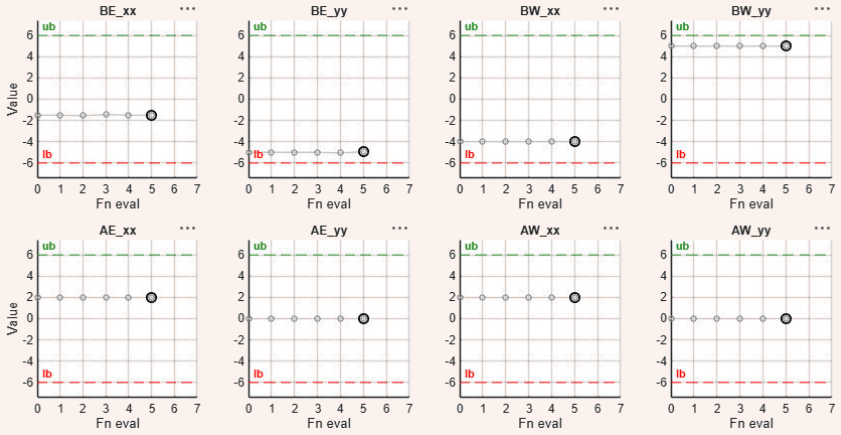
- il rango numerico e i valori singolari del giacobino ponderato o normalizzato;
- il suo numero di condizione, con la soglia utilizzata per dichiarare carenza di rango vicino;

COPIA DI REVISIONE

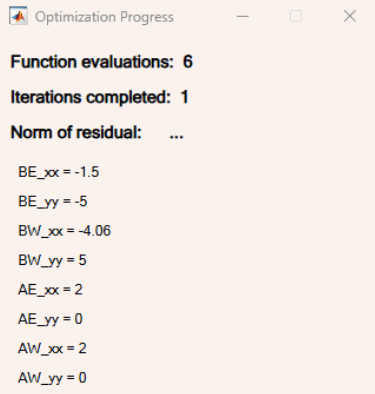
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Dodici obiettivi predetti e residui associati



(b) Otto variabili



(c) Aggiornamento dello stato dal vivo

Figura 65.7: Dashboard per il Levenberg–Marquardt non lineare ottimizzazione di minimo-quari: 12 obiettivi predetti e 8 variabili.

- una covarianza approssimativa dei parametri o matrice di correlazione quando le ipotesi lineari locali sono defensibili;
- la modifica della soluzione in ipotesi iniziali alternative, passi di differenza finiti e limiti ammissibili;
- profili grafici o riadattati per parametri sospettati di debole identifiabilità.

87 Queste diagnosi sono raccomandate estensioni al flusso di lavoro di reportistica; non devono essere descritte come uscite automatiche a meno che il codice corrispondente sia stato implementato e verificato.

COPIA DI REVISIONE

Tabella 65.2: Funzioni principali nel programma di identificazione dei parametri

Funzione	Oggetto
`letturaInputPacchetto`	Leggi tutte le configurazioni basate su parole chiave e costruisci struct S.
`estrattoValori di valutazione`	Leggi x_0, rilegature inferiori e limiti superiori da abbinamento `VALUTAZIONE` - Le linee.
`creareTempInputFile`	Creare la copia di lavoro con `_temperare` inserito prima dell'estensione.
`aggiornamentoValori di valutazione`	Sostituire i valori dei parametri nell'ingresso temporaneo; durante l'esecuzione a secco viene utilizzata la modalità silenziosa opzionale.
`runAnalisi`	Avviare FEAP sincronizzatamente e restituire il suo stato e l'output della console.
`leggi il catalogo`	Parsare i valori di output e di monitoraggio di ritorno allineati `modelloPred`.
`initPIPacchetto`	Creare il prossimo file-wise `PI #n` foglio e scrittura iterazione 0.
`logIterationToSheet`	Appendere numero di iterazione, tempo, parametri, rapporti e residui.
`runLSQnonlin`	Configurare ed eseguire `L'articolo`.
`AggiornamentoPlots`	Creare e aggiornare i dashboard residui e dei parametri.

Funzioni pubbliche

Tabella 65.3: Funzioni di helper private utilizzate dal lettore di fogli di calcolo e dallo strato di aggregazione

Funzione	Oggetto
`leggi la voceByKey`	Trova una chiave e restituisci il primo valore non vuoto al suo diritto.
`leggi il testoVectorByKey`	Restituisce tutti i valori di testo non vuoti a destra di una chiave.
`leggi il prodottoNumericoByKey`	Restituisce tutti i valori numerici non vuoti a destra di una chiave.
`buildFieldAggFunzioni`	Compile foglio di calcolo aggregazione espressioni in maniglie funzione senza scaling nascosto.
`TrovareKey`	Individuare una chiave caso-insensibile nelle celle del foglio di lavoro raw.
`èMissingLike`	Riconoscere le voci del foglio di calcolo vuoto, mancante, vuoto o non finito come implementato.
`aTesto`	Converti un valore del foglio di lavoro in testo per il confronto normalizzato.
`normalizzareText`	Normalizzare il testo convertito, inclusa la rimozione di spazi non distruttivi.

Funzioni di aiuto privato

Tabella 65.4: Principali campi della struttura di configurazione S

Campo di applicazione	Tipo di	Oggetto
`ex-Name, InpFile, fuoriFile`	testo	Solver eseguibile e nomi di file input/output
`modelloPar`	lista	I nomi dei parametri da aggiornare nel file di ingresso FEAP
`modelloPred`	lista	Monitorare i nomi da estrarre dall'uscita FEAP
`campoAggExpr`	lista	Le espressioni del foglio di calcolo utilizzato per aggregare le previsioni e eseguire la conversione dell'unità
`campoValore di uova`	vettore	Misurazione del bersaglio
`campo di applicazione`	lista	Maniglie funzionali Compiled corrispondenti alle espressioni di aggregazione
`maxFunzione, massimo`	scalare	Limiti di ottimizzazione
`a), Tolga`	scalare	Funzione e tolleranze di passaggio normalizzate internamente
`algoritmo, display`	testo	algoritmo di ottimizzazione e modalità display
`lb, ub`	vettori	Limiti di parametri inferiori e superiori o intervalli consigliati

Principali strutture dati e variabili run-time

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 65.5: Variabili a tempo di esecuzione selezionate in `Paridentificazione.m`

Variabile	Tipo di	Oggetto
`x0, lb, ub`	vettori	Parametri iniziali e limiti ammissibili letti dal file di input
`InpFileTemp`	testo	File di input FEAP temporaneo sovrascritto ad ogni valutazione
`piPartito`	testo	Foglio di identificazione-log a riga attuale
`NFnval, N.`	integers	Contatori di valutazione e rilevazione della funzione
`X`	matrice	Storia del parametro
`predettoLast, La mia`	vettori	Le previsioni e i residui aggregati più recenti
`x, Responsabili, Responsabili`	uscite	Parametri finali, norma residua e vettore residuo
`Fiamma di uscita, uscita`	uscite	Motivo di terminazione e statistiche ottimizzate

Aggiungere un nuovo problema di identificazione

1. Sostituire o rinominare i file di input e output ATENA.
2. Aggiornamento `ex-Name`, `InpFile`e `fuoriFile` in `Log.xlsx`.
3. Inserisci i nomi dei parametri, monitora i suffissi, le espressioni di aggregazione e le misurazioni del bersaglio.
4. Verificare le unità e includere esplicitamente ogni conversione in `campoAggExp`.
5. Controllare che ogni parametro identificato abbia un valore iniziale e un intervallo di defensibile nel file input.
6. Eseguire la corsa a secco e ispezionare tutti i residui prima di consentire l'ottimizzazione non assistita per continuare.
7. Dopo la convergenza, ripetere il funzionamento da valori iniziali alternativi e convalidare il modello calibrato in modo indipendente.

[88] Non è necessario alcun cambiamento di codice MATLAB quando il nuovo problema segue le stesse convenzioni di input e output. È richiesto un cambio di codice quando il formato del risolutore, monitor parser, regola di ponderazione o ottimizzazione delle modifiche della logica.

Decisioni e limitazioni di progettazione

Registrazione a filo: una riga per iterazione è più facile filtrare, tracciare ed esportare rispetto all'organizzazione ex colonna-saggio.

Asciugare come iterazione 0: la catena completa di solventi esterni viene esercitata prima dell'ottimizzazione, mentre il risultato rimane visivamente diverso dalla storia formale dell'ottimizzatore.

Ridimensionamento dell'unità esplicita: ogni conversione è registrata in `campoAggExp`; le funzioni MATLAB non mettono in pratica un fattore di scala nascosto.

Configurazione a foglio di calcolo elettronico: lo stesso codice può servire modelli diversi quando i loro file e le convenzioni di monitoraggio sono compatibili.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Rilevamento di individuazione: La funzione di output è l'implementazione a lungo termine preferita.

Affidabilità del processo esterno: ogni esecuzione FEAP dovrebbe essere controllata per lo stato di uscita, la creazione prevista di output, la freschezza dei file e i valori del monitor finito prima che il residuo sia accettato.

65.7 Flussi ibridi di lavoro e migliori pratiche

65.7.1 Calibrazione e convalida

89 La calibrazione utilizza osservazioni per valutare i parametri.La convalida verifica il modello calibrato contro le osservazioni indipendenti, i percorsi di carico, le posizioni o i periodi temporali. Ogni volta che il set di dati è piccolo, trasversale, sensori a tenuta stagna o una fase sperimentale separata dovrebbe essere utilizzata per esporre i dispositivi sovraccaricati.

65.7.2 Applicazioni strutturali

90 I metodi di identificazione del parametro si applicano attraverso il ciclo di vita completo dell'ingegneria strutturale:

- **Calibrazione costitutiva:** adattare parametri fisicamente significativi alle risposte di laboratorio, quindi validare sotto diversi percorsi di carico.
- **Monitoraggio della salute strutturale:** aggiornare i modelli di elementi finiti dalle frequenze, forme di modalità, ceppi, spostamenti o tendenze a lungo termine mentre si tiene conto della qualità dei sensori e degli effetti ambientali.
- **Infrastrutture di invecchiamento:** combinare i dati sul campo con la conoscenza preventiva per inferire ampiezza di degrado, tassi e variazione spaziale.
- **Domanda sismica e fragilità:** propagare l'incertezza dei parametri nei modelli di domanda, le probabilità limite e le funzioni di fragilità.
- **Aggiornamento sequenziale:** assimilare nuove osservazioni quando arrivano utilizzando filtri Bayesian o calibrazione ripetuta in batch.

65.7.3 Quadro di decisione del flusso di lavoro

91 Un pratico flusso di lavoro ibrido può combinare molteplici strategie in sequenza:

1. **Pulizia dei dati:** Se sono sospettati di sovraccarico o di contaminazione lorda,

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

applicare RANSAC (Sezione 65.3.2) identificare un insieme di dati inlier con un consenso solido.

2. **Calibrazione iniziale:** Utilizzare Levenberg-Marquardt (Sezione 65.4) sui dati puliti per ottenere le stime dei parametri iniziali e per visualizzare i problemi di identità.
3. **Validazione indipendente:** Testare il modello calibrato contro i dati trattenuti o le diverse condizioni di carico.
4. **Incertezze posterior:** Se l'incertezza dei parametri influisce materialmente sulle decisioni a valle, impiegare inferenza Bayesiana (Sezione 65.5) quantificare le distribuzioni posteriori, gli intervalli credibili e le sensibilità alle presupposti precedenti.
5. **Sentiero di controllo:** Conservare i record di esclusioni dati, pesi, precedenti, versioni dei modelli e diagnostica della convergenza per la riproducibilità e la revisione pari.

92 Ogni fase dovrebbe conservare prove documentate di modellistica e risultati, migliorando sia il rigore scientifico che la comunicazione pratica con gli stakeholder.

65.8 Da dati, dubbi e decisioni per l'ingegneria del terremoto basata sulle prestazioni

93 Lo scopo della sezione finale è la sintesi. Capitolo 64 ha stabilito come ingressi e qualità dei dati incerti influiscono sulle previsioni strutturali; il presente capitolo ha stabilito che i parametri selezionati sono deferiti dalle osservazioni. Insieme forniscono il ponte metodologico ai seguenti capitoli sulla sismologia (capitolo 67), analisi computazionale avanzata (capitolo 69), valutazione del rischio sismico (capitolo 70), e infine PBEE (capitolo 72).

94 Il design sismico basato sulle prestazioni è emerso perché la conformità al codice da solo non indica come una particolare struttura dovrebbe eseguire, quali danni sono probabili o quali conseguenze seguono (Hamburger et al., 2004)PBEE richiede una catena di modelli che collegano il pericolo del sito, la risposta strutturale, i danni e le conseguenze. Ogni link contiene l'incertezza e diversi collegamenti contengono parametri da calibrare in laboratorio o prove sul campo.

95 Il flusso di lavoro riassunto in Figura 65.8 is:

Caratterizzazione del sito: stabilire il modello di sismicità del sito, caratteristiche fisiche, strumentazione, record di monitoraggio a lungo termine e, quando utili, dati forzati-vibrazione-test.

Modello di elemento finito: selezionare le caratteristiche di analisi richieste, modelli costitutivi, descrizioni dei materiali, condizioni limite e piattaforma computazionale.

Analisi deterministica iniziale: verificare l'equilibrio, le unità, le condizioni di confi-

COPIA DI REVISIONE

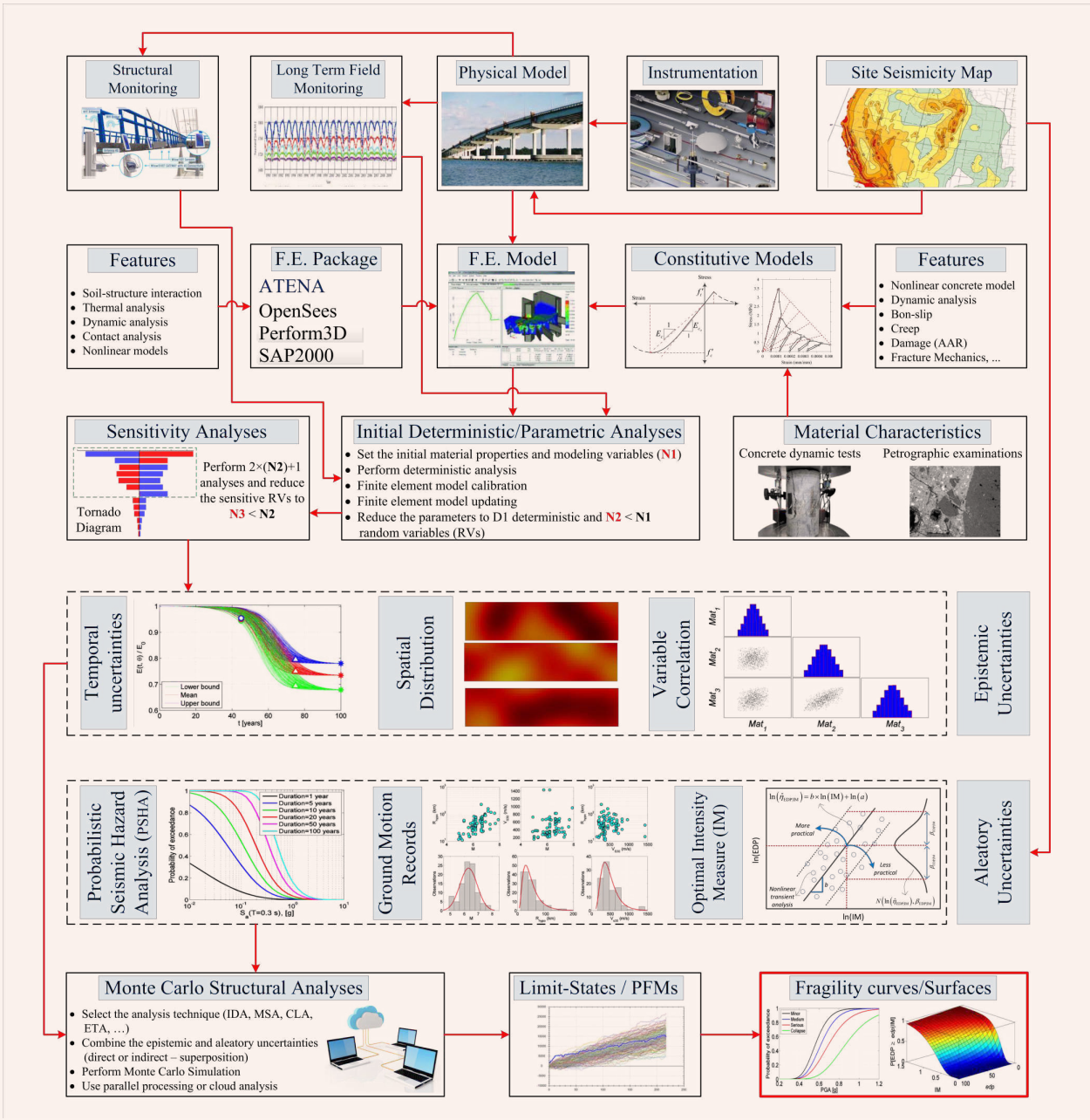


Figura 65.8: Integrazione della caratterizzazione del sito, sviluppo di modelli, incertezza, identificazione dei parametri, analisi strutturale e valutazione delle fragilità

ne e i meccanismi di risposta dominanti prima di introdurre ingressi stocastici o ottimizzazione.

Proiezione della sensibilità: assegnare intervalli plausibili o distribuzioni agli input candidati. Uno studio preliminare a basso costo può utilizzare $2N + 1$ Se è necessario

COPIA DI REVISIONE

un'allocazione quantitativa di varianza dopo la proiezione, applicare gli indici Sobol al set ridotto.

Identificazione del parametro: utilizzare le misure per calibrare i parametri influenti e praticamente identificabili. Residui di peso secondo l'incertezza della misura, ispezionare la classificazione e la correlazione dei parametri giacobini, utilizzare metodi robusti quando gli outlier lordi sono plausbili e convalidare il modello calibrato in modo indipendente.

Incertezze epistemiche: rappresentano la conoscenza incompleta delle proprietà materiali, dei campi spaziali, delle condizioni di confine, degli stati di degradazione, dei parametri calibrati e della discrepanza del modello.

Incertezze di alerazione: L'analisi dei rischi sismici probabilistic fornisce curve di rischio; vengono selezionate le opportune misure di record e intensità. (PEER, 2014; Padgett, Nielson e DesRoches, 2008).

Analisi strutturale probabilistica: propagare l'incertezza epistemica ed alearia attraverso analisi non lineari utilizzando Monte Carlo, LHS, surroghi o altri metodi verificati.

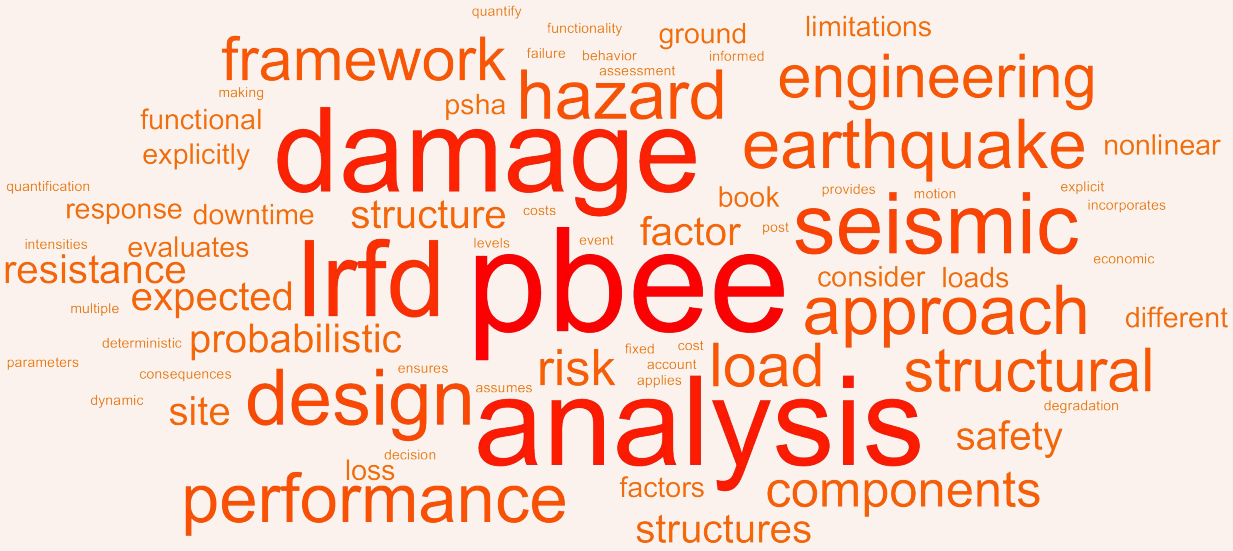
Funzioni di capacità e danni: definire gli stati limite e le modalità di fallimento potenziali utilizzando meccanica, esperimenti, osservazioni e quantità di risposta calibrate.

Fragilità e prestazioni: costruire curve o superfici di fragilità e combinarle con modelli di rischio e conseguenze per supportare decisioni informate sul rischio.

[96] I nuovi dati di monitoraggio possono attivare la ricalibrazione; l'analisi della sensibilità può rivelare che sono necessarie ulteriori misurazioni; la convalida può esporre la discrepanza del modello; I risultati PBEE possono identificare quali sono le più incertezze sulla decisione, i capitoli successivi forniscono i componenti di rischio e analisi necessari per completare questo ciclo.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 66

Intermezzo

Abstract

Questo capitolo funge da transizione tra il tradizionale Load and Resistance Factor Design (LRFD) e l'ingegneria del terremoto basata sulle prestazioni (PBEE). Mentre LRFD fornisce un quadro di sicurezza deterministico, manca una valutazione esplicita dei danni e la quantificazione del rischio.

PBEE supera queste limitazioni integrando l'analisi dei rischi, la valutazione della risposta strutturale, la stima dei danni e la valutazione delle perdite in un approccio unificato e informato sul rischio.

Questo capitolo delinea la motivazione per l'adozione di PBEE e introduce la struttura del libro, che si costruisce sistematicamente verso un quadro completo "bottom-up" PBEe.

66.1 Limitazioni di progettazione del fattore di carico e resistenza (LRFD) . . 2262
66.2 Perché passare a Performance-Based Earthquake Engineering (PBEE)? . . 2263
66.3 I quattro componenti di PBEE 2264
66.4 Struttura del Libro 2265

66.1 Limitazioni di progettazione del fattore di carico e resistenza (LRFD)

1 Progettazione del fattore di carico e resistenza (LRFD), §37.3, è una metodologia ampiamente utilizzata nell'ingegneria strutturale, in particolare per la progettazione di acciaio e cemento. Mentre fornisce un quadro probabilistico per spiegare le incertezze nei carichi e nelle proprietà materiali, ha diverse limitazioni che richiedono la transizione alla Performance-Based Earthquake Engineering (PBEE):

COPIA DI REVISIONE

Controllo di sicurezza a singolo livello LRFD garantisce che le strutture rimangano sicure sotto carichi predefiniti, ma non considera esplicitamente i criteri di prestazione oltre la resistenza e la manutenzione, come la riparazione post-earthquake o il downtime.

La mancanza di considerazione esplicita del danno: LRFD assicura che una struttura non collassi sotto gli stati limite finali, ma non quantifichi i danni attesi in diverse intensità di terremoto. Le strutture progettate per LRFD possono subire danni significativi durante un evento sismico, portando ad alti costi di riparazione o perdita di funzionalità.

Inflessibilità per gli scenari di caricamento complessi: LRFD si basa su un approccio basato sul fattore lineare, che non considera esplicitamente il comportamento non lineare e il degrado o i danni cumulativi. Presuppone combinazioni di carico fisse, mentre le azioni sismiche sono dinamiche e variano in intensità, durata e contenuto di frequenza.

Margine di sicurezza uniformi Invece del disegno basato sul rischio: LRFD applica fattori di resistenza generici che non sono site- o struttura-specifico, e non si differenziano tra strutture con maggiori conseguenze di guasto (ad esempio ospedali vs magazzini). La stessa filosofia progettuale si applica alle regioni con rischi sismici molto diversi.

Incapacità al conto per chap: regione della fiducia in movimento terra: LRFD assume un insieme deterministico di fattori di carico, mentre i terremoti producono richieste altamente variabili; non incorpora analisi probabilistiche dei rischi sismici (PSHA) per quantificare la variabilità del rischio specifico sul sito.

66.2 Perché passare a Performance-Based Earthquake Engineering (PBEE)?

2 L'ingegneria del terremoto basata sulle prestazioni (PBEE) affronta queste limitazioni spostando da un approccio prescrittivo e basato su codice ad una struttura informata sul rischio che valuta le strutture in intensità sismica multiple.

Obiettivi di performance espliciti: Invece di controllare la forza e la funzionalità, PBEE valuta più livelli di prestazioni:

- **Operativo (O)**: Nessun danno significativo, la struttura rimane funzionale.
- **Occupazione immediata (IO)**: Minori danni, completamente riparabili.
- **Sicurezza della vita (LS)**: Danni moderati, riparabili ma non immediatamente funzionali.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

- **Prevenzione del collo (CP)**: danni gravi ma non guasti globali.

Quantificazione diretta delle conseguenze economiche e funzionali: PBEE incorpora il processo decisionale basato sui costi, stimando:

- Spese di riparazione previste.
- Preveduto inattività.
- - Si'.

Progettazione basata sul rischio utilizzando l'analisi dei rischi sismici probabilistici (PSHA): PBEE incorpora curve di rischio per il movimento terra specifiche del sito invece di utilizzare fattori di carico fissi, consentendo ai progetti di riflettere il rischio sismico effettivo.

Analisi non lineare e comportamento strutturale realistico: PBEE si basa sull'analisi non lineare della storia del tempo (NLTHA), catturando progressione dei danni, resa e degrado, che LRFD non fa.

Approccio orientato alla resilienza; LRFD non considera esplicitamente la funzionalità post-earthquake, mentre PBEE consente agli ingegneri di progettare per il rapido recupero dopo un evento.

66.3 I quattro componenti di PBEE

[3] PBEE è strutturata intorno a quattro componenti interconnessi, come illustrato nella figura. 66.1:

1. **Analisi dei rischi:** Quantificare la probabilità di sperimentare diversi livelli di terra tremando a un dato sito utilizzando *Analisi dei rischi sismici probabilistici* (PSHA) chapter 67.
2. **Analisi strutturale:** Valuta la risposta strutturale ai carichi sismici, incorporando *analisi dinamica non lineare* e parametri di domanda di ingegneria (EDPs), chapter 69.
3. **Analisi danni:** Utilizza i parametri di risposta per valutare danni fisici a *componenti strutturali e non strutturali*, chapter 70.
4. **Analisi della perdita:** Traduci danni in *perdite economiche, tempi di fermo e stime sulle perdite*, consentendo il processo decisionale basato sui costi, chapter 71.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

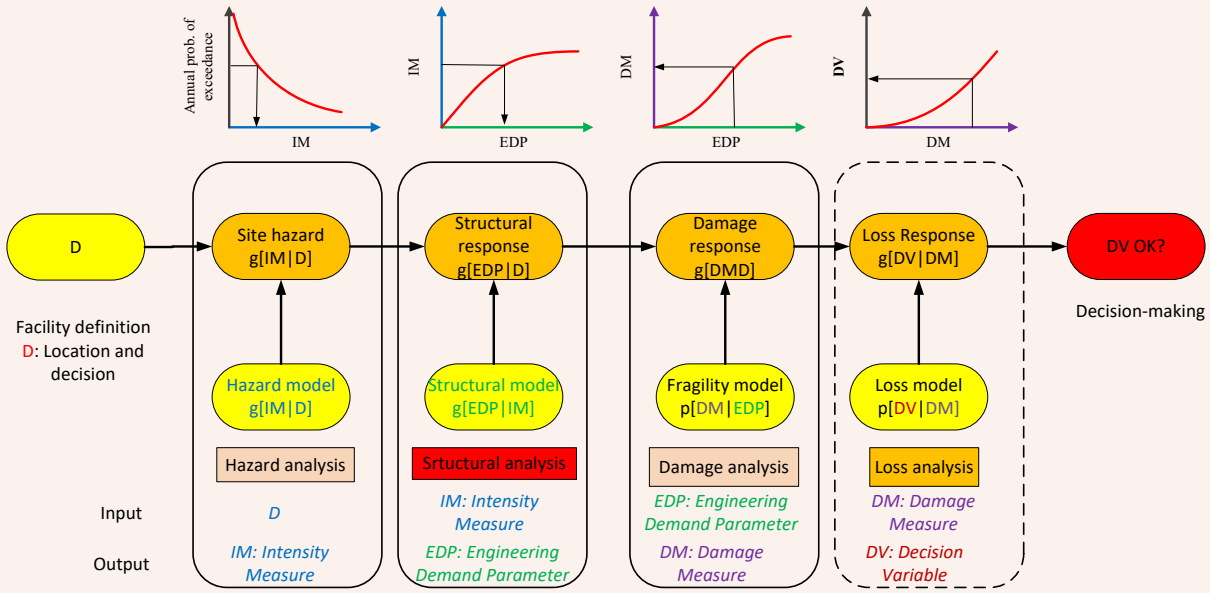


Figura 66.1: Quattro componenti di PBEE

66.4 Struttura del Libro

4 Ci sono due possibili approcci per l'introduzione di PBEE:

1. Avvicinamento Top-down: Fornire una panoramica generale di PBEE prima, quindi discutere ciascuno dei quattro componenti separatamente.
2. Approccio di fondo: Esplora prima ogni componente in dettaglio, poi sintetizzali all'interno del framework PBEE.

5 Questo libro adotta un *approccio dal basso verso l'alto*. I quattro capitoli successivi esaminano, nell'ordine, l'analisi della pericolosità, l'analisi strutturale, l'analisi del danno e l'analisi delle perdite.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 67

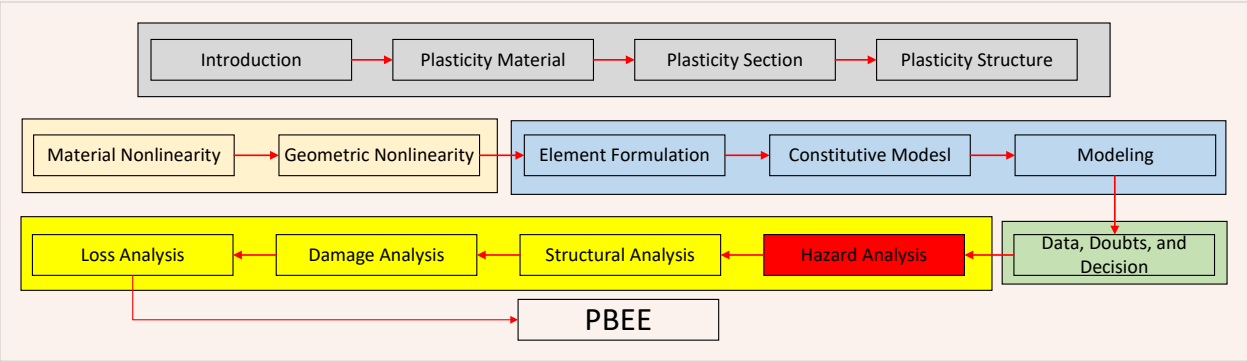
Analisi dei rischi

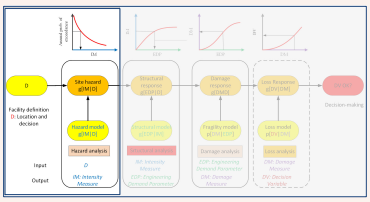
Abstract

Questa sezione spiega i fondamenti dell'analisi dei rischi sismici nell'ingegneria del terremoto. Elnashai e Di Sarno, 2015, Earthquake Engineering è un ramo di ingegneria interessato alla stima delle conseguenze del terremoto e la mitigazione di queste conseguenze. Si tratta di un soggetto interdisciplinare che coinvolge sismologi, ingegneri strutturali e geotecnici, architetti, urbanisti, tecnologi dell'informazione e scienziati sociali.

67.1 Introduzione 2267
67.2 Rapporto di ricorrenza 2268
67.3 Modello di adattamento 2270
67.3.1 Fondamenti 2270
67.3.2 Boore, Joyner e Fumel (1997) 2271
67.3.3 Valutazione parametrica . . . 2272
67.4 Analisi dei rischi sismici 2274
67.5 Analisi dei rischi sismici 2275
67.6 Tempo di acquisizione 2277
67.7 Curve di rischio sismiche 2277
67.8 Cartine di rischio sismica 2279
67.9 Deaggregazione del rischio sismico 2280
67.10 Spettri di risposta target 2281
67.11 Simulazione di movimento a terra stocastica 2285
67.11.1 Rezaeian e Der Kiureghian (r-d) modal 2286
67.11.2 Yamamoto e Baker (y-b) modello 2287
67.12 Funzioni di eccitazione del tempo di Endurance 2289
67.12.1 Prima generazione di ETEF . 2290
67.12.2 Seconda generazione di ETEF 2291
67.12.3 Terza generazione di ETEF . 2292
67.12.4 Quarta generazione di ETEF 2292
67.12.5 Quinta generazione di ETEF 2294
67.13 Ex 67.1: Analisi dei rischi sismici 2295

COPIA DI REVISIONE





Scritto da M. Amin Hariri-Ardebili in *Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures* by Saouma e Hariri-Ardebili, 2021

67.1 Introduzione

Il rischio sismico associato a una regione dipende da 1) probabilità di verificarsi di un terremoto che causa un certo livello di agitazione del terreno (pericolo sismatico) e 2) vulnerabilità strutturale delle costruzioni. L'analisi del rischio sismico richiede due modelli separati:

- Modello di seismicity (relazione/legge di ricorrenza): descrive la distribuzione geografica delle potenziali zone attive di origine (fonti sismotectoniche) e la distribuzione delle magnitudine in ciascuna fonte.
- Modello di adattamento: descrive l'effetto di un terremoto derivante da una specifica fonte sismotectonica, in qualsiasi dato sito, come funzione di magnitudo e distanza dal punto di vista sorgente.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

67.2 Rapporto di ricorrenza

Le relazioni di ricorrenza esprimono la probabilità che un terremoto di una data dimensione si verifichi nella fonte indicata durante un periodo specifico di tempo, ad esempio un anno. Gutenberg e Richter, 1954 rapporto di frequenza-magnitudine è espresso come Figura 67.1:

$$\ln N_M = a - b\,M$$
$$\log N_M = a' - b'\,M$$

dove a e b sono costanti di modello che possono essere valutate da dati osservativi sismatici attraverso il montaggio minimo-quare. N_M è il numero di terremoti di magnitudo maggiore o uguale a M per unità di tempo e unità di area. Il rapporto tra a e a' e anche b e b' is:

$$a = 2.3025a', \qquad b = 2.3025b'$$

Valori tipici per a' e b' (Kaila e Narain, 1971):

- Canada occidentale: $a' = 5.05$; $b' = 1.09$
- Giappone: $a' = 6.86$; $b' = 1.22$
- Stati Uniti d'America occidentali: $a' = 5.94$; $b' = 1.14$
- Stati Uniti d'America orientale: $a' = 5.79$; $b' = 1.38$

Si può notare che $\frac{1}{N_M}$ rappresenta il periodo di ritorno in unità di tempo.

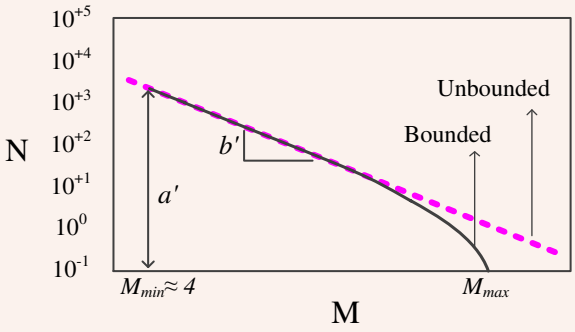


Figura 67.1: La legge (abbondante) di ricorsio

Registrazione di eventi con $M < 4$, anche se abbastanza numerosi, tornano indietro solo pochi anni. Questi dati sono solitamente esclusi quando si calcola il rapporto di magnitudo-recurrence come possono dare un bias fuorviante. $M_{min} \approx 4$. D'altra parte, per qualsiasi linea di guasto, c'è una magnitudine massima realizzabile. M_{max} nasce a causa di vincoli fisici che limitano la dimensione massima di un evento. M_{max}.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

La legge di ricorrenza limitata (modificata) Gutenberg-Richter può essere scritta come relazione quadratica, Figura 67.1:

$$N_M = N_{M_{min}} e^{-b(M-M_{min})} \; ; \quad M > M_{min}$$

dove $N_{M_{min}} = e^{a-b_{M_{min}}}$.

Considerando che la probabilità può essere interpretata come una frequenza relativa, la distribuzione cumulativa delle probabilità (dominata con il capitale F) di magnitudo del terremoto può essere quindi espresso come:

$$\begin{aligned} F_{\mathfrak{M}}(M) &= P\left[\mathfrak{M} < M | \mathfrak{M} > M_{min}\right] \\ &= \frac{N_{M_{min}} - N_M}{N_{M_{min}}} = 1 - e^{-b(M-M_{min})} \end{aligned}$$

e la sua funzione di densità probabilità corrispondente (doppiata con piccola f) sarà:

$$f_{\mathfrak{M}}(M) = \frac{d}{dM} F_{\mathfrak{M}}(M) = b e^{-b(M-M_{min})}$$

Pertanto, il Gutenberg-Richter confinato viene ulteriormente modificato applicando un limite superiore:

$$N_M = N_{M_{min}} \frac{e^{-b(M-M_{min})} - e^{-b(M_{max}-M_{min})}}{1 - e^{-b(M_{max}-M_{min})}}; \; M_{min} \leq M \leq M_{max}$$

La funzione di distribuzione cumulativa corrispondente diventa

$$F_{\mathfrak{M}}(M) = P\left[\mathfrak{M} < M | M_{min} \leq M \leq M_{max}\right] = \frac{1 - e^{-b(M-M_{min})}}{1 - e^{-b(M_{max}-M_{min})}}$$

e infine, la funzione corrispondente densità di probabilità è

$$f_{\mathfrak{M}}(M) = \frac{b e^{-b(M-M_{min})}}{1 - e^{-b(M_{max}-M_{min})}}$$

La legge di ricorrenza si applica sull'area geometrica di una determinata fonte terremotata, pertanto la definizione della geometria delle fonti del terremoto diventa critica nell'analisi dei rischi sismici. In generale, una fonte sismica può essere classificata come uno dei seguenti modelli (Filiatrault, 2013), Figura 67.2:

- Fonti di punto: I terremoti provenienti da attività vulcanica si verificano tipicamente in aree abbastanza piccole da essere caratterizzate come sorgenti di punto.
- Fonte linea: I piani di default che si propagano alla superficie sono generalmente ben definiti e generano terremoti superficiali su o vicino alla superficie, tali fonti possono essere considerate come sorgenti di linea undimensionali.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

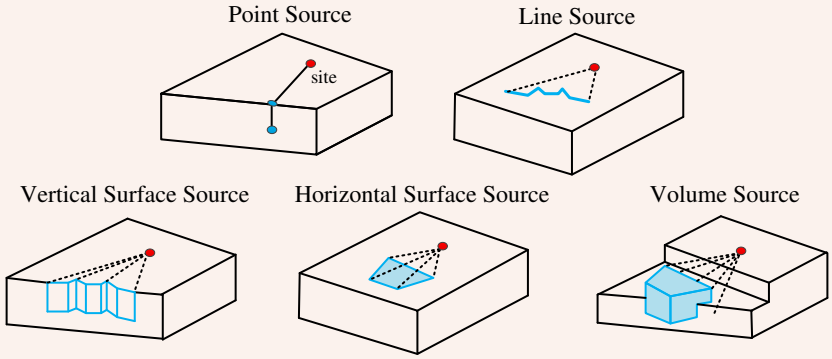


Figura 67.2: Classificazione delle fonti sismiche

- Fonte verticale: può essere utilizzato per modellare regioni con terremoti ben definiti ma più profondi.
- Fonte di superficie orizzontale: Nelle regioni in cui il malfunzionamento del terremoto è scarsamente definito (ad esempio, Nord America orientale), i guasti individuali non sono facilmente identificabili. Se si verificano terremoti poco profondi in queste regioni, possono essere classificate come sorgenti di superficie orizzontale.
- Fonte del volume: Nelle regioni in cui si verificano mal definiti e profondi terremoti, sono caratterizzate da grandi fonti di volume.

67.3 Modello di adattamento

67.3.1 Fondamenti

Una relazione di attenuazione è una funzione che viene utilizzata per stimare diverse misure di intensità del movimento terra come funzione di magnitudo e distanza (Atkinson e Boore, 1995; Somerville et al., 1997; Youngs et al., 1997).

$$\text{IM} = f\left(M, R\right) \tag{67.1}$$

dove l'IM è misura di intensità, ad esempio PGA, $S_a(0.2s)$, ecc.

In realtà, sono coinvolte molte variabili che sono anche difficili da valutare correttamente. chap: regione della fiducia Le relazioni di ottuso sono talvolta chiamate equazioni di previsione del movimento terra (GMPE). *Equazione di prevenzione del movimento terra* La forma funzionale più famosa per l'Equazione 67.1 is:

$$\begin{aligned}\log\left(\text{IM}\right) = \log(b_1) + \log\left[f_1(M)\right] + \log\left[f_2(R)\right] \\ + \log\left[f_3(M,R)\right] + \log\left[f_4(E_i)\right] + \log(\varepsilon)\end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove E_i è possibile produrre, creare siti e geotecnici effetti delle strutture; ε è un parametro che rappresenta il chap: regione della fiducia e errori.

67.3.2 Boore, Joyner e Fumel (1997)

Sono state proposte centinaia di GMPE per regioni diverse e contabilizzate su vari livelli di complessità. Douglas, 2011 ha riassunto tutte quelle relazioni dal 1964 al 2010, per esempio la seguente equazione è stata proposta da Boore, Joyner e Fumal, 1997 per le ordinazioni spettrali nei siti rocciosi:

$$\ln(\mathrm{Y}) = b_1 + b_2(M-6) + b_3(M-6)^2 + b_5 \ln(r) + b_V \ln\left(\frac{V_S}{V_A}\right)$$

dove

$$r = \sqrt{r_{jb}^2 + h^2}$$

$$b_1 = \begin{cases} b_{1SS} & \text{for strike-slip earthquakes} \\ b_{1RV} & \text{for reverse-slip earthquakes} \\ b_{1ALL} & \text{if mechanism is not specified} \end{cases}$$

La variabile Y è accelerazione spettrale (5% smorzamento) in [g]; M è grandezza del momento, V_S è la velocità media dell'onda della cinghia [m/i] nella parte superiore di 30 m del profilo in considerazione, e V_A è riferimento velocità d'onda di taglio in [m/i].

Il r_{jb} è la distanza orizzontale più vicina in [km] dal sito alla proiezione superficiale della sorgente, e h è la profondità. Tutti i coefficienti sono in [km] e elencato in Tabella 67.1.

Il V_S può essere semplicemente stimato in Tabella 67.2. Si può notare che Y è il valore mediano dell'accelerazione spettrale. Pertanto, ln (Y) sarà il valore medio previsto. Inoltre, $\sigma_{\ln(\mathrm{Y})}$ è la deviazione standard ln (Y).

Diverse definizioni della distanza del sito-fonte sono, Figura 67.3:

- Distanza di avanzamento: la distanza più breve dalla stazione alla superficie della rottura
- Distanza Joyner-Boore: la distanza orizzontale più breve alla proiezione verticale della rottura
- Distanza sismogena: la distanza più breve da un sito a un punto su una superficie di rottura che è più profonda di qualche minima profondità sismogena
- Profondità sismogena: profondità dei materiali superficiali (somma che la rottura di superficie nei sedimenti è non sismogenica)
- Distanza ipocentrale: la distanza dalla stazione all'ipocenter

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 67.1: Coefficienti di periodo dipendente Boore, Joyner e Fumal, 1997 modello

Periodo	b_{1ss}	b_{1RV}	b_{1ALL}	b_2	b_3	b_5	b_V	V_A	h	$\sigma_{\ln(Y)}$
0	-0.313	-0.117	-0.242	0.527	0	-0.778	-0.371	1396	5.57	0.52
0.1	1.006	1.087	1.059	0.753	-0.226	-0.934	-0.212	1112	6.27	0.479
0.12	1.109	1.215	1.174	0.721	-0.233	-0.939	-0.215	1452	6.91	0.485
0.14	1.135	1.261	1.208	0.707	-0.23	-0.938	-0.228	1718	7.18	0.489
0.16	1.112	1.257	1.192	0.702	-0.226	-0.935	-0.248	1910	7.24	0.495
0.18	1.063	1.222	1.151	0.705	-0.216	-0.93	-0.27	2037	7.16	0.499
0.2	0.999	1.17	1.089	0.711	-0.207	-0.924	-0.292	2118	7.02	0.502
0.22	0.925	1.104	1.019	0.721	-0.198	-0.918	-0.315	2158	6.83	0.508
0.24	0.847	1.033	0.941	0.732	-0.189	-0.912	-0.338	2178	6.62	0.511
0.26	0.764	0.958	0.861	0.744	-0.18	-0.906	-0.36	2173	6.39	0.514
0.28	0.681	0.881	0.78	0.758	-0.168	-0.899	-0.381	2158	6.17	0.518
0.3	0.598	0.803	0.7	0.769	-0.161	-0.893	-0.401	2133	5.94	0.522
0.4	0.212	0.423	0.311	0.831	-0.12	-0.867	-0.487	1954	4.91	0.538
0.5	-0.122	0.087	-0.025	0.884	-0.09	-0.846	-0.553	1782	4.13	0.556
0.6	-0.401	-0.203	-0.314	0.928	-0.069	-0.83	-0.602	1644	3.57	0.569
0.7	-0.634	-0.452	-0.555	0.962	-0.053	-0.818	-0.639	1545	3.2	0.582
0.8	-0.829	-0.666	-0.76	0.992	-0.041	-0.809	-0.666	1476	2.98	0.593
0.9	-0.993	-0.848	-0.933	1.018	-0.035	-0.802	-0.685	1432	2.89	0.604
1	-1.133	-1.009	-1.08	1.036	-0.032	-0.798	-0.698	1406	2.9	0.613
1.1	-1.249	-1.145	-1.208	1.052	-0.03	-0.795	-0.706	1396	2.99	0.622
1.2	-1.345	-1.265	-1.315	1.064	-0.032	-0.794	-0.71	1400	3.14	0.629
1.3	-1.428	-1.37	-1.407	1.073	-0.035	-0.793	-0.711	1416	3.36	0.637
1.4	-1.495	-1.46	-1.483	1.08	-0.039	-0.794	-0.709	1442	3.62	0.643
1.5	-1.552	-1.538	-1.55	1.085	-0.044	-0.796	-0.704	1479	3.92	0.649
1.6	-1.598	-1.608	-1.605	1.087	-0.051	-0.798	-0.697	1524	4.26	0.654
1.7	-1.634	-1.668	-1.652	1.089	-0.058	-0.801	-0.689	1581	4.62	0.66
1.8	-1.663	-1.718	-1.689	1.087	-0.067	-0.804	-0.679	1644	5.01	0.664
1.9	-1.685	-1.763	-1.72	1.087	-0.074	-0.808	-0.667	1714	5.42	0.669
2	-1.699	-1.801	-1.743	1.085	-0.085	-0.812	-0.655	1795	5.85	0.672

Tabella 67.2: Stime V_S sulla base della classe del sito

NEHRP classe di sito B	1070 m/s
NEHRP classe di sito C	520 m/s
NEHRP classe di sito D	250 m/s
Rock	620 m/s
Soil	310 m/s

67.3.3 Valutazione parametrica

Si possono ricavare le seguenti osservazioni generalizzate per i GMPE, Figura 67.4:

- Aumentare la distanza diminuisce l'intensità misura (Y).
- Aumentare la grandezza aumenta la misura di intensità (Y).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

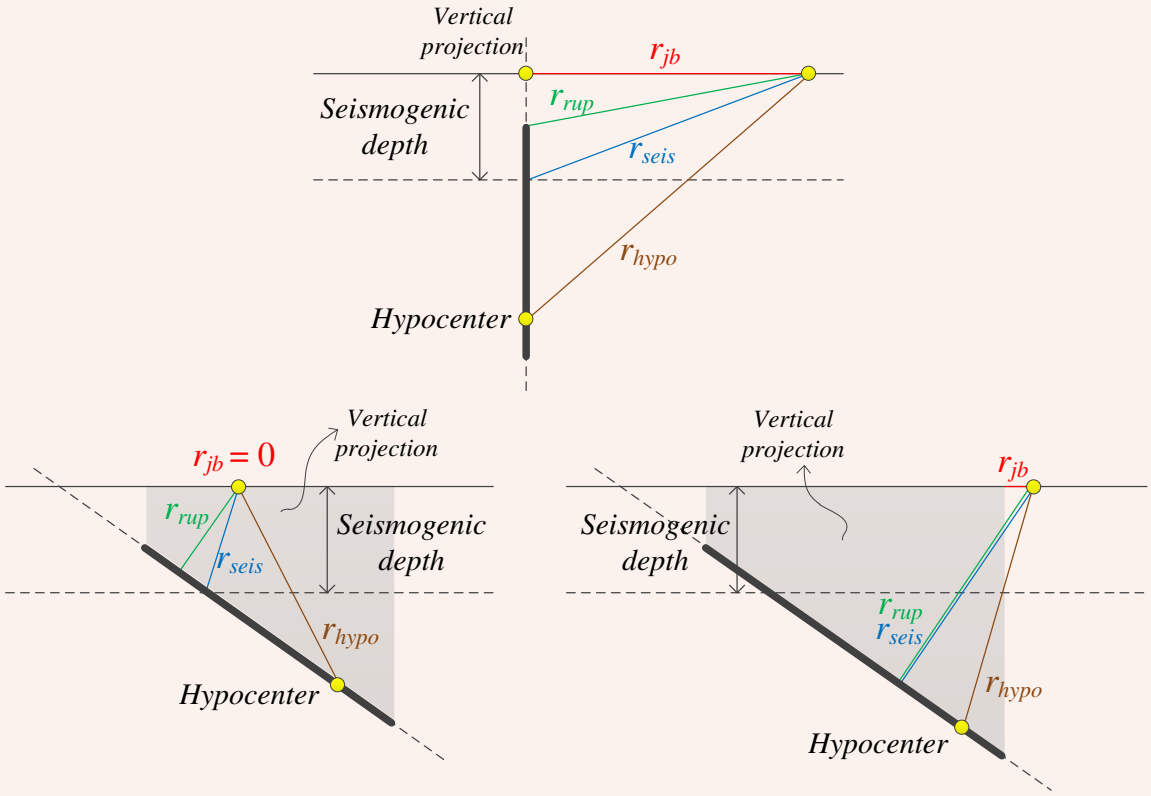
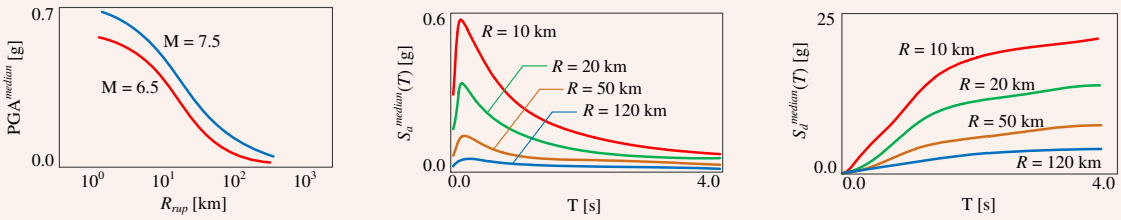


Figura 67.3: Classificazione delle distanze da sito a fonte

- La magnitudine e la distanza influiscono non solo sull'intensità, ma anche sulla forma spettrale.



(a) R e M effetti

(b) Evoluzione spettrale dipendente dal periodo

Figura 67.4: Indagine parametrica sui gmpes

COPIA DI REVISIONE

67.4 Analisi dei rischi sismici

L'analisi dei rischi sismici deterministici (DSHA) utilizza la geologia e la sismicità storica per identificare le fonti terremotate e interpretare il più forte terremoto (caso peggiore) che ogni fonte è in grado di produrre, a prescindere dal tempo. La procedura prevede lo sviluppo di uno scenario sismico e la caratterizzazione di tale scenario. L'applicazione del DSHA richiede quattro passaggi separati, Figura 67.5:

- STEP 1: Identificare e caratterizzare (geometria e massima magnitudine) tutte le fonti di terremoto in grado di generare scosse significative sul sito.
- STEP 2: Calcola la distanza sorgente-sito per ogni fonte identificata nel passo 1 (a seconda del rapporto di attenuazione, può essere utilizzata la distanza epicentrale o ipocentrale).
- STEP 3: Selezionare il terremoto di controllo. Questo è il terremoto che genererà la più grande agitazione al sito utilizzando un adeguato rapporto di attenuazione.
- STEP 4: Definire il pericolo sul sito in base al terremoto di controllo. Il rischio può essere espresso da ordinazioni spettrali, accelerazione massima del terreno, velocità massima del suolo, spostamento massimo del terreno ecc.

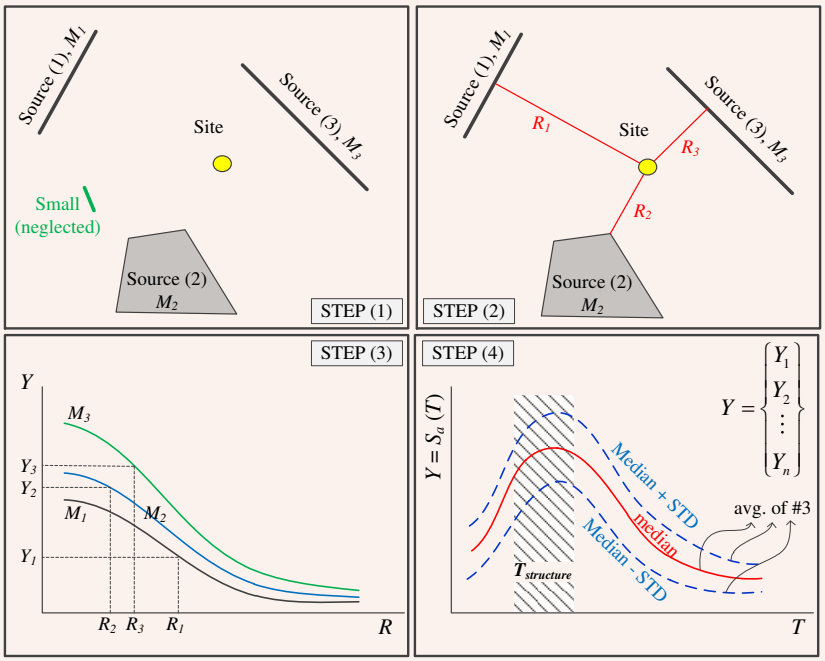


Figura 67.5: Analisi dei rischi sismici

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

- Vantaggi:
  - Semplice da applicare,
  - Procedura conservativa in cui le caratteristiche tettoniche sono ben definite (fonti lineari).
- Svantaggi:
  - Difficile da applicare a fonti distribuite vicino al sito,
  - chap: regione della fiducia non è trattato bene,
  - Non sono fornite informazioni sulla probabilità del terremoto di controllo,
  - Non sono fornite informazioni sul livello di tremori che potrebbero essere sperimentati nella durata della struttura al sito.

67.5 Analisi dei rischi sismici

Analisi probabilistica del rischio sismico (PSHA), proposta dal C.A. Cornell (1968) utilizzato per determinare il terremoto di progettazione per tutte le località degli Stati Uniti. Dà una quantificazione relativa del terremoto di progettazione, per un dato sito, in termini di parametri sismici (PGA, PGV, $S_a(T_i)$). Il PSHA tiene conto delle incertezze associate all'insorgenza e agli effetti di importanti terremoti, non può prevedere la data, l'entità, la posizione o gli effetti dei futuri terremotati nelle zone sismiche attive.

L'approccio PSHA utilizza gli elementi del DSHA e aggiunge una valutazione della probabilità che si verifichino moti di massa di una data magnitudine. La probabilità o la frequenza di insorgenza di terremoti di diversa magnitudo su ogni fonte sismica significativa e incertezze inerenti sono direttamente contabilizzate nell'analisi. L'eventuale presenza di ogni terremoto di magnitudo in qualsiasi parte della fonte è direttamente incorporata in un PSHA. I risultati dell'approccio PSHA possono anche essere utilizzati per identificare quali combinazioni di grandezza e distanza sono il più grande contributore al rischio. 68.3) di nuovo mostrato qui sotto:

- STEP 1: Definizione delle fonti sismogene: Per un dato sito vengono disegnate zone geografiche che rappresentano le sorgenti sismotectoniche. Per ogni zona, si presume che la probabilità di verificarsi del terremoto sia lo stesso per l'intera superficie (fonte sismogenica).
- STEP 2: Definizione di un modello di sismicità: Per ogni fonte, una relazione di magnitudo-recurrence del tipo $\ln N_M = a - b\,M$ La sismicità storica viene utilizzata per stabilire i parametri di questa relazione. M_{max}, è anche definito per ogni fonte.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

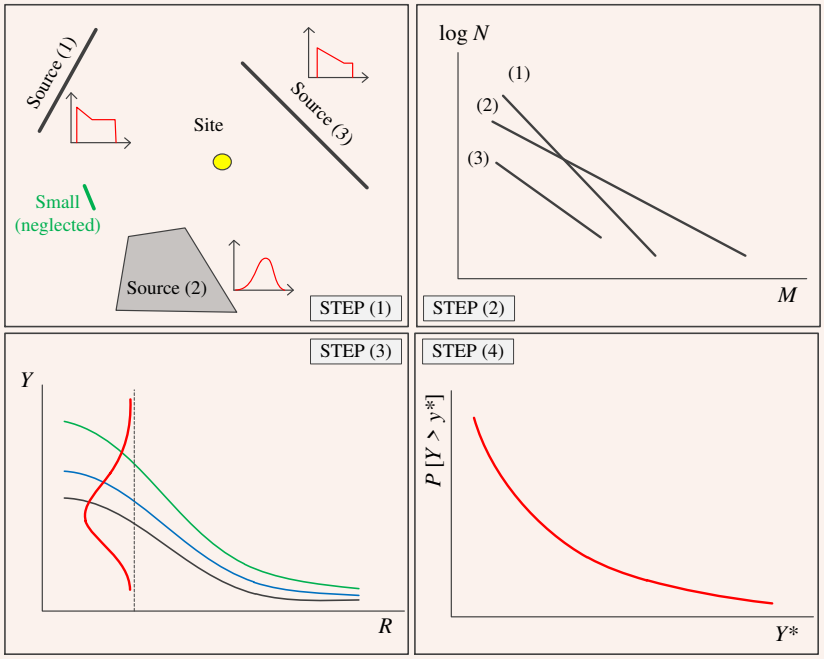


Figura 67.6: Analisi dei rischi sismici

- STEP 3: Definizione di un modello di attenuazione: una relazione di attenuazioni è determinata tra ogni fonte e un dato sito.
- STEP 4: Calcolo della curva di pericolo per il sito:
  - STEP 4-1: Calcolo del tasso di ricorrenza di un dato livello di movimento terra: Le relazioni di attenuazione sono combinate con le relazioni di magnitudo-recurrence per trovare il numero annuale dei terremoti che causano un livello prescelto del moto terra in qualsiasi dato sito.
  - STEP 4-2: Calcolo della probabilità annuale di superare un livello prescelto del movimento terra: una distribuzione teorica delle probabilità viene utilizzata per calcolare la probabilità annua di superamento di un livello di moto terreno scelto in qualsiasi dato sito. Il calcolo si basa sul tasso di ricorrenza calcolato nel passo 4-1.
  - STEP 4-3: Per ogni dato sito si ripetono tutte le fasi precedenti, che hanno una probabilità annuale costante di superamento. Le linee di deviazione vengono quindi tracciate per il parametro scelto del movimento terra. Queste linee di contorno si basano sulla stessa probabilità annuale di superamento per l'intera superficie.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

67.6 Tempo di acquisizione

Il tasso di ricorrenza, N, e il periodo di ritorno, T_R, sono ottenuti dalla sismicizia storica di una regione. Le predificazioni possono essere ottenute assumendo che la sequenza del verificarsi del terremoto segue un modello teorico di distribuzione delle probabilità.

In PSHA, il modello di probabilità di Poisson, che presuppone che i terremoti siano spazio e tempo indipendente (modello sismogenico), è generalmente considerato. $P_n(y)_t$di avere n terremoti che producono un valore del parametro sismico di interesse maggiore o uguale a y in un dato sito per un certo tempo t è dato da:

$$P_n(y)_{t|N} = \frac{(Nt)^n \ e^{-Nt}}{n!}$$

dove N è il numero di terremoti annuali (tasso di ricorrenza) che producono un valore del parametro sismico d'interesse maggiore o uguale a y sul sito.

La probabilità, $P_n(y)_{t|N}$, di avere almeno un terremoto che causi un valore del parametro sismico d'interesse maggiore o uguale a quello y al sito durante un determinato tempo t è quindi uguale a 1 meno la probabilità, $P_n(y)_{t|N}$, di non avere un terremoto che causi un valore del parametro sismico d'interesse maggiore o uguale a quello y al sito, Figura 67.7a.

$$P(y)_{t|N} = 1 - e^{-Nt} \tag{67.2}$$

Considerando la probabilità annuale ($t = 1$ anno), l'equazione cede a, Figura 67.7b.

$$P(y)_{1|N} = 1 - e^{-N} \tag{67.3}$$

Per piccoli valori N, il modello semplificato è

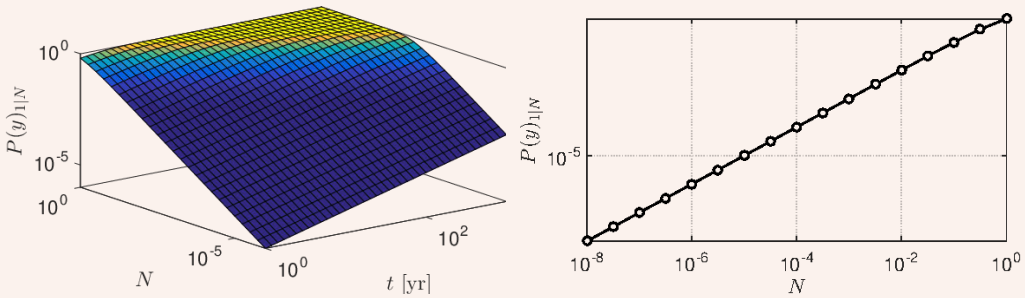
$$P(y)_{1|N} = N$$

67.7 Curve di rischio sismiche

Il risultato fondamentale di un PSHA è la curva del rischio sismico, che mostra il tasso annuale o la probabilità a cui verrà superato uno specifico livello di movimento terra presso il sito della diga. In qualsiasi curva di pericolo, l'asse verticale presenta probabilità annuali di superamento (o periodo di ritorno), e l'assio orizzontale è parametro misura intensità (IM). Le curve di rischio sismiche sono solitamente uno strumento importante e utile nell'analisi dei rischi delle dighe e delle strutture nucleari. 67.8 mostra le tipiche curve di rischio sismico presso il sito Pine Flat Dam.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Equazione 67.2 (b) Equazione 67.3

Figura 67.7: Il modello di probabilità di Poisson

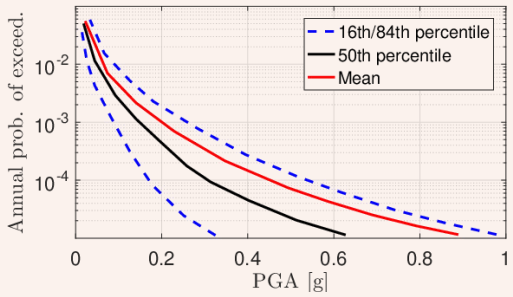


Figura 67.8: Campione di curve a rischio sismico medi e frattili

Ci sono diversi codici informatici per produrre una curva di rischio sismica. *Calcolatore di curva per Hazard OpenSHA* at www.opensha.org/apps è uno dei più famosi codici online.

Sulla base di raccomandazioni USBR (USBR-manual, 2011), la misura di intensità più comune nella generazione delle curve di rischio per le dighe è PGA; tuttavia, $S_a(T = 1sec)$ è tipicamente usato per le dighe argine, e periodi più brevi come $S_a(T = 0.2sec)$ or $S_a(T = 0.4sec)$ le curve sono spesso utilizzate per dighe in cemento.

Avendo accesso alle previsioni di rottura del terremoto e alle equazioni di previsione del movimento terra, la curva di pericolo sismico è stimata come segue (Applied Technology Council, 2012a):

$$\lambda\left(Y \geq y\right) = \sum_{f=1}^{N_f} \sum_{m=M_{min}}^{M_{max,f}} \sum_{\varrho=1}^{N_{\varrho,f,m}} \left(\lambda\left(f, m, \varrho\right) - \lambda\left(f, m + \Delta m, \varrho\right)\right) \times \left(1 - F_{Y|f,m,\varrho}\left(y\right)\right)$$

dove,

$$F_{Y|f,m,\varrho}\left(y\right) = \frac{1}{N_a} \sum_{a=1}^{N_a} \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{y}{exp\left(\mu_{\ln Y,a}\right)}\right)}{\sigma_{\ln Y,a}}\right)$$

COPIA DI REVISIONE

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

- Y è il parametro IM di sito agitando, di solito $S_a(T_1, \xi = 5\%)$,
- y è un valore particolare di Y,
- $\lambda\left(Y \geq y\right)$ è il tasso medio a cui il sito può sperimentare tremori di intensità y o più, qui indicato come il pericolo sismico,
- f è un indice per i guasti nelle previsioni di rottura del terremoto, $f = 1, 2, ..., N_f$,
- N_f è il numero di errori nelle previsioni della rottura del terremoto,
- m è grandezza del momento, in $\Delta m = 0{,}1$-grandi incrementi di grandezza; $m = M_{min}$, $M_{min} + \Delta m$, $M_{min} + 2\Delta m$, ..., $M_{max,f}$,
- M_{min} è la grandezza minima considerata, come 5.0,
- $M_{max,f}$ è la massima grandezza che il difetto f si ritiene che sia capace di produrre, secondo le previsioni della rottura del terremoto,
- ϱ è un indice per luoghi discreti lungo una traccia di guasto a cui gli epicenter del terremoto sono discortati, $\varrho = 1, 2, ..., N_{\varrho,f,m}$,
- $N_{\varrho,f,m}$ è il numero di posizioni discrete lungo la colpa f a cui un terremoto di magnitudo m può essere incentrato,
- $\lambda\left(f, m, \varrho\right)$ è frequenza media con quale difetto f può produrre terremoti di magnitudo m o maggiore in posizione ϱ, secondo le previsioni di rottura del terremoto,
- $F_{Y|f,m,\varrho}\left(y\right)$ è probabilità che l'intensità di trematura $Y \leq y$ dato un terremoto su colpa f di grandezza m con epicenter situato a ϱ,
- a è un indice delle equazioni di previsione del movimento terra utilizzate qui, $a = 1, 2, ..., N_a$,
- N_a è il numero di equazioni di previsione del movimento terra utilizzate,
- Φ è la normale funzione di distribuzione cumulativa standard valutata al termine tra parentesi. Questa tesi assume che tutte le equazioni di previsione del movimento terra presuppongono che Y è distribuita normalmente su magnitudo, distanza, meccanismo, ecc.
- $\mu_{\ln Y,a}$ è il valore atteso del logaritmo naturale di Y sotto l'equazione di previsione del movimento terra a.
- $\sigma_{\ln Y,a}$ è deviazione standard totale del logaritmo naturale di Y sotto l'equazione di previsione del movimento terra a.

67.8 Cartine di rischio sismica

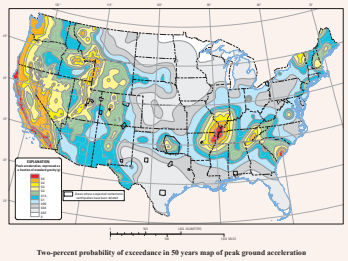
Le mappe nazionali di rischio sismico sono prodotte solitamente utilizzando le curve di pericolo con più 5%- smorzato le ordinazioni di accelerazione spettrale a periodi di 0,0 (PGA), 0.2, 0.3, 0.5, 0.75, 1.0 e 2.0 secondi. $N = 0.00211$, 0,0103 e 0.00040 all'anno sono utilizzati per ottenere i valori corrispondenti per 10%, 5% e 2% probabilità di superamento

COPIA DI REVISIONE

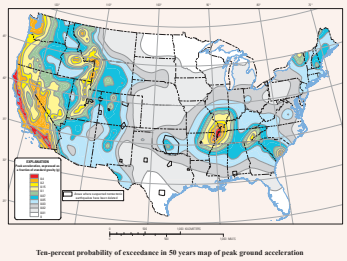
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

in 50 anni. La probabilità di superare è solitamente calcolata utilizzando il modello probabilistico Poisson (tempo-indipendente). mappe di pericolo, le condizioni del sito uniformemente solido-rock con la velocità media dell'onda della cesoia di 760 m/s nella parte superiore 30 m della crosta è stato assunto.

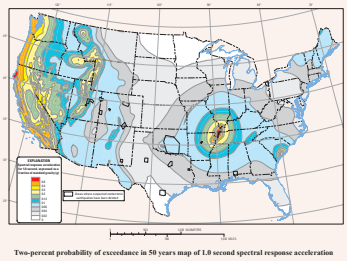
Le mappe di rischio sismico del campione per gli Stati Uniti sono mostrate in Figura 67.9. United States Geological Survey (USGS) National Hazard Maps mostra la distribuzione dei livelli di agitazione del terremoto che hanno una certa probabilità di verificarsi negli Stati Uniti. Si può creare una mappa per i rischi personalizzata utilizzando l'applicazione online USGS[1]



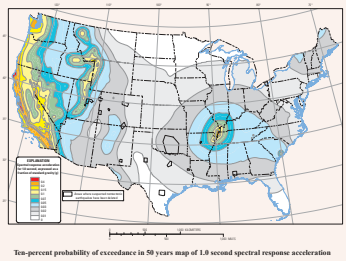
(a) 2%/50yr; PGA



(b) 10%/50yr; PGA



(c) 2%/50yr; $S_a(T = 1.0s)$



(d) 10%/50yr; $S_a(T = 1.0s)$

Figura 67.9: Campioni di noi mappe per i pericoli

67.9 Deaggregazione del rischio sismico

Le trame di deaggregazione dei rischi sismici sono utili in quanto possono fornire una chiara visione sul contributo dei diversi parametri nel processo di selezione record. Inoltre possono essere utilizzati per l'identificazione della fonte che controlla il pericolo al sito diga.

[1] USGS Custom Hazard Map

COPIA DI REVISIONE

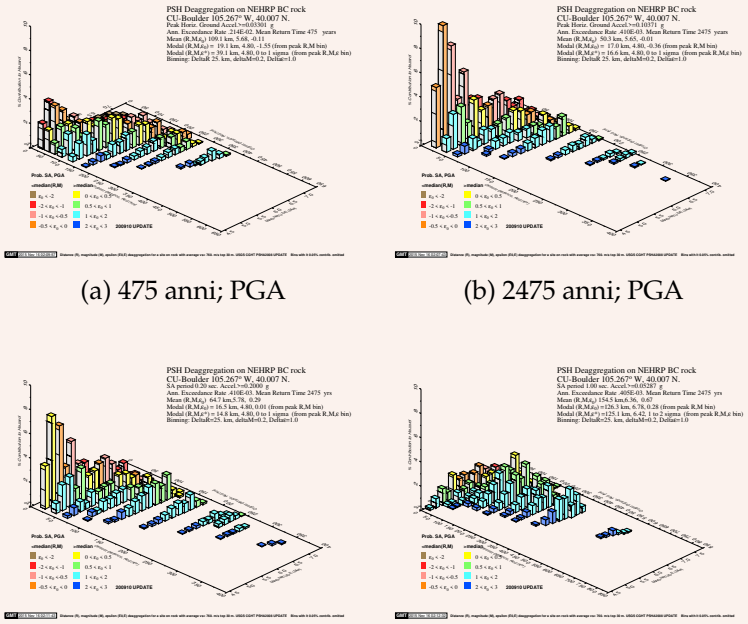
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Una trama di deaggregazione mostra le combinazioni di magnitudo e distanza che contribuiscono maggiormente ad una curva di pericolo. Una trama di deaggregazione dipende dall'intensità dell'interesse e dalla probabilità di superamento. In pratica, la deaggragazione viene ottenuta numericamente su piccoli incrementi di magnitudine, Δm, e distanza, Δr.

$$C(M,R) = \frac{N(m \le M < m + \Delta m \; ; \; r \le R < r + \Delta r)}{N_{total}}$$

dove $N(M,R)$ è tasso di ricorrenza dei terremoti che hanno una magnitudo e distanza intorno m e re N_{total} è tasso di ricorrenza totale al sito.

Figura 67.10 mostra i diagrammi sismici di deaggregazione per l'Università del Colorado Boulder con diverse misure di intensità e periodi di ritorno su roccia media (USGS, 2003). La distanza modale, la magnitudo e il termine inter-evento si possono trovare in ogni caso.



(a) 475 anni; PGA (b) 2475 anni; PGA

(c) 2475 anni; $S_a(T = 0.2s)$ (d) 2475 anni; $S_a(T = 1.0s)$

Figura 67.10: Campioni di appezzamenti sismici deaggregazione per l'università di coloreado boulder

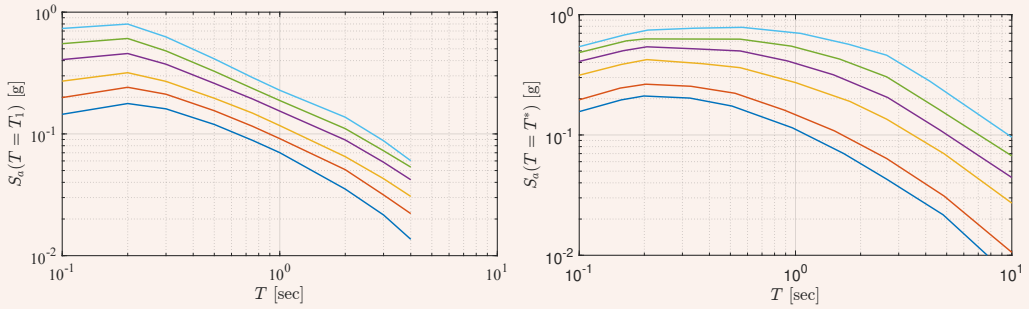
67.10 Spettri di risposta target

Per ciascuno dei diversi intervalli di rischio sismico utilizzati per l'analisi che vengono selezionati dalla curva del pericolo sismica del sito, sono necessari uno spettro.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

- Spettro di Hazard uniforme (UHS)
- Spettra condizionale (CS)
- Spettro di magro condizionale (CMS)

U.S.A. *Spettro di Hazard uniforme* sono calcolate dalle curve di rischio sismiche, che vengono fatte sviluppando le curve di pericolo per diversi periodi di vibrazione per definire gli spettri di risposta. Poi, per una data probabilità di superamento o periodo di ritorno, le ordinazioni vengono prelevate dalle curve di pericolo per ogni accelerazione spettrale e viene generato uno spettro "equal risposta del rischio'. Così, le curve degli spettri di risposta sono generate per periodi di ritorno specificati di interesse, solitamente 10.000 e 50.000 anni, ma spesso a periodi di rendimento inferiori, intermedi o anche più elevati. 67.11a mostra l'UHS solo per la direzione orizzontale al sito diga ipotetica.



(a) UHS (UHS)T_1 = 0.3 s) (b) CMS (T^* = 2.5 s)

Figura 67.11: Confronto tra diversi spettro di risposta

D'altra parte, lo spettro condizionale (CS) specifica la distribuzione di probabilità delle accelerazioni spettrali nei diversi periodi, condizionata al valore dell'accelerazione spettrale nel periodo di riferimento T^* (Lin e Baker, 2014). Lo spettro condizionale tiene conto delle correlazioni tra le accelerazioni spettrali ai vari periodi per determinare lo spettro atteso e la relativa variabilità (Baker e Jayaram, 2008). La Figura 67.11b mostra esempi di CMS a diversi livelli di rischio per una struttura con T^* = 2.5 s.

Per eventi frequenti, gli UHS e CMS dovrebbero avere forme simili. Per eventi rari, l'ampiezza di un CMS sarà più piccola in alcuni periodi rispetto al UHS come lo spettro medio condizionale quantifica uno spettro meno conservatore e realistico per un singolo terremoto. La CS differisce dal CMS solo in quanto ritiene chap: regione della fiducia L'uso di CMS o CS fornirà stime più accurate della risposta per una data intensità di agitazione del terremoto rispetto all'UHS, ma è necessario un ulteriore sforzo per generare questi tipi di spettro.

La versione estesa di CMS, che considera altri parametri del movimento terra rispetto agli spettri della risposta, è la misura generale dell'intensità condizionale (GCIM) (Bradley, 2010)Questo metodo si basa principalmente sulla costruzione della distribuzione multiva-

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

riata di qualsiasi serie di IM a movimento terra condizionata sul verificarsi di una specifica IM (solitamente ottenuta da PSHA).

I passi fondamentali per calcolare un CMS, che è adottato da (Lin e Baker, 2014), può essere riassunto come segue:

- Determinare i parametri di input per il terremoto, compresa l'accelerazione spettrale target, $S_a(T^*)$, al periodo di condizionamento, T^*, utilizzando il PSHA e la magnitudine causale del terremoto, M, distanza, R, meccanismo di rottura e condizione del sito, θ.
- Computare il mezzo logaritmico, $\mu_{\ln S_a}(M, R, \theta, T_i)$, e deviazione standard, $\sigma_{\ln S_a}(M, \theta, T_i)$, di accelerazione spettrale in tutti i periodi; T_i, utilizzando i modelli GMPE.
- Compute epsilon, $\varepsilon(T_i)$, (numero di deviazioni standard per le quali $\ln S_a(T_i)$ differisce dal media ordina spettrale previsto da un dato GMPE) per qualsiasi $S_a(T_i)$ valore:

$$\varepsilon(T_i) = \frac{\ln S_a(T_i) - \mu_{\ln S_a}(M, R, \theta, T_i)}{\sigma_{\ln S_a}(M, \theta, T_i)}$$

- Compiti l'accelerazione spettrale logaritmica media condizionale, $\mu_{\ln S_a(T_i)|\ln S_a(T^*)}$, utilizzando il modello di correlazione (Baker e Jayaram, 2008) che specifica il coefficiente di correlazione tra coppie di valori epsilon a due periodi, $\rho\left(\varepsilon(T_i), \varepsilon(T^*)\right)$, as:

$$\mu_{\ln S_a(T_i)|\ln S_a(T^*)} = \mu_{\ln S_a}(M, R, \theta, T_i) + \rho\left(\varepsilon(T_i), \varepsilon(T^*)\right) \sigma_{\ln S_a}(M, \theta, T_i)$$

- Deviazione standard condizionale completa, $\sigma_{\ln S_a(T_i)|\ln S_a(T^*)}$, as:

$$\sigma_{\ln S_a(T_i)|\ln S_a(T^*)} = \sigma_{\ln S_a}(M, \theta, T_i)\sqrt{1 - \rho^2\left(\varepsilon(T_i), \varepsilon(T^*)\right)}$$

- La combinazione di deviazione standard condizionale e valore medio condizionale specifica una distribuzione completa dei valori di accelerazione spettro-logaritmica in tutti i periodi. La distribuzione dello spettro risultante è denominata CS, da distinguersi dal CMS che non considera la variabilità.

Valutazioni delle prestazioni basate sull'intensità (IBPA)

Questo metodo valuta le prestazioni di una struttura assumendo che sia sottoposto ad una specifica intensità di trematura. Nel caso delle strutture del telaio, l'intensità dello scuotimento è definita da un 5% spettri di risposta all'accelerazione elastica smorzata. Questa valutazione viene solitamente utilizzata quando la struttura è sottoposta al terremoto che agita con uno spettro specifico di risposta (come lo spettro della risposta del design) (Applied Technology Council, 2012b), Figura 67.12.

Valutazioni sulle prestazioni basate sugli scenari (SBPA)

Questo metodo valuta le prestazioni di una struttura, assumendo che sia sottoposto agli effetti di un terremoto di magnitudo specifico che si verifica in una posizione specifica

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

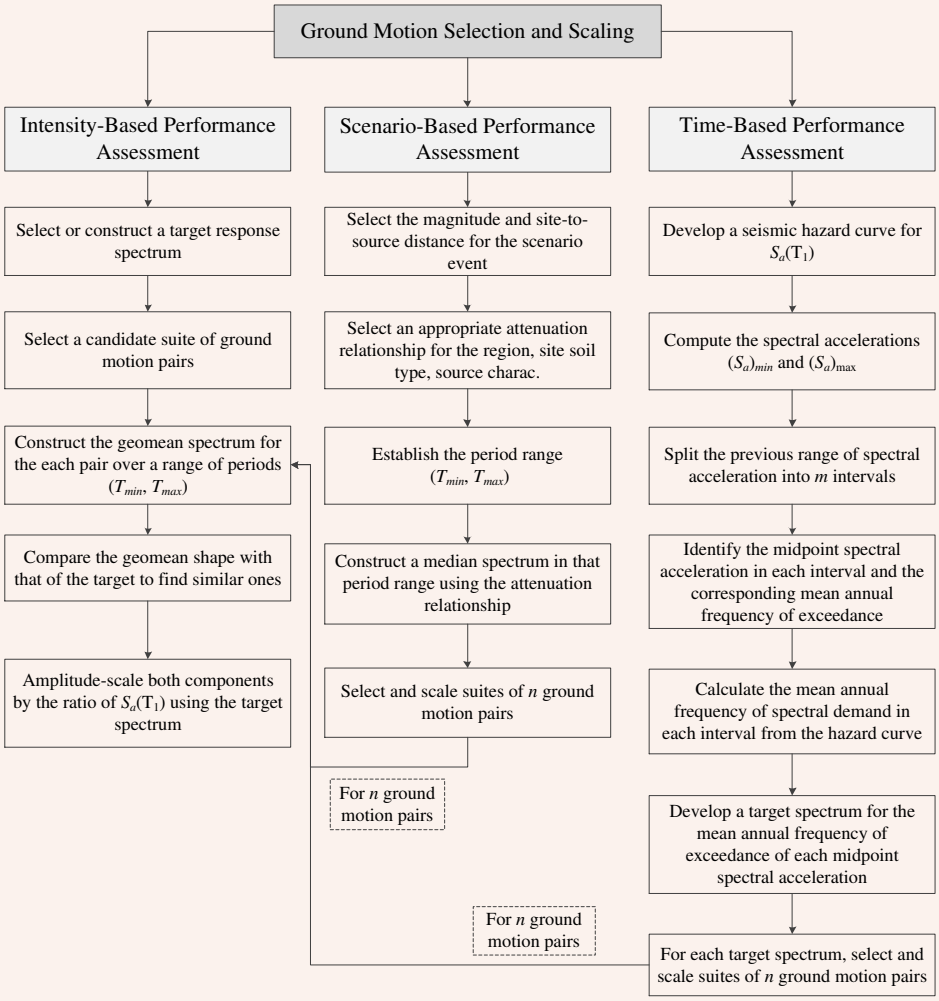


Figura 67.12: Confronto tra selezione e scalabilità del movimento terra per IBPA, SBPA e TBPA

rispetto al sito della struttura. Le valutazioni dello scenario possono essere utili per i decisori con strutture situate vicino ad uno o più noti difetti attivi. chap: regione della fiducia nell'intensità del terremoto, data lo scenario, è considerato (Applied Technology Council, 2012b), Figura 67.12.

Valutazione delle prestazioni basate sul tempo (TBPA)

Questo metodo valuta le prestazioni di una struttura durante un periodo di tempo considerando tutti i terremoti che possono verificarsi in quel periodo di ora e la probabilità che ciascuno si verifichi. chap: regione della fiducia nella grandezza e la posizione dei terremoti futuri, nonché l'intensità del movimento risultante da questi terremotati. Le

COPIA DI REVISIONE

valutazioni basate su un anno sono utili per le valutazioni dei costi-benefici utilizzate per decidere tra criteri di prestazione alternativi (Applied Technology Council, 2012b).

Figura 67.12 si confronta la procedura passo per passo per la selezione del movimento terra e scalare in base ai tre metodi sopra menzionati. 67.12 sono i seguenti: $(S_a)_{min}$ = 0,05 g, e $(S_a)_{max}$ è associato alla frequenza annuale di superamento di $0.00002/yr$ (cioè, 1 occorrenza in 50.000 anni). m è generalmente consigliato di essere 8.

67.11 Simulazione di movimento a terra stocastica

Sebbene l'uso di vere e proprie registrazioni del moto terra sia un metodo standard nella valutazione sismica delle strutture, può soffrire di avere un numero limitato di movimenti registrati a terra (che potrebbero coprire una gamma stretta e discreta di rischio sismico) e può richiedere la simulazione di record extra del movimento terra da utilizzare nel contesto di PBEE.

La maggior parte delle tecniche di simulazione del movimento terra sono in grado di generare una serie di tempo-accelerazione basata su uno scenario particolare rischio sismico che li rende un'ottima opzione per l'uso in SBPA (Rezaeian e Der Kiureghian, 2010), (Yamamoto e Baker, 2013). In generale, queste tecniche possono essere divise in due gruppi (Yamamoto, 2011; Taborda e Roten, 2014; Rezaeian e Sun, 2014):

- I modelli basati sulla fisica simulano il movimento terra modellando esplicitamente la rottura del guasto, la propagazione dell'onda e l'amplificazione del sito vicino alla superficie; richiedono informazioni precise per fornire una buona stima dei movimenti reali. Questo approccio è, in generale, costoso da implementare e non molto accurato per i movimenti ad alta frequenza (Pitarka et al., 1998; Taborda e Roten, 2014).
- I modelli stocastici simulano direttamente le serie temporali del movimento terra e sono calibrati empiricamente in base al dataset esistente. I modelli stocastici possono essere costruiti utilizzando uno dei seguenti metodi (Rezaeian e Der Kiureghian, 2010): 1) passare un rumore bianco attraverso un filtro (Shinozuka e Sata, 1967), 2) passare un treno di impulsi Poisson attraverso un filtro lineare (Cornell, 1964), 3) modello medio mobile autoregressivo (Hoshiya e Hasgur, 1978), e 4) modelli spettrali evolutivi (Priestley, 1965). Per ottenere una buona stima dei movimenti reali del suolo, sia la non-stationarity temporale (l'ampiezza cambia con il tempo) che la non stazionaria spettrale (il cambiamento di frequenza con il momento) devono essere contabilizzati nel modello.

In questa sezione, sono spiegati due modelli di movimento a terra stocastico recentemente sviluppati e ampiamente utilizzati.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

67.11.1 Rezaeian e Der Kiureghian (r-d) modal

Rezaeian e Der Kiureghian hanno sviluppato un modello di movimento a terra completamente non stazionario basato su un processo di fusione bianco filtrato modulato con parametri di tempo-varying (Rezaeian e Der Kiureghian, 2008), (Rezaeian e Der Kiureghian, 2010). In questo modello le caratteristiche non stazionarie temporali e spettrali sono completamente decoupled che facilita la facile identificazione dei parametri del modello. Il modello ha un piccolo numero di parametri con interpretazioni fisiche. La serie di tempo-serie di accelerazione discorizzata del moto terra può essere espressa come:

$$\hat{x}\left(t|\boldsymbol{\theta},\mathbf{W}\right)=\beta\left(t,\boldsymbol{\theta}\right)\sum_{i=1}^{k}\frac{h\left[t-t_i,\boldsymbol{\theta}(t_i)\right]}{\sqrt{\sum_{j=1}^{k}h\left[t-t_j,\boldsymbol{\theta}(t_j)\right]^2}}w\left(i\Delta t\right),$$
$$k\Delta t<t<(k+1)\Delta t$$

dove $\mathbf{W}=\left[w\left(i\Delta t\right);i=1,2,...,N_T\right]$ è una sequenza di rumore gaussiano bianco, Δt è l'intervallo di discretizzazione scelto, $\boldsymbol{\theta}$ è un n_θ-dimensionale modello parametro vettoriale (cioè. $\boldsymbol{\theta}=[\theta_1,\theta_2,...,\theta_{n_\theta}]$), $\beta\left(t,\boldsymbol{\theta}\right)$ è la funzione di tempo-modulazione, e $h\left[t-\tau,\boldsymbol{\theta}(\tau)\right]$ è una funzione di impulso unitaria dovuta alla risposta pseudo-accelerazione di un oscillatore lineare SDOF con frequenza naturale dipendente dal tempo $\omega_f(\tau)$ e rapporto di smorzamento $\zeta_f(\tau)$, in cui τ indica il tempo del polso.

$$h\left[t-\tau,\boldsymbol{\theta}(t)\right]=\begin{cases}\dfrac{\omega_f(\tau)}{\sqrt{1-\zeta_f^2(\tau)}}\exp\left[-\omega_f(\tau)\zeta_f(\tau)(t-\tau)\right] & \\ \qquad\sin\left[\omega_f(\tau)\sqrt{1-\zeta_f^2(\tau)}(t-\tau)\right] & \tau\le t\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

La funzione di frequenza dipendente dal tempo assume una forma lineare, mentre la funzione di smorzamento è assunta costante:

$$\omega_f(\tau)=\omega_{mid}+\omega'\left(\tau-t_{mid}\right)\ ;\qquad\zeta_f(\tau)=\zeta_f$$

dove ω_{mid} si riferisce alla frequenza centrale, ω' è la variazione di frequenza, e t_{mid} è la metà del tempo di forte durata del movimento (il momento in cui l'intensità Arias raggiunge 45% del suo valore finale).

Per la funzione di modulazione, viene selezionata una funzione gamma-tipo che è controllata da tre parametri:

$$\beta\left(t,I_A,\alpha_2,\alpha_3\right)=\underbrace{\sqrt{I_A\frac{(2\alpha_3)^{2\alpha_2-1}}{\Gamma\left(2\alpha_2-1\right)}}}_{\text{intensity}}\underbrace{t^{\alpha_2-1}}_{\text{shape}}\underbrace{e^{-\alpha_3 t}}_{\text{duration}}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove $\Gamma(.)$ è la funzione gamma, I_A è l'intensità di Arias scalata, mentre α_2 e α_3 controllano la forma e la durata e possono essere collegati alla fisica del problema mediante la durata effettiva, $D_{5-95} = I_A^{95\%} - I_A^{5\%}$, e t_{mid}. Infine, la funzione simulata viene filtrata con un filtro passa-alto per garantire una velocità residua nulla.

Il vettore del parametro del modello di movimento terra può essere riassunto come $\boldsymbol{\theta} = \left\{I_A, D_{5-95}, t_{mid}, \omega_{mid}, \omega', \zeta_f\right\}$. Le relazioni predittive sono state sviluppate per ogni parametro del modello, adattando il modello stocastico ad un sottoinsieme della nuova generazione di database di attenuazione (NGA) forte movimento. $\boldsymbol{\theta}$ in termini di terremoti e caratteristiche del sito: 1) magnitudo del momento (M_w), 2) distanza più vicina alla rottura (R_{rup}) in [km], 3) velocità d'onda della parte superiore di 30 m del suolo (V_{S30}) in [m/i], e 4) meccanismo di guasto (F_{mech}), sia srtike-slip o reverse, le equazioni empiriche assumono la seguente forma generica:

$$\Phi^{-1}\left[F_\theta(\theta)\right] = \mu\left(M_w, R_{rup}, V_{S30}, F_{mech}, \mathbf{c}\right) + \eta + \sigma$$

dove θ è un parametro del modello, $\Phi[.]$ è la funzione di distribuzione cumulativa Gaussiana standard (CDF), e F_θ è il CDF di θ (che è empiricamente determinato). $\Phi^{-1}\left[F_\theta(\theta)\right]$ trasforma un parametro modello dallo spazio fisico allo spazio normale standard. μ è il mezzo predetto come funzione del terremoto e le caratteristiche del sito e $\mathbf{c}$ rappresenta il vettore dei coefficienti di regressione. Inoltre, η e σ sono normalmente distribuite variabili a caso zero-mean e si riferiscono agli errori interevent e intra-evento, rispettivamente. I coefficienti di regressione, le variazioni dei termini di errore e le correlazioni tra i parametri del modello possono essere trovate in (Rezaeian e Der Kiureghian, 2010).

67.11.2 Yamamoto e Baker (y-b) modello

Yamamoto e Baker impiegarono la trasformazione del pacchetto wavelet (WPT) (che è l'estensione della versione distratta trasformata d'onda, DWT) per quantificare le caratteristiche temporali e frequenza delle serie temporali per generare movimenti stocastici (Yamamoto, 2011), (Yamamoto e Baker, 2013). Il WPT aumenta la flessibilità nel controllo della risoluzione in domini di tempo e frequenza, inoltre le funzioni base sono ortogonali, che permettono una facile ricostruzione delle serie temporali.

Il WPT inverso e in avanti sono definiti come:

$$c_{j,k}^i = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\psi_{j,k}^i(t)dt \;; \quad x(t) = \sum_{i=1}^{2^j}\sum_{k=1}^{2^{N-j}} c_{j,k}^i\psi_{j,k}^i(t)$$

dove $x(t)$ è la serie di tempo, 2^N è il numero di punti dati nella serie temporale, $c_{j,k}^i$ denota il i^{th} insieme di pacchetti wavelet al j^{th} parametro scala e k è il parametro di traduzione, e $\psi_{j,k}^i$ è la funzione WPT.

Yamamoto e Baker hanno usato questo vantaggio e definito due gruppi di grandi dimensioni (che contengono circa 70)% dell'energia totale nel movimento terra) e minore

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

(che contiene i restanti 30% di energia) coefficienti di pacchetti wavelet. Di conseguenza, i coefficienti totali dei pacchetti wavelets sono una combinazione di questi due gruppi:

$$\left|c^i_{j,k}\right|^2 = \left|c^i_{j,k,maj}\right|^2 + \left|c^i_{j,k,min}\right|^2$$

in cui $c^i_{j,k,maj}$ e $c^i_{j,k,min}$ sono i principali e minori coefficienti di pacchetti wavelet.

Questo modello richiede 13 parametri per quantificare completamente le caratteristiche di tempo e frequenza delle serie temporali di accelerazione, ma questi parametri sono categorizzati qui, per la formulazione dettagliata che i lettori vengono riferiti (Yamamoto e Baker, 2013).

- Per il gruppo principale: 1) centroide temporale $E(t)_{maj}$, 2) variazione temporale $S^2(t)_{maj}$, 3) centroide spettrale $E(f)_{maj}$, 4) variazione spettrale $S^2(f)_{maj}$, 5) correlazione tra tempo e frequenza dei coefficienti $\rho(t,f)_{maj}$, 6) media di ampiezze quadrate i coefficienti dei pacchetti wavelet $E(a)_{maj}$,
- Per il gruppo minore: 7) centroide temporale $E(t)_{min}$, 8) variazione temporale $S^2(t)_{min}$, 9) centroide spettrale $E(f)_{min}$, 10) Varianza spettrale $S^2(f)_{min}$, 11) correlazione tra coefficienti di tempo e frequenza $\rho(t,f)_{min}$,
- 12) casualità dell'ampiezza dei pacchetti wavelet $S(\xi)$, e 13) accelerazione quadrata cumulativa E_{acc}.

I pacchetti wavelet nel gruppo principale sono fortemente casuali in confronto a quelli del gruppo minore. Pertanto, le ampiezza quadrate e le posizioni di frequenza temporale dei pacchetti wavelets vengono modellate separatamente

$$a_{maj} \sim \text{Exponential}\left[E\left(\left|c^i_{j,k,maj}\right|^2\right)\right]$$
$$\left[t_{k,maj}, f_{i,maj}\right] \sim \text{Lognormal}\left[M_{maj}, \Sigma_{maj}\right]$$

dove a_{maj} è le ampiezza quadrate del coefficiente di pacchetto wavelet nel gruppo principale, $t_{k,maj}$ e $f_{i,maj}$ sono il centro del tempo e la posizione di frequenza dei principali coefficienti d'onda, e M_{maj} e Σ_{maj} sono definiti come:

$$M_{maj} = \begin{bmatrix} E\left(\ln t_{k,maj}\right) & E\left(\ln f_{i,maj}\right) \end{bmatrix}$$
$$\Sigma_{maj} = \begin{bmatrix} S^2\left(\ln t_{k,maj}\right) & Cov\left(\ln t_{k,maj}, \ln f_{i,maj}\right) \\ Cov\left(\ln t_{k,maj}, \ln f_{i,maj}\right) & S^2\left(\ln f_{i,maj}\right) \end{bmatrix}$$

D'altra parte, i pacchetti di wavelet nel gruppo minore possono essere stimati dalle

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

funzioni lognormale bivariate del tempo, della frequenza e dei residui (che richiedono solo cinque parametri da controllare):

$$\left|c^{i}_{j,k,min}\right|^{2} = \frac{1}{2\pi S\left(\ln t_{k,min}\right) S\left(\ln f_{i,min}\right)\sqrt{1-\rho^{2}\left(\ln t_{k,min}, \ln f_{i,min}\right)}}$$
$$\times \frac{1}{\ln t_{k,min}.\ln f_{i,min}} \exp\left[-\frac{W_1^2 - 2\rho\left(\ln t_{k,min}, \ln f_{i,min}\right) W_1 W_2 + W_2^2}{2\left(1-\rho^{2}\left(\ln t_{k,min}, \ln f_{i,min}\right)\right)}\right] \times \xi_{k,i}$$

dove $t_{k,min}$ e $f_{i,min}$ sono il centro del tempo e la posizione di frequenza dei coefficienti di wavelet minori, ρ è il coefficiente di correlazione, $\xi_{k,i}$ è una variabile casuale lognormal utilizzata per la calibrazione e due variabili intermedie sono definite come $W_1 = \frac{\ln t_{k,min} - E(\ln t_{k,min})}{S(\ln t_{k,min})}$ e $W_2 = \frac{\ln f_{i,min} - E(\ln f_{i,min})}{S(\ln f_{i,min})}$.

Infine, per generare un movimento di terra per uno scenario terremoto particolare, i 13 parametri sono collegati a quei parametri dello scenario utilizzando l'analisi della regressione a due stadi. Un gran numero di movimenti registrati del database NGA sono stati utilizzati per stimare i parametri utilizzando la stima massima della probabilità e la seguente forma funzionale:

$$Y = \alpha + \beta_1 M_w + \beta_2 \ln M_w + \beta_3 \exp M_w + \beta_4\left(R_{hyp} - R_{rup}\right) + \beta_5 \ln\sqrt{R_{rup}^2 + h^2} + \beta_6 \ln V_{S30} + \eta + \sigma$$

dove Y è il logaritmo naturale di un parametro modello, e σ e η sono residui intra- e interevent, rispettivamente. Il parametro h è assegnato per evitare di prevedere valori estremamente grandi di Y per piccoli valori R_{hyp} (distanza ipocenterica), e i parametri α e β_i sono coefficienti di regressione che possono essere trovati in (Yamamoto, 2011) e (Yamamoto e Baker, 2013).

67.12 Funzioni di eccitazione del tempo di Endurance

L'uso pratico del metodo di tempo di resistenza (ET) richiede funzioni di eccitazione del tempo di durata appropriate (ETEFs) che portano a risultati di analisi coerenti. Questa sezione mette in evidenza diverse generazioni di ETEF, così come le loro funzioni oggettive di produzione[2]Nel metodo di tempo di resistenza, gli ETEF sono utilizzati come funzioni di input del carico dinamico.Nel metodo ET tutti i livelli di intensità sono coperti da una singola funzione di eccitazione. In altre parole, ogni volta in un'eccitazione di tempo di resistenza corrisponde ad un particolare livello di intensità. Gli ETEF sono normalmente generati in modo che siano compatibili con gli spettri di progettazione desiderati o i set di movimenti e intensità del terreno che aumentano col tempo. La compatibilità con i

[2]Questa sezione è scritta in collaborazione con il Prof. H.E. Estekanchi e il Dr. M.R. Mashayekhi.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

movimenti di terra e l'intensificazione sono due caratteristiche principali degli ETEF che devono essere considerati nella simulazione di queste funzioni artificiali. Il profilo di aumento dell'ampiezza può assumere varie forme: in tempi di resistenza iniziali è stato adottato un profilo lineare (in cui la massima accelerazione è direttamente proporzionale al tempo). Le forme esponenziali sono anche considerate simulare le eccitazioni di tempo di resistenza coerenti con velocità assoluta cumulativa (Mashayekhi et al., 2018b).

La compatibilità con i movimenti di terra è un'altra caratteristica importante dell'eccitazione del tempo di resistenza. I moti terrestri hanno tre caratteristiche principali: intensità, contenuto di frequenza e durata. Per simulare un'efficace eccitazione di tempo di resistenza, queste tre caratteristiche devono essere considerate. Poiché il contenuto di frequenza e l'ampiezza dei movimenti sono adeguatamente riflessi negli spettri di risposta, considerando gli spettro della risposta nel processo di simulazione implica che ampiezza e contenuti di frequenza sono considerati opportunamente.

I requisiti sopra menzionati sono noti come vincoli di simulazione. Il numero di restrizioni simulanti è solitamente molto più del numero di variabili, indipendentemente dal quale viene utilizzato il metodo di definizione variabile, Mashayekhi, Estekanchi e Vafai, 2019a; Mashayekhi, Estekanchi e Vafai, 2019b. Poiché i metodi analitici non forniscono una procedura pratica per simulare ETEF, gli approcci di ottimizzazione vengono poi impiegati.

In questa sezione vengono spiegate le funzioni di carico dell'accelerazione esistenti, che differiscono in termini dello spettro target, della gamma dei periodi, delle funzioni oggettive, del passo temporale, della lunghezza della durata e dell'algoritmo di ottimizzazione. Queste eccitazioni sono disponibili online attraverso il metodo Endurance Time website. Nel percorso di progresso della produzione ETEF, cinque generazioni di eccitazioni tempo di resistenza possono essere distinte.

67.12.1 Prima generazione di ETEF

Le eccitazioni di prima generazione sono state generate solo per introdurre il concetto base del metodo ET. Gli ETEFs di questa generazione non sono adatti all'uso pratico. Nella simulazione di eccitazioni di prima generazione, è stato utilizzato il concetto di modelli casuali non stazionari in ampiezza e contenuto di frequenza. In questo metodo le funzioni di eccitazione sono espresse sommando un numero finito di funzioni armoniche come:

$$a(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i \sin(\omega_i t + \phi_i)$$

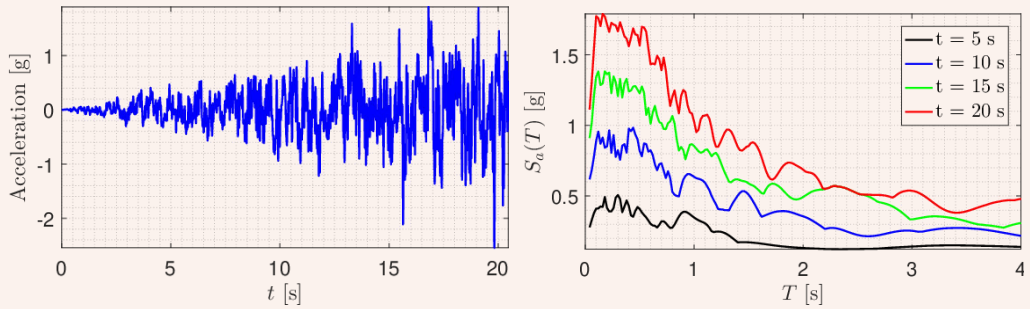
dove N è il numero di funzioni armoniche, ω_i e ϕ_i sono la frequenza angolare e l'angelo di fase i^{th} funzione sinusoidale, e A_i è l'ampiezza di frequenza.

È stata considerata una eccitazione casuale con distribuzione gaussiana, con zero media e deviazione standard di uno. Il numero dei punti dati dell'accelerazione è stato scelto per essere 2048, con la massima accelerazione di 1.0 g. Per rimuovere le frequenze indesiderate,

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

le eccitazioni sono state filtrate dalla tecnica di trasformazione inversa Fourier. L'obiettivo era quello di simulare un'eccitazione che corrisponde ad uno spettro particolare. Lo spettro di destinazione era uno spettro tipico del codice sismico, il segnale è stato modificato per corrispondere alla funzione di accelerazione spettrale regolando le sue ampiezze spettriche Fourier. Questa procedura è stata ripetuta fino a quando la corrispondenza accettabile non è stata raggiunta. L'acelerogramma stazionario risultante è stato quindi modificato applicando una funzione lineare del profilo che lo ha reso intensificante, rispetto alle accelerazioni di picco, a intervalli temporali diversi. Questi accelerogrammi hanno servito bene allo scopo di dimostrare il concetto di analisi del tempo di resistenza. 67.13a.



(a) Tempo di accelerazione; ETA20ac01 (1a generazione)

(b) Spettri di risposta; ETA20a01 (2a generazione)

Figura 67.13: Esempio di prove

67.12.2 Seconda generazione di ETEF

Nel processo di simulazione vengono considerati spettri di accelerazione e spostamento della seconda generazione, mentre lo spettro obiettivo può essere lo spettro medio di un insieme di movimenti terrestri o uno spettro codificante. Nella seconda generazione, le tecniche di ottimizzazione sono state impiegate per la prima volta per simulare nuovi ETEF. Nel contesto dell'ottimizzazione, le equazioni si esprimono in termini di funzioni oggettive. La funzione oggettiva di questa serie è mostrata in Equation 67.4. Gli spettri di accelerazione e spostamento sono considerati nella funzione oggettiva.

$$F(a_g) = \sum_{T_j=0}^{T_j=T_{max}} \sum_{t_i=0}^{t_i=t_{max}} \{\left[S_a(T_j,t_i) - S_{aC}(T_j,t_i)\right]^2 + \alpha \left[S_u(T_j,t_i) - S_{uC}(T_j,t_i)\right]^2\} \tag{67.4}$$

dove a_g è il tempo di resistenza eccitazione essere ricercato, e α è il relativo parametro di peso che può regolare la penalità effettiva attribuita alla deviazione dello spostamento rispetto alle deviazioni dell'accelerazione dai valori target. α rendere la funzione di destinazione più sensibile alle differenze di risposta di spostamento e al basso valore α rende la funzione di destinazione più sensibile alle differenze degli spettri di accelerazione. $S_{aC}(T,t)$ è lo spettro di risposta dell'accelerazione target in tempo t, e periodo T che può essere codificato spettro di accelerazione del design o spettro medio di una suite di

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

movimenti terra. $S_{uC}(T,t)$ è lo spettro di risposta di spostamento target a tempo t, e periodo T. $S_u(T,\tau)$ e $S_a(T,\tau)$ sono spettri di risposta di spostamento e accelerazione dell'eccitazione del tempo di resistenza a periodo Te il tempo τ. t_{target} è il tempo di destinazione che è il momento in cui le eccitazioni del tempo di resistenza producono lo spettro di obiettivo. Nel caso generale non lineare, se il tempo di destinazione è troppo basso, la struttura potrebbe non avere il tempo per passare attraverso un numero ragionevole di cicli non lineari. D'altra parte, se il tempo di destinazione è troppo alto, il numero dei cicli diventerà irrealisticamente grande.

L'abbinamento non lineare della risposta non è incluso nella generazione di eccitazioni di tempo di resistenza di seconda generazione. Tuttavia, includendo lunghi periodi nella simulazione di eccitazioni di seconda generazione, possono essere utilizzati in analisi dinamiche non lineari con ragionevole precisione. Spettro di accelerazione dell'ETTA20a01, che è la prima serie generata nella seconda generazione, viene mostrato in Figura 67.13b. Si può vedere che gli spettri di accelerazione di questa eccitazione è linearmente aumentato.

67.12.3 Terza generazione di ETEF

Come la formulazione di simulare le eccitazioni del tempo di resistenza di seconda generazione, la terza generazione è simulata definendo il fattore di forza R è formulato come segue:

$$S_u(T,t,R) = \max\left(|u(\tau)|\right); \quad \tau \in [0,t]$$

$$S_{uT}(T,t,R) = \frac{t}{t_{target}} \times S_{uT}(T,R) \times \frac{T^2}{4\pi^2}; \quad \tau \in [0,t]$$

$$F(a_g) = \sum_{T_k=0}^{T_k=T_{max}} \sum_{R_j=0}^{R_j=R_{max}} \sum_{t_i=0}^{t_i=t_{max}} \left[S_u(T_k,R_j,t_i) - S_{uT}(T_k,R_j,t_i)\right]^2$$

A differenza della seconda generazione in cui la funzione obiettiva di calcolo per ogni periodo richiedeva un'analisi dinamica unica per tutti i tempi, la funzione oggettiva del calcolatore di terza generazione ad ogni periodo necessita di un' analisi dinamica separata per Ogni volta, questo fatto complica la simulazione di eccitazioni di tempo di resistenza di terza generazione.

67.12.4 Quarta generazione di ETEF

Nella quarta generazione, i parametri relativi alla durata sono inclusi anche nella procedura di simulazione. Sebbene gli spettri di accelerazione e spostamento siano buoni rappresentanti dell'intensità e del contenuto di frequenza dei movimenti di terra, al fine di quantificare correttamente i moti di terra è necessario considerare non solo l'intensità ed il contenuto di frequenze, ma anche le caratteristiche di durata. Anche se una varietà di definizioni sono state proposte per tutta la durata nella letteratura dell'ingegneria del

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

terremoto (O'Hara e Jacobson, 1991; Wang et al., 2016; Bommer e Martinez-Pereira, 1999; Bolt, 1973), la velocità assoluta cumulativa (CAV) è stata inclusa nella simulazione degli ETEF di quarta generazione. Campbell e Bozorgnia, 2012 suggeriscono che CAV potrebbe essere utilizzato per valutare rapidamente i potenziali danni a una classe generale di strutture convenzionali. $CAV = \int_0^{t_{max}} |a(t)|\, dt$ dove $a(t)$ è la storia del tempo di accelerazione, e t_{max} è durata.

Funzioni Obiettivo dell'Equazione 67.5 I primi tre termini calcolano i residui in modo relativo, e gli altri tre calcolano il residuo in modo assoluto. Mashayekhi et al., 2018b ha dimostrato che la combinazione di termini assoluti e relativi si traduce in un'eccitazione più efficiente del tempo di resistenza, con funzioni oggettive che integrano residui nel corso dell'intero arco temporale e dei periodi. Va notato che gli spettri di accelerazione, gli spettro di spostamento lineare e CAV sono considerati in queste funzioni oggettive.

$$F_{CAV-M}(a_g) = \sum_{T_j=0}^{T_j=T_{max}} \sum_{t_i=0}^{t_i=t_{max}} \left\{ \begin{array}{c} \left[\frac{S_a(T_j,t_i)-S_{aC}(T_j,t_i)}{S_{aC}(T_j,t_i)}\right]^2 \\ + \left[\frac{S_u(T_j,t_i)-S_{uC}(T_j,t_i)}{S_{uC}(T_j,t_i)}\right]^2 \\ + \left[\frac{CAV(t_i)-CAV_C(t_i)}{CAV_C(t_i)}\right]^2 \\ + \left[S_a(T_j,t_i) - S_{aC}(T_j,t_i)\right]^2 \\ +\alpha_{S_u}\left[S_u(T_j,t_i) - S_{uC}(T_j,t_i)\right]^2 \\ \alpha_{CAV}\left[CAV(t_i) - CAV_C(t_i)\right]^2 \end{array} \right\} \tag{67.5}$$

dove a_g è la storia del tempo di accelerazione.

Queste funzioni oggettive assumono a_g come l'ingresso; α_{S_u} e α_{CAV} sono fattori di peso che controllano il contributo dei residui associati con spettri di spostamento e CAV, rispettivamente.

Il profilo intensificante che controlla la forma di spettro di accelerazione in aumento nel tempo non deve essere lineare, e per questa serie è stato utilizzato un profilo esponenziale. 67.14 e si osserva una notevole corrispondenza tra loro.

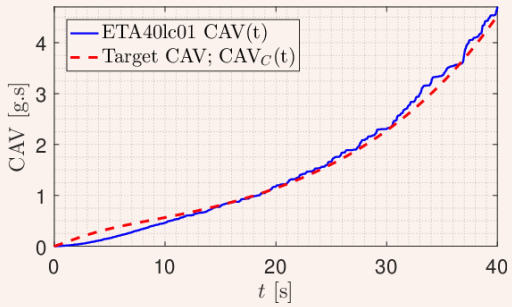


Figura 67.14: Cav di eta40lc01 contro bersaglio

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

67.12.5 Quinta generazione di ETEF

In quinta generazione, l'energia isterica assorbita è inclusa anche nel processo generativo; va ricordato che la domanda di energia isteretica assorbita viene utilizzata come indicatore del parametro relativo ai danni cumulativi. Viene adottata una funzione di aumento lineare per gli spettri dell'accelerazione e viene calcolata matematicamente la corrispondente funzione crescente degli spettro non lineari di spostamento e dell'energia isterica. Una procedura dettagliata per l'elaborazione di funzioni crescenti di spostamento non lineare e domanda di energia isterica può essere trovata in Mashayekhi et al., 2018a. Equazione 67.6 è la funzione oggettiva che calcola discrepanze quadrate tra caratteristiche dinamiche di eccitazioni tempo di resistenza e movimenti terra target:

$$\begin{aligned} F_{ETEF}(a_g) = & \sum_{T_j=0}^{T_j=T_{max}} \sum_{t_i=0}^{t_i=t_{max}} \left[S_a(T_j,t_i) - S_{aC}(T_j,t_i)\right]^2 \\ & + \sum_{\mu_k=1}^{\mu_k=\mu_{max}} \sum_{T_j=0}^{T_j=T_{max}} \sum_{t_i=0}^{t_i=t_{max}} \left\{ \begin{matrix} \alpha_{u_m} \left[u_m(\mu_k,T_j,t_i) - u_{mC}(\mu_k,T_j,t_i)\right] \\ +\alpha_{E_H} \left[E_H(\mu_k,T_j,t_i) - E_{HC}(\mu_k,T_j,t_i)\right] \end{matrix} \right\} \end{aligned} \tag{67.6}$$

dove $a_g(t)$ è storia del tempo di accelerazione, $S_a(t,T)$, $u_m(t,T,\mu)$ e $E_H(t,T,\mu)$ sono caratteristiche dinamiche di eccitazione tempo di resistenza, e $S_{aC}(t,T)$, $u_{mC}(t,T,\mu)$ e $E_{HC}(t,T,\mu)$ sono caratteristiche dinamiche dei movimenti di terra. E_H è energia isterica, e u_m è lo spostamento della risposta non lineare. Figura 67.15 confronta l'energia isterica di ETA20kd01 con il bersaglio in quattro periodi diversi.

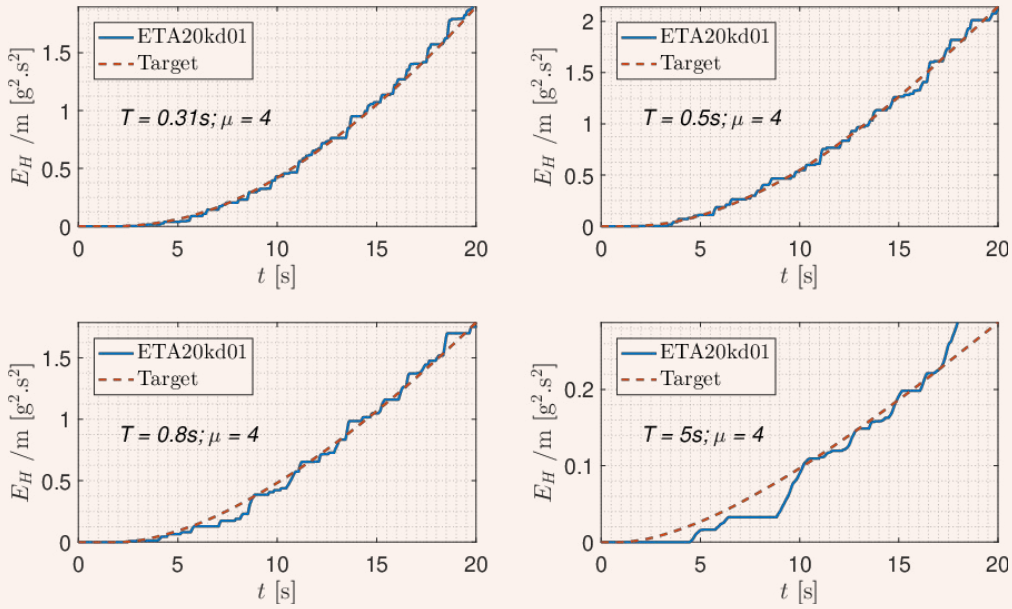


Figura 67.15: Energia isterica di eta20kd01 contro bersaglio

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Terremoto en Popayán di Fernando Botero, 1999. Museo Botero e Bogotá in Colombia.

67.13 Ex 67.1: Analisi dei rischi sismici

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Questo esempio presenta un'analisi probabilistica del rischio sismico (PSHA) e deaggregazione sismica per un edificio ad alto livello di 30 piani a Los Angeles, California. L'obiettivo è quello di stimare la probabilità annuale di superamento dei diversi livelli di accelerazione del terreno (PGA) e determinare gli scenari di terremoto dominanti che contribuiscono al rischio sismico.

Seduta sismotectonica

- Il cantiere si trova a 50 km dalla San Andreas Fault, un importante difetto di sciopero con una storia di produzione dei terremoti M7,8-8,2 . - Ulteriori difetti moderati (M5.5–6.5) esistono entro 20 km

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dal sito. - Il sito è classificato come suolo rigido (classe C) con una velocità media di onda shear $V_{S30} = 600$ m/s.

Modello di sesmicizia (Recurrence Relationship)

Utilizzo della legge Gutenberg-Richter:

$$\log N_M = a' - b'M \tag{67.7}$$

dove:

- Parametri regionali di sismicità:
  - California: $a' = 6.2$, $b' = 1.1$
- Importanza minima: $M_{min} = 4.5$
- Massima magnitudo: $M_{max} = 8.0$
- Periodo di ritorno di una magnitudo $M \geq 7.5$ evento: 200 anni
- Tasso annuale di avvenimento $M \geq 6.0$ terremoti: 0,03 eventi/anno

Modello di adattamento (GMPE)

Utilizzando Boore, Joyner e Fumal (1997) GMPE:

$$\ln \text{PGA} = b_1 + b_2(M - 6) + b_5 \ln(r_{jb} + h) \tag{67.8}$$

dove:

- $M = 7.5$
- Distanza Joyner-Boore: $r_{jb} = 50$ km
- Termine di profondità: $h = 5.0$ km
- PGA predetti: $0.22g$ (valore medio)

Analisi dei rischi sismici

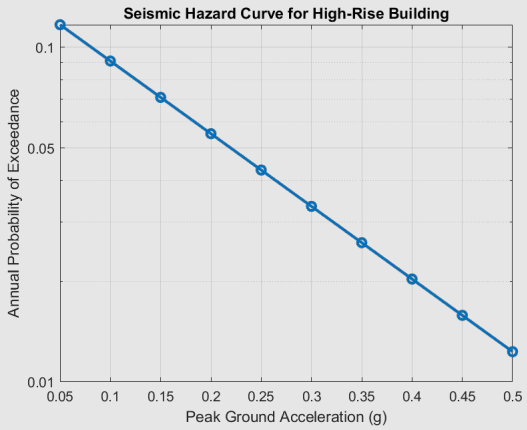
La curva di rischio sismico illustra la probabilità di superare i diversi livelli di accelerazione del terreno (PGA) al sito.La curva di pericolo viene generata utilizzando un modello di decadimento esponenziale per una probabilità di superamento:

$$P(Y \geq y) = \lambda_0 e^{-by} \tag{67.9}$$

dove λ_0 è la probabilità di superamento della base e b è il tasso di decadimento.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



La tabella seguente fornisce la probabilità annuale di superamento per diversi livelli di movimento terra.

PGA (g)	Probabilità annuale dell'eccedenza
0.05	0.12
0.1	0.06
0.2	0.015
0.3	0.003

Disaggregazione della pericolosità sismica

La deaggregazione dei rischi sismici identifica gli scenari di terremoto più probabili che contribuiscono al rischio a un determinato livello di accelerazione spettrale, che è fondamentale per la selezione di movimenti rappresentativi del suolo per il design strutturale.

Per $S_a(T = 1.0s) = 0.8g$, lo scenario sismico più probabile è:

- **Magnitudine:** $M = 7.3$
- **Distanza:** $R = 35$ km
- **Tipo di avanzamento:** Strike-slip

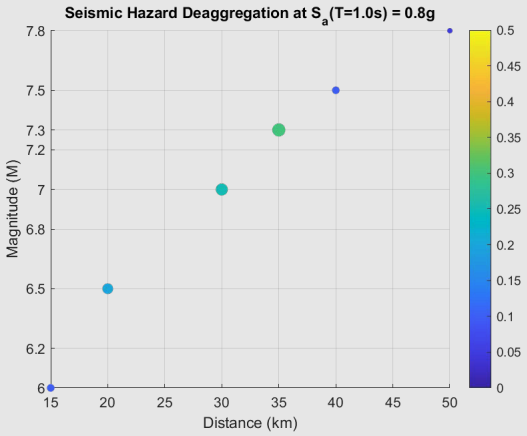
I contributi aggiuntivi al rischio includono:

- $M6.5$ at 20 km contribuisce 20%
- $M7.8$ at 50 km contribuisce 30%
- $M7.0$ at 40 km contribuisce 50% (Scenario dominante)

La seguente trama di deaggregazione mostra i contributi relativi di diverse coppie di magnitudo-distanza al livello di pericolo.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Discussione e Implicazioni di Ingegneria

I risultati della curva di pericolo e dell'analisi delle deaggregazioni forniscono preziose informazioni per il design sismico:

- Lo scenario più critico del terremoto corrisponde ad un $M7.3$ evento a 35 km, indicando che gli effetti sismici vicino al campo devono essere considerati.
- La probabilità di superamento annuale per PGA = 0.2g è 1,5%, che possono influenzare le decisioni di progettazione sismica basate sui livelli di rischio target.
- I risultati della deaggregazione aiutano a selezionare i record di movimento terra per l'analisi non lineare della cronologia del tempo per garantire previsioni realistiche delle risposte strutturali.

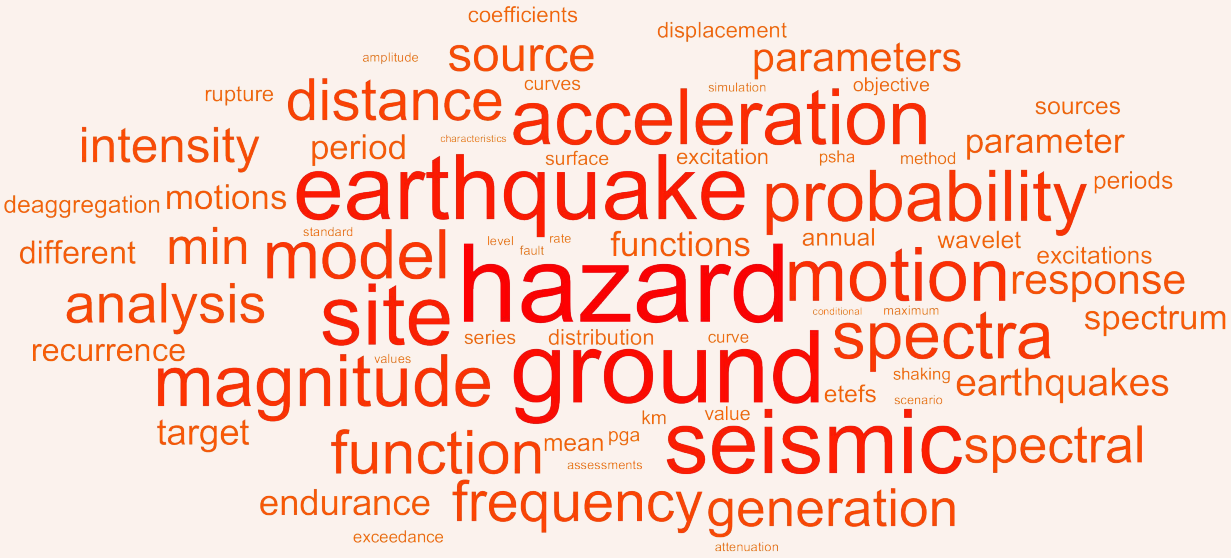
Conclusioni

I risultati del PSHA indicano che *pericolo più significativo* per il sito di costruzione ad alta velocità proviene da $M7.3$ i terremoti che si verificano a una distanza di 35 km. Questi risultati aiutano gli ingegneri a determinare l'adeguato *parametri di progettazione sismica* La curva di rischio fornisce una base per valutare la probabilità di diverse intensità del moto terra, mentre l'analisi della deaggregazione identifica gli scenari di terremoto dominanti che contribuiscono al rischio sismico.

MATLAB®il codice è in §I.7.1.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 68

Analisi Sismica dei rischi II

Abstract

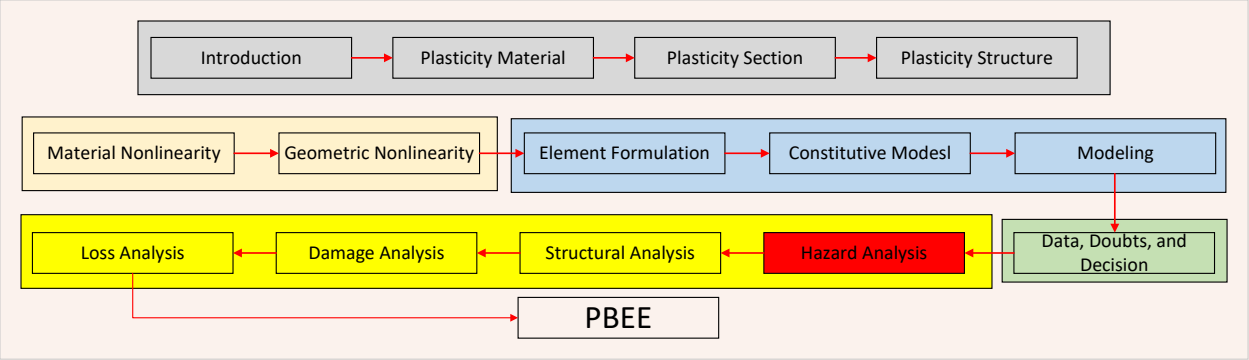
Basandosi sui concetti fondamentali dell'analisi dei rischi sismici presentati nel capitolo 67, questo capitolo estende la discussione affrontando aspetti chiave necessari per una valutazione globale dei rischi.

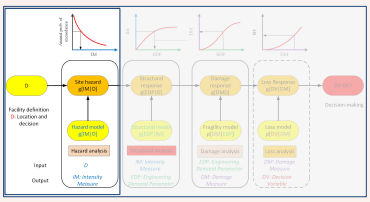
Esso introduce il quadro probabilistico utilizzato per quantificare il tasso annuale di superamento delle intensità del moto terra ed esplora la costruzione e l'interpretazione delle curve di rischio.

Inoltre, integra l'analisi del rischio sismico di ingegneria (ESRA) per valutare le implicazioni del pericolo sismica sulle prestazioni strutturali e sulla resilienza. Il capitolo esamina anche il ruolo dei periodi di ritorno nel disegno sismico, l'applicazione degli alberi logici per chap: regione della fiducia quantificazione e intersezione dell'analisi dei rischi sismici probabilistici (PSHA) con ingegneria del terremoto basata sulle prestazioni. Queste metodologie avanzate forniscono informazioni critiche per la progettazione di strutture in grado di resistere agli eventi sismici, mentre gestiscono efficacemente il rischio.

68.1 Introduzione 2301
68.2 Tasso annuale di Eccedenza 2302
68.3 Curva di pericolo 2303
68.4 Analisi del rischio sismico di ingegneria (ESRA) 2304
68.4.1 Ex 68.1: Calcolo del periodo di ritorno 2305
68.5 Analisi dei rischi sismici probabilistici (PSHA) come SHA + ESRA 2305

COPIA DI REVISIONE





68.1 Introduzione

considerando che l'analisi dei rischi sismici è stata oggetto di grande dettaglio nel capitolo 67, alcuni aspetti rimangono invariati, soprattutto quelli relativi alle applicazioni pratiche e all'estensione del quadro probabilistico. Questo capitolo si basa sulle fondamenta stabilite nel precedente esplorando ulteriori componenti chiave come curve di rischio, periodi di ritorno e analisi del rischio sismico ingegneristico. Inoltre, integra metodi probabilistici con valutazioni strutturali delle prestazioni, offrendo una prospettiva più completa sulla quantificazione dei rischi sismici. Espandendoci su questi temi, collaboriamo il divario tra la modellazione teorica dei rischi e le sue implicazioni pratiche per la progettazione ingegneristica e la mitigazione del rischio.

1 considerando che l'analisi dei rischi sismici è stata oggetto di grande dettaglio nel capitolo 67, alcuni aspetti rimangono indissolubili[1].

2 Nonostante l'approccio "bottom-up", le parti mancanti sono coperte qui.

3 Analisi Sismica dei rischi (SHA) è il processo di valutazione del potenziale per lo scuotimento delle terremoti e altri effetti correlati al terremoto in una posizione specifica a causa dell'attività sismica. Esso mira a quantificare la probabilità e l'intensità degli eventi sismici, fornendo informazioni critiche per la progettazione di strutture, la valutazione dei rischi e la pianificazione della resilienza del terremoto.

[1] Come ho scelto di non modificare il capitolo scritto da Amin Hariri-Ardebili in *Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures*.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

68.2 Tasso annuale di Eccedenza

4 In Analisi Sismica Sismico Probabilistica (PSHA), il *Tasso annuo di superamento* (λ) di una specifica intensità del movimento terra (IM) è una misura fondamentale, quantfica la probabilità che il moto terra superi un determinato livello di intensità in un anno:

$$\lambda(IM) = \int_{m_{\min}}^{m_{\max}} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} P(IM > x \mid m, r) f_M(m) f_R(r) \, \mathrm{d}m \, \mathrm{d}r,$$

dove:

- $P(IM > x \mid m, r)$: Probabilità che la misura di intensità superi x dato un terremoto di magnitudo m a distanza r.
- $f_M(m)$: Funzione di densità di probabilità della magnitudo del terremoto, derivata da modelli di ricorsi come il rapporto Gutenberg-Richter.
- $f_R(r)$: Funzione di densità di probabilità della distanza da sorgente a luogo, che rappresenta gli effetti regionali di sismicità e attenuazione.
- $m_{\min}, m_{\max}, r_{\min}, r_{\max}$: Bounds su magnitudo e distanza, scelto per catturare tutte le fonti sismiche rilevanti per il sito.

5 Il tasso annuale di superamento (λ) rappresenta quanto spesso, in media, una particolare intensità di movimento del suolo (IM) si prevede che sia superato in un anno presso uno specifico sito; esso combina la probabilità di tutti i possibili scenari del terremoto, ponderando ogni scenario con la sua probabilità di verificarsi e il suo contributo all'intensità del movimento terra. Questa misura fornisce un quadro probabilistico per quantificare il rischio sismico.

6 La probabilità $P(IM > x \mid m, r)$ è tipicamente derivato da Equazioni di Predizione del Momento Terreno (GMPE), che modella l'intensità prevista della trebbiatura basata su magnitudo, distanza sorgente-sito e condizioni site-specific come le proprietà del suolo.

7 PSHA spesso impiega alberi logici per catturare incertezze epistemiche nella caratterizzazione sismica delle sorgenti, modelli di ricorrenza e GMPE. Ogni ramo dell'albero rappresenta un modello o una supposizione diversa, con pesi assegnati che riflettono la fiducia in ogni opzione.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

68.3 Curva di pericolo

Il *curva di pericolo* rappresenta il rapporto tra λ (tasso di superamento annuale) e IM (misurazione dell'intensità, come il Peak Ground Accelerazione (PGA) o accelerazione spettrale (SA), come mostrato in Fig. 68.1:

$$\lambda(IM) = \text{Tasso di superamento di uno specifico livello di moto del suolo nel sito.}$$

8 Le curve di pericolo sono utilizzate per:

- Stima la probabilità di sperimentare i movimenti dannosi del terreno durante una vita dell'edificio, che è fondamentale per l'ingegneria terremoti basata sulle prestazioni.
- Seleziona i livelli di movimento terra corrispondenti a periodi specifici di ritorno (ad esempio, 10% superamento in 50 anni o 2% superamento in 50 anni), che sono comunemente utilizzati nei codici di progettazione sismica.
- Valutare le risposte degli edifici e i margini di sicurezza in diversi scenari sismici, aiutando nella progettazione strutturale e mitigazione dei rischi.

9 Le curve dei rischi variano in modo significativo tra i siti, riflettendo le differenze nella sismicità locale, la prossimità di guasti e le condizioni del suolo specifiche per il sito. Ad esempio, i siti vicino a guasti attivi mostrano generalmente tassi di superamento annuali più elevati per lo stesso livello di intensità rispetto a quelli nelle regioni meno attive.

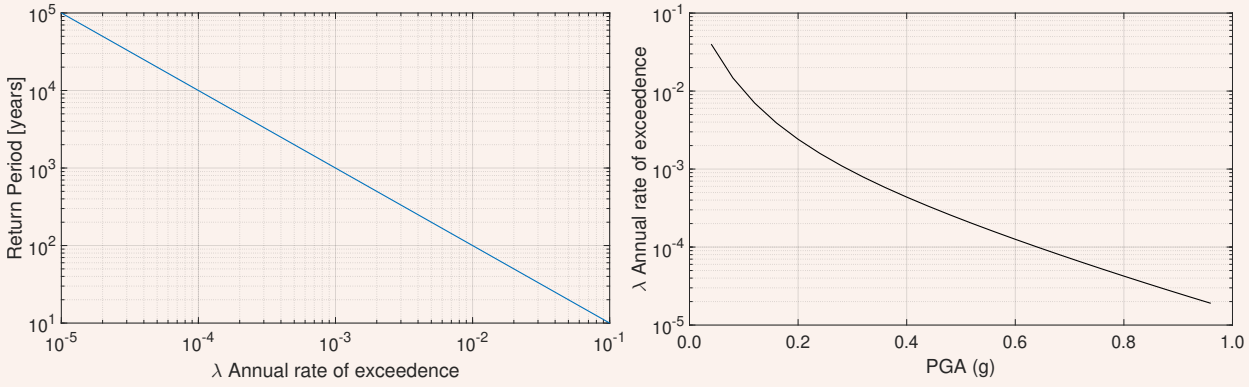


Figura 68.1: Curva di pericolo. La trama sinistra illustra il concetto dei periodi di ritorno, mentre la trama destra mostra una curva di rischio per un sito specifico.

10 Nella sua forma più semplice, il rapporto tra il periodo di ritorno (T) e il tasso annuale di superamento (λ) è fondamentale, il periodo di ritorno è l'intervallo medio tra gli eventi di una specifica intensità del movimento terra che viene superata in un sito.

$$T = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{or equivalently,} \quad \lambda = \frac{1}{T}.$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

11 Ad esempio, un periodo di ritorno di 475 anni corrisponde ad una probabilità annuale di superamento di circa 0,021 (0.21%), mentre un periodo di ritorno di 2.475 anni corrisponde ad una probabilità di 0,004 (0.04%). Questi valori sono ampiamente utilizzati nel disegno sismico per le strutture ordinarie e critiche, rispettivamente.

12 È importante notare che il periodo di ritorno non implica che un evento specifico si verifichi esattamente a questi intervalli, ma rappresenta l'intervallo medio di ricorrenza, con probabilità calcolate su più tempi. Per esempio, un periodo di ritorno di 475 anni implica una 10% probabilità di superamento in 50 anni.

68.4 Analisi del rischio sismico di ingegneria (ESRA)

13 Analisi del rischio sismico di ingegneria fa riferimento al processo di valutazione e quantificazione dei potenziali rischi associati ai terremoti alle strutture, infrastrutture e società ingegnerizzate.

14 Esso estende l'analisi dei rischi sismici (SHA) incorporando *vulnerabilità* (la misura in cui una struttura può essere danneggiata) e *esposizione* (il valore o l'importanza dell'infrastruttura interessata) Insieme, questi fattori determinano le conseguenze attesi degli eventi sismici.

15 Se si assume una distribuzione di Poisson rappresentare eventi terremoti come casuali e indipendenti nel tempo, quindi la probabilità di almeno una superanza di un livello di movimento terra durante un periodo di tempo t è dato da:

$$P_E = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Risolvere il tasso di superamento λ- Si'.

$$\lambda = -\frac{\ln(1 - P_E)}{t}.$$

Utilizzando questo nella definizione del periodo di ritorno:

$$T_R = \frac{t}{-\ln(1 - P_E)}.$$

16 L'equazione semplificata $T_R = 1/\lambda$ assume un tasso di superamento annuo costante λ ed è un'approssimazione valida per piccole probabilità di superamento (P_E) nel tempo t. Questa approssimazione vale quando λt è piccolo, che porta a:

$$e^{-\lambda t} \approx 1 - \lambda t.$$

17 Così possiamo esprimere λ in termini di P_E:

$$P_E \approx \lambda t \quad \Longrightarrow \quad \lambda \approx \frac{P_E}{t}.$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

18 Da questo:

$$T_R = \frac{1}{\lambda} \approx \frac{t}{P_E}.$$

Tuttavia, per più grande P_E, il rapporto logaritmico dovrebbe essere utilizzato per una maggiore precisione.

68.4.1 Ex 68.1: Calcolo del periodo di ritorno

Considerare i range di probabilità tipici per la superanza:

- Livello base di progettazione (DBL): $P_E \in [20\%, 64\%]$,
- Livello massimo di progettazione (MDL): $P_E \in [10\%, 20\%]$.

Per una diga con una vita di progettazione $t = 100$ anni, computiamo i tassi di superamento e i periodi di ritorno come segue:

1. Per $P_E = 0.20$ (DBL, 20)% probabilità di superamento):

$$\lambda = -\frac{\ln(1 - 0.20)}{100} = -\frac{\ln(0.80)}{100} \approx 0.00223.$$

Utilizzando questo tasso di superamento, il periodo di ritorno stimato è:

$$T_R = \frac{1}{\lambda} \approx \frac{1}{0.00223} \approx 450 \text{ years}.$$

2. Per $P_E = 0.10$ (MDL, 10)% probabilità di superamento):

$$\lambda = -\frac{\ln(1 - 0.10)}{100} = -\frac{\ln(0.90)}{100} \approx 0.00105.$$

Utilizzando questo tasso di superamento, il periodo di ritorno stimato è:

$$T_R = \frac{1}{\lambda} \approx \frac{1}{0.00105} \approx 1,000 \text{ years}.$$

68.5 Analisi dei rischi sismici probabilistici (PSHA) come SHA + ESRA

16 Analisi del rischio sismico di ingegneria (ESRA) produce il tasso annuale di superamento λ, che rappresenta la probabilità di almeno un evento che si verifica in una data vita t (Figura) 68.3).

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

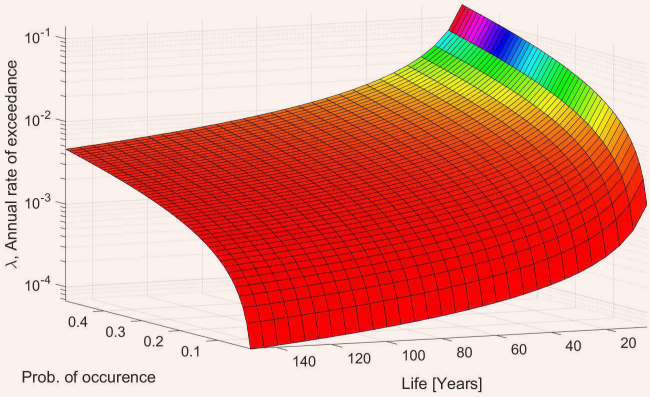


Figura 68.2: Superficie di analisi del rischio sismico

17 Analisi Sismica dei rischi (SHA) fornisce il rapporto tra la tariffa annuale di superamento λ e una misura di intensità (IM).

18 L'analisi dei rischi sismici probabilistici (PSHA) integra ESRA e SHA per stimare la probabilità di diversi livelli di agitazione del terreno in un determinato sito nel corso di un dato periodo.

19 A differenza delle valutazioni di rischio sismico deterministiche, che si concentrano su scenari di terremoto specifici, PSHA rappresenta le incertezze nell'insorgenza del terremoto, nella magnitudine, nel luogo e nel movimento terra, fornendo una misura probabilistica di pericolo sismica.

20 L'approccio segue un processo strutturato, come illustrato in figura 68.3:

1. Determinazione: a) la durata di interesse (anni) e b) la probabilità di verificarsi.
2. Obbligo λ dalla superficie ESRA (Figura 68.2).
3. Utilizzare la curva SHA per determinare l'accelerazione del picco corrispondente (PGA) (Figura 68.1).

21 Una volta che il PGA è determinato, un insieme di n le storie di tempo di accelerazione del movimento terra sono selezionate (o generate) per analisi multiple.

22 Da queste analisi, vengono estratti e tracciati i parametri di risposta chiave:

Misura di intensità (IM) Rappresentazione quantitativa delle caratteristiche del movimento terra, tipicamente l'accelerazione di picco (PGA) o l'accelerazione spettrale.

Parametro di domanda di ingegneria (EDP) Una quantità di risposta strutturale rilevante alla valutazione della sicurezza, come la guaina base, la deriva interstoria o l'accelerazione del pavimento.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

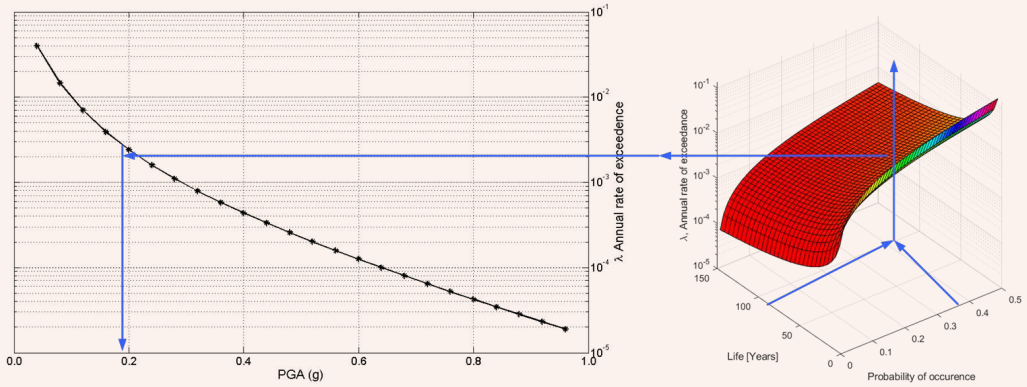


Figura 68.3: Analisi dei rischi sismici probabilistici (PSHA).

23 Questo processo viene ripetuto m tempi per diversi livelli di intensità per sviluppare modelli probabilistici sismici della domanda.

24 In tutti i casi compliamo EDP *vs* IM, che è il *Modello di domanda sismica* che è spesso rappresentato da

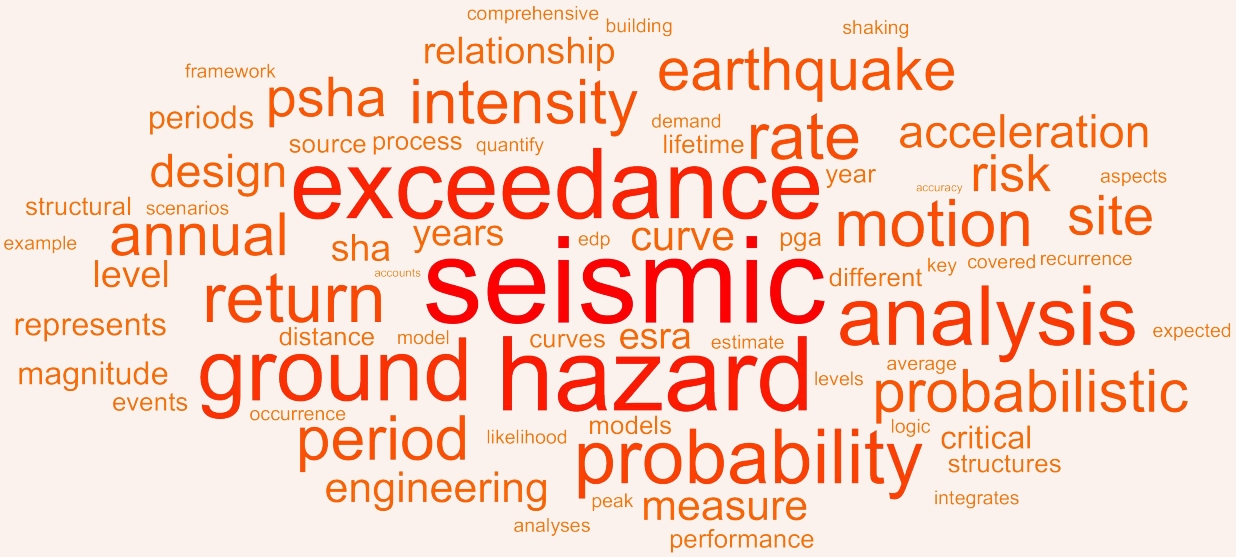
$$EDP = a.IM^b$$

dove a e b sono coefficienti di regressione ottenuti da analisi dinamiche non lineari (cfr. capitolo 53)

25 Attenzione, i risultati di PSHA dipendono fortemente dall'accuratezza dei modelli di input, compresa la caratterizzazione delle sorgenti; può avere dati storici limitati per eventi rari ed estremi; e risultati probabilistici possono essere impegnati a interpretare per gli stakeholder non tecnici.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 69

Analisi strutturale

Abstract

Questo capitolo presenta metodologie avanzate nell'analisi sismica, che coprono molteplici approcci utilizzati per valutare la capacità sismico di strutture come edifici e ponti. Vengono esplorate le basi teoriche e applicazioni pratiche di vari metodi, tra cui l'analisi pushover (POA), l'Analisi Multi-Strip (MSA), la Analisi Dinamica Incrementale (IDA), analisi cloud (CLA) e analisi del Tempo di Endurance (ETA), evidenziando i loro rispettivi vantaggi e limitazioni.

L'analisi pushover viene discussa ampiamente come una procedura non lineare statica ampiamente utilizzata che fornisce informazioni sul comportamento strutturale inelastico sotto carico laterale incrementale applicato. Vengono analizzati i risultati chiave come la curva di capacità e il punto di prestazione per facilitare una comprensione della resilienza strutturale sotto le forze sismiche. Inoltre, vengono introdotte definizioni essenziali come la funzione di capacità, le relazioni con lo stress o risposta e i parametri della domanda ingegneristica per stabilire un quadro concettuale completo per l'analisi sismica.

Ogni metodologia viene esaminata in termini di base teorica, considerazioni di attuazione e applicazioni pratiche. Il capitolo discute sistematicamente approcci di modellazione, definizioni dei modelli di carico, procedure di caricamento incrementale e l'interpretazione dei dati di risposta strutturale. Sono analizzati vari modelli di carico, tra cui inversa distribuzione triangolare, rettangolare e del carico della prima modalità per illustrarne gli effetti sui risultati dell'analisi.

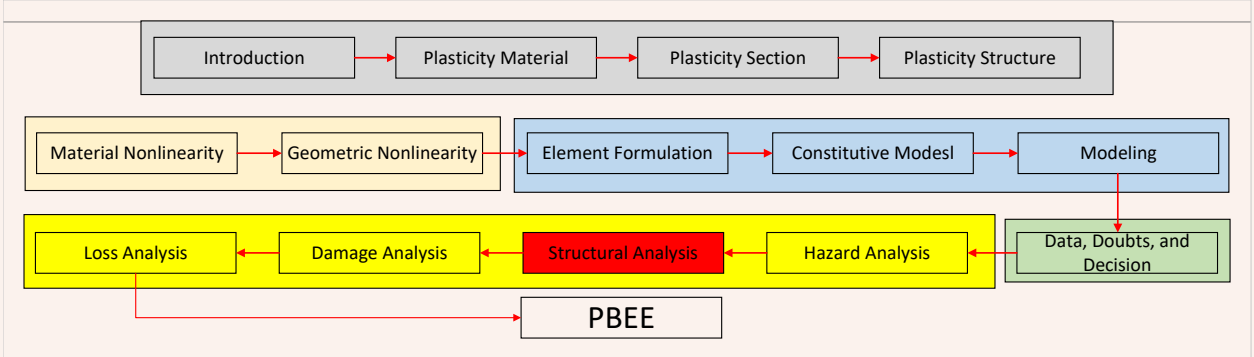
Per la teoria e la pratica del ponte, sono presentati due studi di casi dettagliati: il primo esempio è costituito da un telaio in acciaio sottoposto ad analisi sismica, che dimostra l'identificazione delle cerniere di plastica, le capacità di taglio base e i limiti di deformazione. Il secondo esempio fornisce una valutazione approfondita di un progetto del ponticello reale, che incorpora analisi dello spettro di risposta, calcoli dei momenti in plastica e criteri di valutazione basati sulle prestazioni basati su linee guida sismiche AASHTO.

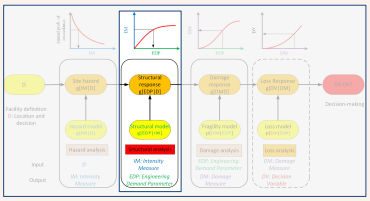
Il capitolo si conclude riaffermando l'importanza di queste metodologie nell'ingegneria dei terremoti basata sulle prestazioni e nella valutazione della resilienza strutturale. Fornendo una metodologia strutturata e studi pratici di casi, questo capitolo funge da risorsa cruciale per gli ingegneri impegnati nella valutazione sismica e progettazione delle strutture.

69.1 Introduzione 2310
69.2 Definizioni di base 2311
69.3 Capacità e domanda 2312
69.3.1 Relazioni con la capacità di domanda 2312
69.3.2 Metodi di stima della domanda 2313

COPIA DI REVISIONE

69.3.3 Principi di progettazione della capacità 2314
69.4 Metodi di analisi sismica 2315
69.4.1 Analisi push-over (POA) . . 2315
69.4.2 Analisi dinamica incredibile (IDA) 2352
69.4.3 Analisi a strisce multiple (MSA) 2354
69.4.4 Analisi del cloud (CLA) . . . 2357
69.4.5 Analisi del tempo di resistenza (ETA) 2358
69.4.6 Sintesi 2360
69.5 Cosa c'è di più 2362





69.1 Introduzione

1 La valutazione accurata della risposta strutturale agli eventi sismici è un aspetto critico dell'ingegneria del terremoto. Nel corso degli anni sono stati sviluppati vari metodi analitici e numerici per valutare le prestazioni sismiche di edifici, ponti e altre infrastrutture.

2 Queste metodologie, che vanno da approcci statici semplificati a simulazioni dinamiche complete, offrono agli ingegneri uno spettro di strumenti per prevedere comportamenti strutturali e mitigare i rischi sismici.

3 I metodi di analisi sismica possono essere ampiamente classificati in approcci lineari e non lineari, con ulteriori distinzioni tra tecniche statiche e dinamiche. Le analisi lineari-elastiche tradizionali, mentre il calcolo è efficiente, spesso non riescono a catturare la portata completa delle deformazioni inelastici e dei meccanismi di danno che le strutture sperimentano durante i forti terremoti. I metodi non lineari, d'altra parte, forniscono una rappresentazione più realistica delle prestazioni strutturali considerando materiali e la non linearità geometrica.

4 Questo capitolo presenta un approfondito dibattito sulle metodologie di analisi sismica

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

chiave, con l'attenzione su tecniche non lineari che forniscono una visione più approfondita della resilienza strutturale. Tra questi, l'analisi pushover, una procedura non lineare statica, ha guadagnato la prominenza per la sua capacità di approssimare il comportamento inelastice con domanda computazionale relativamente bassa. Altri metodi avanzati, come l'analisi dinamica dell'incrementale (IDA), l' analisi multi-strip (MSA) e l'esame del tempo di Endurance (ETA), offrono prospettive dinamiche sulle prestazioni strutturali in diverse eccitazioni sismiche.

5 Un aspetto critico dell'analisi sismica è l'interpretazione dei parametri di risposta chiave, comprese le curve di capacità, i parametri della domanda e i meccanismi di guasto, che informano le decisioni di progettazione, le strategie di retrofit e le valutazioni del rischio. Inoltre, gli strumenti computazionali moderni come SAP2000, ETABS e OpenSees hanno migliorato significativamente l'accuratezza e l'applicabilità di questi metodi, facilitando simulazioni strutturali complesse con una maggiore efficienza.

6 Il capitolo procede, delineando sistematicamente le sottopinning teoriche, i quadri metodologici e le applicazioni pratiche delle tecniche di analisi sismica. Attraverso discussioni comparative e studi di casi, si propone di dotare ingegneri e ricercatori di una comprensione completa dei vantaggi e delle limitazioni di ogni approccio, in ultima analisi, sostenendo il processo decisionale informato nel progettazione e valutazione antisismica.

7 Nel prossimo capitolo (70) copriremo la valutazione quantitativa dell'analisi sismica non lineare trattata in questa.

69.2 Definizioni di base

8 Cominciamo distinguendo i vari termini relativi alla "capacità' del sistema strutturale.

Curva di capacità: Nella sua definizione originale, questa nozione si riferisce ad una curva di spostamento della forza non lineare (Freeman, 1978); è determinato dal caricamento statuitivamente della struttura al fine di calcolare lo spostamento del tetto *vs.* taglio base. Questa curva si riferisce anche al *curva di spinta* (Freeman, 1998). In laboratorio, la curva di spostamento del carico può essere registrata impostando sia il controllo del carico che i protocolli di controllo dello spostamento, a seconda della disponibilità delle strutture. Tuttavia, utilizzando il test di controllo dello spostamento, la post-fallio può essere catturata. La curva di capacità convenzionale può anche essere tracciata in termini di energia dissipata, denominato come *curva di capacità basata sull'energia* (D'Ambrisi e Mezzi, 2015).

Schema di capacità: Questa nozione si riferisce alla pseudo-accelerazione *vs.* deformazione spettro ordinato (Chopra e Goel, 1999); è calcolato dividendo sia la base di taglio dalla massa modale effettiva alla modalità di vibrazione fondamentale e il picco di spostamento dal fattore di partecipazione di massa. *spettro di capacità*.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Funzione di capacità: Questa nozione è definita come il rapporto tra un parametro esterno (o interno) che interessa la capacità della struttura, indicato anche come "stressor' (S) e "response' del sistema a livello macro. Al contrario della curva di capacità convenzionale, la funzione di capacità è un concetto più generale e può essere generato da uno qualsiasi degli iniziatori spiegato nell'introduzione; inoltre, non si limita a una semplice azione sismica.

Stressor: può essere 1) un carico monotonico, ciclico o dipendente dal tempo (o spostamento, accelerazione, pressione); 2) un parametro di resistenza in diminuzione incrementale o degradazione delle proprietà di forza; o 3) un parametro critico in aumento/decreazione discreta in un sistema che porta al fallimento. Nel presente documento, tuttavia, S è più generalmente definito e si riferisce a qualsiasi quantità la cui variazione (continuo o discreto) può portare al fallimento progressivo del sistema e al suo collasso finale.

Risposta: è rappresentativo del comportamento di sistema sotto lo stressatore variabile. È raffigurato in senso assoluto o relativo. R può essere: 1) una singola variabile di danno (DV), come la deriva o dissipazione dell'energia; 2) una combinazione di diversi DV in termini di indice dei danni (DI); o 3) qualsiasi indice di monitoraggio della sicurezza (Wang, Gu e Bao, 2013). Nel campo dell'ingegneria del terremoto, R è tipicamente chiamato un parametro di domanda ingegneristica (EDP) (Vamvatsikos e Cornell, 2004).

69.3 Capacità e domanda

69.3.1 Relazioni con la capacità di domanda

9 Nell'analisi strutturale, la comprensione dell'interazione tra capacità e esigenze è fondamentale per garantire sicurezza, funzionalità e convenienza.

10 Il rapporto tra capacità e esigenze definisce se una struttura può svolgere come previsto sia in condizioni tipiche che estreme. Una struttura deve avere una capacità sufficiente per superare le richieste previste, incorporando un margine di sicurezza per tenere conto delle incertezze nel comportamento materiale, delle stime del carico, dell'insorgenza del terremoto, della grandezza, del moto terra e della qualità costruttiva. Questo equilibrio è spesso espresso attraverso un fattore di sicurezza o rapporto domanda-capacità.

11 Sia la capacità che le richieste sono di solito caratterizzate da una distribuzione probabilistica gaussiana, Fig. 69.1, riflettendo la variabilità intrinseca dei fattori materiali, costruttivi e ambientali; queste distribuzioni permettono agli ingegneri di quantificare le probabilità di fallimento analizzando la sovrapposizione tra capacità e curve di domanda.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

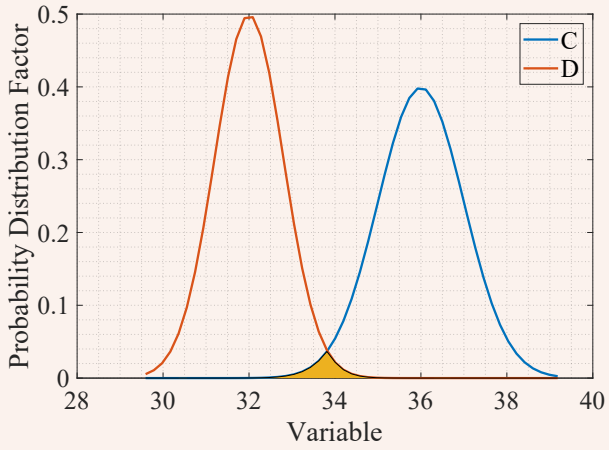


Figura 69.1: Natura probabilisitc della capacità e della domanda

69.3.2 Metodi di stima della domanda

12 Le richieste, rappresentano i carichi e le sollecitazioni a cui una struttura è sottoposta durante la sua vita, tra cui gravità, vento, terremoti e altre forze ambientali o operative.

13 Nel nostro contesto, dovremo identificare specifici parametri di domanda ingegneristica (EDP) e criteri di accettazione adeguati per valutare quantitativamente i livelli di prestazione.

14 L'EDP è una quantità di risposta misurabile (tipicamente picco (sentiero), forze e deformazioni, deriva interstatoria o accelerazioni del pavimento in componenti strutturali e non strutturali.

15 Le prestazioni sono controllate da comparare le richieste calcolate con i criteri di accettazione (capacità) per il livello di prestazione desiderato.

16 L'EDP è determinato da

Sviluppo di modelli strutturali: Un modello dettagliato della struttura è creato nel software di analisi strutturale, il quale cattura proprietà materiali, geometria, condizioni limite e caratteristiche smorzanti.

Selezione di moti terrestri: I movimenti di terra specifici per il sito sono scelti in base all'analisi dei rischi sismici, che possono essere veri e propri registri del terremoto o accelerogrammi generati sinteticamente.

Rischio sismico: Hazard è quantificata in termini di probabilità di superare i livelli specifici del movimento terra, come l'accelerazione del terreno (PGA) o accelerazione spettrale (SA).

Analisi dinamica: **Analisi di storia del tempo non lineare:** Questo è il metodo più comune in PBEE per la determinazione degli EDPs. La struttura viene sottoposta ai movimenti di terra selezionati e la risposta viene calcolata ogni volta.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Analisi statica del pushover: Per alcuni studi più semplici, gli EDP sono approssimati utilizzando l'analisi statica non lineare.

Analisi lineare: In alcuni casi, può essere utilizzata l'analisi dello spettro di risposta lineare, ma è meno accurata per PBEE.

Registrazione di EDPs: L'analisi genera storie di tempo o valori di picco degli EDP per ogni movimento terra.L'analisi statistica di questi risultati (ad esempio, mediana, o 90th percentile) viene eseguita per valutare le prestazioni.

17 A seconda della configurazione strutturale, i risultati delle analisi non lineari possono essere sensibili ai parametri di input presupposti e alle tipologie dei modelli utilizzati.

18 Uno deve aver chiare aspettative su quelle porzioni della struttura che si aspettano di subire deformazioni inelastiche e poi utilizzare le analisi per

1. Confermare le posizioni delle deformazioni inelastiche
2. Caratterizzare:
   - Deformazione richieste di elementi cedenti.
   - La forza richiede in elementi non-sielding.

19 I concetti di progettazione della capacità possono fornire prestazioni affidabili.

69.3.3 Principi di progettazione della capacità

20 Il design delle capacità è un concetto fondamentale nell'ingegneria dei terremoti, sviluppato per garantire il comportamento duttile e prevedibile delle strutture sotto le forze sismiche. Questo principio privilegia il controllo dei meccanismi di guasto nelle strutture, mirando a massimizzare la dissipazione dell'energia e prevenire le piccole modalità di fallimento. Sottolineando la duttilità e una gerarchia di forza, il design delle capacità assicura che le strutture si esibiscono in modo sicuro durante i terremoti.

21 L'idea principale di progettazione della capacità è quella di stabilire una gerarchia di forza tra i componenti strutturali, per esempio nei frame che si basano sul momento sono progettati intenzionalmente per cedere prima delle colonne. Ciò assicura che la struttura possa dissipare l'energia sismica attraverso la formazione di cerniere in plastica nei travi, mentre le colonne rimangono elastiche e stabili. Questo approccio è spesso indicato come il concetto "forte colonna, raggio debole", che minimizza il rischio di collasso e promuove un comportamento strutturale prevedibile.

22 La duttilità è un elemento centrale della progettazione delle capacità, i componenti strutturali sono dettagliati per subire deformazioni inelastiche significative senza perdere la loro capacità di carico. Questa capacità di deformare in modo plastico consente alla struttura di assorbire e dissipare l'energia durante un terremoto. Per raggiungere questo obiettivo, il design evita con attenzione i meccanismi di guasto fragili, come la rottura

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

della cinghia, la stabilità o l'insufficienza del legame. Queste modalità di guasto sono considerate indesiderabili come si verificano improvvisamente e senza preavviso.

23 I fattori di sovratensione sono impiegati anche per garantire la gerarchia prevista della forza, ad esempio colonne e fondazioni sono progettate con maggiore resistenza rispetto alle travi, impedendo indesiderati guasti nei componenti critici. Analogamente, nei sistemi di telaio a bracci sono progettati per cedere in tensione rimanendo stabili nella compressione, assicurandosi che la dissipazione dell'energia si verifichi come previsto.

24 I principi della progettazione delle capacità si estendono a una varietà di sistemi strutturali, in strutture rinforzate con la resistenza dei momenti, le cerniere in plastica sono progettate per formare alle estremità dei travi durante gli eventi sismici. Queste cerniere permettono ai raggi di subire grandi rotazioni, dissipando l'energia efficacemente proteggendo colonne e altre parti della struttura. Nelle pareti di taglio, il design della capacità assicura che la resa flessorale si verifichi prima dell'insufficienza del taglio fragile, migliorando il comportamento duttile della parete.

25 Uno dei principali vantaggi del design delle capacità è la prevedibilità che fornisce nelle prestazioni strutturali durante i terremoti. Controllando la posizione e la sequenza di guasti, gli ingegneri possono garantire che le strutture si comportino in modo controllato e sicuro. Questo approccio migliora anche la sicurezza impedendo collassi improvvisi e fornendo agli occupanti il tempo sufficiente per evacuatori. Inoltre, il design delle capacità è economico, poiché concentra il comportamento duttile in regioni specifiche, riducendo la necessità di sovraprogettare in altre parti della struttura.

26 I principi di progettazione delle capacità sono incorporati nei moderni codici sismici, come ASCE/SEI 7 negli Stati Uniti, Eurocode 8 in Europa e la legge standard dell'edificio giapponese. Questi codici incorporano le idee fondamentali di duttilità, gerarchia della forza e dissipazione dell'energia, assicurando che le strutture siano in grado di resistere alle forze sismiche mentre salvaguardano la vita e la proprietà.

69.4 Metodi di analisi sismica

69.4.1 Analisi push-over (POA)

Teoria

27 L'analisi pushover è una procedura non lineare statica utilizzata per stimare la capacità sismica delle strutture, particolarmente popolare nell'ingegneria strutturale per valutare le prestazioni di edifici e ponti sotto carichi sismici.

28 A differenza delle analisi sismiche dinamiche, l'analisi pushover fornisce una visione dettagliata del comportamento inelastice di una struttura, compresi i suoi meccanismi

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

di guasto, simulando la sua risposta ad aumentare gradualmente i carichi laterali. Con l'aumento della grandezza del carico, si trovano collegamenti deboli (congiunti in plastica) e modalità di guasto della struttura.

29 L'uscita chiave dell'analisi pushover è la *curva di capacità* or *curva di spinta*, che rappresenta il rapporto tra taglio di base e spostamento del tetto; questa curva consente agli ingegneri di determinare la capacità sismica di una struttura e valutare se soddisfa gli obiettivi prestazionali in vari livelli di rischio.

30 ATC-40 (ATC-40, 1996) e FEMA-273 (FEMA, 1997b)I documenti hanno sviluppato procedure di modellazione, criteri di accettazione e procedure di analisi per l'analisi del pushover, che definiscono i criteri di deformazione della forza per le cerniere utilizzate nell'analisi pushover.

31 Il metodo consente di tracciare la sequenza di resa e guasto sul livello del membro e della struttura, nonché il progresso della curva complessiva della capacità della struttura Fig. 69.2. Ciò definisce essenzialmente la domanda sulla struttura.

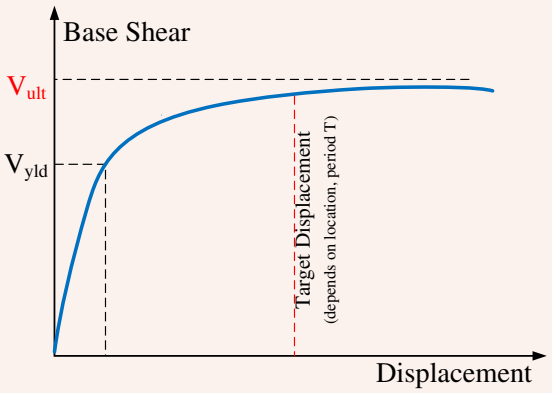


Figura 69.2: Curva di capacità

Obiettivi chiave

32 L'analisi pushover serve diversi scopi critici:

- Valutare le prestazioni strutturali: valutare la risposta inelastice della struttura.
- Identificare i punti deboli: individuare i potenziali punti di guasto e componenti critici.
- Determinare la capacità sismica: stimare il taglio base, lo spostamento del tetto e le esigenze di duttilità.
- Valutare Retrofit Needs: Informare le strategie di rinforzo e retrofitting per migliorare le prestazioni sismiche.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Assunzioni e Limitazioni

33 Mentre efficace, l'analisi pushover si basa su presupposti specifici che possono limitare la sua applicabilità:

- L'analisi presuppone che la risposta sia dominata dalla *modalità fondamentale di vibrazione*, rendendolo adatto principalmente per edifici a bassa e media crescita.
- Le condizioni di supporto fissa sono tipicamente assunte, e *effetti più alti* sono trascurati a meno che vengano eseguite analisi multiple di pushover con diversi modelli di carico.
- Effetti dinamici come durata, contenuto di frequenza e interazione struttura del suolo non vengono catturati.

Passi nell'analisi pushover

Modellazione della struttura

- Utilizzare un *modello strutturale non lineare* rappresentare la geometria, le proprietà materiali e le condizioni di confine.
- Definire cerniere di plastica in posizioni critiche come connessioni a raggi-colonna, base di colonne o metà della larghezza dei travi.
- Rappresentare il comportamento materiale utilizzando un *rapporto forza-deformazione* (ad esempio, modelli bilineari o trilineari).

Applicare carichi di gravità I carichi di gravità statici, compresi i carichi morti e una frazione dei carichi vivi, vengono applicati per garantire che la struttura sia in equilibrio prima del carico laterale.

Definire modelli di carico laterale I modelli di carico comuni includono, Fig. 69.3:

- Carico triangolare inverso: un modello di carico che aumenta linearmente dalla base alla parte superiore, rappresentando una distribuzione trianulare invertita.
- Caricamento rettangolare: una distribuzione uniforme del carico applicata attraverso l'altezza della struttura.
- Caricamento in prima modalità: un modello di carico proporzionale alla forma della struttura.
- Modal Dynamic Load: una distribuzione del carico derivata dai contributi modali dell'analisi dinamica, che rappresentano effetti di modalità più elevate.

Caricamento incredibile

- Applicare in modo incredibile le forze laterali o gli spostamenti fino a un valore

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

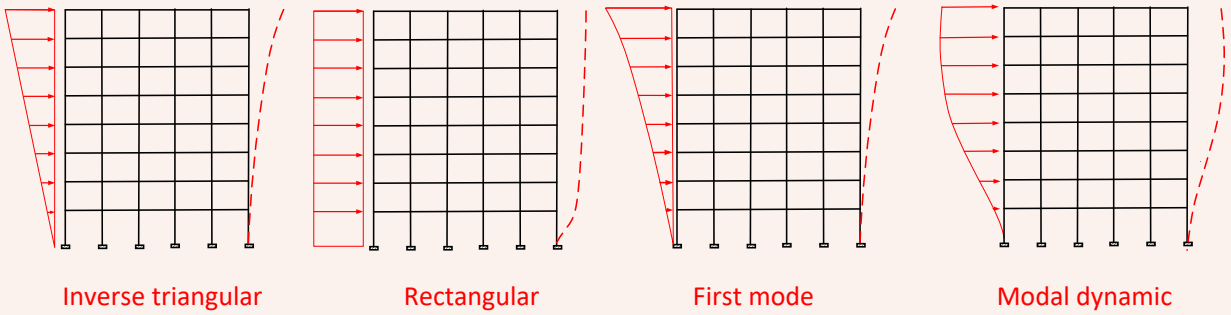


Figura 69.3: Carico laterale per analisi push-over

di destinazione. Lo spostamento obiettivo può essere determinato dallo spettro di risposta

$$\Delta = g\left(\frac{T}{2\pi}\right) C_s$$

dove Δ è lo spostamento spettrale, T è il periodo, e C_s il coefficiente sismico elastico.

- Eseguire i controlli di equilibrio e compatibilità a ogni passo.
- Continuare fino a quando non si verificano guasti globali o locali (ad esempio, formazione di cerniera in plastica, spostamento eccessivo).

Monitoraggio della risposta strutturale I parametri di risposta chiave includono:

- Portata di base: Forza laterale totale resistita dalla struttura.
- Slocamento del tetto: Misura della capacità di deformazione della struttura.
- Formazione di cerniera in plastica: posizioni e sequenza del comportamento inelastico.

Sviluppare la curva di capacità Trama la parte inferiore della cinghia contro lo spostamento del tetto per creare *curva di spinta*, rappresenta la risposta globale inelastice della struttura.

Interpretazione di uscita

Curva di capacità La curva di spinta è segmentata in:

- Regione elastica: risposta iniziale.
- Regione inelastice: risposta non lineare che mostra un graduale degrado di rigidità.
- Punto di arrivo: punto della massima capacità di taglio o spostamento base.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Punti di performance L'intersezione della *spettro della domanda* (dall'analisi sismica) con la curva di capacità definisce il *punto di prestazione*, che rappresenta lo spostamento atteso durante un terremoto.

Modelli di formazione cerniera Le cerniere in plastica forniscono informazioni sui meccanismi di guasto e i potenziali legami deboli. *comportamento duttile* (preferito) o *comportamento fragile* (indesiderabile).

Drift e Dutility Calcola i rapporti interstoriali di deriva e la domanda globale di duttilità per garantire che la struttura soddisfi gli obiettivi di performance del design.

Applicazioni

- Design basato sulle prestazioni: Valutare le prestazioni in diversi livelli di rischio sismico (occupazione mediata, sicurezza della vita, prevenzione del tracollo).
- Retrofit Design: Valuta l'efficacia delle tecniche di rinforzo strutturale (ad esempio, aggiungendo braces, pareti di taglio).
- Valutazione danni: stimare i potenziali danni nelle strutture esistenti per la pianificazione della risposta alle catastrofi.

Considerazioni avanzate

- Effetti più elevati: Eseguire analisi multiple pushover con vari modelli di carico per tener conto delle modalità superiori, specialmente nelle strutture alte o irregolari.
- Analisi di pushover adattivo: Aggiorna il modello di distribuzione del carico dinamicamente come le cerniere forma e la rigidità cambia.
- Strumenti software: strumenti come SAP2000, ETABS e OpenSees facilitano l'analisi pushover con funzioni integrate per la modellazione di cerniere in plastica e comportamento non lineare.
- Modelli materiali non lineari: incorporare modelli specifici del materiale (ad esempio, cemento confinato, resa in acciaio) per simulare meglio il comportamento reale.

Confronto con analisi sismica

[34] Analisi del pushover e analisi sismica sono confrontati nella tabella 69.1.

69.4.1.1 Ex 69.1: Esempio di curva della domanda

Adattato da *Progettazione di plastica basata sulle prestazioni: strutture in acciaio resistant del terremoto* di Goel e Chao

COPIA DI REVISIONE

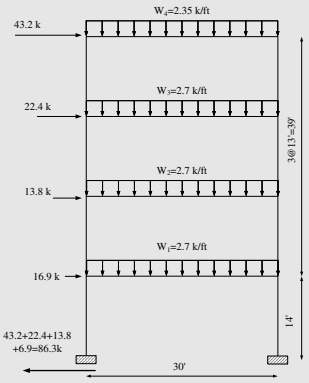
I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 69.1: Confronto dell'analisi pushover e analisi sismica

Aspetti La mia Natura	**Analisi del pushover** Procedura statica non lineare	**Analisi sismica** o procedura dinamica non lineare
Effetti dinamici	Ignora le proprietà dinamiche (ad esempio, forze inerziali a tempo dipendente)	Considera direttamente le proprietà dinamiche, compresi gli effetti del movimento terra
Comportatore modellato	Si concentra su meccanismi di risposta e guasto inelastica	Spesso limitato alla risposta elastica a meno che non si utilizzi l'analisi non lineare
Effetti più moderni	Trascurato a meno che non vengano effettuate più analisi	Completamente catturato in analisi dinamiche
Complessità	Computazionalmente più semplice, richiede meno risorse	Più computazionalmente intensivo, soprattutto per l'analisi dinamica non lineare
Uscite	Curva di capacità, schemi di formazione cerniera, requisiti duttilità	Risposte temporali, contributi modali, dissipazione di energia
Applicabilità	Adatto per strutture a bassa o media con configurazioni regolari	Richiesto per strutture alte, irregolari o critiche

COPIA DI REVISIONE

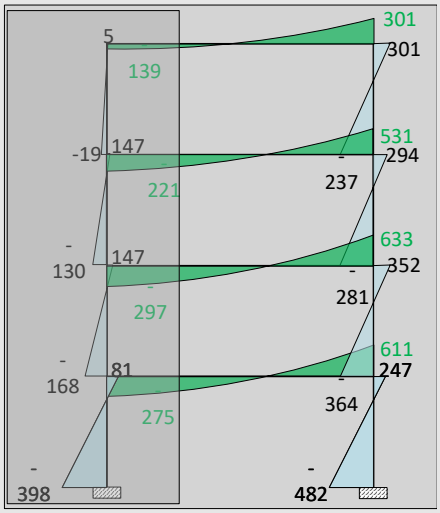
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Cerchiamo di determinare la curva della domanda per il seguente frame F_y= 50 ksi, E= 30.000 ksi, deformazione assiale e taglio sono trascurati. Curvatura elastica-perfettamente plastica del momento assunto.

- Prima si esegue un'analisi elastica, e tutti i membri soddisfatti $M_{max} < M_p = F_y Z_x$.

Piano terra	$M_{u,req}$ (k-ft)	Signora Sezione	M_p (k-ft)	$M_{u,req}$ (k-ft)	Colonna Sezione	M_p (k-ft)
4	301	W16x40	304	301	W16x40	304
3	531	W24x55	558	294	W16x40	304
2	633	W24x62	638	364	W21x44	398
1	611	W24x62	638	482	W21x55	525

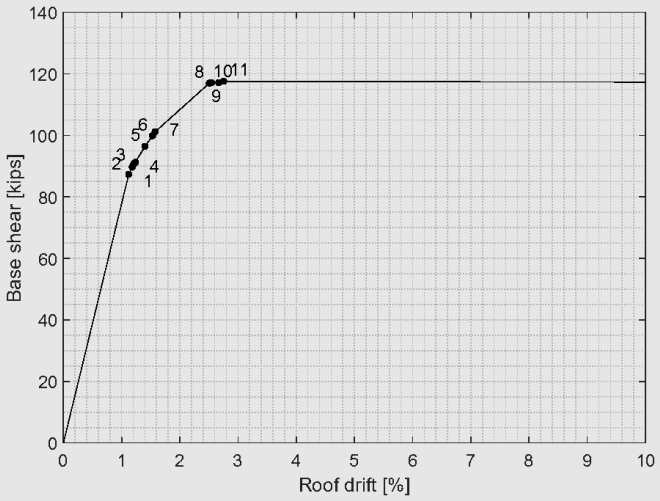


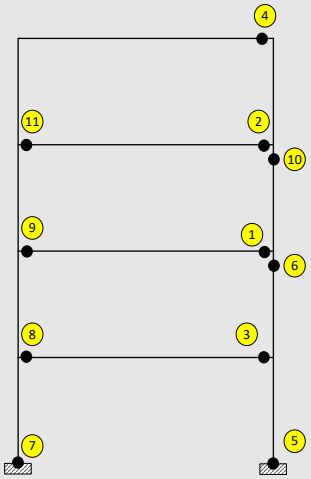
- Parafango base (forza laterale totale) rispetto al rapporto di deriva del tetto (spostamento/altezza del tetto) e la posizione e la sequenza della formazione delle cerniere in plastica sono mostrate sotto.
- La forza laterale al limite elastico quando la prima cerniera di plastica è 87,6 kips, leggermente superiore al valore progettuale di 86.3 kips.
- Da quel momento in poi, la ridistribuzione dei momenti si verifica con cerniere di plastica che formano sequenzialità e il telaio raggiunge la sua forza finale di 117.5 kips ad un rapporto di deriva del tetto di 2.7%.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

- Il meccanismo di resa si rivelò un parziale meccanismo di sway su 3 storie con cerniere in plastica alle estremità del fascio e la base delle colonne e alla sommità della seconda e terza storia.
- Il rapporto di duttilità (V_{ult}/V_y) is 1.36.





69.4.1.2 Ex 69.2: Analisi push-over; Esempio pratico

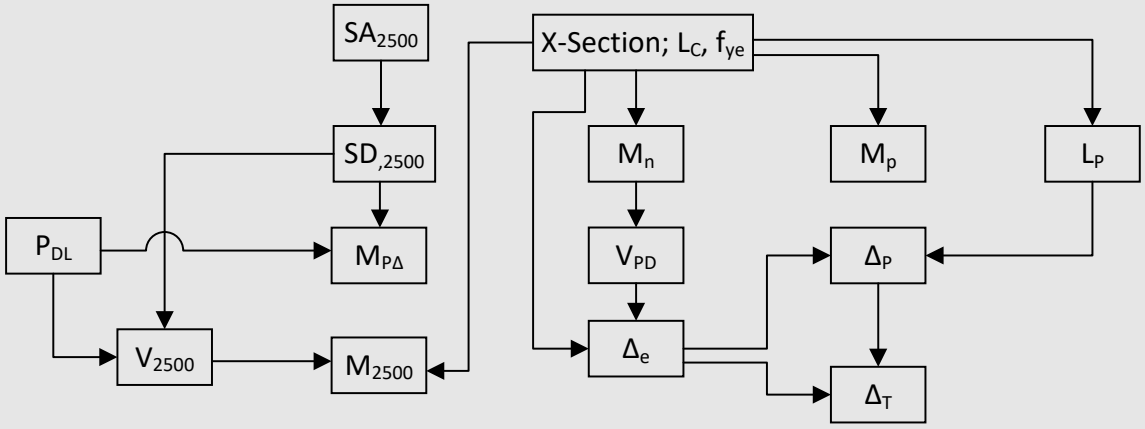
Problema Formulatore: Marilyne Lefebvre (Kiewit Engineering Co.)
Soluzioni: Marilye Lefebvre, Victor Saouma, Cody Harrington, Mohammad Salchi, Mohammad T. Nikoukalam

Formulazione dei problemi

Questo inserimento sarà diviso in più parti. In primo luogo, il problema è articolato in §69.4.1.2. Quindi dovrete eseguire un'analisi dello spettro di risposta per il sito al fine di determinare lo spostamento del design che deve essere ospitato, §69.4.1.2. A questo punto si potrebbe determinare la capacità per calcoli a mano (in conformità con il codice AASHTO), §69.4.1.2Questo comportarebbe calcoli della lunghezza di cerniera in plastica, dei momenti plastici e del corrispondente taglio base, ed infine degli spostamenti elastici e plastiche.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Dichiarazione del problema

Il seguente compito di lavoro a casa si basa su un'analisi che è fatta da Kiewit. Vi darà una sensazione per ciò che viene fatto in genere in uno studio di progettazione.

Il ponte Goethals si trova fuori New York City, attraversa l'Hurth Kill (Staten Island Sound) tra Staten Island, NY e Elisabeth, NJ, Fig. 69.4. La portata principale del nuovo ponte è un ponte a cavalletto mentre i due approcci sono prefabbricati da boxe segmentali. Il nuovo ponte sta sostituendo un ponte in acciaio cantilever che viene costruito durante il Roaring 20's. In questo esercizio, si deve analizzare il disegno del pier dell'approccio span sul lato New Jersey contro il carico terremoto di progettazione.Un pier è selezionato come la sezione rappresentativa e un'analisi pushover viene eseguita su di esso.





Figura 69.4: Ubicazione e immagine del ponte

Lunghezza della colonna (L_c) è di 40 ft; lunghezza dell'albero a punto di fissità (L_S) è di 60 ft; diametro dell'albero perforato (d_s) è di 8 ft; f_{cc} per colonna 5.000 psi e infine albero f_{cs} è di 4.000 psi.

Parte 1: analisi dello spettro di risposta

Lo spettro di risposta del progetto per il sito è riassunto nella tabella 69.2 dove C_S sono il coefficiente sismico elastico. Selezionare 2.500 anni Classe F del sito.

COPIA DI REVISIONE

Tabella 69.2: Nj strutture di approccio spettro di risposta

1000 anni di classe A			2.500 anni di classe A			1000 anni di classe F			2.500 anni Classe F		
T (sec)	C_s	Δ (ft)	T (sec)	C_s	Δ (ft)	T (sec)	C_s	Δ (ft)	T (sec)	C_s	Δ (ft)
0.00	0.072	0	0.00	0.244	0	0.00	0.270	0	0.00	0.520	0
0.04	0.144	0.000217	0.04	0.578	0.000754	0.04	0.379	0.000495	0.04	1.144	0.001493
0.05	0.144	0.000294	0.05	0.566	0.001155	0.05	0.407	0.000829	0.05	1.300	0.002651
0.10	0.144	0.001175	0.10	0.508	0.004143	0.10	0.543	0.004432	0.10	1.300	0.010603
0.15	0.144	0.002643	0.15	0.451	0.008277	0.15	0.680	0.012479	0.15	1.300	0.023857
0.20	0.144	0.004698	0.20	0.394	0.012854	0.20	0.680	0.022185	0.20	1.300	0.042413
0.22	0.144	0.005531	0.22	0.381	0.01503	0.22	0.680	0.026844	0.22	1.300	0.05132
0.30	0.104	0.007634	0.30	0.328	0.024053	0.30	0.680	0.049917	0.30	1.300	0.095429
0.45	0.069	0.011446	0.45	0.228	0.037685	0.45	0.200	0.033033	0.45	0.813	0.134198
0.50	0.062	0.012724	0.50	0.195	0.039762	0.50	0.167	0.033985	0.50	0.650	0.132541
0.60	0.056	0.01649	0.60	0.177	0.051914	0.60	0.100	0.029363	0.60	0.552	0.162083
1.00	0.031	0.025448	1.00	0.104	0.084826	1.00	0.040	0.032625	1.00	0.160	0.130502
2.00	0.025	0.081237	2.00	0.050	0.163127	2.00	0.016	0.052201	2.00	0.055	0.17944
3.00	0.019	0.136537	3.00	0.040	0.293629	3.00	0.013	0.092982	3.00	0.035	0.256925
4.00	0.012	0.160517	4.00	0.030	0.391505	4.00	0.009	0.121802	4.00	0.025	0.326254
5.00	0.006	0.122345	5.00	0.020	0.407818	5.00	0.006	0.122345	5.00	0.020	0.407818
									6.00		0.5

Assegnazione

1. Trama il C_s spettro di risposta.
2. Estrapolare la curva e dichiarare ciò che è C_S per T = 6 secondi.
3. Traccia lo spettro di risposta dello spostamento.
4. Estrapolare la curva e indicare qual è lo spostamento per T = 6 secondi.

Parte 2: capacità (calcolazioni a mano per il pier)

Avrete bisogno di accedere alla copia allegata della 2a edizione del *Specifiche guida AASHTO per la progettazione del ponte sismico LRFD* (AASHTO, Seismic, 2011). electronic copy può essere accessibile dal sito web CU Library.

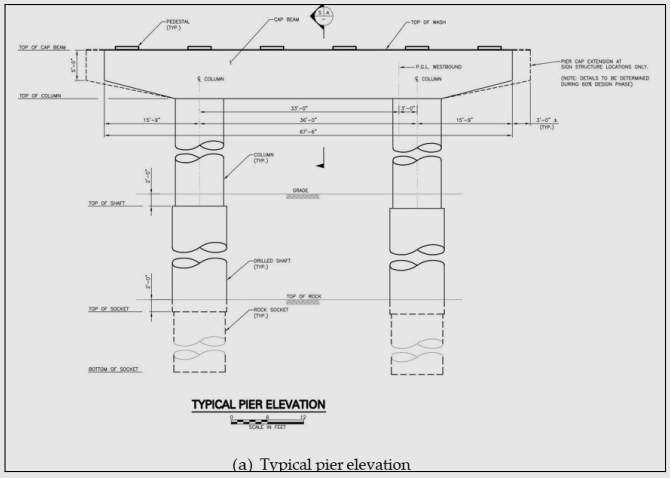
Le proprietà del piegato sono indicate di seguito:

1. Lunghezza della colonna = 40 piedi
2. Lunghezza dell'albero forato = 60 piedi
3. Diametro della colonna = 7 piedi
4. Diametro dell'albero forato = 8 piedi
5. Resistenza compressione della colonna e del tappo di pier (f_c') = 5 ksi
6. Resistenza compressione dell'albero forato (f_c') = 4 ksi
7. Si supponga che il tappo del pier sia un fascio rettangolare con una profondità di 7′-0′ e una larghezza di 8′-6″ Solo concentrare sulla porzione tra le colonne. Le proprietà del piegato sono:
8. Sezione colonna: Si supponga che la barra di sbarramento è circa 6 pollici.
9. Sezione albero forato: Trascurare l'involucro in acciaio. La copertura chiara è di 4 pollici. Assumere che la barra spaziatrice è circa 6 pollici per #14 bar e 9 pollici per il # 18 bar.

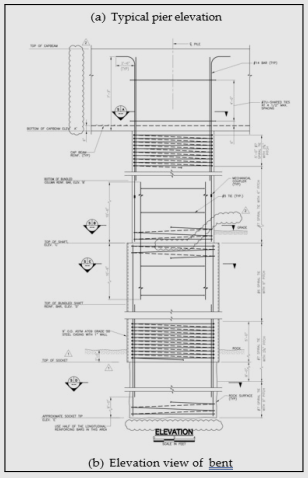
Tipici altipiani di pier e piani per le campate di avvicinamento sono mostrati in Fig. 69.5 e 69.6

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Tipica elevazione del pier

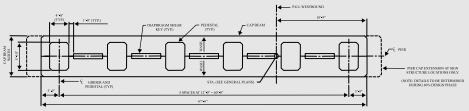


(b) Vista di elevazione del piegato

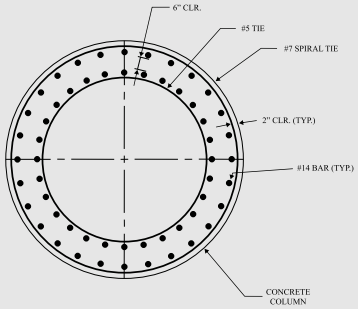
Figura 69.5: Colonne e dimensioni del pier

COPIA DI REVISIONE

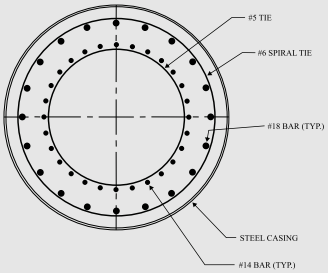
I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



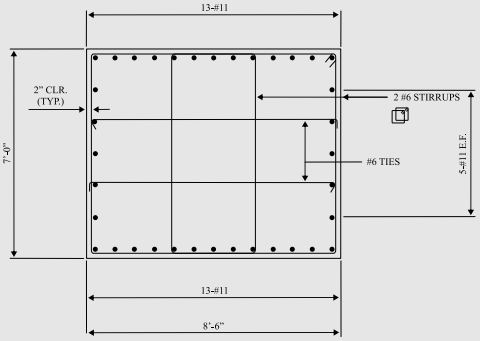
(a) Tipica elevazione del pier



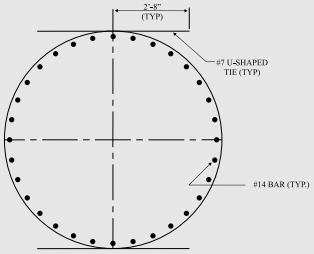
(b) Sezione SB



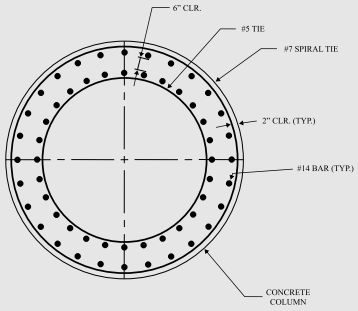
(c) Sezione



(d) Sezione SA



(e) Sezione colonna al fascio del cappuccio



(f) Sezione colonna a base

Figura 69.6: Colonne e sezioni di albero

Perché un albero perforato?

In (AASHTO, Seismic, 2011), è necessario progettare un albero perforato come membro protetto dalla capacità nella zona sismica B-D (e vuoi che rimanga elastico durante un terremoto). In questo modo, qualsiasi danno alla colonna può essere visto e riparato.

Assegnazione

COPIA DI REVISIONE

5. A giudicare dai piani, identificare il sistema di resistenza al terremoto come indicato in (AASHTO, Seismic, 2011, chap. 3) (cioè è il tipo 1, Tipo 2, ecc.?).
6. ~~Trova la capacità nominale del momento della colonna. I punti bonus verranno assegnati se riesci a trovare M_{ne} utilizzando la distribuzione di stress Mander~~ (Mander, Priestley e Park, 1988)Fico. 69.7 ~~al posto del Whitney Stress Block.~~

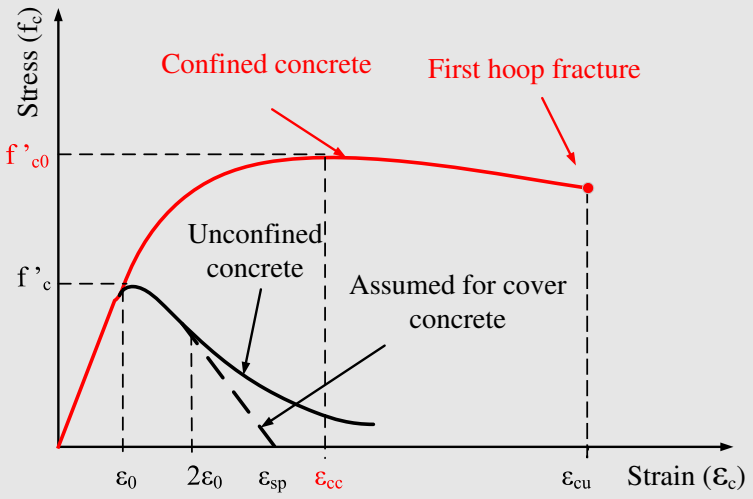


Figura 69.7: Rapporto di sforzo-strain per carico monotonico del calcestruzzo confinato e non confutato (Mander, Priestley e Park, 1988)

Whitney, M_n = 6,220 kip-ft (±10%); Mander, M_n = 8,551 kip-ft (±10%)

7. Utilizzo (AASHTO, Seismic, 2011, chap 8), determinare la forza di resa prevista f_{ye} della barra se la barra di rifilatura è l’acciaio ASTM A706 (nota: $f_y = 60$ ksi).
8. Determinare la lunghezza della cerniera di plastica analitica L_p della colonna. Inseguimento: controllo (AASHTO, Seismic, 2011, §4.11).

$$L_P = 0.08L_C + 0.15 f_{ye} d_{bl} \geq 0.3 f_{ye} d_{bl} \quad \text{(4.11.6-1)}$$

dove

L	lunghezza della colonna dal punto di massimo momento al punto di contraflessione del momento (in.)
f_{ye}	resistenza di resa prevista delle barre d’acciaio rinforzanti per colonne longitudinali (ksi)
d_{bl}	diametro nominale delle barre di acciaio rinforzanti per colonne longitudinali (in.)

COPIA DI REVISIONE

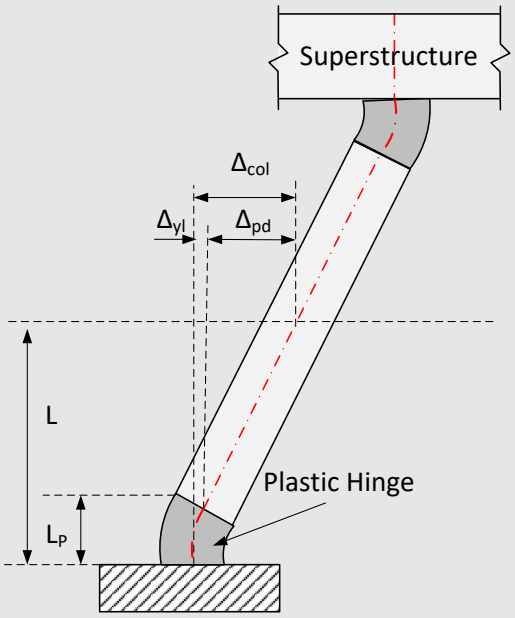
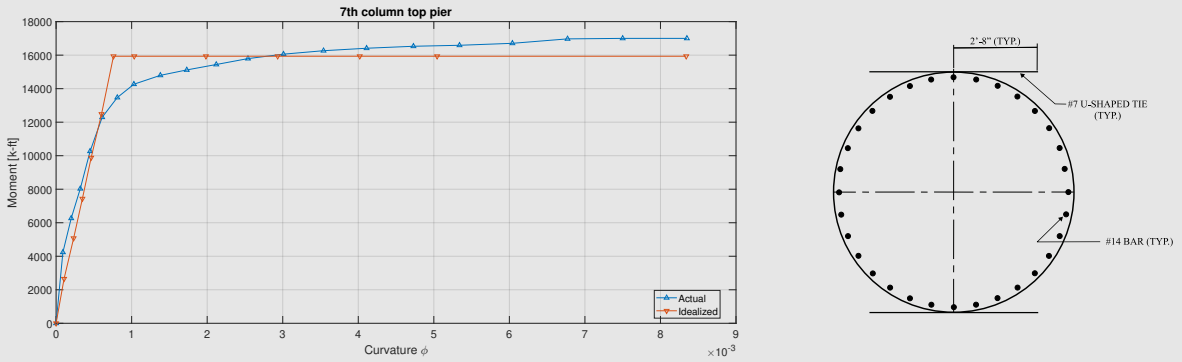


Figura 69.8: Pier defletto forma e diagramma di curvatura; adattato da AASHTO, Seismic, 2011, fig. c4.9-2

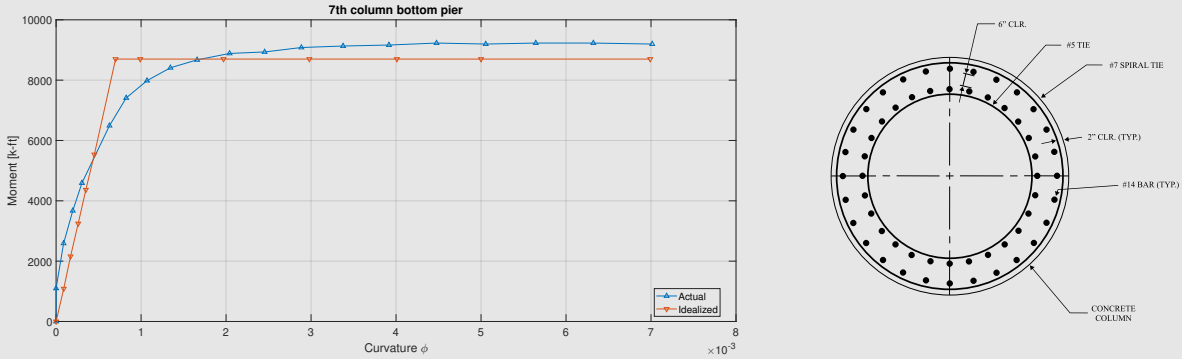
9. Utilizzo dei dati in `P-M-Diagrams.xlsx`, determinare il momento della plastica M_p nella parte superiore della colonna, la base della colonna e nell'albero forato. Trama queste curve di curvatura idealizzate (vedere (AASHTO, Seismic, 2011, figures 8.5.1 and C4.9.1).State quale di questi momenti è il più piccolo (lo useremo per confrontare i nostri risultati nella Parte 3). Per ora, supponiamo che il carico assiale del disegno sulla colonna sia P_{DL} = 2.500 kips (questo include il peso del pier). I momenti di plastica dovrebbero essere uguali a quelli mostrati in Fig. 69.9.

COPIA DI REVISIONE

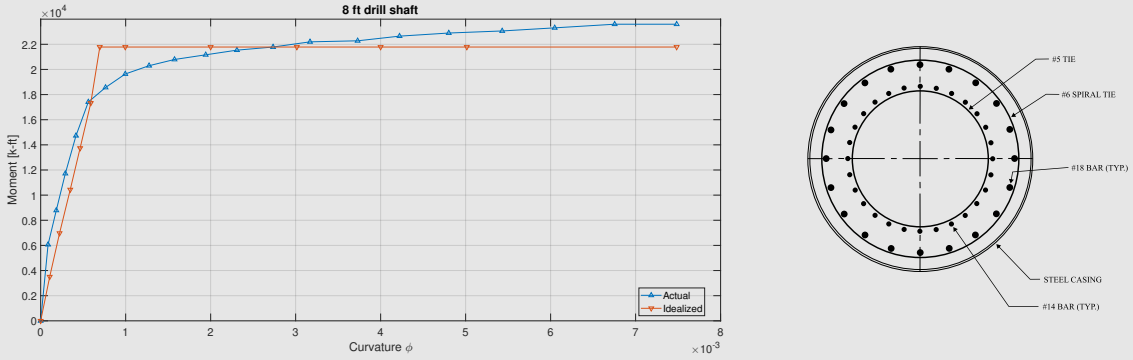
I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Colonna di diametro 7ft in cima al molo; M_P= 15,839 kip-ft (± 10%)



(b) Momento-curvatura di colonna diametro 7 ft in fondo al molo; M_P=8,662 kip-ft (± 10%)



(c) Momento-curvatura di albero perforato diametro 8 ft; M_P= 21.786 kip-ft (± 10%)

Figura 69.9: Curvature di momento e momenti in plastica

10. Che cos'è la cesoia V_p necessario per causare il momento di plastica per sviluppare?
11. Trova lo spostamento elastico della colonna Δ_e. **- Ciao.** Fare riferimento a AASHTO, Seismic, 2011, Fig. C4.9-2, e applicare zona di momento.
12. Trova lo spostamento di plastica della colonna Δ_{pd}. Assumere che la curvatura di plastica Φ_{pd} è di 0.005/ft.
13. Trova lo spostamento totale nella parte superiore della colonna (Δ_{total}).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Parte 3: determinare i carichi della domanda

Il carico assiale di progettazione sulla colonna è P_{DL} = 2.500 kips.

Assegnazione

14. Qual è il momento alla base della colonna dalla $P\Delta$ effetti? $M_{P\Delta}$ più piccolo/più grande/ uguale a $0.25M_P$?
15. Che cos'è la cesoia V_{2500} alla base della colonna?
16. Che cosa è il momento M_{2500} alla base della colonna da questa forza di taglio? È M2500 più piccolo/più grande/ uguale a $0.25M_P$?
17. Il momento della domanda è più grande/più piccolo/ uguale al momento ammissibile che si trova nella parte 2? Φ fattore di flessione è 0,9 se la sezione è controllata dalla tensione o 0.7 se la parte è a compressione controllata.

Parte 4: Analisi pushover

Un approssimativo spostamento totale è stato determinato dal codice AASHTO, ora cerchiamo di eseguire un'analisi pushover e abbiamo un valore più preciso.

Dovremmo usare un software per eseguire le varie analisi (RISA, SAP o qualsiasi altro codice elastico).

Figura AASHTO, Seismic, 2011, Fig. 4.8-2 illustra la sequenza di cerniera in plastica per un telaio pier. Per semplicità, supponiamo che il tappo del pier sia rigido - in questo modo, dobbiamo solo affrontare lo spostamento delle colonne. Tenere a mente questa sequenza mentre si passa attraverso l'analisi pushover.

Assegnazione

18. Fornire un'illustrazione del modello, assicurandosi di etichettare chiaramente l'elemento e la notazione dei nodi (le figure a bastoncino sono accettabili). Modello sia il molo che gli alberi forati.
19. Come nella Parte 2, determinare il momento della plastica M_P nella parte superiore della colonna, la base della colonna e nell'albero forato. P = 0 kips a P = 5.000 kips (ΔP = 500 kips). *Da estrarre dal* `P-M.xlsx` *file reso disponibile*).
20. Posizionare una forza orizzontale 1-kip sulla parte superiore della colonna. Dichiarare la forza assiale, il momento e lo spostamento in ogni nodo del vostro modello.
21. Incrementalmente aumentare la forza di taglio fino a quando un cervo si forma. A quale forza e posizione fa il modulo di cerniera?
22. Tabula i risultati. Ad ogni nodo, indicare la forza assiale, il momento e lo spostamento.
23. Posizionare una cerniera sul nodo (assicurarsi che ci sia un momento zero alla cerniera). Ancora una volta, mettere una forza orizzontale 1-kip sulla parte superiore della colonna.
24. Incrementalmente aumentare la forza di taglio fino a quando un cervo si forma. A quale forza e posizione fa il modulo di cerniera?
25. Ancora una volta, tabula i risultati.
26. Posizionare una cerniera sul nodo e continuare a spingere sulla colonna (in altre parole, due volte in più).
27. Aggiungere la forza orizzontale dai quattro scenari. Aggiungete anche la forza assiale, il momento e gli spostamenti in ogni nodo.
28. Se nel molo si verificano guasti? Segui i criteri di fallimento indicati in AASHTO?

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

29. Qual è lo spostamento nella parte superiore della colonna in caso di guasto?
30. Confrontare l'analisi pushover ai calcoli delle mani effettuati nella seconda parte. Quale di queste analisi pensi sia più conservativo?
31. Il disegno del pier è adeguato (in altre parole, la tranciatura e il momento calcolati formano l'analisi pushover più grande/più piccola/ uguale ai carichi di progettazione che abbiamo calcolato dalla parte 3)?

Aiuto

Analisi strutturali

Per facilitare il vostro compito, la cornice è stata analizzata sequenziale e i risultati sono mostrati in Tabella 69.3.

Tabella 69.3: Analisi sequenziali per l'analisi pushover

V (K)	Node	P_{eq} (K)	M^i_{EQ} (K-ft)	Δ (in)
1	N1	-0.81	28.84	0.00
	N2	-0.81	-1.17	-0.01
	N3	-0.81	-21.17	-0.01
	N4	0.81	28.82	0.00
	N5	0.81	-1.17	-0.01
	N6	0.81	-21.17	-0.01
1	N1	-0.56	28.15	0.00
	N2	-0.56	11.23	-0.01
	N3	-0.56	0.00	-0.02
	N4	0.56	43.47	0.00
	N5	0.56	0.37	-0.01
	N6	0.56	-28.37	-0.02
1	N1	-0.75	0.00	0.00
	N2	-0.75	0.00	-0.02
	N3	-0.75	0.00	-0.03
	N4	0.75	60.61	0.00
	N5	0.75	0.63	-0.02
	N6	0.75	-39.38	-0.03

Determinazione delle formazioni di cerniera

In seguito ad ogni analisi, dovrai determinare dove si trova il seguente modulo di cerniera (i) e completare una tabella come segue:

V (K)	Node (K-ft)	P_{EQ} (K)	M_{EQ} (K-ft)	Δ (in)	P_{Tot} (K)	$M_{EQ,Tot}$ (K-ft)	M_p (K-ft)	Plastica Cerniera?	$M_P/M_{eq,Tot}$
40	Ni	-	-	-	-	-	-	-	-
	Nj	-	-	-	-	-	-	-	-

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

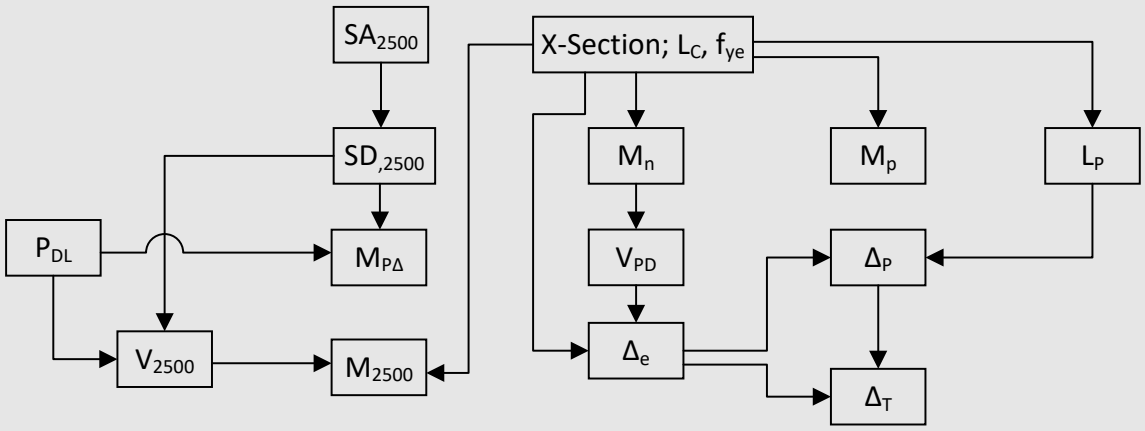
- P_{EQ}, M^i_{EQ} e Δ sono ottenuti dai risultati dell'analisi precedente (Tabella 69.6) moltiplicato per la forza di taglio nella colonna 1 (più su di essa in un minuto).
- P_{total} è la somma di P_{DL} (2.500 Kip) e P_{eq}.
- $M_{EQ,total}$ è semplicemente uguale alla somma di tutti i valori precedenti e quello attuale. 69.9, $M^i_{EQ,total} = M^{i-1}_{EQ,total} + M^i_{EQ}$ e per N1

$$\begin{aligned} M^i_{EQ,total} &= M^{i-1}_{EQ,total} + M^i_{EQ} \\ &= 19,322 + 282 = 19,603 \end{aligned}$$

- M_P richiede particolare attenzione poiché le forze assiali nelle sezioni cambiano in quanto la forza orizzontale nella parte superiore è aumentata, quindi anche le capacità di momento sono cambiate. `tendenza` funzione che cerca il minimo approssimazione quadrata per una *lineare* funzione tra due punti finali come:
`= TRENO('P vs Mp'!`$D3$`:`$D53$`, 'P vs Mp'!`$A3$`:`$A53$`,F10)`
Nell'analisi attuale, $0 < P_{total} < 5,000$.
- Consideriamo che la prossima cerniera di plastica si formerà quando $M_{eq,Tot} \geq 0.95 M_p$

Tuttavia, il problema è davvero non lineare, in quanto la condizione per la formazione di una cerniera dipende dalla grandezza della cinghia a questo passaggio. V (di 10 kips) fino a un modulo di cerniera. In questo caso è 40.

Interazione tra le attività



Soluzione

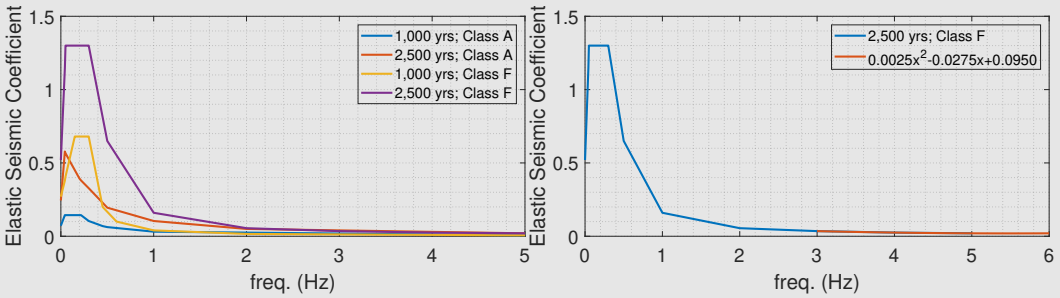
Parte 1: analisi dello spettro di risposta

C_s coefficiente per la posizione specificata e 1000, 2500 anni per classe A e F sono stati mostrati in Tabella 69.2

① Trama di C_s e lo spettro di risposta di spostamento (insieme con estrapolazioni a 6 sec.) sono mostrati in Fig. 69.10.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Tutti (b) 2.500 anni, Classe F

Figura 69.10: Analisi dello spettro di risposta (C_S)

Coefficienti sismici elastici (C_S) può essere trasformato in spostamenti spettrali (Δ) attraverso

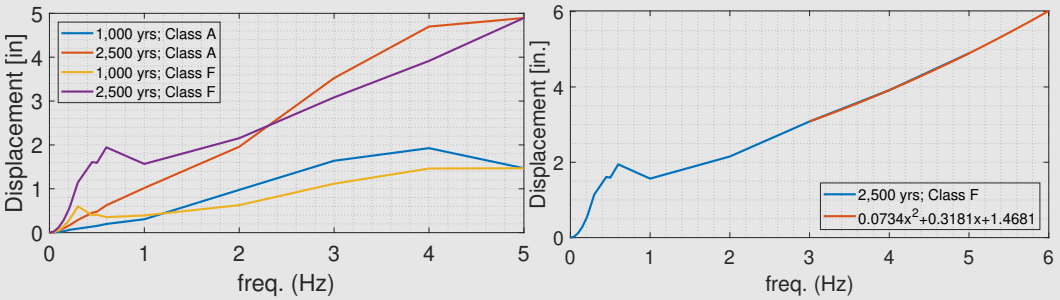
$$\Delta = g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 C_S \tag{69.1}$$

② Una misura quadratica per gli ultimi tre punti di dati raccolti

$$C_S = 0.0025f^2 - 0.0275f + 0.0950 \tag{69.2}$$

Sostituire in Eq. 69.2 per T = 6 - Si'. C_s=0.02 (anche da Fig. 69.11b)

③ Lo spettro di risposta allo spostamento è mostrato in Fig. 69.11.



(a) Tutti (b) 2.500 anni, Classe F

Figura 69.11: Analisi dello spettro di risposta di spostamento

④ che si arrenderà C_S to T = 6 secondi di rendimento, Δ =6 in.

Parte 2: capacità (calcolazioni a mano per il pier)

Sistema di resistenza al terremoto

AASHTO, Seismic, 2011, §3.3 specifica che il sistema di resistenza al terremoto (ERS) dei ponti fornirà un percorso di carico affidabile e ininterrotto per trasmettere forze sesticamente indotte nel terreno circostante e mezzi sufficienti di dissipazione dell'energia e/o di restrizione controllare in

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

modo affidabile gli spostamenti sesticamente indotti. Tutti gli elementi strutturali e di base del ponte sono in grado di realizzare spostamenti anticipati conformi alle esigenze della strategia progettuale prescelta della resistenza sismica e di altri requisiti strutturali. Il design dovrebbe essere basato sulle seguenti tre strategie di progettazione sismica globale utilizzate in queste specifiche guida basate sulle caratteristiche comportamentali attesi del sistema ponte, Fig. 69.12:

Tipo 1 Struttura Ductile con Sostegno Essenzialmente Elastico: Questa categoria comprende cerniere in plastica convenzionale in colonne e pareti e abutmenti che limitano le forze inerziali mediante la piena mobilizzazione della resistenza del suolo passivo. Sono incluse anche le basi che possono limitare le forze inerziali mediante cerniere interne, come ad esempio abutmenti integrali di sabbia piegata pila su pile.

Tipo 2 Sotterranea essenzialmente elastica con una superstruttura duttile: questa categoria si applica solo alle sovrastrutture composte in acciaio I-Sezione, diritte e non cucite, con traversine a tracolla. L'uso di questa strategia è approvato dal Titolare e si basa su criteri e metodologie di progettazione specifici per i casi.

Tipo 3 Superstruttura elastica e sottostruttura con un meccanismo Fusing tra i due: Questa categoria comprende strutture e strutture sesticamente isolate in cui i dispositivi di dissipazione dell'energia integrati, come gli ammortizzatori, sono utilizzati per controllare le forze inerziali trasferite tra la sovrastruttura e la sottostruttura.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

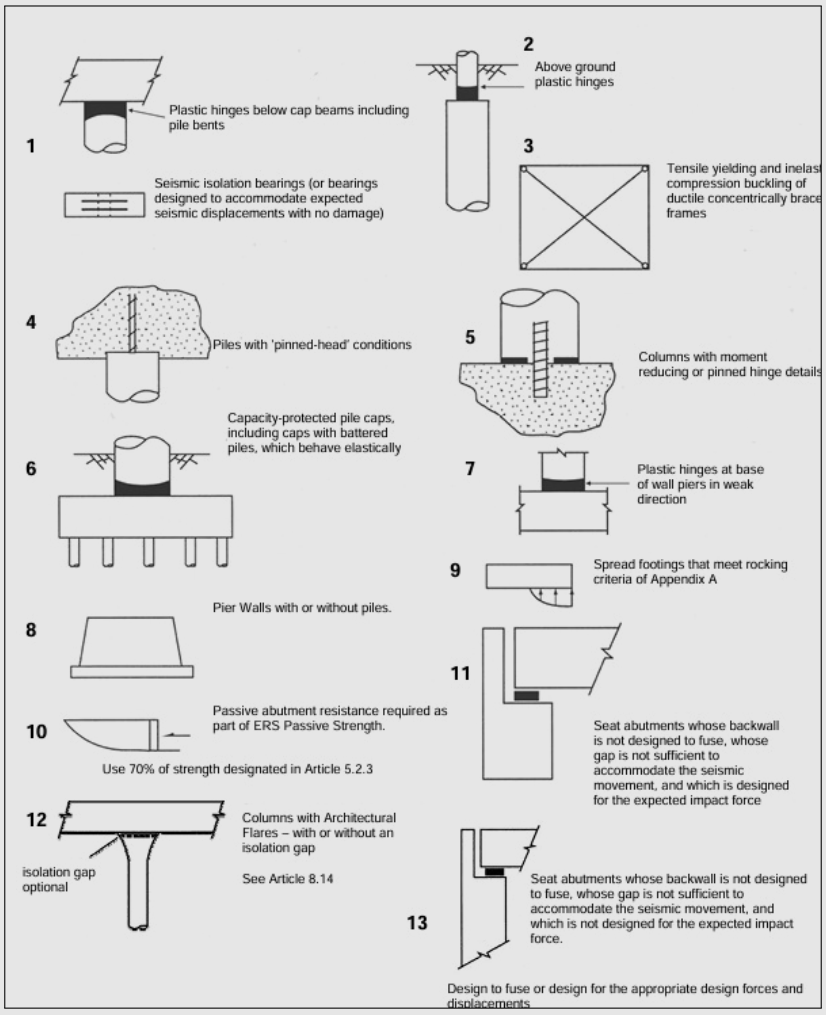


Figura 69.12: Elementi di resistenza al terremoto (eres) ammissibili (AASHTO, Seismic, 2011)

⑤ Da Figura 69.5a, la sovrastruttura in considerazione è rinforzato trave di cemento e il ponte non è sesticamente isolato e nessun dispositivo supplementare di dissipazione dell'energia sono utilizzati, quindi il sistema di resistenza al terremoto del ponte è Tipo 1.

Capacità nominale del momento

⑥ `Si noti che i calcoli per il momento nominale non sono riportati qui, e sono stati dati da Kiewit`

AASHTO, Seismic, 2011, §8.5 definisce la capacità nominale di momento prevista, M_{ne}, in termini di cemento e rinforzo dei punti di forza dell'acciaio quando o la ceppo calcestruzzo raggiunge una magnitudine di 0,003 o il ceppo d'acciaio rinforzante raggiunge la ridotta tensione massima della trazione definita nella tabella 69.4.

La colonna di base è mostrata in Figura 69.6b, e cerchiamo di calcolare la capacità nominale del momento utilizzando il blocco dello stress Whitney o modello di Mander[a]

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Utilizzando il blocco di stress Whitney, la capacità nominale del momento della colonna alla base si trova M_{ne} = 6,220 kip-ft (± 10%(Whitney).

Nel modello di Mander (Mander, Priestley e Park, 1988), Figura 69.7, l'intera curva di sforzo-strain è descritta dalle equazioni a 3 parametri

$$\frac{f_c}{f'_{cc}} = \frac{n\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}}\right)}{(n-1)+\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}}\right)^n} \tag{69.3}$$

$$n = \frac{E_c}{E_c - E_{sec}} \tag{69.4}$$

$$E_c \text{ (MPa)} = 5,000\sqrt{f'_c \text{ (MPa)}} \tag{69.5}$$

$$E_{sec} = \frac{f'_{cc}}{\varepsilon_{cc}} \tag{69.6}$$

ε_{cc} è la tensione alla massima resistenza di compressione del cemento confinato:

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{c0}\left[1+5\left(\frac{f'_{cc}}{f'_c}-1\right)\right]$$

e f'_{cc}, la forza di compressione del calcestruzzo confinato è data come:

$$f'_{cc} = f'_c\left(-1.254+2.254\sqrt{1+\frac{7.94f'_t}{f'_c}}-2\frac{f'_t}{f'_c}\right)$$

in cui f'_t è dato da:

$$f'_t = \frac{1}{2}k_e\rho_s f_{yh}$$

in cui ρ_s = rapporto di volume d'acciaio confinante trasverso al volume del nucleo di cemento limitato, f_{yh} = forza di rendimento del rinforzo trasversale, k_e = coefficiente di confinamento. Per cerchi circolari:

$$k_e = \frac{\left(1-\frac{s'}{2d_s}\right)^2}{1-\rho_{cc}}$$

e per spirali circolari

$$k_e = \frac{1-\frac{s'}{2d_s}}{1-\rho_{cc}}$$

dove ρ_{cc} = rapporto di area del rinforzo longitudinale all'area del nucleo della sezione, s' = spaziatura chiara tra barre a spirale o a cerchio, d_s = diametro della spirale.

Utilizzando il modello di Mander per definire la curva dello stress-strain, si trova che sia la capacità nominale del momento della colonna alla base

$$M_{ne} = 8,551(\pm 10\%) \text{ (kip-ft; Mander)} \tag{69.7}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

⑦ **Provvedibilità della resa** f_{ye} AASHTO, Seismic, 2011, §8.4.2 afferma che l'acciaio rinforzante deve essere modellato con una relazione tra stress e resistenza che presenta una porzione elastica iniziale, un plateau di resa e una gamma di indurimento dello sforzo in cui lo stress aumenta con la tensione, Figura 69.13 (AASHTO, Seismic, 2011, Fig. 8.4.2-1).

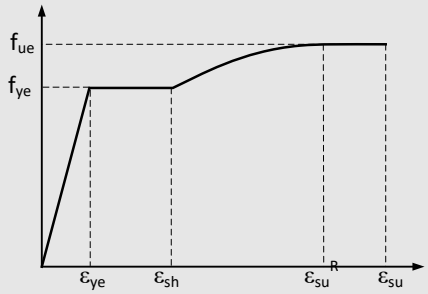


Figura 69.13: Modello di supporto per lo stress in acciaio rinforzato

In sede di dati specifici, le proprietà di rinforzo in acciaio fornite nella tabella 69.4 dovrebbe essere usato.

Tabella 69.4: Proprietà di resistenza delle barre in acciaio rinforzato (AASHTO, Seismic, 2011, table 8.4.2.1)

Proprietà	Notazione	Dimensione della barra	ASTM A 706	ASTM 615 (class 60)
Sforzo minimo di resa specificato (ksi)	fy	#3– #18	60	60
Previsione dello stress (ksi)	f_{ye}	#3– #18	68	68
Resistenza alla trazione prevista (ksi)	f_{ue}	#3– #18	95	95
Ceppo di resa previsto	ε_{ye}	#3– #18	0.0023	0.0023
		#3– #8	0.0150	0.0150
		#9	0.0125	0.0125
Indurimento di tensione	ε_{sh}	#10 & #11	0.0115	0.0115
		#14	0.0075	0.0075
		#18	0.0050	0.0050
Deformazione massima ridotta	ε_{su}^{R}	#4– #10	0.090	0.060
		#11– #18	0.060	0.040
Elevata tensione	ε_{su}	#4– #10	0.120	0.090
		#11– #18	0.090	0.060

All'interno della regione elastica, il modulo di elasticità, E_s, sono presi a 29.000 ksi. Secondo la tabella 69.4, la forza di resa prevista della barra ASTM A706, dimensione #3-#18, si trova ad essere 68 k..

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

⑧ **Lunghezza cerniera in plastica** L_p AASHTO, Seismic, 2011, §4.11.6 afferma che la lunghezza di cerniera in plastica analitica per colonne, L_p, deve essere presa come la lunghezza equivalente della colonna su cui si assume costante la curvatura di plastica per stimare la rotazione di plastica, Fig. 69.16. Lo spostamento di plastica di un membro equivalente dal punto del momento massimo al punto della contraffazione deve essere determinato sulla base della rotazione in plastica.

Per colonne in cemento armato che si incastrano in un piè di pagina, un cappuccio integrale piegato, un albero oversize, albero cased, la lunghezza della cerniera di plastica, L_P in pollici, può essere determinato da AASHTO, Seismic, 2011, Equation 4.11.6-1 :

$$L_P = 0.08L_C + 0.15 f_{ye} d_{bl} \geq 0.3 f_{ye} d_{bl}$$

dove:

L	lunghezza della colonna dal punto di massimo momento al punto di contraflessione del momento (in.)
f_{ye}	resistenza di resa prevista delle barre d'acciaio rinforzanti per colonne longitudinali (ksi)
d_{bl}	diametro nominale delle barre di acciaio rinforzanti per colonne longitudinali (in)

Poiché in questo progetto, l'interazione del suolo e dell'albero non è considerata nell'analisi, l'altezza totale del pier è la somma dell'altezza della colonna (40 ft) e dell'asta (60 piedi). In questo caso il punto di inflessione sarebbe approssimativamente all'altezza media del molo ($L \simeq$50 ft). Pertanto:

$$\begin{aligned} L_c &\simeq 50 \times 12 = 600 \text{ (in)} && (69.8)\\ f_{ye} &= 68 \text{ (ksi)} && (69.9)\\ d_{bl} &= 1.693 \text{ (in)} && (69.10)\\ L_P &= \max\{0.08 \times 600 + 0.15 \times 68 \times 1.693, 0.3 \times 68 \times 1.693\} && (69.11)\\ &= \max\{65.3, 34.5\} = 65.3 \text{ (in)} && (69.12) \end{aligned}$$

⑨ **Momento di plastica** M_p AASHTO, Seismic, 2011, §8.5 afferma che la capacità di momento in plastica di tutti i membri del calcestruzzo duttile deve essere calcolata mediante curvatura momentanea ($M - \Phi$) analisi sulla base delle proprietà materiali attesi; l'analisi della curvatura del momento comprende le forze assiali dovute al carico morto insieme alle forze assiale dovute alla ribalta.

Il ($M - \Phi$) la curva deve essere idealizzata con una risposta elastica perfettamente plastica per stimare la capacità di momento in plastica della sezione trasversale del membro. La parte elastica della curva idealizzata passa attraverso il punto che segna la prima resa di barra rinforzante.La capacità di momento in plastica idealizzata deve essere ottenuta equando le aree tra l'attuale ed il idealizzato ($M - \Phi$) curve oltre il primo punto di rendimento della barra di rinforzo, come mostrato in Figura 69.14 AASHTO, Seismic, 2011, Fig. 8.5-1.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

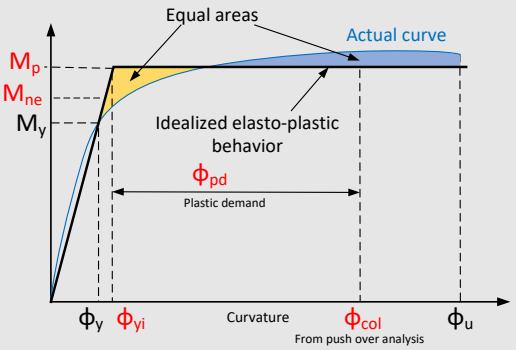


Figura 69.14: Curvatura del momento (adattato da (AASHTO, Seismic, 2011, fig. 8.5.1))

La curvatura del momento delle sezioni nella parte superiore della colonna, la base della colonna e nell'albero forato con le corrispondenti curve idealizzate sono determinate come di seguito.

Ancora una volta, si noti che c'è una porzione di 2 pollici nella parte inferiore della colonna (dove l'accoppiatore è) in cui la barra esterna sono discontinue. L'aggiudicatore serve solo come connettore - non si ottiene alcuna forza da esso. Si vede anche che appena sopra l'albero forato, c'è anche un 2 " gap tra la parte superiore dell'asta e la punta della barra esterna. In entrambi i casi, il momento di plastica nella colonna inferiore deve essere calcolato in base al cemento confinato formato all'interno della barra interna esclusivamente.

Secondo i risultati, il momento di plastica alla base della colonna è il più piccolo. Tuttavia, va notato che non significa che la prima cerniera di plastica si verificherà alla base della colonna, dal momento che il rapporto di capacità a richiesta controlla l'ordine della formazione delle cerniere in plastica in una struttura.

⑩ **Shear** V_p Dalle statiche, la prima cerniera di plastica si verifica nella parte superiore della colonna e la corrispondente cinghia, V_p, necessario causare il primo momento di plastica per sviluppare in entrambe le colonne, Figura 69.15, is

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

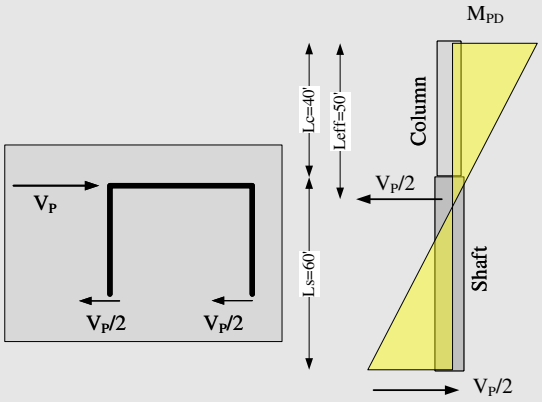


Figura 69.15: Distribuzione del momento nell'altezza del molo

Per la parte superiore della colonna del diametro 7ft, $M_p = 15,839$K-ft

$$L_{eff} = \frac{L_C + L_S}{2} = \frac{60+40}{2} = 50\text{ft} \tag{69.13}$$

$$\frac{V_P}{2} L_{eff} = M_c^t \Rightarrow V_P = 2\frac{M_c^t}{L_{eff}} = 2\frac{15,839}{50} = 634 \text{ (kips)} \tag{69.14}$$

(1) **Sospensione elastica** Δ_e Usiamo il metodo dell'area di curvatura per determinare la rotazione e la deflezione del membro[b]Fico. 69.16.

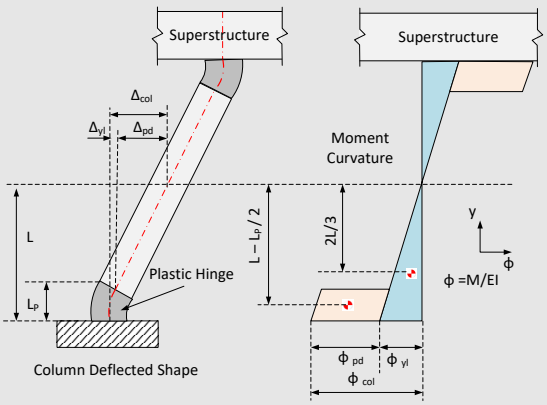


Figura 69.16: Pier defletto forma e diagramma di curvatura; adattato da AASHTO, Seismic, 2011, fig. c4.9-2

COPIA DI REVISIONE

$$\theta_{PD} = \Phi_{PD} L_P \text{ 1st curvature area theorem} \tag{69.15}$$

$$\Delta_e = \left(\Phi_{yld} \frac{L}{2}\right) \times \frac{2}{3} L \text{ 2nd curvature area theorem} \tag{69.16}$$

$$\Phi_{yld} = \frac{M_y}{E_C I_C} \tag{69.17}$$

$$E_c = 57\sqrt{f'_{cc}} = 57\sqrt{5,000} = 4,031 \text{ (ksi)} \tag{69.18}$$

$$I_C = \frac{\pi d_C^4}{64} = \frac{\pi \times 7^4 \times 12^4}{64} = 2,443,920 \text{ (in}^4\text{)} \tag{69.19}$$

$$\Phi_{yld} = \frac{15,839 \times 12}{4031 \times 2,443,920} = 1.93 \times 10^{-5} \tag{69.20}$$

$$\Delta_e = \left(1.93 \times 10^{-5} \frac{50 \times 12}{2}\right) \times \frac{2}{3} (50 \times 12) = 2.32 \text{ inch} \tag{69.21}$$

$$\tag{69.22}$$

12 **Slocamento di plastica** Δ_{PD} Φ_{PD} può essere stimato da Fig. 69.9b a 0,005/ft. Lo spostamento di plastica può essere determinato dalle seguenti equazioni

$$\theta_{PD} = \Phi_{PD} L_P \tag{69.23}$$

$$\Phi_{PD} = 0.005 \times \frac{65.3}{12} = 0.0272 \tag{69.24}$$

$$\Delta_{PD} = \theta_P \left(L_C - \frac{L_P}{2}\right) \tag{69.25}$$

$$= 0.0272 \left((50 \times 12 - \frac{65.3}{2}\right) \simeq 15.4 \text{ (in.)} \tag{69.26}$$

13 **Totale spostamento** Δ_{total} Lo spostamento totale è solo la somma di quella elastica e quella plastica:

$$\Delta_{tot} = \Delta_e + \Delta_{PD} = 2.3 + 15.4 = 17.7 \text{ (in.)} \tag{69.27}$$

Parte 3: carichi di domanda

Il carico assiale di progettazione sulla colonna è P_{DL} - 2.500 kips.

14 **Momento alla base della colonna dalla** $P\Delta$ **effetti** AASHTO, Seismic, 2011, §4.11.5 copri $P-\Delta$ requisiti di effetti e AASHTO, Seismic, 2011, Eq. 4.11.5-1 specifica che per colonne in cemento armato

$$P_{DL}\Delta_r \leq 0.25 M_P$$

dove

P_{DL} carico morto non fabbricato (kips)

Δ_r relativo offset laterale tra il punto di contraffazione e l'estremità più lontana della cerniera plastica (in.).
qui, sarebbe lo spostamento dallo spettro di risposta per 2.500 anni.

M_P capacità di momento in plastica idealizzata della colonna di cemento armato basata sul materiale atteso proprietà (kip-in.)

Il commento corrispondente di AASHTO afferma che $P-\Delta$ per colonne che non soddisfano l'equazione precedente, il Designer ha l'opzione di considerare uno o più dei seguenti:

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

- Aumentare la capacità di momento della colonna aggiungendo rinforzi longitudinali.
- Regolazione delle caratteristiche dinamiche del ponte come discusso in AASHTO, Seismic, 2011, §4.1.3.
- Riconfigurazione del ponte per ridurre la domanda di carico morto che agisce sulla colonna.
- Utilizzo di analisi della cronologia del tempo non lineare per considerare esplicitamente $P-\Delta$ effetti.

L'unico metodo rigoroso per considerare $P-\Delta$ effetti in combinazione con le richieste sismiche è quello di utilizzare un'analisi non lineare cronologia del tempo. Quando si utilizza l'analisi della storia del tempo non lineare, la rigidità post-yield, il degrado di rigidezza e lo scarico modelli di rigidità che sono in grado di catturare la risposta struttura prevista a causa del carico ciclico indotto da sismico sono necessari. A causa della complessità di questo tipo di analisi, si raccomanda che i requisiti del Eq. 4.11.5-1 e siano soddisfatti ogni volta che pratico.

$$M_{P-\Delta} = P_{DL}\Delta_r \tag{69.28}$$
$$P_{DL} = 2,500 \text{ (Kip)} \tag{69.29}$$
$$\Delta_r = 6 \text{ (in.) From Eq. 69.1} \tag{69.30}$$
$$M_{P-\Delta} = (2,500)(0.5) = 1,250 \text{ (kip-ft)} \tag{69.31}$$
$$0.25 * M_P = 0.25(8,662) = 2,166 \text{ (kip-ft)} \checkmark \tag{69.32}$$

Dove? M_P è determinato da Fig. 69.9b. Quindi, $P-\Delta$ gli effetti non sono previsti per influenzare significativamente la risposta, e si presume essere trascurabile.

15 Shear V_{2500} alla base della colonna V_{2500} è la cinghia risultante dall'evento di 2.500 anni ed è determinata da

$$V_{2500} = C_S P_{DL} = (0.02)(2,500) = 50 \text{ (kips)}$$

C_S è determinato per $T = 6$ sec. da Figura 69.10b o Equazione 69.2, mentre viene data la forza assiale.

16 M_{2500} alla base della colonna Il momento di 2.500 anni alla base della colonna M_{2500} è determinato da

$$M_{2500} = V_{2500} L_C = (50)(40) = 2,000 < M_P \text{ (kip-ft.)}$$

che è inferiore alla capacità della colonna di 8.662 k-ft (Fig. 69.9b).

17 Momento di domanda vs. momento ammissibile Il momento ammissibile è

$$\phi M_{ne} = (0.9)(8,551) = 7,695.9 \text{ (kip-ft)} \tag{69.33}$$
$$> M_{2500}(2,000) \tag{69.34}$$

dove M_{ne} è di Eq. 69.7.

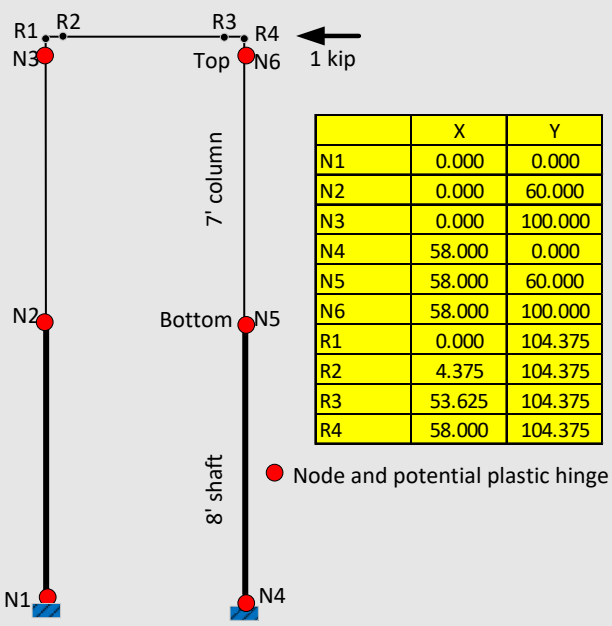
Parte 4: Parte di analisi pushover

18 Illustrazione del modello Assumendo un fascio di cappuccio rigido, solo le colonne devono essere modellate e si suppone che siano rigidamente collegate alla roccia.

Kiewit riporta il passo dopo passo spingere l'analisi statica elastica basata sulla maglia mostrata in Fig. 69.17. Colonna sono semplicemente caratterizzate da zona di sezione, momento di inerzia e modulo di elasticità. Quindi, non materiale lineare né sezione fibra devono essere definiti durante la modellazione del software.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



	X	Y
N1	0.000	0.000
N2	0.000	60.000
N3	0.000	100.000
N4	58.000	0.000
N5	58.000	60.000
N6	58.000	100.000
R1	0.000	104.375
R2	4.375	104.375
R3	53.625	104.375
R4	58.000	104.375

Figura 69.17: Modello Risa

19 Momento di plastica M_P in cima alle colonne Tabella 69.5 (estratto dal $N - M_p$ foglio di calcolo reso disponibile a Lei) mostrare le capacità del momento per le tre sezioni diverse e per una gamma di forze assiali (incrementi pari a 100 kips). Queste capacità di momento vengono utilizzate attraverso l'analisi pushover per spiegare l'effetto della forza assiale sulle capacità del momento delle sezioni in quanto la struttura viene spinta e, di conseguenza, le forze assiali cambiano (ΔP = 500 kips). Questi sono anche mostrati in Fig. 69.18.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 69.5: Capacità di movimento per le tre diverse sezioni in una gamma di forze assiali

	Colonna 7 ft (top)	Colonna 7 ft (btm)	8 ft albero
P (K)	M_p (K-ft)	M_p (K-ft)	M_p (K-ft)
-	10,858	5,051	16,234
100	11,067	5,216	16,467
200	11,276	5,379	16,698
300	11,484	5,541	16,929
400	11,692	5,702	17,159
500	11,899	5,862	17,388
600	12,105	6,020	17,617
700	12,312	6,177	17,846
800	12,517	6,332	18,073
900	12,721	6,485	18,299
1,000	12,924	6,637	18,525
1,100	13,126	6,787	18,750
1,200	13,327	6,934	18,974
1,300	13,528	7,080	19,196
1,400	13,727	7,224	19,419
1,500	13,924	7,366	19,639
1,600	14,121	7,505	19,859
1,700	14,318	7,643	20,077
1,800	14,512	7,778	20,296
1,900	14,706	7,911	20,512
2,000	14,898	8,040	20,727
2,100	15,089	8,169	20,941
2,200	15,278	8,295	21,154
2,300	15,467	8,419	21,366
2,400	15,654	8,541	21,576
2,500	15,839	8,662	21,786
2,600	16,024	8,780	21,994
2,700	16,207	8,897	22,200
2,800	16,388	9,011	22,405
2,900	16,568	9,122	22,610
3,000	16,747	9,232	22,812
3,100	16,925	9,340	23,013
3,200	17,101	9,445	23,214
3,300	17,275	9,549	23,412
3,400	17,448	9,651	23,609
3,500	17,619	9,751	23,805

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

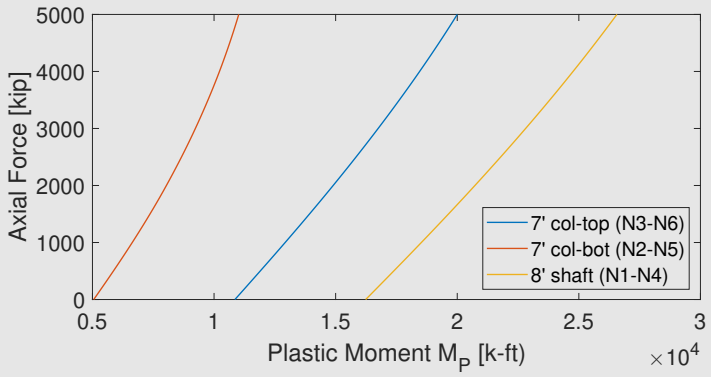


Figura 69.18: Schema di interazione per le tre colonne richieste

I momenti di plastica per tutte le sezioni (calcolazioni non riportate qui) sono dati da Fig. 69.19.

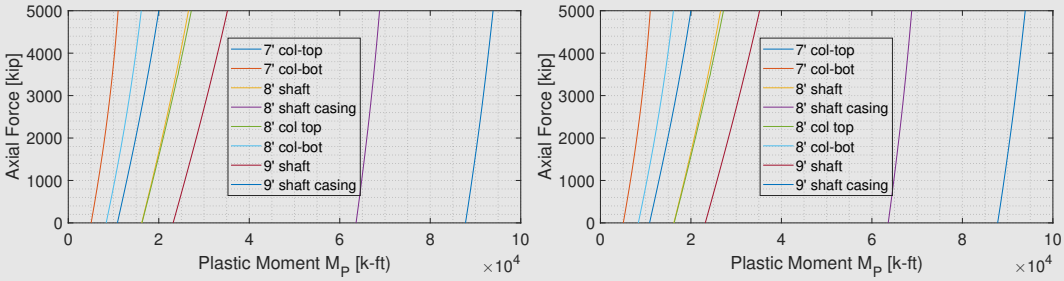


Figura 69.19: Momenti di plastica

Spiegazione per lo 0,95 ϕ fattore `Fornito da Marilyne Lefebvre`

Credo che quel fattore 0,95 nell'equazione $M_{EQ} \leq 0.95 M_p$ è un fattore di riduzione applicato al momento della plastica, ed è una media dei due fattori di carico che si trovano nella (AASHTO, LRFD, 2017) (Specifiche di progettazione del ponte di LRFD di AHTO) e (AASHTO, Seismic, 2011) (Specifiche sismiche di ASASHTO) spiegherò la filosofia che sta dietro usando quel fattore di carico qui sotto:

Nell'ASHTO LRFD 8a edizione, hanno messo un limite alla capacità flessografica della colonna per il design basato sulla forza. Poiché in LRFd non hanno calcolato la domanda di duttilità, hanno aggiunto un fattore di riduzione di 0,9 al momento plastico da conservare:

> *La colonna sono necessarie per essere progettata in modo biassiale e da indagare sia sulla forza minima che massima assiale. specifiche ridotto il fattore di resistenza flessorale da 0,9 a 0,5 come il carico assiale aumentato da O a* $0.20 f_c' A_g$*, a causa della tendenza verso una riduzione della capacità di duttilità in quanto aumenta il carico assiale. il requisito è rilassato in questa edizione, ma un* $P - \Delta$ *è stato aggiunto il requisito (articolo 4.7.4.5) per limitare la domanda di capacità duttilità dovuta ad una eccessiva deflezione. Inoltre, il fattore R è stato mantenuto ai livelli precedenti (articolo 3.10.7) anche se il periodo di ritorno del terremoto di progettazione è stato aumentato da 500 a 1.000 anni. In entrambe le disposizioni NCHRP 12-49 e 20-7(192), il fattore di resistenza flessorale raccomandato è 1.0. Tuttavia, poiché le specifiche attuali sono basate sulla*

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

> *forza e non calcolano esplicitamente la domanda di duttilità come in entrambe le disposizioni 12-49 e 20-7(193), limitando il fattore a 0,9 è considerato giustificato al posto di un'analisi più rigorosa.*
>
> [C5.11.4.1.2](AASHTO, LRFD, 2017)

In effetti, (AASHTO, Seismic, 2011), quel fattore di resistenza al carico è 1.0 dato che si sta utilizzando la combinazione di carico 1.0DC + 1,0DW + 0,5LL + 1 e 1,1EQ e utilizzando le proprietà materiali attesi (cioè. f'_{ce} e f_{ye}).

Tipicamente in un'alta zona sismica come California e Washington, si desidera utilizzare il design basato su spostamento perché i requisiti per la duttilità e capacità di spostamento sono più rigorosi nella AASHTO Sismic che nell'AASHto LRFD.

Il design basato su dislocamento funziona un po 'diverso rispetto al disegno basato sulla forza, ma l'analisi pushover viene eseguita allo stesso modo - invece di incrementare una forza orizzontale, si sta incrementando uno spostamento.

Tuttavia, per questo esempio, stiamo dimostrando il design basato sulla forza con l'analisi pushover (cioè stiamo incrementando la forza di taglio fino a quando non si forma una cerniera plastica).

Poiché Goethals è nella zona sismica A (SD1 = 0.03), AASHTO Sismic non richiede che l'albero sia un membro protetto dalla capacità. Dalla vista di elevazione di questo piegato (vedi documento allegato parola), si può vedere che solo la gabbia della colonna interna è estesa nell'albero. La gabbia a spirale della colonna non viene estesa all'asta.

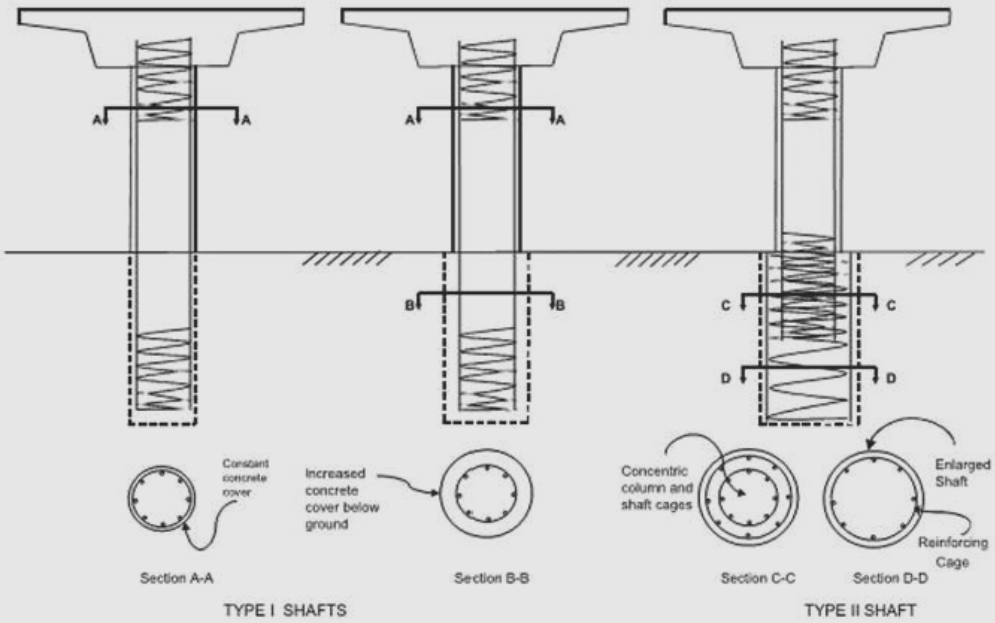
C'è una gabbia interna da 21'-0 che si estende nell'albero, ma il rinforzo trasversale è legato. Il rinforo a spirale nella colonna non si estende nell'asta come un tipico membro protetto dalla capacità. Così, abbiamo determinato che data queste due cose, l'albero non si comporta completamente-elastica, il che significa che la cerniera di plastica può formarsi all'interno dell'asta. Attraverso l'analisi pushover che abbiamo fatto su RISA, siamo finiti per confermare che il meccanismo di guasto di questo piegato è la formazione della cerniera alla base dell'albero.

Per quanto riguarda il fattore di carico, perché l'albero forato non è un membro protetto dalla capacità, non crediamo che sia opportuno utilizzare un fattore di carica 1.0 per la progettazione duttile della colonna, dal momento che AASHTO sismica basato il fattore del carico 1,0 su un membro protetto dalla capacità. Quindi, per il design prelimo, piuttosto che utilizzare un fattore di riduzione del carico di 1.0, se vogliamo continuare a usare le equazioni in AASHTO LRFD, abbiamo arbitrariamente utilizzato 0,95 nella nostra analisi (che è la media tra il fattore in AASTO LFRD e AAshTO Sismica). L'articolo C5.11.4.1.2 ci permette di utilizzare un fattore diverso da 0,9 se facciamo una analisi più rigorosa che semplicemente basarci sulle equazioni del codice (cioè calcolando la capacità di spostamento della colonna—che abbiamo fatto attraverso l'analisi pushover). Abbiamo semplicemente aggiunto un fattore di riduzione per la capacità plastica della colonna per considerare la formazione di cerniera in plastica nell'albero.

CALTRANS, 2013 ha fornito una spiegazione piacevole sulle due diverse configurazioni dell'albero (vedi snapshot qui sotto, forma Caltrans Seismic Design Criteria Versione 1.7), Fig. 69.20

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Type I shafts are designed so the plastic hinge will form below ground in the shaft. The concrete cover and area of transverse and longitudinal reinforcement may change between the column and Type I shaft, but the cross section of the confined core is the same for both the column and the shaft. The global displacement ductility demand, μ_D for a Type I shaft shall be as specified in Section 2.2.4, with an upperbound value corresponding to that of the supported column.

Type II shafts are designed so the plastic hinge will form at or above the shaft/column interface, thereby, containing the majority of inelastic action to the ductile column element. Type II shafts are usually enlarged shafts characterized by a reinforcing cage in the shaft that has a core diameter larger than that of the column it supports. Type II shafts shall be designed to remain elastic. See Section 7.7.3.2 for design requirements for Type II shafts.

Figure 2.2.4-1 Shaft Definitions

NOTE:
Generally, the use of Type II shafts should be discussed and approved at the Type Selection Meeting. Type II Shafts will increase the foundation costs, compared to Type I Shafts, however there is an advantage of improved post-earthquake inspection and repair. Typically, Type I shafts are appropriate for short columns, while Type II shafts are used in conjunction with taller columns. The end result shall be a structure with a balanced stiffness as discussed in Section 7.

Figura 69.20: Definizione dell'albero di Caltran(CALTRANS, 2013)

COPIA DI REVISIONE

In generale, l'uso degli alberi di tipo II dovrebbe essere discusso e approvato all'interno della riunione di selezione dei tipi. Gli alberi di tipo II aumenteranno i costi di fondazione, rispetto al fusto di Tipo 1, tuttavia vi è un vantaggio di una migliore ispezione e riparazione post-gualdrina. Tipicamente, gli alberi di tipo I sono adatti per le colonne corte, mentre gli alberi del tipo II vengono unificati in combinazione con le colonne del tallone.

(CALTRANS, 2013)

20 **Analisi I; Senza Cerniere; Pre-Plastica** Iniziamo analizzando il telaio (staticamente indeterminato) analisi utilizzando un software per una forza laterale unitaria di 1 kip è applicato, Tabella 69.6.

Tabella 69.6: Risultati di analisi; zero cerniera

$V(K)$	Node	P_{eq} (K)	M_{EQ} (K-ft)	Δ (in)
1	N1	-0.805	28.84	0.000
	N2	-0.805	-1.17	-0.008
	N3	-0.805	-21.17	-0.013
	N4	0.805	28.82	0.000
	N5	0.805	-1.17	-0.008
	N6	0.805	-21.17	-0.013

21-22 **Analisi Incrementale I (Spreadsheet)** Creiamo una nuova tabella (Spreadsheet) dove

- P_{EQ}, M^i_{EQ}e Δ sono ottenuti dai risultati dell'analisi precedente (Tabella 69.6) moltiplicato per la forza di taglio nella colonna 1 (più su di essa in un minuto).
- P_{total} è la somma di P_{DL} (2.500 Kip) e P_{eq}.
- $M_{EQ,total}$ è semplicemente uguale alla somma di tutti i valori precedenti e quello attuale. 69.9, $M^i_{EQ,total} = M^{i-1}_{EQ,total} + M^i_{EQ}$ e per N1

$$\begin{aligned} M^i_{EQ,total} &= M^{i-1}_{EQ,total} + M^i_{EQ} \\ &= 19,322 + 282 = 19,603 \end{aligned}$$

- M_P richiede particolare attenzione poiché le forze assiali nelle sezioni cambiano in quanto la forza orizzontale nella parte superiore è aumentata, quindi anche le capacità di momento sono cambiate. `tendenza` funzione che cerca il minimo approssimazione quadrata per una *lineare* funzione tra due punti finali come:
`= TRENO('P vs Mp'!`$D3$`:`$D53$`, 'P vs Mp'!`$A3$`:`$A53$`,F10)`
Nell'analisi attuale, $0 < P_{total} < 5,000$.
- Consideriamo che la prossima cerniera di plastica si formerà quando $M_{eq,Tot} \geq 0.95 M_p$

Tuttavia, il problema è davvero non lineare, in quanto la condizione per la formazione di una cerniera dipende dalla grandezza della cinghia a questo passaggio. V (di 10 kips) fino a un modulo di cerniera. In questo caso è 670 kips.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 69.7: Regolazione della cinghia che porta alla formazione di prima cerniera

V (K)	Node (K-ft)	P_{EQ} (K)	M_{EQ} (K-ft)	Δ (in)	P_{Tot} (K)	$M_{EQ,Tot}$ (K-ft)	M_p (K-ft)	Plastica Cerniera?	$M_P/M_{eq,Tot}$
670	N1	-539.66	19,322	0.00	1,960	19,322	20,531	NO	1.06
	N2	-539.66	-784	-5.19	1,960	-784	7,796	NO	-9.94
	N3	-539.66	-14,186	-8.79	1,960	-14,186	14,704	Sì	-1.04
	N4	539.66	19,310	0.00	3,040	19,310	22,769	NO	1.18
	N5	539.66	-785	-5.19	3,040	-785	9,085	NO	-11.58
	N6	539.66	-14,182	-8.78	3,040	-14,182	16,687	NO	-1.18

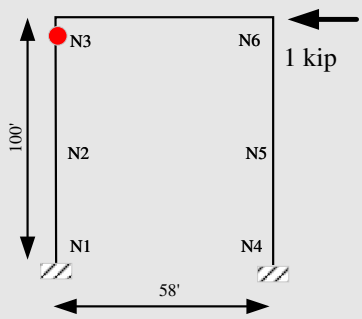


Figura 69.21: Modello elastico modificato dopo formazione di prima cerniera in plastica

Tabella 69.8: Risultati di analisi; una cerniera

V (K)	Node	P_{eq} (K)	M^2_{EQ} (K-ft)	Δ (in)
1	N1	-0.565	28.15	0.000
	N2	-0.565	11.23	-0.009
	N3	-0.565	0.00	-0.022
	N4	0.565	43.47	0.000
	N5	0.565	0.37	-0.012
	N6	0.565	-28.37	-0.021

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 69.9: Regolazione della cinghia che porta alla seconda cerniera

V (K)	Node (K-ft)	P_{EQ} (K)	M_{EQ} (K-ft)	Δ (in)	P_{Tot} (K)	$M_{EQ,Tot}$ (K-ft)	M_p (K-ft)	Plastica Cerniera?	$M_P/M_{eq,Tot}$
10	N1	-5.65	282	0.00	1,955	19,603	20,519	Sì	1.05
	N2	-5.65	112	-0.09	1,955	-672	7,789	NO	-11.59
	N3	-5.65	0	-0.22	1,955	-14,186	14,694	Sì	-1.04
	N4	5.65	435	0.00	3,045	19,744	22,781	NO	1.15
	N5	5.65	4	-0.12	3,045	-781	9,092	NO	-11.64
	N6	5.65	-284	-0.21	3,045	-14,466	16,697	NO	-1.15

~~23~~-~~25~~ Una cerniera

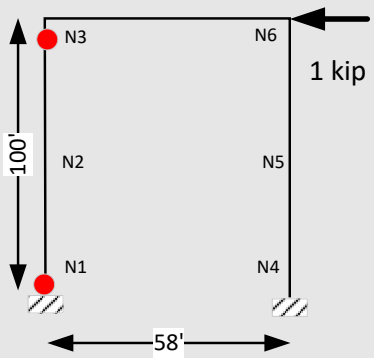


Figura 69.22: Modello elastico modificato dopo formazione di seconda cerniera in plastica

Tabella 69.10: Risultati di analisi; due cerniere

V (K)	Node	P_{eq} (K)	M^3_{EQ} (K-ft)	Δ (in)
1	N1	-0.755	0.00	0.000
	N2	-0.755	0.00	-0.019
	N3	-0.755	0.00	-0.031
	N4	0.755	60.61	0.000
	N5	0.755	0.63	-0.017
	N6	0.755	-39.38	-0.030

COPIA DI REVISIONE

Tabella 69.11: Regolazione della cinghia che porta alla terza e quarta cerniere

V (K)	Node	P_{EQ} (K)	M_{EQ} (K-ft)	Δ (in)	P_{total} (K)	$M_{EQ,total}$ (K-ft)	M_p (K-ft)	Plastica Cerniera?	$M_P/M_{eq,total}$
40	N1	-30.18	0	0.00	1,925	19,603	20,457	Sì	1.04
	N2	-30.18	0	-0.74	1,925	-672	7,753	NO	-11.54
	N3	-30.18	0	-1.24	1,925	-14,186	14,638	Sì	-1.03
	N4	30.18	2,425	0.00	3,075	22,169	22,844	Sì	1.03
	N5	30.18	25	-0.67	3,075	-755	9,128	NO	-12.08
	N6	30.18	-1,575	-1.20	3,075	-16,041	16,753	Sì	-1.04

~~26~~-~~27~~ Due cerniere

~~27~~ Meccanismo di colata (con quattro anelli) Ormai abbiamo un meccanismo, Fig. 69.23E dobbiamo riassumere i carichi.

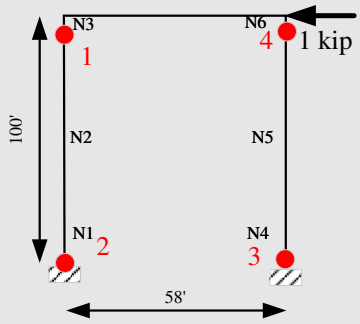


Figura 69.23: Meccanismo di colata con formazione di 4 cerniere in plastica

Tabella 69.12:

$$
\begin{aligned}
V_{tot} &= 670 + 10 + 40 = 720 \\
P^{N6}_{eq,Tot} &= 539.6 + 5.65 + 30.18 = 575.49 \\
M^{N4}_{eq,Tot} &= 19,310 + 435 + 2,425 = 22,169 \\
\Delta^{N5}_{Tot} &= -5.19 - 0.12 - 0.67 = -5.97 \\
P^{N5}_{Tot} &= 2,500 + 575.49 = 3,075 \\
M^{N4}_{eq,Tot} &= 22,169 \text{ from last analysis}
\end{aligned}
$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 69.12: Summazione di forze, momenti e spostamenti in fallimento

V_{Tot}	Node	$P_{EQ,Tot}$	$M_{EQ,Tot}$	Δ_{Tot}	P_{Tot}	$M_{EQ,Tot}$	M_p
720	N1	-575.49	19,603	0.00	1,925	19,603	20,457
	N2	-575.49	-672	-6.02	1,925	-672	7,753
	N3	-575.49	-14,186	-10.25	1,925	-14,186	14,638
	N4	575.49	22,169	0.00	3,075	22,169	22,844
	N5	575.49	-755	-5.97	3,075	-755	9,128
	N6	575.49	-16,041	-10.19	3,075	-16,041	16,753

28 **Insufficienza del molo** La formazione progressiva delle cerniere di plastica, che ha portato a un meccanismo della colonna, è stata descritta sopra. (AASHTO, Seismic, 2011, §4.7) In questa analisi, le cerniere di plastica sono previste per svilupparsi in cima e sotto del molo.

Quindi, design è in linea con le specifiche AASHTO.

29 **Spostamento della colonna superiore in caso di guasto** Dal tavolo 69.12 lo spostamento della colonna superiore avviene al nodo 3 ed è pari a 10,25 pollici (Corresponding a N3).

30 **Confronto delle analisi di pushover e calcoli manuali** I calcoli delle mani hanno dato Δ_{tot} = 17.7 pollice da Eq. 69.27,

Attraverso l'analisi pushover, Δ_{tot} = 10.19 - Un po'.

Chiaramente il calcolo della mano è sul lato conservatore.

31 **Valutazione del disegno dei pier** La capacità di taglio è 360 kips ($V_{tot}/2$) supera il carico di progettazione $V_{2,500}$= 50 kip. Allo stesso modo, le capacità di momento ($M_{eq,total}$) calcolato nell'analisi del pushover superano di gran lunga i carichi di progettazione calcolati nella parte 3 (M_{2500}=2.000 kip-ft).

Pertanto, il design è adeguato.

[a] Abbiamo perseguito in classe un tale esercizio, anche se con una equazione leggermente più semplice (Desayi, 1964) Il codice potrebbe essere facilmente ampliato per eseguire le analisi in questa sezione.

[b] Primo teorema: *Cambiamento di pendenza tra due punti è uguale alla zona della curvatura (M/EI) diagramma tra questi due punti.*
II teorema (applicabile qui): *Lo spostamento tra due punti è pari al momento della zona sotto il diagramma di curvatura rispetto al punto di forma defletta.*

69.4.2 Analisi dinamica incredibile (IDA)

La sezione seguente è riprodotta da *Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures* by Mahdavi, 2023.

35 L'analisi dinamica Incrementale (IDA) è un metodo per valutare la risposta strutturale in base al carico sismico. In questo approccio, ogni record di movimento terra viene

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

scalato sistematicamente a livelli di misura (IM) multipli e il parametro della domanda ingegneristica (EDP) è calcolato per ciascun livello scalato (Vamvatsikos e Cornell, 2002).

36 La curva IDA è poi costruita collegando i valori EDP a diversi livelli di intensità, spesso utilizzando il raccordo spline (Vamvatsikos e Cornell, 2004).

37 Questo metodo è ampiamente usato nella valutazione della fragilità sismica, in quanto consente ai ricercatori di determinare la probabilità di collasso a vari livelli di intensità. Assicura che il collasso strutturale si verifichi a intensità sufficientemente elevata, rendendolo utile per la valutazione sismica probabilistica.

38 Tuttavia, i movimenti di terra scalare possono falsare il loro contenuto di frequenza, portando a forme record irrealistiche che possono influenzare le previsioni della risposta strutturale (Haselton et al., 2011).

39 Per valutare la probabilità di collasso, l'IDA si concentra sul calcolo:

$$P\left[\mathrm{C}|\mathrm{IM}=im\right]$$

40 Esistono tre approcci principali per stimare la fragilità utilizzando l'IDA:

fragilità basata sulla capacità dell'EDP con risultati IDA completi L'IDA viene eseguita tracciando curve IDA e definendo il collasso quando la domanda, EDP_d, supera la capacità strutturale, EDP_c (Zareian et al., 2010). La probabilità di collasso a un dato livello di intensità è calcolato come:

$$\begin{aligned} P[\mathrm{C}|\mathrm{IM}=im] = P[\mathrm{EDP}_d \geq \mathrm{EDP}_c|\mathrm{IM}=im] &= \sum_{\text{all } edp_c} P[\mathrm{EDP}_d \geq \mathrm{EDP}_c|\mathrm{EDP}_c \\ &= edp_c, \mathrm{IM}=im]P[\mathrm{EDP}_c = edp_c] \end{aligned}$$

Figura 69.24a illustra i valori di capacità dell'EDP per diversi record di movimento terra, insieme alla domanda del PE a due livelli specifici della IM. Con l'elaborazione delle probabilità di collasso per ogni livello IM e la traccia dei risultati, si può ottenere una curva di fragilità empirica, che viene poi montata utilizzando una funzione di distribuzione cumulativa log-normal (CDF).

fragilità basata sulla capacità di IM con risultati completi dell'IFA L'intensità del collasso misura la capacità, IM_{cap}, è identificato come punto asintotico su ogni curva IDA (Figura 69.24b). La probabilità di collasso è data da:

$$P[\mathrm{C}|\mathrm{IM}=im] = P[\mathrm{IM}_{cap} < \mathrm{IM}=im]$$

La funzione di fragilità è ottenuta mediante l'installazione di un CDF log-normal ai dati del collasso. η e β:

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Metodo di Momenti (MM) Le stime dell'approccio MM η (median) e β (deformazione standard logaritmica) abbinando i momenti di distribuzione log-normal per collassare i dati:

$$\hat{\eta} = \exp\left(\frac{\sum_{i=1}^{N_T} \ln(\text{IM}_{cap_i})}{N_T}\right),$$
$$\hat{\beta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_T} \left[\ln\left(\text{IM}_{cap_i}\right) - \ln\left(\hat{\eta}\right)\right]^2}{N_T - 1}}$$

dove N_T è il numero totale di record di movimento terra.

Valutazione massima probabilità (MLE) Stime MLE η e β massimizzando la funzione di probabilità del log:

$$\{\hat{\eta}, \hat{\beta}\} = \underset{\hat{\eta},\hat{\beta}}{argmax} \sum_{i=1}^{N_T} \ln\left\{\phi\left(\frac{\ln(\text{IM}_{cap_i}) - \ln(\eta)}{\beta}\right)\right\}$$

MLE fornisce tipicamente stime dei parametri più accurate, soprattutto per piccoli set di dati.

fragilità basata sulla capacità di IM con risultati IDA troncati In IDA troncato, il livello massimo di IM è limitato a IM_{trunc}, significa che alcuni record non raggiungono il collasso (Figura 69.24c). Questo comporta dati censurati, che richiedono una funzione di probabilità modificata:

$$\mathcal{L}(\eta\,, \beta\,;\, \mathbf{IM}_{cap}\,, \text{IM}_{trunc}) = \left(\prod_{i=1}^{N_C} \phi\left(\frac{\ln(\text{IM}_{cap_i}) - \ln(\eta)}{\beta}\right)\right) \times \left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(\text{IM}_{trunc}) - \ln(\eta)}{\beta}\right)\right)^{N_T - N_C}$$

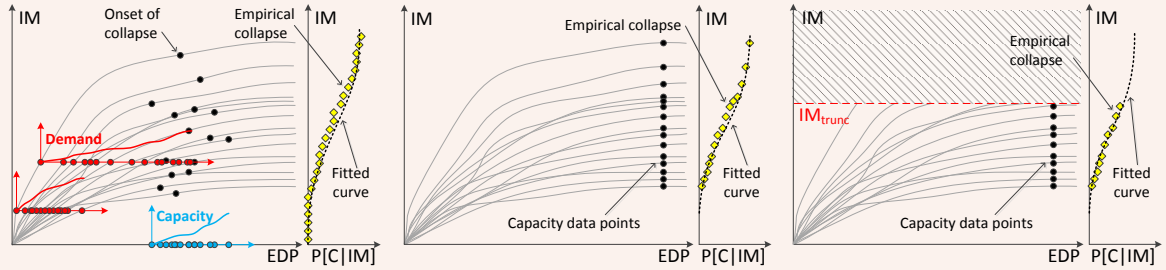
dove N_C è il numero di record che portano al collasso. η e β sono stimati utilizzando la stima massima probabilità con i dati censurati (MLECD) (Baker, 2015), assicurando una valutazione accurata della fragilità per i set di dati troncati.

69.4.3 Analisi a strisce multiple (MSA)

La sezione seguente è riprodotta da Saouma e Hariri-Ardebili, 2021 Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) EDP a base di capacità; Full IDA (b) IM a base di capacità; Full IDA (c) IM a base di capacità; Truncated IDA

Figura 69.24: Curve di fragilità concettuale basate sul metodo IDA

41 A differenza dell'analisi dinamica Incrementale (IDA), dove un insieme fisso di movimenti a terra è scalato in modo incrementale, Multiple Stripe Analysis (MSA) esegue analisi a diversi livelli di intensità specificati discreti (SIL).

42 Quando le analisi vengono effettuate per tre o più SIL, il metodo viene indicato come MSA (Cornell e Jalayer, 2002). Se vengono utilizzati solo uno o due SIL, l'approccio è chiamato Single Stripe Analysis (SSA) e Double Stripe analisi (DSA), rispettivamente.

43 MSA offre una maggiore flessibilità rispetto all'IDA. Gli intervalli tra i SIL successivi non devono essere uniformi; per esempio, in Figura 69.25a, la spaziatura tra SIL_2 e SIL_3 e tra SIL_6 e SIL_7 Questa variazione può essere attribuita alle frequenze di superamento specifiche richieste per l'analisi.

44 Il numero di moti terra assegnati a ogni SIL può anche variare, e i movimenti selezionati per ciascuna striscia possono essere diversi, soprattutto quando si utilizza uno spettro condizionale per la selezione.

45 Il numero di SIL è facoltativo, ma aumentando migliora l'accuratezza della curva di fragilità a scapito dello sforzo computazionale aggiuntivo. 69.25a, le analisi sono eseguite per otto SIL, ma più potrebbero essere incluse fino a quando tutti i movimenti di terra raggiungono il crollo.

46 A causa delle variazioni dei moti del terreno selezionati tra le diverse fasce, la probabilità empirica di collasso per SIL_i può essere uguale o superiore a quella di SIL_{i+1}. Nella Figura 69.25a, SIL_4 presenta una probabilità empirica di collasso maggiore di SIL_5, mentre il numero di punti di collasso in SIL_7 e SIL_8 è identico.

Stima della Deviazione Standard Mediana e Logaritmica

47 La deviazione standard mediana e logaritmica della funzione di fragilità può essere stimata utilizzando uno dei seguenti tre metodi.

Somma di errore quadrato (SSE) Questo metodo minimizza la somma di errori qua-

COPIA DI REVISIONE

drati tra le frazioni di collasso osservate e le probabilità previste dalla funzione fragilità:

$$\{\hat{\eta}, \hat{\beta}\} = \underset{\hat{\eta},\hat{\beta}}{argmin} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{N_{C_i}}{N_{T_i}} - \Phi\left(\frac{\ln(im_i) - \ln(\eta)}{\beta} \right) \right)^2$$

dove N_{C_i} e N_{T_i} sono il numero di casi crollati e il numero totale di mozioni terrestri IM = im_i, rispettivamente, e m è il numero di livelli IM.

Valutazione massima probabilità (MLE) Supponendo che il collasso e gli eventi non-collettivi a ogni SIL siano indipendenti, si può usare una distribuzione binomiale. p is:

$$\mathcal{L}(p\ ;\ \mathbf{u}\ ,\ \mathbf{v}) = \prod_{i=1}^{m} \binom{u_i}{v_i} p_i^{v_i} \left(1 - p_i\right)^{u_i - v_i}$$

dove v_i rappresenta il numero di collassi in u_i La funzione di probabilità per MSA può essere scritta come:

$$\mathcal{L}(\eta, \beta;\ \mathbf{IM}, \mathbf{N_T}, \mathbf{N_C}) = \prod_{i=1}^{m} \binom{N_{T_i}}{N_{C_i}} \Phi\left(\frac{\ln(im_i) - \ln(\eta)}{\beta} \right)^{N_{C_i}} \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln(im_i) - \ln(\eta)}{\beta} \right) \right]^{N_{T_i} - N_{C_i}}$$

Spesso è più conveniente massimizzare il logaritmo della funzione di probabilità, producendo i parametri stimati (Baker, 2015):

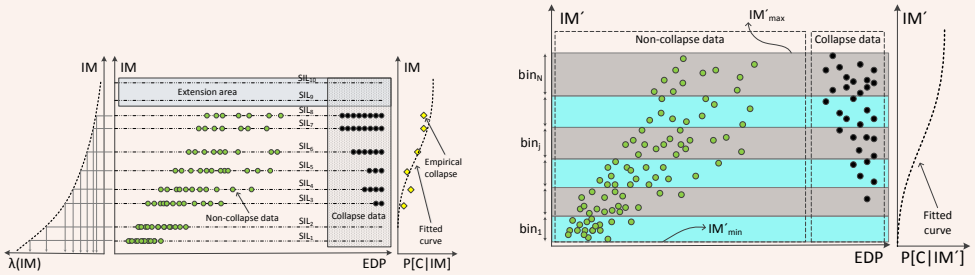
$$\{\hat{\eta}, \hat{\beta}\} = \underset{\hat{\eta},\hat{\beta}}{argmax} \sum_{i=1}^{m} \left(\ln\binom{N_{T_i}}{N_{C_i}} + N_{C_i} \ln\left(\Phi\left(\frac{\ln(im_i) - \ln(\eta)}{\beta} \right) \right) + (N_{T_i} - N_{C_i}) \ln\left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(im_i) - \ln(\eta)}{\beta} \right) \right) \right)$$

Regressione lineare nello spazio trasformato (LRTS) Conosciuto anche come Metodo B in Porter, Kennedy e Bachman, 2007, questo metodo viene utilizzato quando i movimenti di terra vengono selezionati in base a una misura alternativa di intensità (IM'). In tali casi, SSE e MLE non sono più applicabili, in quanto i dati di collasso non vengono costretti a SIL predefiniti ma sono invece diffusi nell'IM' spazio (Figura) 69.25b). La procedura consiste nell'identificazione dell'IM$'_i$ valori per ogni punto di dati, dividendoli in N dove $N = \lfloor \sqrt{M} \rfloor$, e determinando la misura media di intensità

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

per ogni bin. Una linea di regressione viene quindi montata in spazio trasformato per ottenere η e β, che definiscono la funzione di fragilità.



(a) Sulla base dell'IM primario (b) Sulla base di IM alternative'

Figura 69.25: Curve di fragilità concettuale basate sul metodo MSA

69.4.4 Analisi del cloud (CLA)

La sezione seguente è riprodotta da Saouma e Hariri-Ardebili, 2021 Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures.

48 Cloud Analysis (CLA) è una procedura in cui una struttura viene sottoposta a un insieme relativamente grande di movimenti terra non registrati o come-registrati e analizzata numericamente.

49 Se i record di movimento terra sono selezionati da un cestino predefinito, rappresentano uno scenario sismico caratterizzato da (M_{bin}, R_{bin})dove M_{bin} e R_{bin} corrispondere alla magnitudo rappresentativa e la distanza del bin, rispettivamente (Jalayer, 2003).

50 Dai risultati dell'analisi, si stabilisce il rapporto tra il parametro della domanda di ingegneria (EDP) e la misura di intensità (IM), formando la cosiddetta risposta **cloud**.

51 CLA è spesso usato in combinazione con la probabilità analisi della domanda sismica (PSDA). Un'ipotesi ampiamente accettata è che i punti di dati discreti ottenuti dalla CLA presentano una tendenza lineare nello spazio logaritmico, che corrisponde ad un rapporto power-law in aritmetica (Padgett, Nielson e DesRoches, 2008; Jankovic e Stojadinovic, 2004; Ramamoorthy, Gardoni e Bracci, 2006):

$$\eta_{\text{EDP|IM}} = a \cdot \text{IM}^b \tag{69.35}$$

dove a e b sono costanti di regressione, e $\eta_{\text{EDP|IM}}$ è il valore mediano dell'EDD dato IM. La deviazione standard logaritmica di EDP data IM, denotata come $\beta_{\text{EDP|IM}}$, è stimato come:

COPIA DI REVISIONE

$$\beta_{\text{EDP|IM}} = \sigma_{\ln(\text{EDP|IM})} \approx \sqrt{\frac{\sum \left(\ln(edp_i) - \ln(a \cdot \text{IM}^b)\right)^2}{n-2}} \tag{69.36}$$

dove n è il numero di analisi transienti non lineari.

69.4.5 Analisi del tempo di resistenza (ETA)

La sezione seguente è riprodotta da Saouma e Hariri-Ardebili, 2021 Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures.

Endurance Time Analysis (ETA) è una procedura di pushover dinamica utilizzata per stimare le prestazioni sismiche delle strutture quando sottoposti a pre-progettati intensificando eccitazioni (Estekanchi, Vafai e Sadeghazar, 2004)Le funzioni di accelerazione simulate sono progettate per scuotere progressivamente la struttura da un livello di eccitazione inferiore**, dove la risposta rimane elastica, a un livello d'eccitazione medio**, in cui il comportamento non lineare inizia e infine ad un **alto livello di eccitazione**, dove la struttura raggiunge il fallimento. Questa progressione della risposta viene catturata all'interno di un'analisi temporale-storia **single**.

Generazione di funzioni di accelerazione del tempo di resistenza (ETAF)

Una sfida chiave nell'ETA sta nel generare *funzioni di accelerazione del tempo di resistenza (ETAF)* (Nozari e Estekanchi, 2011), che sono stati ulteriormente ottimizzati da Mashayekhi e Estekanchi, 2013. Il processo di produzione degli ETAF consiste nei seguenti passaggi:

Passo 1: Generare una funzione di accelerazione casuale stazionaria La funzione di accelerazione, indicata come $Z(t)$, viene generato utilizzando $\delta t = 0.01$, $N_{pnt} = 2^{11}$ nodi, e accelerazione del terreno di picco (PGA) = $1.0g$. Il numero di punti, N_{pnt}, è facoltativo.

Passo 2: Converti nel dominio di frequenza Applicare la trasformazione di Fourier per ottenere:

$$Z(i\omega) = \mathcal{F}(Z(t)),$$

dove i è l'unità immaginaria e ω è la frequenza.

Passo 3: Applicare una funzione di filtro Una funzione di filtro viene applicata per

COPIA DI REVISIONE

modellare il contenuto di frequenza in modo che assomiglia a movimenti reali del terreno (Clough e Penzien, 1993):

$$A\left(i\omega\right) = \frac{1 + 2i\xi_1 \frac{\omega}{\omega_1}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 + 2i\xi_1 \frac{\omega}{\omega_1}} \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2 + 2i\xi_2 \frac{\omega}{\omega_2}} Z\left(i\omega\right)$$

Il primo termine rappresenta un filtro a basso passaggio, mentre il secondo è un filtro ad alta velocità. ω_1, ξ_1, ω_2e ξ_2 corrispondono alle frequenze e ai coefficienti di smorzamento di questi filtri.

Passo 4: Regolare il contenuto di frequenza per corrispondere allo spettro target Sono eseguite diverse iterazioni per modificare il contenuto di frequenza, assicurando che lo spettro di risposta generato si allinei allo spettro target:

$$A^{new}\left(i\omega\right) = A^{old}\left(i\omega\right) \frac{S_a^{\text{trg}}(\omega)}{S_a^{\text{gen}}(\omega)}$$

dove $S_a^{\text{trg}}(\omega)$ è lo spettro di destinazione (da codici di costruzione o analisi sismica probabilistica), e $S_a^{\text{gen}}(\omega)$ è lo spettro generato.

Passo 5: Modificare la cronologia del tempo di accelerazione Una funzione lineare del profilo, $l(t) = t/t_{\text{trg}}$, viene applicato alla cronologia del tempo di accelerazione per garantire l'intensificazione nel tempo. t_{trg}, tipicamente impostato a 10 secondi, è facoltativo.

Passo 6: Ottimizzare gli spettri di risposta Gli spettri di risposta accelerazione e spostamento vengono modificati utilizzando una funzione di ottimizzazione nel dominio del tempo:

$$\underset{a_g}{min} F(a_g) = \int_0^{T_{max}} \int_0^{t_{max}} \left\{ \left[S_a(T,t) - \frac{t}{t_{\text{trg}}} S_a^{\text{trg}}(T) \right]^2 + \chi_0 \left[S_d(T,t) - \frac{t}{t_{\text{trg}}} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 S_a^{\text{trg}}(T) \right]^2 \right\}$$

dove a_g è l'ETF che si cerca, χ_0 è un parametro di peso, e $t_{\max}$ e $T_{\max}$ sono il tempo e il periodo massimo, rispettivamente, nel processo di ottimizzazione. 69.26a.

Ridurre la funzione di capacità

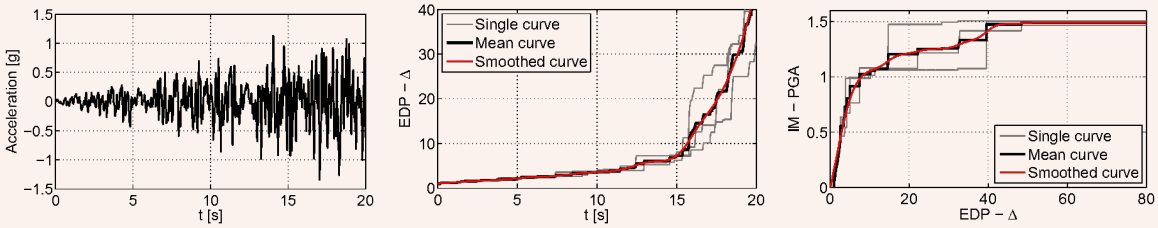
Per ottenere una funzione di capacità, la curva ETA deve essere determinata in primo luogo (Figura 69.26b). La curva ETA traccia il valore assoluto massimo dell'EDP nel tempo:

$$\Omega\left(\text{EDP}(t)\right) \equiv \max\left\{\text{Abs}\left(\text{EDP}(\tau) : \tau \in [0,t]\right)\right\}$$

Il parametro di tempo viene quindi convertito in IM, sfruttando la relazione diretta tra il tempo e l'accelerazione (Figura 69.26a). Infine, le coordinate di **EDP-IM** si trasformano in coordinate **IM-EDP**, che danno una funzione di capacità passo-passo. 69.26c).

COPIA DI REVISIONE

Da quando *singolo* L'ETF è soggetto a chap: regione della fiducia a causa della sua natura casuale, il mezzo di tre diversi ETAF è tipicamente utilizzato per migliorare l'affidabilità (Hariri-Ardebili e Mirzabozorg, 2014; Hariri-Ardebili e Saouma, 2015).



(a) ETAF del campione (b) Curva dell'ETA (c) Funzione di capacità

Figura 69.26: Generazione di funzioni a capacità basate su ETA

69.4.6 Sintesi

52 L'analisi della fragilità sismica può essere eseguita utilizzando metodologie diverse, ognuna con i propri vantaggi e limitazioni. Analisi classica del pushover (POA), analisi della dinamica dell'incredibile (IDA), l'analisi delle strisce multiple (MSA), il Cloud Analysis (CLA) e l'esame di tempo di resistenza (ETA).

53 Il confronto di queste metodologie è previsto nella tabella 69.13, mentre la figura 69.28 riassume le loro caratteristiche e applicazioni chiave.

Analisi classica del pushover (POA)

54 Analisi di Pushover Classica (POA) è un *statico* metodo utilizzato per stimare la risposta sismica delle strutture in carichi laterali monotonici crescenti.

55 Il metodo presuppone che la risposta strutturale possa essere catturata attraverso un singolo modello di carico invariante, tipicamente basato sulla forma della modalità fondamentale. *non cattura effetti a più alto volume o la variabilità del carico dinamico del terremoto*.

56 POA fornisce una stima della curva di capacità, ma non ha capacità di valutazione probabilistica.

Analisi dinamica incredibile (IDA)

57 IDA è un *dinamica* metodo dove i record di movimento terra sono *scalata incrementale* a livelli di misura (IM) più intensiva e i corrispondenti parametri della domanda ingegneristica (EDP) sono calcolati.

58 Il *Curva dell'IFA*, costruito utilizzando questi risultati, consente la valutazione sismica probabilistica identificando le probabilità di collasso a vari livelli IM.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

59 Figura 69.24 IDA fornisce dati di risposta strutturale completi, ha limitazioni, come le potenziali distorsioni nel contenuto della frequenza del movimento terra quando i record sono scalati.

Analisi a strisce multiple (MSA)

60 MSA migliora l'IDA con la conduzione di analisi sismiche in diversi *livelli di intensità discreta (SIL)* piuttosto che continuamente i record di scaling.

61 Questo approccio migliora la robustezza statistica e permette una stima più accurata della fragilità. A differenza dell'IFA, l'MSA non assume un insieme fisso di movimenti a terra; i record differenti possono essere utilizzati a diversi livelli IM.

62 La flessibilità dell'MSA è dimostrata in Figura 69.25, che mostra come vengono selezionati i SIL; si ottengono probabilità di collasso empirico a ogni SIL e tecniche di regressione diverse, quali *Somma di errori quadrati (SSE), stima massima probabilità (MLE) e regressione lineare nello spazio trasformato (LRTS)*— può essere applicato per la stima delle funzioni di fragilità.

Analisi del cloud (CLA)

63 CLA differisce da IDA e MSA sottoponendo la struttura ad una *grande insieme di movimenti terra non scalati*, piuttosto che aumentare incrementando i livelli di IM.

64 Questo si traduce in un *risposta cloud*, dove l'EDP è complottato contro IM per tutti i record. Il vantaggio principale di CLA è che cattura *variabilità naturale* in registrazioni di movimento terra senza modificarle artificialmente.

65 Il rapporto tra EDP e IM è spesso assunto per seguire una forma di power-law, come descritto nell'Equation 69.35.

66 Il *deviazione standard logaritmica dell'EDD data IM* è quindi stimato utilizzando Equation 69.36, fornendo un approccio efficiente ma semplificato alla valutazione della fragilità sismica.

Analisi del tempo di resistenza (ETA)

67 ETA è un *pushover dinamico* metodo in cui le strutture sono soggette *Eccitazioni intensificanti pre-progettate* piuttosto che i veri registri del terremoto.

68 Il *Funzioni di accelerazione del tempo di resistenza (ETAF)* sono generati per aumentare progressivamente l'intensità sismica, permettendo che il comportamento strutturale venga valutato attraverso gli stati elastici, non lineari e di guasto all'interno di un'unica analisi temporale-storia. 69.26, che illustra come le storie di tempo di accelerazione sono modificate per abbinare gli spettri target e ottimizzare le caratteristiche di risposta.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

69 Il risultato finale è un *funzione di capacità*, descrivendo la risposta della struttura nel tempo e fornendo informazioni fragilità in un IM-EDP formato.

Confronto e applicazioni

70 Ciascuna di queste cinque metodologie serve scopi diversi a seconda del livello di accuratezza, costo computazionale e presupposti coinvolti. 69.27 fornisce una panoramica comparativa delle analisi transienti non lineari, illustrando i requisiti dei dati di input e le risposte strutturali attesi per diversi approcci.

71 Inoltre, Tabella 69.13 presenta un confronto laterale di POA, IDA, MSA, CLA e ETA.

Tabella 69.13: Confronto dei metodi di analisi strutturale sismica

Metodo	Tipo di	Dati di input	Comput. Costo	Proba-Bilicio	Limitazioni
POA	Statistiche	Curva di spinta singola	Basso	No	Ignora effetti dinamici, nessuna variazione
IDA	Dinamica	Movimenti di terra scalati	Alto	Sì.	Distorsione dei contenuti di frequenza dovuta alla scala
MSA	Dinamica	Livelli multipli di IM, record non scalati	Mezzo medio	Sì.	Richiede più moti di terra per SIL
CLA	Dinamica	Grande set record non scalato	Mezzo medio	Sì.	Assume la tendenza log-linear nella relazione EDP-IM
ETA	Dinamica	Eccitazioni generate artificialmente	Mezzo medio	No	Eccitazione sintetica non può corrispondere a record reali

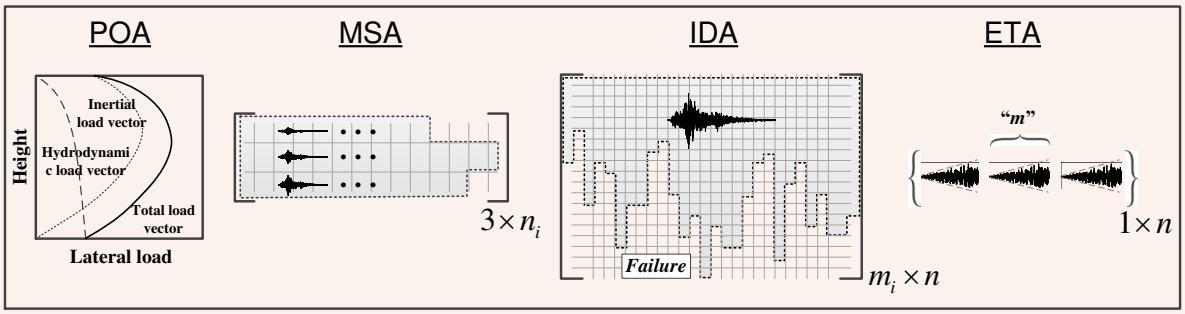
figura 69.28

69.5 Cosa c'è di più

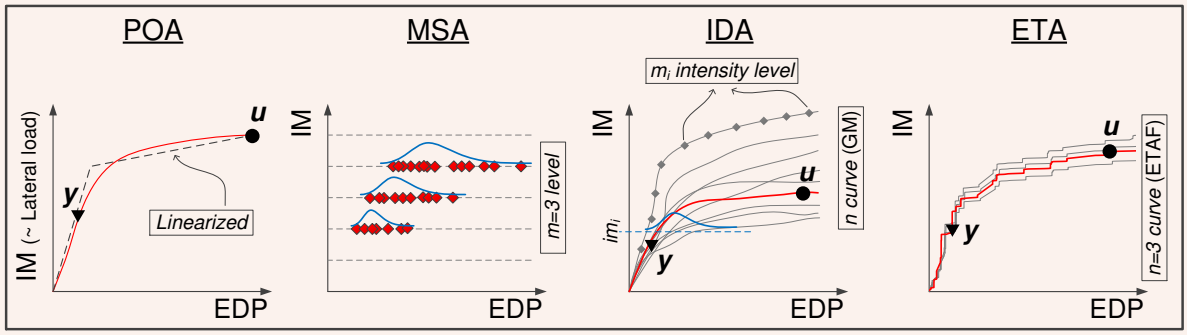
72 Nel prossimo capitolo (70), valuteremo quantitativamente l'analisi sismica non lineare discussa in questo capitolo.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Diversi tipi di input possibili per le analisi non lineari (escluse POA)



(b) Esito di analisi per la valutazione

Figura 69.27: Evidenzia quattro strategie diverse (Hariri-Ardebili, Saouma e Porter, 2016)

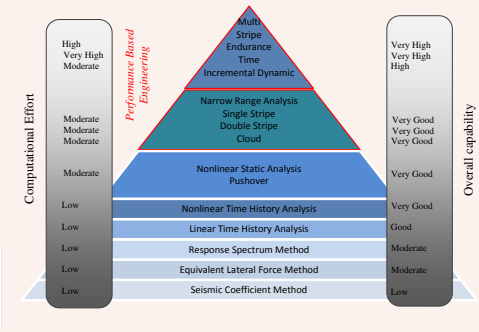


Figura 69.28: Complessità relative dell'analisi sismica



 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

COPIA DI REVISIONE

Capitolo 70

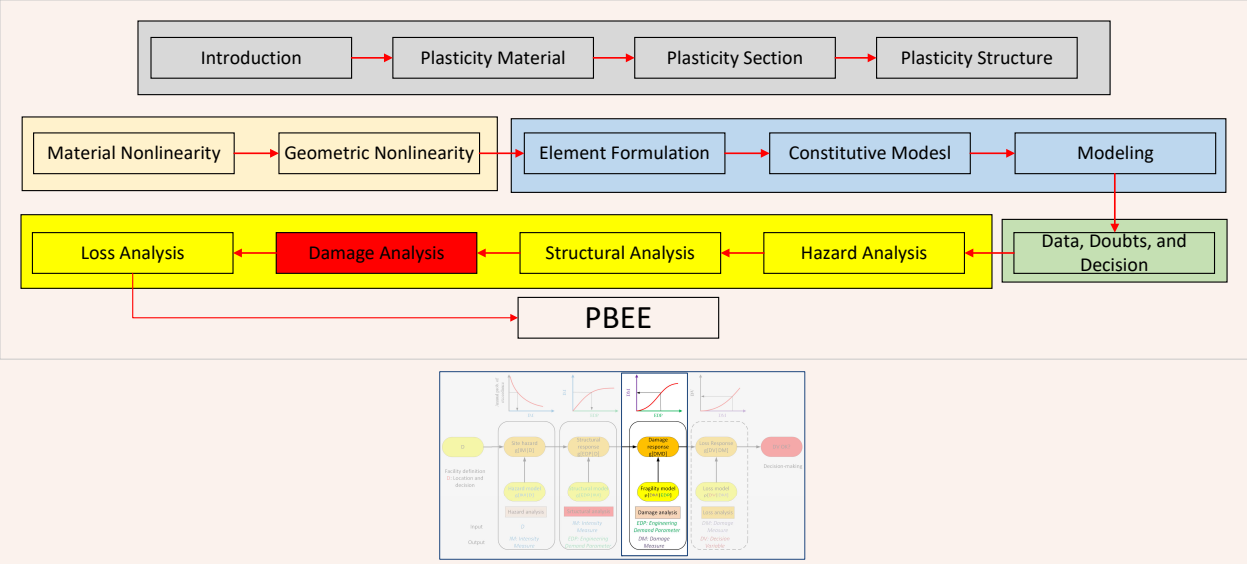
Analisi dei danni

Abstract

Questo capitolo presenta un quadro per quantificare e valutare i danni strutturali indotti dal terremoto, integrando approcci deterministici e probabilistici. A partire dal concetto di stati limite, le minacce che separano accettabile dalle prestazioni inaccettabili, il capitolo esplora una gerarchia da quelli operativi a quelli di prevenzione del collasso. Sono introdotti diversi indici di danno sia per l'analisi lineare (rapporti di capacità demand, durata inelastice cumulativa) che per l'analisi non lineare. La progressione alla valutazione probabilistica riconosce incertezze nella domanda sismica e capacità strutturale, utilizzando parametri di richiesta ingegneristica come proxy quantitativi per gli stati di danno. Soglie stabilite per limiti di deriva, indici di danno e rapporti di capacità della domanda sono presentati con i loro corrispondenti livelli di prestazioni. Posizionando l'analisi dei danni all'interno del più ampio framework Performance-Based Earthquake Engineering, il capitolo mostra come questi concetti tecnici traducono risposte strutturali complesse in valutazioni significative per le informazioni informate - Il processo decisionale.

70.1 Introduzione 2365
70.2 Stati di limite 2366
70.2.1 Gerarchia degli Stati Limiti . 2367
70.2.2 Quadro di valutazione 2367
70.2.3 Attuazione nel quadro PBEE 2368
70.2.4 Calibrazione e convalida . . 2368
70.2.5 Considerazioni multi-oggettive 2368
70.2.6 Connessione agli indici di danno 2369
70.3 Indici di danno 2369
70.3.1 Indici di danno e criteri di prestazione 2369
70.3.2 Trasmissione alla valutazione dei danni probabilistici . 2371
70.3.3 Rappresentanza probabilistica del danno 2371
70.3.4 Parametri di domanda metrica e ingegneria (EDP) 2372
70.3.5 chap: regione della fiducia in Valutazione dei danni . . 2373
70.3.6 metriche di danno quantitativo 2373
70.4 Prestazioni 2375
70.4.1 Struttura di ingegneria basata sulle prestazioni 2375
70.4.2 Livelli di prestazione e criteri di accettazione 2377
70.4.3 Integrazione di Stati Limiti, Indici Damagine e Livelli Prestazioni 2378
70.5 Trasmissione a Curve di Fragilità e Valutazione del rischio 2380

COPIA DI REVISIONE



70.1 Introduzione

1 La valutazione dei danni strutturali rappresenta l'interfaccia critica tra analisi ingegneristiche e processo decisionale nel design sismico e retrofit. Mentre le tecniche di analisi non lineari avanzate forniscono informazioni sul comportamento strutturale, devono essere interpretate attraverso metriche di danno e criteri di prestazione per guidare decisioni ingegneristiche significative. Questo capitolo presenta un quadro sistematico per l'analisi dei danni all'interno del contesto di Performance-Based Earthquake Engineering (PBEE), integrando approcci deterministici e probabilistici per quantificare gli effetti del carico sismico su strutture sistemi.

2 La base dell'analisi dei danni risiede nel concetto di stati limite—soglie chiaramente definite che separano accettabile dalle prestazioni inaccettabili. Questi stati stabiliscono una gerarchia degli obiettivi di performance che vanno dalla piena capacità operativa alla prevenzione del collasso. Definindo questi limiti, creiamo un quadro strutturato per valutare la risposta strutturale contro le aspettative e i requisiti normativi delle parti interessate. Il trattamento probabilistico degli stati limite riconosce le incertezze intrinseche negli eventi sismici e nel comportamento strutturale, consentendo una valutazione informata sul rischio piuttosto che la valutazione binaria del passaggio/fallimento.

3 Gli indici di danno servono come strumenti quantitativi che misurano quanto una struttura si avvicina al superamento dei suoi stati limite definiti. Per analisi elastiche lineari, indici come i rapporti di capacità della domanda (DCR), la durata inelastic cumulativa (CID) e l'area anelastica cumulabile (CIA) forniscono informazioni sulla grandezza, la durata e l'estensione dei potenziali danni. In contesti non lineari, gli indici più sofisticati catturano

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

gli effetti accumulati di resa, cracking e dissipazione dell'energia attraverso formulazioni basate sulla deformazione ed energia. Queste metriche trasformano complesse uscite analitiche in misure significative di integrità strutturale e capacità residua.

4 L'integrazione degli indici di danno deterministici con metodi di valutazione probabilistica segna un significativo progresso nell'ingegneria sismica. Le curve di fragilità, che esprimono la probabilità di superare gli stati specifici di danno in funzione dell'intensità del movimento terra, forniscono un quadro completo delle potenziali prestazioni attraverso lo spettro dei possibili scenari di terremoto. Questo quadro probabilistico rappresenta le incertezze nelle caratteristiche del moto terra, proprietà materiali e presupposti di modellazione, consentendo strategie più robuste di valutazione dei rischi e mitigazione.

5 L'implementazione pratica di questi concetti richiede relazioni quantitative tra metriche analitiche e obiettivi di performance. come i rapporti di deriva interstory e le accelerazioni del piano di punta servono come proxies misurabili per gli stati di danno. Le soglie stabilite da fonti autorevoli come ASCE 41-17 e FEMA 356 forniscono valori di riferimento che correlano questi EDP con livelli di performance attesi. Queste relazioni permettono agli ingegneri di tradurre i risultati analitici in valutazioni strutturali delle prestazioni che si allineano con requisiti di codice e aspettative degli stakeholder.

6 In tutto questo capitolo, sottolineiamo il ruolo centrale dell'analisi dei danni nell'ambito del più ampio quadro PBEE. Collegando la caratterizzazione del pericolo sismico alla risposta strutturale e alla valutazione delle prestazioni, l'analisi dei danni fornisce le basi tecniche per il processo decisionale informato sul rischio. Le metodologie qui presentate stabiliscono un approccio sistematico alla quantificazione, all'interpretazione e al rischio sismico di comunicazione, consentendo in definitiva progetti strutturali più resilienti ed economicamente sostenibili.

7 Il capitolo procede con un esame dettagliato degli stati limite, dei danni indici e dei livelli di performance, culminando in un approccio integrato che colma il divario tra analisi tecnica e applicazione pratica. Questo trattamento completo di analisi dei danni stabilisce la fase per le metodologie di analisi e stima delle perdite fragilità che saranno affrontate nei capitoli successivi.

70.2 Stati di limite

8 Gli stati di limite rappresentano soglie critiche che definiscono i confini tra prestazioni strutturali accettabili e inaccettabili. Nell'ambito dell'ingegneria del terremoto basata sulle prestazioni (PBEE), gli stati limite servono come parametri essenziali per valutare le risposte strutturali contro obiettivi predefiniti delle prestazioni.

9 Gli stati di limite in PBEE forniscono confini quantitativi che corrispondono a specifiche condizioni di danno o livelli di prestazioni. Questi stati stabiliscono i criteri contro cui

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

vengono valutati i parametri della domanda di ingegneria (EDPs) per determinare se una struttura soddisfa i suoi obiettivi di prestazione.

10 Il concetto di stati limite trasforma le descrizioni qualitative dei danni in metriche di decisione quantitativa che consentono una valutazione coerente e affidabile delle prestazioni.

70.2.1 Gerarchia degli Stati Limiti

11 PBEE incorpora tipicamente una gerarchia di stati limite corrispondenti a livelli sempre più gravi di danni strutturali e non strutturali:

1. **Stato di limite operativo (OLS)**: La struttura rimane completamente funzionale con danni trascurabili. I servizi essenziali continuano senza interruzioni e non è richiesta la riparazione, che corrisponde alle prestazioni immediate di occupazione.
2. **Stato di limite di occupazione immediato (IOLS)**: Minori danni strutturali si verificano, ma l'edificio rimane sicuro per un impiego immediato dopo l'ispezione.
3. **Stato di limitazione della sicurezza sulla vita (LSLS)**: Si verificano danni strutturali significativi, ma l'edificio mantiene sufficiente resistenza e rigidità residua per evitare il collasso.
4. **Stato limite di prevenzione del collo (CPLS)**: Severe danni strutturali si avvicina alla soglia del collasso parziale o completo; la struttura non può essere riparabile, ma ha impedito la perdita di vita evitando il crollo.

70.2.2 Quadro di valutazione

12 Nell'ambito della moderna metodologia PBEE, gli stati limite sono trattati con probabilità piuttosto che deterministicamente; questo approccio riconosce le incertezze intrinseche nella domanda sismica, capacità strutturale e valutazione dei danni. Per ogni stato limite, viene sviluppata una funzione di fragilità che esprime la probabilità di superare lo stato limite in funzione di un parametro di intensità (IM) o domanda ingegneristica (EDP).

13 La probabilità di superare uno stato limite è generalmente espressa come:

$$P(LS|EDP) = \Phi\left(\frac{\ln(EDP) - \ln(EDP_{median})}{\beta_{LS}}\right)$$

Dove:

- Φ è la normale funzione di distribuzione cumulativa standard
- EDP_{median} è la capacità mediana associata allo stato limite
- β_{LS} è la deviazione standard logaritmica che rappresenta chap: regione della fiducia

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

70.2.3 Attuazione nel quadro PBEE

14 Nel quadro PBEE sviluppato dal Pacifico Centro di ricerca per l'ingegneria del terremoto (PEER), gli stati limite collegano l'analisi della risposta strutturale alle variabili decisionali attraverso un'analisi dei danni, creando una via di valutazione probabilistica completa:

1. **Analisi dei rischi**: Caratterizza il pericolo sismico in termini di misure d'intensità (IM)
2. **Analisi strutturale**: Rilassa gli IM ai parametri della domanda di ingegneria (EDPs)
3. **Analisi dei danni**: Mappe EDPs a misure di danno (DM) utilizzando stati limite
4. **Analisi della perdita**: Traduci DM in variabili di decisione (DVs)

15 Gli stati di limite sono centrali alla fase di analisi dei danni, dove definiscono le soglie in cui si verificano diversi stati di danno basati sugli EDP calcolati.

70.2.4 Calibrazione e convalida

16 La creazione di adeguati stati limite richiede la calibrazione attraverso test sperimentali, osservazioni sul campo da terremoti passati e giudizio esperto. Gli stati di limite devono essere convalidati contro le prestazioni del mondo reale per garantire che essi rappresentino con precisione i livelli di prestazione previsti.

- Test di laboratorio dei componenti e sistemi strutturali
- Analisi delle indagini post-quake sui danni
- Simulazioni numeriche utilizzando modelli verificati
- Elicitazione degli esperti e sviluppo del consenso

70.2.5 Considerazioni multi-oggettive

17 Le applicazioni PBEE moderne spesso comportano più stati di limite che affrontano diverse preoccupazioni sulle prestazioni:

- Danni dei componenti strutturali
- Danni dei componenti non strutturali
- Danni contenuti
- Disturbo della funzionalità
- Costi di riparazione e tempo
- Impatto ambientale

18 Questo approccio multi-oggettivo permette agli stakeholder di prendere decisioni

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

informate basate su una comprensione completa delle potenziali prestazioni sismiche in diverse dimensioni.

19 La corretta definizione e applicazione degli stati limite all'interno di PBEE forniscono un quadro robusto per la progettazione di strutture che soddisfano obiettivi specifici delle prestazioni in base a vari livelli di rischio sismico, portando alla fine ad edifici più resilienti e infrastrutture.

70.2.6 Connessione agli indici di danno

20 Mentre gli stati limite definiscono le soglie critiche delle prestazioni strutturali, abbiamo bisogno di metriche quantitative per determinare quando queste soglie sono superate. Questo è il luogo in cui gli indici di danno diventano essenziali: forniscono agli strumenti matematici per misurare e quantificare la portata dei danni rispetto a questi stati limite stabiliti.

21 Gli indici di danno servono come strumenti di misura pratici che permettono agli ingegneri di valutare se una struttura abbia raggiunto o superato uno stato limite particolare. Come esploreremo nella sezione successiva, questi indici vanno da semplici rapporti di domanda a capacità a funzioni probabilistiche complesse che rappresentano danni accumulati nel tempo. L'integrazione degli indici di danno con stati limite crea un quadro completo per la valutazione delle prestazioni che collega le soglie teoriche con risposte strutturali misurabili.

70.3 Indici di danno

*L*e porte di questa sezione sono da (Saouma e Hariri-Ardebili, 2021)

70.3.1 Indici di danno e criteri di prestazione

22 A *indice delle prestazioni* è una misura numerica utilizzata per quantificare i danni, la stabilità o la risposta complessiva di una struttura sottoposta ad eccitazione sismica. Questi indici stabiliscono parametri obiettivi per la sicurezza e la facilità di servizio, facilitano i confronti tra le alternative di progettazione o strategie di retrofit e consentono il processo decisionale informato sul rischio. Mentre la sezione precedente stabilita gli stati limite come limiti di soglia, indici danno forniscono le metriche quantitative necessarie per determinare quando questi confini sono attraversati.

23 Per l'analisi elastica lineare, gli indici comuni si concentrano su criteri basati sullo stress e basati sulla tensione, assumendo comportamenti materiali elastici senza una modellazione esplicita dei danni. *rapporto qualità domanda* (DCR) misura il rapporto tra stress o sforzo indotto per limiti consentibili, dove i valori superiori all'unità indicano la superanza

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

delle soglie accettabili. Oltre al criterio standard basato sullo stress, viene proposto un criterio alternativo basato sulla tensione a causa della triassialità dei tensori di sforzo e di deformazione, dato da:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk}$$

I corrispondenti rapporti di capacità della domanda in termini di stress e tensione sono:

$$\begin{cases} \text{Stress-based} & \text{DCR}^{\sigma} = \frac{\sigma}{f_t'} \\ \text{Strain-based} & \text{DCR}^{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cr}} \end{cases}$$

Mentre il DCR misura la massima superiorità, non cattura né durata né estensione, che richiede indici aggiuntivi.

24 Il *durata cumulativa inelastica* (CID) quantificare la durata totale di escursioni in stress o sforzo sopra una soglia definita, indicando l'entità del sovrastress durante l'eccitazione sismica. Poiché l'analisi elastica lineare non è una redistribuzione dello stress, un singolo superamento non porta necessariamente al fallimento; invece il CID traccia la durata accumulata di superamento su due livelli ($1.0 \leq \text{D.} \leq 2.0$), fornendo efficacemente una misura di resistenza strutturale sotto carico ciclico.

25 Il *area cumulativa inelastic* (CIA) perfeziona il CID incorporando sia la durata che l'entità della superanza. Definito come parte integrante di stress o di elevazione dello sforzo nel tempo, CIA rappresenta la gravità degli eventi più inquietanti piuttosto che semplicemente il loro verificarsi. Nelle valutazioni basate sullo stress, la CIA ha unità di forza per area unitaria moltiplicate per tempo.

26 Un'altra importante metrica è il danno *rapporto di distribuzione spaziale* (DSDR), che valuta l'entità della propagazione dei danni misurando la regione sovraffatta o sovrastante rispetto alla struttura totale. A differenza del CID e della CIA, che quantificano le superanze locali nel tempo, DSDR fornisce una misura spaziale di potenziali zone di fallimento.

27 Per l'analisi sismica non lineare, gli indici sono basati su danni materiali, propagazione della crepa e dissipazione dell'energia. *indice dei danni* (DI^{def}) valuta la stabilità in base allo spostamento assoluto massimo nei punti critici, normalizzato dalla resa e dallo spostamento finale:

$$\text{DI}^{\text{def}} = \frac{|\Delta_{max}| - \Delta_y}{\Delta_u - \Delta_y}, \quad \Delta_y \leq |\Delta_{max}| \leq \Delta_u$$

dove Δ_y e Δ_u rappresentano la resa e lo spostamento finale, rispettivamente.

28 Il *energia basata* indice di danno ($\text{DI}^{\text{energy}}$) traccia la dissipazione di energia cumulativa dovuta a cracking e plasticità:

$$\text{DI}^{\text{energy}} = \frac{\sum_{i=1}^{s} (E_H)_i}{(E_H)_u}$$

dove $(E_H)_i$ è l'energia dissipata da singole crepe e $(E_H)_u$ è la capacità totale di dissipazione dell'energia al collasso.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

70.3.2 Trasmissione alla valutazione dei danni probabilistici

29 Mentre gli indici di danno deterministici come il rapporto tra domanda e capacità (DCR), la durata inelastic cumulativa (CID) e l'area inelastica cumulativo (CIA) forniscono informazioni essenziali sulle prestazioni strutturali, non catturano completamente le incertezze inerenti al carico sismico e alla risposta strutturale.

30 Questi indici offrono soglie discrete per valutare i danni, ma non hanno la capacità di quantificare la probabilità di superare un dato stato di danno sotto varie intensità sismica.

31 In realtà, il rischio sismico e la risposta strutturale sono molto incerte a causa di fattori quali la variabilità nelle caratteristiche del movimento terra, le proprietà materiali e l'invecchiamento strutturale. Un approccio più completo richiede il passaggio da indici deterministici a *valutazione dei danni probabilistici*, che consente di prendere decisioni informate sul rischio—complemento del quadro probabilistico per gli stati limite discussi nella sezione precedente.

32 Il concetto fondamentale della valutazione probabilistica è il *curva di fragilità*, che esprime probabilità di superare un determinato stato di danno come funzione di una misura di intensità (IM), come l'accelerazione del terreno di picco (PGA) o accelerazione spettrale (SA). A differenza delle valutazioni deterministiche che danno un risultato binario passa/falla, le curve di fragilità descrivono il *come* di diversi livelli di danni che si verificano in una gamma di intensità sismica.

33 Per costruire curve di fragilità, indici deterministici come DCR, CID e CIA servono come *parametri della domanda di ingegneria (EDPs)* Condurre simulazioni strutturali multiple in una gamma di scenari sismici, i modelli statistici possono essere sviluppati per stimare la probabilità di superare ogni soglia di danno. Queste soglie corrispondono direttamente agli stati limite stabiliti per la valutazione delle prestazioni.

34 Questa transizione dalla valutazione deterministica alla valutazione probabilistica è essenziale nell'ingegneria dei terremoti basata sulle prestazioni (PBEE). Invece di progettare strutture per soddisfare semplicemente i limiti predefiniti, gli ingegneri possono utilizzare modelli probabilistici per valutare l'intero spettro dei rischi, consentendo strategie di mitigazione sismica più resistenti e convenienti.

35 Il prossimo capitolo sarà in grado di esplorare come questi concetti sono integrati *analisi della perdita*, dove le metriche di danno probabilistico sono ulteriormente affinate per valutare conseguenze economiche e funzionali; una discussione più dettagliata sulle curve della fragilità, compresa la loro derivazione e applicazione, è presentata nel capitolo 72.

70.3.3 Rappresentanza probabilistica del danno

36 Piuttosto che trattare i danni come un evento binario (sicuro vs. fallito), modelli PBEE danno si afferma come distribuzioni di probabilità continue. Ciò rappresenta

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

incertezze intrinseche nell'input sismico e nella risposta strutturale, un'estensione diretta del trattamento probabilistico degli stati limite discussi prima.

37 La probabilità di superare uno stato danno dato D_i per una misura di intensità del movimento terra data IM (ad esempio, accelerazione del terreno di picco, accelerazione spettrale) è comunemente espressa come:

$$P(D > D_i|IM) = \Phi\left(\frac{\ln IM - \ln IM_i}{\beta}\right)$$

dove:

- $\Phi(\cdot)$ è la normale funzione di distribuzione cumulativa standard.
- IM_i è la misura mediana di intensità a cui lo stato dei danni D_i è superato.
- β è la deviazione standard logaritmica, che rappresenta chap: regione della fiducia nella soglia di danno.

38 Questa formulazione porta a *curve di fragilità*, che descrivono la probabilità di raggiungere o superare uno stato danno dato come funzione dell'intensità sismica; ogni curva corrisponde in genere ad uno specifico limite di stato identificato nel quadro della valutazione delle prestazioni.

70.3.4 Parametri di domanda metrica e ingegneria (EDP)

39 Per quantificare i danni in modo probabile, i parametri della domanda di ingegneria (EDPs) sono utilizzati come proxy misurabili per la risposta strutturale.

- **Rapporto di deriva interstoria (IDR):** Utilizzato per gli edifici per valutare i danni basati sulla deformazione.
- **Accelerazione del piano di picco (PFA):** Critica per la valutazione di danni non strutturali componenti.
- **Forza di taglio picco (PSF):** Importante per le strutture intagliate.
- **Domanda di spostamento cumulativo:** Utilizzato in ponti e strutture ad alta velocità per catturare il degrado ciclico.

40 Questi EDP servono come collegamento tra domanda sismica e performance strutturali, una volta ottenuta una distribuzione del PIL da analisi dinamiche non lineari, può essere mappata a corrispondenti stati di danno utilizzando modelli empirici o analitici. Questo processo di mappatura è ciò che collega le risposte strutturali misurate o calcolate agli stati limite definiti nel quadro delle prestazioni.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

70.3.5 chap: regione della fiducia in Valutazione dei danni

41 L'approccio probabilistico ai danni dei conti di modellazione per varie fonti di chap: regione della fiducia:

1. **Sismica Hazard chap: regione della fiducia:** La variabilità del movimento terra porta a differenze nella risposta strutturale.
2. **Variabilità dei materiali e delle costruzioni:** Differenze in forza di cemento, proprietà d'acciaio e capacità di influenza della lavorazione.
3. **Modelli chap: regione della fiducia:** Le diverse tecniche di analisi e le ipotesi introducono variazioni nella risposta prevista.

42 Queste incertezze sono integrate nel PBEE attraverso *Simulazioni Monte Carlo*, aggiornamento baieno e calibrazione statistica dei modelli di danno; la struttura fornisce una valutazione più realistica del superamento degli stati limite diversi.

70.3.6 metriche di danno quantitativo

L'indice di danno (DI) è definito come funzione di una o più variabili di danno, cioè un quantitativo impostato a zero in assenza di danni e unità quando si verificano guasti o collassi. DI $\in [0, 1]$ (Hariri-Ardebili et al., 2016):

$$\mathrm{DI} = f\left(\mathrm{DV}_i\right) \ , \quad i = 1, \ldots, N$$

dove n è il numero di DVs che contribuiscono. Se $n = 1$, si chiama DI monovariabile e se $n >1$, è un DI multi-variabile (Kappos, 1997). La forma più popolare per l'evoluzione dell'indice di danno può essere scritta come:

$$\mathrm{DI} = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{\mathrm{DV}_i - \mathrm{DV}_{L_i}}{\mathrm{DV}_i - \mathrm{DV}_{U_i}} \right)^{\kappa_i}$$

dove DV_{L_i} e DV_{U_i} sono i confini inferiori e superiori (sentiero) del i^{th} danni variabili e κ è un esponente relativo al tasso dei cambiamenti nell'indice di danno in diverse fasi della variabile di danneggiamento. Questi confini inferiori e superiori spesso corrispondono direttamente a specifici stati di limite nel quadro PBEE, creando un legame cruciale tra il concetto di stato limite astratto e il processo di valutazione dei danni quantitativo. 70.1 illustra quattro modelli diversi basati sulla combinazione di κ_i per un DII ipotetico con due DV.

Gli indici di danno possono essere classificati in base a diverse applicazioni (Hariri-Ardebili e Saouma, 2015):

- *Locale locale* vs. *Globale*: L'ID locale è un indicatore di danno in un elemento, membro o parte limitata della struttura. Il DI globale invece cattura lo stato dei danni in un

COPIA DI REVISIONE

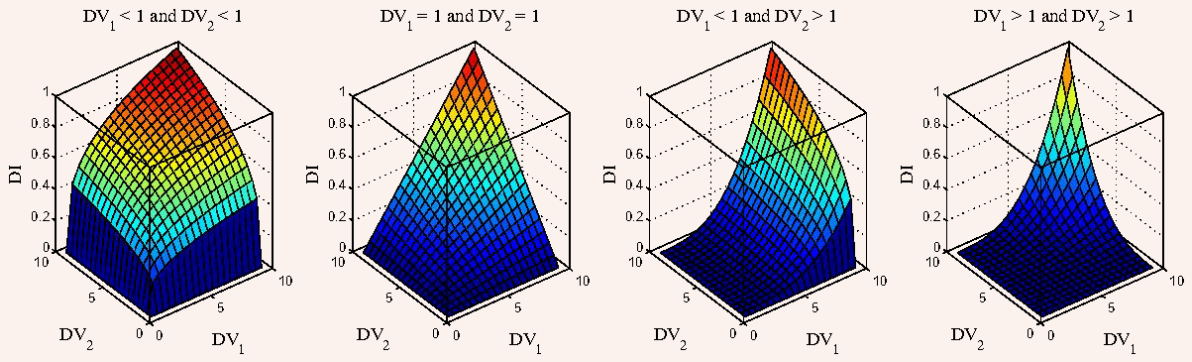


Figura 70.1: Rapporti tra un DI e due DV (Saouma e Hariri-Ardebili, 2021)

intero. Il Differente globale può essere calcolato con somma ponderata degli DIs locali.

- *Variabile* vs. *Multivariabile*: Il DI può essere calcolato sia da una singola variabile o da una combinazione di più. Di solito combinato DI tiene conto dei parametri diversi e fornisce un indicatore più completo del progresso dei danni.
- *Cumulatore* vs. *Non cumulativo*: Un DI cumulativo è in grado di catturare l'accumulo dei danni durante l'analisi transitoria, mentre uno non-cumulativo può solo catturare lo stato finale.
- *Determinazione* vs. *Stocastico*: Poiché tutti i materiali sono eterogenei, il DI può o non può catturare questa eteroogenesi attraverso espressioni stocastiche o deterministe.
- *Indice di danno* vs. *spettro di danno*: Lo spettro di danno rappresenta la variazione dell'indice dei danni rispetto al periodo strutturale per una serie di sistemi monogradi-di libertà sottoposti a un record di movimento terra (Bozorgnia e Bertero, 2003).
- *Struttura* vs. *Economia*: L'ID strutturale cattura i danni in termini di parametri strutturali; d'altra parte, un DI economico introduce concetti di costo come il rapporto tra costi di riparazione e costi corrispondenti.

43 Queste classificazioni di indici danno forniscono strumenti flessibili per gli ingegneri per valutare le prestazioni strutturali contro i limiti stabiliti nel quadro PBEE. Selezionando gli indici appropriati basati sui requisiti specifici della valutazione, gli ingegneri possono sviluppare valutazioni complete che collegano misurazioni quantitative agli obiettivi di performance qualitativi.

44 La classificazione e la quantificazione dei danni attraverso vari indici fornisce le basi tecniche per l'attuazione di approcci basati sulle prestazioni alla progettazione e valutazione sismica. Queste metriche di danno servono come il collegamento quantitativo tra l'analisi ingegneristica e gli obiettivi di performance stabiliti dagli stakeholder.

45 Mentre ci muoviamo dalla quantificazione dei danni alla valutazione delle prestazioni, dobbiamo porre questi concetti tecnici all'interno di un più ampio quadro di ingegneria

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

basato sulle performance che si occupa non solo della sicurezza strutturale ma anche della funzionalità, dell'economia considerazioni e aspettative sociali.

70.4 Prestazioni

46 Gli approcci basati sulle prestazioni rappresentano il culmine della nostra comprensione del rischio sismico, della risposta strutturale e della valutazione dei danni. In questo contesto più ampio, gli stati limite e gli indici di danno precedentemente discussi forniscono i mezzi tecnici per quantificare e valutare le prestazioni strutturali, come illustrato nella figura. 70.2.

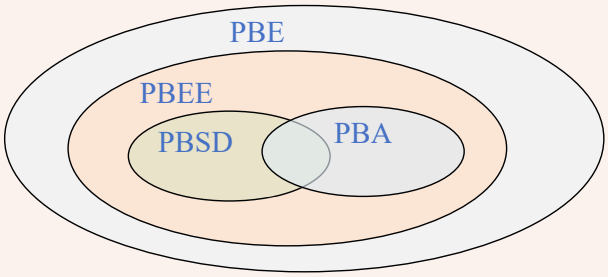


Figura 70.2: PBEE: il grande film

70.4.1 Struttura di ingegneria basata sulle prestazioni

47 Ingegneria basata sulle prestazioni (PBE) comprende la selezione di criteri di progettazione, sistemi strutturali, layout, proporzionalizzazione e dettaglio per una struttura e i suoi componenti e contenuti non strutturali, garantendo qualità costruttiva e gestione della manutenzione a lungo termine. L'obiettivo primario di PBE è quello di garantire, entro determinati livelli di affidabilità, che la struttura o il sistema non sospetteranno danni al di là degli stati limite predefiniti sotto i livelli previsti di eccitazione.

48 PBE integra diverse discipline, tra cui ingegneria strutturale, scienza materiale e valutazione del rischio, per affrontare gli obiettivi di performance in modo completo. Esso comporta valutazioni iterative per perfezionare le scelte di progettazione e garantire il rispetto degli obiettivi di performance. Questo processo completo inizia con il concetto iniziale del progetto e si estende in tutto il ciclo di vita della struttura, compreso il suo funzionamento, manutenzione e eventuale decommissioning (Bertero e Bertero, 2002).

49 Nel contesto dell'ingegneria dei terremoti, PBE si manifesta in diversi approcci complementari:

COPIA DI REVISIONE

- **Ingegneria del terremoto basata sulle prestazioni (PBEE)** applica i principi di PBE agli scenari in cui i rischi sismici dominano considerazioni di progettazione. PBEE affronta l'intero ciclo di vita di una struttura, assicurando che possa resistere a movimenti terremoti di intensità variabile senza superare le soglie di danno specificate (Bertero e Bertero, 2002).

  PBEE incorpora:

  - Analisi dettagliata dei rischi sismici per definire le caratteristiche del movimento terra.
  - Integrazione dei criteri di prestazione strutturale con valutazioni probabilistiche del rischio.
  - Sottolinea sia la funzionalità immediata che la resilienza a lungo termine.

- **Progettazione Sismica basata sulle prestazioni (PBSD)** è un sottoinsieme di attività PBEE focalizzate esplicitamente sulla fase progettuale, che comprende un approccio strutturato per incorporare resilienza sismica attraverso (Bertero e Bertero, 2002):

  - Identificazione e quantificazione dei rischi sismici utilizzando dati specifici del sito.
  - Selezione dei livelli di performance e degli obiettivi di progettazione.
  - Valutazione delle condizioni del sito per l'idoneità e i potenziali rischi.
  - Sviluppo di progetti concettuali che si allineano agli obiettivi delle prestazioni.
  - Modellazione numerica e simulazioni per la verifica preliminare e finale del design.
  - Controllo completo di accettabilità e recensioni peer.
  - Specificazione delle procedure di garanzia della qualità costruttiva.
  - Monitoraggio post-costruttivo per garantire il rispetto costante degli obiettivi di performance.

- **Valutazione basata sulle prestazioni (PBA)** è l'applicazione dei principi PBEE per valutare quantitativamente le prestazioni sismiche delle strutture esistenti o di nuovi progetti completati. PBA fornisce agli stakeholder informazioni probabilistiche sulla risposta di una struttura ad eventi sismici, consentendo il processo decisionale informato per la gestione del rischio (Zareian e Krawinkler, 2009).

  PBA coinvolge:

  - Modellazione analitica e simulazione per prevedere il comportamento strutturale.
  - Valutazione delle strutture esistenti per identificare le vulnerabilità.
  - Valutazione del rischio probabilistico per valutare i danni come probabilità e conseguenze.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

- Sviluppo di strategie di retrofit o aggiornamento per mitigare i rischi identificati.
- Presentazione dei risultati in termini chiari per aiutare le parti interessate a comprendere e gestire i rischi efficacemente.

70.4.2 Livelli di prestazione e criteri di accettazione

50 PBEE cerca di individuare i livelli di performance discreti per le principali componenti strutturali che influiscono significativamente sulla funzione edile e la sicurezza. Questi livelli di prestazioni forniscono un modo standardizzato per comunicare il comportamento anticipato delle strutture sotto diverse intensità sismica e collegarsi direttamente agli stati limite e gli indici di danno discussi nelle sezioni precedenti.

51 ASCE 41 (ASCE 2007) e altri codici forniscono generalmente indicazioni per tre livelli di prestazioni primarie (Tabella 72.1):

- **Impresa immediata**: Un comportamento essenzialmente elastico è ricercato limitando i danni strutturali (ad esempio, la resa dell'acciaio, il cracking significativo del cemento) e i danni non strutturali.
- **Sicurezza della vita**: Limitare i danni dei componenti strutturali e non strutturali in modo da ridurre al minimo il rischio di infortuni o perdite e mantenere accessibili le vie di circolazione essenziali.
- **Prevenzione del collo**: Assicurare un piccolo rischio di collasso parziale o completo dell'edificio limitando deformazioni strutturali e forze all'inizio del significativo deterioramento della forza e rigidità.

52 FEMA 356 (FEMA-356, 2000) La tabella definisce i vari livelli di rendimento della costruzione e i livelli di rischio del terremoto simili a quelli presentati in altri quadri. 72.1, che fornisce una descrizione qualitativa dei danni sia ai componenti strutturali che non strutturali.

53 Un quadro influente per il design sismico basato sulle prestazioni è stato fornito dall'Associazione degli ingegneri strutturali della California (SEAOC) Documento Vision 2000. Ha stabilito quattro livelli di prestazioni discreti: 1) completamente operativo, 2) operativo, 3) sicurezza della vita e 4) vicino al collasso, ciascuno che rappresenta una banda distinta nello spettro dei danni ai componenti strutturali e non strutturali e le conseguenze derivanti per gli occupanti e la funzione delle strutture (SEAOC, 1995).

54 Il quadro di SEAOC ha anche descritto vari livelli di rischio basati sulla probabilità di superamento:

- Livello di intensità frequente: 50% probabilità di superamento in 30 anni
- Livello di intensità occasionale: 50% probabilità di superamento in 50 anni
- Livello di intensità rara: 10% probabilità di superamento in 50 anni
- Livello di intensità molto raro: 10% probabilità di superamento in 100 anni

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

55 L'integrazione dei livelli di performance con i livelli di rischio crea obiettivi di prestazioni che variano in base all'importanza della struttura, come illustrato nella figura 70.3Le linee diagonali rappresentano obiettivi diversi che corrispondono a differenti tipi di struttura, con strutture più critiche si prevede di mantenere livelli di prestazioni superiori anche in caso di eventi sismici gravi.

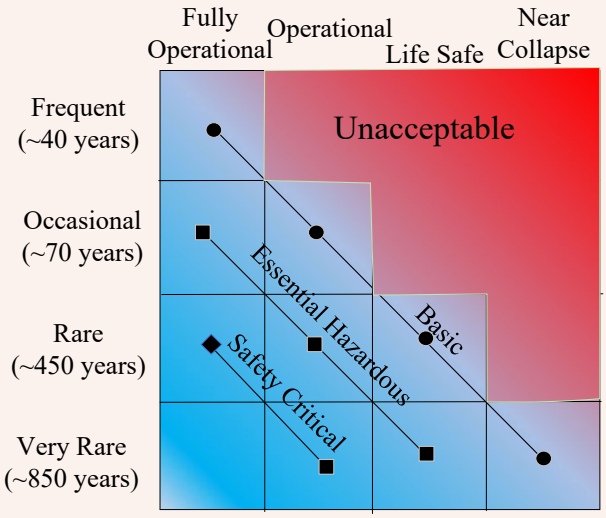


Figura 70.3: Obiettivi di progettazione delle prestazioni sismiche minimi consigliati per gli edifici (Porter, 2003)

70.4.3 Integrazione di Stati Limiti, Indici Damagine e Livelli Prestazioni

56 La creazione di relazioni quantitative tra stati limite, indici di danno e livelli di prestazioni è essenziale per l'attuazione pratica del PBEE. 70.1 e 70.2 presenti soglie consolidate da fonti autorevoli che possono essere utilizzate per valutare le prestazioni strutturali.

57 Questi limiti di derivazione dall'ASCE 41-17 (Civil Engineers, 2017) fornire una correlazione diretta tra parametri di domanda measurable engineering e livelli di performance attesi. I limiti variano da sistema strutturale, riconoscendo le diverse capacità di deformazione dei vari tipi di costruzione.

58 L'indice di danno soglie nella tabella 70.2 si basano sul Parco & Modello di danno Ang (Park e Ang, 1985), ampiamente convalidato attraverso prove sperimentali e indagini post-terremoto; questo modello combina la massima deformazione e dissipazione dell'energia isterica per valutare i danni cumulativi. Williams, Villemure e Sexsmith, 1997 le correlazioni stabilite tra questi valori indici di danno e le prestazioni osservate nelle strutture dopo i principali terremoti.

59 Per le valutazioni sismiche deterministiche, i rapporti di domanda-capacità (DCR)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 70.1: Rati a secco interstoriali (IDR) per vari livelli di prestazioni secondo ASCE 41-17

Sistema strutturale	Impresa immediata	Sicurezza della vita	Prevenzione del collo
Cornici del momento (Steel)	0.7%	2.5%	5.0%
Cornici del momento (Concrete)	1.0%	2.0%	4.0%
Cornici in tessuto	0.5%	1.5%	2.0%
Murali di taglio in calcestruzzo	0.5%	1.0%	2.0%
Murali di taglio muraria	0.3%	0.6%	1.0%

Tabella 70.2: Indice di danno Soglianze e Stati strutturali corrispondenti

Gamma di indice di danno	Stato di danno	Designazione delle merci
DI < 0.1	Minore	Nessun danno significativo; la risposta elastica predomina
0.1 ≤ DI < 0.25	La luce	Minore cracking; resa limitata possibile
0.25 ≤ DI < 0.4	Moderatore	Crepazione significativa; alcuni rendimento locale; capacità non colpite
0.4 ≤ DI < 0.8	Severe	Cintura estesa; resa diffusa; riduzione significativa della capacità
0.8 ≤ DI < 1.0	Colpisci	Danni estesi; poca resistenza o rigidità residua
DI ≥ 1.0	Demolito	Insufficienza completa; nessuna capacità residua

forniscono un'altra misura quantitativa relativa ai livelli di prestazione. 70.3 presenta le soglie del DCR dalle linee guida FEMA.

60 Queste soglie del DCR da FEMA 356 (FEMA-356, 2000) fornire un metodo di valutazione semplice per le prestazioni a livello dei componenti. Semplificata rispetto ai modelli più completi, i valori DCR offrono criteri pratici per la progettazione e la valutazione delle strutture.

61 L'integrazione di queste diverse metriche, limiti alla deriva, indici di danno e rapporti di domanda-a-capacità, fornisce agli ingegneri un quadro completo per valutare le prestazioni strutturali contro gli stati limite stabiliti. Correlando i risultati analitici con queste soglie, gli ingegneri possono tradurre risposte strutturali complesse in valutazioni significative delle prestazioni che si allineano alle aspettative e ai requisiti di codice degli stakeholder.

62 È importante notare che, mentre queste soglie forniscono una guida generale, condizioni site-specific, peculiarità strutturali e requisiti speciali di occupazione possono richiedere

COPIA DI REVISIONE

Tabella 70.3: Ratio di domanda a capacità (DCR) Sostegni secondo FEMA 356

Gamma di DCR	Livello di prestazione	Preveduto comportamento
D. < 1.0	Impresa immediata	Il componente rimane essenzialmente elastico; danni trascurabili
1.0 ≤ D. < 2.0	Sicurezza della vita	Il danno si verifica ma la struttura mantiene il margine di sicurezza contro il collasso
2.0 ≤ D. < 3.0	Prevenzione del collo	Danni significativi con capacità di rimanenza limitata; vicino collasso
D. ≥ 3.0	Oltre il CP	Il componente non è riuscito; nessuna capacità rimanente

modifiche a questi valori. Il giudizio professionale rimane essenziale nell'interpretare e applicare questi criteri nel contesto più ampio della progettazione e valutazione basati sulle prestazioni.

63 Questo approccio integrato permette agli ingegneri di tradurre i risultati analitici (indici di danno e EDP) in valutazioni significative delle prestazioni che possono essere comunicate alle parti interessate. Con l'istituzione di tali relazioni, PBEE colma il divario tra analisi tecniche e processo decisionale pratico.

70.5 Trasmissione a Curve di Fragilità e Valutazione del rischio

64 Con stati di limite, indici di danno e livelli di prestazioni ora chiaramente definiti e integrati, il passo successivo è quello di sviluppare *curve di fragilità*, che quantificano la probabilità di superare specifici stati o livelli di prestazione in funzione dell'intensità sismica; queste curve, discusse nel capitolo 72, fungere da base per la valutazione del rischio, la stima della perdita e il processo decisionale in PBEE.

65 Le curve di fragilità rappresentano il culmine della nostra comprensione dei pericoli sismici, delle risposte strutturali, dei meccanismi di danno e delle aspettative sulle prestazioni. Trasformano le metriche di ingegneria deterministica in valutazioni probabilistiche del rischio che rappresentano le insitissime incertezze nell'ingegneria dei terremoti e consentono agli stakeholder di prendere decisioni informate basate su livelli quantificabili di rischio.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



COPIA DI REVISIONE

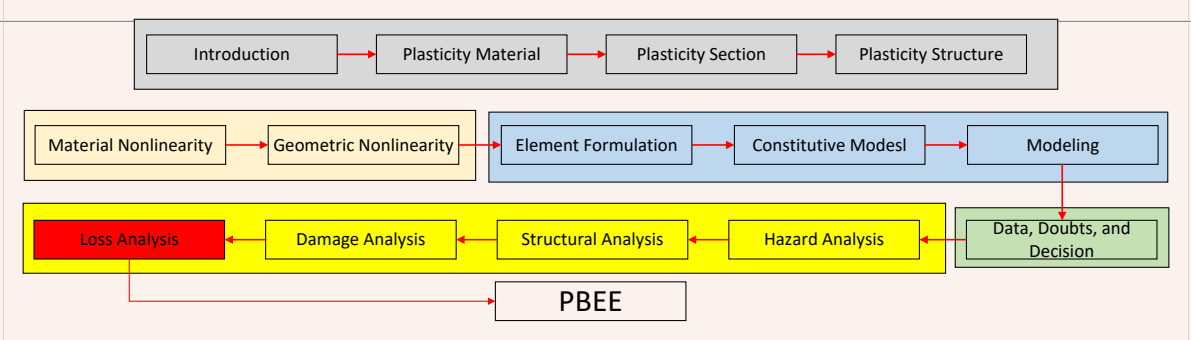
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 71

Analisi della perdita

Abstract

L'analisi della perdita in Performance-Based Earthquake Engineering (PBEE) quantifica gli impatti economici e sociali dei danni sismici, compresi i costi di riparazione, downtime e perdite. Utilizzando modelli probabilistici, funzioni di fragilità e funzioni di conseguenza, estende la valutazione del rischio oltre la sicurezza strutturale. Il capitolo esamina anche gli effetti di fuga e le incertezze socioeconomiche, evidenziando il loro ruolo nella pianificazione della resilienza. L'integrazione dell'analisi delle perdite nel PBEE consente di prendere decisioni informate sul rischio, bilanciare la sicurezza, i costi e il benessere sociale.



1 L'analisi della perdita è una componente fondamentale di Performance-Based Earthquake Engineering (PBEE) e svolge un ruolo critico nella valutazione delle conseguenze economiche e sociali dei danni causati dal terremoto.

2 A differenza degli approcci di progettazione tradizionali che si concentrano esclusivamente sulla sicurezza strutturale, PBEE mira a quantificare i costi finanziari, il downtime funzionale e le conseguenze umane associate agli eventi sismici. In tal modo, consente agli

COPIA DI REVISIONE

ingegneri, ai responsabili politici e alle parti interessate di prendere decisioni informate sulle strategie di resilienza, le politiche assicurative e misure di mitigazione.

3 Il nucleo dell'analisi della perdita è quello di stimare i costi di riparazione, il tempo di fermo e le perdite.

4 I costi di riparazione comprendono le risorse finanziarie necessarie per ripristinare una struttura al suo stato pre-terremoto, che dipendono dalla portata dei danni strutturali e non strutturali, nonché dalla disponibilità del lavoro e dei materiali.

5 Il tempo di fermo si riferisce al periodo durante il quale una struttura rimane non operativa a causa dei danni indotti dal terremoto, che interessano non solo le imprese e le istituzioni ma anche servizi essenziali come ospedali e centri di risposta d'emergenza. In alcuni casi, i tempi di fermo funzionale possono avere un impatto maggiore rispetto ai costi diretti di riparazione, in particolare per le infrastrutture critiche.

6 Le perdite, comprese le lesioni e le vittime, sono un altro aspetto significativo dell'analisi della perdita, in quanto i guasti strutturali e i detriti cadenti pongono gravi rischi alla vita umana.

7 Le perdite quantificanti richiedono una combinazione di modelli probabilistici, funzioni fragilità e funzioni di conseguenza.

8 I modelli probabilistici integrano le valutazioni dei rischi sismici con i dati delle prestazioni strutturali per valutare la probabilità di diversi livelli di danno.

9 Le funzioni di fragilità definiscono la probabilità che una struttura raggiunga uno stato particolare danno dato un livello specifico di agitazione del terreno.

10 Le funzioni di controllo traducono questi stati di danno in perdite quantificabili, come i costi di riparazione e le stime dei tempi di fermo.

11 L'analisi della perdita è ulteriormente complicata dalle incertezze nei fattori socioeconomici, mentre le incerti socio-economiche includono il fluttuare dei costi del lavoro, la scarsità di materiale e le differenze negli sforzi di recupero tra le regioni. Affrontare queste incertezze richiede approcci statistici avanzati, tra cui simulazioni di Monte Carlo e metodi di inferenza Bayesian, per perfezionare le stime sulla perdita e migliorare il processo decisionale.

12 Uno degli aspetti critici dell'analisi della perdita è la comprensione degli effetti cascading del danno sismico. Ad esempio, il fallimento di un ponte critico può interrompere le reti di trasporto, ritardare gli sforzi di risposta d'emergenza e aumentare le perdite economiche.

13 Allo stesso modo, i danni alle strutture industriali possono portare a fuoriuscite di materiale pericoloso, amplificando l'impatto del disastro. Con la contabilità di questi effetti a cascata, PBEE offre una visione più completa della resilienza del terremoto e guida gli investimenti in infrastrutture che minimizzano le perdite indirette.

14 L'implementazione dell'analisi della perdita in PBEE ha implicazioni significative per la

COPIA DI REVISIONE

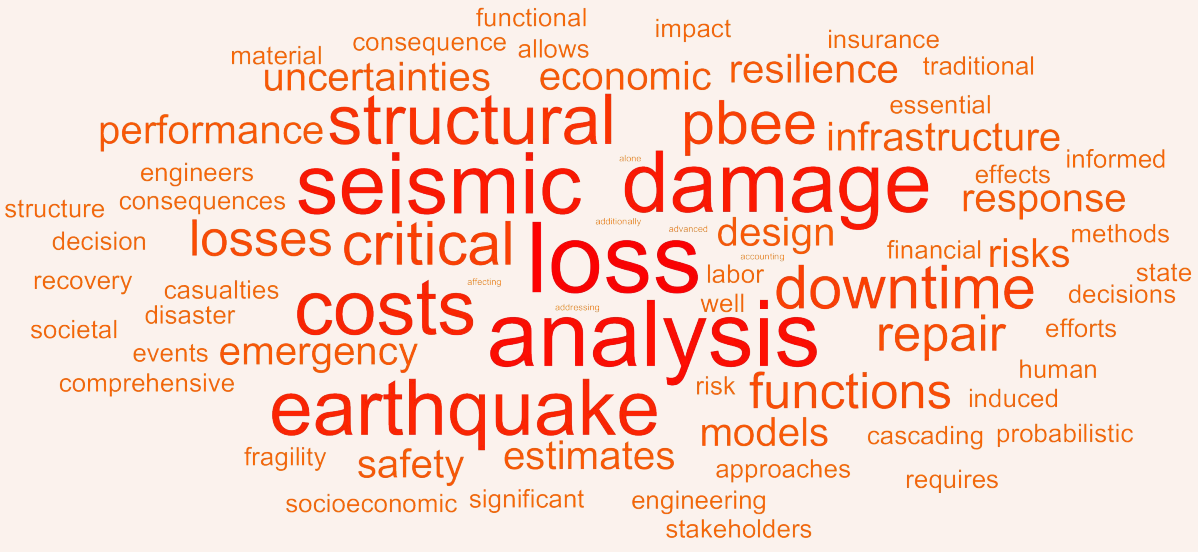
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

pianificazione delle resilienza. I decisori possono utilizzare queste analisi per determinare se l'investimento in standard di progettazione sismica più elevati è economicamente giustificato o se la reinstallazione delle strutture esistenti costituirebbe un mezzo economico per ridurre i rischi a lungo termine.

15 Inoltre, le stime sulla perdita informano lo sviluppo di modelli assicurativi e piani di preparazione dei disastri, aiutando le comunità a recuperare più efficacemente dopo un terremoto. I governi e gli stakeholder del settore privato possono sfruttare queste informazioni per dare priorità ai finanziamenti per potenziamenti sismici e alle infrastrutture di risposta d'emergenza, garantendo un recupero più robusto e sostenibile.

16 Integrando l'analisi della perdita nel quadro PBEE, ingegneri e progettisti possono muoversi oltre metriche di sicurezza tradizionali e considerare gli impatti più ampi degli eventi sismici. Questo cambiamento è essenziale per l'ingegneria dei terremoti moderni, in quanto consente di prendere decisioni di progettazione informate sul rischio che la sicurezza dell'equilibrio, la fattibilità economica e il benessere sociale.

17 Inoltre, poiché l'urbanizzazione globale aumenta e i rischi sismici diventano più pressanti, le metodologie di analisi delle perdite di raffinazione saranno critiche nella definizione di città resilienti in grado di resistere a future catastrofi.



COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Capitolo 72

Valutazione del rischio probabilistico (⊇ PBEE)[1]

Abstract

Questo capitolo presenta la valutazione del rischio probabilistico (PRA) come un quadro completo che comprende e estende i principi di Performance-Based Earthquake Engineering (PBEE).

Servendo come il top concettuale del nostro sviluppo di fondo-up di PBEE, evidenzia come la valutazione dei rischi integra i pericoli sismici, la risposta strutturale, danni e perdita in una metodologia probabilistica unificata. L'evoluzione dal design prescrittivo si avvicina a PBEE-1 e PBEe-2, tra cui i rispettivi punti di forza e limitazioni.

Le curve di fragilità sono introdotte come strumenti essenziali all'interno di questo quadro, fornendo il collegamento probabile tra i parametri della domanda di ingegneria e le misure di danno, e consentendo la quantificazione chap: regione della fiducia in prestazioni strutturali e non strutturali.

72.1 Nuovi parametri: Ingegneria del terremoto basata sulle prestazioni (PBEE) 2386
- 72.1.1 Limitazioni di carico e resistenza del fattore di progettazione (LRFD) 2386
- 72.1.2 Parte I: Obiettivi di performance espliciti 2387
- 72.1.3 Parte II: Quantificazione diretta delle conseguenze funzionali ed economiche: . . . 2389
- 72.1.4 Procedura per l'attuazione del PBEE 2394

72.2 Da risposta a danno: Curve di fragilità 2395
- 72.2.1 Fondamenti e definizioni . . 2396
- 72.2.2 Sviluppo di curve di fragilità 2396
- 72.2.3 Rappresentanze matematiche 2397
- 72.2.4 Funzione continua *vs.* Matrice discreta 2398

72.3 Ruolo nel quadro PBEE 2400

72.4 Ex 72.1: Esempio completo PBEE 2401

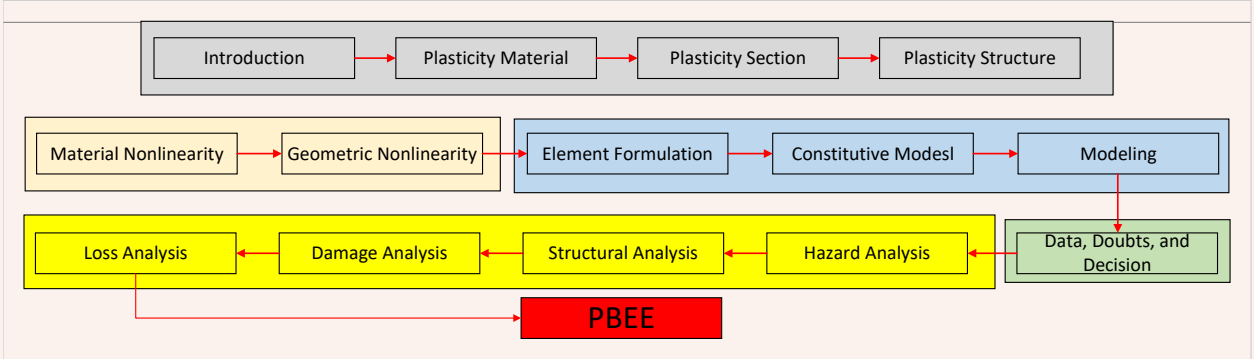
72.5 Migliatoni storici e documenti fondativi 2406

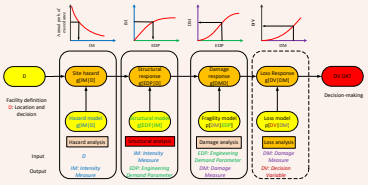
APPENDICI

Parte 1: Materiali di riferimento fondamentali

[1] Il simbolo ⊇ indica che la valutazione del rischio probabilistico è trattata come un superset di Performance-Based Earthquake Engineering.

COPIA DI REVISIONE





72.1 Nuovi parametri: Ingegneria del terremoto basata sulle prestazioni (PBEE)

72.1.1 Limitazioni di carico e resistenza del fattore di progettazione (LRFD)

1 Questo capitolo inizia rivisitando le idee chiave introdotte nel *Intermezzo* (chapter 66) evidenziare i limiti delle filosofie tradizionali del design.

2 Progettazione del fattore di carico e resistenza (LRFD), discussa in §37.3, è ampiamente utilizzato in ingegneria strutturale, soprattutto per la progettazione di acciaio e cemento. Mentre LRFD incorpora concetti probabilistici per spiegare le incertezze nei carichi e nelle proprietà materiali, presenta diverse limitazioni che motivano il passaggio verso PBEE:

Controllo di sicurezza a singolo livello: LRFD garantisce la sicurezza strutturale in carichi predefiniti, ma non affronta obiettivi di prestazioni più ampi come la riparazione post-guadagna, i tempi di fermo funzionale o la resilienza.

La mancanza di considerazione esplicita del danno: LRFD si concentra sulla prevenzione del collasso in condizioni di massima limitazione, senza quantificare i danni attesi attraverso diverse intensità terremotate.

Inflessibilità per gli scenari di caricamento complessi: LRFD si basa su combinazioni lineari di carichi e fattori fissi, limitando la sua capacità di affrontare comportamenti non lineari, degradazione e danni cumulativi sotto carico sismico dinamico.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Margine di sicurezza uniformi: LRFD applica fattori di sicurezza generici indipendentemente dal tipo di occupazione o dal rischio sismico specifico del sito. Pertanto, le strutture critiche e gli edifici ordinari sono spesso progettati per gli stessi livelli di sicurezza, indipendentemente dalle diverse conseguenze sociali del fallimento.

Nessuna integrazione con Site-Specific Hazard: LRFD non incorpora l'analisi dei rischi sismici probabilistici (PSHA), trascurando così la variabilità e chap: regione della fiducia inerente a terremoti moti a siti specifici.

[3] La Performance-Based Earthquake Engineering (PBEE) è stata sviluppata per superare i limiti di approcci prescrittivi basati su codice. Esso introduce un quadro di rischio-informato che valuta esplicitamente le prestazioni strutturali attraverso molteplici intensità sismica.

72.1.2 Parte I: Obiettivi di performance espliciti

72.1.2.1 Metodo

[4] Per affrontare i limiti di cui sopra, la prima generazione di PBEE ha introdotto obiettivi di performance discreti per gli edifici sottoposti a richieste sismiche (FEMA, 1997b; FEMA, 1997a)Fico. 72.2,

- *Operativo (O):* Nessun danno significativo; la struttura rimane completamente funzionale.
- *Occupazione immediata (IO):* Minori danni; l'edificio è sicuro e riparabile.
- *Sicurezza della vita (LS):* Danni moderati; struttura riparabile ma non funzionale senza intervento.
- *Prevenzione del collo (CP):* Danni gravi; la costruzione evita il collasso globale, ma può essere vicino fallimento.

[5] Questo quadro concettuale è illustrato in Figura 72.1 e ulteriormente riassunto nella tabella 72.1 (Whittaker03, Hamburger e Mahoney, 2003).

72.1.2.2 Limitazioni di PBEE-1

[6] Nonostante le sue innovazioni, PBEE-1 ha avuto diverse carenze:

- *Valutazione basata sui componenti:* Le prestazioni sono state valutate in base ai limiti dei singoli componenti piuttosto che al comportamento di livello del sistema.
- *Criteri di accettazione soggettivi:* Molte soglie di prestazione si basavano su giudizio esperto, senza una validazione sperimentale robusta.
- *Inadeguato Focus non strutturale:* Le procedure in gran parte ignoravano i danni non strutturali, nonostante il suo impatto significativo sulle perdite e sulla funzionalità.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

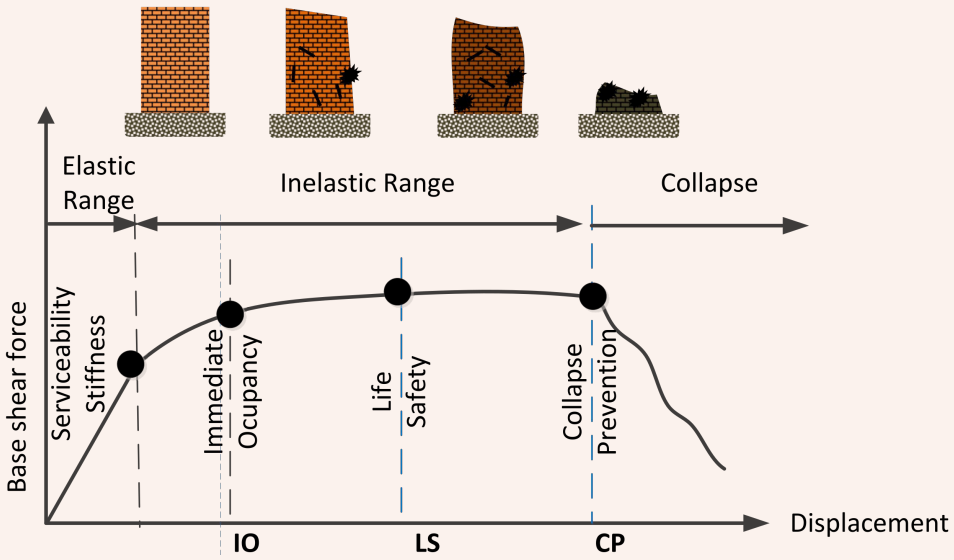


Figura 72.1: Descrizione concettuale della prima generazione di PBEE; (Whittaker03, Hamburger e Mahoney, 2003)

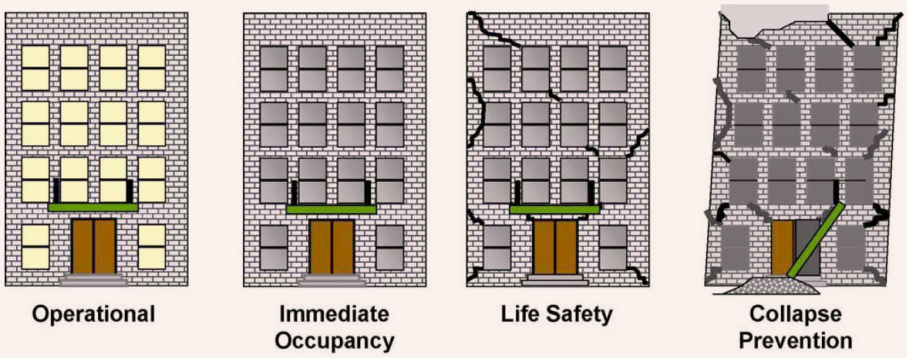


Figura 72.2: Differenze di livelli di performance, (FEMA, 2012)

- *Risultati e conservatori non verificati:* Le previsioni di performance non sono state rigorosamente convalidate, spesso portando a disegni conservatori.
- *Scollegamento del porta-tasto:* Il quadro non ha affrontato le priorità degli stakeholder, come i costi di riparazione, il downtime o la continuità aziendale.
- *Potenziale per la responsabilità:* Incomprensioni di obiettivi prestazionali come garanzie ingegneri esposti a rischio legale.

[7] Questi limiti hanno motivato lo sviluppo di un quadro più completo — PBEE-2.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 72.1: La gamma di danni dei componenti strutturali e non strutturali per vari livelli di rendimento dell'edificio target (tab. C1-2) (FEMA-356, 2000)

Livelli di performance	**Prevenzione del collo**	**Sicurezza della vita**	**Occupazione immediata**	**Operazione**
Danni complessivi	**Severe**	**Moderatore**	**Luce**	**Molto leggero**
Componenti strutturali	La rigidità e la resistenza, ma le colonne portanti e le pareti funzionano. Grandi deriva permanenti. Alcune uscite bloccate. Infills e parapetti non frenati hanno fallito o a guasto incipiente. L'edificio è vicino al collasso.	Alcuni elementi di gravità-carico-portanti funzionano. Nessun guasto aereo fuori da pareti o ribaltamento di parapetti. Alcune deriva permanente. Danni a partizioni. L'edificio può essere al di là della riparazione economica.	Struttura sostanzialmente mantiene la forza e rigidità originali. Minore cracking di facciate, partizioni e soffitti così come elementi strutturali.	La struttura mantiene sostanzialmente la forza e la rigidità originali, le piccole fessure di facciate, partizioni e soffitti nonché gli elementi strutturali.
Componenti non strutturali	Danni intensivi.	Rischi di caduta mitigati ma molti sistemi architettonici, meccanici ed elettrici sono danneggiati.	Le attrezzature e i contenuti sono generalmente sicuri, ma non possono funzionare a causa di guasti meccanici o mancanza di utilità.	Si verificano danni trascurabili, sono disponibili energia e altre utilità, eventualmente da fonti standby.

72.1.2.3 Progettazione vs. Analisi

8 Come l'ingegneria strutturale (§37.1.1) distingue tra progettazione e analisi, PBEE espande questa dicotomia:

Progettazione Sismica basata sulle prestazioni (PBSD): Progettazione di nuove strutture per soddisfare obiettivi di prestazioni specificati sotto carico sismico.

Valutazione basata sulle prestazioni (PBA): Valutazione quantitativa delle prestazioni di una struttura, applicabile sia agli edifici esistenti che ai nuovi.

72.1.3 Parte II: Quantificazione diretta delle conseguenze funzionali ed economiche:

72.1.3.1 Introduzione

9 PBEE implica progettazione, valutazione e costruzione di strutture ingegnerizzate le cui prestazioni in carichi comuni ed estremi rispondono alle diverse esigenze e obiettivi dei proprietari, degli utenti e della società.

10 Nel 1997 il Pacific Earthquake Engineering Research Center (PEER) ha deciso di sviluppare una metodologia più robusta per l'ingegneria dei terremoti basata sulle prestazioni, chiamata PBEE di prossima generazione (chiamata anche PBEe-2 o PEER PBE E). Il quadro PEER PBEE sviluppato da PEER facilita *c*alcolo diretto degli effetti delle chap: regione della fiducia e casualità su ogni passo nella procedura basata sulle prestazioni.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

11 Più specificamente:

- La progettazione sismica basata sulle prestazioni valuta esplicitamente le prestazioni probabili di una *struttura*, dato il *pericolo* cui può essere esposta, tenendo conto delle incertezze nella quantificazione del rischio e nella valutazione della risposta effettiva della costruzione.
- Contrariamente a LRFD, lo fa *n*on si limita ad un livello di pericolo, ma più.
- La prestazione è misurata in termini di probabilità di incorrere *p*erdite, costi di riparazione e sostituzione, tempo di riparazione, e il placarding non sicuro.
- Le prestazioni possono essere valutate per un *p*articolare scenario o intensità del terremoto, o considerando tutti i terremoti che potrebbero verificarsi, e la probabilità di ciascuno, per un determinato periodo di tempo.
- Prestazioni espresse in termini di una serie di livelli di performance discreti identificati come *O*ccupazione operativa, immediata, sicurezza della vita e prevenzione del tracollo.
- Introduce il concetto di *p*restazioni relative a danni sia strutturali che non strutturali. Obiettivi di performance sono stati sviluppati collegando uno di questi livelli di prestazioni ad un livello specifico di rischio per il terremoto.
- È il *s*tato della pratica tra le aziende di fascia alta. È ben consolidata
- Tuttavia:
  - Gli stati di limite sono *c*omponente basato non veramente sistema, (e se un componente non riesce, innesca il collasso progressivo?)
  - tratta solo l'evento MCE (2%/50anni).
  - Trattamento limitato chap: regione della fiducia e probabilità.
  - Informazioni limitate per la progettazione di codice sopra.

72.1.3.2 Quadro generale

12 Il quadro generale per PEER PBEE è mostrato in Figura 72.3. Rompere la valutazione delle prestazioni sismiche in quattro fasi principali, Fig. 72.3:

1. *Analisi dei rischi:* Quantificare la probabilità di sperimentare diversi livelli di terra tremando a un dato sito utilizzando *Analisi dei rischi sismici probabilistici* (PSHA) chapter 67.
2. *Analisi strutturale:* Valuta la risposta strutturale ai carichi sismici, incorporando *analisi dinamica non lineare* e parametri della domanda di ingegneria (EDPs), chapter 69.
3. *Analisi danni:* Utilizza i parametri di risposta per valutare danni fisici a *componenti strutturali e non strutturali*, chapter 70.
4. *Analisi della perdita:* Traduci danni in *perdite economiche, tempi di fermo e stime sulle perdite*, consentendo il processo decisionale basato sui costi, chapter 71.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

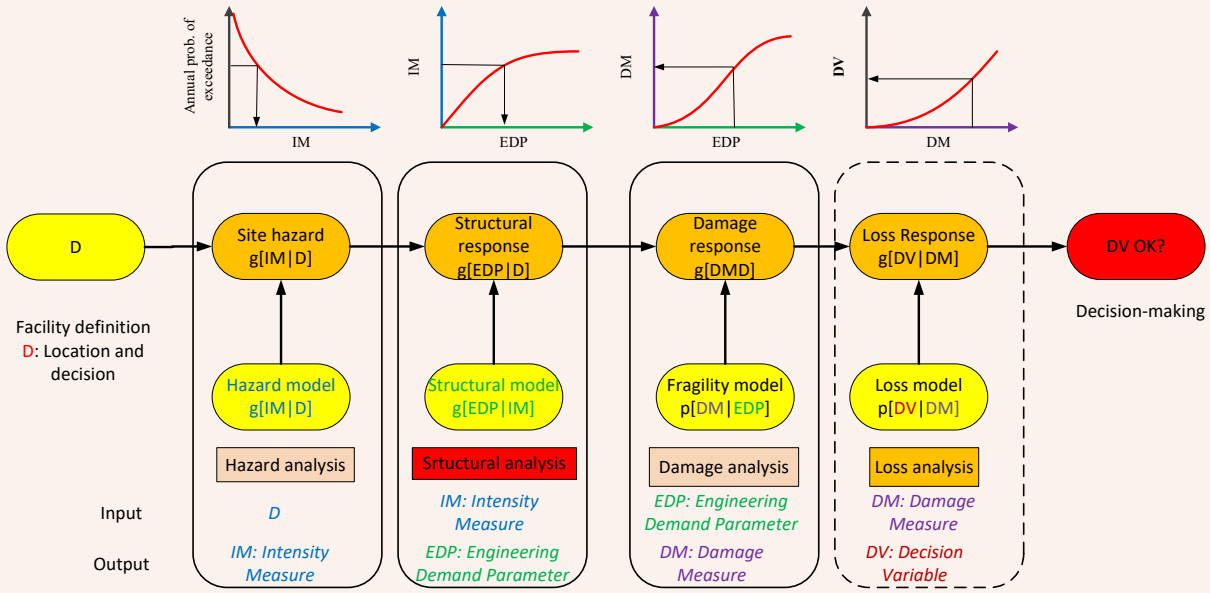


Figura 72.3: Quattro componenti di PBEE

[13] I risultati di ciascuna di queste fasi sono rappresentati come variabili generalizzate: Misura dell'intensità (IM), Parametro della domanda di ingegneria (EDP), misura del danno (DM) e Variabile della decisione (DV). Questo processo può essere espresso in termini di un triplo integrale che è un'applicazione del teorema della probabilità totale (Porter, 2003): Indice[p2]danni! misura Indice[p2]Variazione

$$g\,[\mathrm{DV}|\mathrm{D}] = \int\int\int p\,[\mathrm{DV}|\mathrm{DM},\mathrm{D})\,p\,[\mathrm{DM}|\mathrm{EDP},\mathrm{D}] \\ p\,[\mathrm{EDP}|\mathrm{IM},\mathrm{D}]\,g\,[\mathrm{IM}|\mathrm{D}]\,d\mathrm{IM}.d\mathrm{EDP}.d\mathrm{DM} \tag{72.1}$$

dove p [X|Y] denota la funzione di distribuzione cumulativa complementare X condizionato a Y, g [X|Y] indica il tasso medio annuo di avvenimento X dato che Ye D denota la posizione della struttura, strutturale, non strutturale e altre caratteristiche. D per semplicità.

IM: *Misura dell'intensità* descrive le caratteristiche del moto terra terremoto quantitativamente. Questo parametro viene espresso tipicamente come funzione di probabilità media annuale di superamento, g [IM].

EDP: *Parametro della domanda di ingegneria* descrive la risposta dei componenti strutturali e non strutturali e il contenuto alla trematura del terremoto. I prodotti di questo passo sono probabilità condizionali, p [EDP|IM].

DM: *Misura di danno* I marchi comprendono descrizioni efficaci dei danni per caratterizzare la funzionalità, l'occupazione-pronta, la sicurezza della vita e le necessarie

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

riparazioni dell'edificio. I prodotti di questo passaggio sono probabilità condizionali, p [DM|EDP].

DV: *Decisione Variabile* serve a tradurre le stime dei danni in quantità utili per coloro che sono incaricati di prendere decisioni relative al rischio. Attualmente i DV utilizzati che sono identificati come metriche di decisione sono perdite dirette in dollari, tempi di fermo (o tempo di ripristino), e morti (casualties). p [DV|DM].

[14] Come accennato in precedenza, le perdite dirette del dollaro, i tempi di fermo e le perdite sono utilizzate come variabili decisionali nella metodologia PBEE-2 per la valutazione delle prestazioni delle strutture. Applied Technology Council, 2012b utilizza tre tipi di valutazioni delle prestazioni: 1) basato sull'intensità, 2) basato su scenari e 3) basato sul tempo.

72.1.3.3 Differenze tra PBEE 1 e PBE E 2

L'evoluzione da PBEE 1 (ingegneria del terremoto basata sulle prestazioni di prima generazione) a PBEe 2 (ingegneria terrestre basata sulla prestazione di seconda generazione) rappresenta un significativo progresso nella metodologia, nell'ambito e nell'applicazione. Di seguito è riportata una panoramica delle principali differenze, riassunte nella tabella 72.2.

Differenze chiave

- *Quadro metodologico:* PBEE 1 si basava su metodi deterministici e criteri prescrittivi, mentre il PBE E 2 introduceva un quadro probabilistico multidisciplinare (Center, 2010).
- *Passos analitici:* PBEE 2 ha formalizzato un quadro modulare che integra l'analisi dei rischi, l' analisi strutturale, l'analisi dei danni e l'esame delle perdite, non esplicitamente separato in PBE E 1 (FEMA, 2012).
- *Ambito:* PBEE 2 ha ampliato il suo focus per includere sistemi non strutturali, impatti sociali e considerazioni economiche, a differenza dell'approccio strutturale-centrico di PBEe 1 (American Society of Civil Engineers, 2017).
- *Rappresentanza di movimento terra:* PBEE 2 incorpora analisi probabilistiche del rischio sismico (PSHA) e selezione di movimento terra specifica per il sito, mentre PBEe 1 ha usato descrizioni semplificate dei rischi (Civil Engineers, 2022).
- *Performance Metrics:* PBEE 2 valuta i costi di riparazione, downtime, fatalità e funzionalità oltre alla sicurezza strutturale (FEMA, 2012).
- *Decisioni-Making:* PBEE 2 fornisce informazioni utilizzabili per il processo decisionale informato sul rischio, andando oltre la conformità basata su codice di PBEe 1 (Center, 2010).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 72.2: Confronto tra PBEE 1 e PBEe 2

Aspetti	**PBEE 1**	**PBEE 2**
Metodologia	Determinazione, prescrittiva	Probabilistico, multidisciplinare (Center, 2010)
Passi analitici	Integrazione implicita dei rischi, della domanda e del danno	Quadro modulare: analisi di rischio, strutturali, danni e perdite (FEMA, 2012)
Ambito	Solo sistemi strutturali	Sistemi strutturali e non strutturali, impatti sociali ed economici (American Society of Civil Engineers, 2017)
Mozione di terra	Descrizioni di pericolo semplificate	Analisi probabilistica del rischio sismico (PSHA), selezione site-specific (Civil Engineers, 2022)
Misurazioni di prestazione	Sicurezza strutturale (ad esempio, sicurezza della vita)	Sicurezza strutturale, costi di riparazione, tempi di fermo, fatalità, funzionalità (FEMA, 2012)
Decisioni	Conformità basata sul codice	Decisioni orientate al rischio e alle parti interessate (Center, 2010)

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

72.1.4 Procedura per l'attuazione del PBEE

15 Dopo aver esplorato i quattro componenti fondamentali di PBEE – hazard, risposta strutturale, danni e perdite – dal basso verso l'alto, ora descriviamo la sequenza completa dei passaggi necessari per implementare una valutazione dell'ingegneria del terremoto basata sulle prestazioni (PBEE). Questo punto di vista procedurale top-down è particolarmente utile per gli ingegneri e analisti che applicano PBEE in pratica.

16 Il processo consiste in una serie di analisi nidificate, che vanno dal rischio sismico alle variabili decisionali (DV), e incorporano le incertezze ad ogni passo.

1. Definire obiettivi di Facility e Performance:
    - Caratterizzare la struttura e la sua posizione, occupazione e uso.
    - Identificare le priorità degli stakeholder (ad esempio, sicurezza della vita, continuità funzionale, limiti di costo di riparazione, soglie di downtime).
    - Selezionare le variabili di decisione appropriate (ad esempio, perdite, costi, tempo per il recupero).
2. Eseguire l'analisi dei rischi sismici probabilistici (PSHA), chapter 67:
    - Sviluppare curve di rischio per il movimento terra specifiche del sito per misure di intensità selezionate (IM), accelerazione tipicamente spettrale al periodo fondamentale.
    - Selezionare movimenti di terra rappresentativi per diversi periodi di ritorno o livelli di rischio (ad esempio, 10%, 2%, 0.5% in 50 anni).
3. Condurre analisi strutturali ai parametri di domanda di ingegneria dei processi di deonizzazione (EDPs), chapter 69:
    - Costruisci un modello non lineare della struttura (o utilizzi modelli esistenti).
    - Eseguire analisi dinamiche non lineari o analisi di storia della risposta sotto determinati movimenti terrestri.
    - Estrarre gli EDP come la deriva interstoria, l'accelerazione del pavimento e la deformazione dei componenti.
    - Stima le distribuzioni condizionali della probabilità $p(\text{EDP}|\text{IM})$.
4. Esegui l'analisi dei danni, chapter 70:
    - Mappa EDPs a misure di danno (DM) per componenti strutturali e non strutturali.
    - Utilizzare funzioni di fragilità o relazioni empiriche per valutare $p(\text{DM}|\text{EDP})$.
    - Account per soglie specifiche dei componenti e funzionalità post-evento.
5. Esegui l'analisi della perdita, chapter 71:

COPIA DI REVISIONE

- Mappa DMs a Decision Variables (DV) come perdite, costi di riparazione e tempi di fermo.
- Valutare $p(\text{DV}\,|\,\text{DM})$ utilizzando modelli di perdita o funzioni di recupero.
- Aggregare le perdite attraverso i componenti per ottenere metriche di perdita totale attesa.

6. Integrare Across All Uncertainties:

   - Eseguire l'integrazione probabilistica attraverso IM, EDP, DM e DV utilizzando il teorema di probabilità totale:

$$g[\text{DV}] = \int\int\int p[\text{DV}|\text{DM}]\, p[\text{DM}|\text{EDP}]\, p[\text{EDP}|\text{IM}]\, g[\text{IM}]\, d\text{IM}\, d\text{EDP}\, d\text{DM}$$

   - Utilizzare la simulazione Monte Carlo o l'integrazione numerica quando non sono disponibili espressioni di forma chiusa.

7. Risultati di report e interpreti:

   - Risultati attuali come la perdita annuale prevista (EAL), le curve di superamento della perdita e le conseguenze basate sullo scenario.
   - Utilizzare i risultati per informare la mitigazione del rischio, le decisioni di progettazione, la priorità retrofit o la comunicazione degli stakeholder.

[17] Questa sequenza procedurale fornisce una roadmap pratica per l'applicazione di PBEE sia nella progettazione che nella valutazione. Mentre ogni passo può essere sviluppato con diversi livelli di dettaglio e sofisticazione, il quadro integrato assicura che le prestazioni siano misurate in termini di conseguenze che riguardano la società.

72.2 Da risposta a danno: Curve di fragilità

[18] Il framework PBEE delineato nella sezione precedente collega l'ingresso sismico a variabili decisionali significative attraverso una catena di relazioni condizionali: misure di intensità (IM), parametri della domanda di ingegneria (EDPs), misure di danno (DM) e variabili decisionali (DV). Mentre l'analisi strutturale produce EDP come la deriva interstoria o accelerazioni del pavimento, il processo decisionale richiede informazioni sui danni e le sue conseguenze.

[19] Il ruolo di questo divario, tra la risposta strutturale e i danni fisici, è quello del *curve di fragilità*. Queste curve quantificano la probabilità che un componente strutturale o non strutturale superi uno stato di danno specificato, dato un certo livello di domanda sismica

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

(tipicamente un EDP). In quanto tali, servono come collegamento probabilistico tra analisi strutturale non lineare e modellazione di danni/perdita in PBEE.

20 La funzione di fragilità è centrale per PBEE, in particolare nel formalizzare chap: regione della fiducia in caso di danno e progressione, consente un passaggio da controlli deterministici a una descrizione probabilistica delle prestazioni strutturali. Le seguenti sezioni presentano definizioni, distinzioni, metodi di modellazione e il loro ruolo nell'ambito più ampio del PBEE.

72.2.1 Fondamenti e definizioni

21 A *curva di fragilità* rappresenta la probabilità condizionale che un sistema o componente strutturale superi uno stato limite particolare (LS) in funzione di una *misura di intensità (IM)*, come l'accelerazione spettrale (Sa) o l'accelerazione del terreno di picco (PGA):

$$P[\text{LS}|\text{IM} = im]$$

22 Più formalmente, la fragilità può essere espressa come:

$$P[D \geq C_{\text{LS}}|\text{IM} = im] = P\left[\frac{D}{C_{\text{LS}}} \geq 1 \mid \text{IM} = im\right]$$

dove D è la domanda e C_{LS} la soglia di capacità per lo stato limite.

23 In PBEE, la fragilità è spesso espressa a livello EDP-to-DM:

$$P[\text{DM} \geq dm \mid \text{EDP} = edp]$$

Questa forma riflette come la fragilità collega la risposta strutturale ai danni attesi.

Terminologia: Fragilità vs. Vulnerabilità contro Hazard

- *F*ragilità quantifica la probabilità di superare uno stato dannoso data domanda.
- *V*ulnerabilità quantifica quanto previsto *perdite* (ad esempio, costo, inattività, perdite) dato pericolo.
- *C*urve di pericolo quantificare la frequenza di superamento dei valori IM (uscita PSHA).

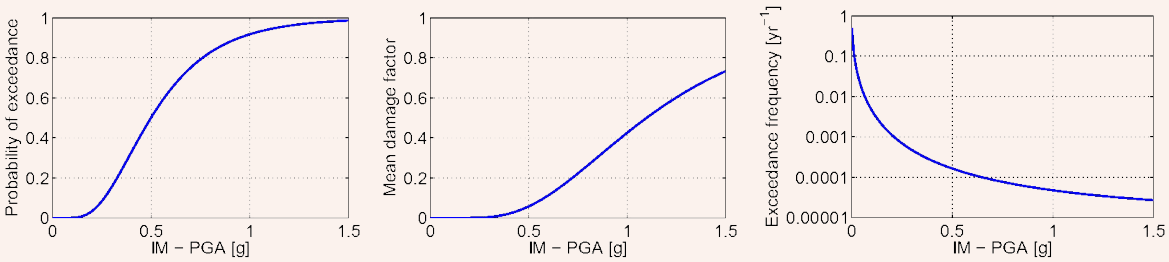
24 Questi tre elementi insieme sostengono la valutazione del rischio e la stima della perdita. Figura 72.4 illustra la distinzione.

72.2.2 Sviluppo di curve di fragilità

Fonti di dati Fragilità

- Empirical: Osservazioni post-terremoto; reali ma limitate.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE



(a) Curva della fragilità (b) Curva di vulnerabilità (c) Curva pericolosa

Figura 72.4: Confronto delle curve sismiche, di vulnerabilità e di pericolo

- Analitico: simulazioni non lineari di storia del tempo (IDA, MSA).
- Euristica: Opinione esperto; usato quando i dati sono scarse.
- Sperimentale: Test di laboratorio; raro a causa del costo.
- Ibrido: combina dati empirici e analitici.

Gestione del Collapse e delle risposte estreme

25 Se si osserva il collasso o l'instabilità numerica durante le simulazioni, la fragilità dovrebbe essere riformulata per tener conto di tali eventi:

$$P[EDP \geq edp|IM] = P[EDP \geq edp|IM, \text{NoCollapse}](1-P[\text{Collapse}|IM])+P[\text{Collapse}|IM]$$

Stati di danni singoli vs. multipli

26 La fragilità può essere espressa su una serie di stati limite (LS_i), ciascuno corrispondente ad uno stato di danno (DS_i). Quando modellato sequenzialiamente:

$$P[\text{DS}_i|IM] = P[\text{LS}_i|IM] - P[\text{LS}_{i+1}|IM]$$

27 In alternativa, in sistemi paralleli:

$$P[\text{DS}_i|IM] = P[\text{LS}_1|IM] \cdot P[\text{DS}_i|\text{LS}_1]$$

72.2.3 Rappresentanze matematiche

Modello lognormale (basato sull'IM)

$$P[\text{LS}|IM = im] = \Phi\left(\frac{\ln(im) - \ln(\eta)}{\beta}\right)$$

dove η è la capacità mediana e β la dispersione.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Modelli lineari generalizzati (GLM)

28 I GLM esprimono la fragilità utilizzando le funzioni di collegamento (ad esempio, probit, logit, log-log complementare).

$$\text{Logit: } P = \frac{e^{\theta_0+\theta_1 IM}}{1+e^{\theta_0+\theta_1 IM}}$$

29 I GLM offrono flessibilità in forma funzionale e possono essere utilizzati per valutare il modello adatto a diverse rappresentazioni.

72.2.4 Funzione continua *vs.* Matrice discreta

30 I risultati dell'analisi della fragilità possono anche essere classificati in base a come sono rappresentati: *funzione continua* (cioè, una curva di fragilità) o come *tavolo di valori discreti* conosciuto come *matrice di probabilità di danno (DPM)* (Erberik, 2015).

31 Le curve di fragilità possono essere classificate in base al numero degli stati limite che rappresentano:

Single: Rappresenta la probabilità di superare uno stato limite specifico (LS) o una soglia di un parametro della domanda ingegneristica (EDP).

Più: Un insieme di curve di fragilità corrispondenti a diversi stati limite può essere utilizzato per descrivere il profilo completo dello stato dei danni di un sistema strutturale.

32 Stati di limite (LS) (vedere Sezione 70.2) definire le soglie tra diversi stati di danno (DS), che possono essere descritti qualitativamente (ad esempio, lieve, moderata, estesa) o quantitativamente utilizzando un indice di danno(DI). N_{LS} Stati limite, ci sono $N_{\text{DS}} = N_{\text{LS}}+1$ corrispondenti stati di danno. Stato di danno 0 (DS_0) rappresenta la condizione non danneggiata.

33 Gli stati di danno possono essere definiti in due modi distinti:

Sequenziale: (i.e., ordinato) Il sistema deve progredire DS_i prima di raggiungere DS_{i+1}. La probabilità di essere in un DS specifico è:

$$P[\text{DS} = ds_i \mid \text{IM} = im] = \begin{cases} 1 - P[\text{LS}_1 \mid \text{IM} = im], & i = 0 \\ P[\text{LS}_i \mid \text{IM} = im] - P[\text{LS}_{i+1} \mid \text{IM} = im], & 1 \le i < N_{\text{DS}} \\ P[\text{LS}_i \mid \text{IM} = im], & i = N_{\text{DS}} \end{cases} \tag{72.2}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Simultaneous: (cioè paralleli) Ogni stato di danno viene valutato indipendentemente:

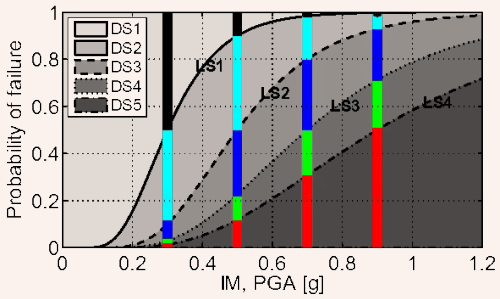
$$P[\text{DS} = ds_i \mid \text{IM} = im] = \begin{cases} 1 - P[\text{LS}_1 \mid \text{IM} = im], & i = 0 \\ P[\text{LS}_1 \mid \text{IM} = im] \cdot P[\text{DS} = ds_i \mid \text{LS}_1], & 1 \leq i \leq N_{\text{DS}} \end{cases} \tag{72.3}$$

34 Si noti che nel caso di una valutazione simultanea, la somma delle probabilità per tutti gli stati di danno può superare l'1,0:

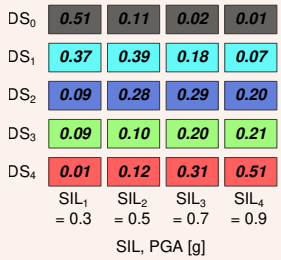
$$\sum_{i=1}^{N_{\text{DS}}} P[\text{DS} = ds_i \mid \text{LS}_1] > 1.0$$

Indice[p2]Danni! Matrice di probabilità

35 Il *M*atrice di probabilità di danno (DPM): è una matrice che mostra valori discreti delle probabilità DS a livelli di intensità sismica selezionati (SIL), ogni colonna rappresenta un livello IM discreto, mentre ciascuna riga corrisponde ad uno stato specifico di danno. Sebbene ogni curva di fragilità sia una funzione continua, il DPM rappresenta un campionamento discreto di queste funzioni a valori fissi IM.



(a) Curva della fragilità



(b) Matrice di probabilità danni

Figura 72.5: Rapporto tra curva di fragilità e matrice probabilità danno

Curva della fragilità vs. superficie

36 A *curva di fragilità* si riferisce alla probabilità di superare uno stato danno a un *singolo* IM. A superficie di fragilità, invece, considera *multipli* variabili, Fig. 72.6:

- *Vector IMs:* Fragilità in funzione di due o più IM, ad esempio, $P[\text{LS}|IM_1, IM_2]$
- *Fragilità dipendente dal tempo:* Invecchiamento o deterioramento modellato attraverso $P[\text{LS}(t)|IM]$

COPIA DI REVISIONE

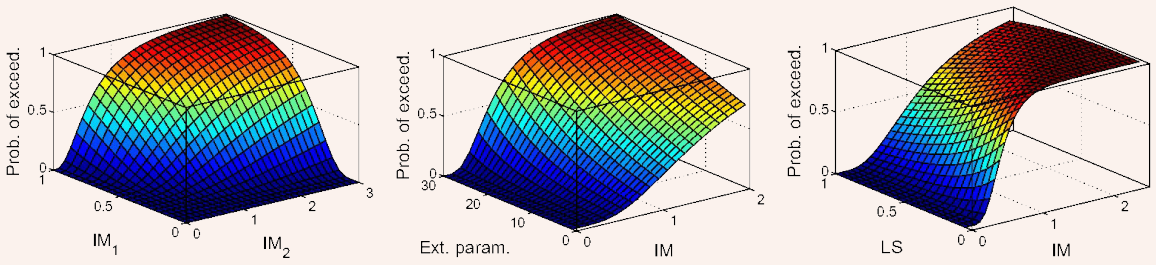
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 72.3: Confronto delle Rappresentanze di Fragilità Bassa e Discreta

Caratteristica	Curva della fragilità (continua)	Matrice di probabilità di danno (discorsi)
Rappresentanza	Funzione di liscio (ad esempio, CDF lognormal)	Tabella delle probabilità a livelli discreti di IM
Risoluzione dei dati	Infinito all'interno del dominio	Limitati a punti campionati
Usabilità	Il meglio per le strutture analitiche	Utile per le valutazioni basate sugli scenari
Formato di stoccaggio	Parametri di funzione (ad esempio, μ, β)	Matrice di valori
Interpretazione	Funzionale	Tabula

- *Fragilità di gamma Limit-State:* Supera la probabilità su un continuum di stati limite.

[37] Queste generalizzazioni sono particolarmente rilevanti per sistemi complessi come le dighe o gli impianti nucleari.



(a) Due parametri IM (b) Parametro IM + Esterno (c) Variazione IM + LS

Figura 72.6: Diversi aspetti delle superfici sismiche di fragilità

72.3 Ruolo nel quadro PBEE

[38] Nel contesto di Performance-Based Earthquake Engineering (PBEE), le funzioni di fragilità servono come collegamenti essenziali in una catena di relazioni condizionali che quantificano il flusso di chap: regione della fiducia dal movimento di terra alla risposta strutturale, danni e in definitiva a metriche decisioni come perdita economica o perdite.

[39] Questa progressione probabilistica, Fig. 72.3, è formalizzato nel quadro PEER PBEE, che calcola la frequenza media annuale di superare una determinata variabile decisionale (DV)

COPIA DI REVISIONE

utilizzando il teorema totale delle probabilità. La formulazione del nucleo integra misure di intensità (IM), parametri della domanda ingegneristica (EDP) e misure di danno (DM) per produrre il tasso superiore a una soglia specifica DV:

$$\lambda_{\text{DV}}(dv) = \int_{dm} \int_{edp} \int_{im} P[\text{DV} \geq dv \mid \text{DM} = dm] \times dP[\text{DM} \geq dm \mid \text{EDP} = edp]\, dP[\text{EDP} \geq edp \mid \text{IM} = im]\, |\text{d}\lambda_{\text{IM}}(im)|$$

40 In questa formulazione, la fragilità serve come il collegamento chiave tra risposta strutturale e danni o perdite derivanti. $P[\text{EDP} \geq edp \mid \text{IM} = im]$ — a volte indicato come fragilità della domanda (Mackie e Stojadinovic, 2005) — quantificare la probabilità che una domanda strutturale superi una soglia specificata per un determinato livello di intensità sismica, che riflette l'uso tradizionale della fragilità nelle dinamiche strutturali.

41 Nell'ambito del quadro PEER PBEE, tuttavia, la fragilità è più strettamente definita come la probabilità condizionale di superare una particolare misura dannosa data una risposta strutturale nota:

$$\text{Fragility} = P[\text{DM} \geq dm \mid \text{EDP} = edp]$$

Questa definizione cattura la transizione dalla risposta fisica allo stato di danno e rappresenta un passo probabile chiave nella metodologia PBEE (Porter, Kennedy e Bachman, 2007; Gunay e Mosalam, 2013). In particolare, entrambe le Equazioni 72.2 e 72.3, che descrivono le probabilità di stato di danno sequenziali e simultanee, può essere riformulato in termini di questa espressione della fragilità.

42 Complessivamente, le funzioni di fragilità costituiscono la spina dorsale della trasformazione del rischio sismico in metriche di performance attuabili.

72.4 Ex 72.1: Esempio completo PBEE

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Questo esempio presenta un esempio numerico di Performance-Based Earthquake Engineering (PBEE), che copre tutti e quattro i principali componenti:

- *Analisi dei rischi sismici* - stima delle probabilità di superamento del moto terra.
- *Analisi strutturale* - Computazione della risposta strutturale sotto carichi sismici.
- *Analisi dei danni* - Valutazione dei danni fisici in base alla risposta.

COPIA DI REVISIONE

- *Analisi della perdita* - Valutazione delle perdite economiche, dei tempi di fermo e degli incidenti.

In questo studio sono fatte le seguenti ipotesi:

- Il sito si trova nel centro di Los Angeles.
- L'edificio è un telaio di momento in acciaio a tre piani.
- Il periodo fondamentale dell'edificio è $T_1 = 1.2$ - Si'.
- L'intensità del movimento terra è misurata in accelerazione spettrale $S_a(T_1)$.
- Engineering Demand Parameter (EDP) è il rapporto massimo trasversale θ.

Analisi dei rischi sismici

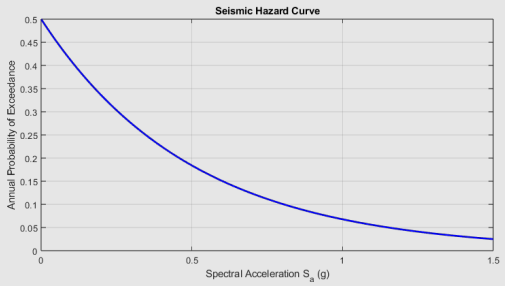
La probabilità di superare un'accelerazione spettrale S_a è modellato come:

$$\lambda(S_a) = Ae^{-BS_a}$$

dove i parametri specifici del sito sono:

- $A = 0.5$ (fattore di aumento)
- $B = 2.0$ (tasso di entrata)

La curva di rischio calcolata, basata su questo modello, è sotto.



Analisi strutturale: curva IDA

La risposta strutturale è caratterizzata dal rapporto interstory deriva θ, approssimato come:

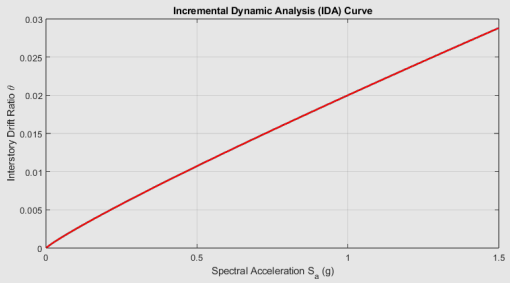
$$\theta = C_1 S_a^{C_2}$$

dove le costanti empiriche sono:

- $C_1 = 0.02$
- $C_2 = 0.9$

Questa relazione deriva dall'analisi dinamica Incrementale (IDA).

COPIA DI REVISIONE



Analisi danni: Curve di fragilità

Le curve di fragilità definiscono la probabilità di superare vari stati di danno basati sul rapporto deriva θ:

$$P(D_i|\theta) = \Phi\left(\frac{\ln(\theta) - \ln(\theta_{50})}{\beta}\right)$$

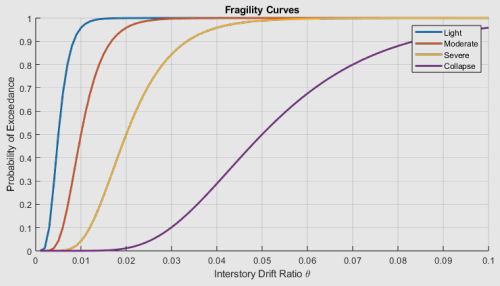
dove:

- θ_{50} è la capacità mediana di deriva.
- $\beta = 0.4$ rappresenta la dispersione (chap: regione della fiducia fattore).

I quattro stati di danno considerati sono:

Stato di danno	Rapporto di mediazione θ_{50}	Dispersione β
Danni leggeri	0.005 (0.5%)	0.4
Danni moderati	0.01 (1.0%)	0.4
Danni gravi	0.02 (2.0%)	0.4
Colpisci	0.05 (5.0%)	0.4

Le curve di fragilità sono mostrate qui sotto



Stime di perdita

La perdita prevista è calcolata come:

$$\mathbb{E}[\text{Loss}] = \sum P(D_i) \times \text{Loss}_i$$

dove le probabilità di danno e le conseguenze della perdita sono:

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Stato di danno	Costo di riparazione ($M)	Tempo di inattività (giorni)	Le vittime (%)
Luce	0.1	2	0.0
Moderatore	0.5	14	0.01
Severe	2.0	60	0.1
Colpisci	10.0	300	5.0

Utilizzando le probabilità di danno calcolate:

- Costo di riparazione previsto: $0.59M.
- Tempo di inattività previsto: 10,4 giorni.
- Scadenze previste: 0.01%.

Stime di perdita

La perdita prevista è calcolata come:

$$\mathbb{E}[\text{Loss}] = \sum P(D_i) \times \text{Loss}_i$$

La probabilità di superare diversi stati di danno è stata utilizzata per assegnare perdite a ciascun campione. Le distribuzioni di probabilità per ogni stato di danno sono state utilizzate per introdurre casualità nei calcoli.

Gli stati di danno e le probabilità associate sono state definite come segue:

Stato di danno	Probabilità	Assegnati Losse
Danni leggeri	90%	Costo di riparazione: $0.1M, Tempo di inattività: 2 giorni, Casualties: 0.0%
Danni moderati	60%	Costo di riparazione: $0.5M, Tempo di inattività: 14 giorni, Casualties: 0.01%
Danni gravi	10%	Costo di riparazione: $2.0M, Tempo di inattività: 60 giorni, Casualties: 0.1%
Colpisci	0%	Costo di riparazione: $10.0M, Tempo di inattività: 300 giorni, Casualties: 5.0%

Per introdurre la variabilità, le distribuzioni normali sono state applicate alle perdite con deviazioni standard stabilite a 10% dei valori medi.

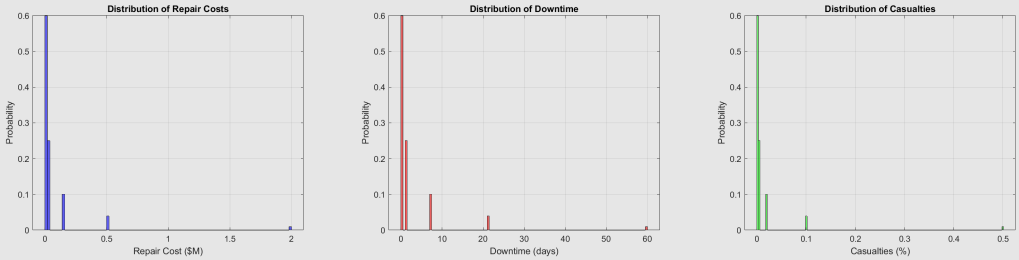
I valori previsti ottenuti dalla simulazione sono riassunti di seguito.

Metrico	Valore atteso (Mean)	Deviazione standard
Costo di riparazione previsto	$1.08M	$0.25M
Previsione dei tempi di fermo	30.76 giorni	8,5 giorni
Attesi casualità	0.48%	0.12%

I seguenti istogrammi mostrano la distribuzione dei costi di riparazione e i tempi di inattività ottenuti dalla simulazione Monte Carlo.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



dove le probabilità di danno e le conseguenze della perdita sono riportate di seguito.

Stato di danno	Costo di riparazione ($M)	Tempo di inattività (giorni)	Le vittime (%)
Luce	0.1	2	0.0
Moderatore	0.5	14	0.01
Severe	2.0	60	0.1
Colpisci	10.0	300	5.0

Osservazione

Nell'analisi della perdita di PBEE, è possibile che la deviazione standard sia maggiore del mezzo. Ciò si verifica a causa di diversi motivi legati alla natura della modellazione probabilistica nella stima delle perdite.

Distribuzioni a destra: Le distribuzioni perse in PBEE spesso seguono le distrizioni a coda pesante e destra come la distribuzione lognormal o Pareto, che possono presentare una grande varianza rispetto alla media.

Risposte strutturali non lineari: I modelli di danno e perdita spesso mostrano un'elevata variabilità a causa della chap: regione della fiducia in caratteristiche di movimento terra, risposta strutturale e funzioni fragilità. La presenza di perdite rare ma estreme può aumentare significativamente la deviazione standard.

Multiplicative chap: regione della fiducia in Modelli di costo: I modelli di costo di riparazione, che vengono utilizzati nella stima della perdita, spesso combinano più incertezze, tra cui il tempo di riparazione e i costi del lavoro, i costi materiali e le perdite economiche indirette. Quando questi sono modellati con casualità moltiplicativa (ad esempio, utilizzando distribuzioni lognormali), il coefficiente di variazione (COV) può essere grande.

Simulazioni Monte Carlo e comportamento pesante: Quando il campionamento di Monte Carlo viene utilizzato per la stima delle perdite, le realizzazioni estreme (ad esempio, il collasso strutturale totale che porta alla perdita catastrofica) possono aumentare la deviazione standard rispetto al mezzo.

Per una distribuzione lognormale con parametri μ_X e σ_X, la deviazione media e standard sono date da:

$$E[X] = e^{\mu_X + \frac{1}{2}\sigma_X^2}$$

$$\text{Std}(X) = e^{\mu_X + \frac{1}{2}\sigma_X^2}\sqrt{e^{\sigma_X^2} - 1}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

La deviazione standard supera il mezzo quando:

$$\sqrt{e^{\sigma_X^2} - 1} > 1 \tag{72.4}$$

che semplifica a:

$$\sigma_X^2 > \ln(2) \approx 0.693 \tag{72.5}$$

A PBEE, chap: regione della fiducia in danni e modelli di costo spesso porta a σ_X^2 essere più grande di 1, rendendo $\sigma > \mu$ un evento comune.

MATLAB®codice per questo esempio è dato in §I.7.2.

72.5 Migliatoni storici e documenti fondativi

43 Lo sviluppo di Performance-Based Earthquake Engineering (PBEE) è stato plasmato da una serie di documenti fondamentali della FEMA, dell'ASCE, del PEER e dell'ATC. Queste opere hanno introdotto concetti e metodologie chiave che ora formano la spina dorsale della moderna valutazione del rischio sismico e progettazione, Tabella 72.4.

- *ATC-13 (1985)* — Fornito di fragilità e stime sulla perdita basate su esperti in vari tipi di costruzione, ponendo le basi per l'analisi della vulnerabilità (ATC-13, 1985).
- *FEMA 273/274 (1997)* — Obiettivi di performance introdotti legati ai livelli probabilistici di rischio e a livelli di prestazioni come occupazione immediata, sicurezza della vita e prevenzione del tracollo (FEMA, 1997b; FEMA, 1997a).
- *FEMA 356 (2000)* — Una sintesi prestandard FEMA 273/274 in un formato ingegnere, che forma successivamente la base per ASCE 41 (FEMA-356, 2000).
- *PEER Framework (2003)* — Il Pacific Earthquake Engineering Research Center ha formalizzato la metodologia PBEE-2, introducendo la catena IM–EDP-DM-DV e l'integrazione probabilistica (Porter, 2003; Center, 2010).
- *FEMA P-58 (2012–2021)* — Offrono un quadro probabilistico completo per la valutazione delle prestazioni di singoli edifici, tra cui funzionalità, downtime e stima della perdita (FEMA, 2012).
- *ASCE 7 e ASCE 41* — progettazione e valutazione basati sulle prestazioni incorporati nei codici di ingegneria strutturale mainstream (Civil Engineers, 2022; American Society of Civil Engineers, 2017).

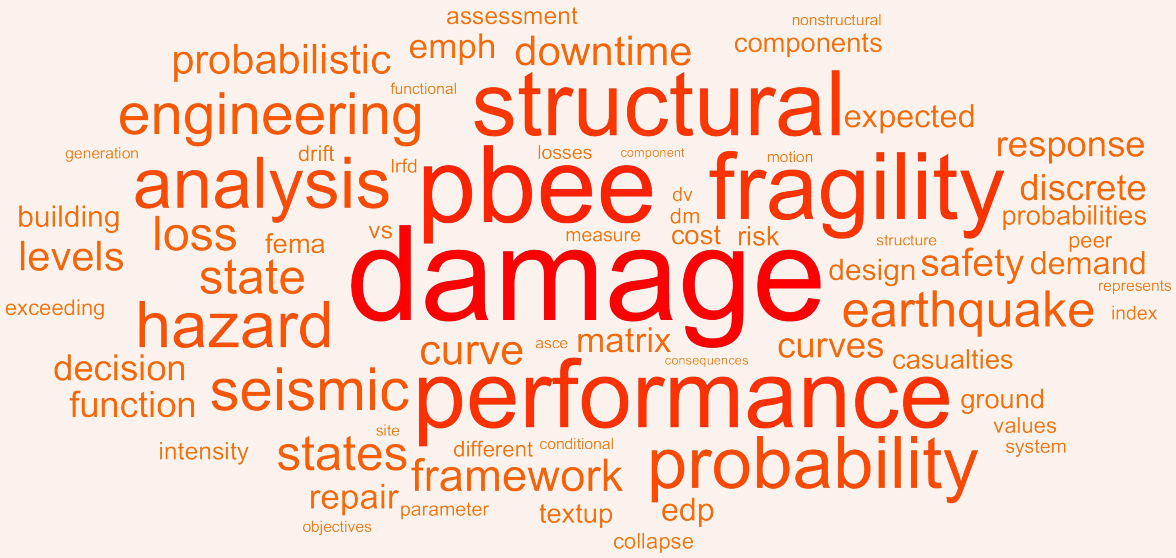
44 Questi documenti, insieme a metodologie in evoluzione come la modellazione della perdita basata sulla fragilità e metriche di performance basate sul tempo, hanno stabilito PBEE come lo stato-dei-pratico per l'ingegneria sismica con il rischio informato.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella 72.4: Documenti chiave nello sviluppo storico di Performance-Based Earthquake Engineering (PBEE).

Anno	Documento	Agenzia	Contributo chiave
1985	ATC-13	ATC	Frattilità e stime di perdita basate su esperti
1997	FEMA 273/274	FEMA	Obiettivi di performance legati ai livelli di rischio e agli stati di danno
2000	FEMA 356	FEMA	Prestandard che porta all'ASCE 41 per gli edifici esistenti
2003	PEER Framework	PE	Catena IM–EDP-DM-DV; modellazione delle prestazioni probabilistiche
2012–21	FEMA P-58	FEMA	Probabilistic perdita, downtime e funzionalità di costruzione
2022	ASCE 7	ASCE	Moderni standard di carico con disposizioni basate sulle prestazioni
2023	ASCE 41	ASCE	Valutazione sismica aggiornata degli edifici esistenti



COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

APPENDICI

COPIA DI REVISIONE

Appendice A

Unità

A.1 Unità SI 2409
A.2 Prefissi metrici e moltiplicatori . . . 2410
A.3 Unità & fattori di conversione 2410
A.4 Riassunto della forza, della lunghezza, del lavoro e dello stress in varie unità metriche 2411
A.5 Conversione di quantità fisiche da unità metriche a imperiali 2411

A.1 Unità SI

Quantità	Dimensioni		Unità
	Tecnica	Unità di base	Definizione
Lunghezza	L	L	m
Tempo	t	t	s
Massa	M	M	kg
Temperatura	T	T	K
Densità di massa (ρ)	$M.L^{-3}$	$M.L^{-3}$	Kgm^{-3}
Forza (F)	F	$M.L.t^{-2}$	N
Tensione	F.L−2	$M.L^{-3}.t^{-2}$	MPa

COPIA DI REVISIONE

A.2 Prefissi metrici e moltiplicatori

Prefisso	Abbreviazione	Multiplo
tera	T	10^{12}
giga	G	10^{9}
mega-	M	10^{6}
chilo	k	10^{3}
ecto	h	10^{2}
deca	da	10
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
Milli.	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}

A.3 Unità & fattori di conversione

Lunghezza	m (metro)	1 pollice = 0,0254 m	1 m = 39,37 pollici
Forza	N (Newton)	1 lb = 4.4482 N	1 N = 0.22481 lb
Massa	kg (chilogrammo)	1 lbm = 0.45359 kg	1 kg=2.2046 lb
Densità	kg/m^3	1 lbm/ft^3 = 16.018 kg/m^3	1 kg/m^3=0.062428 lbm/ft^3
Temperatura	T	T ^oF=[(9/5)T^{o}C+32]	
Accelerazione	m/s^2	1 in/s^2 = 0.0254 m/s^2	
Rigidezza	N/m	1 lb/in = 175.1 N/m	
Stress	Pa = N/m^2	1 psi = 6,894.8 Pa	1 MPa = 145.04 psi
Lavoro	J=N-m	1 ft-lbf= 1.3558 J	1 J = 0.73756 ft-lbf

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

A.4 Riassunto della forza, della lunghezza, del lavoro e dello stress in varie unità metriche

Forza	Lunghezza	Lavoro	Stress
F	L	FL	FL-2
N	m	J	Pa
	mm	mJ	MPa
kN	m	kJ	KPa
	mm	J	GPa
MN	m	MJ	MPa
	mm	kJ	T.
Pa	m	N	
MPa	mm	N	
	m	MN	

A.5 Conversione di quantità fisiche da unità metriche a imperiali

f'_c			f'_t		E	
p)	kg/cm^2	Mpa	p)	Mpa	- Si'.	Gpa
2,000	141	13.8	200	1.38	2,500	17.2
2,500	176	17.2	250	1.72	3,000	20.7
3,000	211	20.7	300	2.07	3,500	24.1
3,500	246	24.1	350	2.41	4,000	27.6
4,000	281	27.6	400	2.76	4,500	31.0
4,500	316	31.0	450	3.10	5,000	34.5
5,000	352	34.5	500	3.45	5,500	37.9
5,500	387	37.9	550	3.79	6,000	41.4
6,000	422	41.4	600	4.14	6,500	44.8
6,500	457	44.8	650	4.48	7,000	48.3

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Appendice B

Carichi e progettazione basata su dati empirici

Il Capitolo 18 dovrebbe essere letto prima di questa appendice.

Abstract

Questa appendice fornisce dati empirici e indicazioni di progettazione per carichi strutturali, completando i capitoli principali sull'analisi strutturale e la progettazione. Organizzato per categoria di carico—carica carichi (auto-peso), carichi vivi (occupazione e uso), carichi ambientali (vento, neve, terremoti) e carichi speciali — l'appendice tabula pesi unità materiale, tipici carichi del pavimento e del tetto, e fattori di carico per vari tipi di costruzione e occupazioni. Le tabelle di riferimento danno valori pratici per alluminio, mattoni, cemento, acciaio e legno; specifiche per i sistemi comuni del pavimento e costruzioni dei tetti; e guida sulle combinazioni di carico per gli stati limite ultimo e di manutenzione. Questi dati empirici e coefficienti supportano i calcoli di progettazione e le casse di carico utilizzate durante il testo.

B.1 Carico morto 2413
B.2 Carico del vento 2413
B.2.1 Ex B.1: Carico del vento . . . 2415
B.3 Terremoti 2416
B.3.1 Ex B.2: Caricamento del terremoto su una cornice 2425
B.3.2 Ex B.3: Carico di terremoto su un edificio alto 2426
B.4 Caricamenti del ponte 2427
B.5 Combinazioni di carico 2428
B.6 Riduzione del carico vivo 2429
B.6.1 Ex B.4: Riduzione del carico vivo I 2430
B.6.2 Ex B.5: Riduzione del carico vivo II 2430
B.7 Posizionamento del carico 2431

COPIA DI REVISIONE

Materiale	lb/ft^3	kN/m^3
Alluminio	173	27.2
Mattone	120	18.9
Concretamente	145	33.8
Acciaio inossidabile	490	77.0
Legno (pina)	40	6.3

Tabella B.1: Peso unitario dei materiali

Materiale	lb/ft^2
Legname	40-50
Acciaio inossidabile	50-80
Calcets rinforzato	100-150

Tabella B.2: Carico medio lordo morto negli edifici

B.1 Carico morto

B.2 Carico del vento

1 Fare riferimento prima a §18.2.2.1

2 Durante le tempeste, la velocità del vento può raggiungere valori fino a o superiori 150 miglia all'ora, che corrisponde ad una pressione dinamica q_s di circa 60 psf (alti come il carico medio verticale dell'occupazione in edifici).

3 La pressione del vento aumenta con altezza, Tabella B.5.

4 Il carico del vento causerà l'aspirazione sui lati verso il basso, Fig. B.1

5 Questa magnitudo deve essere modificata per spiegare la forma e l'ambiente di l'edificio. Così, la pressione di progettazione p (psf) è dato da

$$p = C_e C_q I q_s$$

La pressione è assunta per essere normale a tutte le pareti e tetti e

C_e **Pressione di velocità Coefficiente** rappresenta l'altezza, l'esposizione e il fattore di intestino. Essa rappresenta il fatto che la velocità del vento aumenta con altezza e quella dinamica carattere del flusso d'aria (cioè la pressione del vento non è costante), Tabella B.6.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

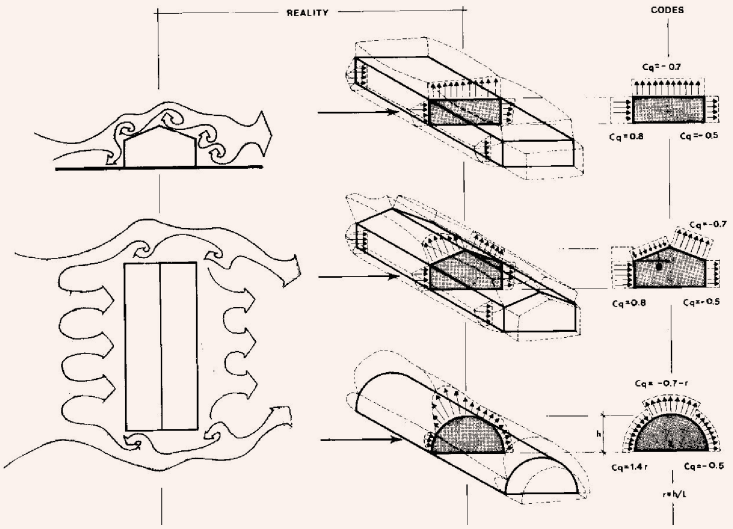


Figura B.1: Effetto del carico eolico sulle strutture (Schueller, 1996)

C_q **Pressione Coefficiente** è un fattore di forma che viene dato nella tabella B.7 per cornici a incastro.

I **Fattore di importazione** come indicato dalla tabella B.8. dove

I Servizi essenziali: Ospedali; stazioni di fuoco e polizia; Serbatoi; rifugi per veicoli di emergenza, attrezzature di produzione di energia standby; Strutture e apparecchiature nel governo. centri di comunicazione.

II Strutture pericolose: Strutture abitative, di sostegno o contenenti quantità sufficienti di sostanze tossiche o esplosive pericolose per la sicurezza del generale pubblico se rilasciato.

III Struttura occupazionale speciale: Strutture coperte la cui occupazione primaria è l'assemblea pubblica, capacità > 300 persone.
Edifici per le scuole attraverso centri secondari o diurni, capacità > 250 persone.
Edifici per college o scuole di istruzione degli adulti, capacità > 500 persone.
Strutture mediche con 50 o più pazienti residenti incapacitati, ma non inclusi sopra
Impianti di gialli e detenzione
Tutte le strutture con occupazione >5.000 persone.
Strutture e attrezzature nelle centrali elettriche ed altre utility pubbliche strutture non incluse sopra, e necessarie per il funzionamento continuo.

IV Struttura standard di occupazione: Tutte le strutture con occupazioni o funzioni non elencate sopra.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

6 Per la progettazione preliminare di edifici ordinari $C_e = 1.0$ e $C_q = 1.3$ può essere assunto, cedendo

$$p = (1.3).020256V^2 = .00333V^2 \tag{B.1}$$

che corrisponde ad una pressione di 21 psf per una velocità del vento di 80 mph, Fig. B.2, Tabella B.9.

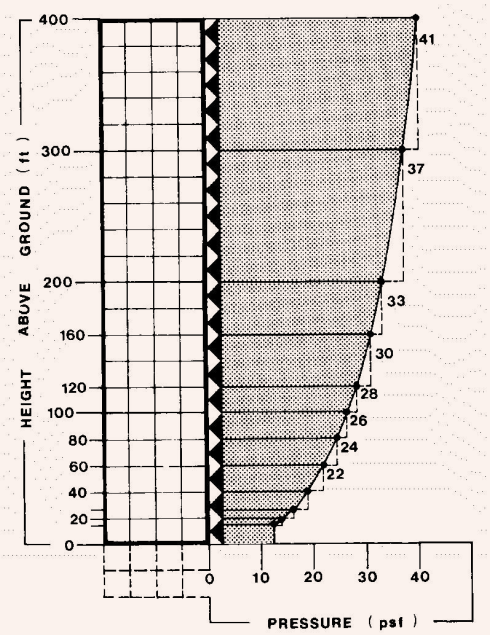


Figura B.2: Approssimativo design pressione del vento p per la forza eolica ordinaria resiste alle strutture edili

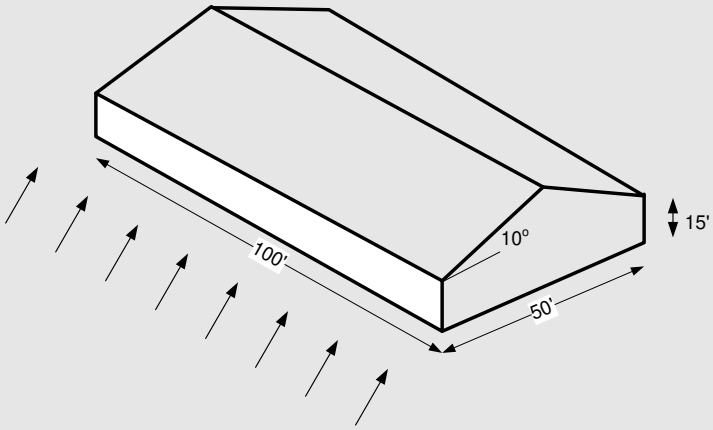
B.2.1 Ex B.1: Carico del vento

Determinare le forze eoliche sull'edificio mostrato sotto che è costruito in St Louis ed è circondato da alberi.

1. Da Fig. 18.3 la velocità massima del vento è St. Louis 70 mph, dal momento che l'edificio è protetto possiamo prendere $C_e = 0.7$, $I = 1.$. La pressione del vento di base è $q_s = 0.00256 \times (70)^2 = 12.54$ psf.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



2. Il pendio del tetto è 8:15=6.4:12 che dà $C_q = -0.7$ per entrambi i lati del vento e dell'alpeggio. Le pareti verticali hanno $C_q = 0.8$ per il lato vento e $C_q = -0.5$ per la vigliacca.
3. Così la pressione applicata sul tetto è $p = 0.7 \times (-0.7) \times 12.54 =$ -6.14 psf che è il tetto è sottoposto ad ascensore.
4. La parete a vinta, la pressione è $0.7 \times 0.8 \times 12.54 =$7.02 psf, e per la parete di coda $0.7 \times (-0.5) \times 12.54 =$-4.39 psf (suzione),
5. La direzione del vento può cambiare e e quindi ogni componente strutturale deve essere progettato per resistere a tutti i possibili combinazioni di carico.
6. Per grandi strutture che possono essere soggette a carichi di vento di grandi dimensioni, testare in un tunnel del vento della struttura stessa e dei suoi dintorni è spesso compiuto.

B.3 Terremoti

7 Gli edifici dovrebbero essere in grado di resistere

Sismi minori senza danni

Terremoti moderati senza danni strutturali, ma probabilmente con alcuni danni non strutturali

Grandi terremoti senza collasso ma forse con qualche danno strutturale così come danni non strutturali.

Questo è ottenuto attraverso un'analisi dinamica appropriata.

8 Per progetti preliminari o per piccoli strutture a *carico statico orizzontale equivalente* può essere determinato.

9 I carichi effettivi dipendono dai seguenti

1. Intensità dell'accelerazione del terreno (comprese le proprietà del suolo/roccio).

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

2. Proprietà dinamiche dell'edificio, come le sue forme di modalità e periodi di vibrazione e le sue caratteristiche smorzanti.
3. Messa dell'edificio.

10 Un fattore critico nella risposta dinamica di una struttura è periodo fondamentale della vibrazione della struttura (o prima modalità di vibrazione). Questo è il tempo necessario per un ciclo completo di movimento, Fig. B.3. Se il l'eccitazione del terremoto ha una frequenza vicino a quella dell'edificio, poi la risonanza può verificarsi, questo dovrebbe essere evitato.

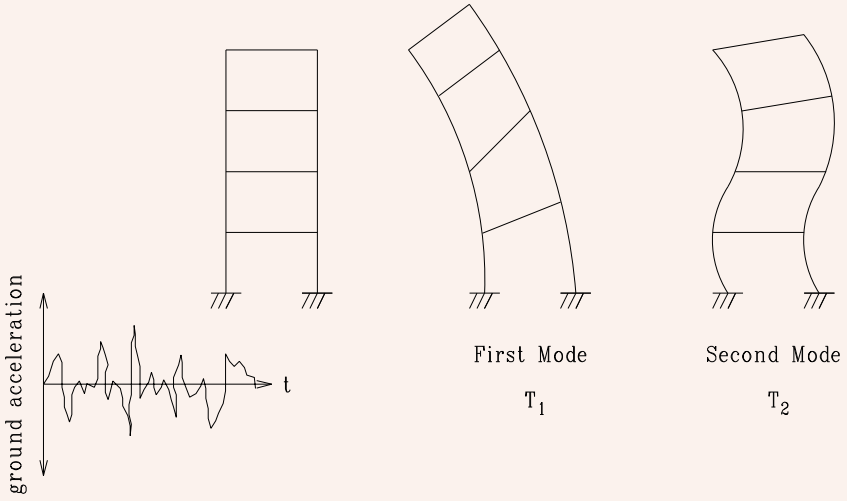


Figura B.3: Vibrazioni di un edificio

11 Il carico del terremoto si manifesta come una forza orizzontale a causa della (in primo luogo) forza orizzontale di inerzia ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$).

12 La forza orizzontale a ogni livello è calcolata come una porzione della forza di taglio base V

$$V = \frac{ZIC}{R_W}W$$

dove:

Z**: Fattore di zona:** da determinare a Fig. B.4 e Tabella B.10.

I**: Fattore di importazione:** che è stato dato dalla tabella B.8.

C**: Spettro di risposta del design** dato da

$$C = \frac{1.25S}{T^{2/3}} \leq 2.75$$

T è il periodo fondamentale di vibrazione dell'edificio in pochi secondi. Questo può

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

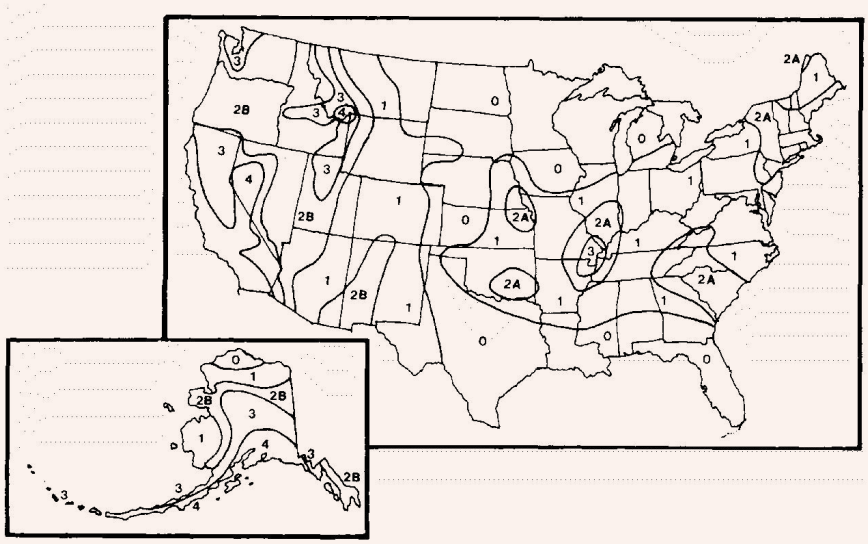


Figura B.4: Zone sismiche degli stati uniti, (ICBO, 1994)

essere determinato sia dall'analisi delle vibrazioni libere dell'edificio, o stimata dalla seguente formula empirica

$$T = C_t(h_n)^{3/4}$$

dove:
h_n è l'altezza dell'edificio sopra la base in ft.
e

C_t	0.035	telai resistenti a momento in acciaio
C_t	0.030	telai resistenti a momento in calcestruzzo armato e telai controventati eccentricamente
C_t	0.020	tutti gli altri edifici

S**: Coefficiente di sito** dato dalla tabella B.11 Nota che la maggior parte dei danni nel 1990? terremoto a San Francisco si è verificato nel porto turistico dove molte case sono state costruite su terreno morbido.

e

$$\frac{C}{R_W} \geq 0.075$$

R_W è dato dalla tabella B.12.

W **Caricamento** carico totale della struttura.

13 La forza orizzontale V è distribuito sopra l'altezza dell'edificio in due parti. Il primo (applicato solo se $T \geq 0.7$ sec.) è una forza concentrata F_1 pari a

$$F_t = 0.07TV \leq 0.25V \tag{B.2}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

viene applicato in cima all'edificio a causa di frusta. L'equilibrio della forza $V - F_t$ è distribuito come un triangolare carico in diminuzione a zero alla base.

14 Assumendo un peso del pavimento costante per ogni livello di piano, poi la forza agire su ciascuno è dato

$$F_x = \frac{(V - F_t)h_x}{h_1 + h_2 + \cdots + h_n} = \frac{(V - F_t)h_x}{\Sigma_{i=1}^{n} h_i} \tag{B.3}$$

dove h_i e h_n sono l'altezza in ft sopra la base a livello i, n or x rispettivamente

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Materiale	lb/ft^2
Ceilings	
Sistema sospeso del canale	1
Tegola in fibra acustica	1
Pavimenti	
Mazzo d'acciaio	2-10
- Cemento di cemento 1 dentro.	12
Linoleum 1/4 in.	1
Latifoglie	4
Tetti	
Rame o stagno	1-5
5 ply feltro e ghiaia	6
Asfalto di Shingles	3
piastrelle di argilla	9-14
Legno di guaina	3
Isolamento 1 in. versato al posto	2
Partizioni	
- Tiglio d'argilla 10 dentro.	40
Blocco di zingaro 5 dentro.	14
Borchie di legno 2x4 (12-16 in.c.)	2
Plaster 1 in cemento	10
Plaster 1 in gesso	5
Pareti	
Mattoni 12 in entrata.	120
Blocco di cemento Hollow (aggregato pesante)	
4 in.	30
8 in.	55
12 in.	80
Blocco di cemento Hollow (aggregato leggero)	
4 in.	21
8 in.	38
12 in.	55

Tabella B.3: Pesi dei materiali da costruzione

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Uso o occupazione	lb/ft^2
Aree di montaggio	50
Cornice, marche, balconi residenziali	60
Corridoi, scale	100
Garage	50
Edifici di ufficio	50
Residenziale	40
Stoccaggio	125-250

Tabella B.4: Minimo carico live distribuito uniformemente, (ICBO, 1994)

Zona di altitudine	Area della mappa del vento						
(in piedi)	20	25	30	35	40	45	50
<30	15	20	25	25	30	35	40
30 to 49	20	25	30	35	40	45	50
50 to 99	25	30	40	45	50	55	60
100 to 499	30	40	45	55	60	70	75
500 to 1199	35	45	55	60	70	80	90
>1,200	40	50	60	70	80	90	100

Tabella B.5: Variazione della velocità del vento sopra terra

C_e	Esposizione	Descrizione
1.39–2.34	D	Terreno aperto e pianeggiante, esposto verso grandi specchi d'acqua.
1.06–2.19	C	Terreno aperto e pianeggiante per almeno mezzo miglio, oppure sito aperto in un intero quadrante.
0.62–1.80	B	Terreno con edifici, foreste o irregolarità superficiali alte almeno 20 ft.

Tabella B.6: C_e coefficienti per carico del vento, (ICBO, 1994)

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

		lato vento	Lato sinistro
Cornici in Gabled (V:H)			
Piste da tetto	<9:12	−0.7	−0.7
	9:12 to 12:12	0.4	−0.7
	>12:12	0.7	−0.7
Pareti		0.8	−0.5
Edifici (altezza < 200 ft)			
Proiezioni verticali	altezza < 40 ft	1.3	−1.3
	altezza > 40 ft	1.4	−1.4
Proiezioni orizzontali		−0.7	−0.7

Tabella B.7: Coefficienti di pressione del vento C_q, (ICBO, 1994)

	Categoria di occupazione	**Fattore di importazione** I	
		Terremoto	**Vento vento**
I	Strutture essenziali	1.25	1.15
II	Strutture pericolose	1.25	1.15
III	Strutture speciali di occupazione	1.00	1.00
IV	Strutture di occupazione standard	1.00	1.00

Tabella B.8: Fattori di importazione per carico eolico e terremoto, (ICBO, 1994)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Altezza Sopra Grado (ft)	Esposizione B Velocità di base del vento (mph) 70	80	C 70	80
0-15	10	13	17	23
20	11	14	18	24
25	12	15	19	25
30	12	16	20	26
40	14	18	21	28
60	17	22	25	33
80	18	24	27	35
100	20	26	28	37
120	21	28	29	38
160	23	30	31	41
200	25	33	33	43
300	29	37	36	47
400	32	41	38	50

Tabella B.9: Pressione del vento di progettazione approssimata p per la forza vento ordinaria resiste alle strutture edilizie

Zona sismica	0	1	2A	2B	3	4
Z	0	0.075	0.15	0.2	0.3	0.4

Tabella B.10: Z fattori per diverse zone sismiche, UBC1994

Tipo di	Designazione delle merci	S Fattore
S_1	Un profilo del suolo con materiale a forma di roccia o terreno rigido/dense inferiore a 200 ft.	1.0
S_2	Terreno denso o rigido superiore a 200 ft	1.2
S_3	70 ft o più terreno contenente oltre 20 ft di argilla morbida a media rigida ma non più di 40 piedi di argilla morbida.	1.5
S_4	Terreno contenente più di 40 ft di argilla morbida	2.0

Tabella B.11: S coefficienti di sito per il carico del terremoto, (ICBO, 1994)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Sistema strutturale	R_W	H (ft)
Sistema a parete cuscinetto		
Pareti con rivestimento leggero e pannelli di taglio		
Pareti in legno per strutture tre storie o meno	8	65
Tutte le altre pareti luminose	6	65
Pareti di taglio		
Concretamente	8	240
Masonry	8	160
Sistema di costruzione utilizzando muri di taglio o trucioli)		
Telaio in acciaio controventato eccentricamente	10	240
Pareti con rivestimento leggero e pannelli di taglio		
Pareti in legno per strutture tre storie o meno	9	65
Tutte le altre pareti luminose	7	65
Pareti di taglio		
Concretamente	8	240
Masonry	8	160
Telai controventati concentricamente		
Acciaio inossidabile	8	160
Calcestruzzo (solo per zone I e 2)	8	-
Legname pesante	8	65
Sistema di telaio in movimento		
Telaio speciale resistente a momento (SMRF)		
Acciaio inossidabile	12	N.L.
Concretamente	12	N.L.
Telaio intermedio resistente a momento (IMRF) solo per le zone 1 e 2	8	-
Telaio ordinario resistente a momento (OMRF)		
Acciaio inossidabile	6	160
Calcestruzzo (solo per zona 1)	5	-
Sistemi Dual (solo per telai rigidi duttili)		
Muri di taglio		
Calcestruzzo con SMRF	12	N.L.
Masonry con SMRF	8	160
Telaio duttile in acciaio controventato eccentricamente	6–12	160–N.L.
Struttura controventata concentricamente	12	N.L.
Acciaio con acciaio SMRF	10	N.L.
Acciaio con acciaio OMRF	6	160
Calcestruzzo con calcestruzzo SMRF (solo per zone 1 e 2)	9	-

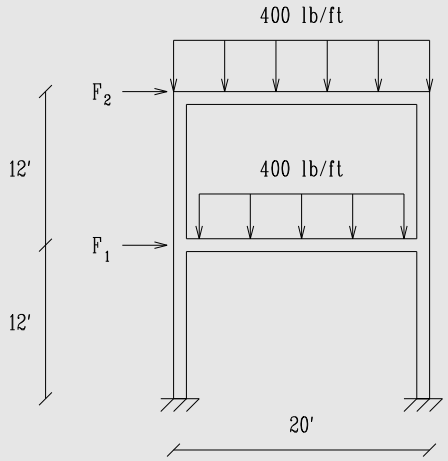
Tabella B.12: Elenco parziale di R_W per vari sistemi di struttura, (ICBO, 1994)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

B.3.1 Ex B.2: Caricamento del terremoto su una cornice

Determinare le forze sismiche approssimative per la struttura del telaio dell'ospedale duttile mostrata di seguito. Il DL per ogni piano è di 200 lb/ft e il LL è 400 lb/ft. La struttura è costruita su terreno morbido. Usare DL plus 50%LL come il peso di ogni piano. Zona 3.



1. Il periodo fondamentale delle vibrazioni è

$$T = C_t(h_n)^{3/4} = (0.030)(24)^{3/4} = 0.32 \text{ sec.} \tag{B.4}$$

2. Il C il coefficiente è

$$C = \frac{1.25S}{T^{2/3}} = \frac{(1.25)(2.0)}{(0.32)^{2/3}} = 5.344 > 2.75 \tag{B.5}$$

   uso $C = 2.75$.
3. Gli altri coefficienti sono: Z =0.3; I=1.25; R_W=12
4. Check

$$\frac{C}{R_W} = \frac{2.75}{12} = 0.23 > 0.075\checkmark \tag{B.6}$$

5. Il carico verticale totale è

$$W = 2\left((200 + 0.5(400)\right)(20) = 16000 \text{ lbs} \tag{B.7}$$

6. La parte totale della base sismica è

$$V = \frac{ZIC}{R_W} = \frac{(0.3)(1.25)(2.75)}{12} = 0.086W \tag{B.8}$$

$$= (0.086)(16000) = 1375\ lbs \tag{B.9}$$

7. Da $T < 0.7$ sec. non c'è nessun frusta.
8. Il carico su ogni piano è così dato da

$$F_2 = \frac{(1375)(24)}{12+24} = 916.7 lbs \tag{B.10}$$

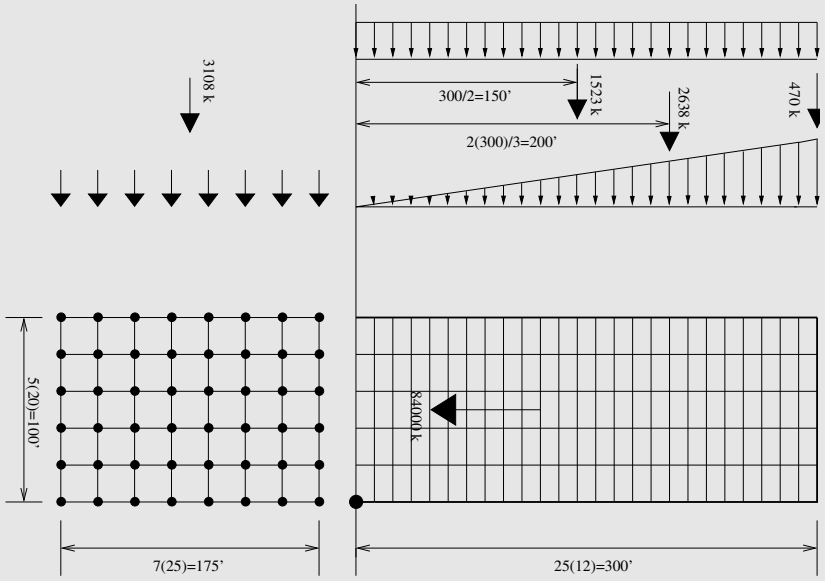
$$F_1 = \frac{(1375)(12)}{12+24} = 458.3 lbs \tag{B.11}$$

COPIA DI REVISIONE

B.3.2 Ex B.3: Carico di terremoto su un edificio alto

La sezione seguente è riprodotta da Schueller, 1996 The design of Building Structures.

Determinare il carico laterale critico approssimativo per un 25 piani, duttile, struttura in cemento rigido con telaio di spazio nella direzione breve. I telai rigidi sono spaziati 25 piedi di distanza nella sezione trasversale e 20 ft in direzione longitudinale. dimensione del piano dell'edificio è 175x100 ft, e la struttura è 25(12)=300 ft. Questo edificio per uffici si trova in un ambiente urbano con velocità del vento di 70 mph e in zona sismica 4. Per questo indagine, un edificio medio totale carico morto di 192 psf è utilizzato. sconosciuto.



1. Il peso totale dell'edificio è

$$W = (0.1926)\ \text{psf}(100 \times 175)\ \text{ft}^2 \times 25\ \text{storeys} = 84,000\ \text{k} \tag{B.12}$$

2. il periodo fondamentale di vibrazione per un telaio rigido è

$$T = C_t(h_n)^{3/4} = 0.030(300)^{3/4} = 2.16\ \text{sec.} > 0.7\ \text{sec.}\checkmark \tag{B.13}$$

3. Il C il coefficiente è

$$C = \frac{1.25S}{T^{2/3}} = \frac{(1.25)(1.5)}{(2.16)^{2/3}} = 1.12 \leq 2.75\checkmark \tag{B.14}$$

4. Gli altri coefficienti sono Z=0.4; I=1, R_W=12
5. Noi controlliamo

$$\frac{C}{R_W} = \frac{1.12}{12} = 0.093 \geq 0.075\checkmark \tag{B.15}$$

6. La parte sismica totale della base lungo la direzione breve critica è

$$V = \frac{ZIC}{R_W}W = \frac{(0.4)(1)(1.12)}{(12)}W = 0.037W \tag{B.16}$$

$$= (0.037)(84000) = 3108kip \tag{B.17}$$

COPIA DI REVISIONE

7. Da $T > 0.7$ sec., l'effetto di frusta deve essere considerato

$$F_t = 0.07TV = (0.07)(2.16)(3108) = 470 \text{ k} \leftarrow \quad \text{(B.18)}$$
$$le \quad 0.25V = (0.25)(3108) = 777 \text{ k} \quad \text{(B.19)}$$

Quindi il carico totale triangolare è

$$V - F_t = 3108 - 470 = 2638 \text{ k} \quad \text{(B.20)}$$

8. controlliamo se il carico del vento governa. Dalla tabella xx Noi presumiamo una pressione del vento uniforme di 29 psf che porta a una forza laterale totale

$$P_W = (0.029) \text{ psf}(175 \times 300) \text{ ft}^2 = 1523 \text{ k} < 3108 \text{ k} \quad \text{(B.21)}$$

La magnitudine del carico sismico totale è nettamente maggiore rispetto al totale Forza vento.

B.4 Caricamenti del ponte

Per i ponti autostradali, i carichi di progettazione sono dati dall'ASHTO (Associazione dei Ufficiali di trasporto della strada statale americana). Il camion HS-20 è usato per la progettazione di ponti sulle autostrade principali, Fig. B.5. Sia il camion di progettazione con carichi e spaziatura specificati deve essere utilizzato o il carico uniforme equivalente e carico concentrato. Questo carico deve essere posto in modo tale che vengono prodotte le sollecitazioni massime.

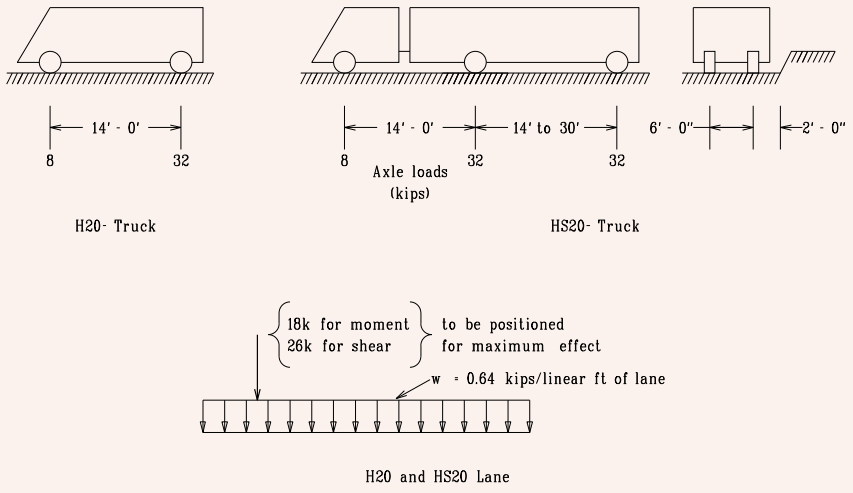


Figura B.5: Carico camion

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

B.5 Combinazioni di carico

15 I carichi in tensione specificati dai codici rappresentano il massimo dei carichi possibili.

16 La probabilità di tutti questi carichi che si verificano simultaneamente è remota. Pertanto, i codici di costruzione permettono una certa riduzione quando alcuni carichi sono combinati insieme.

17 Inoltre, le strutture devono essere progettate per resistere a una combinazione di carichi.

18 Denotare D= morto; L= vivo; Lr = tetto in vita; W= vento; E= terremoto; S= neve; T = temperatura; H= suolo:

19 Per il metodo di progettazione del fattore di carico e resistenza (LRFD) strutture, l'American Concrete Institute (ACI) Codice di progettazione dell'edificio (318) (ACI 318, 2019) richiede che il seguente si considerano le combinazioni di carico:

1. 1.4D+1.7L
2. 0.75(1.4D+1.7L+1,7W)
3. 0,9 D+1.3W
4. 1.4D +1.7L+1,7H
5. 0.75(1.4D+1.4T +1.7L)
6. 1.4(D+T)

considerando che per le strutture in acciaio, l'Istituto Americano d'acciaio Codice costruzione (AISC) (American Institute of Steel Construction, 2016) richiede che il seguente combinazioni essere verificati

1. 1.4D
2. 1.2D+1.6L+0.5(Lr o S)
3. 1.2D+0.5L (o 0.8W) +1.6(Lr o S)
4. 1.2D+0.5L+0,5(Lr o S) + 1,3W
5. 1.2D+0.5L (o 0.2 S) + 1.5E
6. 0,9D+1.3W(o 1,5 E)

20 L'analisi può essere eseguita separatamente per ciascuno dei carichi di base (L, D, W, ecc) e quindi utilizzando il principio di sovrapposizione dei carichi può essere combinato linearmente (a meno che il limite elastico non sia stato raggiunto).

21 I carichi sono spesso caratterizzati come *Usa*, *Insolito* e *Estremo*.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

B.6 Riduzione del carico vivo

22 La riduzione del carico vivo è un concetto importante nella progettazione strutturale, volto a ottimizzare i carichi di progetto per gli elementi strutturali, tenendo conto della minore probabilità che il carico vivo massimo agisca simultaneamente su grandi aree. Questa disposizione è consentita in vari codici di costruzione, tra cui (ACI 318, 2019) e (ASCE/SEI 7-16, 2017).

23 Il principio alla base della riduzione del carico vivo è che la probabilità di applicare contemporaneamente il carico vivo massimo diminuisce all'aumentare dell'area tributaria. Gli elementi strutturali, come travi, traverse e colonne che sostengono aree più grandi, possono quindi essere progettati per carichi vivi ridotti.

24 ACI 318 consente una riduzione del carico vivo basata sull'area tributaria sostenuta dall'elemento.

25 ASCE 7-16, Sezione 4.8, fornisce regole dettagliate per la riduzione del carico vivo. La formula generale per la diminuzione dei carichi vivi è:

$$L_r = L \cdot \left(0.25 + \frac{15}{\sqrt{A_T}}\right), \tag{B.22}$$

dove:

- L_r è il carico vivo ridotto (psf).
- L è il carico vivo non ridotto (psf).
- A_T è l'area tributaria sostenuta dall'elemento (in ft^2).

26 Il carico vivo ridotto non deve essere inferiore a:

- 50% del carico vivo originale per gli elementi che sostengono un piano.
- 40% del carico vivo originale per gli elementi che sostengono più piani.

27 La riduzione del carico in tensione non è consentita in alcuni scenari, come ad esempio:

- Aree di montaggio con carichi ad alto livello.
- Aree di stoccaggio o magazzino.
- Aree con carichi concentrati.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

B.6.1 Ex B.4: Riduzione del carico vivo I

Considerare una colonna che sostiene un'area tributaria di $A_T = 400\,ft^2$ con un carico vivo originale di $L = 100\,psf$. Il carico vivo ridotto è calcolato come segue:

$$\begin{aligned} L_r &= L\left(0.25 + \frac{15}{\sqrt{A_T}}\right) \\ &= 100\left(0.25 + \frac{15}{\sqrt{400}}\right) \\ &= 100\left(0.25 + \frac{15}{20}\right) \\ &= 100\,(0.25 + 0.75) \\ L_r &= 100\,\text{psf} \end{aligned}$$

In questo caso, non si verifica alcuna riduzione, perché la formula di riduzione del carico vivo produce un valore pari al carico vivo originale.

B.6.2 Ex B.5: Riduzione del carico vivo II

In un edificio di 10 piani con una colonna spaziatura di 16 ft in entrambe le direzioni, il carico totale morto è 60 psf, carico neve 20 psf e carico vivo 80 psF. che cosa è il carico totale e totale per cui una colonna deve essere progettata al piano terra

1. La zona tributaria è $16 \times 16 = 256\,ft^2 > 150$✓
2. La riduzione R is $R = .08(16 \times 16 - 150) = 8.48\%$
3. Riduzione massima consentita $R^{max.} = 23.1\left(1 + \frac{60}{80}\right) = 40.4\%$ which is less than 60% ✓
4. Ridotto *cumulativo* carico per la colonna di ogni piano è

Piano terra	Tetto	10	9	8	7	6	5	4	3	2	Totale
R cumulativo (%)	8.48	16.96	25.44	33.92	42.4	51.32	59.8	60	60	60	
LL cumulativo	20	80	80	80	80	80	80	80	80	80	740
R cumulativo× LL	18.3	66.4	59.6	52.9	46.08	38.9	32.2	32	32	32	410

   Il carico vivo di progetto risultante per la colonna inferiore è stato ridotto da 740 Kips a 410 Kips.
5. Il carico totale è morto $DL = (10)(60) = 600$ Kips, quindi il totale riduzione del carico è $\frac{740-410}{740+600} \times 100$=25%.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

B.7 Posizionamento del carico

28 Solo il carico morto è statico. Il carico vivo dall'altra parte può o non può essere applicato su un dato componente di una struttura. disposizione che ha portato alle forze interne più alte (momento +ve o -ve, shear) in diverse posizioni devono essere considerati, Fig. B.6.

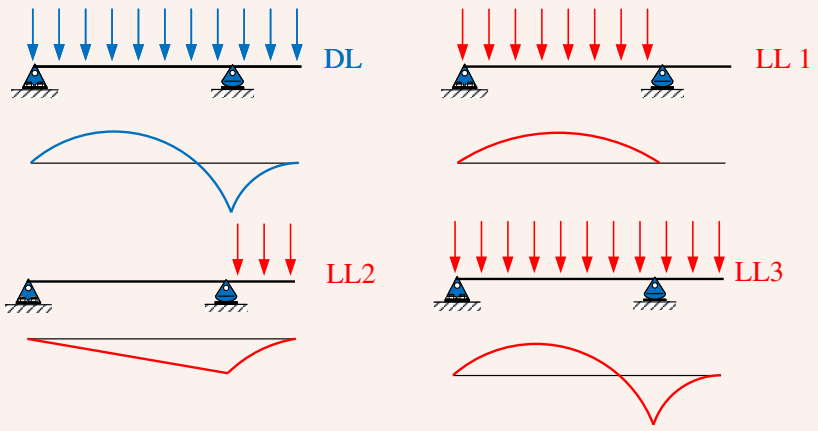


Figura B.6: Posizionamento del carico per massimizzare i momenti

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Appendice C

Equazioni differenziali lineari omogenee

Abstract

Nel corso del libro, una serie di formulazioni ha portato a equazioni differenziali seconda o più spesso quarto ordine.

C.1 Riassunto delle equazioni differenziali di governo 2432
C.2 Soluzioni 2433
C.3 Stabilità i: $\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0$ 2434
C.4 Stabilità ii; $\frac{d^4y}{dx^4} + k^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ 2435
C.5 Fondo elastico in fascio; $\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^4y = 0$ 2436

Un'equazione differenziale è un'equità, dove l'ignoto è una funzione e sia la funzione che i suoi derivati possono apparire nell'equalizzazione.

C.1 Riassunto delle equazioni differenziali di governo

Signora

(Eq. 22.2)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = w(x) \text{ or } \frac{\partial^4}{\partial x^4} = \frac{w(x)}{EI}$$

Cavo

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{q}{H}$$

COPIA DI REVISIONE

Nota analogia con flessore

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M}{EI}$$

Diffrazione di grandi dimensioni del fascio

(Eq. 29.2)

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} = -\frac{P}{EI}\frac{dx}{ds} = -\alpha^2 \cos\phi$$

Utilizzare Integratori Ellittici per risolvere.

Piatto

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z}{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}} \tag{C.1}$$

or

$$\nabla^4 w = \frac{p_z}{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}} \tag{C.2}$$

Fondo elastico in legno

Eq. 22.3

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^4y = 0$$

C.2 Soluzioni

An *equazione differenziale ordinaria* (ODE) ha solo un varle indipendente (come ad esempio x or t). In alternativa, un *equazione differenziale parziale* (PDE) ha più di una variabile indipendente (come ad esempio x, y or x, t).

Un'equazione differenziale è *lineare* se ogni termine nell'equazione non contiene né una delle variabili dipendenti o dei suoi derivati, e non esistono prodotti della variabile dipendente con sé o i suoi derivati. x or $\dot{x}$ or $\ddot{x}$; or $f(x)$ e i suoi derivati.

Un'equazione differenziale ha coefficienti costanti se la variabile dipendente e tutti i derivati sono moltiplicati solo per le costanti.

A *equazione lineare omogenea* è uno in cui il lato destro è zero (e tutti i termini contengono esattamente una potenza della variabile dipendente e dei suoi derivati).

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

C.3 Stabilità i: $\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0$

L'equazione differenziale del secondo ordine seguente è

$$\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0 \tag{C.3}$$

or

$$y'' + ky = 0$$

Dovrebbe essere ovvio che la soluzione di questa equazione avrebbe la forma

$$y = e^{\lambda x}$$

e poi

$$y' = \lambda e^{\lambda x}$$
$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

Sostituito in Eq. C.3

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + k e^{\lambda x} = 0$$
$$\Rightarrow e^{\lambda x}(\lambda^2 + k) = 0$$

Tuttavia, dal $e^{\lambda x}$ non può mai essere uguale a zero, abbiamo

$$\lambda^2 + k = 0 \qquad \text{characteristic equation} \tag{C.4}$$

La soluzione dell'equazione caratteristica è semplicemente

$$\lambda^2 = \pm\sqrt{-1}\sqrt{k}$$

or

$$\lambda^2 = \pm i\sqrt{k} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = i\sqrt{k} \\ \lambda_2 = -i\sqrt{k} \end{cases}$$

sostituendo queste espressioni in Eq. C.3

$$y = C_1 e^{i\sqrt{k}x} + C_2 e^{-i\sqrt{k}x} \tag{C.5}$$

Invocare la formula di Euler (uno dei tanti da lui)

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \tag{C.6}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

noi abbiamo

$$e^{i\sqrt{k}x} = \cos(\sqrt{k}x) + i\sin(\sqrt{k}x)$$
$$e^{-i\sqrt{k}x} = \cos(\sqrt{k}x) - i\sin(\sqrt{k}x)$$

queste espressioni sono a loro volta sostituite in Eq. C.5

$$\begin{aligned} y &= C_1\left[\cos(\sqrt{k}x) + i\sin(\sqrt{k}x)\right] + C_2\left[\cos(\sqrt{k}x) - i\sin(\sqrt{k}x)\right] \\ &= (C_1 + C_2)\cos(\sqrt{k}x) + i(C_1 - C_2)\sin(\sqrt{k}x) \end{aligned}$$

possiamo introdurre nuove costanti di integrazione D_1 e D_2

$$y = D_1\cos(\sqrt{k}x) + D_2\sin(\sqrt{k}x) \tag{C.7}$$

C.4 Stabilità ii; $\frac{d^4y}{dx^4} + k^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

Stabilità, 29.21.

Ancora una volta la soluzione

$$\frac{d^4y}{dx^4} + k^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

è ricercato nella forma $y = e^{\lambda x}$. Poi

$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x},$$
$$y^{(4)} = \lambda^4 e^{\lambda x}.$$

Sostituire l'equazione differenziale dà

$$\left(\lambda^4 + k^2\lambda^2\right)e^{\lambda x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^4 + k^2\lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2(\lambda^2 + k^2) = 0.$$

Fattore più avanti,

$$\lambda^2(\lambda - ik)(\lambda + ik) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0, \\ \lambda_3 = ik, \\ \lambda_4 = -ik. \end{cases} \tag{C.8}$$

Perché? $\lambda = 0$ è una doppia radice, il suo contributo è $(C_1 + C_2x)e^{0x} = C_1 + C_2x$. Le radici coniugate complesse producono termini esponenziali $e^{\pm ikx}$. Quindi la soluzione generale è

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^{ikx} + C_4e^{-ikx}.$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Usando le identità di Euler,

$$e^{ikx} = \cos(kx) + i\sin(kx), \qquad e^{-ikx} = \cos(kx) - i\sin(kx),$$

la parte oscillatoria può essere scritta in modo equivalente come una combinazione lineare $\cos(kx)$ e $\sin(kx)$ (con una ridefinizione delle costanti). Pertanto,

$$y = C_1 + C_2x + C_3\cos(kx) + C_4\sin(kx).$$

C.5 Fondo elastico in fascio; $\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^4y = 0$

Fondo elastico in legno 22.3

Data la seguente equazione differenziale del quarto ordine

$$y^{(4)} + ky = 0 \tag{C.9}$$

noi abbiamo setacciato

$$m^2 = \sqrt{\frac{k}{4}} \text{ or } k = 4m^4$$

l'equazione differenziale diventa

$$y^{(4)} + 4m^4 = 0 \tag{C.10}$$

Ancora una volta, dovrebbe essere ovvio che la soluzione di questa equazione avrebbe la forma

$$y = e^{\lambda x}$$

and

$$y^{(4)} = \lambda^4 e^{\lambda x}$$

Sostituire in Eq. C.10 noi otteniamo

$$e^{\lambda x}(\lambda^4 + 4m^4) = 0$$

Ancora, $e^{\lambda x}$ non può mai essere uguale a zero, quindi l'equazione caratteristica corrispondente sarà

$$\lambda^4 + 4m^4 = 0 \tag{C.11}$$

$$\lambda^4 + 4m^4 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 2m^2i)(\lambda^2 + 2m^2i) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = m(1+i) \\ \lambda_2 = m(1-i) \\ \lambda_3 = m(-1+i) \\ \lambda_4 = m(-1-i) \end{cases}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Sostituisci le soluzioni in Eq. C.9

$$y = C_1 e^{m(1+i)x} + C_2 e^{m(1-i)x} + C_3 e^{m(-1+i)x} + C_4 e^{m(-1-i)x}$$

Tuttavia, la Commissione non ha ancora fatto ricorso ad un'azione di $e^{a+b} = e^a e^b$, e invocando ancora l'equazione Euler (Eq. C.6)

$$y = e^{(mx)} \left(C_1 \sin(mx) + C_2 \cos(mx)\right) + e^{(-mx)} \left(C_3 \sin(mx) + C_4 \cos(mx)\right) \tag{C.12}$$

Una soluzione più elegante inizierà utilizzando

$$e^x = \cosh x + \sinh x; \quad e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

e sostituendo si ottiene

$$\begin{aligned} y = {} & C_1 \sin(mx)\sinh(mx) - C_3 \sin(mx)\sinh(mx) \\ & + C_2 \cos(mx)\sinh(mx) - C_4 \cos(mx)\sinh(mx) \\ & + C_2 \cos(mx)\cosh(mx) + C_4 \cos(mx)\cosh(mx) \\ & + C_1 \sin(mx)\cosh(mx) + C_3 \sin(mx)\cosh(mx). \end{aligned}$$

Riordinando i termini,

$$y = D_1 \cos(mx)\cosh(mx) + D_2 \sin(mx)\sinh(mx) \tag{C.13}$$
$$+ D_3 \cos(mx)\sinh(mx) + D_4 \sin(mx)\cosh(mx) \tag{C.14}$$

che sono analoghi alle quattro funzioni di Krylov (Kolosova e Kuroyedov, 2013).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Appendice D

Archi elastici; Analisi avanzate

Abstract

Questa appendice sviluppa equazioni analitiche per l'analisi elastica di archi circolari simmetrici in varie condizioni di carico. Utilizzando principi di statici, meno lavoro e lavoro virtuale, le soluzioni a forma chiusa sono derivate per archi trigonometrici, a due cerniere e senza cerniera con variabili trigonometriche che definiscono la geometria dell'arco. I metodi analitici sono convalidati contro le soluzioni numeriche di SAP 2000 e illustrati attraverso esempi lavorati dettagliati che coprono carichi punti, pesi auto-e carichi uniformemente distribuiti. Le forze interne (sabbia, assiale e momento) attraverso l'arco sono calcolate sistematicamente, e il comportamento strutturale di ogni tipo di arco viene analizzato per rivelare le differenze nei modelli di reazione, sui percorsi di carico e sulla distribuzione dello stress.

D.1 Introduzione 2439
D.2 Arco circolare a tre punte 2439
D.2.1 Procedura di analisi 2440
D.2.2 Carico di punto 2441
D.2.3 Peso auto 2447
D.2.4 Carico distribuito uniformemente 2451
D.2.5 Arco circolare a tre punte: validazione 2454
D.2.6 Conclusioni 2455
D.3 Due - arco circolare a cerniera 2456
D.3.1 Procedura di analisi 2456
D.3.2 Carico di punto 2457
D.3.3 Peso auto 2467
D.3.4 Carico distribuito uniformemente 2475
D.3.5 Arco circolare a due punte: validazione 2479
D.3.6 Conclusioni 2482
D.4 Arco circolare senza cerniera 2482
D.4.1 Procedura di analisi 2482
D.4.2 Carico di punto 2483
D.4.3 Peso auto 2496
D.4.4 Carico distribuito uniformemente 2504
D.4.5 Arco circolare senza cerniera: validazione 2509
D.4.6 Conclusioni 2511
D.5 Conclusioni 2511

Parte 2: Tabelle di analisi e progettazione strutturale

Dalla tesi del Maestro «Analysis of Arches» by Sonavane, 2014

COPIA DI REVISIONE

D.1 Introduzione

Questo capitolo si concentra in particolare sull'applicazione di statici, principali del metodo meno lavoro e del lavoro virtuale per lo sviluppo di equazioni analitiche per archi circolari simmetrici trincerati, bi-mangiati e senza cerniera sotto carico diverso Le equazioni analitiche sono rese generiche dall'introduzione di alcune variabili trigonometriche che definiscono la geometria di ogni tipo dell'arco. Inoltre, un programma di analisi strutturale, Sap 2000 viene utilizzato per sviluppare modelli per i tre tipi di archi sopra menzionati e la loro analisi è confrontata con le soluzioni ottenute utilizzando le equazioni analitiche. Le soluzioni delle equazioni analitiche sono ulteriormente utilizzate per discutere il comportamento strutturale di ogni tipo di arco.

Un arco a tre punte in figura D.1 rappresenta le variabili trigonometriche che definiscono la geometria di un arco circolare simmetrico utilizzato per ricavare le equazioni analitiche. La forma ACB rappresenta un arco, dove A e B sono gli abutments e il punto C è corona dell'arco. Distanza y0 rappresenta l'ascesa dell'arcata in cui come distanza x1 rappresenta la metà del arco di lunghezza. α indica un angolo fatto da una linea centro di collegamento del cerchio e l'abbattimento con il orizzontale, di conseguenza quando α è zero è un arco semicircolare. Tutte le dimensioni e gli angoli sono misurati per l'abbattimento B. Lettera θ indica un angolo a cui viene applicato un carico P sulla costola dell'arco. Le forze Ax e Bx sono le reazioni orizzontali e le forze Ay e By sono le reazione verticali agli abutments. Forza di taglio (V), forza assiale (N) e Momento (M) sono le forze interne ad ogni angolo β attraverso l'arco. Figura D.1b indica la convenzione di segno utilizzata per le forze interne, dove si assume un segnale positivo per il momento saggio Momento, verso l'esterno forza taglio e forza assiale trazione. Nel complesso la nomenclatura utilizzata nella definizione della geometria dell'arco, include lettere maiuscole per indicare tutte le forze e minuscole lettere di caso per indicare ogni dimensione.

Trignometric Variables

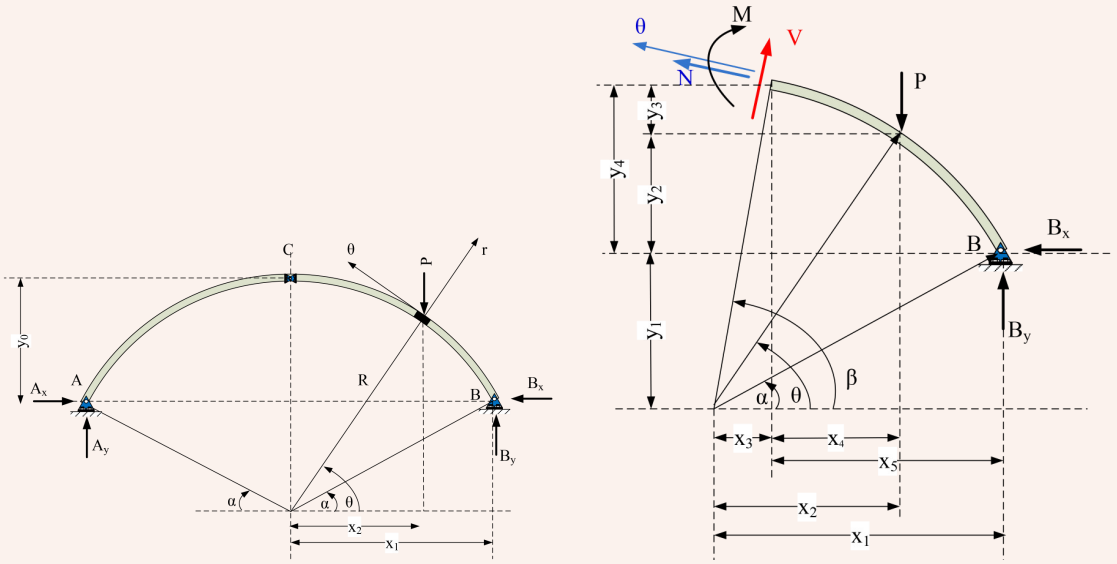
```
x1=R Cos[α]; x2=R Cos[θ ]; x3= R Cos[β]; x4=x2 − x3; x5=x1 − x3;
y0=R(1 − Sin[α]); y1=R Sin[α]; y2=R (Sin[θ ] − Sin[α]); y3=R Sin[β] − y1 − y2; y4=R Sin[β] − y1;
```

D.2 Arco circolare a tre punte

Un arco circolare simmetrico a tre punte ha quattro reazioni complessive - due ad ogni supporto. La differenza primaria tra un arco a tre cerniere e un arco biforato o senza cerniera è la discontinuità della costola dell'arco dovuta alla cerniera alla corona, che converte un arco trincea in due componenti curvi indipendenti sostenuti. In ciascuna delle

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Reazioni (b) Forze interne

Figura D.1: Geometria di arco circolare

componenti indipendenti, ci sono due reazioni uguali e apposite: così con due reazioni sconosciute e tre equazioni di equilibrio per ogni componente, un arco circolare simmetrico a tre punte è una struttura statisticamente determinata.

D.2.1 Procedura di analisi

Per l'analisi, vengono considerate tre condizioni di carico; un carico a punto , il peso dell'arco e applicato uniformemente carico distribuito attraverso l'arco. Il peso auto-e il carico uniformemente distribuito sono simmetrici circa il centro dell'arco dove come un carico di punto, quando applicato ovunque ma alla corona è asimmetrico sul centro dell'arcata. Per illustrare l'analisi, le stesse figure sono utilizzate per il peso auto e le condizioni di carico uniformemente distribuite in cui vengono utilizzati diversi set di cifre per la condizione di carico del punto. L'analisi di tutte e tre le condizioni di carico viene effettuata in tre fasi utilizzando Mathematica, dove le reazioni al supporto vengono calcolate nel primo passo, forze interne attraverso arco sono calcolate nella seconda fase e l'utilizzo delle equazioni per Le schede Mathematica per tutti i passaggi sono incluse in sezioni pertinenti e per semplificazione si ampliano solo le equazioni finali di reazioni e forze interne. Le equazioni analitiche per le reazioni di supporto e le forze interne sono in termini delle variabili trigonometriche sopra definite.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

D.2.2 Carico di punto

In questo caso la forza applicata elementare è data da

$$dp = P \tag{D.1}$$

Reazioni

Considerare la figura D.2Quando un carico di punto viene applicato ovunque, ma alla corona di un arco crea una condizione di caricamento asimmetrico sul centro dell'arco. Poiché l'espressione per la reazione verticale 'By' dipende dalla posizione del carico di punto P rispetto alla corona C, sono sviluppati due diversi set di equazioni, uno per la condizione $\theta < \frac{\Pi}{2}$ e altri per la condizione $\theta \geq \frac{\Pi}{2}$. Di seguito è riportato l'output di

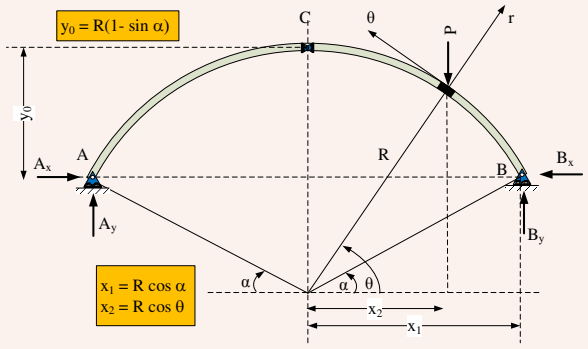


Figura D.2: Arco circolare a tre punte sotto carico

Mathematica che illustra la derivazione per la reazione del supporto informatico.

Reactions

Define the load

```
P=P;
```

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMA=BY2x1 − P(x1 + x2);
```

```
Sol1=Solve[SigMA==0,BY]; BY=BY/.Sol1[[1]]
```

$\frac{1}{2}P(\text{Cos}[\alpha] + \text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

COPIA DI REVISIONE

```
Sol2=Solve[BY − P + AY==0,AY]; AY=AY/.Sol2[[1]]
```

$\frac{1}{2}(P - P\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$

$\theta < \frac{\pi}{2}$
Determine horizontal reaction at B by taking moment with respect to C (CCW +ve)

```
SigMC= − BXy0 + BYx1 − Px2;
```

```
Sol3=Solve[SigMC==0,BX]; BX=BX/.Sol3[[1]]
```

$\frac{-P\text{Cos}[\alpha]+P\text{Cos}[\theta]}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$

```
AX=BX;
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

```
MO=FullSimplify[−AXy1 − AYx1 − Px2 + BXy1 + BYx1]
```

0

```
Clear[AX]; Clear[BX];
```

$\theta > \frac{\pi}{2}$
Determine horizontal reaction at B by taking moment with respect to C (CCW +ve)

```
SigMC= − BXy0 + BYx1;
```

```
Sol3=Solve[SigMC==0,BX]; BX=BX/.Sol3[[1]]
```

$-\frac{P(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$

```
AX=BX;
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

```
MO=FullSimplify[−AXy1 − AYx1 − Px2 + BXy1 + BYx1]
```

0

Forze interne

Mentre la posizione di un carico a punto ovunque ma alla corona di un arco, crea una condizione di caricamento asimmetrico, provoca anche discontinuità nelle forze interne. D.3. Quindi l'espressione per le forze interne ad ogni angolo β attraverso l'arco è dipendente

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dalla sua relazione rispetto all'angolo θ Tenendo conto delle seguenti condizioni, si sviluppano diversi set di equazioni per le forze interne.

$$\theta < \frac{\Pi}{2} \longrightarrow \beta < \theta, \beta \geq \theta, \quad \theta \geq \frac{\Pi}{2} \longrightarrow \beta < \theta, \beta \geq \theta \tag{D.2}$$

Il diagramma del corpo libero in Figura D.4 viene utilizzato per determinare le forze

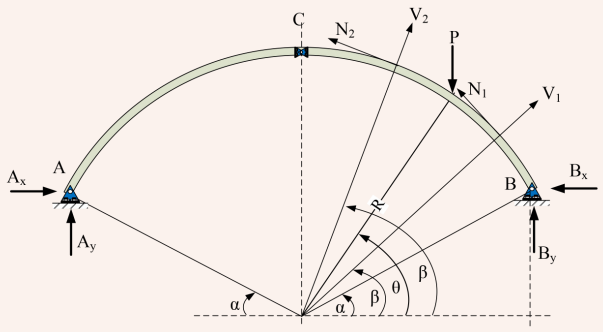


Figura D.3: Relazione β con rispetto a θ

interne - assiale, taglio e momento a qualsiasi angolo β attraverso l'arco. Di seguito è l'uscita da Mathematica che illustra la derivazione per le forze interne - assiali, taglio e momento a qualsiasi angolo β attraverso l'arco.

Internal Forces

$\theta < \frac{\pi}{2}$ & $\beta < \theta$

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFV1= – BXCos[β] + BYSin[β] + V1;
```

```
Sol4=FullSimplify[Solve[SigFV1==0,V1]]; V1[β_]=V1/.Sol4[[1]]
```

$$-\frac{P(\text{Cos}[\alpha]\text{Cos}[\beta]-\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]+\text{Sin}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](-\text{Sec}[\alpha]+\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFN1=BXSin[β] + BYCos[β] + N1;
```

```
Sol5=FullSimplify[Solve[SigFN1==0,N1]]; N1[β_]=N1/.Sol5[[1]]
```

$$\frac{P((\text{Cos}[\alpha]-\text{Cos}[\theta])\text{Sin}[\beta]+\text{Cos}[\beta](1-\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](\text{Sec}[\alpha]-\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

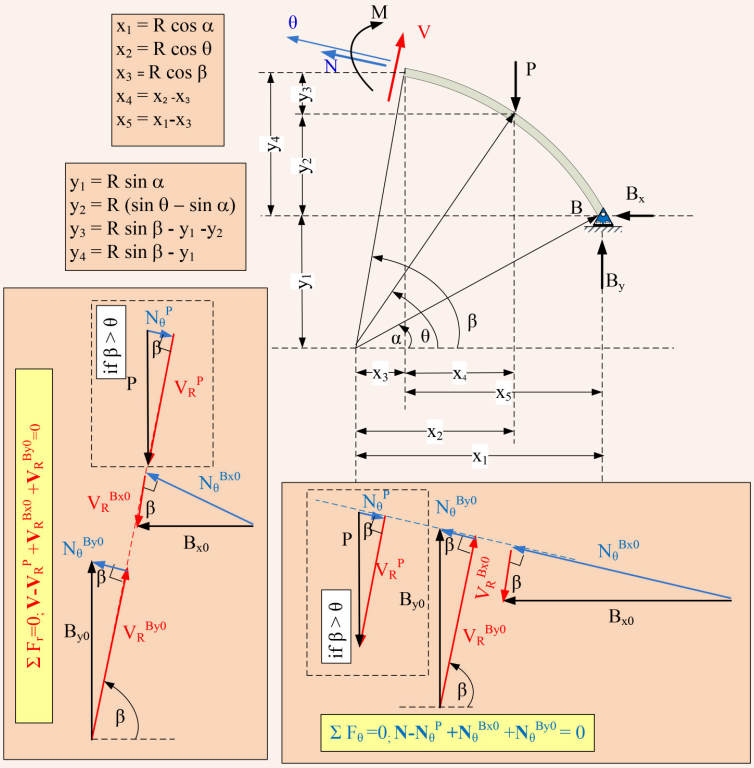


Figura D.4: Fbd di arco circolare a tre punte sotto carico del punto

COPIA DI REVISIONE

```
SigM1=BXy4 − BYx5 + M1;
```

```
Sol6=Solve[SigM1==0,M1]; M1[β_]=M1/.Sol6[[1]]
```

$$\frac{1}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}(-PR\text{Cos}[\alpha] + PR\text{Cos}[\beta] - PR\text{Cos}[\theta] + PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Sin}[\alpha] + 2PR\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha] + PR\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\beta] - PR\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\beta] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Tan}[\alpha])$$

$\theta < \frac{\pi}{2}$ & $\beta > \theta$

Summation of Forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFV2= − BXCos[β] + BYSin[β] − PSin[β] + V2;
```

```
Sol7=FullSimplify[Solve[SigFV2==0,V2]]; V2[β_]=V2/.Sol7[[1]]
```

$$\frac{P(-\text{Cos}[\alpha]\text{Cos}[\beta]+\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]+\text{Sin}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](\text{Sec}[\alpha]-\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFN2=BXSin[β] + BYCos[β] − PCos[β] + N2;
```

```
Sol8=FullSimplify[Solve[SigFN2==0,N2]]; N2[β_]=N2/.Sol8[[1]]
```

$$\frac{P((\text{Cos}[\alpha]-\text{Cos}[\theta])\text{Sin}[\beta]+\text{Cos}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](\text{Sec}[\alpha]-\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigM2=BXy4 − BYx5 + Px4 + M2;
```

```
Sol9=Solve[SigM2==0,M2]; M2[β_]=M2/.Sol9[[1]]
```

$$\frac{1}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}(-PR\text{Cos}[\alpha] - PR\text{Cos}[\beta] + PR\text{Cos}[\theta] + PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha] + PR\text{Cos}[\beta]\text{Sin}[\alpha] + PR\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\beta] - PR\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\beta] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Tan}[\alpha])$$

Internal Forces

$\theta > \frac{\pi}{2}$ & $\beta < \theta$

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFV1= − BXCos[β] + BYSin[β] + V1;
```

```
Sol4=FullSimplify[Solve[SigFV1==0,V1]]; V1[β_]=V1/.Sol4[[1]]
```

$$-\frac{P(\text{Cos}[\alpha]\text{Cos}[\beta]+\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]+\text{Sin}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](-\text{Sec}[\alpha]+\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
SigFN1=BXSin[β] + BYCos[β] + N1;
```

```
Sol5=FullSimplify[Solve[SigFN1==0,N1]]; N1[β_]=N1/.Sol5[[1]]
```

$$\frac{P((\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sin}[\beta]+\text{Cos}[\beta](1-\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](\text{Sec}[\alpha]-\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigM1=BXy4 − BYx5 + M1;
```

```
Sol6=Solve[SigM1==0,M1]; M1[β_]=M1/.Sol6[[1]]
```

$$\frac{1}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}(-PR\text{Cos}[\alpha] + PR\text{Cos}[\beta] - PR\text{Cos}[\theta] + PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Sin}[\alpha] + PR\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\beta] + PR\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\beta] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Tan}[\alpha])$$

$\theta > \frac{\pi}{2}$ & $\beta > \theta$

Summation of Forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFV2= − BXCos[β] + BYSin[β] − PSin[β] + V2;
```

```
Sol7=FullSimplify[Solve[SigFV2==0,V2]]; V2[β_]=V2/.Sol7[[1]]
```

$$-\frac{P(\text{Cos}[\alpha]\text{Cos}[\beta]+\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]-\text{Sin}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](\text{Sec}[\alpha]-\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFN2=BXSin[β] + BYCos[β] − PCos[β] + N2;
```

```
Sol8=FullSimplify[Solve[SigFN2==0,N2]]; N2[β_]=N2/.Sol8[[1]]
```

$$\frac{P((\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sin}[\beta]+\text{Cos}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](\text{Sec}[\alpha]-\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigM2=BXy4 − BYx5 + Px4 + M2;
```

```
Sol9=Solve[SigM2==0,M2]; M2[β_]=M2/.Sol9[[1]]
```

$$\frac{1}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}(-PR\text{Cos}[\alpha] - PR\text{Cos}[\beta] + PR\text{Cos}[\theta] + PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha] + PR\text{Cos}[\beta]\text{Sin}[\alpha] - 2PR\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha] + PR\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\beta] + PR\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\beta] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Tan}[\alpha])$$

Sfittamento

Alcune sfide non viste si sono verificate nell'applicazione delle equazioni analitiche dell'arco trincerato verso l'elaborazione della deflezione che ha fornito una soluzione complessa, per cui necessita di ulteriori indagini nel lavoro futuro.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Sintesi dei risultati

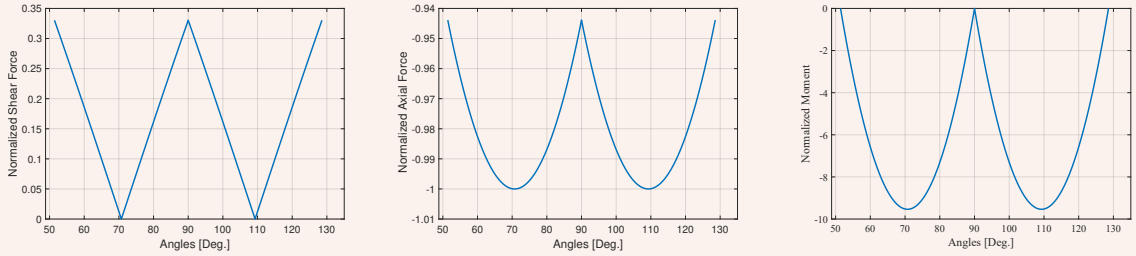


Figura D.5: Trama di forze interne per arco circolare a tre punte sotto carico del punto

Figura D.5 mostra i lotti per un esempio di arco a tre punte discusso nella sezione precedente. Un carico punto è applicato alla corona dell'arco. La forza assiale interna e la forza di taglio sono normalizzate rispetto al risultante della reazione verticale e dell'impulso, mentre il momento interno è normalizzato per quanto riguarda il prodotto della forza assial interna e l'aumento. Come indicato dalla trama, tutte le forze interne sono simmetriche circa la corona dell'arco e l'arco a tre punte comporta come due componenti curvi indipendenti. La forza di compressione assiale è più alta al punto medio di ogni componente e diminuisce verso i supporti a cerniera con la differenza di circa 5% tra le forze assiali alte e basse, il momento interno è zero alle cerniere ed è più alto al punto medio di ogni componente. La forza di taglio, d'altra parte, è relativamente inferiore alla forza assiale interna e al momento ed è zero nelle posizioni del massimo momento interno.

D.2.3 Peso auto

In questo caso la forza applicata elementare è data da

$$dP = wds = wRd\theta \tag{D.3}$$

Reazioni

Considerare la figura D.6, sono determinate le reazioni orizzontali e verticali ai supporti. Di seguito è riportato l'output di Mathematica che illustra la derivazione per la reazione del supporto informatico.

Reactions

Define the load (omitting the dθ)

```
dP'=wR;
```

Determine vertical reaction by taking summation of forces in the y direction

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

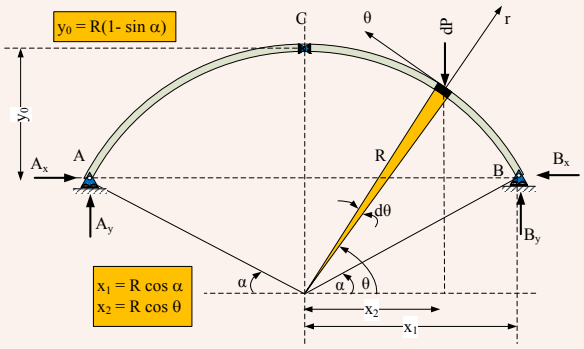


Figura D.6: Arco circolare a tre punte sotto il peso di sé

BY= $\int_{\alpha}^{\pi/2} dP' d\theta$

$$Rw\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

Determine horizontal reaction at B by taking moment with respect to C (CCW +ve)

SigMC= − BXy0 + BYx1 − $\int_{\alpha}^{\pi/2}$ x2dP′ $d\theta$;

Sol1=Solve[SigMC==0,BX]; BX=BX/.Sol1[[1]]

$$-\frac{R(-2w+\pi w\text{Cos}[\alpha]-2w\alpha\text{Cos}[\alpha]+2w\text{Sin}[\alpha])}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

CX=BX;

Check statics by taking moment about O (CCW +ve)

MO=FullSimplify $\left[\text{BXy1} + \text{BYx1} - \text{CX(y1} + \text{y0)} - \int_{\alpha}^{\pi/2} \text{x2dP}' d\theta\right]$

0

Forze interne

Il diagramma del corpo libero in Figura D.7 viene utilizzato per determinare le forze interne - assiale, taglio e momento a qualsiasi angolo β attraverso l'arco. Di seguito è l'uscita da Mathematica che illustra la derivazione per le forze interne - assiali, taglio e momento.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

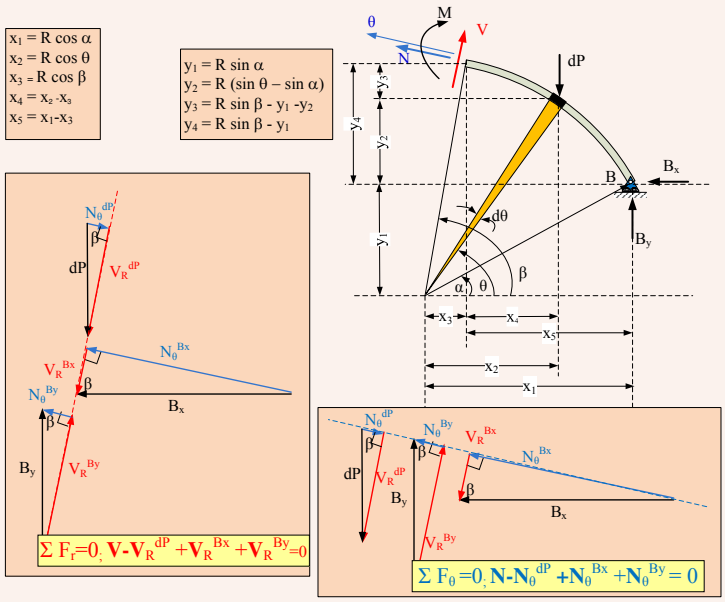


Figura D.7: Fbd di arco circolare a tre punte sotto il peso

Internal Forces

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

SigFV= – BXCos[β] + BYSin[β] – $\int_{\alpha}^{\beta}$ dP'Sin[β]$d\theta$ + V;

Sol2=FullSimplify[Solve[SigFV==0,V]; $V[\beta_]=V$ /.Sol2[[1]]

$$-\frac{Rw(\text{Cos}[\beta](-2+(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha]+2\text{Sin}[\alpha])+(\pi-2\beta)(-1+\text{Sin}[\alpha])\text{Sin}[\beta])}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force +(ve Tension)

SigFN=BXSin[β] + BYCos[β] – $\int_{\alpha}^{\beta}$ dP'Cos[β]$d\theta$ + N;

Sol3=FullSimplify[Solve[SigFN==0,N]; NN[$\beta_$]=N /.Sol3[[1]]

$$\frac{1}{2}Rw\left(-(\pi-2\beta)\text{Cos}[\beta]+\frac{(-2+(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha]+2\text{Sin}[\alpha])\text{Sin}[\beta]}{-1+\text{Sin}[\alpha]}\right)$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

SigM=BXy4 – BYx5 + $\int_{\alpha}^{\beta}$ dP'x4$d\theta$ + M;

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
Sol4=FullSimplify[Solve[SigM==0,M]];M[β_]=M/.Sol4[[1]]
```

$$\frac{R^2 w(-(\pi-2\beta)\text{Cos}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha])+(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha](-1+\text{Sin}[\beta]))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Sfittamento

Le equazioni analitiche sopra sviluppate sono utilizzate per calcolare la deflezione in un arco circolare simmetrico (Kinney, 1957, pg 547-558).Le seguenti sono i valori numerici utilizzati per la variabile trigonometrica,

Larghezza della barra (b) = 2 ft, Ritmo della catena dell'arco(d) = 3 ft, Area (a) = 6 ft^2, Momento di Inerzia (i) = 4.5 ft^4, Modulo di elasticità(e) = 3645 Ksi, α= 0,975 rad., Radius(R) = 160.35 ft, Span = 200 ft, Risalire = 35 ft, W=2.275 kip/ft

A seguito di equazione del lavoro virtuale viene utilizzato per calcolare la defezione nell'esempio dell'arco considerato.

$$\delta P.\,\Delta = \left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{M\ \delta\text{M1}}{EI}\,R\beta + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{M\ \delta\text{M2}}{EI}\,R\beta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{M\ \delta\text{M3}}{EI}\,R\beta + \int_{\theta}^{(\pi-\alpha)} \frac{M\ \delta\text{M4}}{EI}\,R\beta\right] \quad \text{(D.4)}$$

Dove?

δP	Carico unità virtuale esterno applicato nella direzione Δ
Δ	Slocamento esterno causato dal carico reale applicato
M	Momento interno nel fascio causato da carico reale
$\delta\text{M1}(\beta<\theta)$,	Momento interno causato a causa di esterno
$\delta\text{M2}(\beta\geq\theta)$	carico dell'unità virtuale quando $\theta<\frac{\pi}{2}$
$\delta\text{M3}(\beta<\theta)$,	Momento interno causato a causa di esterno
$\delta\text{M4}(\beta\geq\theta)$	carico dell'unità virtuale quando $\theta\geq\frac{\pi}{2}$

Sintesi dei risultati

Figura D.8 mostra i diagrammi per l'esempio di arco a tre punte sotto il peso auto-dibattuto nella sezione precedente.La forza assiale interna e la forza della cinghia sono normalizzati rispetto al risultato di reazione verticale e spinta agli abutments. La forza di compressione assiale è più alta agli abutments e diminuisce verso la corona fino ad circa 81% della forza di taglio, invece, è relativamente bassa e varia tra circa 4% e 1%, rispettivamente dall'abbattimento alla corona. Il momento interno è normalizzato rispetto al prodotto della forza assiale interna e dell'ascesa.Il momento interno si trova a zero nella posizione delle cerniere ed è più alto tra le cernieri. Senza punto di inflessione nel diagramma del momento tra le cerniere, si può dire che un arco a tre punte sotto il peso auto-peso si comporta come due componenti curvi sostenuti indipendenti. La disfatta in un arco a tre

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

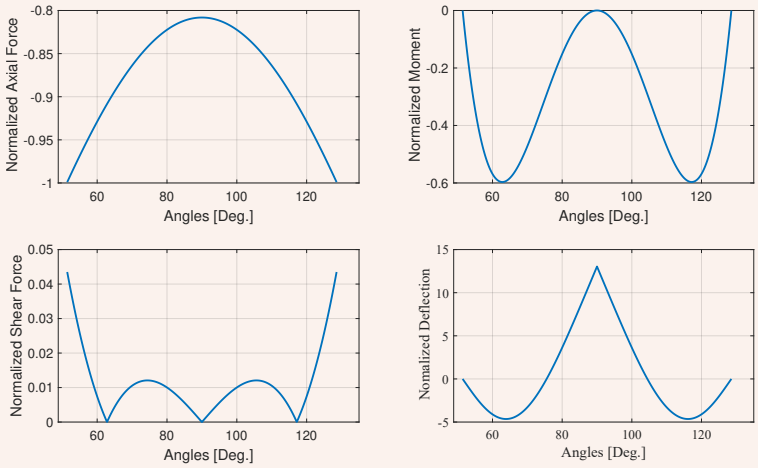


Figura D.8: Trama per arco circolare a tre punte sotto peso auto

punte è più alta alla corona e riduce a circa 40% del massimo al $\frac{1}{6}$ come i supporti sono inmovibile, la deviazione verso il basso causata da singoli componenti curvi spinge la corona verso l'alto.

D.2.4 Carico distribuito uniformemente

In questo caso la forza applicata elementare è data da

$$dp = wdx = wRSin\theta \tag{D.5}$$

Reazioni

Considerare la figura D.6, sono determinate le reazioni orizzontali e verticali ai supporti; in seguito è l'output di Mathematica che illustra la derivazione della reazione del supporto informatico.

Reactions

Define the load (omitting the dθ)

dP′=wRSin[θ];

Determine vertical reaction by taking summation of forces in the y direction

BY= $\int_{\alpha}^{\pi/2}$ dP′ $d\theta$

$RwCos[\alpha]$

Determine horizontal reaction at B by taking moment with respect to C (CCW +ve)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
SigMC= − BXy0 + BYx1 − ∫_α^(π/2) x2dP′ dθ;
```

```
Sol1=Solve[SigMC==0,BX]; BX=BX /.Sol1[[1]]
```

$$-\frac{Rw\text{Cos}[\alpha]^2}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

```
CX=BX;
```

Check statics by taking moment about O (CCW +ve)

```
MO=FullSimplify [BXy1 + BYx1 − CX(y1 + y0) − ∫_α^(π/2) x2dP′ dθ]
```

$$0$$

Forze interne

Il diagramma del corpo libero in Figura D.7 viene utilizzato per determinare le forze interne - assiale, taglio e momento a qualsiasi angolo β in tutta la arco. In seguito è l'uscita da Mathematica, illustrando la derivazione per le forze interne - assiali, taglio e momento ad ogni angolo β attraverso l'arco.

Internal Forces

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

```
SigFV= − BXCos[β] + BYSin[β] − ∫_α^β dP′Sin[β] dθ + V;
```

```
Sol2=FullSimplify[Solve[SigFV==0,V]]; V[β_]=V /.Sol2[[1]]
```

$$\frac{1}{2}Rw\text{Cos}[\beta](1+\text{Sin}[\alpha]-2\text{Sin}[\beta])$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force +(ve Tension)

```
SigFN=BXSin[β] + BYCos[β] − ∫_α^β dP′Cos[β] dθ + N;
```

```
Sol3=FullSimplify[Solve[SigFN==0,N]]; NN[β_]=N /.Sol3[[1]]
```

$$\frac{1}{2}Rw\left(-2\text{Cos}[\beta]^2+\frac{\text{Cos}[\alpha]^2\text{Sin}[\beta]}{-1+\text{Sin}[\alpha]}\right)$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

SigM=BXy4 − BYx5 + $\int_{\alpha}^{\beta}$ dP′x4$d\theta$ + M;

Sol4=FullSimplify[Solve[SigM==0,M]]; $M[\beta_]$=M /.Sol4[[1]]

$$\frac{1}{2}R^2 w(-1+\text{Sin}[\beta])(-\text{Sin}[\alpha]+\text{Sin}[\beta])$$

D.2.4.1 Sfittamento

Il processo di calcolare la deflezione in arco circolare a tre punte sotto carico uniformemente distribuito, nonché i valori numerici utilizzati per la variabile trigonometrica sono simili a quelli discussi nel Self-weight nella Sezione D.2.3 e quindi non è mostrato qui.

Sintesi dei risultati

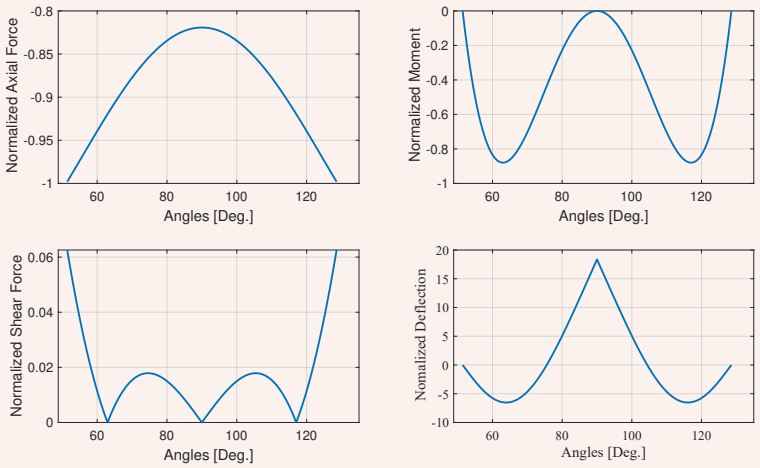


Figura D.9: Trama per arco circolare a tre punte sotto distribuzione uniforme del carico

Figura D.9 mostra i diagrammi per l'arco a tre punte sotto carico uniformemente distribuito discusso nella sezione precedente. La forza assiale interna e la forza di taglio sono normalizzati rispetto al risultante della reazione verticale e spinta agli abutments. La forza di compressione assiale è più alta agli abutments e diminuisce verso la corona fino a circa 82.5% della forza di taglio, invece, è relativamente bassa e varia tra circa 6% e 2%, rispettivamente dall'abbattimento alla corona. Il momento interno è normalizzato rispetto al prodotto della forza assiale interna e dell'ascesa.Il momento interno si trova a zero nella posizione delle cerniere ed è più alto tra le cernieri. La disfatta in un arco a tre punte è più alta alla corona e riduce a circa 33 % del massimo al $\frac{1}{6}$ come i supporti sono inmovibile, la deviazione verso il basso causata da singoli componenti curvi spinge la corona verso l'alto.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

D.2.5 Arco circolare a tre punte: validazione

Le equazioni analitiche sviluppate sopra per l'arco circolare trincerato sotto carico del punto, il carico auto-peso ed uniformemente distribuito sono convalidate in due fasi. In primo luogo, il peso di sé e carico uniformemente distribuito applicato attraverso l'arco arco sono suddivisi in serie di carichi 20 punti. I grafici delle forze interne sono tracciati utilizzando le equazioni analitiche per il peso di sé e il carico uniformemente distribuito insieme ai rispettivi carichi punti. Poiché il peso di sé o il carico uniformemente distribuito sono equivalenti alla loro rispettiva serie di carichi a punti i loro trame si abbinano strettamente con l'altro.

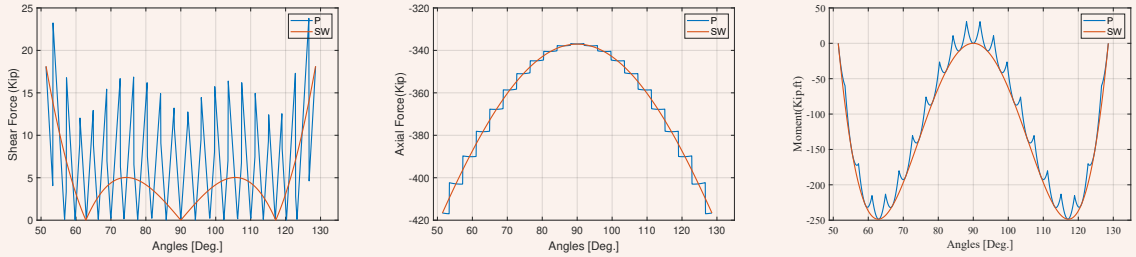


Figura D.10: Arco circolare a tre punte sotto carico di autopeso vs. serie di carica del punto

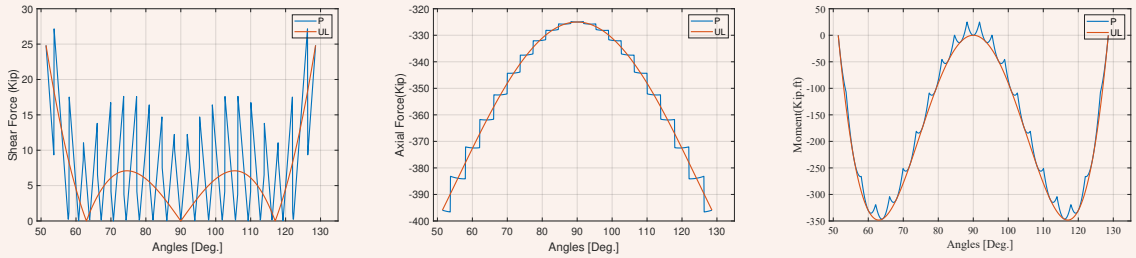


Figura D.11: Arco circolare a tre punte sotto distribuzione uniforme del carico vs. serie di carico a punta

Figura D.10 e la figura D.11 illustra il processo di cui sopra utilizzato per convalidare le equazioni analitiche. In secondo luogo, un modello Sap 2000 è sviluppato per l'arco circolare trincerato sotto caso di auto-peso. Il momento, la forza di taglio e i diagrammi della sua analisi assiale sono confrontati con i grafici tracciati utilizzando l'equazione analitica.

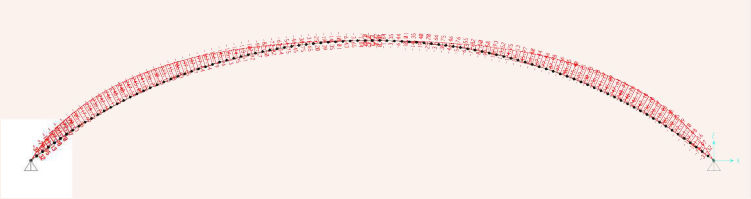


Figura D.12: Sap 2000 - diagramma di momento dell'arco circolare a tre punte sotto il peso auto-

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

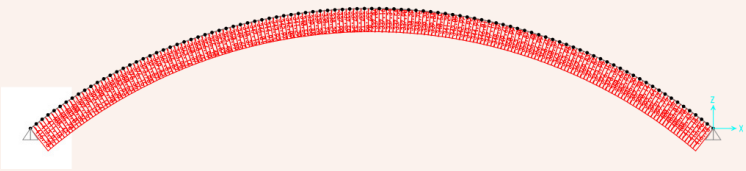


Figura D.13: Sap 2000 - diagramma di forza assiale dell'arco circolare a tre punte sotto il peso auto-

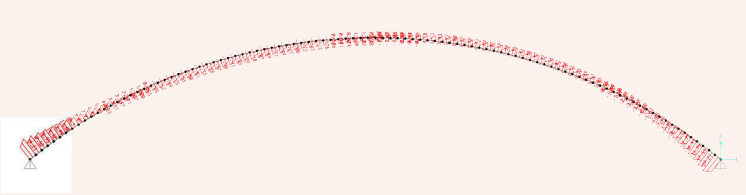


Figura D.14: Sap 2000 - diagramma di forza della cinghia dell'arco circolare a tre punte sotto il peso auto-

I valori numerici sul diagramma del momento in Figura D.12, diagramma di forza assiale in figura D.13 e diagramma di forza della cinghia in Figura D.14 corrisponde ai rispettivi valori sui grafici in Figura D.10.

D.2.6 Conclusioni

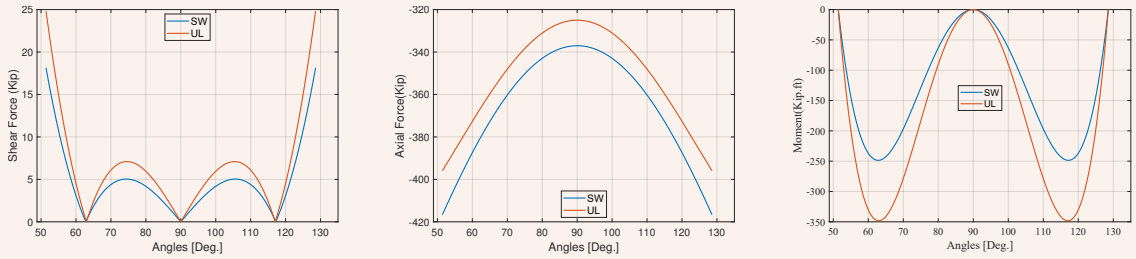


Figura D.15: Arco circolare a tre punte sotto il peso di sé vs. udl

Questa sezione discute il comportamento strutturale di un arco a tre punte sotto carico del punto, carico auto-peso e distribuito uniformemente in termini di forze interne e deviazione. D.15 confronta la condizione di carico del peso con la condizione uniformemente di carico distribuito sotto un carico uguale w=2.275 kip/ft. Rispetto al peso di sé, un carico uniformemente distribuito provoca una maggiore forza e momento della taglio interna, causando una minore forza assiale compressione interna. Figura D.16 mostra i lotti di una condizione di carico asimmetrico.Per questo scopo, un carico unitario viene applicato alla corona e al quarto della campata. In questa condizione, il momento massimo a causa

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

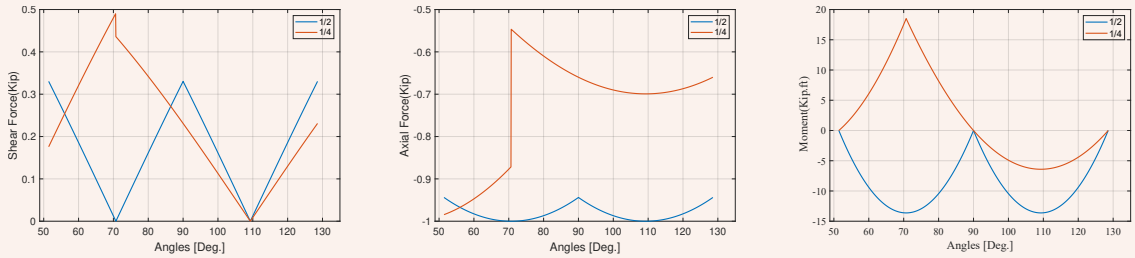


Figura D.16: Arco circolare a tre punte sotto carico di punto a 1/2 e 1/4 di larghezza

del carico di punto applicato al quarto dell'arco è circa 1,5 volte più di quello applicato alla corona. La forza assiale massima dovuta al carico di punta applicato nel quarto della campata è più vicina a quella applicata alla corona.

D.3 Due - arco circolare a cerniera

Un arco circolare simmetrico a due punte ha quattro reazioni totali - due ad ogni supporto. Poiché la costola dell'arco di un arco a due punte è continua tra i supporti e il punto dei supporti sono inmovibile, carico applicato non solo producono reazioni verticali ma anche orizzontali, comunemente sanno come una spinta. Con solo tre equazioni di equilibrio per risolvere le quattro forze reattive sconosciute, un arco a due cerniere è stabilmente indeterminato in primo grado.

D.3.1 Procedura di analisi

Per cominciare, una reazione ridondante dell'arco bifore statically indeterminato, da allora chiamato come struttura originale viene rimosso, trasformandolo in un arco staticamente determinato, quindi denominato come struttura primaria. Utilizzando il metodo ordinario di statici, la reazione di supporto e le forze interne nella struttura primaria a causa del carico applicato sono calcolate. Successivamente, supponendo che non esista nessuna forza esterna sulla struttura primaria, una forza virtuale unità viene applicata nella posizione della forza ridondante rimossa e le forze interne causate dal carico unitario sono calcolate. L'equazione di compatibilità per la deformazione di un arco sotto carico applicato è considerata calcolare la reazione ridondante nell'arco biennale originale staticamente indeterminato. Una volta che tutte le reazioni di supporto sono trovate, le forze interne nell'arco vengono calcolate utilizzando il metodo ordinario delle statiche. Il processo di analisi qui descritto viene eseguito in sette fasi utilizzando Mathematica.I file Mathematic per tutti i passaggi sono inclusi nelle sezioni pertinenti e per semplificazione vengono ampliate solo le equazioni finali delle reazioni e delle forze interne.

Per l'analisi, vengono considerate tre condizioni di carico; un carico a punto , il peso

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dell'arco e applicato uniformemente carico distribuito attraverso l'arco. Il peso auto-e il carico uniformemente distribuito sono simmetrici circa il centro dell'arco dove come un carico di punto, quando applicato ovunque ma alla corona è asimmetrico sul centro dell'arcata. Per illustrare l'analisi, le stesse figure sono utilizzate per il peso auto-auto e le condizioni di carico uniformemente distribuite dove vengono utilizzati diversi set di cifre per la condizione del carico a punto.Le equazioni analitiche per reazioni di supporto e le forze interne sono in termini delle variabili trigonometriche sopra definite.

D.3.2 Carico di punto

In questo caso la forza applicata elementare è data da

$$dp = P \tag{D.6}$$

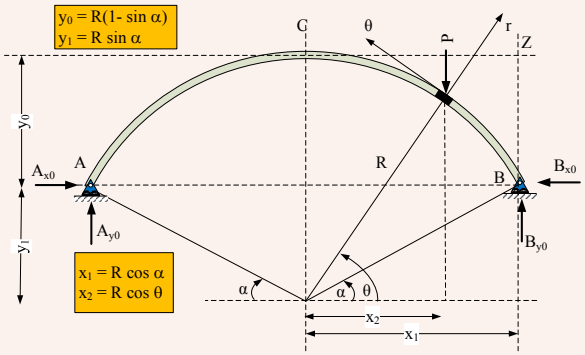


Figura D.17: Arco circolare a due punte sotto carico

Struttura primaria: Reazioni e Forze interne

La forza ridondante Bxo all'abbattimento B nell'arco originale a due punte mostrato in Figura D.17 La posizione di un carico a punto in qualsiasi parte dell'arco provoca discontinuità nelle forze interne, questa discontineità nelle Forze interne mostrate nella Figura D.3.Esprimere le forze interne ad ogni angolo β attraverso l'arco è dipendente dalla sua relazione rispetto all'angolo θ Tenendo conto delle seguenti condizioni, si sviluppano diversi set di equazioni per le forze interne.

$$\beta < \theta,\ \beta \geq \theta \tag{D.7}$$

Il diagramma del corpo libero in Figura D.18, viene utilizzato per determinare le reazioni orizzontali, verticali ai supporti e alle forze interne - assiali, taglio e momento ad ogni angolo β in tutta l'arco. In seguito è la produzione di Mathematica, illustrando la derivazione per la reazione del supporto informatico.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Primary Structure: Reactions

Define the load

```
P=P;
```

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMA=BY2x1 − P(x1 + x2);
```

```
Sol1=Solve[SigMA==0,BY]; BY=BY/.Sol1[[1]]
```

$\frac{1}{2}P(\text{Cos}[\alpha] + \text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol2=Solve[BY − P + AY==0,AY]; AY=AY/.Sol2[[1]]
```

$\frac{1}{2}(P - P\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$

Determine horizontal reaction at A by taking moment with respect to Z (CCW +ve)

```
BX=0;
```

```
SigMZ=AXy0 − AY2x1 + P(x1 − x2) − BXy0;
```

```
Sol3=Solve[SigMZ==0,AX]; AX=AX/.Sol3[[1]];
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

```
MO=FullSimplify[BXy1 + BYx1 − AXy1 − AYx1 − x2P]
```

0

Di seguito è l'uscita da Mathematica che illustra la derivazione per le forze interne - assiali, taglio e momento a qualsiasi angolo β attraverso l'arco.

Primary Structure: Internal Forces

For $\beta < \theta$

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFV1=BYSin[β] + V1;
```

```
Sol4=FullSimplify[Solve[SigFV1==0,V1]]; V1[β_]=V1/.Sol4[[1]]
```

$-\frac{1}{2}P(\text{Cos}[\alpha] + \text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]\text{Sin}[\beta]$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

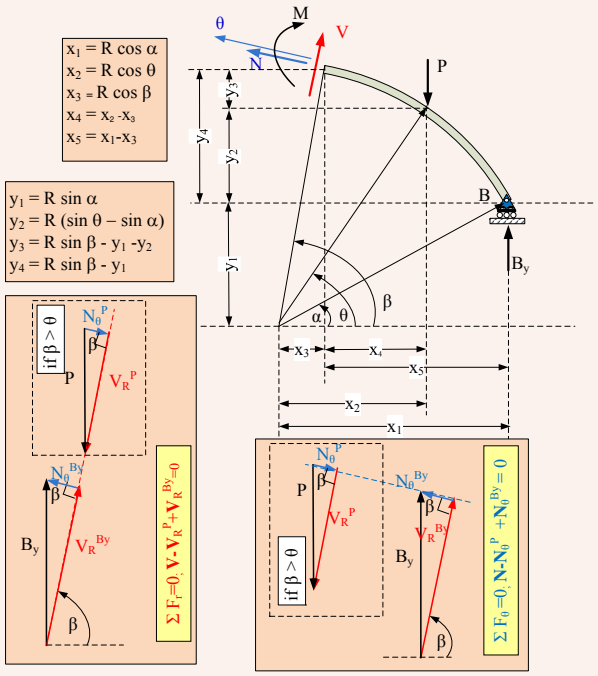


Figura D.18: Arco circolare a due punte dopo aver rimosso la spinta ridondante all'abbattimento

SigFN1=BYCos[β] + NN1;

Sol5=FullSimplify[Solve[SigFN1==0,NN1]]; NN1[β_]=NN1/.Sol5[[1]]

$$-\frac{1}{2}P\text{Cos}[\beta](\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

SigM1= − BYx5 + M1;

Sol6=Solve[SigM1==0,M1]; M1[β_]=M1/.Sol6[[1]]

$$\frac{1}{2}P(R\text{Cos}[\alpha]-R\text{Cos}[\beta])(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$$

For $\beta > \theta$
Summation of Forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

SigFV2=BYSin[β] − PSin[β] + V2;

COPIA DI REVISIONE

```
Sol7=FullSimplify[Solve[SigFV2==0,V2]];V2[β_]=V2/.Sol7[[1]]
```

$$-\frac{1}{2}P(-1+\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])\text{Sin}[\beta]$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFN2=BYCos[β]-PCos[β]+NN2;
```

```
Sol8=FullSimplify[Solve[SigFN2==0,NN2]];NN2[β_]=NN2/.Sol8[[1]]
```

$$-\frac{1}{2}P\text{Cos}[\beta](-1+\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigM2=-BYx5+Px4+M2;
```

```
Sol9=Solve[SigM2==0,M2];M2[β_]=M2/.Sol9[[1]]
```

$$\frac{1}{2}(PR\text{Cos}[\alpha]+PR\text{Cos}[\beta]-PR\text{Cos}[\theta]-PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$$

Struttura primaria: Forza unità virtuale

Una forza virtuale unità viene applicata nella posizione Bxo in direzione di spostamento dell'abbattimento B sotto carico reale. D.19, viene utilizzato per determinare le forze interne ad ogni angolo β in tutta l'arco causato a causa del carico dell'unità virtuale. In seguito è l'uscita da Mathematica che illustra la derivazione per il calcolo delle forze interne provocate a causa della forza virtuale.

Primary Structure: Virtual Force

Apply virtual horizontal force at B

```
BX1=1;
```

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFδV=FullSimplify[BX1Cos[β]-δV];
```

```
Sol10=Solve[SigFδV==0,δV];δV[β_]=δV/.Sol10[[1]]
```

$$\text{Cos}[\beta]$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFδN=FullSimplify[-BX1Sin[β]+δN];
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

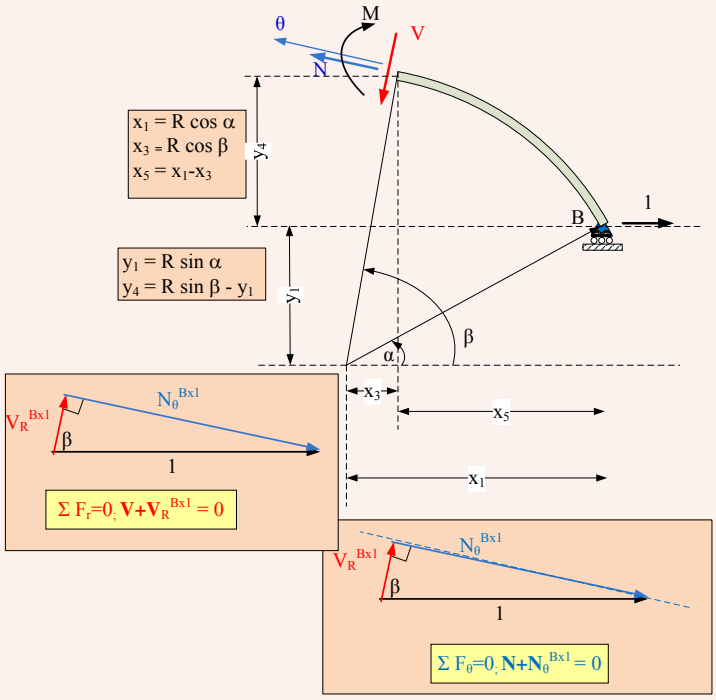


Figura D.19: Arco circolare a due punte con forza virtuale applicata

```
Sol11=Solve[SigFδN==0,δN]; δN[β_]=δN/.Sol11[[1]]
```

```
Sin[β]
```

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigδM=FullSimplify[−BX1y4 + δM];
```

```
Sol12=Solve[SigδM==0,δM]; δM[β_]=δM/.Sol12[[1]]
```

```
−RSin[α] + RSin[β]
```

Struttura originale: Forza ridondante

A seguito dell'equazione di compatibilità per la deformazione di un arco sotto carico applicato insieme al metodo di lavoro virtuale vengono utilizzati per determinare la forza ridondante Bxo all'abbattimento B. Per questo processo sono considerati sia componenti

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

flessografici che assiali dell'equazione di compatibilità, nonché la discontinuità nelle forze interne.

$$1.\ \Delta_B = \left[\int_\alpha^\theta \frac{M1\ \delta M1}{EI}\,d\beta + \int_\theta^{(\pi-\alpha)} \frac{M2\ \delta M2}{EI}\,d\beta + \int_\alpha^\theta \frac{N1\ \delta N1}{a\ e}\,d\beta\ + \int_\alpha^{(\pi-\alpha)} \frac{N2\ \delta N2}{a\ e}\,d\beta\right] \tag{D.8}$$

Dove?

$M1(\beta < \theta)$, $M2(\beta \geq \theta)$	Momento interno nel fascio causato da carico reale
$\delta M1(\beta < \theta)$,$\delta M2(\beta \geq \theta)$	Momento interno causato a causa di esterno carico unità virtuale
$N1(\beta < \theta)$,$N2(\beta \geq \theta)$	Forza assiale interna nel fascio causato da carico reale
$\delta N1(\beta < \theta)$, $\delta N2(\beta \geq \theta)$	Forza assiale interna causata a causa di esterna carico unità virtuale

Di seguito è l'uscita da Mathematica che illustra la derivazione per il calcolo della forza ridondante.

Original Structure: Redundant Force

Deformation due to real load (Flexural + Axial)
Displacement at B

DeltaBX1F=FullSimplify $\left[\int_\alpha^\theta \frac{M1[\beta]\delta M[\beta]}{ei}d\beta + \int_\theta^{\pi-\alpha} \frac{M2[\beta]\delta M[\beta]}{ei}d\beta\right]$;

DeltaBX1A=FullSimplify $\left[\int_\alpha^\theta \frac{NN1[\beta]\delta N[\beta]}{ae}d\beta + \int_\theta^{\pi-\alpha} \frac{NN2[\beta]\delta N[\beta]}{ae}d\beta\right]$;

DeltaBX1=DeltaBX1F + DeltaBX1A;

Deformation due to virtual load (Flexural + Axial)

F11F=FullSimplify $\left[\int_\alpha^{\pi-\alpha} \frac{\delta M[\beta]\delta M[\beta]}{ei}d\beta\right]$;

F11A=FullSimplify $\left[\int_\alpha^{\pi-\alpha} \frac{\delta N[\beta]\delta N[\beta]}{ae}d\beta\right]$;

F11=F11F + F11A;

Redundant force in original structure

```
Solve[{BXOF11==DeltaBX1},{BXO}];
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

FullSimplify[BXO]

$$\frac{P\left(-\left(i-3aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i-aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]+aR^2(-2+2\text{Sin}[\alpha](-(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha]+(\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\theta]))\right)}{2(\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+2\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]}$$

Struttura originale: Reazioni e Forze interne

Dopo che la forza ridondante nella struttura originale Bxo è calcolato, rimanendo reazione di supporto e le forze interne nella struttura originaria sono determinate utilizzando il diagramma del corpo libero in Figura D.20. Di seguito è riportato l'output di Mathematica

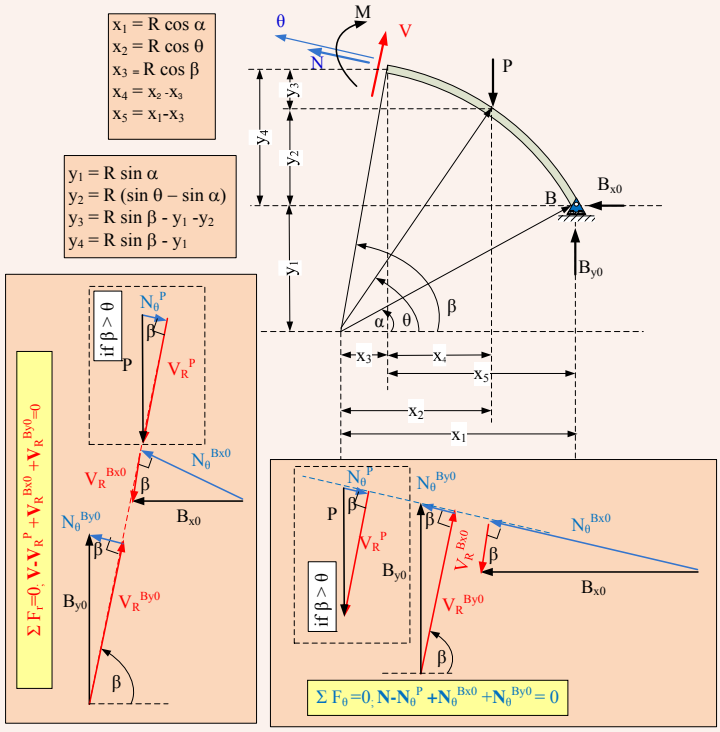


Figura D.20: Fbd dell'arco circolare biforato originale sotto carico a punto

che illustra la derivazione per il calcolo delle reazioni di supporto

Original Structure: Reactions

Determine Vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMAO=BYO2x1 − P(x1 + x2);
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
Sol13=Solve[SigMAO==0,BYO]; BYO=BYO/.Sol13[[1]]
```

$\frac{1}{2}P(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol14=Solve[BYO − P + AYO==0,AYO]; AYO=AYO/.Sol14[[1]]
```

$\frac{1}{2}(P-P\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$

Determine horizontal reaction at A by taking summation of forces in the x direction

```
AXO=BXO;
```

Check statics by taking summation of moments with respect to O CCW +ve

```
Clear[MO];
```

```
MO=FullSimplify[BYOx1 + BXOy1 − AYOx1 − AXOy1 − Px2]
```

0

Di seguito è l'uscita da Mathematica che illustra la derivazione per il calcolo delle forze interne.

Original Structure: Internal Forces

For $\beta < \theta$
Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

```
SigFVO1= − BXOCos[β] + BYOSin[β] + VO1;
```

```
Sol15=Solve[SigFVO1==0,VO1]; VO1[β_]:=VO1/.Sol15[[1]];
```

```
FullSimplify[VO1[β]]
```

$$\frac{1}{2}P\left(-(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]\text{Sin}[\beta]\right.$$
$$+\left(\text{Cos}[\beta]\left(-\left(i-3aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i-aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]+aR^2(-2+2\text{Sin}[\alpha](-(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha]+(\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.2\text{Sin}[\theta]\right)\right)\right)/\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\Big)$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFNO1=BXOSin[β] + BYOCos[β] + NO1;
```

```
Sol16=Solve[SigFNO1==0,NO1]; NO1[β_]:=NO1/.Sol16[[1]];
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
FullSimplify[NO1[β]]
```

$$\frac{1}{2}P\left(-\text{Cos}[\beta](\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]\right.$$
$$+\left(\text{Sin}[\beta]\left(\left(i-3aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]+aR^2(2+(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]-2\text{Sin}[\alpha]((\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.2\text{Sin}[\theta]\right)\right)\right)/\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\Big)$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigMO1=BXOy4 - BYOx5 + MO1;
```

```
sol17=Solve[SigMO1==0,MO1]; MO1[β_]:=MO1/.sol17[[1]];
```

```
FullSimplify[MO1[β]]
```

$$\frac{1}{2}P\left(R(\text{Cos}[\alpha]-\text{Cos}[\beta])(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]\right.$$
$$-\left(R(\text{Sin}[\alpha]-\text{Sin}[\beta])\left(\left(i-3aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]+aR^2(2+(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]-2\text{Sin}[\alpha]((\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.2\text{Sin}[\theta]\right)\right)\right)/\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\Big)$$

For $\beta > \theta$
Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

```
SigFVO2= - BXOCos[β] + BYOSin[β] - PSin[β] + VO2;
```

```
Sol18=Solve[SigFVO2==0,VO2]; VO2[β_]:=VO2/.Sol18[[1]];
```

```
FullSimplify[VO2[β]]
```

$$\frac{1}{2}P\left(2\text{Sin}[\beta]-(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]\text{Sin}[\beta]\right.$$
$$+\left(\text{Cos}[\beta]\left(-\left(i-3aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i-aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]+aR^2(-2+2\text{Sin}[\alpha](-(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha]+(\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.2\text{Sin}[\theta]\right)\right)\right)/\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\Big)$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFNO2=BXOSin[β] + BYOCos[β] - PCos[β] + NO2;
```

```
Sol19=Solve[SigFNO2==0,NO2]; NO2[β_]:=NO2/.Sol19[[1]];
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

FullSimplify[NO2[β]]

$$\frac{1}{2}P\,(2\text{Cos}[\beta]-\text{Cos}[\beta](\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]+(\text{Sin}[\beta]\,((i-3aR^2)\,\text{Cos}[2\alpha]+(-i+aR^2)\,\text{Cos}[2\theta]+aR^2(2+(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]-2\text{Sin}[\alpha]((\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\theta])))\,/((\pi-2\alpha)\,(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha])+(i-3aR^2)\,\text{Sin}[2\alpha]))$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigMO2=BXOy4 − BYOx5 + Px4 + MO2;
```

```
sol20=Solve[SigMO2==0,MO2]; MO2[β_]:=MO2/.sol20[[1]];
```

FullSimplify[MO2[β]]

$$\frac{1}{2}PR\,(2(\text{Cos}[\beta]-\text{Cos}[\theta])+(\text{Cos}[\alpha]-\text{Cos}[\beta])(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]+((\text{Sin}[\alpha]-\text{Sin}[\beta])\,(-(i-3aR^2)\,\text{Cos}[2\alpha]+(i-aR^2)\,\text{Cos}[2\theta]+aR^2(-2+2\text{Sin}[\alpha](-(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha]+(\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\theta])))\,/((\pi-2\alpha)\,(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha])+(i-3aR^2)\,\text{Sin}[2\alpha]))$$

Sfittamento

Figura D.21 e le equazioni analitiche sviluppate sopra sono utilizzate per calcolare la deflezione nell'arco circolare simmetrico a due punte.

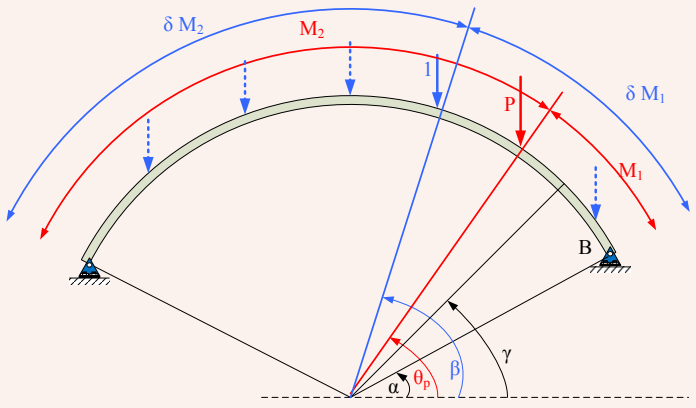


Figura D.21: Fbd a calcolare la deflezione in arco circolare biforato

$$\delta P.\,\Delta=\left[\int_{\alpha}^{\theta}\frac{M1\;\delta\text{M1}}{EI}\,Rd\beta+\int_{\theta}^{(\pi-\alpha)}\frac{M2\;\delta\text{M2}}{EI}\,Rd\beta\right] \tag{D.9}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

Dove?

δP	Carico unità virtuale esterno applicato in direzione di Δ
Δ	Slocamento esterno causato da carico reale applicato
$M1(\beta < \theta),\ M2(\beta \geq \theta)$	Momento interno nel fascio causato con carico reale del punto
$\delta M1(\beta < \theta),\ \delta M2(\beta \geq \theta)$	Momento interno causato a causa del carico di unità virtuale esterno

Sintesi dei risultati

Figura D.22 mostra i diagrammi per un esempio di arco a due punte discusso sopra. Un carico del punto è applicato alla corona dell'arco. La forza assiale interna e la forza della taglio sono normalizzati rispetto al risultato di reazione verticale e spinta agli abutments. Il momento interno è normalizzato rispetto al prodotto della forza assiale interna e dell'ascesa. Come indicato dalla trama, tutte le forze interne sono simmetriche sulla corona dell'arco. La forza di compressione assiale è più alta a circa $\frac{1}{6}$ della durata da entrambi i abutments e si riduce a circa 91% Il momento interno è zero alle cerniere ed è più alto alla corona. La forza di taglio d'altra parte è relativamente inferiore rispetto alla forza assiale interna e al momento. La deflezione è zero alle cerniere e massima a circa $\frac{1}{6}$ di entrambi gli abutments.

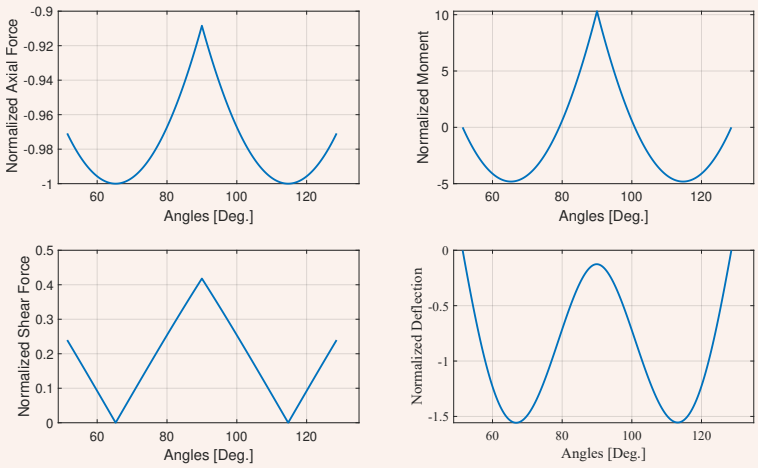


Figura D.22: Trama per arco circolare a due punte sotto carico del punto

D.3.3 Peso auto

In questo caso la forza applicata elementare è data da

$$dP = wds = wRd\theta \tag{D.10}$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

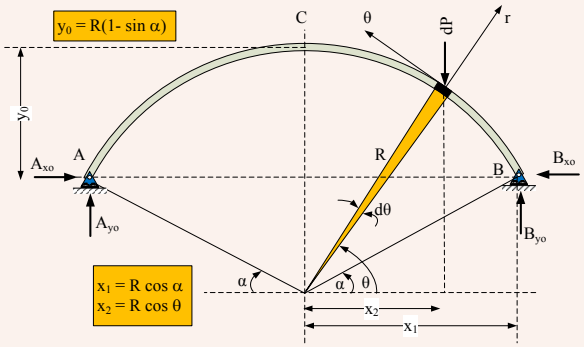


Figura D.23: Arco circolare a due punte sotto il peso di sé

Struttura primaria: Reazioni e Forze interne

La forza ridondante Bxo all'abbattimento B nell'arco originale a due punte mostrato in Figura D.23 viene rimosso convertendolo in una struttura primaria. Il diagramma del corpo libero in Figura D.24, viene utilizzato per determinare le reazioni orizzontali, verticali ai supporti e alle forze interne - assiali, taglio e momento ad ogni angolo β in tutta l'arco. In seguito è la produzione di Mathematica che illustra la derivazione per la reazione del supporto informatico.

Primary Strucure: Reactions

Define the load (omitting the dθ)

dP'=$w R$;

Determine reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

SigMA=BY2x1 − $\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}$(x1 + x2)dP'$d\theta$;

Sol1=Solve[SigMA==0,BY]; BY=BY/.Sol1[[1]]

$\frac{1}{2}Rw(\pi - 2\alpha)$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

Sol2=Solve $\left[\text{BY} - \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \text{dP}' d\theta + \text{AY}==0,\text{AY}\right]$; AY=AY/.Sol2[[1]]

$\frac{1}{2}Rw(\pi - 2\alpha)$

Determine horizontal reaction at A by taking moment with respect to Z (CCW +ve)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
BX=0;
```

```
SigMZ=AXy0 − AY2x1 + ∫_α^(π−α) dP′(x1 − x2)dθ − BXy0;
```

```
Sol3=Solve[SigMZ==0,AX]; AX=AX/.Sol3[[1]];
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

```
MO=FullSimplify [BXy1 + BYx1 − AXy1 − AYx1 − ∫_α^(π−α) x2dP′dθ]
```

```
0
```

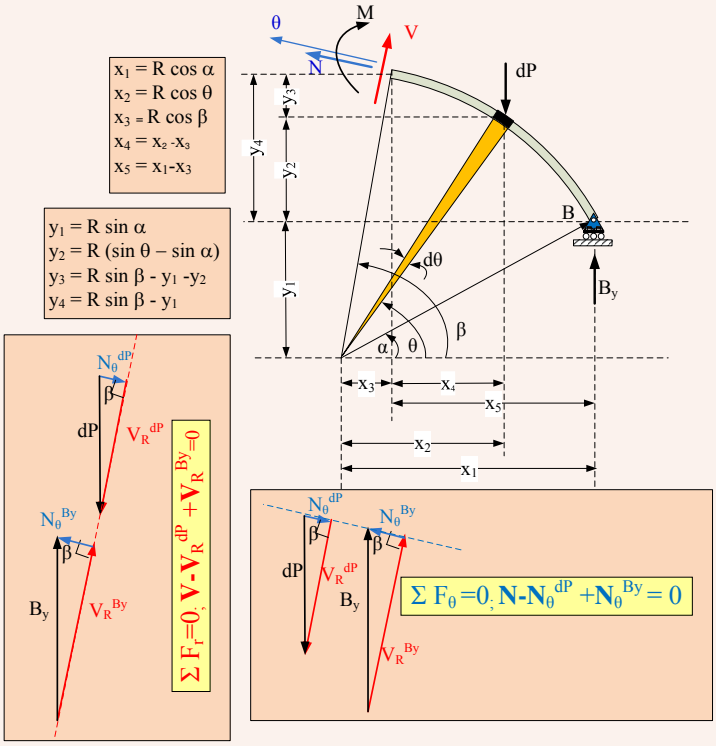


Figura D.24: Fbd di arco circolare a due punte dopo aver rimosso la spinta ridondante all'abbattimento

Di seguito è l'uscita da Mathematica che illustra la derivazione per le forze interne - assiali, taglio e momento a qualsiasi angolo β attraverso l'arco.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Primary Structure: Internal Forces

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFV=BYSin[β] − ∫_α^β dP'Sin[β]dθ + V;
```

```
Sol4=FullSimplify[Solve[SigFV==0,V]]; V[β_]=V /.Sol4[[1]]
```

$$-\frac{1}{2}Rw(\pi - 2\beta)\text{Sin}[\beta]$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFN=BYCos[β] − ∫_α^β dP'Cos[β]dθ + N;
```

```
Sol5=FullSimplify[Solve[SigFN==0,N]]; NN[β_]=N /.Sol5[[1]]
```

$$-\frac{1}{2}Rw(\pi - 2\beta)\text{Cos}[\beta]$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigM= − BYx5 + ∫_α^β dP'x4dθ + M;
```

```
Sol6=Solve[SigM==0,M]; M[β_]=M /.Sol6[[1]]
```

$$\frac{1}{2}\left(\pi R^2 w\text{Cos}[\alpha] - 2R^2 w\alpha\text{Cos}[\alpha] - \pi R^2 w\text{Cos}[\beta] + 2R^2 w\beta\text{Cos}[\beta] + 2R^2 w\text{Sin}[\alpha] - 2R^2 w\text{Sin}[\beta]\right)$$

Struttura primaria: Forza unità virtuale

Figura D.19 e un processo simile utilizzato per arco circolare a due punte sotto carico del punto è seguito per determinare le forze interne ad ogni angolo β in tutta l'arco causato a causa del carico di unità virtuale. Di seguito è l'uscita da Mathematica, illustrando la derivazione per il calcolo delle forze interne provocate a causa di forze virtuali.

Primary Structure: Virtual Force

Apply virtual horizontal force at B

```
BX1=1;
```

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFδV=FullSimplify[BX1Cos[β] − δV];
```

```
Sol10=Solve[SigFδV==0,δV]; δV[β_]=δV /.Sol10[[1]]
```

$$\text{Cos}[\beta]$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFδN=FullSimplify[−BX1Sin[β] + δN];
```

```
Sol11=Solve[SigFδN==0,δN]; δN[β_]=δN/.Sol11[[1]]
```

```
Sin[β]
```

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigδM=FullSimplify[−BX1y4 + δM];
```

```
Sol12=Solve[SigδM==0,δM]; δM[β_]=δM/.Sol12[[1]]
```

$$-R\text{Sin}[\alpha] + R\text{Sin}[\beta]$$

Struttura originale: Forza ridondante

Utilizzando l'equazione di compatibilità seguente per la deformazione di un arco sotto carico applicato insieme al metodo di lavoro virtuale viene utilizzato per determinare la forza ridondante Bxo all'abbattimento B. Per questo processo sono considerati sia componenti flessografici che assiali dell'equazione di compatibilità.

$$1.\ \Delta_B = \left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M\ \delta\text{M}}{EI}\, d\beta + \int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{N\ \delta\text{N}}{a\ e}\, d\beta\right] \tag{D.11}$$

Dove?

M	Momento interno nel fascio causato da carico reale
δM	Momento interno causato a causa del carico di unità virtuale esterno
N	Forza assiale interna nel fascio causato da carico reale
δN	Forza assiale interna causata a causa del carico di unità virtuale esterno

Di seguito è l'uscita da Mathematica che illustra la derivazione per il calcolo della forza ridondante.

Original Structure: Redundant Force

Deformation due to the real load (Flexural + Axial)
Displacement at B

```
DeltaBX1F=FullSimplify [∫_α^(π−α) M[β]δM[β]/(e i) dβ];
```

```
DeltaBX1A=FullSimplify [∫_α^(π−α) NN[β]δN[β]/(a e) dβ];
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
DeltaBX1=DeltaBX1F + DeltaBX1A;
```

Deformation due to virtual force (Flexural + Axial)

```
F11F=FullSimplify[∫_α^(π−α) δM[β]δM[β]/ei dβ];
```

```
F11A=FullSimplify[∫_α^(π−α) δN[β]δN[β]/ae dβ];
```

```
F11=F11F + F11A;
```

Redundant force in original structure

```
Solve[{BXOF11==DeltaBX1},{BXO}];
```

```
FullSimplify[BXO]
```

$$\frac{Rw\left((\pi-2\alpha)\left(-4aR^2-\left(i-5aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]\right)-\left(i+aR^2(-3+\pi-2\alpha)(3+\pi-2\alpha)\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)}{2(\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+2\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]}$$

Struttura originale: Reazioni e Forze interne

Dopo che la forza ridondante nella struttura originale Bxo è calcolato, rimanendo reazione di supporto e le forze interne nella struttura originaria sono determinate utilizzando il diagramma del corpo libero in Figura D.25. Di seguito è riportato l'output di Mathematica che illustra la derivazione per il calcolo delle reazioni di supporto.

Original Structure: Reactions

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMAO=BYO2x1 − ∫_α^(π−α) (x1 + x2)dP′ dθ;
```

```
Sol10=Solve[SigMAO==0,BYO]; BYO=BYO/.Sol10[[1]]
```

$$\frac{1}{2}Rw(\pi-2\alpha)$$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol11=Solve[BYO − ∫_α^(π−α) dP′ dθ + AYO==0,AYO]; AYO=AYO/.Sol11[[1]]
```

$$\frac{1}{2}Rw(\pi-2\alpha)$$

Determine horizontal reaction at A by taking summation of forces in the x direction

```
AXO=BXO;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

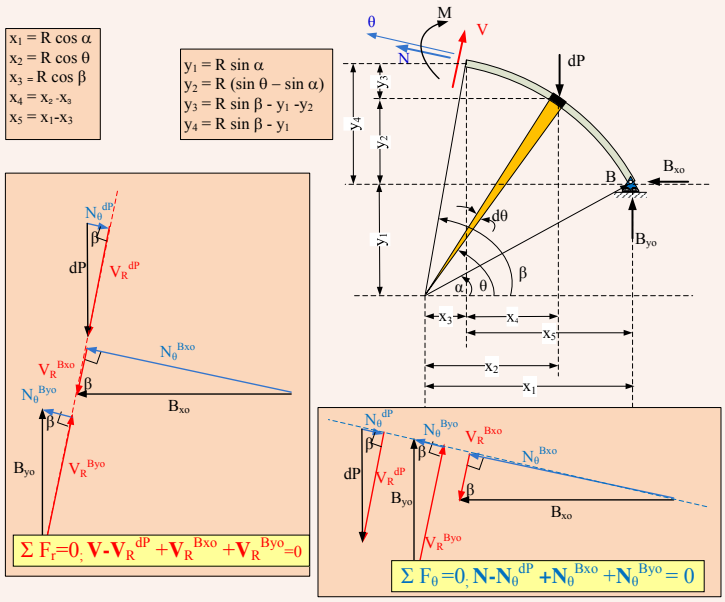


Figura D.25: Fbd dell'arco circolare biforato originale sotto il peso di auto

Check statics by taking summation of moments with respect to O CCW +ve

```
Clear[MO];
```

$$\text{MO=FullSimplify}\left[\text{BYOx1} + \text{BXOy1} - \text{AYOx1} - \text{AXOy1} - \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \text{dP'x2}\,d\theta\right]$$

```
0
```

Di seguito è l'uscita dalla Mathematica, illustrando la derivazione per il calcolo delle forze interne.

Original Structure: Internal Forces

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

$$\text{SigFVO= } - \text{BXOCos}[\beta] + \text{BYOSin}[\beta] - \int_{\alpha}^{\beta} \text{dP'Sin}[\beta]\,d\theta + \text{VO};$$

```
Sol12=Solve[SigFVO==0,VO]; VO[β_]:=VO/.Sol12[[1]];
```

COPIA DI REVISIONE

FullSimplify[VO[β]]

$$-\left(Rw\left(\text{Cos}[\beta]\left(4aR^2(\pi-2\alpha)+\left(i-5aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2(-3+\pi-2\alpha)(3+\pi-2\alpha)\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)+(\pi-2\beta)\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right)\right)/\left(2\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force +(ve Tension)

SigFNO=BXOSin[β] + BYOCos[β] $-\int_{\alpha}^{\beta} \text{dP}'\text{Cos}[\beta]d\theta$ + NO;

Sol13=Solve[SigFNO==0,NO]; NNO[β_]:=NO/.Sol13[[1]];

FullSimplify[NNO[β]]

$$\left(Rw\left((\pi-2\beta)\text{Cos}[\beta]\left(-(\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)-\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)+\left(4aR^2(\pi-2\alpha)+\left(i-5aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2(-3+\pi-2\alpha)(3+\pi-2\alpha)\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right)\right)/\left(2\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

Clear[MO];

SigMO=BXOy4 − BYOx5 + $\int_{\alpha}^{\beta} \text{dP}'\text{x4}d\theta$ + MO;

sol14=Solve[SigMO==0,MO]; MO[β_]:=MO/.sol14[[1]];

FullSimplify[MO[β]]

$$\frac{1}{2}R^2w\left((\pi-2\alpha)(\text{Cos}[\alpha]-\text{Cos}[\beta])-\left(\left(4aR^2(\pi-2\alpha)+\left(i-5aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2(-3+\pi-2\alpha)(3+\pi-2\alpha)\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)(\text{Sin}[\alpha]-\text{Sin}[\beta])\right)/\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)-2((\alpha-\beta)\text{Cos}[\beta]-\text{Sin}[\alpha]+\text{Sin}[\beta])\right)$$

Sfittamento

Le equazioni analitiche sopra sviluppate sono utilizzate per calcolare la deflezione nell'esempio simmetrico dell'arco circolare discusso nella sezione D.2.3. Dopo l'equazione del lavoro virtuale viene utilizzato per calcolare la deflezione.

$$\delta P.\,\Delta = \left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{M\ \delta\text{M1}}{EI}\,Rd\beta + \int_{\theta}^{(\pi-\alpha)} \frac{M\ \delta\text{M2}}{EI}\,Rd\beta\right] \tag{D.12}$$

Dove?

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

δP	Carico unità virtuale esterno applicato in la direzione di Δ
Δ	Slocamento esterno causato dal carico reale applicato
M	Momento interno nel fascio causato da carico reale
$\delta M1(\beta < \theta),\ \delta M2(\beta \geq \theta)$	Momento interno causato a causa di carico unità virtuale esterno

Sintesi dei risultati

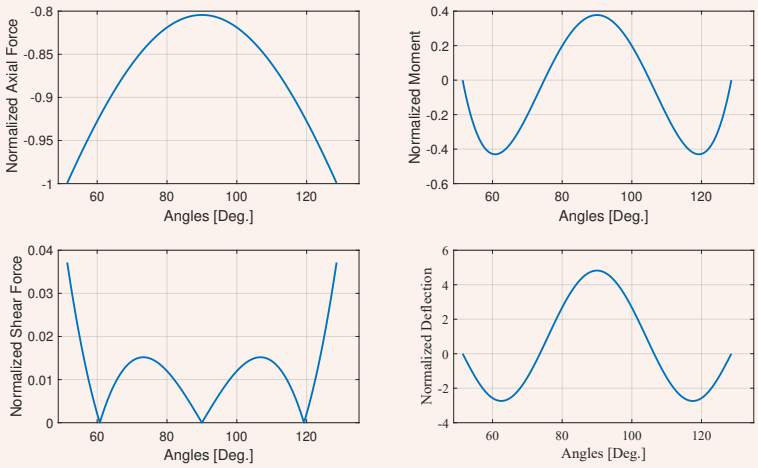


Figura D.26: Trama per arco circolare a due punte sotto peso auto

Figura D.26 mostra i diagrammi per l'arco a due punte sotto il peso di sé discusso nella sezione sopra. La forza assiale interna e la forza della cinghia sono normalizzati rispetto al risultante della reazione verticale e spinta agli abutments. La forza di compressione assiale è più alta agli abutments e diminuisce verso la corona fino a circa 80.5% della forza di taglio, invece, è relativamente bassa e varia tra circa 3.75% e 1,5%, rispettivamente dall'abbattimento alla corona. Il momento interno è normalizzato rispetto al prodotto della forza assiale interna e dell'ascesa. Il tempo interno è zero nella posizione delle cerniere ed è più alto a circa $\frac{1}{6}$ Ci sono due punti di inflessione nel diagramma del momento e corrispondono ai punti di deviazione zero nell'arco. La Deflezione è più alta alla corona e il grafico della deflettorazione segue un profilo simile come quello del diagramma di momento. La massima deviazione positiva e negativa corrisponde al punto del massimo momento positivo e negativo nell'arco rispettivamente.

D.3.4 Carico distribuito uniformemente

In questo caso la forza applicata elementare è data da

$$dp = wdx = wRSin\theta \tag{D.13}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

La forza ridondante Bxo all'abbattimento B nell'arco originale a due punte mostrato in Figura D.23 viene rimosso convertendolo in una struttura primaria. I primi tre passaggi, tra cui la reazione di supporto e le forze interne causate a causa del carico reale e delle forze interne provocate a seguito del carico virtuale sono simili a quello per l'arco circolare biforato sotto il peso auto-peso. Per semplicità si mostrano solo i passi che coinvolgono il calcolo della forza ridondante, le reazioni di supporto e le forze interne nella struttura originale.

Struttura originale: Forza ridondante

Il processo utilizzato per l'arco a due punte sotto il peso di sé ripetuto qui.L'equazione della compatibilità per la deformazione di un arco sotto carico applicato insieme al metodo di lavoro virtuale sono utilizzati per determinare la forza ridondante Bxo all'abbattimento B. Per questo processo sono considerati componenti sia flessori che assiali dell'equazione di compatibilità. Di seguito è l'output da Mathematica che illustra la derivazione per il calcolo della forza ridondante.

Original Structure: Redundant Force

Deformation due to the real load (Flexural + Axial)
Displacement at B

```
DeltaBX1F=FullSimplify [∫_α^(π-α) M[β]δM[β]/(ei) dβ];
```

```
DeltaBX1A=FullSimplify [∫_α^(π-α) NN[β]δN[β]/(ae) dβ];
```

```
DeltaBX1=DeltaBX1F + DeltaBX1A;
```

Deformation due to virtual force (Flexural + Axial)

```
F11F=FullSimplify [∫_α^(π-α) δM[β]δM[β]/(ei) dβ];
```

```
F11A=FullSimplify [∫_α^(π-α) δN[β]δN[β]/(ae) dβ];
```

```
F11=F11F + F11A;
```

Redundant force in original structure

```
Solve[{BXOF11==DeltaBX1},{BXO}];
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

FullSimplify[BXO]

$$\frac{w\left(9aR^3\text{Cos}[\alpha]-16iR\text{Cos}[\alpha]^3+aR^3(7\text{Cos}[3\alpha]+3(\pi-2\alpha)(\text{Sin}[\alpha]-\text{Sin}[3\alpha]))\right)}{12\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+(i-3aR^2)\text{Sin}[2\alpha]\right)}$$

Struttura originale: Reazioni e Forze interne

Dopo che la forza ridondante nella struttura originale Bxo è calcolato, rimanendo reazione di supporto e le forze interne nella struttura originaria sono determinate utilizzando il diagramma del corpo libero in Figura D.25. In seguito è l'output di Mathematica che illustra la derivazione per il calcolo delle reazioni di supporto.

Original Structure: Reactions

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

SigMAO=BYO**2**x1 − $\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}$(x1 + x2)dP′ $d\theta$;

Sol10=Solve[SigMAO==**0**,BYO]; BYO=BYO/.Sol10[[**1**]]

$Rw\text{Cos}[\alpha]$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

Sol11=Solve $\left[\text{BYO} - \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \text{dP}'\, d\theta + \text{AYO}==\mathbf{0},\text{AYO}\right]$; AYO=AYO/.Sol11[[**1**]]

$Rw\text{Cos}[\alpha]$

Determine horizontal reaction at A by taking summation of forces in the x direction

AXO=BXO;

Check statics by taking summation of moments with respect to O CCW +ve

Clear[MO];

MO=FullSimplify $\left[\text{BYOx1} + \text{BXOy1} - \text{AYOx1} - \text{AXOy1} - \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \text{dP}'\text{x2}\, d\theta\right]$

0

Di seguito è l'uscita da Mathematica che illustra la derivazione per il calcolo delle forze interne.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Original Structure: Internal Forces

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

SigFVO= − BXOCos[β] + BYOSin[β] − $\int_{\alpha}^{\beta}$ dP′Sin[β]dθ + VO;

Sol12=Solve[SigFVO==0,VO]; VO[β_]:=VO/.Sol12[[1]];

FullSimplify[VO[β]]

$$\left(Rw\left(3\left(-4i+3aR^2\right)\text{Cos}[\alpha]\text{Cos}[\beta]+\left(-4i+7aR^2\right)\text{Cos}[3\alpha]\text{Cos}[\beta]\right.\right.$$
$$+3aR^2(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\beta](\text{Sin}[\alpha]-\text{Sin}[3\alpha])$$
$$\left.\left.-6\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[2\beta]\right)\right)/$$
$$\left(12\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force +(ve Tension)

SigFNO=BXOSin[β] + BYOCos[β] − $\int_{\alpha}^{\beta}$ dP′Cos[β]dθ + NO;

Sol13=Solve[SigFNO==0,NO]; NNO[β_]:=NO/.Sol13[[1]];

FullSimplify[NNO[β]]

$$\left(Rw\left(12\text{Cos}[\beta]^2\left(-(\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)-\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right.\right.$$
$$+\left(3\left(4i-3aR^2\right)\text{Cos}[\alpha]+\left(4i-7aR^2\right)\text{Cos}[3\alpha]+3aR^2(\pi-2\alpha)(-\text{Sin}[\alpha]+\text{Sin}[3\alpha])\right)\text{Sin}[\beta]\Big)/$$
$$\left(12\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

Clear[MO];

SigMO=BXOy4 − BYOx5 + $\int_{\alpha}^{\beta}$ dP′x4dθ + MO;

sol14=Solve[SigMO==0,MO]; MO[β_]:=MO/.sol14[[1]];

FullSimplify[MO[β]]

$$\frac{1}{12}R^2w\left(12\text{Cos}[\alpha](\text{Cos}[\alpha]-\text{Cos}[\beta])-6(\text{Cos}[\alpha]-\text{Cos}[\beta])^2\right.$$
$$\left.+\left(\left(9aR^2\text{Cos}[\alpha]-16i\text{Cos}[\alpha]^3+aR^2(7\text{Cos}[3\alpha]+3(\pi-2\alpha)(\text{Sin}[\alpha]-\text{Sin}[3\alpha])\right)\right)(\text{Sin}[\alpha]-\text{Sin}[\beta])\right)/$$
$$\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Sfittamento

Il processo di calcolare la deflezione in arco circolare a due punte sotto carico uniformemente distribuito, nonché i valori numerici utilizzati per la variabile trigonometrica sono simili a quelli sotto il peso del Sé e quindi non è mostrato qui.

Sintesi dei risultati

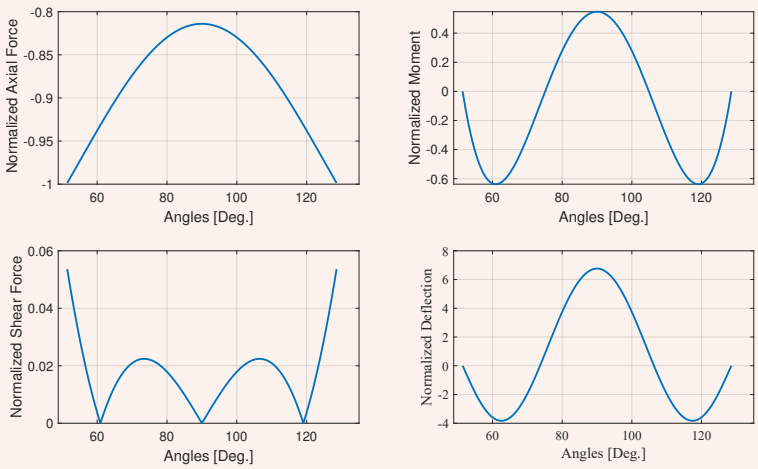


Figura D.27: Trama per arco circolare a due punte sotto udl

Figura D.27 mostra i diagrammi per l'arco a due punte sotto distribuzione uniforme del carico discusso nella sezione precedente. La forza assiale interna e la forza di taglio sono normalizzati rispetto al risultante della reazione verticale e spinta agli abutments. La forza di compressione assiale è più alta agli abutments e diminuisce verso la corona fino all'81,5% della forza di taglio, invece, è relativamente bassa e varia tra circa 5.25% e 2%, rispettivamente dall'abbattimento alla corona. Il momento interno è normalizzato rispetto al prodotto della forza assiale interna e dell'ascesa. Il tempo interno è zero nella posizione delle cerniere ed è più alto a circa $\frac{1}{6}$ Ci sono due punti di inflessione nel diagramma del momento e corrispondono ai punti di deviazione zero nell'arco. La Deflezione è più alta alla corona e il grafico della deflettorazione segue un profilo simile come quello del diagramma di momento. La massima deviazione positiva e negativa corrisponde al punto del massimo momento positivo e negativo nell'arco rispettivamente.

D.3.5 Arco circolare a due punte: validazione

Le equazioni analitiche sviluppate sopra per l'arco circolare biforato sotto carico del punto, il carico auto-peso ed uniformemente distribuito sono convalidate in due fasi. In primo luogo, il peso di sé e carico uniformemente distribuito applicato attraverso l'arco arco sono suddivisi in serie di carichi 20 punti. I grafici delle forze interne e deflettori sono tracciati utilizzando le equazioni analitiche per il peso di sé e carico distribuito uniformemente

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

insieme ai rispettivi carichi punti. Questi grafici sono sovrapposti per verificare la validità delle soluzioni analitiche, poiché il carico auto-peso o distribuito uniformemente equivale alla loro rispettiva serie di carichi a punti i loro lotti si abbinano strettamente tra loro.

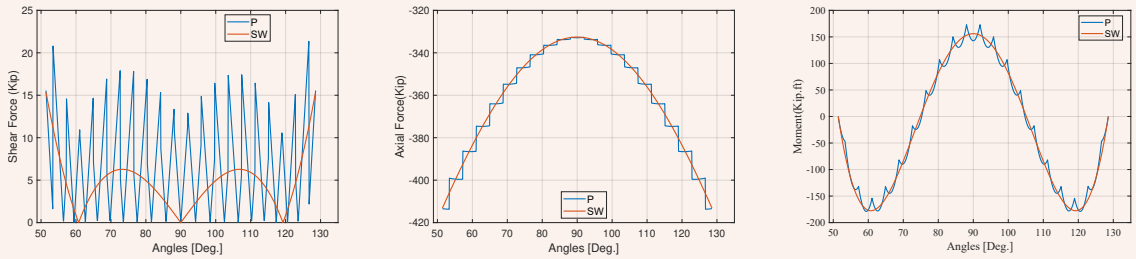


Figura D.28: Arco circolare a due punte sotto carico auto-peso vs. serie di carica punti

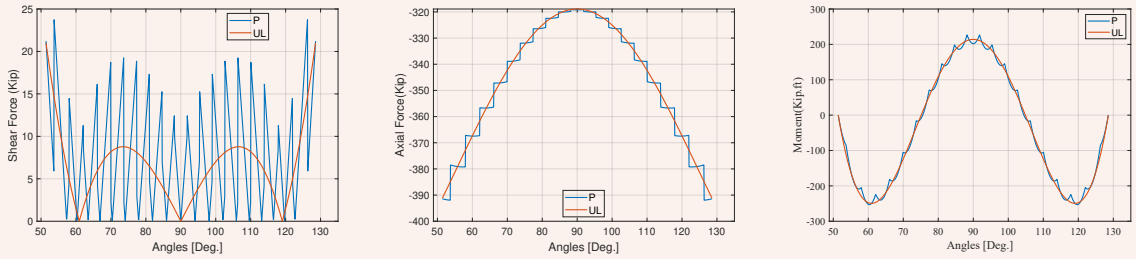


Figura D.29: Arco circolare a due punte in uniforme distribuzione del carico vs. serie di carico del punto

Figura D.28 e la figura D.29 illustra il processo di cui sopra utilizzato per convalidare le equazioni analitiche. In secondo luogo, un modello Sap 2000 è sviluppato per l'arco circolare trincerato sotto caso di auto-peso. Il momento, la forza di taglio e i diagrammi della sua analisi assiale sono confrontati con i grafici tracciati utilizzando l'equazione analitica. I valori numerici sul diagramma del momento in Figura D.30, diagramma di



Figura D.30: Sap 2000 - diagramma di momento dell'arco circolare a due punte sotto il peso

forza assiale in figura D.31 e diagramma di forza della cinghia in Figura D.32 corrisponde strettamente ai rispettivi valori sui grafici FiguraD.28.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



Figura D.31: Sap 2000 - diagramma di forza assiale dell'arco circolare a due punte sotto il peso auto-



Figura D.32: Sap 2000 - diagramma di forza della cinghia dell'arco circolare a due punte sotto il peso

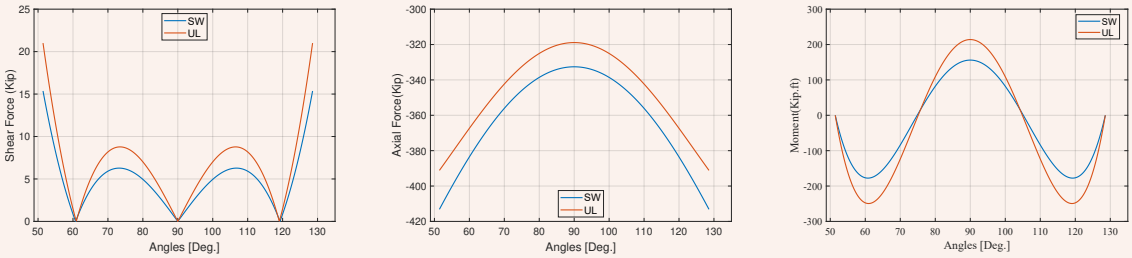


Figura D.33: Arco circolare a due punte sotto il peso di sé vs.udl

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

D.3.6 Conclusioni

Queste sezioni discutono il comportamento strutturale di un arco a due punte sotto carico del punto, carico auto-peso e distribuito uniformemente in termini di forze interne e deviazione. D.33 confronta la condizione di carico del peso con la condizione uniformemente di carico distribuito sotto un carico uguale w=2.275 kip/ft.Compared al self-weight, un carico uniformemente distribuito provoca più forza interna e momento , e causa meno forza assiale compressione interna.

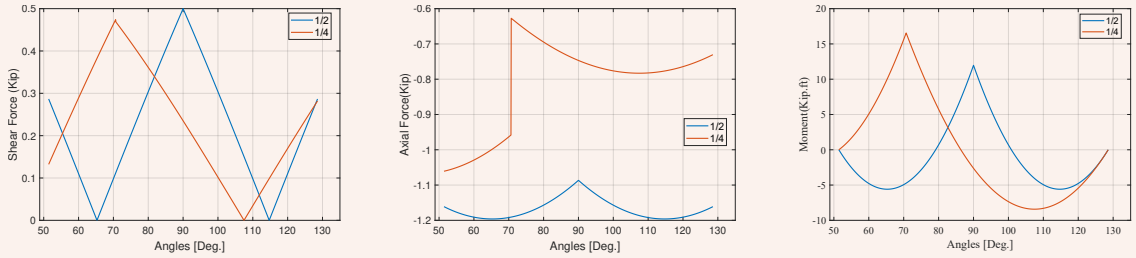


Figura D.34: Arco circolare a due punte sotto carico di punto 1/2 e 1/4

Figura D.34 mostra i lotti di una condizione di carico asimmetrico. Con questo scopo, un carico unitario viene applicato alla corona e al quarto della campata. In questa condizione, il momento massimo a causa del carico di punto applicato al quarto dell'arco è circa 1,4 volte più di quello applicato alla corona. La forza assiale massima dovuta al carico di punto applicato alla corona dell'arco è circa 1,2 volte più di quella applicata nel quarto della campata.

D.4 Arco circolare senza cerniera

Un arco circolare senza cerniera simmetrico ha sei reazioni totali - tre a ogni supporto. Poiché la costola dell'arco di un arco senza cerniera è continua tra i supporti e il punto dei supporti sono inmovibile, carico applicato non solo producono reazioni verticali ma anche orizzontali, comunemente conosciuto come una spinta. Con solo tre equazioni di equilibrio per risolvere le sei forze reattive sconosciute, un arco senza cerniera è stabilmente indeterminato a terzo grado.

D.4.1 Procedura di analisi

Per cominciare, tre reazione ridondante dell'arco Hingeless statically indeterminato vengono rimossi convertendolo in un arco staticamente determinato, struttura primaria. Utilizzando il metodo ordinario di statici, la reazione di supporto e le forze interne nella struttura primaria a causa del carico applicato sono calcolate. Successivamente, supponendo che nessuna forza esterna esiste sulla struttura primaria, una forza o momento

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

unità virtuali viene applicata nella posizione delle forze ridondanti rimosse o del momento rispettivamente e le forze interne causate sono calcolati. L'equazione di compatibilità per la deformazione di un arco sotto carico applicato è considerata calcolare la reazione ridondante nell'arco originale statically indeterminato Hingeles. Una volta scoperte tutte le reazioni di supporto, le forze interne nell'arco sono calcolate utilizzando il metodo ordinario delle statiche. Inoltre, queste forze interne vengono utilizzate per calcolare la deflezione nell'arcata sotto il carico applicato. Il processo di analisi qui descritto viene eseguito in sette fasi utilizzando Mathematica.I file Mathematic per tutti i passaggi sono inclusi nelle sezioni pertinenti e per semplificazione vengono ampliate solo le equazioni finali delle reazioni e delle forze interne. Per l'analisi, vengono considerate tre condizioni di carico; un carico a punto , il peso dell'arco e applicato uniformemente carico distribuito attraverso l'arco. Il peso auto-e il carico uniformemente distribuito sono simmetrici circa il centro dell'arco dove come un carico di punto, quando applicato ovunque ma alla corona è asimmetrico sul centro dell'arcata. Per illustrare l'analisi, le stesse figure sono utilizzate per il peso auto e le condizioni di carico uniformemente distribuite in cui vengono utilizzati diversi set di cifre per la condizione di carico del punto.

D.4.2 Carico di punto

In questo caso la forza applicata elementare è data da

$$dp = P \tag{D.14}$$

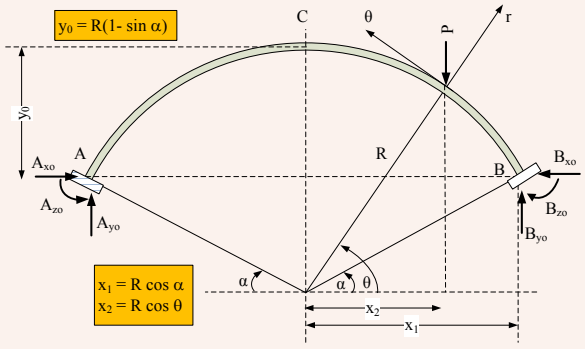


Figura D.35: Arco circolare senza cerniera sotto carico del punto

Struttura primaria: Reazioni e Forze interne

La forza ridondante Bxo e i momenti ridondanti Bzo e Azo nell'arco Hingeless originale mostrato in Figura D.35 vengono rimossi convertendolo in una struttura primaria.La posizione di un carico a punto ovunque sull'arco provoca discontinuità nelle forze interne.

COPIA DI REVISIONE

Questa discontinuità nelle Forze interne mostrate nella Figura D.3.Esprimere le forze interne ad ogni angolo β attraverso l'arco è dipendente dalla sua relazione rispetto all'angolo θ Tenendo conto delle seguenti condizioni, si sviluppano diversi set di equazioni per le forze interne.

$$\beta < \theta,\ \beta \geq \theta \tag{D.15}$$

Struttura primaria per arco senza cerniera è simile a quella dell'arco a due navate. Il diagramma corpo libero in Figura D.18, viene utilizzato per determinare le reazioni orizzontali, verticali ai supporti e alle forze interne - assiali, taglio e momento ad ogni angolo β in tutta l'arco. In seguito è la produzione di Mathematica che illustra la derivazione per la reazione del supporto informatico.

Primary Structure: Reactions

Define the load

```
P=P;
```

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMA=BY2x1 − P(x1 + x2);
```

```
Sol1=Solve[SigMA==0,BY]; BY=BY/.Sol1[[1]]
```

$\frac{1}{2}P(\text{Cos}[\alpha] + \text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol2=Solve[BY − P + AY==0,AY]; AY=AY/.Sol2[[1]]
```

$\frac{1}{2}(P - P\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$

Determine horizontal reaction at A by taking moment with respect to Z (CCW +ve)

```
BX=0;
```

```
SigMZ=AXy0 − AY2x1 + P(x1 − x2) − BXy0;
```

```
Sol3=Solve[SigMZ==0,AX]; AX=AX/.Sol3[[1]];
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

```
MO=FullSimplify[BXy1 + BYx1 − AXy1 − AYx1 − x2P]
```

0

Di seguito è l'uscita da Mathematica che illustra la derivazione per le forze interne - assiali, taglio e momento a qualsiasi angolo β attraverso l'arco.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Primary Structure: Reactions

Define the load

```
P=P;
```

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMA=BY2x1 − P(x1 + x2);
```

```
Sol1=Solve[SigMA==0,BY]; BY=BY/.Sol1[[1]]
```

$\frac{1}{2}P(\text{Cos}[\alpha] + \text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol2=Solve[BY − P + AY==0,AY]; AY=AY/.Sol2[[1]]
```

$\frac{1}{2}(P - P\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$

Determine horizontal reaction at A by taking moment with respect to Z (CCW +ve)

```
BX=0;
```

```
SigMZ=AXy0 − AY2x1 + P(x1 − x2) − BXy0;
```

```
Sol3=Solve[SigMZ==0,AX]; AX=AX/.Sol3[[1]];
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

```
MO=FullSimplify[BXy1 + BYx1 − AXy1 − AYx1 − x2P]
```

0

Struttura primaria: Forza unità virtuale

Una forza virtuale unità viene applicata nella posizione Bxo in direzione di spostamento dell'abbattimento B sotto carico reale.Il diagramma del corpo libero in Figura D.19, viene utilizzato per determinare le forze interne ad ogni angolo β attraverso l'arco di portata causata a causa del carico dell'unità virtuale.Similmente un momento unitario viene applicato alla posizione di Bzo e Azo nella direzione della rotazione agli abbattuti B e A rispettivamente sotto carico reale. D.36e la figura D.37, sono utilizzati per determinare le forze interne ad ogni angolo β attraverso l'arco di arco causato a causa del momento virtuale applicato agli abbattuti B e A. In seguito è l'uscita da Mathematica che illustra la derivazione per il calcolo delle forze interne causate dalle forze virtuali.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

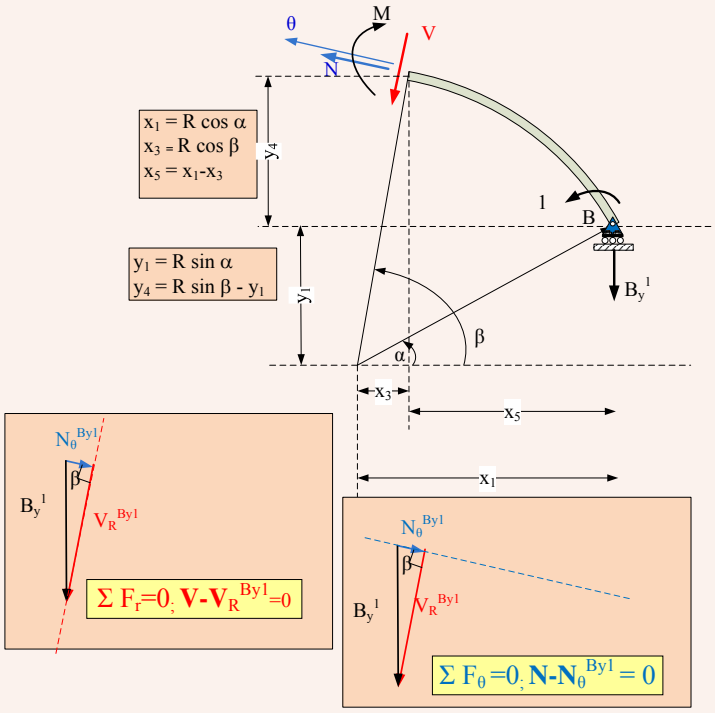


Figura D.36: Arco circolare senza cerniera con momento virtuale a 'b'

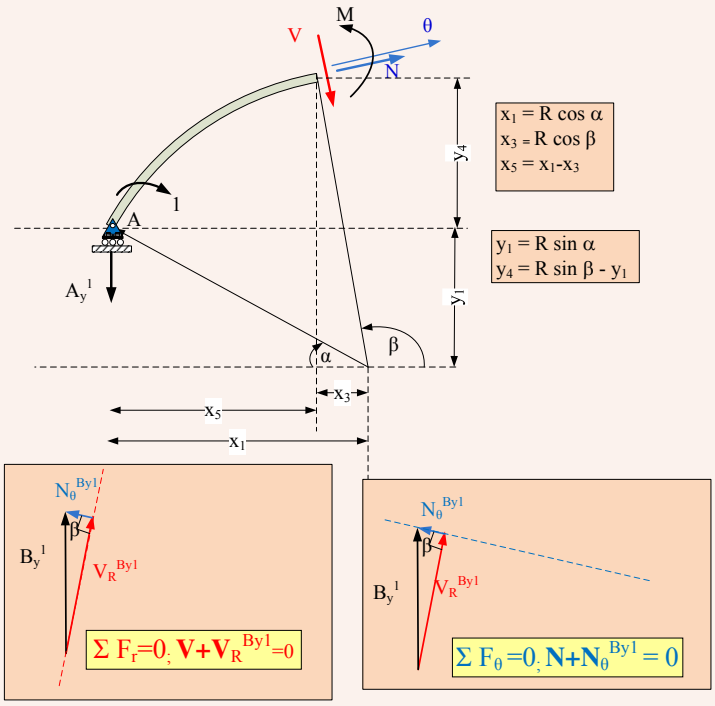


Figura D.37: Arco circolare senza cerniera con momento virtuale a 'a'

COPIA DI REVISIONE

Primary Structure: Virtual Forces

Apply virtual horizontal force at B

```
BX1=1;
```

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFδVBX1=FullSimplify[BX1Cos[β] + δVBX1];
```

```
Sol7=Solve[SigFδVBX1==0,δVBX1]; δVBX1[β_]=δVBX1/.Sol7[[1]]
```

$-\text{Cos}[\beta]$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFδNBX1=FullSimplify[−BX1Sin[β] + δNBX1];
```

```
Sol8=Solve[SigFδNBX1==0,δNBX1]; δNBX1[β_]=δNBX1/.Sol8[[1]]
```

$\text{Sin}[\beta]$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigδMBX1=FullSimplify[−BX1y4 + δMBX1];
```

```
Sol9=Solve[SigδMBX1==0,δMBX1]; δMBX1[β_]=δMBX1/.Sol9[[1]]
```

$-R\text{Sin}[\alpha] + R\text{Sin}[\beta]$

Apply virtual moment at B

```
BZ1=1;
```

Determine vertical reaction at B by taking moment about A (CW +ve)

```
SigMABZ1=FullSimplify[2x1BY1 − BZ1];
```

```
Sol10=Solve[SigMABZ1==0,BY1]; BY1=BY1/.Sol10[[1]]
```

$\frac{\text{Sec}[\alpha]}{2R}$

Summation of forces in the radial direction; Shear(+ve outward)

```
SigFδVBZ1=FullSimplify[−BY1Sin[β] + δVBZ1];
```

```
Sol11=Solve[SigFδVBZ1==0,δVBZ1]; δVBZ1[β_]=δVBZ1/.Sol11[[1]]
```

$\frac{\text{Sec}[\alpha]\text{Sin}[\beta]}{2R}$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
SigFδNBZ1=FullSimplify[−BY1Cos[β] + δNBZ1];
```

```
Sol12=Solve[SigFδNBZ1==0,δNBZ1]; δNBZ1[β_]=δNBZ1/.Sol12[[1]]
```

$$\frac{\text{Cos}[\beta]\text{Sec}[\alpha]}{2R}$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigδMBZ1=FullSimplify[BY1x5 − BZ1 + δMBZ1];
```

```
Sol13=Solve[SigδMBZ1==0,δMBZ1]; δMBZ1[β_]=δMBZ1/.Sol13[[1]]
```

$$\frac{1}{2}(1 + \text{Cos}[\beta]\text{Sec}[\alpha])$$

Apply virtual moment at A

```
AZ1=1;
```

Determine vertical reaction at B by taking moment about A (CW +ve)

```
SigMAAZ1=FullSimplify[AZ1 − 2x1BY2];
```

```
Sol14=Solve[SigMAAZ1==0,BY2]; BY2=BY2/.Sol14[[1]];
```

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFδVAZ1=FullSimplify[BY2Sin[β] + δVAZ1];
```

```
Sol15=Solve[SigFδVAZ1==0,δVAZ1]; δVAZ1[β_]=δVAZ1/.Sol15[[1]]
```

$$-\frac{\text{Sec}[\alpha]\text{Sin}[\beta]}{2R}$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFδNAZ1=FullSimplify[BY2Cos[β] + δNAZ1];
```

```
Sol16=Solve[SigFδNAZ1==0,δNAZ1]; δNAZ1[β_]=δNAZ1/.Sol16[[1]]
```

$$-\frac{\text{Cos}[\beta]\text{Sec}[\alpha]}{2R}$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigδMAZ1=FullSimplify[−BY2x5 + δMAZ1];
```

```
Sol17=Solve[SigδMAZ1==0,δMAZ1]; δMAZ1[β_]=δMAZ1/.Sol17[[1]]
```

$$\frac{1}{2}(1 - \text{Cos}[\beta]\text{Sec}[\alpha])$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Struttura originale: Forza ridondante

A seguito dell'equazione di compatibilità per la deformazione di un arco sotto carico applicato insieme al metodo di lavoro virtuale vengono utilizzati per determinare le forze ridondanti Bxo, Bzo e Azo. Per questo processo sono considerati sia componenti flessografici che assiali dell'equazione di compatibilità, nonché la discontinuità nelle forze interne.

$$1.\ \Delta_B = \left[\int_\alpha^\theta \frac{M1\ \delta M1}{EI}\,d\beta + \int_\theta^{(\pi-\alpha)} \frac{M2\ \delta M2}{EI}\,d\beta + \int_\alpha^\theta \frac{N1\ \delta N1}{a\ e}\,d\beta\ + \int_\alpha^{(\pi-\alpha)} \frac{N2\ \delta N2}{a\ e}\,d\beta\right] \tag{D.16}$$

Dove?

$M1(\beta < \theta), M2(\beta \geq \theta)$	Momento interno nel fascio causato da carico reale
$\delta M1(\beta < \theta), \delta M2(\beta \geq \theta)$	Momento interno causato a causa del carico di unità virtuale esterno
$N1(\beta < \theta), N2(\beta \geq \theta)$	Forza assiale interna nel fascio causato da carico reale
$\delta N1(\beta < \theta), \delta N2(\beta \geq \theta)$	Forza assiale interna causata a causa del carico di unità virtuale esterno

Di seguito è l'uscita da Mathematica che illustra la derivazione per il calcolo della forza ridondante.

Original Structure: Redundant Forces

Deformation due to real load (Flexural + Axial)
Displacement at B

DeltaBX1F=FullSimplify $\left[\int_\alpha^\theta \frac{M1[\beta]\delta MBX1[\beta]}{ei}\,d\beta + \int_\theta^{(\pi-\alpha)} \frac{M2[\beta]\delta MBX1[\beta]}{ei}\,d\beta\right]$;

DeltaBX1A=FullSimplify $\left[\int_\alpha^\theta \frac{NN1[\beta]\delta NBX1[\beta]}{ae}\,d\beta + \int_\theta^{(\pi-\alpha)} \frac{NN2[\beta]\delta NBX1[\beta]}{ae}\,d\beta\right]$;

DeltaBX1=DeltaBX1F + DeltaBX1A;

Rotation at B

DeltaBZ1F=FullSimplify $\left[\int_\alpha^\theta \frac{M1[\beta]\delta MBZ1[\beta]}{ei}\,d\beta + \int_\theta^{(\pi-\alpha)} \frac{M2[\beta]\delta MBZ1[\beta]}{ei}\,d\beta\right]$;

DeltaBZ1A=FullSimplify $\left[\int_\alpha^\theta \frac{NN1[\beta]\delta NBZ1[\beta]}{ae}\,d\beta + \int_\theta^{(\pi-\alpha)} \frac{NN2[\beta]\delta NBZ1[\beta]}{ae}\,d\beta\right]$;

DeltaBZ1=DeltaBZ1F + DeltaBZ1A;

Rotation at A

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

DeltaAZ1F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{M1[\beta]\delta MAZ1[\beta]}{ei} d\beta + \int_{\theta}^{(\pi-\alpha)} \frac{M2[\beta]\delta MAZ1[\beta]}{ei} d\beta\right]$;

DeltaAZ1A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{NN1[\beta]\delta NAZ1[\beta]}{ae} d\beta + \int_{\theta}^{(\pi-\alpha)} \frac{NN2[\beta]\delta NAZ1[\beta]}{ae} d\beta\right]$;

DeltaAZ1=DeltaAZ1F + DeltaAZ1A;

Deformation due to virtual load (Flexural + Axial)

F11F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta MBX1[\beta]\delta MBX1[\beta]}{ei} d\beta\right]$;
F11A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta NBX1[\beta]\delta NBX1[\beta]}{ae} d\beta\right]$;

F11=F11F + F11A;

F12F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta MBX1[\beta]\delta MBZ1[\beta]}{ei} d\beta\right]$;
F12A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta NBX1[\beta]\delta NBZ1[\beta]}{ae} d\beta\right]$;

F12=F12F + F12A;

F13F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta MBX1[\beta]\delta MAZ1[\beta]}{ei} d\beta\right]$;
F13A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta NBX1[\beta]\delta NAZ1[\beta]}{ae} d\beta\right]$;

F13=F13F + F13A;

F22F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta MBZ1[\beta]\delta MBZ1[\beta]}{ei} d\beta\right]$;
F22A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta NBZ1[\beta]\delta NBZ1[\beta]}{ae} d\beta\right]$;

F22=F22F + F22A;

F23F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta MBZ1[\beta]\delta MAZ1[\beta]}{ei} d\beta\right]$;
F23A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta NBZ1[\beta]\delta NAZ1[\beta]}{ae} d\beta\right]$;

F23=F23F + F23A;

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
F33F=FullSimplify[∫_α^(π−α) δMAZ1[β]δMAZ1[β]/(e i) dβ];
F33A=FullSimplify[∫_α^(π−α) δNAZ1[β]δNAZ1[β]/(a e) dβ];
```

```
F33=F33F + F33A;
```

```
F21=F12; F32=F23; F31=F13;
```

Redundant forces in original structure

```
Solve[{BXOF11 + BZOF12 + AZOF13==DeltaBX1,BXOF21 + BZOF22 + AZOF23==DeltaBZ1,BXOF31 +
BZOF32 + AZOF33==DeltaAZ1}, {BXO,BZO,AZO}];
```

```
FullSimplify[BXO]
```

$$\frac{P\left(-\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i-aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\theta]-2aR^2(\pi-2\alpha+2\text{Sin}[2\alpha])+4aR^2\text{Cos}[\alpha]((\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\theta])\right)}{2\left(-4aR^2+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)}$$

Struttura originale: Reazioni e Forze interne

Dopo che la forza ridondante nella struttura originale Bxo,Bzo e Azo sono calcolati, rimanendo reazione di supporto e le forze interne nella struttura originaria sono determinate utilizzando il diagramma corpo libero in Figura D.38. Di seguito è riportato l'output di Mathematica che illustra la derivazione per il calcolo delle reazioni di supporto.

Original Structure: Reactions

Determine Vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMAO=BYO2x1 − P(x1 + x2) + AZO − BZO;
```

```
Sol21=Solve[SigMAO==0,BYO]; BYO=BYO/.Sol21[[1]];
```

```
FullSimplify[BYO]
```

$$\frac{P\left(-4aR^2\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha]-\left(i+aR^2\right)(2(-\pi+\alpha+\theta)+\text{Sin}[2\alpha])+\left(-i+aR^2\right)\text{Sin}[2\theta]\right)}{2(i+aR^2)(\pi-2\alpha-\text{Sin}[2\alpha])}$$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol22=Solve[BYO − P + AYO==0,AYO]; AYO=AYO/.Sol22[[1]];
```

```
FullSimplify[AYO]
```

$$\frac{P\left(4aR^2\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha]-2\left(i+aR^2\right)(\alpha-\theta+\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\alpha])+\left(i-aR^2\right)\text{Sin}[2\theta]\right)}{2(i+aR^2)(\pi-2\alpha-\text{Sin}[2\alpha])}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

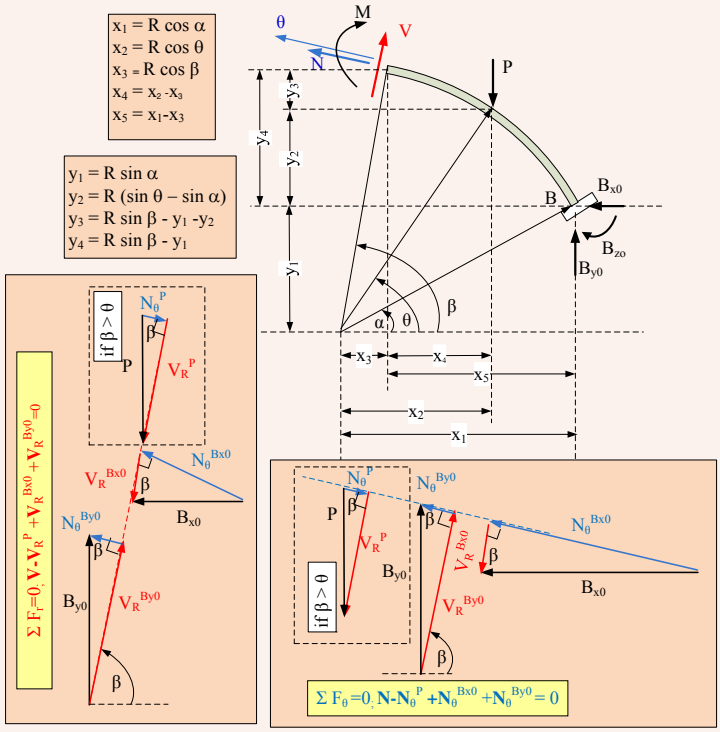


Figura D.38: Fbd dell'arco circolare senza cerniera originale sotto carico del punto

COPIA DI REVISIONE

Determine horizontal reaction at A by taking summation of forces in the x direction

```
AXO=BXO;
```

```
Clear[MO];
```

```
MO=FullSimplify[−BZO + BYOx1 + BXOy1 + AZO − AYOx1 − AXOy1 − Px2]
```

```
0
```

Di seguito è l'uscita da Mathematica che illustra la derivazione per il calcolo delle forze interne.

Original Structure: Internal Forces

For $\beta < \theta$

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

```
SigFVO1= − BXOCos[β] + BYOSin[β] + VO1;
```

```
Sol23=Solve[SigFVO1==0,VO1]; VO1[β_]:=VO1 /.Sol23[[1]];
```

```
FullSimplify[VO1[β]]
```

$$\left(P\left(-2\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[\beta](-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\left(\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+(\pi-2\alpha)\left(2aR^2+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]\right)+4aR^2\text{Cos}[\alpha](-\pi\text{Cos}[\theta]+2\theta\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\alpha]-2\text{Sin}[\theta])\right)\right.$$
$$-2\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\left(4aR^2\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha]+\left(i+aR^2\right)(2(-\pi+\alpha+\theta)+\text{Sin}[2\alpha])+\left(i-aR^2\right)\text{Sin}[2\theta]\right)\Big)\Big/\left(4\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\right.$$
$$\left.\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFNO1=BXOSin[β] + BYOCos[β] + NO1;
```

```
Sol24=Solve[SigFNO1==0,NO1]; NO1[β_]:=NO1 /.Sol24[[1]];
```

```
FullSimplify[NO1[β]]
```

$$\left(P\left(2\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\text{Sin}[\beta]\left(\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+(\pi-2\alpha)\left(2aR^2+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]\right)+4aR^2\text{Cos}[\alpha](-\pi\text{Cos}[\theta]+2\theta\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\alpha]-2\text{Sin}[\theta])\right)\right.$$
$$-2\text{Cos}[\beta]\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\left(4aR^2\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha]+\left(i+aR^2\right)(2(-\pi+\alpha+\theta)+\text{Sin}[2\alpha])+\left(i-aR^2\right)\text{Sin}[2\theta]\right)\Big)\Big/\left(4\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigMO1=BXOy4 − BYOx5 + BZO + MO1;
```

```
sol25=Solve[SigMO1==0,MO1]; MO1[β_]:=MO1 /.sol25[[1]];
```

```
FullSimplify[MO1[β]]
```

$$-\left(PR\left(\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha-\text{Sin}[2\alpha])\left((\pi-2\alpha)\left(2aR^2+\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]\right)+4aR^2\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right.\right.$$
$$-2\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[\alpha](\pi-2\alpha-\text{Sin}[2\alpha])\left(i+3aR^2+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]+2aR^2\text{Sin}[\beta]((\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\theta])\right)$$
$$+\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\left(-2\text{Cos}[\theta]\left(-2aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)(\pi-\alpha-\theta)-2aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)\right.\right.$$
$$(\pi-\alpha-\theta)\text{Sin}[2\alpha]\Big)+\left(i+aR^2\right)(2(\pi-2\alpha)\text{Sin}[\alpha]-2(\pi-2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\text{Sin}[\theta])\Big)$$
$$+\text{Cos}[\beta]\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\left(4aR^2\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha]+\left(i+aR^2\right)\right.$$
$$\left.\left.\left.(2(-\pi+\alpha+\theta)+\text{Sin}[2\alpha])+\left(i-aR^2\right)\text{Sin}[2\theta]\right)\right)\right)/\left(2\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2\right.\right.$$
$$\left.\left.-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

For $\beta > \theta$

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

```
SigFVO2= − BXOCos[β] + BYOSin[β] − PSin[β] + VO2;
```

```
Sol26=Solve[SigFVO2==0,VO2]; VO2[β_]:=VO2 /.Sol26[[1]];
```

```
FullSimplify[VO2[β]]
```

$$-\left(P\left(2\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[\beta](-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\left(\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+(\pi-2\alpha)\left(2aR^2+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]\right)+4aR^2\text{Cos}[\alpha](-\pi\text{Cos}[\theta]+2\theta\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\alpha]-2\text{Sin}[\theta])\right)\right.$$
$$-4\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\left(\left(i+aR^2\right)(\alpha-\theta)+\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta]\left(-i\text{Sin}[\theta]+aR^2(-2\text{Sin}[\alpha]+\text{Sin}[\theta])\right)\right)\Big)\Big)/\left(4\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\right.$$
$$\left.\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFNO2=BXOSin[β] + BYOCos[β] − PCos[β] + NO2;
```

```
Sol27=Solve[SigFNO2==0,NO2]; NO2[β_]:=NO2 /.Sol27[[1]];
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
FullSimplify[NO2[β]]
```

$$-\left(P\left(-2\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\text{Sin}[\beta]\left(\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+(\pi-2\alpha)\left(2aR^2+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]\right)+4aR^2\text{Cos}[\alpha](-\pi\text{Cos}[\theta]+2\theta\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\alpha]-2\text{Sin}[\theta])\right)-4\text{Cos}[\beta]\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\left(\left(i+aR^2\right)(\alpha-\theta)+\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta]\left(-i\text{Sin}[\theta]+aR^2(-2\text{Sin}[\alpha]+\text{Sin}[\theta])\right)\right)\right)\Big/\left(4\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigMO2=BXOy4 − BYOx5 + Px4 + BZO + MO2;
```

```
sol28=Solve[SigMO2==0,MO2]; MO2[β_]:=MO2/.sol28[[1]];
```

```
FullSimplify[MO2[β]]
```

$$-\left(PR\left(\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha-\text{Sin}[2\alpha])\left((\pi-2\alpha)\left(2aR^2+\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]\right)+4aR^2\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]-2\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[\alpha](\pi-2\alpha-\text{Sin}[2\alpha])\left(i+3aR^2+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]+2aR^2\text{Sin}[\beta](\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\theta]\right)\right)+\left(i+aR^2\right)\left(2\text{Cos}[\theta]\left((\pi-2\alpha)\left(aR^2(2+(\pi-2\alpha)(\alpha-\theta))+i(\pi-2\alpha)(\alpha-\theta)+2aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)-8aR^2\text{Cos}[\alpha]^3\text{Sin}[\alpha]-\left(i+aR^2\right)(\alpha-\theta)\text{Sin}[2\alpha]^2\right)+\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])(2(\pi-2\alpha)\text{Sin}[\alpha]-2(\pi-2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\text{Sin}[\theta])\right)-\text{Cos}[\beta]\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\left(-4aR^2\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha]+\left(i+aR^2\right)(2\alpha-2\theta+\text{Sin}[2\alpha])+\left(-i+aR^2\right)\text{Sin}[2\theta]\right)\right)\Big/\left(2\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Sfittamento

Figura D.21 e le equazioni analitiche sopra sviluppate sono utilizzate per calcolare la deflezione nell'esempio simmetrico Hingeless arco circolare discusso nella sezione D.2.2. Dopo l'equazione del lavoro virtuale viene utilizzato per calcolare la deflezione.

$$\delta P.\,\Delta = \left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{M1\ \delta\text{M1}}{EI}\,Rd\beta + \int_{\theta}^{(\pi-\alpha)} \frac{M2\ \delta\text{M2}}{EI}\,Rd\beta\right] \tag{D.17}$$

Dove?

δP	Carico unità virtuale esterno applicato nella direzione Δ
Δ	Slocamento esterno causato dal carico reale applicato
$M1(\beta < \theta),\ M2(\beta \geq \theta)$	Momento interno nel fascio causato da carico reale del punto
$\delta M1(\beta < \theta),\ \delta M2(\beta \geq \theta)$	Momento interno causato a causa del carico di unità virtuale esterno

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Sintesi dei risultati

Figura D.39 mostra appezzamenti per un esempio di arco senza cerniera discusso nella sezione sopra.Un carico punto è applicato alla corona dell'arco. La forza assiale interna e la forza di taglio sono normalizzate rispetto al risultante della reazione verticale e dell'impulso, mentre il momento interno è normalizzato per quanto riguarda il prodotto della forza assial interna e l'aumento. Come indicato dalla trama, tutte le forze interne sono simmetriche sulla corona dell'arco. La forza di compressione assiale è più alta a circa $\frac{1}{4}$ della durata da entrambi i abutments e diminuisce a circa 93.5% Il momento interno è al massimo alla corona, la forza di taglio invece è relativamente inferiore rispetto alla forza assiale interna e al momento. La deflezione è zero agli abutments e massima a circa 1/4 della campata da entrambi i abutment.

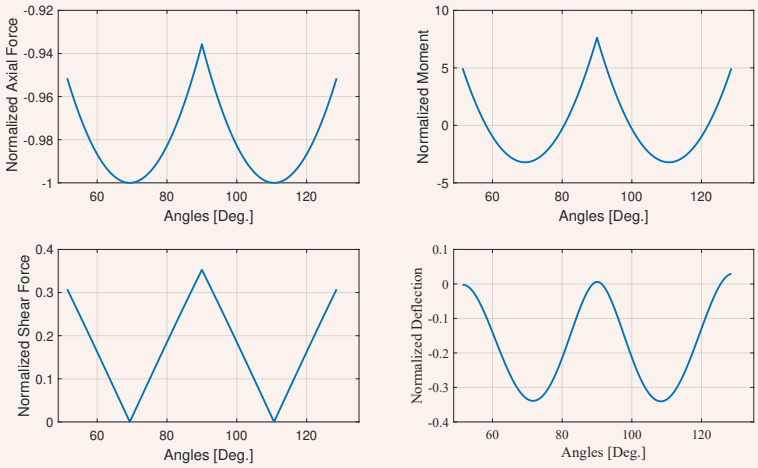


Figura D.39: Trama per arco circolare senza cerniera sotto carico del punto

D.4.3 Peso auto

In questo caso la forza applicata elementare è data da

$$dP = wds = wRd\theta \tag{D.18}$$

Struttura primaria: Reazioni e Forze interne

La forza ridondante Bxo e i momenti ridondanti Bzo e Azo nell'arco Hingeless originale mostrato nella Figura D.40 vengono rimossi convertendolo in una struttura primaria. Struttura primaria per arco senza cerniera è simile a quella dell'arco biforato. Il diagramma corpo libero in Figura D.24, viene utilizzato per determinare le reazioni orizzontali, verticali ai supporti e alle forze interne - assiale, taglio e momento ad ogni angolo β in tutta l'arco.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

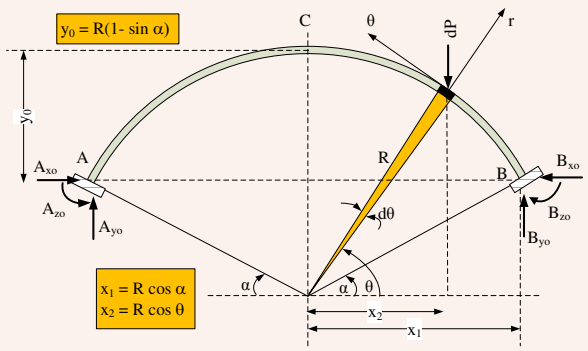


Figura D.40: Arco circolare senza cerniera sotto il peso di sé

In seguito è la produzione di Mathematica che illustra la derivazione per la reazione del supporto informatico.

Primary Structure: Reactions

Define the load (omitting the dθ)

```
dP'=wR;
```

Determine reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMA=BY2x1 - ∫_α^(π-α) (x1 + x2)dP' dθ;
```

```
Sol1=Solve[SigMA==0,BY]; BY=BY/.Sol1[[1]]
```

$\frac{1}{2}Rw(\pi - 2\alpha)$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol2=Solve[BY - ∫_α^(π-α) dP' dθ + AY==0,AY]; AY=AY/.Sol2[[1]];
```

Determine horizontal reaction at A by taking moment with respect to Z (CCW +ve)

```
BX=0;
```

```
SigMZ=AXy0 - AY2x1 + ∫_α^(π-α) dP'(x1 - x2) dθ - BXy0;
```

```
Sol3=Solve[SigMZ==0,AX]; AX=AX/.Sol3[[1]];
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

MO=FullSimplify $\left[\text{BXy1} + \text{BYx1} - \text{AXy1} - \text{AYx1} - \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \text{x2dP}' d\theta\right]$

0

Di seguito è l'uscita da Mathematica che illustra la derivazione per le forze interne - assiali, taglio e momento a qualsiasi angolo β attraverso l'arco.

Primary Structure: Internal Forces

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

SigFV=BYSin[β] $- \int_{\alpha}^{\beta} \text{dP}'\text{Sin}[\beta] d\theta + V$;

Sol4=FullSimplify[Solve[SigFV==0,V]]; $V[\beta_]=V$ /.Sol4[[1]]

$-\frac{1}{2} Rw(\pi - 2\beta)\text{Sin}[\beta]$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

SigFN=BYCos[β] $- \int_{\alpha}^{\beta} \text{dP}'\text{Cos}[\beta] d\theta + \text{NN}$;

Sol5=FullSimplify[Solve[SigFN==0,NN]]; NN[β_]=NN /.Sol5[[1]]

$-\frac{1}{2} Rw(\pi - 2\beta)\text{Cos}[\beta]$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

SigM= $-$ BYx5 $+ \int_{\alpha}^{\beta} \text{dP}'\text{x4} d\theta + M$;

Sol6=Solve[SigM==0,M]; $M[\beta_]=M$ /.Sol6[[1]]

$\frac{1}{2}\left(\pi R^2 w\text{Cos}[\alpha] - 2R^2 w\alpha\text{Cos}[\alpha] - \pi R^2 w\text{Cos}[\beta] + 2R^2 w\beta\text{Cos}[\beta] + 2R^2 w\text{Sin}[\alpha] - 2R^2 w\text{Sin}[\beta]\right)$

Struttura primaria: Forza unità virtuale

Figura D.19, Figura D.36 e la figura D.37 e un processo simile utilizzato per l'arco circolare senza cerniera sotto carico del punto è seguito per determinare le forze interne ad ogni angolo β L'uscita Mathematica che illustra la derivazione per l'elaborazione di forze interne causate a causa delle forze virtuali utilizzate per l'arco senza cerniera sotto carico del punto è applicabile anche qui.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Struttura originale:Forza rossa

Utilizzando l'equazione di compatibilità seguente per la deformazione di un arco sotto carico applicato insieme al metodo di lavoro virtuale vengono utilizzati per determinare le forze ridondanti Bxo, Bzo e Azo. Per questo processo sono considerati sia componenti flessografici che assiali dell'equazione di compatibilità.

$$1.\ \Delta_B = \left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M\ \delta\mathrm{M}}{EI}\, d\beta + \int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{N\ \delta\mathrm{N}}{a\ e}\, d\beta\right] \tag{D.19}$$

Dove?

M	Momento interno nel fascio causato da carico reale
δM	Momento interno causato a causa del carico di unità virtuale esterno
N	Forza assiale interna nel fascio causato da carico reale
δN	Forza assiale interna causata a causa del carico di unità virtuale esterno

Di seguito è l'uscita da Mathematica che illustra la derivazione per il calcolo della forza ridondante

Original Structure: Redundant Force

Deformation due to the real load (Flexural + Axial)
Displacement at B

$$\text{DeltaBX1F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M[\beta]\delta\mathrm{MBX1}[\beta]}{ei}\, d\beta\right];$$
$$\text{DeltaBX1A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\mathrm{NN}[\beta]\delta\mathrm{NBX1}[\beta]}{ae}\, d\beta\right];$$

DeltaBX1=DeltaBX1F + DeltaBX1A;

Rotation at B

$$\text{DeltaBZ1F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M[\beta]\delta\mathrm{MBZ1}[\beta]}{ei}\, d\beta\right];$$
$$\text{DeltaBZ1A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\mathrm{NN}[\beta]\delta\mathrm{NBZ1}[\beta]}{ae}\, d\beta\right];$$

DeltaBZ1=DeltaBZ1F + DeltaBZ1A;

Rotation at A

$$\text{DeltaAZ1F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M[\beta]\delta\mathrm{MAZ1}[\beta]}{ei}\, d\beta\right];$$
$$\text{DeltaAZ1A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\mathrm{NN}[\beta]\delta\mathrm{NAZ1}[\beta]}{ae}\, d\beta\right];$$

DeltaAZ1=DeltaAZ1F + DeltaAZ1A;

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Deformation due to virtual force (Flexural + Axial)

F11F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta MBX1_{[\beta]}\delta MBX1_{[\beta]}}{ei} d\beta\right]$;
F11A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta NBX1_{[\beta]}\delta NBX1_{[\beta]}}{ae} d\beta\right]$;

F11=F11F + F11A;

F12F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta MBX1_{[\beta]}\delta MBZ1_{[\beta]}}{ei} d\beta\right]$;
F12A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta NBX1_{[\beta]}\delta NBZ1_{[\beta]}}{ae} d\beta\right]$;

F12=F12F + F12A;

F13F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta MBX1_{[\beta]}\delta MAZ1_{[\beta]}}{ei} d\beta\right]$;
F13A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta NBX1_{[\beta]}\delta NAZ1_{[\beta]}}{ae} d\beta\right]$;

F13=F13F + F13A;

F22F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta MBZ1_{[\beta]}\delta MBZ1_{[\beta]}}{ei} d\beta\right]$;
F22A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta NBZ1_{[\beta]}\delta NBZ1_{[\beta]}}{ae} d\beta\right]$;

F22=F22F + F22A;

F23F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta MBZ1_{[\beta]}\delta MAZ1_{[\beta]}}{ei} d\beta\right]$;
F23A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta NBZ1_{[\beta]}\delta NAZ1_{[\beta]}}{ae} d\beta\right]$;

F23=F23F + F23A;

F33F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta MAZ1_{[\beta]}\delta MAZ1_{[\beta]}}{ei} d\beta\right]$;
F33A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta NAZ1_{[\beta]}\delta NAZ1_{[\beta]}}{ae} d\beta\right]$;

F33=F33F + F33A;

F21=F12; F32=F23; F31=F13;

Redundant forces in original structure

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
Solve[{BXOF11 + BZOF12 + AZOF13==DeltaBX1,BXOF21 + BZOF22 + AZOF23==DeltaBZ1,BXOF31 +
BZOF32 + AZOF33==DeltaAZ1}, {BXO,BZO,AZO}];
```

```
FullSimplify[BXO]
```

$$\frac{Rw\left(-2aR^2\left(-8+(\pi-2\alpha)^2\right)-\left(-16aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2\right)\text{Cos}[2\alpha]-\left(i+7aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)}{2\left(-4aR^2+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)}$$

Struttura originale: Reazioni e Forze interne

Dopo che la forza ridondante nella struttura originale Bxo,Bzo e Azo sono calcolati, rimanendo reazione di supporto e le forze interne nella struttura originaria sono determinate utilizzando il diagramma corpo libero in Figura D.41. Di seguito è riportato l'output di

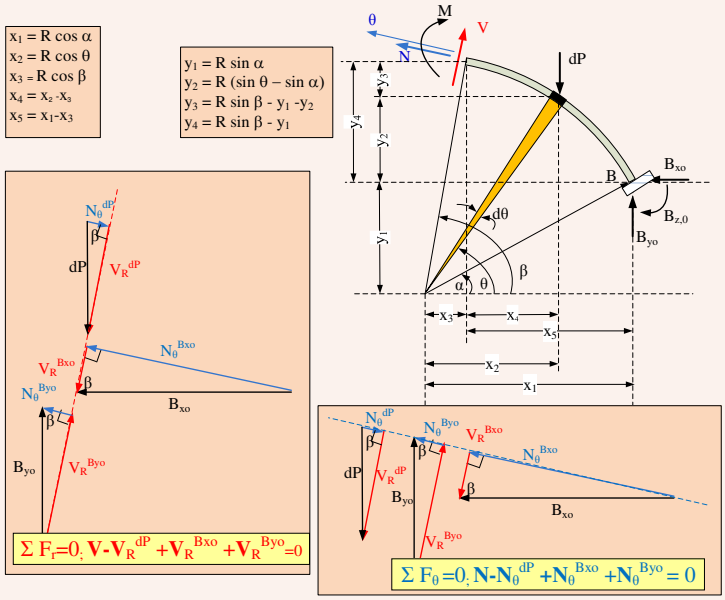


Figura D.41: Forze interne in arco circolare senza cerniera

Mathematica che illustra la derivazione per il calcolo delle reazioni di supporto.

Original Structure: Reactions

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMAO=BYO2x1 – ∫_α^(π−α) (x1 + x2)dP' dθ + AZO – BZO;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
Sol18=Solve[SigMAO==0,BYO]; BYO=BYO/.Sol18[[1]]
```

$\frac{1}{2}Rw(\pi - 2\alpha)$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol19=Solve[BYO - ∫_α^(π-α) dP' dθ + AYO==0,AYO]; AYO=AYO/.Sol19[[1]]
```

$\frac{1}{2}Rw(\pi - 2\alpha)$

Determine horizontal reaction at A by taking summation of forces in the x direction

```
AXO=BXO;
```

```
Clear[MO];
```

```
MO=FullSimplify[BZO + BYOx1 + BXOy1 - AZO - AYOx1 - AXOy1 - ∫_α^(π-α) dP'x2 dθ]
```

0

Di seguito è l'uscita da Mathematica che illustra la derivazione per il calcolo delle forze interne.

Original Structure: Internal Forces

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

```
SigFVO= - BXOCos[β] + BYOSin[β] - ∫_α^β dP'Sin[β] dθ + VO;
```

```
Sol20=Solve[SigFVO==0,VO]; VO[β_]:=VO/.Sol20[[1]];
```

```
FullSimplify[VO[β_]]
```

$$-\left(Rw\left(\text{Cos}[\beta]\left(2aR^2\left(-8+(\pi-2\alpha)^2\right)+\left(-16aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+7aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+(\pi-2\beta)\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right)\right)/$$
$$\left(2\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force +(ve Tension)

```
SigFNO=BXOSin[β] + BYOCos[β] - ∫_α^β dP'Cos[β] dθ + NO;
```

```
Sol21=Solve[SigFNO==0,NO]; NO[β_]:=NO/.Sol21[[1]];
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
FullSimplify[NO[β_]]
```

$$-\left(Rw\left((\pi-2\beta)\text{Cos}[\beta]\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(2aR^2\left(-8+(\pi-2\alpha)^2\right)+\left(-16aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+7aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right)\right)/$$
$$\left(2\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
Clear[MO];
```

```
SigMO=BXOy4 − BYOx5 + BZO + ∫_α^β dP'x4dθ + MO;
```

```
sol22=Solve[SigMO==0,MO]; MO[β_]:=MO/.sol22[[1]];
```

```
FullSimplify[MO[β_]]
```

$$\left(R^2w\left(2\left(3i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha]+2\left(aR^2-i\left(-3+(\pi-2\alpha)^2\right)-aR^2(\pi-2\alpha)^2+\left(3i+aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\alpha]\right.\right.$$
$$+(\pi-2\beta)\text{Cos}[\beta]\left(4aR^2-\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2+4aR^2\text{Cos}[2\alpha]-\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)$$
$$\left.\left.+\left(-2\left(4aR^2+i(\pi-2\alpha)^2\right)+\left(-8aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2\right)\text{Cos}[2\alpha]-\left(i-5aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right)\right)/$$
$$\left(2\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Sfittamento

Le equazioni analitiche sopra sviluppate sono utilizzate per calcolare la deflezione nell'esempio simmetrico di arco simmetrico senza cerniera discusso nella sezione D.2.3. Dopo l'equazione del lavoro virtuale viene utilizzato per calcolare la deflezione.

$$\delta P.\,\Delta=\left[\int_{\alpha}^{\theta}\frac{M\ \delta\text{M1}}{EI}\,Rd\beta+\int_{\theta}^{(\pi-\alpha)}\frac{M\ \delta\text{M2}}{EI}\,Rd\beta\right] \tag{D.20}$$

Dove?

δP	Carico unità virtuale esterno applicato nella direzione Δ
Δ	Slocamento esterno causato dal carico reale applicato
M	Momento interno nel fascio causato da carico reale
$\delta M1(\beta<\theta)$	Momento interno causato a causa del carico di unità virtuale esterno
$\delta M2(\beta\geq\theta)$	Momento interno causato a causa del carico di unità virtuale esterno

Sintesi dei risultati

Figura D.42 mostra i diagrammi per l'arco senza cerniera sotto il peso di sé discusso la sezione sopra. La forza assiale interna e la forza taglio sono normalizzati rispetto

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

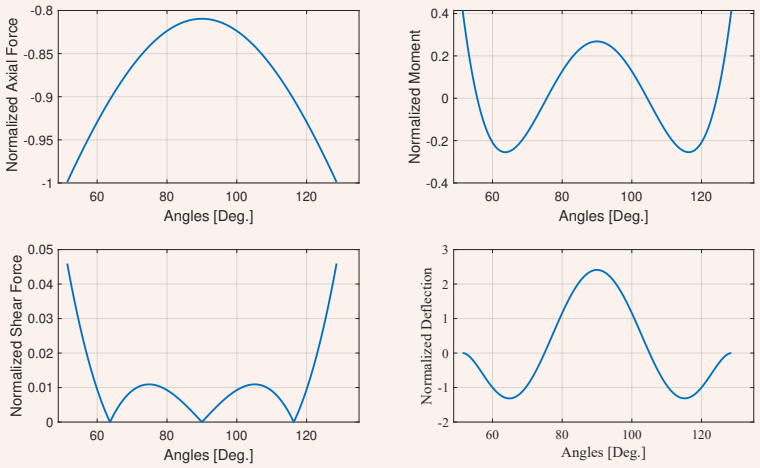


Figura D.42: Trama per arco circolare senza cerniera sotto il peso di sé

al risultante della reazione verticale e spinta agli abutments. La forza di compressione assiale è più alta agli abutments e diminuisce verso la corona fino ad circa 81% della forza di taglio, invece, è relativamente bassa e varia tra circa 4.75% e 1,0%, rispettivamente dall'abbattimento alla corona; il momento interno è normalizzato rispetto al prodotto della forza assiale interna e dell'ascesa. Il momento interno si trova più alto agli abutmenti ed è di circa 60 % del valore massimo alla corona e a circa $\frac{1}{6}$ Ci sono quattro punti di inflessione nel diagramma del momento e corrispondono ai punti di deviazione zero nell'arco. La Deflezione è più alta alla corona e il grafico della deviazione segue un profilo simile come quello del diagramma di momento.

D.4.4 Carico distribuito uniformemente

In questo caso la forza applicata elementare è data da

$$dp = wdx = wRSin\theta \tag{D.21}$$

La forza ridondante Bxo e i momenti ridondanti Bzo e Azo nell'arco Hingeless originale mostrato in FiguraD.40vengono rimossi convertendolo in una struttura primaria. I primi tre passaggi, tra cui la reazione di supporto e le forze interne causate a causa del carico reale e delle forze interne provocate a seguito del carico virtuale sono simili a quello per l'arco circolare senza cerniera sotto il peso di sé. Per semplicità si mostrano solo i passi che coinvolgono il calcolo della forza ridondante, le reazioni di supporto e le forze interne nella struttura originale.

Struttura originale: Forza ridondante

Il processo utilizzato per l'arco senza cerniera sotto il peso di sé ripetuto qui.L'equazione della compatibilità per la deformazione di un arco sotto carico applicato insieme al metodo

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

di lavoro virtuale sono utilizzati per determinare la forza ridondante Bxo all'abbattimento B. Per questo processo sono considerati componenti sia flessori che assiali dell'equazione di compatibilità. Di seguito è l'output da Mathematica, illustrando la derivazione per il calcolo della forza ridondante.

Original Structure: Redundant Forces

Deformation due to real load (Flexural + Axial)
Displacement at B

$$\text{DeltaBX1F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M[\beta]\delta\text{MBX1}[\beta]}{ei}\,d\beta\right];$$
$$\text{DeltaBX1A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\text{NN}[\beta]\delta\text{NBX1}[\beta]}{ae}\,d\beta\right];$$

$$\text{DeltaBX1=DeltaBX1F + DeltaBX1A;}$$

Rotation at B

$$\text{DeltaBZ1F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M[\beta]\delta\text{MBZ1}[\beta]}{ei}\,d\beta\right];$$
$$\text{DeltaBZ1A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\text{NN}[\beta]\delta\text{NBZ1}[\beta]}{ae}\,d\beta\right];$$

$$\text{DeltaBZ1=DeltaBZ1F + DeltaBZ1A;}$$

Rotation at A

$$\text{DeltaAZ1F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M[\beta]\delta\text{MAZ1}[\beta]}{ei}\,d\beta\right];$$
$$\text{DeltaAZ1A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\text{NN}[\beta]\delta\text{NAZ1}[\beta]}{ae}\,d\beta\right];$$

$$\text{DeltaAZ1=DeltaAZ1F + DeltaAZ1A;}$$

Deformation due to virtual force (Flexural + Axial)

$$\text{F11F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta\text{MBX1}[\beta]\delta\text{MBX1}[\beta]}{ei}\,d\beta\right];$$
$$\text{F11A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta\text{NBX1}[\beta]\delta\text{NBX1}[\beta]}{ae}\,d\beta\right];$$

$$\text{F11=F11F + F11A;}$$

$$\text{F12F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta\text{MBX1}[\beta]\delta\text{MBZ1}[\beta]}{ei}\,d\beta\right];$$
$$\text{F12A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta\text{NBX1}[\beta]\delta\text{NBZ1}[\beta]}{ae}\,d\beta\right];$$

$$\text{F12=F12F + F12A;}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
F13F=FullSimplify[Integrate[δMBX1[β]δMAZ1[β]/(e i), {β, α, (π - α)}]];
F13A=FullSimplify[Integrate[δNBX1[β]δNAZ1[β]/(a e), {β, α, (π - α)}]];
```

```
F13=F13F + F13A;
```

```
F22F=FullSimplify[Integrate[δMBZ1[β]δMBZ1[β]/(e i), {β, α, (π - α)}]];
F22A=FullSimplify[Integrate[δNBZ1[β]δNBZ1[β]/(a e), {β, α, (π - α)}]];
```

```
F22=F22F + F22A;
```

```
F23F=FullSimplify[Integrate[δMBZ1[β]δMAZ1[β]/(e i), {β, α, (π - α)}]];
F23A=FullSimplify[Integrate[δNBZ1[β]δNAZ1[β]/(a e), {β, α, (π - α)}]];
```

```
F23=F23F + F23A;
```

```
F33F=FullSimplify[Integrate[δMAZ1[β]δMAZ1[β]/(e i), {β, α, (π - α)}]];
F33A=FullSimplify[Integrate[δNAZ1[β]δNAZ1[β]/(a e), {β, α, (π - α)}]];
```

```
F33=F33F + F33A;
```

```
F21=F12; F32=F23; F31=F13;
```

Redundant forces in original structure

```
Solve[{BXOF11 + BZOF12 + AZOF13==DeltaBX1,BXOF21 + BZOF22 + AZOF23==DeltaBZ1,BXOF31 + BZOF32 + AZOF33==DeltaAZ1}, {BXO,BZO,AZO}];
```

```
FullSimplify[BXO]
```

$$\frac{Rw\,\text{Cos}[\alpha]\left(-(\pi-2\alpha)\left(2\left(i-aR^2\right)+\left(2i+aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]\right)-3aR^2\text{Sin}[2\alpha]\right)}{3\left(-4aR^2+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)}$$

Struttura originale: Reazioni e Forze interne

Dopo che la forza ridondante nella struttura originale Bxo,Bzo e Azo sono calcolati, rimanendo reazione di supporto e le forze interne nella struttura originaria sono determinate utilizzando il diagramma corpo libero in Figura D.41. Di seguito è riportato l'output di Mathematica che illustra la derivazione per il calcolo delle reazioni di supporto.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Original Strcture: Reactions

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMAO=BYO2x1 − ∫_α^(π−α) (x1 + x2)dP′ dθ + AZO − BZO;
```

```
Sol18=Solve[SigMAO==0,BYO]; BYO=BYO/.Sol18[[1]]
```

$Rw\text{Cos}[\alpha]$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol19=Solve [BYO − ∫_α^(π−α) dP′ dθ + AYO==0,AYO] ; AYO=AYO/.Sol19[[1]]
```

$Rw\text{Cos}[\alpha]$

Determine horizontal reaction at A by taking summation of forces in the x direction

```
AXO=BXO;
```

```
Clear[MO];
```

```
MO=FullSimplify [BZO + BYOx1 + BXOy1 − AZO − AYOx1 − AXOy1 − ∫_α^(π−α) dP′x2 dθ]
```

0

Di seguito è l'uscita dalla Mathematica, illustrando la derivazione per il calcolo delle forze interne.

Original Structure: Internal Forces

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

```
SigFVO= − BXOCos[β] + BYOSin[β] − ∫_α^β dP′Sin[β] dθ + VO;
```

```
Sol20=Solve[SigFVO==0,VO]; VO[β_]:=VO/.Sol20[[1]];
```

```
FullSimplify[VO[β_]]
```

$$\left(Rw\left(2\text{Cos}[\alpha]\text{Cos}[\beta]\left(-(\pi-2\alpha)\left(2\left(i-aR^2\right)+\left(2i+aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]\right)-3aR^2\text{Sin}[2\alpha]\right)\right.\right.$$
$$\left.-3\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[2\beta]\right)\Big)\Big/$$
$$\left(6\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force +(ve Tension)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
SigFNO=BXOSin[β] + BYOCos[β] − ∫_α^β dP'Cos[β]dθ + NO;
```

```
Sol21=Solve[SigFNO==0,NO]; NO[β_]:=NO/.Sol21[[1]];
```

```
FullSimplify[NO[β_]]
```

$$\left(Rw\left(6\text{Cos}[\beta]^2\left(4aR^2-\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2+4aR^2\text{Cos}[2\alpha]-\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right.\right.$$
$$\left.+2\text{Cos}[\alpha]\left((\pi-2\alpha)\left(2\left(i-aR^2\right)+\left(2i+aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]\right)+3aR^2\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right)/$$
$$\left(6\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
Clear[MO];
```

```
SigMO=BXOy4 − BYOx5 + BZO + ∫_α^β dP'x4dθ + MO;
```

```
sol22=Solve[SigMO==0,MO]; MO[β_]:=MO/.sol22[[1]];
```

```
FullSimplify[MO[β_]]
```

$$\left(R^2w\left(9\left(-3i+aR^2\right)\text{Cos}[\alpha]^2\right.\right.$$
$$+3\text{Cos}[2\beta]\left(4aR^2-\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2+4aR^2\text{Cos}[2\alpha]-\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)$$
$$+\text{Cos}[\alpha]\left(-\left(5i+aR^2\right)\text{Cos}[3\alpha]-6\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[\alpha]+4\left((\pi-2\alpha)\left(2\left(i-aR^2\right)+\left(2i+aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+3aR^2\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right)\Big)\Big/\left(12\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Sfittamento

Il processo di calcolare la deviazione in arco circolare senza cerniera sotto carico uniformemente distribuito, così come i valori numerici utilizzati per la variabile trigonometrica sono simili a quello sotto il peso del Sé e quindi non è mostrato qui.

Sintesi dei risultati

Figura D.43 mostra i diagrammi per l'arco senza cerniera sotto carico uniformemente distribuito discusso nella sezione precedente. La forza assiale interna e la forza di taglio sono normalizzati rispetto al risultante della reazione verticale e spinta agli abutments. La forza di compressione assiale è più alta agli abutments e diminuisce verso la corona fino a circa 82.5% della forza di taglio, invece, è relativamente bassa e varia tra circa 6.75% e 1.75%, rispettivamente dall'abbattimento alla corona; il momento interno è normalizzato rispetto al prodotto della forza assiale interna e dell'ascesa. Il momento interno si trova più alto agli abutmenti ed è di circa 67 % del valore massimo alla corona e a circa $\frac{1}{6}$ Ci

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

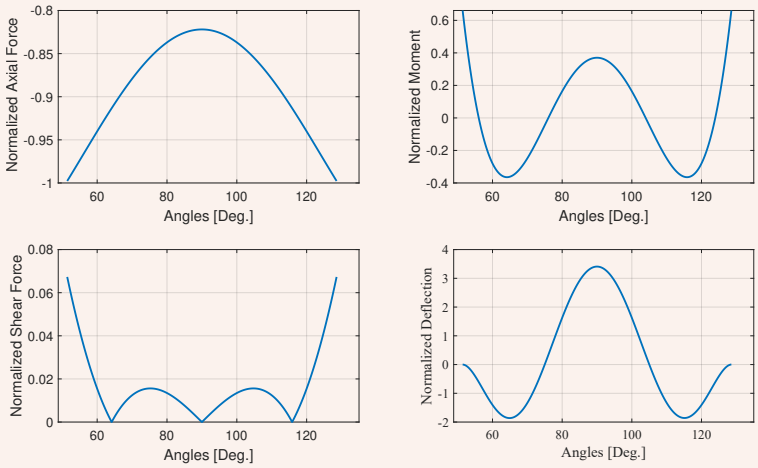


Figura D.43: Trama per l'arco circolare senza cerniera sotto udl

sono quattro punti di inflessione nel diagramma del momento e corrispondono ai punti di deviazione zero nell'arco. La Deflezione è più alta alla corona e il grafico della deviazione segue un profilo simile come quello del diagramma di momento.

D.4.5 Arco circolare senza cerniera: validazione

Le equazioni analitiche sviluppate sopra per l'arco circolare senza cerniera sotto carico di punto, il carico auto-peso ed uniformemente distribuito sono convalidate in due fasi. In primo luogo, il peso di sé e carico uniformemente distribuito applicato attraverso l'arco arco sono suddivisi in serie di carichi 20 punti. I grafici delle forze interne e deflettori sono tracciati utilizzando le equazioni analitiche per il peso di sé e carico distribuito uniformemente insieme ai rispettivi carichi punti. Questi grafici sono sovrapposti per verificare la validità delle soluzioni analitiche, poiché il carico auto-peso o distribuito uniformemente equivale alla loro rispettiva serie di carichi a punti i loro lotti si abbinano strettamente tra loro.

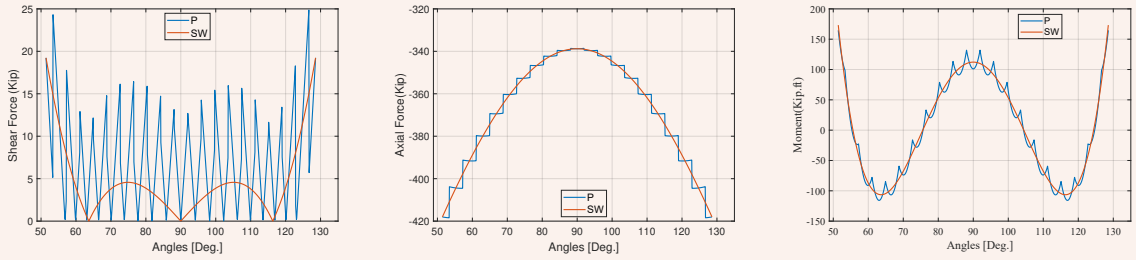


Figura D.44: Arco circolare senza cerniera sotto carico di carica a punto auto-peso vs.

Figura D.44 e la figura D.45 illustra il processo di cui sopra utilizzato per convalidare le equazioni analitiche. In secondo luogo, un modello Sap 2000 è sviluppato per l'arco circolare senza cerniera sotto peso auto. Il momento, la forza di taglio e i diagrammi della

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

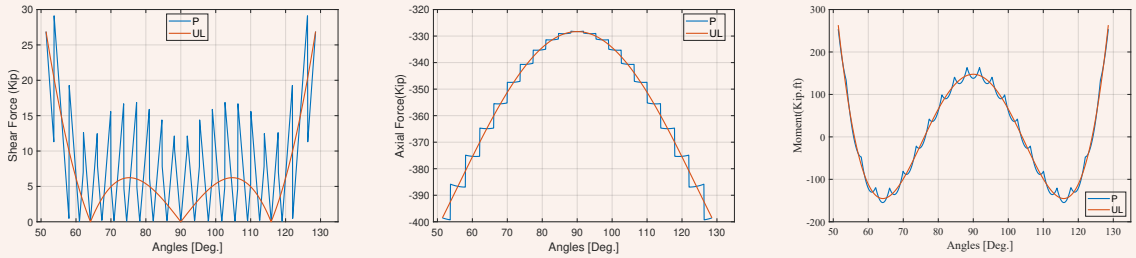


Figura D.45: Arco circolare senza cerniera sotto distribuzione uniforme del carico vs. serie di carico a punto

sua analisi assiale sono confrontati con i grafici tracciati utilizzando l'equazione analitica I



Figura D.46: Sap 2000 - diagramma di momento dell'arco circolare senza cerniera sotto il peso



Figura D.47: Sap 2000 - diagramma di forza assiale dell'arco circolare senza cerniera sotto il peso



Figura D.48: Sap 2000 - diagramma di forza della cinghia dell'arco circolare senza cerniera sotto il peso

valori numerici sul diagramma del momento in Figura D.46, diagramma di forza assiale in

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

figura D.47 e diagramma di forza della cinghia in Figura D.48 corrisponde strettamente ai rispettivi valori sui grafici in FiguraD.44.

D.4.6 Conclusioni

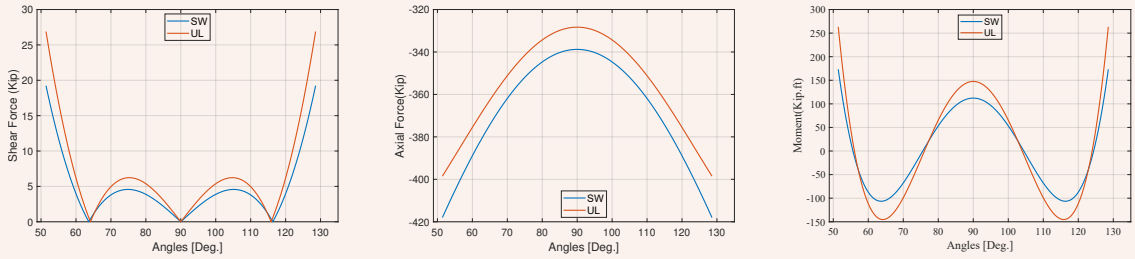


Figura D.49: Arco circolare senza cerniera sotto il peso di sé vs.udl

Queste sezioni discutono il comportamento strutturale di un arco senza cerniera sotto carico del punto, carico auto-peso e distribuito uniformemente in termini di forze interne e deviazione. D.49 confronta la condizione di carico del peso con la condizione uniformemente di carico distribuito sotto un carico uguale w=2.275 kip/ft.Compared al self-weight, un carico uniformemente distribuito provoca maggiore forza interna della cinghia, momento e deflettore, ed esso causa meno forza assiale compressione interna. Figura D.50 mostra i

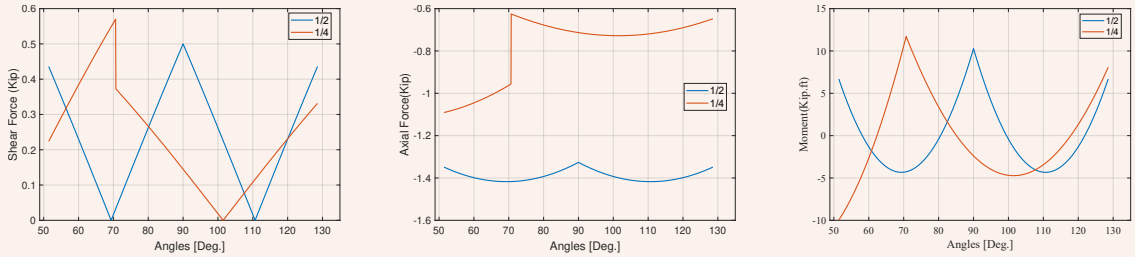


Figura D.50: Arco circolare senza cerniera sotto carico punto a 1/2 e 1/4 di portata

lotti di una condizione di carico asimmetrico.Per questo scopo, un carico unitario viene applicato alla corona e al quarto della campata. In questa condizione, il momento massimo a causa del carico di punto applicato al quarto dell'arco è circa 1,2 volte più di quello applicato alla corona. La forza assiale massima dovuta al carico di punta applicato alla corona dell'arco è circa 1,3 volte più di quella applicata nel quarto della campata.

D.5 Conclusioni

Il focus di questo capitolo è stato quello di sviluppare equazioni analitiche per le reazioni di supporto e forze interne in arco trincea, biforo e senza cerniera e utilizzare queste

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

equazione per comprendere il comportamento strutturale di ogni tipo dell'arco. L'arco a tre cerniere è stato deciso staticamente solo i metodi ordinari di statico necessari per ricavare le equazioni analitiche. D'altra parte, per indeterminato staticamente arco a due cerniere e arco senza cerniera, metodo di lavoro virtuale insieme con l'equazione di compatibilità per la deformazione è stato utilizzato.

Ogni tipo di arco è stato analizzato in tre condizioni di carico – carico del punto, carico auto-peso e uniformemente distribuito. Sotto carico simmetrico, la differenza primaria che si trova tra i tre tipi di arco è il numero dei punti inflessione nel loro diagramma del momento e il suo effetto sulla distribuzione del momento attraverso l'arco. D.15 un arco a tre cerniera non ha punto di inflessione e ha un alto momento negativo tra cerniere annesse. D.33 con punti rossi un arco a due punte ha due inflessioni e ha un momento positivo elevato alla corona. Come mostrato nella figura D.49 con punti rossi un arco senza cerniera ha quattro punti di inflessione e ha un momento positivo elevato agli abutments. Per tutti e tre gli archi, il confronto tra i pesi auto-e la condizione di carico uniformemente distribuita indica che il peso auto- contribuisce più verso la forza assiale interna dove come il carico uniforme distribuito contribuisce più a Questo dimostra l'unico meccanismo di compressione di un arco per resistere al suo peso.

I trame delle forze interne per ogni tipo di arco indicavano che quando un carico a punto applicato alla corona di un arco provoca diversi modelli di forze interne rispetto al peso dell'arco o il carico uniformemente distribuito applicato sull'intero Quando un carico di punto viene applicato alla corona di un arco a due o senza cerniera, provoca la massima forza assiale ad una distanza di circa $\frac{1}{4}$ to $\frac{1}{6}$ quando un carico di punto viene applicato alla corona di un arco a tre punte provoca la massima forza assiale e il momento ad una distanza di circa $\frac{1}{4}$ Quando il carico autopeso o uniformemente distribuito viene applicato su un arco a tre punte o due –equivalente provoca la massima forza assiale agli abutments e al momento massimo ad una distanza di $\frac{1}{6}$ della campata dagli abutment ma quando le stesse forze vengono applicate su un arco di Hinges sia la massima forza assiale e il momento si verifica agli abutments. La deviazione massima per tutti i tre tipi di archi sotto carico auto-peso o uniformemente distribuito avviene alla corona dell'arco. Sottostare la variazione nelle forze interne e deflezione degli studi gli archi possono essere applicati per ottimizzare la loro sezione trasversale, nonché la compressione e la resistenza flessorale. Per tutti i tipi di archi, l'analisi ha anche confrontato le forze interne causate a causa di un carico del punto applicato alla corona e all'atto $\frac{1}{4}$ Il risultato mostra che il momento massimo si verifica quando un carico di punto viene applicato al $\frac{1}{4}$ in generale, una condizione di carico asimmetrico in tutti i tre tipi di archi provoca un momento interno sostanzialmente alto rispetto ad un caricamento simmetrico. Questo rapporto di posizione di un carico a punto con la forza interna può essere utilizzato per derivare posizioni appropriate per i pier in caso di una progettazione del ponte ad arco aperto. Dai risultati dell'analisi, si può dire che un layout simmetrico di pilastri sul centro dell'arco fornirà una soluzione progettuale efficiente. Per le equazioni di compatibilità mostrate nella sezione "Struttura originale: Redundant Force" dell'arco a due cerniere e ad altalene, sono considerati componenti assiali e flessori. Si è osservato che più letteratura esistenti

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

sull'analisi dell'arco usano solo la componente flessorale dell'equazione di compatibilità. Mentre questo ha un effetto trascurabile sulle forze interne dell'arco a due punte, si è scoperto che omettendo la componente assiale causerebbe circa 20% errore nel momento interno dell'arco senza cerniera. Per convalidare le soluzioni analitiche, è stato utilizzato il programma Sap 2000. Attualmente non c'è componente 'arch' prontamente disponibile e quindi più segmenti sono utilizzati per costruire un arco in Sap 2000 . Il processo di convalida ha indotto che non avere un numero ottimale di segmenti potrebbe causare un errore sostanziale nel calcolo delle forze interne. Le equazioni analitiche sviluppate qui possono servire come strumento preliminare per trovare forze interne in un arco.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Appendice E

Tabelle di analisi delle conchiglie cilindriche

Le tabelle seguenti sono tratte da (Whitney et al., 1952). Sono anche dati in (Portland Cement Association, 1954) (Gibson, 1968) e naturalmente (Billington, 1965).

Derivazione originale da Finsterwalder, 1933.

COPIA DI REVISIONE

an ordinary indeterminate structure. As a matter of fact, since in most cases the thickness of the shell is determined by practical considerations (such as sufficient depth for reinforcement), a single investigation is generally sufficient. However, to achieve this economy in time and labor, a systematization of the analytical procedure is necessary. Such a systematization is here attempted, and to expedite the analysis and bring the various load-stress relationships into a coherent group, formulas and tables for the various stresses in a shell are given in this section. Those interested in the development of the formulas from which the tables are computed can find the development of the theory in Appendix II.

In its broader aspects the analysis of cylindrical shells is strikingly similar to the analysis of ordinary indeterminate structures. In the analysis of an indeterminate structure, it is customary to make it determinate by releasing end restraints, thereby allowing rotation and displacement of the end to occur. Afterward, reactions are applied to bring the boundary back to its original or desired position. The final stresses are the algebraic sum of those found in the determinate state and those induced by the end restraints.

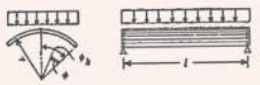
The analysis of a thin shell follows the same procedure. It is first assumed that the surface load is transmitted to the supports solely by direct stresses, generally called "membrane stresses," which is equivalent to assuming the structure to be determinate. In the indeterminate two-dimensional analysis the preliminary step of making the structure determinate leads to displacements that are inconsistent with the prescribed end conditions, but in shell design the preliminary step called "membrane analysis" yields displacements and reactions along the longitudinal edges of the shell that do not comply with the boundary requirements. To satisfy these requirements, line loads must be applied along the longitudinal edges of the shell. In contrast with general surface loading, these line loads create bending as well as direct stresses in the shell. The stresses produced by the line loads must be added to the direct stresses previously evaluated to obtain the final stress pattern. Thus it is evident that the design of thin shells can be divided into two stages: (1) Determine the internal stresses and the edge forces created by the surface loading on the basis of membrane analysis; and (2), determine the stresses due to the edge line loading. It is in this order that the analysis of cylindrical shells will be presented.

Notation.—The letter symbols in this manual are defined where they first appear, in the text or by diagram, and are assembled alphabetically for reference, in Appendix III.

Step 1. Surface Loads.—The membrane analysis of a cylindrical shell subjected to surface loads involves only successive differentiations and integrations of the radial and tangential components of the surface loads. Since this is always possible for continuous loads, the stresses created by any type of continuous load distribution expressible as a function of the longitudinal and radial coordinates, x and ϕ, can be determined. For most conditions, the surface loads on the shell will be uniform in the longitudinal direction of the shell. The force and displacement components produced by two such loads

TABLE 1A.—MEMBRANE FORCES AND DISPLACEMENTS IN SIMPLY SUPPORTED CYLINDRICAL SHELLS; LOADS UNIFORMLY DISTRIBUTED ALONG THE LENGTH OF THE BARREL

(a) UNIFORM TRANSVERSE LOAD[a]



Longitudinal Force T_x—

$$p_0 r \left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right) \times \text{Col. (1)}$$

Shearing Force S—

$$p_0 r \left(\frac{l}{r}\right) \times \left(1-\frac{2x}{l}\right) \times \text{Col. (2)}$$

Transverse Force T_ϕ—

$$p_0 r \times \text{Col. (3)}$$

Vertical Displacement[b] Δ_V—

$$p_0 r \times \frac{l^4}{\pi^4 t E} \times \left\{2\left(\frac{r}{l}\right)^4 + \left(\frac{x}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{x}{l} + 6\left(\frac{r}{l}\right)^4\left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^3\right]\right\} \times \text{Col. (4)}$$

Horizontal Displacement[c] Δ_H—

$$p_0 r \frac{l^4}{\pi^4 t E}\left\{\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times \text{Col. (5)} + \left[2\left(\frac{r}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^4 + \frac{x}{l} + 6\left(\frac{r}{l}\right)^4\left(\frac{x}{l} - (x/l)^2\right)\right] \times \text{Col. (6)}\right\}$$

(b) DEAD WEIGHT LOAD[a]



Longitudinal Force T_x—

$$p_0 r \left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right) \times \text{Col. (7)}$$

Shearing Force S—

$$p_0 r \left(\frac{l}{r}\right) \times \left(1-\frac{2x}{l}\right) \times \text{Col. (8)}$$

Transverse Force T_ϕ—

$$p_0 r \times \text{Col. (9)}$$

Vertical Displacement Δ_V—

$$p_0 r \frac{l^4}{\pi^4 t E}\left\{-\frac{1}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^4 + \frac{1}{12}\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{1}{12}\left(\frac{x}{l}\right) + 2\left(\frac{r}{l}\right)^4\left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^3\right] + \left(\frac{r}{l}\right)^4 \times \text{Col. (10)}\right\}$$

Horizontal Displacement Δ_H—

$$p_0 r \frac{l^4}{\pi^4 t E}\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times \text{Col. (11)}$$

$\phi_0 - \phi$	T_x	S	T_ϕ	Δ_V	Δ_H		T_x	S	T_ϕ	Δ_V	Δ_H
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
0	−1.500	0	−1.0000	0.5000	0	0	−1.0000	0	−1.0000	1.0000	0
5	−1.477	−0.1302	−0.9924	0.4944	0.0872	−0.0003	−0.9960	−0.0871	−0.9902	0.9924	0.0868
10	−1.409	−0.2565	−0.9698	0.4775	0.1736	−0.0025	−0.9853	−0.1736	−0.9648	0.9698	0.1710
15	−1.295	−0.3749	−0.9330	0.4506	0.2588	−0.0072	−0.9749	−0.2589	−0.9659	0.9330	0.2500
20	−1.150	−0.4820	−0.8830	0.4148	0.3420	−0.0200	−0.9399	−0.3421	−0.9397	0.8830	0.3214
25	−0.965	−0.5748	−0.8214	0.3722	0.4226	−0.0377	−0.9098	−0.4225	−0.9063	0.8214	0.3830
30	−0.750	−0.6503	−0.7500	0.3447	0.5000	−0.0625	−0.8658	−0.5000	−0.8660	0.7500	0.4330
35	−0.513	−0.7048	−0.6710	0.2748	0.5736	−0.0944	−0.8194	−0.5737	−0.8191	0.6710	0.4698
40	−0.261	−0.7385	−0.5868	0.2247	0.6428	−0.1328	−0.7661	−0.6428	−0.7660	0.5868	0.4924
45	0	−0.7500	−0.5000	0.1767	0.7071	−0.1768	−0.7071	−0.7071	−0.7071	0.5000	0.5000
50	0.261	−0.7385	−0.4132	0.1328	0.7680	−0.2247	−0.6427	−0.7661	−0.6428	0.4132	0.4924
55	0.513	−0.7048	−0.3200	0.0944	0.8191	−0.2749	−0.5736	−0.8192	−0.5738	0.3200	0.4698
60	0.750	−0.6503	−0.2500	0.0625	0.8660	−0.3248	−0.5000	−0.8660	−0.5000	0.2500	0.4330
65	0.965	−0.5748	−0.1788	0.0377	0.9063	−0.3722	−0.4225	−0.9062	−0.4226	0.1786	0.3830
70	1.150	−0.4820	−0.1170	0.0199	0.9397	−0.4149	−0.3420	−0.9397	−0.3420	0.1170	0.3214
75	1.295	−0.3749	−0.0689	0.0086	0.9659	−0.4506	−0.2588	−0.9659	−0.2588	0.0689	0.2500
80	1.409	−0.2565	−0.0301	0.0028	0.9848	−0.4770	−0.1732	−0.9847	−0.1736	0.0301	0.1710
85	1.477	−0.1302	−0.0076	0.0004	0.9962	−0.4943	−0.0873	−0.9962	−0.0872	0.0076	0.0868
90	1.500	0	0	0	1.0000	−0.5000	0	−1.0000	0	0	0

[a] The use of column numbers in the formulas refers to the appropriate coefficient in the column cited
[b] Downward direction is positive. [c] Inward direction is positive.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

TABLE 1B.—MEMBRANE FORCES AND DISPLACEMENTS IN SIMPLY SUPPORTED CYLINDRICAL SHELLS; LOADS VARYING LONGITUDINALLY FROM ZERO AT THE ENDS TO MAXIMUM POSITIVE AT THE MIDDLE



(a) UNIFORM TRANSVERSE LOAD

Longitudinal Force T_x—

$$p_0 r \left[\left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \text{Col. (1)}\right] \sin\frac{\pi x}{l}$$

Shearing Force S—

$$p_0 r \left[\left(\frac{l}{r}\right) \times \text{Col. (2)}\right] \cos\frac{\pi x}{l}$$

Transverse Force T_ϕ—

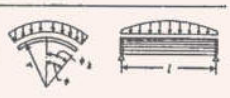
$$p_0 r \times \text{Col. (3)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$$

Vertical Displacement Δ_V—

$$p_0 r \frac{l^4}{\pi^4 l E}\left[\left(1+\frac{1}{2}(\pi r/l)^2+\frac{1}{12}(\pi r/l)^4\right) \times \text{Col. (4)}\right] \sin\frac{\pi x}{l}$$

Horizontal Displacement Δ_H—

$$+p_0 r \frac{l^4}{\pi^4 l E}\left\{\left(\frac{r}{l}\right)^2 \times \text{Col. (5)} + \left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^4\right] \times \text{Col. (6)}\right\} \times \sin\frac{\pi x}{l}$$



(b) DEAD WEIGHT LOAD

Longitudinal Force T_x—

$$p_0 r \left[\left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \text{Col. (7)}\right] \sin\frac{\pi x}{l}$$

Shearing Force S—

$$p_0 r \left[\left(\frac{l}{r}\right) \times \text{Col. (8)}\right] \cos\frac{\pi x}{l}$$

Transverse Force T_ϕ—

$$p_0 r \times \text{Col. (9)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$$

Vertical Displacement Δ_V—

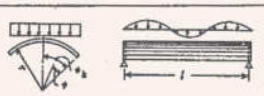
$$p_0 r \frac{l^4}{\pi^4 l E}\left[\left(\frac{2r}{\pi l}\right)^2 + \frac{2}{\pi^4} + \left(\frac{r}{l}\right)^2 \times \text{Col. (10)}\right] \sin\frac{\pi x}{l}$$

Horizontal Displacement Δ_H—

$$+p_0 r \frac{l^4}{\pi^4 l E}\left[\left(\frac{r}{l}\right)^2 \times \text{Col. (11)}\right] \times \sin\frac{\pi x}{l}$$

$\phi_1-\phi$	T_x	S	T_ϕ	Δ_V	Δ_H		T_x	S	T_ϕ	Δ_V	Δ_H
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
0	−0.3040	0	−1.0000	0.12319	0	0	−0.2026	0	−1.000	1.0000	0
5	−0.2993	−0.0829	−0.9924	0.12180	0.0872	−0.00009	−0.2019	−0.0555	−0.9962	0.9924	0.0868
10	−0.2856	−0.1633	−0.9698	0.11766	0.1736	−0.00064	−0.1996	−0.1105	−0.9848	0.9698	0.1710
15	−0.2623	−0.2387	−0.9330	0.11102	0.2588	−0.00213	−0.1975	−0.1648	−0.9659	0.9330	0.2500
20	−0.2329	−0.3069	−0.8830	0.10222	0.3420	−0.00490	−0.1904	−0.2178	−0.9397	0.8830	0.3214
25	−0.1954	−0.3658	−0.8214	0.09170	0.4226	−0.00930	−0.1837	−0.2690	−0.9063	0.8214	0.3830
30	−0.1520	−0.4140	−0.7500	0.08001	0.5000	−0.01539	−0.1754	−0.3183	−0.8660	0.7500	0.4330
35	−0.1040	−0.4487	−0.6710	0.06771	0.5736	−0.02325	−0.1660	−0.3652	−0.8191	0.6710	0.4698
40	−0.0528	−0.4702	−0.5868	0.05537	0.6428	−0.03272	−0.1552	−0.4092	−0.7660	0.5868	0.4924
45	0	−0.4775	−0.5000	0.04355	0.7071	−0.04355	−0.1433	−0.4502	−0.7071	0.5000	0.5000
50	0.0528	−0.4702	−0.4132	0.03272	0.7660	−0.05537	−0.1302	−0.4877	−0.6428	0.4132	0.4924
55	0.1040	−0.4487	−0.3290	0.02325	0.8191	−0.06771	−0.1162	−0.5215	−0.5736	0.3290	0.4698
60	0.1520	−0.4140	−0.2500	0.01539	0.8660	−0.08001	−0.1013	−0.5513	−0.5000	0.2500	0.4330
65	0.1954	−0.3658	−0.1786	0.00930	0.9063	−0.09170	−0.0856	−0.5769	−0.4226	0.1786	0.3830
70	0.2329	−0.3069	−0.1170	0.00490	0.9397	−0.10222	−0.0693	−0.5982	−0.3420	0.1170	0.3214
75	0.2623	−0.2387	−0.0659	0.00213	0.9659	−0.11102	−0.0534	−0.6149	−0.2588	0.0659	0.2500
80	0.2856	−0.1633	−0.0301	0.00064	0.9848	−0.11766	−0.0351	−0.6269	−0.1736	0.0301	0.1710
85	0.2993	−0.0829	−0.0076	0.00009	0.9962	−0.12180	−0.0177	−0.6342	−0.0872	0.0076	0.0868
90	0.3040	0	0	0	1.0000	−0.12319	0	−0.6368	0	0	0

TABLE 1C.—MEMBRANE FORCES AND DISPLACEMENTS IN SIMPLY SUPPORTED CYLINDRICAL SHELLS; LOADS VARYING SINUSOIDALLY FROM ZERO AT THE ENDS TO MAXIMUM AT THE MIDDLE



(a) UNIFORM TRANSVERSE LOAD

Longitudinal Force T_x—

$$p_0 r \left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \text{Col. (1)} \times \sin\frac{3\pi x}{l}$$

Shearing Force S—

$$p_0 r \frac{l}{r} \times \text{Col. (2)} \times \cos\frac{3\pi x}{l}$$

Transverse Force T_ϕ—

$$p_0 r \times \text{Col. (3)} \times \sin\frac{3\pi x}{l}$$

Vertical Displacement Δ_V—

$$p_0 r \frac{l^4}{\pi^4 l E}\left[1+\frac{9}{2}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^2+\frac{81}{12}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^4\right] \text{Col. (4)} \times \sin\frac{3\pi x}{l}$$

Horizontal Displacement Δ_H—

$$p_0 r \frac{l^4}{\pi^4 l E}\left\{\left(\frac{r}{l}\right)^2 \times \text{Col. (5)} + \left[1+\frac{9}{2}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^2 + \frac{81}{12}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^4\right] \text{Col. (6)}\right\} \sin\frac{3\pi x}{l}$$



(b) DEAD WEIGHT LOAD

Longitudinal Force T_x—

$$p_0 r \left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \text{Col. (7)} \times \sin\frac{3\pi x}{l}$$

Shearing Force S—

$$p_0 r \left(\frac{l}{r}\right) \times \text{Col. (8)} \times \cos\frac{3\pi x}{l}$$

Transverse Force T_ϕ—

$$p_0 r \times \text{Col. (9)} \times \sin\frac{3\pi x}{l}$$

Vertical Displacement Δ_V—

$$p_0 r \frac{l^4}{\pi^4 l E}\left[\frac{2}{81(\pi)^4}+\frac{4}{9}\left(\frac{r}{\pi l}\right)^2+\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times \text{Col. (10)}\right] \sin\frac{3\pi x}{l}$$

Horizontal Displacement Δ_H—

$$p_0 r \frac{l^4}{\pi^4 l E}\left(\frac{r}{l}\right)^2 \times \text{Col. (11)} \times \sin\frac{3\pi x}{l}$$

$\phi_1-\phi$	T_x	S	T_ϕ	Δ_V	Δ_H		T_x	S	T_ϕ	Δ_V	Δ_H
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
0	−0.0338	0	−1.0000	0.00152	0	0	−0.0225	0	−1.0000	1.0000	0
5	−0.0332	−0.0276	−0.9924	0.00150	0.0872	−0.00000	−0.0224	−0.0185	−0.9962	0.9924	0.0868
10	−0.0317	−0.0544	−0.9698	0.00145	0.1736	−0.00000	−0.0222	−0.0368	−0.9848	0.9698	0.1710
15	−0.0291	−0.0796	−0.9330	0.00137	0.2588	−0.00002	−0.0219	−0.0549	−0.9659	0.9330	0.2500
20	−0.0259	−0.1023	−0.8830	0.00126	0.3420	−0.00006	−0.0212	−0.0726	−0.9397	0.8830	0.3214
25	−0.0217	−0.1219	−0.8214	0.00113	0.4226	−0.00011	−0.0204	−0.0867	−0.9063	0.8214	0.3830
30	−0.0169	−0.1383	−0.7500	0.00099	0.5000	−0.00019	−0.0195	−0.1061	−0.8660	0.7500	0.4330
35	−0.0116	−0.1498	−0.6710	0.00081	0.5736	−0.00029	−0.0181	−0.1217	−0.8191	0.6710	0.4698
40	−0.0059	−0.1567	−0.5868	0.00068	0.6428	−0.00040	−0.0172	−0.1384	−0.7660	0.5868	0.4924
45	0	−0.1592	−0.5000	0.00054	0.7071	−0.00054	−0.0159	−0.1501	−0.7071	0.5000	0.5000
50	0.0059	−0.1567	−0.4132	0.00040	0.7660	−0.00068	−0.0145	−0.1625	−0.6428	0.4132	0.4924
55	0.0116	−0.1498	−0.3290	0.00029	0.8191	−0.00081	−0.0129	−0.1738	−0.5736	0.3290	0.4698
60	0.0169	−0.1383	−0.2500	0.00019	0.8660	−0.00099	−0.0113	−0.1818	−0.5000	0.2500	0.4330
65	0.0217	−0.1219	−0.1786	0.00011	0.9063	−0.00113	−0.0095	−0.1923	−0.4226	0.1786	0.3830
70	0.0259	−0.1023	−0.1170	0.00006	0.9397	−0.00126	−0.0077	−0.1994	−0.3420	0.1170	0.3214
75	0.0291	−0.0796	−0.0689	0.00002	0.9659	−0.00137	−0.0058	−0.2050	−0.2588	0.0689	0.2500
80	0.0317	−0.0544	−0.0301	0.00000	0.9848	−0.00145	−0.0040	−0.2090	−0.1736	0.0301	0.1710
85	0.0332	−0.0276	−0.0076	0.00000	0.9962	−0.00150	−0.0019	−0.2114	−0.0872	0.0076	0.0868
90	0.0338	0	0	0	1.0000	−0.00152	0	−0.2122	0	0	0

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

(the first varies uniformly in the transverse direction and the second varies as the weight of the shell) are presented in Table 1A, in which the internal forces and displacements in the system of cylindrical coordinates, shown in Fig. 13, are:

T_ϕ = the direct force component in the transverse direction, considered positive when tensile;
T_x = the direct force component in the longitudinal direction, considered positive when tensile;
S = the tangential shearing force, considered positive when it creates tension in the direction of increasing values of x and ϕ;
Δ_Y = the vertical displacement, considered positive when it is in the downward direction;
Δ_H = the horizontal displacement, considered positive when it is directed inward;

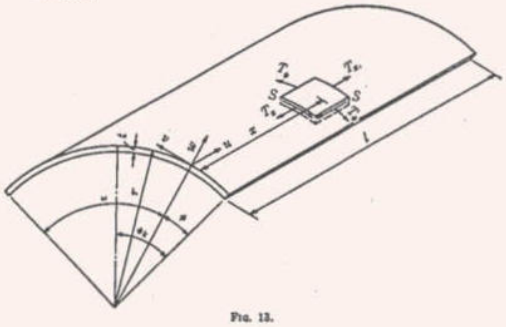


FIG. 13.

l = length of shell between supports;
r = centerline radius of shell;
t = thickness of shell;
x = longitudinal distance measured from the left support;
ϕ = angle measured from the right edge of shell;
ϕ_1 = angle subtended by the edge of shell measured from the centerline axis;
E = modulus of elasticity of concrete;
p_x = intensity of uniform load on unit area; and,
p_d = intensity of dead load on unit area.

Although it is possible to obtain the internal forces produced by any surface loads, because of mathematical difficulties, the corrective line loads applied along the longitudinal edges are expressible only as functions of $\sin \frac{n\pi x}{l}$ or $\cos \frac{n\pi x}{l}$ in which n is any integer. To avoid confusion in the application of

the line loads under Step 2, it is expedient to regard the surface load on the shell as the sum of partial loads, the intensity of which is defined as $A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$.

By a suitable selection of the values of A_n which will vary with each n, it is possible to approximate with any degree of accuracy any variation of loading. This representation of a known function by a series of sines or cosines is called "Fourier Analysis" and the series is called "Fourier Series." The Fourier series for a uniform load equals:

$$p_x = \frac{4p}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{l}\ldots\right] \quad (1a)$$

or:

$$p_x = \frac{4p}{\pi}\sum_{n=1,3,5}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{l} \quad (1b)$$

The partial loads represented by the first three terms are shown in Figs. 14(a), 14(b) and 14(c). The sum of the first and second term is shown in Fig. 14(d), and the sum of the first three terms is represented in Fig. 14(e). The sum of all the terms of the series gives the straight line $p = 1$. In general, only the first few terms of this series are needed to achieve sufficient accuracy. Hence, the internal forces and displacements produced by the sinusoidal loading represented by the first two terms are given in Tables 1B and 1C.

For the purpose of indicating the accuracy obtained by using only the first two partial loads, a comparison between values obtained by Table 1A and the sum of the values of Tables 1B and 1C is made. The internal forces at $\phi_1 - \phi = 30°$ and at $x = \frac{l}{2}$ for T_x and T_ϕ and at $x = 0$ for S, in a shell subject to a uniform load, computed by Table 1A, are

$$T_x = p_x r\left(\frac{l}{r}\right)^2(-0.750 \times \tfrac{1}{4}) = -0.1875\, p_x r\left(\frac{l}{r}\right)^2 \quad (2a)$$

$$S = p_x r\left(\frac{l}{r}\right)(-0.650 \times 1) = -0.650\, p_x r\left(\frac{l}{r}\right) \quad (2b)$$

and,

$$T_\phi = p_x r\,(-0.750 \times 1) = -0.750\, p_x r \quad (2c)$$

Using the coefficients from Tables 1B and 1C and applying the load constants indicated by the Fourier series:

$$T_x = p_x r\left(\frac{l}{r}\right)^2\frac{4}{\pi}\left[-0.1520 \times 1 - \frac{1 \times (-)\,0.0169}{3}\right] = -0.186\, p_x r\left(\frac{l}{r}\right)^2 \quad (3a)$$

$$S = p_x r\left(\frac{l}{r}\right)\frac{4}{\pi}\left[-0.414 + \frac{1 \times (-)\,0.1380}{3}\right] = -0.586\, p_x r\left(\frac{l}{r}\right) \quad (3b)$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

and,

$$T_\phi = p_u r \frac{4}{\pi}\left[-0.750 - \frac{1 \times (-) 0.750}{3}\right] = -0.635\, p_u r \ldots\ldots (3c)$$

Comparing the values obtained by the partial loads with those obtained by the uniform load, it is seen that good agreement is obtained for the longitudinal force T_x. The shear and transverse force components obtained by the sum of the first two sinusoidal loads are approximately 10% and 15% too small. In designing shells by partial loads, this discrepancy should be borne in mind and adjustments should be made to the final values.

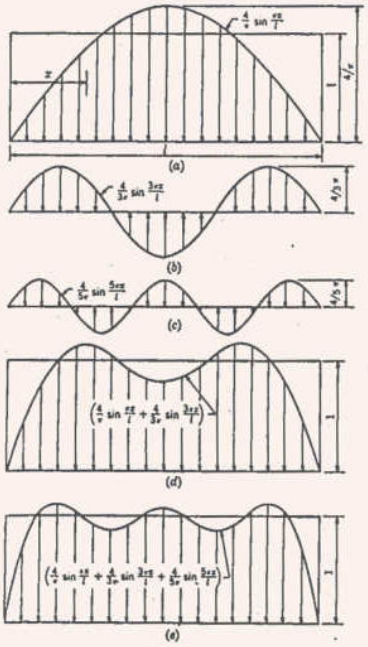


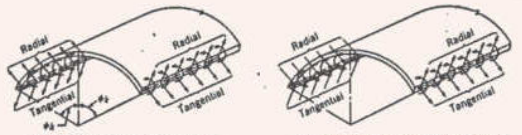
FIG. 14.

It is evident from Tables 1A, 1B and 1C that, for shells whose subtended angle is less than 180°, the membrane analysis gives transverse and shearing forces acting on and along the longitudinal edge. If the necessary marginal forces can be provided by the edge reactions and at the same time, the displacement of the supporting members correspond to the calculated displacements of the shell, the membrane analysis suffices; but to fulfill these requirements, deep edge members are often needed. In most cases these are neither possible nor desirable. On the contrary, in current practice the longitudinal edge beams are frequently omitted or reduced to a minimum size to exploit the full strength of the concrete shell. This reduction in the size of the edge beams means that the boundary conditions required by the membrane analysis are unfulfilled—in other words that the statical requirements of the

shell are unsatisfied. To satisfy the requirements of statics, line loads must be applied.

Step 2—Line Loads Along the Longitudinal Edges.—Along the longitudinal edges four separate line loads, a radial shearing force, a longitudinal shearing force, a tangential transverse force and a moment, can be applied along each edge as shown in Fig. 15. The line loads along one edge can be different from those acting along the other edge. With these eight line loads, four on each edge, any edge requirement can be satisfied.

For a single barrel with no edge member, subject to a symmetrical load, the corrective line loads will consist simply of a tangential transverse force and a longitudinal shearing force equal to but opposite in direction to T_ϕ and S given by the membrane analysis. When the edge conditions are complicated by the presence of longitudinal edge beams or adjoining shells, in addition to the two afore-mentioned loads, a radial shearing force and a moment normal to the edge must be applied. The relative magnitude of each force will depend on the strains and rotation produced by each load. The determination of the correct proportions of each is illustrated in design examples. However, briefly,



(a) SYMMETRICAL LINE LOADS (b) ANTISYMMETRICAL LINE LOADS

FIG. 15.

the procedure consists of establishing a number of simultaneous equations fulfilling known edge requirements.

The effect of edge line loads on the shell is basically different from the effect of surface loads. As previously mentioned, line loads produce bending as well as direct forces. The various forces produced by line loads are illustrated in Fig. 16 with the additional force components defined as:

N_ϕ = the radial shearing force on the radial face, considered positive when it acts outwardly on the face facing the negative ϕ-direction;
N_x = the radial shearing force on the longitudinal face, considered positive when it acts outwardly on the face facing the negative x-axis;
M_ϕ = bending moment on the radial face, considered positive when it produces tension in the inner fibers;
M_x = bending moment on the transverse face, considered positive when it produces tension in the inner fibers;
M_t = torsional moment, considered positive when it produces tension in the inner fibers in the direction of increasing values of x and ϕ;
u = the displacement of the shell in the longitudinal direction, considered positive in the direction of increasing values of x;

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

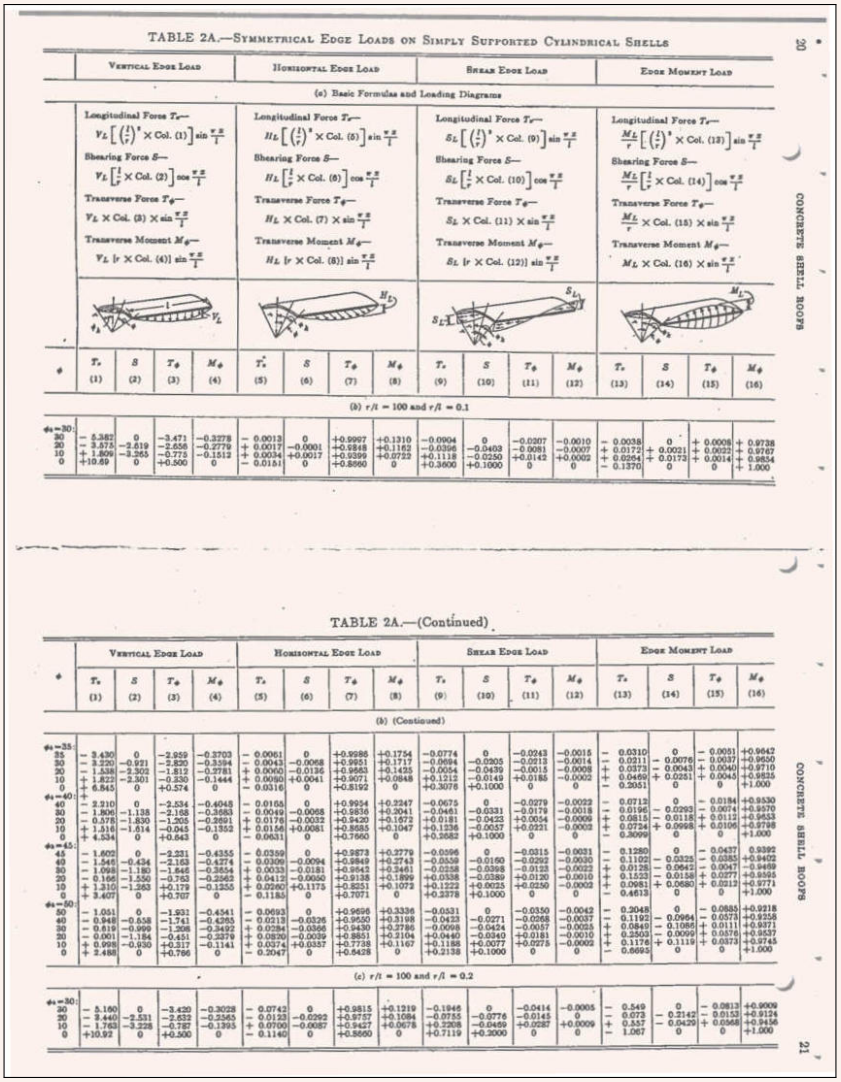


TABLE 2A.—Symmetrical Edge Loads on Simply Supported Cylindrical Shells

20

CONCRETE SHELL ROOFS

	Vertical Edge Load				Horizontal Edge Load				Shear Edge Load				Edge Moment Load			
	(a) Basic Formulas and Loading Diagrams															
	Longitudinal Force T_x— $V_L\left[\left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \text{Col. (1)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $V_L\left[\frac{l}{r} \times \text{Col. (2)}\right]\cos\frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $V_L \times \text{Col. (3)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$ Transverse Moment M_ϕ— $V_L\,[r \times \text{Col. (4)}]\sin\frac{\pi x}{l}$				Longitudinal Force T_x— $H_L\left[\left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \text{Col. (5)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $H_L\left[\frac{l}{r} \times \text{Col. (6)}\right]\cos\frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $H_L \times \text{Col. (7)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$ Transverse Moment M_ϕ— $H_L\,[r \times \text{Col. (8)}]\sin\frac{\pi x}{l}$				Longitudinal Force T_x— $S_L\left[\left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \text{Col. (9)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $S_L\left[\frac{l}{r} \times \text{Col. (10)}\right]\cos\frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $S_L \times \text{Col. (11)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$ Transverse Moment M_ϕ— $S_L\,[r \times \text{Col. (12)}]\sin\frac{\pi x}{l}$				Longitudinal Force T_x— $\frac{M_L}{r}\left[\left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \text{Col. (13)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $\frac{M_L}{r}\left[\frac{l}{r} \times \text{Col. (14)}\right]\cos\frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $\frac{M_L}{r} \times \text{Col. (15)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$ Transverse Moment M_ϕ— $M_L \times \text{Col. (16)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$			
ϕ	T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
	(b) $r/l = 100$ and $r/l = 0.1$															
ϕ_k=30°	− 5.382	0	−3.471	−0.3278	− 0.0013	0	+0.9997	+0.1310	−0.0904	0	−0.0207	−0.0010	− 0.0038	0	+ 0.0008	+ 0.9738
20	− 3.572	−2.819	−2.656	−0.2779	+ 0.0017	−0.0001	+0.9948	+0.1162	−0.0396	−0.2403	−0.0081	−0.0007	+ 0.0172	+ 0.0021	+ 0.0022	+ 0.9787
10	+ 1.809	−3.265	−0.773	−0.1512	+ 0.0034	+0.0017	+0.9399	+0.0722	+0.1118	−0.0250	+0.0142	+0.0002	+ 0.0264	+ 0.0173	+ 0.0014	+ 0.9854
0	+10.89	0	+0.500	0	− 0.0181	0	+0.8860	0	+0.3600	+0.1000	0	0	− 0.1370	0	0	+ 1.000

TABLE 2A.—(Continued)

	Vertical Edge Load				Horizontal Edge Load				Shear Edge Load				Edge Moment Load			
ϕ	T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
	(b) (Continued)															
ϕ_k=35°	− 3.430	0	−2.959	−0.3703	− 0.0061	0	+0.9986	+0.1754	−0.0774	0	−0.0243	−0.0015	− 0.0310	0	− 0.0051	+0.9642
35	− 3.220	−0.921	−2.820	−0.3394	− 0.0043	−0.0068	+0.9951	+0.1717	−0.0694	−0.0205	−0.0213	−0.0014	− 0.0211	− 0.0076	− 0.0037	+0.9650
30	− 1.538	−2.302	−1.812	−0.2781	+ 0.0060	−0.0136	+0.9853	+0.1425	−0.0554	−0.0439	−0.0115	−0.0008	+ 0.0373	− 0.0043	+ 0.0040	+0.9710
20	+ 1.822	−2.301	−0.330	−0.1444	+ 0.0090	+0.0041	+0.9071	+0.0948	+0.1212	−0.0149	+0.0185	−0.0002	+ 0.0489	+ 0.0251	+ 0.0045	+0.9825
0	+ 6.845	0	+0.574	0	− 0.0316	0	+0.8192	0	+0.3076	+0.1000	0	0	− 0.2051	0	0	+1.000
ϕ_k=40°																
40	− 2.310	0	−2.534	−0.4048	− 0.0155	0	+0.9934	+0.2247	−0.0675	0	−0.0279	−0.0022	− 0.0712	0	− 0.0184	+0.9530
30	− 1.806	−1.138	−2.168	−0.3583	− 0.0049	−0.0068	+0.9836	+0.2041	−0.0461	−0.0331	−0.0179	−0.0018	− 0.0196	− 0.0293	− 0.0074	+0.9570
20	− 0.578	−1.830	−1.205	−0.2891	+ 0.0176	−0.0032	+0.9420	+0.1672	+0.0181	−0.0423	+0.0054	−0.0009	− 0.0815	− 0.0118	− 0.0112	+0.9653
10	+ 1.516	−1.814	−0.045	−0.1552	+ 0.0156	+0.0081	+0.8585	+0.1047	+0.1236	−0.0537	+0.0231	−0.0003	− 0.0724	+ 0.0098	+ 0.0106	+0.9798
0	+ 4.534	0	+0.643	0	− 0.0631	0	+0.7660	0	+0.3682	+0.1000	0	0	− 0.3099	0	0	+1.000
ϕ_k=45°																
45	− 1.602	0	−2.231	−0.4355	− 0.0359	0	+0.9873	+0.2779	−0.0596	0	−0.0315	−0.0031	− 0.1280	0	− 0.0437	0.9392
40	− 1.546	−0.434	−2.163	−0.4274	− 0.0309	−0.0094	+0.9849	+0.2743	−0.0559	−0.0160	−0.0292	−0.0030	− 0.1102	− 0.0325	− 0.0385	+0.9402
30	− 1.068	−1.185	−1.846	−0.3854	+ 0.0033	−0.0181	+0.9643	+0.2461	−0.0258	−0.0398	−0.0123	−0.0022	+ 0.0128	− 0.0642	− 0.0047	−0.9489
20	− 0.166	−1.550	−0.763	−0.3262	+ 0.0412	−0.0050	+0.9138	+0.1899	+0.0338	−0.0389	+0.0120	−0.0010	+ 0.1533	− 0.0158	+ 0.0277	+0.9595
10	+ 1.310	−1.263	+0.179	−0.1355	+ 0.0260	+0.1175	+0.8251	+0.1072	+0.1222	+0.0025	+0.0250	−0.0002	+ 0.0081	+ 0.0580	+ 0.0213	+0.9771
0	+ 3.407	0	+0.707	0	− 0.1185	0	+0.7071	0	+0.3378	+0.1000	0	0	− 0.4613	0	0	+1.000
ϕ_k=50°																
50	− 1.051	0	−1.931	−0.4541	− 0.0693	0	+0.9696	+0.3336	−0.0531	0	−0.0350	−0.0042	− 0.2048	0	− 0.0885	+0.9218
40	− 0.948	−0.658	−1.741	−0.4265	− 0.0213	−0.0326	+0.9550	+0.3198	−0.0423	−0.0271	−0.0268	−0.0037	− 0.1192	− 0.0964	− 0.0573	+0.9258
30	− 0.619	−0.999	−1.208	−0.3492	+ 0.0284	−0.0366	+0.9430	+0.2786	−0.0096	−0.0424	−0.0057	−0.0025	+ 0.0849	− 0.1086	+ 0.0111	+0.9271
20	− 0.001	−1.184	−0.451	−0.2379	+ 0.0830	−0.0039	+0.9051	+0.2104	+0.0460	−0.0340	+0.0181	−0.0010	+ 0.2303	− 0.0099	+ 0.0576	+0.9537
10	+ 0.998	−0.930	+0.217	−0.1141	+ 0.0374	+0.0357	+0.7738	+0.1167	+0.1188	+0.0077	+0.0275	−0.0002	+ 0.1176	+ 0.1119	+ 0.0373	+0.9745
0	+ 2.488	0	+0.786	0	− 0.2047	0	+0.6428	0	+0.2138	+0.1000	0	0	− 0.6695	0	0	+1.000
	(c) $r/l = 100$ and $r/l = 0.2$															
ϕ_k=30°	− 5.160	0	−3.420	−0.3028	− 0.0742	0	+0.9815	+0.1219	−0.1946	0	−0.0414	−0.0005	− 0.549	0	− 0.0813	+0.9009
20	− 3.440	−2.531	−2.623	−0.2565	− 0.0123	−0.0292	+0.9757	+0.1084	−0.0755	−0.0776	−0.0145	0	− 0.073	− 0.2142	− 0.0153	+0.9124
10	− 1.763	−3.228	−0.787	−0.1393	+ 0.0700	−0.0687	+0.9427	+0.0678	+0.2308	−0.0489	+0.0287	+0.0009	− 0.357	− 0.0429	+ 0.0588	+0.9456
0	+10.92	0	+0.300	0	− 0.1140	0	+0.8660	0	+0.7119	+0.3000	0	0	− 1.067	0	0	+1.000

CONCRETE SHELL ROOFS

21

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

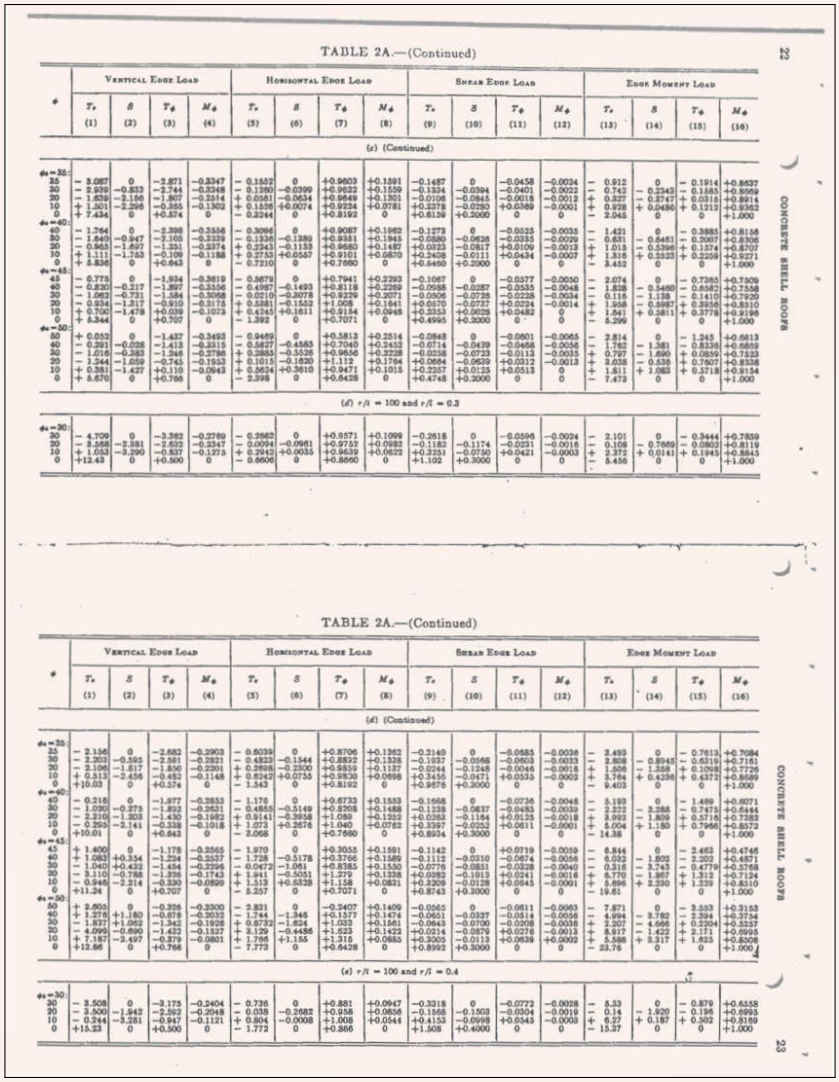


TABLE 2A.—(Continued)

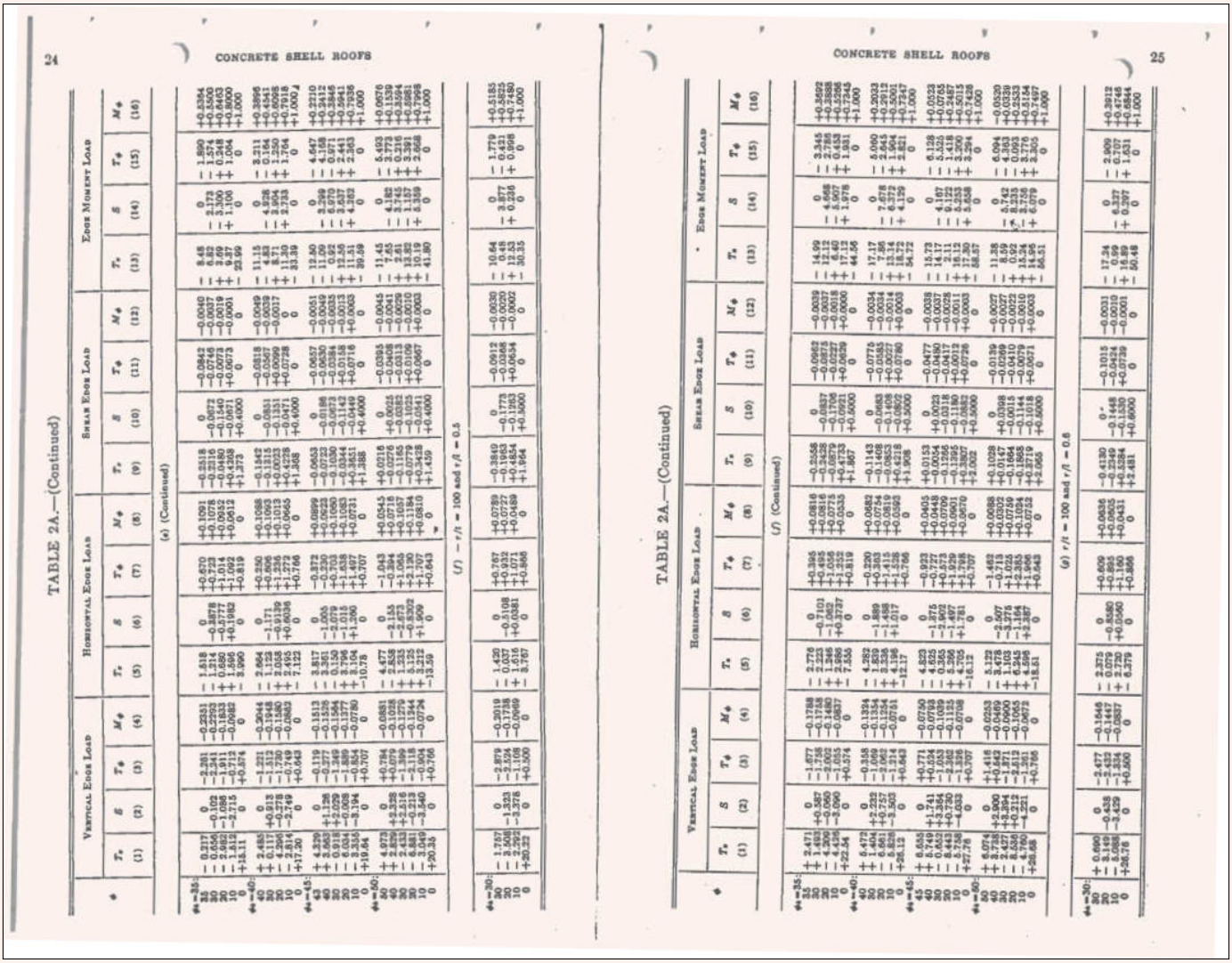
φ	Vertical Edge Load				Horizontal Edge Load				Shear Edge Load				Edge Moment Load			
	T_s (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_s (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_s (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_s (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(c) (Continued)																
$\phi_1 = 25°$	− 3.087	0	−2.871	−0.3347	− 0.1552	0	+0.9603	+0.1591	−0.1487	0	−0.0458	−0.0024	− 0.912	0	− 0.1914	+0.8637
30	− 2.939	−0.833	−2.744	−0.3248	− 0.1560	−0.0399	+0.9622	+0.1559	−0.1334	−0.0394	−0.0401	−0.0022	+ 0.742	− 0.2343	− 0.1685	+0.8069
20	− 1.859	−2.156	−1.807	−0.2314	+ 0.0581	−0.0634	+0.9849	+0.1301	−0.0108	−0.0845	−0.0018	−0.0012	+ 0.327	− 0.3747	+ 0.0318	+0.8914
10	+ 1.501	−2.296	−0.365	−0.1302	+ 0.1556	+0.0074	+0.9224	+0.0781	+0.2378	−0.0293	+0.0369	−0.0001	+ 0.928	+ 0.0486	+ 0.1212	+0.9562
0	+ 7.434	0	+0.574	0	− 0.2244	0	+0.8192	0	+0.6139	+0.3000	0	0	+ 2.045	0	0	+1.000
$\phi_1 = 40°$																
40	− 1.764	0	−2.398	−0.3556	− 0.3096	0	+0.9087	+0.1962	−0.1273	0	−0.0325	−0.0035	− 1.421	0	− 0.3885	+0.8156
30	− 1.645	−0.847	−2.105	−0.3339	− 0.1336	−0.1389	+0.9351	+0.1845	−0.0880	−0.0626	−0.0335	−0.0029	− 0.631	− 0.6481	− 0.3007	+0.8306
20	− 0.963	−1.697	−1.351	−0.2374	+ 0.2243	−0.1133	+0.9680	+0.1487	+0.0323	−0.0817	+0.0109	−0.0013	+ 1.015	− 0.5296	+ 0.1574	+0.8707
10	+ 1.111	−1.763	−0.109	−0.1188	+ 0.2753	+0.0557	+0.9161	+0.0870	+0.2408	−0.0111	+0.0434	−0.0007	+ 1.316	+ 0.2523	+ 0.2259	+0.9271
0	+ 6.836	0	+0.643	0	− 0.7710	0	+0.7660	0	+0.6460	+0.2000	0	0	+ 3.452	0	0	+1.000
$\phi_1 = 45°$																
45	− 0.775	0	−1.934	−0.3619	− 0.5679	0	+0.7941	+0.2293	−0.1067	0	−0.0377	−0.0050	− 2.074	0	− 0.7385	+0.7309
40	− 0.820	−0.217	−1.897	−0.3556	− 0.4967	−0.1493	+0.8118	+0.2269	−0.0988	−0.0287	−0.0535	−0.0048	− 1.828	− 0.5460	− 0.6582	+0.7358
30	− 1.062	−0.731	−1.584	−0.3068	− 0.2210	−0.2078	+0.9229	+0.2071	−0.0506	−0.0795	−0.0228	−0.0034	− 0.116	− 1.138	− 0.1410	+0.7920
20	− 0.934	−1.217	−0.910	−0.2176	+ 0.5381	−0.1552	+0.8408	+0.1641	+0.0570	−0.0737	+0.0224	−0.0014	+ 1.958	− 0.6987	+ 0.3956	+0.8510
10	+ 0.700	−1.478	+0.039	−0.1073	+ 0.4245	+0.1611	+0.9154	+0.0948	+0.2353	+0.0028	+0.0482	0	+ 1.641	+ 0.2811	+ 0.3778	+0.9196
0	+ 5.344	0	+0.707	0	− 1.392	0	+0.7071	0	+0.4995	+0.3000	0	0	+ 5.299	0	0	+1.000
$\phi_1 = 50°$																
50	+ 0.052	0	−1.437	−0.3493	− 0.9469	0	+0.5813	+0.2514	−0.0848	0	−0.0601	−0.0065	− 2.814	0	− 1.245	+0.6613
40	− 0.291	−0.028	−1.413	−0.3315	− 0.8427	−0.4585	+0.7040	+0.2452	−0.0714	−0.0439	−0.0468	−0.0056	− 1.762	− 1.381	− 0.8336	+0.6869
30	− 1.016	−0.383	−1.345	−0.2788	+ 0.2885	−0.5526	+0.9656	+0.2238	−0.0258	−0.0723	−0.0113	−0.0035	+ 0.797	− 1.690	+ 0.0839	+0.7533
20	− 1.244	−1.059	−0.745	−0.1953	+ 0.1015	−0.1620	+1.112	+0.1794	+0.0656	−0.0959	+0.0312	−0.0013	+ 3.038	− 0.538	+ 0.7607	+0.8338
10	+ 0.381	−1.427	+0.110	−0.0943	+ 0.5824	+0.3610	+0.9471	+0.1015	+0.2257	+0.0125	+0.0513	0	+ 1.811	+ 1.083	+ 0.3718	+0.9154
0	+ 5.870	0	+0.766	0	− 2.398	0	+0.6428	0	+0.4748	+0.3000	0	0	+ 7.473	0	0	+1.000
(d) $r/t = 100$ and $r/t = 0.3$																
$\phi_1 = 30°$																
30	− 4.709	0	−3.362	−0.2789	− 0.2662	0	+0.9571	+0.1099	−0.2618	0	−0.0596	−0.0024	− 2.101	0	− 0.3444	+0.7859
20	− 3.668	−2.381	−2.632	−0.2347	− 0.0094	−0.0961	+0.9753	+0.0982	−0.1182	−0.1174	−0.0231	−0.0016	− 0.108	− 0.7689	− 0.0803	+0.8119
10	+ 1.053	−3.290	−0.837	−0.1275	+ 0.2942	+0.0035	+0.9639	+0.0622	+0.3251	−0.0750	+0.0421	−0.0003	+ 2.372	+ 0.0141	+ 0.1945	+0.8845
0	+12.43	0	+0.500	0	− 0.6606	0	+0.8660	0	+1.102	+0.3000	0	0	+ 5.456	0	0	+1.000

TABLE 2A.—(Continued)

φ	Vertical Edge Load				Horizontal Edge Load				Shear Edge Load				Edge Moment Load			
	T_s (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_s (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_s (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_s (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(d) (Continued)																
$\phi_1 = 35°$	− 2.156	0	−2.682	−0.2903	− 0.8039	0	+0.8706	+0.1362	−0.2140	0	−0.0585	−0.0036	− 3.493	0	− 0.7613	+0.7084
30	− 2.203	−0.595	−2.591	−0.2821	− 0.4823	−0.1544	+0.8932	+0.1328	−0.1937	−0.0568	−0.0603	−0.0033	− 2.808	− 0.8945	− 0.5319	+0.7161
20	− 2.151	−1.817	−1.930	−0.2201	− 0.3958	−0.2300	+0.9359	+0.1137	−0.0244	−0.1245	−0.0246	−0.0018	− 1.508	− 1.358	− 0.1098	+0.7729
10	+ 0.513	−2.456	−0.652	−0.1148	+ 0.8242	+0.0755	+0.9830	+0.0698	+0.3455	−0.0471	+0.0535	−0.0002	+ 3.764	+ 0.4236	+ 0.4372	+0.8589
0	+10.03	0	+0.574	0	− 1.343	0	+0.8192	0	+0.8978	+0.3000	0	0	+ 9.403	0	0	+1.000
$\phi_1 = 40°$																
40	− 0.218	0	−1.977	−0.2853	− 1.176	0	+0.8733	+0.1553	−0.1668	0	−0.0736	−0.0048	− 5.193	0	− 1.489	+0.6071
30	− 1.030	−0.275	−1.822	−0.2631	− 0.4855	−0.5149	+0.8208	+0.1488	−0.1238	−0.0637	−0.0483	−0.0039	− 2.223	− 2.288	− 0.7475	+0.6444
20	− 2.210	−1.303	−1.430	−0.1982	+ 0.9141	−0.3958	+1.059	+0.1252	+0.0263	−0.1164	+0.0125	−0.0018	+ 3.993	− 1.809	+ 0.5718	+0.7382
10	− 0.295	−3.141	−0.338	−0.1018	+ 1.073	+0.2676	+1.040	+0.0762	+0.3397	−0.0252	+0.0611	−0.0001	+ 5.004	+ 1.180	+ 0.7966	+0.8572
0	+10.01	0	+0.643	0	− 3.068	0	+0.7660	0	+0.8934	+0.3000	0	0	+ 14.38	0	0	+1.000
$\phi_1 = 45°$																
45	+ 1.400	0	−1.178	−0.2565	− 1.970	0	+0.3055	+0.1591	−0.1142	0	+0.0719	−0.0059	+ 6.846	0	− 2.463	+0.4746
40	+ 1.083	+0.334	−1.224	−0.2537	− 1.728	−0.5178	+0.3766	+0.1589	−0.1112	−0.0310	−0.0674	−0.0056	+ 6.032	− 1.802	− 2.202	+0.4871
30	− 1.040	+0.432	−1.454	−0.2296	− 0.0472	−1.061	+0.8585	+0.1550	−0.0776	−0.0851	−0.0328	−0.0040	+ 0.316	− 3.743	− 0.4779	+0.5768
20	− 3.110	−0.788	−1.396	−0.1743	+ 1.941	−0.5051	+1.279	+0.1338	+0.0382	−0.1013	+0.0241	−0.0016	+ 6.770	− 1.867	+ 1.313	+0.7124
10	− 0.946	−2.214	−0.330	−0.0899	+ 1.313	+0.6328	+1.158	+0.0821	+0.3209	−0.0128	+0.0545	−0.0001	+ 5.696	+ 2.230	+ 1.229	+0.8510
0	+11.24	0	+0.707	0	− 5.257	0	+0.7071	0	+0.8743	+0.3000	0	0	+ 19.61	0	0	+1.000
$\phi_1 = 50°$																
50	+ 2.805	0	−0.326	−0.2300	− 2.821	0	−0.2407	+0.1409	−0.0565	0	−0.0511	−0.0063	+ 7.871	0	− 3.553	+0.3153
40	+ 1.276	+1.180	−0.678	−0.2032	− 1.744	−1.346	+0.1577	+0.1474	−0.0651	−0.0337	−0.0514	−0.0056	+ 4.994	− 3.782	− 2.394	+0.3734
30	− 1.837	+1.062	−1.342	−0.1928	+ 0.8732	−1.624	+1.033	+0.1561	−0.0643	−0.0730	−0.0308	−0.0036	+ 2.207	− 4.666	+ 0.2204	+0.5257
20	− 4.099	−0.890	−1.422	−0.1527	+ 3.129	−0.6486	+1.523	+0.1422	+0.0214	−0.0879	+0.0276	−0.0013	+ 8.917	− 1.422	+ 2.171	+0.5995
10	+ 7.187	−3.497	−0.379	−0.0801	+ 1.705	+1.155	+1.315	+0.0883	+0.3205	−0.0113	+0.0639	−0.0002	+ 5.588	+ 3.217	+ 1.525	+0.8508
0	+12.66	0	+0.766	0	− 7.773	0	+0.6428	0	+0.8992	+0.3000	0	0	− 23.76	0	0	+1.000
(e) $r/t = 100$ and $r/t = 0.4$																
$\phi_1 = 30°$																
30	− 3.508	0	−3.175	−0.2404	− 0.736	0	+0.881	+0.0947	−0.3318	0	−0.0772	−0.0028	− 5.33	0	− 0.879	+0.6558
20	− 3.500	−1.942	−2.562	−0.2048	+ 0.038	−0.2682	+0.958	+0.0856	−0.1568	−0.1503	−0.0304	−0.0019	+ 0.14	− 1.920	− 0.196	+0.8995
10	− 0.244	−3.281	−0.947	−0.1121	+ 0.804	−0.0008	+1.008	+0.0344	+0.4153	−0.0998	+0.0545	−0.0003	+ 6.27	+ 0.187	+ 0.502	+0.8169
0	+15.23	0	+0.500	0	− 1.772	0	+0.866	0	+1.508	+0.4000	0	0	− 15.27	0	0	+1.000

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

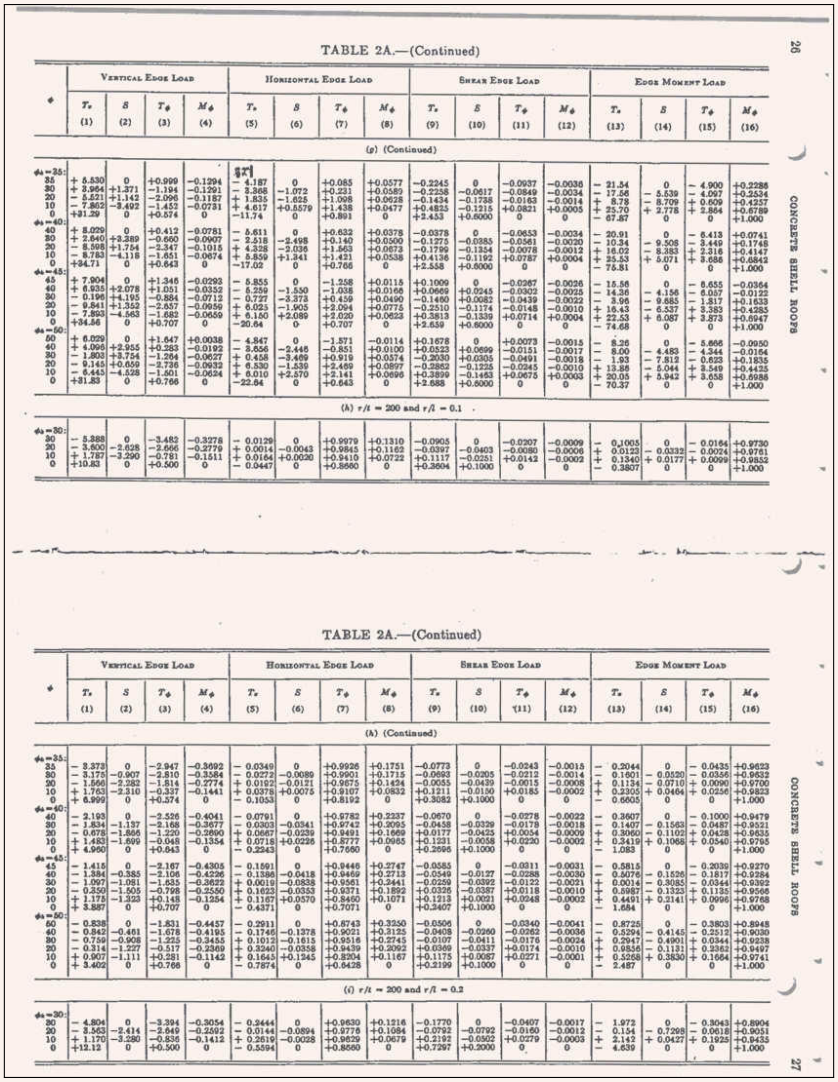


TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load				Horizontal Edge Load				Shear Edge Load				Edge Moment Load			
	T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
							(p) (Continued)									
$\phi_0 = 25°$:					‡37											
35	+ 5.530	0	+0.999	−0.1294	− 4.187	0	+0.085	+0.0577	−0.2245	0	−0.0937	−0.0036	− 21.54	0	− 4.900	+0.2288
30	+ 3.964	+1.371	−1.194	−0.1291	− 3.868	−1.072	+0.231	+0.0589	−0.2238	−0.0617	−0.0849	−0.0034	− 17.56	− 5.539	− 4.097	+0.2534
20	− 5.521	+1.142	−2.096	−0.1167	+ 1.835	−1.625	+1.098	+0.0628	−0.1434	−0.1738	−0.0163	−0.0014	+ 8.78	+ 8.709	+ 0.509	+0.4257
10	− 7.862	−3.492	−1.453	−0.0731	+ 4.617	+0.5579	+1.438	+0.0477	+0.4825	−0.1215	+0.0821	+0.0005	+ 25.70	+ 2.778	+ 2.864	+0.6789
0	+21.29	0	+0.574	0	−11.74	0	+0.891	0	+2.453	+0.6000	0	0	− 67.87	0	0	+1.000
$\phi_0 = 40°$:																
40	+ 8.029	0	+0.412	−0.0781	− 5.611	0	+0.632	+0.0378	−0.0378	0	−0.0653	−0.0034	− 20.91	0	− 6.413	+0.0741
30	+ 2.940	+2.289	−0.660	−0.0907	− 2.518	−2.498	+0.140	+0.0500	−0.1275	−0.0385	−0.0561	−0.0020	− 10.34	− 9.508	− 3.449	+0.1748
20	− 8.598	+1.754	−2.347	−0.1015	+ 4.328	−2.036	+1.563	+0.0573	−0.1799	−0.1354	−0.0078	−0.0012	+ 16.02	+ 8.383	+ 2.316	+0.4147
10	− 8.783	−4.118	−1.851	−0.0674	+ 5.859	+1.341	+1.421	+0.0538	+0.4136	−0.1192	+0.0787	+0.0004	+ 25.53	+ 5.071	+ 3.686	+0.6842
0	+84.71	0	+0.643	0	−17.02	0	+0.766	0	+2.538	+0.6000	0	0	− 76.81	0	0	+1.000
$\phi_0 = 45°$:																
45	+ 7.904	0	+1.345	−0.0293	− 5.855	0	−1.358	+0.0115	+0.1009	0	−0.0267	−0.0026	− 15.56	0	− 8.655	−0.0364
40	+ 6.935	+2.078	+1.051	−0.0352	− 5.259	−1.550	−1.038	+0.0166	+0.0669	+0.0245	−0.0302	−0.0025	− 14.36	− 4.156	− 6.057	−0.0122
30	− 0.196	+4.195	−0.884	−0.0712	− 0.727	−3.373	+0.459	+0.0490	−0.1460	+0.0082	−0.0439	−0.0022	− 3.96	− 9.885	− 1.817	+0.1633
20	− 9.841	+1.352	−2.857	−0.0659	+ 6.023	−1.905	+2.094	+0.0775	−0.2510	−0.1174	−0.0148	−0.0010	+ 16.43	− 6.537	+ 3.383	+0.4285
10	− 7.893	−4.563	−1.682	−0.0659	+ 6.100	+2.089	+2.020	+0.0622	+0.3813	−0.1339	+0.0714	+0.0004	+ 22.53	+ 6.087	+ 3.873	+0.6947
0	+94.56	0	+0.707	0	−20.64	0	+0.707	0	+2.539	+0.6000	0	0	− 74.68	0	0	+1.000
$\phi_0 = 50°$:																
50	+ 6.029	0	+1.647	+0.0038	− 4.847	0	−1.371	−0.0114	+0.1678	0	+0.0073	−0.0015	− 8.26	0	− 5.866	−0.0950
40	+ 4.095	+2.955	+0.283	−0.0192	− 3.256	−2.445	−0.851	+0.0100	+0.0523	+0.0699	−0.0151	−0.0017	− 8.00	− 4.483	− 4.344	−0.0154
30	− 1.803	+3.754	−1.264	−0.0527	+ 0.458	−3.409	+0.919	+0.0374	−0.2030	+0.0305	−0.0491	−0.0018	− 1.93	− 7.812	− 0.623	+0.1835
20	− 9.143	+0.659	−2.738	−0.0933	+ 5.530	−1.539	+2.469	+0.0897	−0.2862	−0.1255	−0.0245	−0.0010	+ 13.86	+ 5.044	+ 3.549	+0.4425
10	− 6.445	−4.528	−1.501	−0.0624	+ 8.010	+2.570	+2.141	+0.0696	+0.3899	−0.1453	+0.0675	+0.0003	+ 20.05	+ 5.942	+ 3.658	+0.6886
0	+81.83	0	+0.766	0	−22.84	0	+0.643	0	+2.688	+0.6000	0	0	− 70.37	0	0	+1.000
							(h) $r/t = 200$ and $r/l = 0.1$									
$\phi_0 = 30°$:																
30	− 5.388	0	−3.483	−0.3278	− 0.0129	0	+0.9979	+0.1310	−0.0905	0	−0.0207	−0.0009	− 0.1005	0	− 0.0164	+0.9730
20	− 3.600	−2.628	−2.666	−0.2779	+ 0.0014	−0.0043	+0.9845	+0.1163	−0.0397	−0.0403	−0.0080	−0.0006	+ 0.0123	− 0.0335	+ 0.0024	+0.9781
10	+ 1.787	−3.290	−0.781	−0.1511	+ 0.0164	+0.0030	+0.9410	+0.0722	+0.1117	−0.0251	+0.0142	−0.0002	+ 0.1340	+ 0.0177	+ 0.0099	+0.9852
0	+10.83	0	+0.500	0	− 0.0447	0	+0.8580	0	+0.3604	+0.1000	0	0	− 0.3807	0	0	+1.000

TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load				Horizontal Edge Load				Shear Edge Load				Edge Moment Load			
	T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
							(h) (Continued)									
$\phi_0 = 35°$:																
35	− 3.373	0	−2.947	−0.3692	− 0.0349	0	+0.9926	+0.1751	−0.0773	0	−0.0243	−0.0015	− 0.2044	0	− 0.0435	+0.9623
30	− 3.178	−0.907	−2.810	−0.3584	− 0.0272	−0.0089	+0.9901	+0.1715	−0.0693	−0.0205	−0.0212	−0.0014	− 0.1601	− 0.0520	− 0.0356	+0.9632
20	− 1.566	−2.382	−1.814	−0.2774	+ 0.0122	−0.0121	+0.9875	+0.1454	−0.0265	−0.0439	−0.0015	−0.0008	+ 0.1134	− 0.0710	+ 0.0090	+0.9700
10	+ 1.763	−3.310	−0.337	−0.1441	+ 0.0378	+0.0075	+0.9107	+0.0832	+0.1211	−0.0150	+0.0185	−0.0002	+ 0.2305	+ 0.0464	+ 0.0256	+0.9823
0	+ 6.999	0	+0.574	0	− 0.1053	0	+0.8192	0	+0.3082	+0.1000	0	0	− 0.6605	0	0	+1.000
$\phi_0 = 40°$:																
40	− 3.193	0	−2.526	−0.4041	− 0.0791	0	+0.9782	+0.2337	−0.0670	0	−0.0278	−0.0022	− 0.3607	0	− 0.1000	+0.9479
30	− 1.834	−1.137	−2.168	−0.3677	− 0.0303	−0.0341	+0.9742	+0.2093	−0.0458	−0.0329	−0.0178	−0.0018	− 0.1407	− 0.1563	− 0.0487	+0.9531
20	− 0.678	−1.866	−1.220	−0.2890	+ 0.0667	−0.0239	+0.9491	+0.1669	+0.0177	−0.0425	+0.0054	−0.0009	+ 0.3060	− 0.1102	+ 0.0428	+0.9635
10	+ 1.483	−1.899	−0.048	−0.1354	+ 0.0718	+0.0226	+0.8777	+0.0955	+0.1231	−0.0058	+0.0230	−0.0002	+ 0.3419	+ 0.1068	+ 0.0540	+0.9795
0	+ 4.960	0	+0.643	0	− 0.2343	0	+0.7660	0	+0.2695	+0.1000	0	0	− 1.083	0	0	+1.000
$\phi_0 = 45°$:																
45	− 1.415	0	−2.167	−0.4305	− 0.1591	0	+0.9446	+0.2747	−0.0585	0	−0.0311	−0.0031	− 0.5815	0	− 0.2039	+0.9270
40	− 1.384	−0.385	−2.106	−0.4226	− 0.1386	−0.0418	+0.9469	+0.2713	−0.0549	−0.0127	−0.0288	−0.0030	− 0.5076	− 0.1525	− 0.1817	+0.9284
30	− 1.097	−1.081	−1.635	−0.3822	− 0.0619	−0.0838	+0.9561	+0.2441	−0.0259	−0.0392	−0.0122	−0.0021	− 0.2014	− 0.3085	− 0.0344	+0.9362
20	− 0.250	−1.505	−0.798	−0.2550	+ 0.1023	−0.0353	+0.9371	+0.1892	+0.0326	−0.0387	+0.0118	−0.0010	+ 0.3987	− 0.1323	+ 0.1135	+0.9566
10	+ 1.178	−1.323	+0.148	−0.1254	+ 0.1167	+0.0570	+0.8462	+0.1071	+0.1213	+0.0021	+0.0348	−0.0002	+ 0.4491	+ 0.2141	+ 0.0996	+0.9768
0	+ 3.887	0	+0.707	0	− 0.4371	0	+0.7071	0	+0.2407	+0.1000	0	0	− 1.684	0	0	+1.000
$\phi_0 = 50°$:																
50	− 0.838	0	−1.831	−0.4457	− 0.2911	0	+0.8743	+0.3250	−0.0506	0	−0.0340	−0.0041	− 0.8725	0	− 0.3803	+0.8948
40	− 0.842	−0.461	−1.678	−0.4195	− 0.1746	−0.1378	+0.9021	+0.3125	−0.0408	−0.0260	−0.0262	−0.0036	− 0.5294	− 0.4145	− 0.2512	+0.9030
30	− 0.759	−0.908	−1.225	−0.3455	+ 0.1012	−0.1615	+0.9518	+0.2745	−0.0107	−0.0411	−0.0176	−0.0024	+ 0.2947	− 0.4901	+ 0.0344	+0.9238
20	− 0.314	−1.227	−0.517	−0.2369	+ 0.3240	−0.0358	+0.9439	+0.2092	+0.0369	−0.0337	+0.0174	−0.0010	+ 0.9856	− 0.1131	+ 0.2362	+0.9497
10	+ 0.907	−1.111	+0.281	−0.1142	+ 0.1643	+0.1345	+0.8204	+0.1167	+0.1175	+0.0087	+0.0271	−0.0001	+ 0.5268	+ 0.3830	+ 0.1664	+0.9741
0	+ 3.402	0	+0.766	0	− 0.7874	0	+0.6428	0	+0.2199	+0.1000	0	0	− 2.487	0	0	+1.000
							(i) $r/t = 200$ and $r/l = 0.2$									
$\phi_0 = 30°$:																
30	− 4.804	0	−3.394	−0.3054	− 0.3444	0	+0.9630	+0.1216	−0.1770	0	−0.0407	−0.0017	− 1.972	0	− 0.3043	+0.8904
20	− 3.563	−2.414	−2.649	−0.2592	− 0.0144	−0.0894	+0.9778	+0.1084	−0.0792	−0.0792	−0.0160	−0.0012	− 0.154	− 0.7295	− 0.0618	+0.9051
10	+ 1.170	−3.280	−0.836	−0.1412	+ 0.2619	−0.0028	+0.9579	+0.0679	+0.2197	−0.0522	+0.0279	−0.0003	+ 2.143	+ 0.0422	+ 0.1925	+0.9435
0	+12.12	0	+0.500	0	− 0.5594	0	+0.8589	0	+0.7297	+0.3000	0	0	− 4.639	0	0	+1.000

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

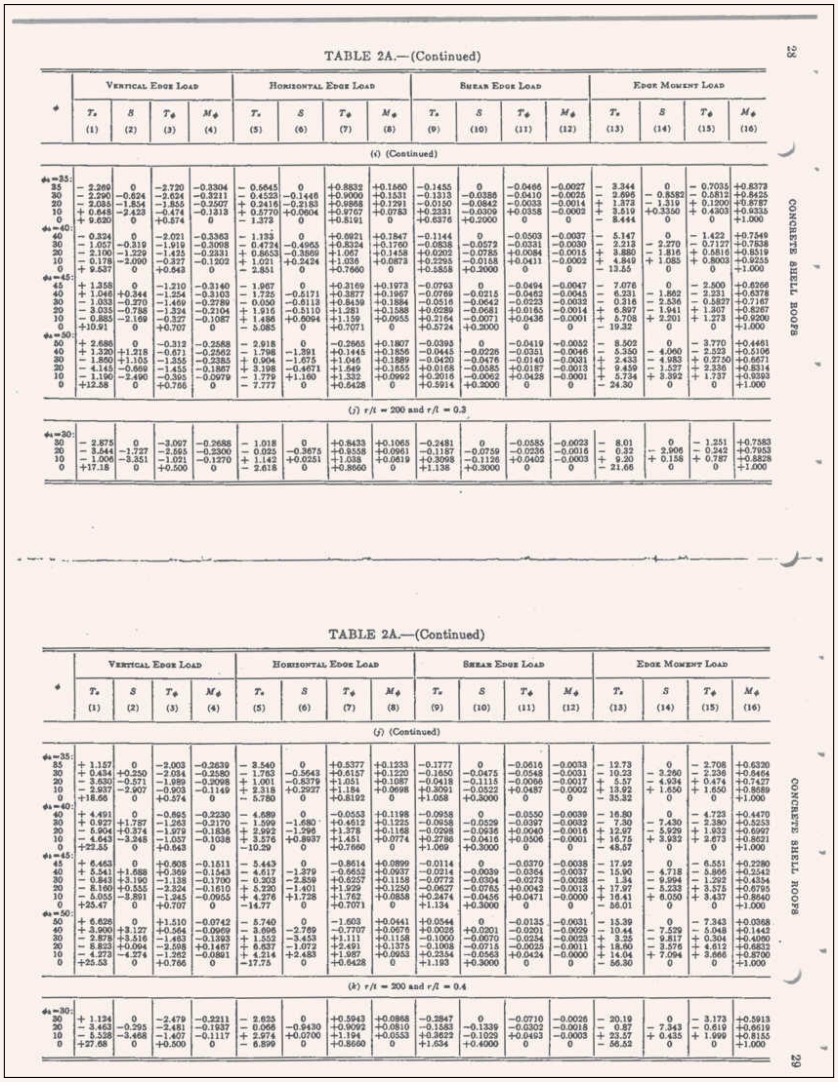


TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load				Horizontal Edge Load				Shear Edge Load				Edge Moment Load			
	T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(i) (Continued)																
$\phi_1=35°$	− 2.269	0	−2.720	−0.3304	− 0.6645	0	+0.8832	+0.1580	−0.1455	0	−0.0466	−0.0027	− 3.344	0	− 0.7035	+0.8373
30	− 2.290	−0.624	−2.634	−0.3211	− 0.4523	−0.1448	+0.9000	+0.1531	−0.1313	−0.0386	−0.0410	−0.0025	− 2.695	− 0.8582	− 0.5812	+0.8425
20	− 2.035	−1.854	−1.855	−0.2507	+ 0.2416	−0.2183	+0.9868	+0.1291	−0.0150	−0.0842	−0.0033	−0.0014	+ 1.373	− 1.319	+ 0.1200	+0.8787
10	+ 0.648	−2.423	−0.474	−0.1313	+ 0.2770	+0.0604	+0.9767	+0.0783	+0.2331	−0.0309	+0.0358	−0.0003	+ 3.619	+0.3350	+ 0.4303	+0.9335
0	+ 9.620	0	+0.574	0	− 1.372	0	+0.8191	0	+0.6376	+0.2000	0	0	− 8.444	0	0	+1.000
$\phi_1=40°$	− 0.324	0	−2.021	−0.3363	− 1.133	0	+0.6921	+0.1847	−0.1144	0	−0.0503	−0.0037	− 5.147	0	− 1.422	+0.7549
30	− 1.057	−0.319	−1.919	−0.3098	− 0.4724	−0.4955	+0.8324	+0.1760	−0.0838	−0.0572	−0.0331	−0.0030	− 2.213	− 2.270	− 0.7127	+0.7838
20	− 2.100	−1.229	−1.425	−0.2331	+ 0.8653	−0.3898	+1.067	+0.1458	+0.0202	−0.0785	+0.0084	−0.0015	+ 3.880	− 1.816	+ 0.5816	+0.8519
10	− 0.178	−2.090	−0.327	−0.1202	+ 1.021	+0.2424	+1.038	+0.0873	+0.2295	−0.0158	+0.0411	−0.0002	+ 4.849	+ 1.085	+ 0.8003	+0.9255
0	+ 9.537	0	+0.543	0	− 2.851	0	+0.7660	0	+0.5858	+0.3000	0	0	− 13.55	0	0	+1.000
$\phi_1=45°$	+ 1.358	0	−1.210	−0.3140	− 1.967	0	+0.3169	+0.1973	−0.0763	0	−0.0494	−0.0047	− 7.078	0	− 2.500	+0.6266
40	+ 1.046	+0.344	−1.254	−0.3103	− 1.725	−0.6171	+0.3877	+0.1967	−0.0799	−0.0215	−0.0483	−0.0045	− 6.231	− 1.662	− 2.231	+0.6378
30	− 1.033	−0.370	−1.469	−0.2789	− 0.050	−0.5113	+0.8439	+0.1884	−0.0516	−0.0642	−0.0223	−0.0032	− 0.316	− 2.536	− 0.5827	+0.7167
20	− 3.035	−0.758	−1.224	−0.2104	+ 1.916	−0.3110	+1.281	+0.1588	+0.0289	−0.0681	+0.0185	−0.0014	+ 6.897	− 1.941	+ 1.207	+0.8267
10	− 0.885	−2.169	−0.327	−0.1087	+ 1.496	+0.3094	+1.159	+0.0955	+0.2164	−0.0071	+0.0436	−0.0001	+ 5.708	+ 2.201	+ 1.273	+0.9200
0	+10.91	0	+0.707	0	− 5.085	0	+0.7071	0	+0.5724	+0.3000	0	0	− 19.32	0	0	+1.000
$\phi_1=50°$	+ 2.686	0	−0.312	−0.2688	− 2.918	0	−0.2965	+0.1807	−0.0393	0	−0.0419	−0.0052	− 8.502	0	− 3.770	+0.4461
40	+ 1.320	+1.218	−0.671	−0.2562	− 1.798	−1.291	+0.1445	+0.1856	−0.0446	−0.0228	−0.0351	−0.0046	− 5.350	− 4.090	− 2.523	+0.5106
30	− 1.850	+1.105	−1.355	−0.2385	+ 0.904	−1.675	+1.046	+0.1589	−0.0420	−0.0476	−0.0140	−0.0031	+ 2.433	− 4.983	+ 0.2750	+0.6671
20	− 4.145	−0.669	−1.455	−0.1857	+ 3.198	−0.4671	+1.549	+0.1555	+0.0168	−0.0585	+0.0187	−0.0013	+ 9.459	− 1.537	+ 2.336	+0.8314
10	− 1.196	−2.490	−0.395	−0.0979	− 1.779	+1.160	+1.532	+0.0992	+0.2016	−0.0062	+0.0428	−0.0001	+ 5.734	+ 3.292	+ 1.737	+0.9393
0	+12.58	0	+0.766	0	− 7.777	0	+0.6428	0	+0.5914	+0.3000	0	0	− 24.30	0	0	+1.000
(j) $r/t = 200$ and $r/l = 0.3$																
$\phi_1=30°$	− 2.575	0	−3.097	−0.2688	− 1.018	0	+0.8433	+0.1065	−0.2481	0	−0.0585	−0.0023	− 8.01	0	− 1.251	+0.7383
20	− 3.544	−1.727	−2.595	−0.2300	+ 0.025	−0.3675	+0.8538	+0.0981	−0.1187	−0.0759	−0.0236	−0.0016	+ 0.32	− 2.908	− 0.342	+0.7953
10	− 1.006	−0.351	−1.071	−0.1270	+ 1.142	+0.0251	+1.038	+0.0619	+0.3098	−0.1126	+0.0402	−0.0003	+ 9.20	+ 0.158	+ 0.787	+0.8828
0	+17.18	0	+0.500	0	− 2.618	0	+0.8660	0	+1.138	+0.3000	0	0	− 21.66	0	0	+1.000

TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load				Horizontal Edge Load				Shear Edge Load				Edge Moment Load			
	T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(j) (Continued)																
$\phi_1=35°$	+ 1.157	0	−2.003	−0.2639	− 3.540	0	+0.5377	+0.1233	−0.1777	0	−0.0616	−0.0033	− 12.73	0	− 2.708	+0.6330
30	+ 0.434	+0.250	−2.034	−0.2580	− 1.763	−0.3543	+0.6157	+0.1220	−0.1650	−0.0475	−0.0543	−0.0031	− 10.23	− 3.290	− 2.236	+0.5464
20	− 3.630	−0.571	−1.999	−0.2098	+ 1.001	−0.5379	+1.051	+0.1087	−0.0418	−0.1118	−0.0096	−0.0017	+ 5.57	− 4.934	+ 0.474	+0.7427
10	− 2.937	−2.907	−0.903	−0.1149	+ 2.318	+0.2927	+1.184	+0.0698	+0.3091	−0.0522	+0.0487	−0.0002	+ 13.92	+ 1.650	+ 1.650	+0.8689
0	+18.66	0	+0.574	0	− 5.780	0	+0.8182	0	+1.068	+0.3000	0	0	− 35.32	0	0	+1.000
$\phi_1=40°$	+ 4.491	0	−0.895	−0.2230	− 4.589	0	−0.0553	+0.1198	−0.0958	0	−0.0550	−0.0039	− 16.80	0	− 4.723	+0.4470
30	+ 0.927	+1.787	−1.263	−0.2170	− 1.599	−1.680	+0.4612	+0.1225	−0.0958	−0.0529	−0.0397	−0.0032	− 7.30	− 7.430	− 2.380	+0.5253
20	− 5.904	+0.374	−1.979	−0.1836	+ 2.992	−1.296	+1.378	+0.1158	−0.0298	−0.0936	+0.0040	−0.0016	+ 12.97	+ 5.929	+ 1.932	+0.6997
10	− 4.643	−3.248	−1.057	−0.1038	+ 3.576	+0.8937	+1.451	+0.0774	+0.2786	−0.0416	+0.0506	−0.0001	+ 16.75	+ 3.932	+ 2.673	+0.8521
0	+22.55	0	+0.643	0	−10.29	0	+0.7660	0	+1.069	+0.3000	0	0	− 48.57	0	0	+1.000
$\phi_1=45°$	+ 5.463	0	+0.808	−0.1511	− 5.443	0	−0.8614	+0.0899	−0.0114	0	−0.0370	−0.0038	− 17.92	0	− 6.551	+0.2280
40	+ 4.541	+1.688	+0.369	−0.1543	− 4.617	−1.379	−0.6652	+0.0937	−0.0214	−0.0039	−0.0364	−0.0037	− 15.90	− 4.718	− 5.866	+0.2542
30	+ 0.843	+3.190	−1.138	−0.1700	− 0.303	−2.859	+0.6257	+0.1158	−0.0772	−0.0304	−0.0273	−0.0038	− 1.34	− 9.994	− 1.292	+0.4304
20	− 8.160	+0.555	−2.324	−0.1610	+ 5.220	−1.401	+1.929	+0.1250	−0.0627	−0.0765	+0.0042	−0.0013	+ 17.97	+ 5.233	+ 3.575	+0.6795
10	− 5.055	−3.891	−1.945	−0.0955	+ 4.276	+1.728	+1.763	+0.0858	+0.2474	−0.0456	+0.0471	−0.0000	+ 16.41	+ 8.050	+ 3.437	+0.8940
0	+25.47	0	+0.707	0	−14.77	0	+0.7071	0	+1.134	+0.3000	0	0	− 56.01	0	0	+1.000
$\phi_1=50°$	+ 5.628	0	+1.510	−0.0742	− 5.740	0	−1.603	+0.0441	+0.0544	0	−0.0135	−0.0031	− 15.39	0	− 7.343	+0.0368
40	+ 3.900	+3.127	+0.564	−0.0969	− 3.696	−2.789	−0.7707	+0.0676	+0.0026	+0.0201	−0.0201	−0.0029	− 10.44	− 7.529	− 5.048	+0.1442
30	+ 2.878	+3.516	−1.463	−0.1393	+ 1.553	−3.453	+0.111	+0.1168	−0.1000	−0.0670	−0.0234	−0.0023	+ 3.25	− 9.817	+ 0.304	+0.4090
20	− 8.823	+0.094	−2.598	+0.1467	+ 6.537	−1.072	+2.491	+0.1375	−0.1008	−0.0716	−0.0025	−0.0011	+ 18.90	− 3.576	+ 4.612	+0.6832
10	− 4.273	−4.274	−1.282	−0.0891	+ 4.214	+2.483	+1.987	+0.0953	+0.2254	−0.0563	+0.0424	−0.0000	+ 14.04	+ 7.094	+ 3.666	+0.8700
0	+25.53	0	+0.766	0	−17.75	0	+0.6428	0	+1.193	+0.3000	0	0	− 56.36	0	0	+1.000
(k) $r/t = 200$ and $r/l = 0.4$																
$\phi_1=30°$	+ 1.134	0	−2.479	−0.2211	− 2.625	0	+0.5943	+0.0868	−0.2847	0	−0.0710	−0.0026	− 20.19	0	− 3.173	+0.5913
20	− 3.463	−0.295	−2.481	−0.1937	− 0.066	−0.9430	+0.9092	+0.0810	−0.1583	−0.1339	−0.0302	−0.0018	+ 0.87	− 7.343	− 0.619	+0.6619
10	− 5.538	−3.668	−1.407	−0.1117	+ 2.974	+0.0700	+1.194	+0.0553	+0.3622	−0.1029	+0.0493	−0.0003	+ 22.57	+ 0.435	+ 1.999	+0.8155
0	+27.68	0	+0.500	0	− 6.899	0	+0.8660	0	+1.534	+0.4000	0	0	− 56.52	0	0	+1.000

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

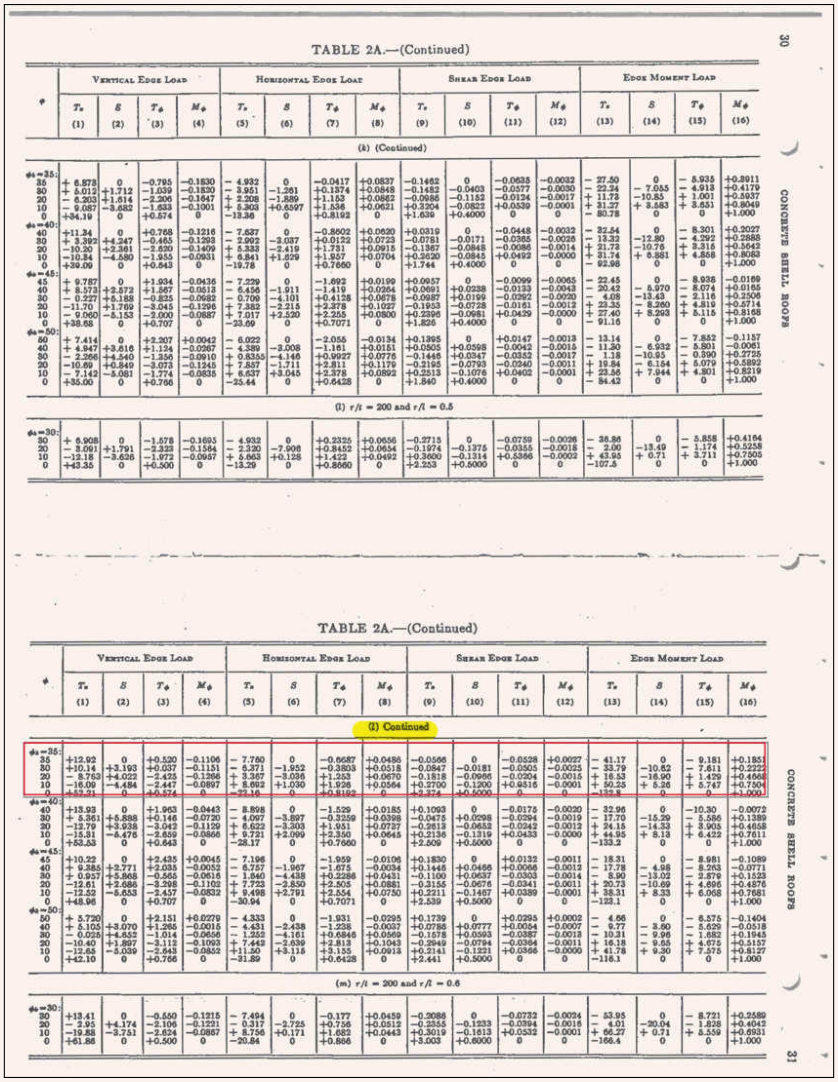


TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load				Horizontal Edge Load				Shear Edge Load				Edge Moment Load			
	T_s (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_s (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_s (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_s (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(k) (Continued)																
$\phi_k=35°$																
35	+ 6.873	0	−0.795	−0.1830	− 4.932	0	−0.0417	+0.0837	−0.1462	0	−0.0635	−0.0032	− 27.50	0	− 5.935	+0.3911
30	+ 5.012	+1.712	−1.039	−0.1820	− 3.951	−1.261	+0.1374	+0.0848	−0.1482	−0.0403	−0.0577	−0.0030	− 22.24	− 7.055	+ 4.913	+0.4179
20	− 6.203	+1.614	−2.206	−0.1647	+ 5.208	−1.839	+1.153	+0.0862	−0.0985	−0.1152	−0.0124	−0.0017	+ 11.72	−10.55	+ 1.001	+0.5937
10	− 9.087	−3.682	−1.633	−0.1001	+ 6.303	+0.6597	+1.536	+0.0621	+0.3204	−0.0822	+0.0539	−0.0001	+ 31.27	+ 3.583	+ 3.551	+0.8049
0	+34.19	0	+0.574	0	−13.36	0	+0.8192	0	+1.639	+0.4000	0	0	− 80.78	0	0	+1.000
$\phi_k=40°$																
40	+11.34	0	+0.768	−0.3216	− 7.637	0	−0.8502	+0.0620	+0.0319	0	−0.0448	−0.0032	− 32.54	0	− 8.301	+0.2027
30	+ 3.392	+4.247	−0.485	−0.1293	− 2.992	−3.037	+0.0152	+0.0723	−0.0781	−0.0171	−0.0365	−0.0028	− 13.32	−12.80	− 4.292	+0.2888
20	−10.30	+2.361	−2.620	−0.1409	+ 5.333	−2.419	+1.731	+0.0915	−0.1367	−0.0848	−0.0086	−0.0014	+ 21.72	−10.76	+ 3.316	+0.5642
10	−10.84	−4.580	−1.955	−0.0931	+ 6.841	+1.629	+1.937	+0.0704	+0.3620	−0.0845	+0.0492	−0.0000	+ 31.74	+ 6.881	+ 4.868	+0.8063
0	+39.09	0	+0.843	0	−19.78	0	+0.7660	0	+1.744	+0.4000	0	0	− 92.96	0	0	+1.000
$\phi_k=45°$																
45	+ 9.787	0	+1.934	−0.0436	− 7.229	0	−1.692	+0.0199	+0.0957	0	−0.0099	−0.0065	− 22.45	0	− 8.936	−0.0169
40	+ 8.573	+2.572	+1.567	−0.0513	− 6.456	−1.911	−1.419	+0.0264	+0.0691	+0.0238	−0.0133	−0.0043	− 20.42	− 5.970	− 8.074	+0.0165
30	− 0.227	+5.188	−0.825	−0.0982	− 0.709	−4.101	+0.4128	+0.0678	−0.0987	+0.0199	−0.0262	−0.0030	− 4.08	−13.43	− 2.116	+0.2506
20	−11.70	+1.769	−3.045	−0.1296	+ 7.382	−2.215	+2.378	+0.1027	−0.1953	−0.0728	−0.0161	−0.0012	+ 23.35	− 8.260	+ 4.819	+0.5714
10	− 9.060	−5.153	−2.000	−0.0887	+ 7.017	+2.520	+2.255	+0.0800	+0.2396	−0.0981	+0.0429	−0.0000	+ 27.40	+ 8.293	+ 5.115	+0.8168
0	+38.88	0	+0.707	0	−23.09	0	+0.7071	0	+1.826	+0.4000	0	0	− 91.16	0	0	+1.000
$\phi_k=50°$																
50	+ 7.414	0	+2.307	+0.0042	− 6.022	0	−2.055	−0.0134	+0.1395	0	+0.0147	−0.0013	− 13.14	0	− 7.852	−0.1157
40	+ 4.947	+3.616	+1.124	−0.0267	− 4.389	−3.008	−1.161	+0.0151	+0.0505	+0.0598	−0.0042	−0.0015	− 11.30	− 6.932	− 5.801	−0.0061
30	− 2.266	+4.540	−1.356	−0.0910	+ 0.8355	−4.146	+0.9927	+0.0776	−0.1445	+0.0347	−0.0352	−0.0017	− 1.18	−10.95	− 0.390	+0.2725
20	−10.89	+0.849	−3.073	−0.1245	+ 7.857	−1.711	+2.811	+0.1179	−0.2195	−0.0793	−0.0340	−0.0011	+ 19.84	− 6.154	+ 5.079	+0.5892
10	− 7.142	−5.081	−1.774	−0.0835	+ 6.537	+3.045	+2.378	+0.0892	+0.2513	−0.1076	+0.0402	−0.0001	+ 23.56	+ 7.944	+ 4.801	+0.8219
0	+35.00	0	+0.766	0	−25.44	0	+0.6428	0	+1.840	+0.4000	0	0	− 84.42	0	0	+1.000
(l) $r/t = 200$ and $r/l = 0.5$																
$\phi_k=30°$																
30	+ 5.908	0	−1.578	−0.1695	− 4.932	0	+0.2355	+0.0656	−0.2715	0	−0.0759	−0.0026	− 38.86	0	− 5.858	+0.4164
20	− 3.061	+1.791	−2.323	−0.1564	+ 2.330	−7.908	+0.8452	+0.0634	−0.1974	−0.1375	−0.0355	−0.0018	− 2.00	−13.49	− 1.174	+0.5258
10	−12.18	−3.826	−1.972	−0.0957	+ 5.863	+0.128	+1.422	+0.0492	+0.3600	−0.1314	+0.5386	−0.0002	+ 43.95	+ 0.71	+ 3.711	+0.7505
0	+43.35	0	+0.500	0	−13.29	0	+0.8660	0	+2.253	+0.5000	0	0	−107.5	0	0	+1.000

TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load				Horizontal Edge Load				Shear Edge Load				Edge Moment Load			
	T_s (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_s (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_s (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_s (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(l) Continued																
$\phi_k=35°$																
35	+12.92	0	+0.520	−0.1106	− 7.760	0	−0.6687	+0.0486	−0.0566	0	−0.0528	+0.0027	− 41.17	0	− 9.181	+0.1851
30	+10.14	+3.193	+0.037	−0.1151	− 5.371	−1.952	−0.3803	+0.0518	−0.0847	−0.0181	−0.0505	−0.0025	− 33.79	−10.62	− 7.811	+0.2222
20	− 8.763	+4.022	−2.425	−0.1266	+ 3.367	−3.036	+1.253	+0.0670	−0.1818	−0.0966	−0.0204	−0.0015	+ 16.53	−16.90	+ 1.429	+0.4668
10	−16.09	−4.484	−2.447	−0.0897	+ 8.662	+1.030	+1.926	+0.0564	+0.2700	−0.1200	+0.0416	−0.0001	+ 50.25	+ 5.28	+ 5.747	+0.7504
0	+53.91	0	+0.574	0	−23.16	0	+0.8192	0	+2.374	+0.5000	0	0	−133.8	0	0	+1.000
$\phi_k=40°$																
40	+13.93	0	+1.963	−0.0443	− 8.898	0	−1.529	+0.0185	+0.1093	0	−0.0175	−0.0020	− 32.96	0	−10.30	−0.0072
30	+ 5.361	+5.888	+0.146	−0.0720	− 4.097	−3.897	−0.3359	+0.0398	−0.0475	+0.0298	−0.0294	−0.0019	− 17.70	−15.29	− 5.586	+0.1389
20	−12.79	+3.938	−3.042	−0.1129	+ 6.622	−3.303	+1.931	+0.0727	−0.2613	−0.0652	−0.0242	−0.0012	+ 34.16	−14.53	+ 3.903	+0.4658
10	−15.31	−8.476	−2.639	−0.0866	+ 9.721	+2.099	+2.350	+0.0645	+0.2136	−0.1319	+0.0433	−0.0000	+ 44.95	+ 8.13	+ 6.422	+0.7611
0	+53.53	0	+0.643	0	−28.17	0	+0.7660	0	+2.509	+0.5000	0	0	−133.2	0	0	+1.000
$\phi_k=45°$																
45	+10.22	0	+2.435	+0.0045	− 7.196	0	−1.959	−0.0106	+0.1830	0	+0.0132	−0.0011	− 18.31	0	− 8.981	−0.1089
40	+ 9.385	+2.771	+2.035	−0.0052	− 6.757	−1.967	−1.675	−0.0034	+0.1446	+0.0466	+0.0066	−0.0013	− 17.78	− 4.98	− 8.263	−0.0771
30	+ 0.957	+5.868	−0.565	−0.0616	− 1.640	−4.438	+0.2286	+0.0431	−0.1100	+0.0637	−0.0303	−0.0014	− 3.90	−13.02	− 2.379	+0.1533
20	−12.61	+2.686	−3.298	−0.1102	+ 7.723	−2.850	+2.505	+0.0881	−0.2155	−0.0676	−0.0341	−0.0011	+ 20.73	−10.69	+ 4.896	+0.4876
10	−12.62	−6.653	−2.457	−0.0832	+ 9.498	+2.791	+2.554	+0.0750	+0.2211	−0.1467	+0.0389	−0.0001	+ 38.31	+ 8.33	+ 6.068	+0.7681
0	+48.96	0	+0.707	0	−30.94	0	+0.7071	0	+2.539	+0.5000	0	0	−123.1	0	0	+1.000
$\phi_k=50°$																
50	+ 5.720	0	+2.151	+0.0279	− 4.333	0	−1.931	−0.0295	+0.1739	0	+0.0295	+0.0002	− 8.66	0	− 6.575	−0.1404
40	+ 5.155	+3.070	+1.265	−0.0015	− 4.431	−2.438	−1.226	−0.0037	+0.0785	+0.0777	+0.0054	−0.0007	− 9.77	− 3.90	− 5.629	−0.0518
30	− 0.025	+4.452	−1.014	−0.0656	− 1.252	−4.161	+0.6846	+0.0569	−0.1578	+0.0593	−0.0387	−0.0013	− 10.31	− 9.96	− 1.682	+0.1945
20	−10.40	+1.897	−3.112	−0.1093	+ 7.442	−2.639	+2.813	+0.1043	−0.2949	−0.0794	−0.0364	−0.0011	+ 16.18	− 9.55	+ 4.675	+0.5157
10	−12.52	−5.039	−2.543	−0.0833	+ 9.150	+3.115	+3.155	+0.0913	+0.2141	−0.1221	+0.0366	−0.0000	+ 41.78	+ 8.30	+ 7.375	+0.8127
0	+42.10	0	+0.766	0	−31.89	0	+0.6428	0	+2.441	+0.5000	0	0	−116.1	0	0	+1.000
(m) $r/t = 200$ and $r/l = 0.6$																
$\phi_k=30°$																
30	+13.41	0	−0.550	−0.1215	− 7.494	0	−0.177	+0.0459	−0.3086	0	−0.0732	−0.0024	− 53.95	0	− 8.721	+0.2589
20	− 2.95	+4.174	−2.106	−0.1231	+ 0.317	−2.725	+0.756	−0.0513	−0.2355	−0.1333	−0.0394	−0.0018	+ 4.01	−20.04	− 1.828	+0.4043
10	−19.88	−3.751	−2.624	−0.0887	+ 8.756	+0.171	+1.682	+0.0443	+0.3019	−0.1613	+0.0532	−0.0001	+ 66.27	+ 0.71	+ 8.559	+0.6931
0	+61.88	0	+0.500	0	−20.84	0	+0.866	0	+3.003	+0.6000	0	0	−166.4	0	0	+1.000

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

TABLE 2A.—(Continued)

(m) (Continued)

ϕ	Vertical Edge Load			Horizontal Edge Load			Shear Edge Load			Edge Moment Load		
	T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_x (4)	T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
ϕ_1=25°	+117.48	0	+1.241	−0.0576	+ 6.794	0	−1.155	+0.0231	+0.0614	0	−0.0363	−0.0020	48.68	0	−11.31	+0.0453
35	+113.76	+4.642	+1.201	−0.0557	+ 5.890	−2.120	−1.118	+0.0223	+0.0594	+0.113	−0.0351	−0.0019	47.11	−12.65	−10.95	+0.0437
30	+110.27	+9.000	+1.163	−0.0539	+ 4.916	−3.973	−1.083	+0.0331	+0.0576	+0.1913	−0.0341	−0.0018	17.17	−21.22	−10.61	+0.3710
20	−22.33	−5.060	−0.236	−0.0827	+11.70	+1.270	+2.252	+0.0533	−0.1859	+0.6000	+0.0454	−0.0000	64.22	+ 5.83	+ 7.338	+0.7029
10	+68.53	+0.874	+0.274	0	−30.32	0	+0.819	0	+3.204	0	0	0	−180.9	0	0	+1.000
ϕ_1=40°	+14.46	0	+2.530	−0.0552	+ 8.900	0	−1.788	−0.0029	+0.2066	0	−0.0363	−0.0012	29.22	0	−10.53	−0.0830
40	+ 6.70	+0.504	+0.519	−0.0397	+ 4.840	+ 4.143	−0.357	+0.0213	−0.0157	+0.0719	−0.0224	−0.0013	20.21	−14.50	+ 6.191	+0.0578
30	−13.24	+4.922	−3.187	−0.0946	− 6.008	− 4.889	+2.003	+0.0650	−0.3733	−0.0458	−0.0384	−0.0010	18.87	−18.27	+ 2.394	+0.3969
20	−19.12	−5.114	−2.371	−0.0812	−12.19	+ 2.231	+2.921	+0.0616	−0.1169	+0.1797	−0.0373	−0.0001	18.09	+ 7.26	+ 7.253	+0.7179
10	+49.25	+0.943	+0.748	0	−35.19	0	+0.786	0	+3.267	+0.6000	0	0	169.2	0	0	+1.000
ϕ_1=45°	+ 8.60	0	+2.397	+0.0217	+ 5.729	0	−1.538	−0.0205	+0.2347	0	−0.0256	−0.0004	8.38	0	−0.1241	
45	+ 6.15	+2.319	+2.268	+0.0133	+ 5.022	−1.565	−1.516	−0.0140	+0.1924	+0.0605	−0.0199	−0.0005	10.38	2.49	−0.0988	
40	+ 3.68	+4.638	+2.138	+0.0049	+ 4.314	−3.128	−1.494	−0.0074	+0.1501	+0.1211	−0.0142	−0.0006	12.39	−10.11	+0.4113	
30	−11.48	+3.500	−3.371	−0.0948	− 6.794	−3.438	+2.416	+0.0759	−0.4030	−0.0964	−0.0478	−0.0011	12.49	−19.03	+3.665	+0.7180
20	−16.02	−5.641	−2.752	−0.0772	−12.13	+ 2.709	+2.753	+0.0695	+0.1908	−0.1895	−0.0361	−0.0001	50.54	+ 6.80	+ 6.668	+1.000
ϕ_1=50°	+58.53	0	+0.707	0	−38.04	0	+0.707	0	+3.268	+0.6000	0	0	−183.3	0	0	
50	+ 3.09	0	+1.709	+0.0284	+ 1.816	0	−1.467	−0.0273	+0.1854	0	−0.0382	+0.0002	+ 7.18	0	+ 3.972	−0.1088
40	+ 4.42	+1.981	+1.179	+0.0063	+ 3.693	−1.374	−1.120	−0.0084	+0.1051	+0.0872	+0.0118	−0.0003	5.77	1.40	+ 4.634	−0.0572
30	+ 2.57	+4.287	−0.638	−0.0476	+ 3.650	−3.722	+0.325	+0.0406	−0.1481	+0.0826	−0.0419	−0.0012	20.51	+ 6.83	+ 3.347	+0.1206
20	− 1.53	−2.930	−1.373	−0.0948	+ 1.372	+ 3.425	+2.401	+0.0662	−0.3819	−0.0757	−0.0497	−0.0012	7.78	+12.83	+ 3.041	+0.4149
10	− 1.44	−0.742	−0.708	−0.0772	+ 1.811	+ 0.615	+0.707	+0.07	−0.1107	−0.0194	−0.0084	−0.0001	51.00	+ 5.60	+ 6.374	+0.7134
ϕ_1=53.46°	+53.46	0	+0.765	0	+41.80	0	+0.643	0	+3.218	+0.6000	0	0	−156.9	0	0	+1.000

v = the tangential displacement of the shell, considered positive in the direction of increasing values of ϕ;

w = the radial displacement of the shell, considered positive in the outward direction; and,

θ = the rotation of the shell, considered positive when the section rotates clockwise.

The effect of line loads is most pronounced in the vicinity of the edge at which the line load is applied, with the intensity of the internal forces generally diminishing as the distance from the applied forces is increased. When the chord width of the shell is small compared to the longitudinal span, the internal resisting forces produced by line loads applied at one edge do not diminish

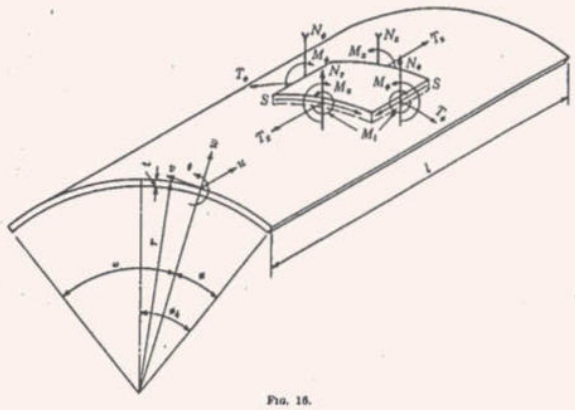


FIG. 16.

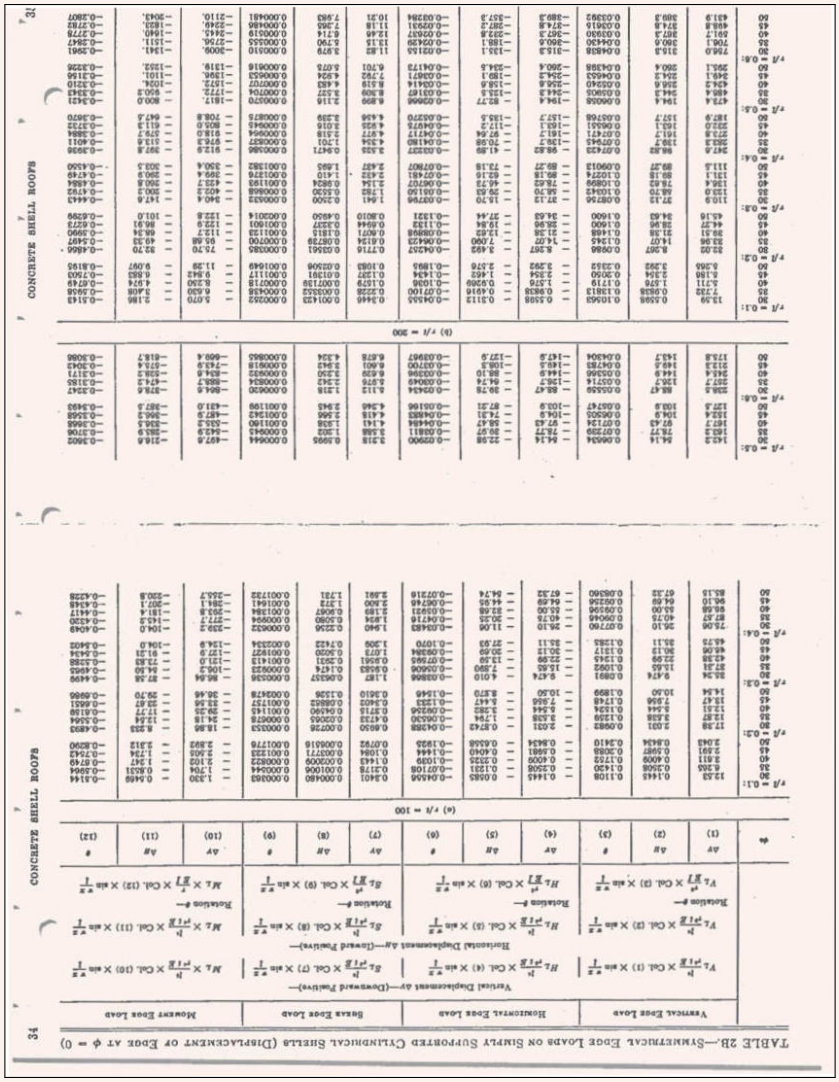
sufficiently fast so that the effect of a line load applied at one edge is felt at the farther edge. For this condition, the magnitude of angle subtended by the shell plays an important role in the distribution of the forces and must be considered; but, when the chord width is large compared with the longitudinal span, the effect of line loads on one edge is negligible on the other edge, and therefore line loads on each edge can be treated separately. There is no definite line of demarcation as to when the effect of line loads applied to one edge can be neglected at the other edge. However, computed values seem to indicate that, when r/l exceeds 0.6 with ϕ_1 more than 30°, each longitudinal edge can be treated individually.

Because of this indication, data showing the effect of line loads are presented in two groups of tables. The first group (Tables 2A and 2B) gives the force distribution and displacements at the edge in long barrels for symmetrical

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Appendice F

Progettazione di Barrel Shell Tetti

. Questo esempio, tratto da (Portland Cement Association, 1954), è di particolare interesse; illustra non solo l'analisi e la progettazione di una struttura a guscio, ma anche il trattamento di un caso statuitamente indeterminato nel quale si discutava prima il concetto di flessibilità del capitolo 25— è impiegato. La struttura viene suddivisa in due parti, ciascuna analizzata in modo indipendente; la soluzione finale si ottiene quindi rafforzando la compatibilità di spostamento quando le due parti sono ricombinate.

Si può vedere la procedura analoga a un fascio supportato da molle elastiche, come mostrato in 1072.

COPIA DI REVISIONE

CONCRETE INFORMATION
PORTLAND CEMENT ASSOCIATION

Design of Barrel Shell Roofs

Introduction

The roofing of large unobstructed areas with a minimum amount of material is a goal that has claimed the attention of engineers and architects for years. Of the various types of roof construction, the concrete shell offers the best possibility of attaining this desirable end. For example, shells only 2¼ in. thick spanning distances up to 150 ft. have been built. In Mexico a shell only 1½ in. thick cantilevers 36 ft. without the aid of any supporting members. In countries throughout the world, including the United States, Great Britain, Germany, Spain and India, there are examples of concrete shells having a smaller ratio of thickness to span than that provided by nature in its protective covering of an egg.

Although concrete shells are of relatively recent origin (the first experimental shell was built in 1920 at the Zeiss works in Germany while the first shell roof in the U.S. was constructed in 1933), the list of shell structures throughout the world is impressive. At least 500 such roofs of various shapes and sizes have been built. In the United States alone over 12 million sq.ft. of shell roofs have been constructed for structures varying from small industrial buildings to monumental buildings displaying new architectural forms.

Aware of the potentialities of this form of construction, the American Society of Civil Engineers in 1952 published Manual No. 31, *Design of Cylindrical Concrete Shell Roofs*. By a series of comprehensive tables this manual greatly simplifies the design of shell roofs. The following article is intended to supplement the manual by presenting in detail the design of a concrete shell roof for a typical industrial building.

Structural Behavior

Although the analysis of a shell in a strict sense is a three-dimensional problem, structural behavior of a shell can best be understood by comparing its action to that of an ordinary beam. Consider the curved longitudinal shell in Fig. 1 to be a beam supported by two transverse supports. This beam differs from the ordinary concept of a beam only in that its cross-section is a thin curved slab.

The application of load on the shell induces longitudinal fiber stresses similar to those induced in any homogeneous beam under load, and if the longitudinal span l (Fig. 1) is large compared to the transverse chord width, the variation of fiber stresses across any section is the same as that created in a beam; that is, it is linear from top to bottom. These fiber stresses designated in shell terminology as T_x, the force per unit width, are comparable to the f_c-stresses of conventional reinforced concrete design.

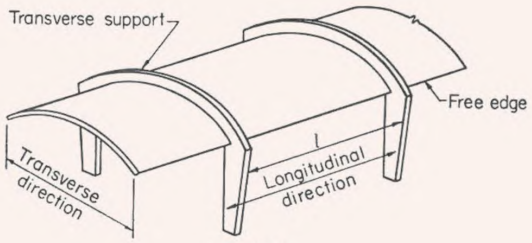


FIG. 1

As the ratio of chord width to span length increases, the variation of T_x-forces changes from straight-line to curvilinear. The extent of this change is shown in Fig. 2, where T_x-forces are plotted in the conventional manner. The ordinate represents vertical distance measured from the bottom of the shell in terms of $\frac{y}{h}$ and the abscissa indicates magnitude of T_x-forces. For convenience, curves are drawn for various values of $\frac{r}{l}$, the ratio of shell radius to span length, rather than for the previously discussed ratio of chord width to span length. Although the two ratios are interdependent, $\frac{r}{l}$ is a more suitable parameter since it includes the effect of shell rise as well as chord

The activities of the Portland Cement Association are limited to scientific research, the development of new or improved products and methods, technical service, promotion and educational effort (including safety work), and are primarily designed to improve and extend the uses of portland cement and concrete. The manifold program of the Association and its varied services to cement users are made possible by the financial support of its member companies in the United States and Canada, engaged in the manufacture and sale of a very large proportion of all portland cement used in these two countries. A current list of member companies will be furnished on request.

Printed in U.S.A.

COPYRIGHT 1954 BY PORTLAND CEMENT ASSOCIATION

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

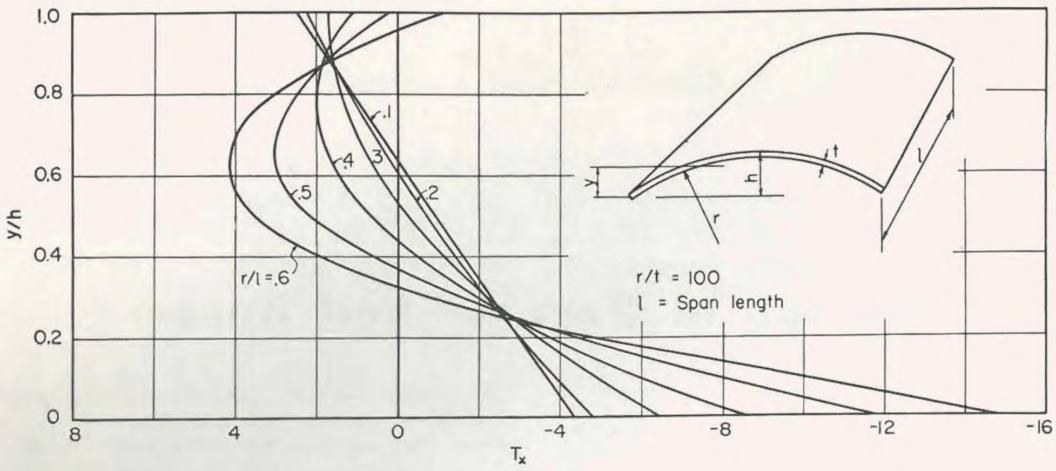


FIG. 2

width. Curves of Fig. 2 apply to a given load, the specific ratio of $\frac{r}{t} = 100$ in which t equals thickness, and a subtended angle of 80°. However, the trend shown is applicable to all shells. When $\frac{r}{l}$ is less than 0.2, the variation is almost linear, while for larger values of $\frac{r}{l}$, the force at the lower edge is greater than that given by ordinary beam theory.

The departure from ordinary flexural action is due basically to the presence of transverse bending in the shell. In the typical shell strip of unit width illustrated in Fig. 3a, moments of the external load and internal forces about any face such as AC must be in equilibrium. With face BD taken at the lower edge of the shell, moment M_ϕ must equal the difference between moment due to external load acting on the unit strip and that due to tangential shears S. These tangential shears are similar to the shearing stresses v in a beam.

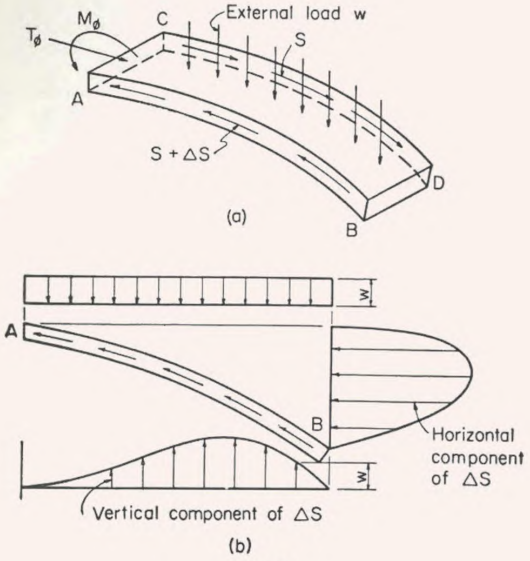


FIG. 3

For most distributed loads, moment produced by an external load and that produced by tangential shears are seldom equal. In fact, for usual distributed loads the moment M_ϕ is counterclockwise while the net moment of external load and tangential shears is clockwise. This can be inferred by inspecting Fig. 3b in which vertical and horizontal components of the difference in tangential shears acting on faces AB and CD have been plotted to the same scale as uniform external load. Statical moment of external load to the right of any point is clockwise. In contrast to this the vertical component of the tangential shears always produces a counterclockwise moment about that point. Throughout most of the shell this counterclockwise moment is larger than the statical moment of the external load, although the difference between the two is small since total upward and downward forces are of equal magnitude. As a result, addition of the clockwise moment due to the horizontal component always produces a clockwise final moment, and the resisting moment M_ϕ is counterclockwise. From this line of reasoning, it follows that uniformly distributed loads always produce tension in the upper fibers and compression in the lower fibers of a shell that is unrestrained along its edges.

Since transverse moment M_ϕ at any point is always counterclockwise or negative, point B (Fig. 3a) deflects down and inward relative to A. This differential deflection of point B induces longitudinal fiber stresses in the lower portion of the shell which are in excess of those given by ordinary beam theory. This condition forces a departure from straight-line stress variation.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

The increase in the tensile fiber stresses in the lower region of the shell cross-section, as shown in Fig. 2, must be accompanied by an increase in compressive stresses above the neutral axis so that the summation of forces in the longitudinal direction will be zero. Since moment produced by the longitudinal internal forces must still equal the external moment, this increase in magnitude of the internal forces is accompanied by a shortening of the moment arm between centroids of compressive and tensile forces. The effect of this action is to lower the position of the neutral axis.

If the curves in Fig. 2 are examined critically, it becomes apparent that as values of $\frac{r}{l}$ increase, the concentration of stresses in the vicinity of the lower edge indicates a decrease in the height of shell participating in beam action. In other words, for large values of $\frac{r}{l}$ the top or crown portion of the shell participates to only a minor extent in beam action. This action can be compared to the decreasing effectiveness of remote portions of a T-beam flange as the ratio of flange width to beam span increases.

Although the magnitude of tensile stress at the lower edge of the shell as indicated in Fig. 2 is sometimes quite sensitive to variations of $\frac{r}{l}$, total tensile area under these curves does not vary to the same degree. For example, the ratio of bottom fiber stresses for values of $\frac{r}{l}$ of 0.6 and 0.1 is 3.2 while the ratio of tensile areas below the neutral axis for these cases is only 1.4. Since reinforcement required depends essentially on total tensile area rather than maximum fiber stress, the design of a shell is not so sensitive a problem as the curves indicate. Moreover, curves of Fig. 2 are prepared for a single shell unrestrained at the lower edges. When these edges are restrained from deflecting down and inward by adjoining shells or edge beams, longitudinal stresses conform more closely to the straight-line variation.

Factors Affecting Shell Dimensions

An example is presented to illustrate the procedure involved in the analysis and design of a typical cylindrical concrete shell roof. A column spacing of 40x50 ft. is selected as being representative of the unobstructed floor area generally required for industrial buildings. A typical unit of the shell roof shown in Fig. 4 consists of three barrels, two exterior and one interior, spanning 50 ft. in the longitudinal direction. The barrels are supported by transverse frames spanning 40 ft. These dimensions result in a unit 100 ft. long and 120 ft. wide with shells continuous over alternate frames. Split frames are provided every 100 ft. This layout permits six re-uses of forms in a building 600 ft. long and limits the amount of concrete placed in one operation to about 200 cu.yd.

Shell thickness is taken as 4 in., which for most conditions is more than adequate to resist compressive forces and flexural moments induced in a shell. As a matter of fact, except in the vicinity of transverse frames, depth of

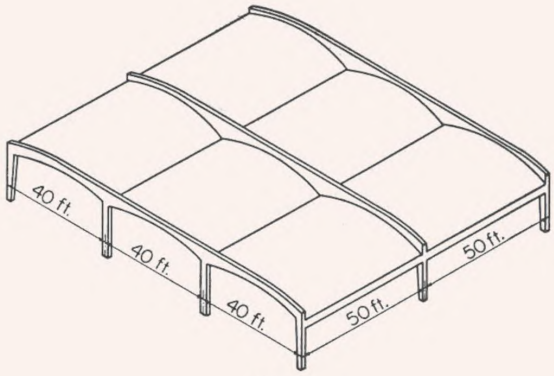


FIG. 4

the shell is controlled by requirements of adequate coverage for reinforcement. Usually, three to four layers of reinforcement are required, depending upon loading and type of shell; and with a minimum clear distance between reinforcement and shell surface of ¾ in., minimum depth is about 3 in. Many shells have been built abroad with a thickness of less than 3 in., such shells requiring close tolerance in the placement of reinforcement. While it might be argued that the increased labor involved in such circumstances is not justified by the reduction in concrete volume, a decrease in dead weight may be important since it is reflected almost directly in the amount of longitudinal and diagonal reinforcement required.

The relationship between dead weight and reinforcement follows from the fact that a shell acts essentially as a beam in the longitudinal direction with effective depth dependent upon the rise of the shell. For a given rise, the distance between centroids of tensile and compressive forces is almost unaffected by minor changes in shell thickness, and total longitudinal tension varies directly with the load. As a result, a reduction in dead load due to a decrease in shell thickness leads to a smaller total tension.

Transverse moment is also reduced in proportion to the load. However, this moment is resisted by the shell thickness itself so that a decrease in thickness allows little reduction in the amount of transverse reinforcement. In selecting shell thickness, its effect on reinforcement should be considered.

With shell thickness established, the next step involves the selection of rise (see Fig. 5), the distance from the lowest point of the structure (the bottom of the edge beams, if required) to mid-depth of the shell at the crown. For long-barrel, simply supported shells, a rise of one-tenth the longitudinal span generally gives sufficient curvature to produce a satisfactory stress condition and to avoid a large concentration of reinforcement in the valley. This ratio of one-tenth is simply a guide in preliminary layout work. For shells continuous in the longitudinal direction, rise can be less than one-tenth of the span.

In this example a rise of approximately $0.1\,l$ is pro-

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

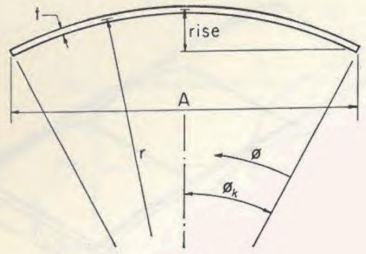


FIG. 5

duced by a shell radius of 45 ft. The rise of the interior barrel is determined by trigonometry from Fig. 5.

$$\text{rise} = r - \sqrt{r^2 - (0.5A)^2}$$
$$= 45 - \sqrt{45^2 - 20^2}$$
$$= 4.69 \text{ ft.}$$

The sine and cosine of one-half the angle subtended by the shell are:

$$\sin \phi_k = \frac{20}{45} = 0.4444$$
$$\cos \phi_k = \frac{(45 - 4.69)}{45} = 0.8958$$

Therefore ϕ_k, the angle from the crown to the edge of the shell, is equal to 26° 23′. Physical constants required in shell analysis are:

$$\frac{r}{l} = \frac{45}{50} = 0.9$$
$$\frac{rt}{l^2} = \frac{45 \times 4}{50^2 \times 12} = 0.006$$

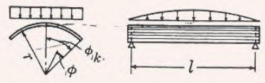
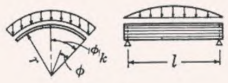
Two separate analyses are required for the roof unit shown in Fig. 4 since support conditions at longitudinal edges of interior and exterior barrels are different. Edges of the interior barrel are restrained horizontally by adjoining exterior barrels, while outside edges of exterior barrels are restrained only by edge beams. The first analysis deals with the interior barrel and the second with exterior barrels.

Discussion of Tables in ASCE Manual No. 31

As discussed in ASCE Manual No. 31, *Design of Cylindrical Concrete Shell Roofs*,* shell analysis resembles the analysis of indeterminate structures. The shell is first considered supported along both the transverse and longitudinal edges, a condition equivalent to assuming the shell determinate. Under this condition load is carried only by direct forces acting entirely in the plane of the shell, and reactions and displacements along the edges are inconsistent with actual end conditions. Therefore, corrective forces called edge or line loads are applied subsequently along the edges inducing bending moments as well as direct forces in the shell. Consequently, the analysis of a shell consists of two principal steps:

*Published by the American Society of Civil Engineers.

TABLE 1B.—MEMBRANE FORCES AND DISPLACEMENTS IN SIMPLY SUPPORTED CYLINDRICAL SHELLS; LOADS VARYING LONGITUDINALLY FROM ZERO AT THE ENDS TO MAXIMUM POSITIVE AT THE MIDDLE

	(a) UNIFORM TRANSVERSE LOAD	(b) DEAD WEIGHT LOAD
		
	Longitudinal Force T_x— $p_{ur}\left[\left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \text{Col. (1)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $p_{ur}\left[\left(\frac{l}{r}\right) \times \text{Col. (2)}\right]\cos\frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $p_{ur} \times \text{Col. (3)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$ Vertical Displacement Δ_V— $\frac{l^4}{r^3tE}\left[\left(1+\frac{1}{2}(\pi r/l)^2+\frac{1}{12}(\pi r/l)^4\right) \times \text{Col. (4)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$ Horizontal Displacement Δ_H— $+ p_{ur}\frac{l^4}{r^3tE}\left\{\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times \text{Col. (5)} + \left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^2+\frac{1}{12}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^4\right] \times \text{Col. (6)}\right\} \times \sin\frac{\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $p_{dr}\left[\left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \text{Col. (7)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $p_{dr}\left[\left(\frac{l}{r}\right) \times \text{Col. (8)}\right]\cos\frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $p_{dr} \times \text{Col. (9)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$ Vertical Displacement Δ_V— $\frac{l^4}{r^3tE}\left[\left(\frac{2r}{\pi l}\right)^2+\frac{2}{\pi^4}+\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times \text{Col. (10)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$ Horizontal Displacement Δ_H— $+ p_{dr}\frac{l^4}{r^3tE}\left[\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times \text{Col. (11)}\right] \times \sin\frac{\pi x}{l}$

$\phi_k - \phi$	T_x	S	T_ϕ	Δ_V	Δ_H		T_x	S	T_ϕ	Δ_V	Δ_H
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
0	−0.3040	0	−1.0000	0.12319	0	0	−0.2026	0	−1.000	1.0000	0
5	−0.2993	−0.0829	−0.9924	0.12180	0.0872	−0.00009	−0.2019	−0.0555	−0.9962	0.9924	0.0868
10	−0.2856	−0.1633	−0.9698	0.11766	0.1736	−0.00064	−0.1996	−0.1105	−0.9848	0.9698	0.1710
15	−0.2623	−0.2387	−0.9330	0.11102	0.2588	−0.00213	−0.1975	−0.1648	−0.9659	0.9330	0.2500
20	−0.2329	−0.3069	−0.8830	0.10222	0.3420	−0.00490	−0.1904	−0.2178	−0.9397	0.8830	0.3214
25	−0.1954	−0.3658	−0.8214	0.09170	0.4226	−0.00930	−0.1837	−0.2690	−0.9063	0.8214	0.3830
30	−0.1520	−0.4140	−0.7500	0.08001	0.5000	−0.01539	−0.1754	−0.3183	−0.8660	0.7500	0.4330
35	−0.1040	−0.4487	−0.6710	0.06771	0.5736	−0.02325	−0.1660	−0.3652	−0.8191	0.6710	0.4698
40	−0.0528	−0.4702	−0.5868	0.05537	0.6428	−0.03272	−0.1552	−0.4092	−0.7660	0.5868	0.4924

1. Determination of internal forces and edge reactions, assuming the shell to be statically determinate. This is called the "membrane analysis."

2. Determination of internal forces due to corrective loads applied along the edges of the shell, and the superposition of these forces on those resulting from the membrane analysis.

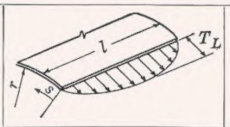
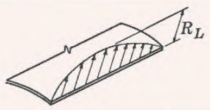
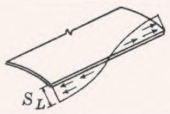
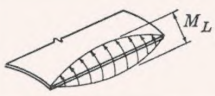
Table 1B and portions of Tables 3A and 3B reproduced from ASCE Manual No. 31 will be utilized. Table 1B deals with internal membrane forces and the displacements induced in a simply supported shell by sinusoidal surface loads. As shown in sketches at the top of the table, the load on the shell is assumed symmetrical about the crown. Coefficients in the left half are for a load uniform in the transverse direction, while coefficients in the right half are for a load varying as the weight of the shell. In both cases, load distribution in the longitudinal direction varies as $\sin \frac{\pi x}{l}$.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

TABLE 3A.—Edge Loads on Simply Supported Cylindrical Shells

	Tangential Edge Load	Radial Edge Load	Shear Edge Load	Moment Edge Load
	(a) Basic Formulas for $n = 1$; for $n = 3$ Substitute $\frac{3\pi x}{l}$ Instead of $\frac{\pi x}{l}$			
	Longitudinal Force T_x— $T_L \times$ Col. (1) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $T_L \times$ Col. (2) $\times \cos \frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $T_L \times$ Col. (3) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Transverse Moment M_ϕ— $T_L \times t \times$ Col. (4) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $R_L \times \frac{l}{t} \times$ Col. (5) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $R_L \times \frac{l}{t} \times$ Col. (6) $\times \cos \frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $R_L \times \frac{l}{t} \times$ Col. (7) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Transverse Moment M_ϕ— $R_L \times l \times$ Col. (8) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $S_L \times$ Col. (9) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $S_L \times$ Col. (10) $\times \cos \frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $S_L \times$ Col. (11) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Transverse Moment M_ϕ— $S_L \times t \times$ Col. (12) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $M_L \times \frac{1}{t} \times$ Col. (13) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $M_L \times \frac{1}{t} \times$ Col. (14) $\times \cos \frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $M_L \times \frac{1}{t} \times$ Col. (15) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Transverse Moment M_ϕ— $M_L \times$ Col. (16) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$
	(b) $n = 1$			
				

$\frac{s}{\sqrt[4]{r\,t\,l^2}}$	T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
0.2	+ 8.039	−2.488	+0.769	+0.1217	−0.1224	+0.05501	+0.00539	+0.02779	+3.624	+0.169	+0.0851	+0.0378	−0.1135	+0.1348	+0.01418	+0.837
0.1	+15.393	−1.575	+0.933	+0.1301	−0.3353	+0.03740	+0.00163	+0.01407	+5.200	+0.515	+0.0589	+0.0227	−0.7959	+0.1008	+0.00452	+0.913
0.0	+24.846	0	+1.000	0	−0.6254	0	0	0	+7.129	+1.000	0	0	−1.8212	0	0	+1.000
$\frac{rt}{l^2}$=0.006:																
3.2	− 0.153	−0.209	+0.047	+0.1550	+0.0179	+0.00877	−0.00034	−0.00493	+0.017	−0.029	+0.0122	+0.0265	+0.0692	+0.0134	+0.00536	−0.002
1.6	− 0.103	+0.827	−0.230	−0.9042	−0.0591	−0.03918	+0.00239	+0.03457	−0.202	+0.094	−0.0522	−0.1554	−0.2359	−0.0467	−0.03216	+0.050
0.8	− 5.182	−1.161	−0.344	−0.8634	+0.1807	−0.00480	+0.02822	+0.07956	−0.481	−0.263	−0.0089	−0.0585	+0.3234	−0.0780	+0.03503	+0.417
0.4	− 1.030	−2.556	+0.347	−0.0900	+0.1227	+0.05977	+0.01810	+0.05372	+1.253	−0.197	+0.0890	+0.0380	+0.4651	+0.0860	+0.03538	+0.664
0.2	+ 6.371	−2.158	+0.778	+0.1355	−0.1270	+0.06253	+0.00677	+0.02870	+3.240	+0.182	+0.0955	+0.0382	−0.0872	+0.1294	+0.01514	+0.814
0.1	+12.071	−1.363	+0.936	+0.1232	−0.3444	+0.04246	+0.00205	+0.01463	+4.628	+0.523	+0.0655	+0.0224	−0.6882	+0.0975	+0.00484	+0.901
0.0	+19.407	0	+1.000	0	−0.6412	0	0	0	+6.328	+1.000	0	0	−1.6010	0	0	+1.000
$\frac{rt}{l^2}$=0.008:																
3.2	− 0.086	−0.178	+0.050	+0.1271	+0.0163	+0.00949	−0.00072	−0.00511	+0.022	−0.025	+0.0132	+0.0227	+0.0605	+0.0132	+0.00522	−0.002
1.6	− 0.131	+0.719	−0.240	−0.7409	−0.0562	−0.04265	+0.00383	+0.03459	−0.199	+0.084	−0.0567	−0.1360	−0.2087	−0.0432	−0.03372	+0.043
0.8	− 4.278	−1.094	−0.313	−0.6617	+0.1813	−0.00397	+0.03329	+0.07719	−0.414	−0.263	−0.0042	−0.0422	+0.2814	−0.0763	+0.03497	+0.385
0.4	− 0.770	−2.316	+0.367	−0.0315	+0.1217	+0.06531	+0.02116	+0.05188	+1.177	−0.187	+0.0988	+0.0410	+0.4211	+0.0803	+0.03618	+0.637

TABLE 3B.—Edge Displacements of Simply Supported Cylindrical Shells

	Tangential Edge Load	Radial Edge Load	Shear Edge Load	Moment Edge Load
	(a) Basic Formulas			
	Tangential Displacement v (Inward Positive)— $T_L \times \frac{l}{Et} \times$ Col. (1) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$R_L \times \frac{l^2}{Et^2} \times$ Col. (4) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$S_L \times \frac{l}{Et} \times$ Col. (7) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$M_L \times \frac{l}{Et^2} \times$ Col. (10) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$
	Radial Displacement w (Outward Positive)— $T_L \times \frac{l^2}{Et^2} \times$ Col. (2) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$R_L \times \frac{l^3}{Et^3} \times$ Col. (5) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$S_L \times \frac{l^2}{Et^2} \times$ Col. (8) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$M_L \times \frac{l^2}{Et^3} \times$ Col. (11) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$
	Rotation θ (Counter Clockwise Positive)— $T_L \times \frac{lt}{EI} \times$ Col. (3) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$R_L \times \frac{l^2}{EI} \times$ Col. (6) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$S_L \times \frac{lt}{EI} \times$ Col. (9) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$M_L \times \frac{l}{EI} \times$ Col. (12) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$

$\frac{rt}{l^2}$	v (1)	w (2)	θ (3)	v (4)	w (5)	θ (6)	v (7)	w (8)	θ (9)	v (10)	w (11)	θ (12)
	(b) $n = 1$											
0.002	−77.30	−1.495	0.5712	1.495	0.03568	−0.01782	−11.91	−0.1861	0.05752	6.854	0.2138	−0.1710
0.003	−54.76	−1.409	0.4742	1.409	0.04535	−0.02027	− 9.393	−0.1943	0.05227	5.691	0.2433	−0.1795
0.004	−42.58	−1.342	0.4118	1.342	0.05332	−0.02206	− 7.909	−0.1990	0.04830	4.942	0.2648	−0.1851
0.006	−29.98	−1.243	0.3329	1.243	0.06635	−0.02459	− 6.176	−0.2041	0.04246	3.995	0.2951	−0.1920
0.008	−23.24	−1.169	0.2830	1.169	0.07690	−0.02634	− 5.164	−0.2062	0.03819	3.396	0.3161	−0.1962
0.010	−19.03	−1.110	0.2477	1.110	0.08582	−0.02764	− 4.485	−0.2069	0.03484	2.973	0.3317	−0.1990
0.015	−13.18	−1.000	0.1911	1.000	0.1036	−0.02983	− 3.452	−0.2058	0.02878	2.293	0.3580	−0.2032
0.020	−10.13	−0.9204	0.1565	0.9204	0.1174	−0.03120	− 2.853	−0.2029	0.02457	1.878	0.3744	−0.2055
0.025	− 8.241	−0.8582	0.1327	0.8582	0.1286	−0.03213	− 2.455	−0.1994	0.02142	1.593	0.3855	−0.2069
0.030	− 6.958	−0.8074	0.1152	0.8074	0.1381	−0.03279	− 2.168	−0.1956	0.01894	1.383	0.3935	−0.2078

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

An explanation of the reason for using a sinusoidal load instead of the actual uniform load on the shell is necessary. Although the membrane analysis could be made for a uniform load, the second principal step in shell analysis involving the application of corrective edge loads cannot be accomplished unless these edge loads are sinusoidal in shape. Therefore, to achieve compatibility of stresses produced by both edge and surface loads, the surface load is also assumed sinusoidal. While this sinusoidal load is different from the actual load, it can be made to approximate the effect of the uniform load.

To illustrate the similarity of flexural effects of both types of loads, a comparison is made of a simple beam supporting first a sinusoidal load (see Fig. 6) and then a uniform load.

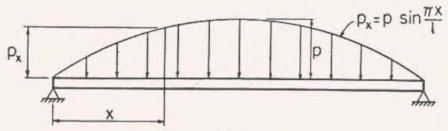


FIG. 6

Expressions for shear, moment, slope and deflection based on the sinusoidal loading of $p = 1$ are:

$$p_x = p \sin \frac{\pi x}{l} \tag{1}$$

$$V = \int p_x dx = p \int \sin \frac{\pi x}{l} dx = -\frac{pl}{\pi} \cos \frac{\pi x}{l} \tag{2}$$

$$M = \int V dx = p \int -\frac{l}{\pi} \cos \frac{\pi x}{l} dx = -\frac{pl^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l} \tag{3}$$

$$\theta = \int \frac{M dx}{EI} = \frac{p}{EI} \int -\frac{l^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l} dx = +\frac{pl^3}{EI\pi^3} \cos \frac{\pi x}{l} \tag{4}$$

$$\triangle = \int \theta dx = \frac{p}{EI} \int \frac{l^3}{\pi^3} \cos \frac{\pi x}{l} dx = \frac{p}{EI} \frac{l^4}{\pi^4} \sin \frac{\pi x}{l} \tag{5}$$

Using these expressions, the following comparison is made with the uniform load condition:

℄ Moment (sinusoidal)	$\sim \frac{1}{\pi^2} \times \frac{4}{\pi}$	$= 0.128$
℄ Moment (uniform)	$\sim \frac{1}{8}$	$= 0.125$
℄ Deflection (sinusoidal)	$\sim \frac{1}{\pi^4} \times \frac{4}{\pi}$	$= 0.0130$
℄ Deflection (uniform)	$\sim \frac{5}{384}$	$= 0.0130$
Support Shear (sinusoidal)	$\sim \frac{1}{\pi} \times \frac{4}{\pi}$	$= 0.405$
Support Shear (uniform)	$\sim \frac{1}{2}$	$= 0.500$

In this comparison, the centerline or maximum ordinate of the sinusoidal load equals $1.0 \times \frac{4}{\pi}$ while the uniform load has an intensity of 1.0. The maximum ordinate of the sinusoidal load must be of greater intensity than the uniform load if the stresses produced by the two loads are to be similar, and the factor $\frac{4}{\pi}$ used for this purpose is derived from a Fourier Analysis. Results of this comparison indicate that good agreement is obtained for moment and deflection of beams with only the first term of the Fourier Series. This same trend holds for the shell.

Several terms of the Fourier Series may be added to approximate the uniform longitudinal load. Each of these terms represents a partial load having an intensity varying as $\frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{l}$ where $n = 1, 3, 5$, etc. Figs. 7a, 7b and 7c illustrate graphically the first three terms. Fig. 7d shows

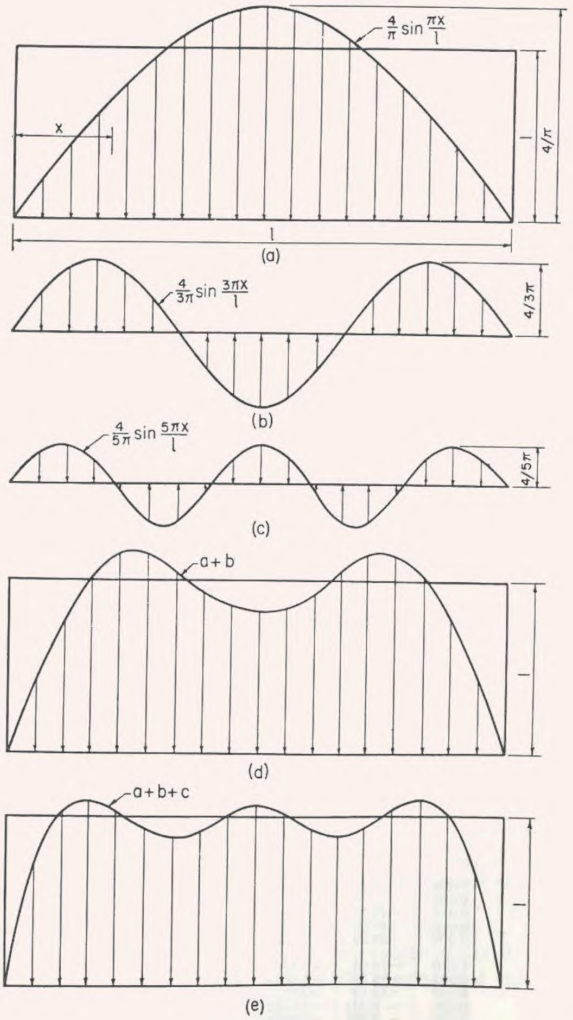


FIG. 7

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

the load resulting from the addition of the first two terms while Fig. 7e is the combination of the first three terms. The sum of all terms of the series would closely approximate the straight line $p = 1$. However, the preceding comparison indicates that the use of many terms is unnecessary and for clarity the computations for this example will be made in detail for only the first term where $n = 1$, as given in Table 1B.

Internal forces and displacements are defined as follows:

T_ϕ = Direct force component in the transverse direction, considered positive when tensile.
T_x = Direct force component in the longitudinal direction, considered positive when tensile.
S = Longitudinal shearing force, considered positive when creating tension in the direction of increasing values of x and ϕ.
$\triangle_V$ = Vertical displacement, considered positive when downward.
$\triangle_H$ = Horizontal displacement, considered positive when inward.

Transverse and longitudinal distribution of membrane forces created by a unit uniform transverse load or a unit dead load may be determined from Table 1B. Internal forces T_x, T_ϕ and S are obtained by means of formulas listed in the table heading in conjunction with tabulated coefficients. The transverse distribution of internal forces is given according to the column headed $\phi_k - \phi$, the central angle measured from the crown of the shell. ϕ_k is equal to one-half the angle subtended by the barrel while the angle ϕ is measured from the bottom edge as shown in Fig. 5. The angle $\phi_k - \phi$ is, therefore, the angle from the crown to any point designated by ϕ. For example, coefficients for values at the crown are taken at $\phi_k - \phi = 0°$.

The distribution of internal forces in the longitudinal direction varies according to trigonometric functions in formulas in the heading of Table 1B. For the sinusoidal surface load, forces T_ϕ and T_x vary as $\sin \frac{\pi x}{l}$ in which $\frac{\pi x}{l}$ is measured in radians. When $x = \frac{l}{2}$, $\sin \frac{\pi x}{l} = \sin \frac{\pi}{2} = \sin 90° = 1$. When $x = 0$ or l, $\sin \frac{\pi x}{l} = \sin 0°$ or $180°$ and is equal to zero. Values at intermediate points can be obtained from any trigonometric table, but values at $\frac{x}{l} = \frac{1}{6}, \frac{1}{4}$ and $\frac{1}{3}$ are easily determined since they correspond to sin 30°, 45° and 60°, respectively, which have values of 0.50, 0.707 and 0.866.

As in a beam, shear is maximum at the support and zero at midspan, the shearing force varying as $\cos \frac{\pi x}{l}$. This function equals $+1$ and -1 at the supports and zero at midspan.

Two sets of coefficients and formulas are given in Table 1B, one for use with uniform live load p_u and one for dead load p_d. To obtain the magnitude of various membrane forces due to either load, coefficients must be multiplied by factors given in the formulas. For example, the coefficient of T_x selected for a specific value of $\phi_k - \phi$ must be multiplied by the load p_u or p_d, the constant $\left(\frac{l}{r}\right)^2$, the shell radius r, and the factor $\frac{4}{\pi}$. Coefficients in Table 1B are applicable to any shell irrespective of its proportions.

Coefficients for determining internal forces and moments due to line loads applied along one edge of a shell are given in Tables 3A and 3B, which are reproduced in part here. These tables are applicable to shells having a ratio $\frac{r}{l}$ exceeding 0.6 and are therefore appropriate for this example where $\frac{r}{l}$ equals 0.9. Another set of tables, 2A and 2B, presented in ASCE Manual No. 31 but not reproduced here, gives effects of symmetrical edge loads on barrel shells having $\frac{r}{l}$ less than 0.6.

This arbitrary division is one of convenience but does have a reasonable basis. It is only when $\frac{r}{l}$ is approximately 0.6 or less that line loads applied along one edge create significant stresses and displacements at the opposite edge. In this case, the arc length of the shell has an important influence on stress distribution but when $\frac{r}{l}$ is 0.6 or more, stresses are independent of arc length. For this reason coefficients of Tables 2A and 2B are given in terms of the subtended angle while those of Tables 3A and 3B are not.

When $\frac{r}{l}$ is less than 0.6, forces and displacements at the far edge of the shell produced by line loads at the near edge must be made to agree with actual boundary conditions. This could be done by applying another set of loads at the far edge, these loads in turn creating inconsistent forces at the near edge. However, the operation involving successive correction of these diminishing forces can be replaced by a single step if symmetrical loads are applied simultaneously at both longitudinal edges. Tables 2A and 2B are developed for this type of loading.

As $\frac{r}{l}$ increases beyond 0.6, the negligible far edge effects do not require correction and analysis requires only one application of line loads at each edge with final superposition of forces resulting from both loadings. For a symmetrically loaded shell computations are required for only one edge since results are applicable in reverse order for loads at the opposite edge. While Tables 3A and 3B covering the case of $\frac{r}{l} \geq 0.6$ could have been prepared for simultaneous application of symmetrical edge loads as in Tables 2A and 2B, their range or usefulness would have been limited by such an arrangement. These tables are therefore developed for loads applied at only one edge of the shell.

Coefficients in Table 3A are tabulated for the four different types of unit edge loads indicated by sketches in the table heading and give four effects of each load. These effects, which may be evaluated at the transverse locations indicated by the term $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$, include the bending moment M_ϕ and the three forces T_x, T_ϕ and S. A large range of shell proportions is included by means of the

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

term $\frac{rt}{l^2}$ varying from 0.002 to 0.1. Small values are applicable to shells with proportions in the vicinity of $\frac{r}{t} = 200$ and $\frac{r}{l} = 0.6$, i.e., $\left(\frac{r}{l}\right)^2 \times \frac{t}{r} = \frac{rt}{l^2} = 0.0018$, while large values correspond to short shells having a radius several times the longitudinal span. It should be noted that Tables 3A and 3B include two sinusoidal loadings, one with $n=1$ and one with $n=3$, since the second loading term becomes more important with increasing values of $\frac{r}{l}$.

Table 3B provides data for evaluating radial, tangential and rotational displacements due to four different edge loads. This and previously mentioned tables will be used in the design example that follows.

TABLE I—Internal Forces in an Interior Barrel of a Simply Supported Multiple Barrel Roof

$\frac{rt}{l^2} = 0.006$ $\phi_k = 26° 23'$ $\frac{r}{l} = 0.90$

$\frac{s}{\sqrt{r\,t\,l^2}}$ / $\frac{s}{\phi}$ / $\phi_k - \phi$	3.2 / 44.5 / 56° 40′	1.6 / 22.3 / 28° 20′ / −2°	0.8 / 11.1 / 14° 10′ / 12°	0.4 / 5.6 / 7° 5′ / 19°	0.2 / 2.8 / 3° 30′ / 23°	0.1 / 1.4 / 1° 45′ / 25°	0 / 0 / 0° / 26° 23′	Multipliers	3.2 / 44.5 / 56° 40′	1.6 / 22.3 / 28° 20′ / −2°	0.8 / 11.1 / 14° 10′ / 12°	0.4 / 5.6 / 7° 5′ / 19°	0.2 / 2.8 / 3° 30′ / 23°	0.1 / 1.4 / 1° 45′ / 25°	0 / 0 / 0° / 26° 23′
Load	Coefficients								Forces						
T_ϕ at $x = \frac{l}{2}$ (Lb. per ft.)															
① p_u		−0.9970	−0.9551	−0.8930	−0.8460	− 0.8214	− 0.8017	1,720		− 1,720	− 1,640	− 1,540	− 1,460	− 1,410	− 1,380
② p_d		−0.9985	−0.9772	−0.9449	−0.9196	− 0.9063	− 0.8952	2,860		− 2,860	− 2,790	− 2,700	− 2,630	− 2,590	− 2,560
③ Σ										− 4,580	− 4,430	− 4,240	− 4,090	− 4,000	− 3,940
④ T_L	+0.047	−0.230	−0.344	+0.347	+0.778	+ 0.936	+ 1.000	5,760	+ 270	− 1,330	− 1,980	+ 2,000	+ 4,480	+ 5,390	+ 5,760
⑤ R_L	−0.00034	+0.00239	+0.02822	+0.01810	+0.00677	+ 0.00205	0	135,400	− 50	+ 320	+ 3,820	+ 2,450	+ 920	+ 280	0
⑥ S_L	+0.0122	−0.0522	−0.0089	+0.0890	+0.0955	+ 0.0655	0	1,620	+ 20	− 80	− 10	+ 140	+ 150	+ 110	0
⑦ M_L	+0.00536	−0.03216	+0.03503	+0.03538	+0.01514	+ 0.00484	0	−7,000	− 40	+ 220	− 250	− 250	− 110	− 30	0
⑧ Σ									+ 200	− 870	+ 1,580	+ 4,340	+ 5,440	+ 5,750	+ 5,760
⑨ Forces due to line loads at far edge									+ 5,760	− 760	− 360	+ 50	+ 150	+ 190	+ 200
⑩=③+⑧+⑨										− 6,210	− 3,210	+ 150	+ 1,500	+ 1,940	+ 2,020
S at $x = 0$ (Lb. per ft.)															
① p_u		−0.0332	−0.1935	−0.2933	−0.3422	− 0.3658	− 0.3791	1,910		− 60	− 370	− 560	− 650	− 700	− 720
② p_d		−0.0222	−0.1322	−0.2072	−0.2485	− 0.2690	− 0.2826	3,170		− 70	− 420	− 660	− 790	− 850	− 900
③ Σ										− 130	− 790	− 1,220	− 1,440	− 1,550	− 1,620
④ T_L	−0.209	+0.827	−1.161	−2.556	−2.158	− 1.363	0	5,760	− 1,200	+ 4,760	− 6,690	−14,700	−12,400	− 7,850	0
⑤ R_L	+0.00877	−0.03918	−0.0048	+0.05977	+0.06253	+ 0.04246	0	135,400	+ 1,190	− 5,310	− 650	+ 8,100	+ 8,470	+ 5,750	0
⑥ S_L	−0.029	+0.094	−0.263	−0.197	+0.182	+ 0.523	+ 1.000	1,620	− 50	+ 150	− 430	− 320	+ 290	+ 850	+ 1,620
⑦ M_L	+0.0134	−0.0467	−0.0780	+0.0860	+0.1294	+ 0.0975	0	−7,000	− 90	+ 330	+ 550	− 600	− 910	− 680	0
⑧ Σ									− 150	− 70	− 7,210	− 7,520	− 4,550	− 1,930	+ 1,620
⑨ Forces due to line loads at far edge									− 1,620	+ 1,800	− 1,400	− 800	− 420	− 250	0
⑩=③+⑧+⑨										+ 1,600	− 9,400	− 9,540	− 6,410	− 3,730	0
T_x at $x = \frac{l}{2}$ (Lb. per ft.)															
① p_u		−0.3021	−0.2763	−0.2387	−0.2104	− 0.1954	− 0.1867	2,120		− 640	− 590	− 510	− 450	− 430	− 400
② p_d		−0.2023	−0.1987	−0.1918	−0.1863	− 0.1837	− 0.1771	3,520		− 710	− 700	− 680	− 660	− 650	− 620
③ Σ										− 1,350	− 1,290	− 1,190	− 1,110	− 1,080	− 1,020
④ T_L	−0.153	−0.103	−5.182	−1.030	+6.371	+12.071	+19.407	5,760	− 880	− 590	−29,800	− 5,930	+36,700	+69,500	+112,000
⑤ R_L	+0.0179	−0.0591	+0.1807	+0.1227	−0.1270	− 0.3444	− 0.6412	135,400	+ 2,420	− 8,000	+24,500	+16,600	−17,200	−46,600	− 86,800
⑥ S_L	+0.017	−0.202	−0.481	+1.253	+3.240	+ 4.628	+ 6.328	1,620	+ 30	− 330	− 780	+ 2,030	+ 5,250	+ 7,500	+ 10,300
⑦ M_L	+0.0692	−0.2359	+0.3234	+0.4651	−0.0872	− 0.6882	− 1.6010	−7,000	− 480	+ 1,650	− 2,260	− 3,260	− 610	+ 4,820	+ 11,200
⑧ Σ									+ 1,080	− 7,270	− 8,340	+ 9,440	+25,360	+35,220	+ 46,700
⑨ Forces due to line loads at far edge									+46,700	−10,400	+ 200	+ 1,900	+ 2,000	+ 2,000	+ 1,500
⑩=③+⑧+⑨										−19,020	− 9,430	+10,150	+26,250	+36,140	+ 47,180
M_ϕ at $x = \frac{l}{2}$ (Ft. lb. per ft.)															
④ T_L	+0.1550	−0.9042	−0.8634	−0.0900	+0.1355	+ 0.1232	0	1,920	+ 300	− 1,740	− 1,660	− 170	+ 260	+ 240	0
⑤ R_L	−0.00493	+0.03457	+0.07956	+0.05372	+0.02870	+ 0.01463	0	45,200	− 220	+ 1,560	+ 3,600	+ 2,430	+ 1,300	+ 660	0
⑥ S_L	+0.0265	−0.1554	−0.0585	+0.0380	+0.0382	+ 0.0224	0	540	+ 10	− 80	− 30	+ 20	+ 20	+ 10	0
⑦ M_L	−0.002	+0.050	+0.417	+0.664	+0.814	+ 0.901	+ 1.000	−2,330	+ 50	− 120	− 970	− 1,550	− 1,900	− 2,100	− 2,330
⑧ Σ									+ 90	− 380	+ 940	+ 730	− 320	− 1,190	− 2,330
⑨ Forces due to line loads at far edge									− 2,330	− 50	− 390	− 140	− 35	+ 15	+ 50
⑩=⑧+⑨										− 430	+ 550	+ 590	− 355	− 1,175	− 2,280

①②③ Surface loads
④⑤⑥⑦⑧ Line loads applied at near edge

PAGE 8

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Analysis of Simply Supported Interior Barrel Shell

A—Membrane Analysis

Data necessary for this analysis are:

Live load p_u = 30 psf
Dead load p_d = 50 psf
Radius r = 45 ft.
$\frac{l}{r} = \frac{50}{45}$ = 1.11
$\left(\frac{l}{r}\right)^2$ = 1.238

In the membrane analysis external surface loads, dead and live, induce three forces throughout the shell: T_x, the force in the longitudinal direction; T_ϕ, the force in the transverse direction; and S, the tangential shearing force. For maximum values, T_x and T_ϕ are found at mid-span or at $x = \frac{l}{2}$, while S is found at the supports where $x = 0$ or $x = l$.

The magnitude of these internal forces is given in Table I (Roman numerals are used for the computed tables to differentiate them from Manual tables) at various transverse points, each location being expressed in four different terms. The first, $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$, is one of the parameters of Table 3A and values are selected to agree with those listed in Table 3A. Values of the other three terms s, ϕ and $\phi_k - \phi$ agree accordingly. For example, if $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 0.1$,

$$s = 0.1\sqrt[4]{rtl^2} = 0.1\sqrt[4]{(45)(0.333)(50^2)}$$

or s = 1.391 ft.

Also $\phi = \frac{s}{r}$ (in radians)

$$\phi = \frac{1.391}{45} \times \frac{180}{\pi} = 1.77°$$

The point indicated in Table I by s = 44.5 ft. and $\phi = 56°40'$ lies slightly beyond the far edge of the shell. Although forces determined at this point are meaningless for the shell under consideration, they are used for interpolation of forces at the far edge.

Membrane forces are determined by means of equations in the heading of Table 1B. The combination of all terms in any one equation with the exception of the coefficient is called the multiplier. Multipliers for this example are:

For live load:

(T_x) $\frac{4}{\pi} \times 30 \times 45 \times 1.238 = 2120$

(S) $\frac{4}{\pi} \times 30 \times 45 \times 1.11 = 1910$

(T_ϕ) $\frac{4}{\pi} \times 30 \times 45 = 1720$

For dead load:

(T_x) $\frac{4}{\pi} \times 50 \times 45 \times 1.238 = 3520$

(S) $\frac{4}{\pi} \times 50 \times 45 \times 1.11 = 3170$

(T_ϕ) $\frac{4}{\pi} \times 50 \times 45 = 2860$

Coefficients for these multipliers are taken from columns (1), (2), (3) and (7), (8), (9) for live and dead loads, respectively. For example, to find the live load coefficient for the force T_x at $\phi = 7°\,5'$ or $\phi_k - \phi = 19°\,18'$, enter column (1) of Table 1B. Sufficient accuracy is achieved by interpolating for an angle $\phi_k - \phi = 19°$ giving the coefficient -0.2387. Multiplying this coefficient by the multiplier 2120 gives a force T_x of 510 lb. per ft.

The same procedure is repeated at various locations across the shell to determine the forces T_ϕ, T_x and S induced by both dead and live loads. Results are tabulated in rows ① and ② of Table I, while rows ③ give a summation of ① and ②. Slide rule accuracy is sufficient in these computations.

B—Correction for Edge Loads

Complete shell analysis requires that final forces and displacements along all edges be consistent with actual boundary conditions. Since the membrane analysis assumes the existence of imaginary edge supports, membrane forces must be corrected. This correction constitutes the second principal step of shell analysis.

The sequence of operations involved in the second step requires determination of magnitude and direction of corrective line loads applied at the edges and then evaluation of the internal forces which they produce. For a single barrel shell without edge beams—that is, one in which longitudinal edges are free—the only condition to be satisfied is that the algebraic sum of corrective line loads and membrane forces at the edges equal zero. In other words, final corrective line loads T_L and S_L are equal and opposite to membrane forces T_ϕ and S and therefore are known upon completion of the membrane analysis.

In contrast to this simple analysis for a single barrel, determination of line loads for a multiple barrel roof is more complicated. Not only must membrane forces be satisfied but, in addition, displacements of common edges of adjacent barrels must coincide. For this reason final corrective line loads seldom equal membrane forces and a special notation T_{LM} and S_{LM} is introduced for line loads which satisfy only the edge forces of the membrane analysis. Final line loads T_L and S_L include T_{LM} and S_{LM} as well as loads effecting coincident edge displacements.

There are various ways of evaluating line loads for the multiple barrel roof and although the method presented here is not the most direct, it is considered the least complicated. Initially, each barrel is assumed separated from the rest of the structure and is treated as a single barrel. Following a membrane analysis, corrective line loads T_{LM} and S_{LM} producing zero reactions are applied along the longitudinal edges of each barrel. As previously mentioned, determination of these line loads does not require a separate computation and in this example values of 3940 lb. per ft. for T_{LM} and 1620 lb. per ft. for S_{LM} are taken directly from rows ③ of Table I at $\phi = 0°$. The interior barrel is in static equilibrium when these loads are applied. However, individual barrels still must be brought together in the multiple barrel system by additional line loads applied to each barrel. Internal forces produced by these additional loads then are super-

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

imposed on the effects of T_{LM} and S_{LM}.

Consistency in displacements of adjacent edges is achieved by making longitudinal, vertical, horizontal and angular displacements of one edge equal to those of the other. Generally, longitudinal stresses T_x/t at common edges are made equal to each other instead of longitudinal displacements since edge displacements agree if corresponding stresses are identical. The remaining three displacement equations are established for each edge in terms of the unknown line loads T_L, R_L, S_L and M_L, coefficients taken from Table 2B or 3B and specified physical properties of the shell.

Equating like displacements of adjoining barrel edges yields four equations containing eight unknowns, these unknowns including four line loads applied to each adjacent edge. The eight unknowns can be reduced to four by statics. Because these line loads are internal, the algebraic sum of their components in any direction must equal zero. Moment and tangential shear acting on one edge must be equal and opposite to similar forces acting on the adjoining edge, and the sum of the vertical and horizontal components of radial and tangential line loads R_L and T_L applied to adjacent edges must equal zero. By inserting these conditions, the four equations can be expressed in terms of four unknowns and a simultaneous solution gives numerical values for the line loads.

The general procedure of establishing four displacement equations to determine the unknowns R_L, T_L, S_L and M_L is not always necessary. When adjacent barrels are symmetrical in shape and loading as in this design example, analysis can be simplified to a consideration of only one barrel. It should be understood that line loads applied to one barrel are applied in an opposite sense to the adjacent barrel. Agreement in displacement of common edges is obtained from four known conditions: that no horizontal or angular displacement of the edges takes place and that tangential and vertical shears along common edges are equal to zero.

The first two conditions are evident from symmetry in shape and loading. The latter two conditions also can be deduced from physical aspects of the problem. With adjacent barrels identical and equally loaded, variation of longitudinal stress is symmetrical about the common edge and tangential shear at the edge must equal zero. Vertical shear equal to the sum of the vertical components of line loads R_L and T_L, must also equal zero since its presence would indicate that load on one shell was being carried in part by the adjoining barrel, an impossible condition because of symmetry.

The four known conditions can be summarized as:

$$\begin{aligned} \triangle_H &= 0 \\ \theta &= 0 \\ S &= 0 \\ \Sigma V &= 0 \end{aligned}$$

Numerical expressions are derived for the design example from these conditions.

Expressing $\triangle_H = 0$ in terms of displacements given in Table 3B gives:

$$\triangle_H = 0 = v \cos \phi_k - w \sin \phi_k \qquad (6)$$

where v is the tangential displacement of the shell considered positive in the direction of increasing values of ϕ, and w the radial displacement considered positive when outward. Sign convention for this equation arbitrarily defines displacement to the left as positive. The trigonometric relationship is shown in Fig. 8.

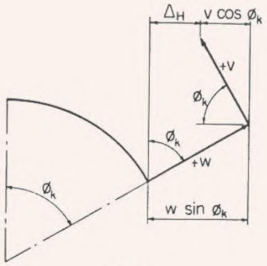


FIG. 8

Evaluation of v and w is made by combining displacement contributions of T_{LM} and S_{LM} with those of the four line loads which unite displaced edges of adjoining barrels. T_{LM} and S_{LM} are part of the final edge loads T_L and S_L, respectively, and are combined with them in equation (7). Tangential and radial displacements due to the four line loads T_L, R_L, S_L and M_L are given in the heading of Table 3B. Equation (7) is given at $x = \frac{l}{2}$ and for convenience is divided by the factor $\frac{l}{Et}$.

$$\begin{aligned} \triangle_H = 0 = \Big[&(T_L + 3940) \times \text{Col. (1)} + R_L \times \tfrac{l}{t} \times \\ &\text{Col. (4)} + (S_L + 1620) \times \text{Col. (7)} + M_L \times \tfrac{1}{t} \times \\ &\text{Col. (10)} \Big] \cos \phi_k - \Big[(T_L + 3940) \times \text{Col. (2)} + \\ &R_L \times \tfrac{l}{t} \times \text{Col. (5)} + (S_L + 1620) \times \text{Col. (8)} + \\ &M_L \times \tfrac{1}{t} \times \text{Col. (11)} \Big] \tfrac{l}{t} \sin \phi_k \end{aligned} \qquad (7)$$

Substituting coefficients of Table 3B given for $\frac{rt}{l^2} = 0.006$ and for the first sine loading ($n = 1$) together with dimensional and trigonometric values gives:

$$\begin{aligned} 0 = \Big[&(T_L + 3940)(-29.98) + (R_L)(150)(1.243) + \\ &(S_L + 1620)(-6.176) + \left(\frac{M_L}{t}\right)(3.995) \Big] 0.8958 - \\ \Big[&(T_L + 3940)(-1.243) + (R_L)(150)(0.06635) + \\ &(S_L + 1620)(-0.2041) + \left(\frac{M_L}{t}\right)(0.2951) \Big] (150)(0.4444) \end{aligned} \qquad (7a)$$

which reduces to:

$$0 = 233{,}700 + 56.00\, T_L - 496.4\, R_L + 8.073\, S_L - 16.09 \frac{M_L}{t} \qquad (7b)$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

The term $\frac{M_L}{t}$ is kept separate for convenience in the use of Table 3A.

The condition of zero edge rotation for the interior barrel ($\theta = 0$) is expressed by combining rotational effects of edge loads T_L, R_L, S_L and M_L taken from the heading of Table 3B. Rotation is determined at midspan where $x = \frac{l}{2}$ and the entire equation is divided by $\frac{lt}{EI}$.

$$\theta = 0 = (T_L + 3940) \times \text{Col. (3)} + R_L \times \frac{l}{t} \times \text{Col. (6)} + (S_L + 1620) \times \text{Col. (9)} + M_L \times \frac{1}{t} \times \text{Col. (12)} \quad (8)$$

Substituting dimensions and coefficients from Table 3B gives:

$$0 = (T_L + 3940)(0.3329) + (R_L \times 150)(-0.02459) + (S_L + 1620) \times 0.04246 + \left(\frac{M_L}{t}\right)(-0.1920) \quad (8a)$$

which simplifies to:

$$1380 + 0.3329\,T_L - 3.689\,R_L + 0.04246\,S_L - 0.1920\,\frac{M_L}{t} = 0 \quad (8b)$$

Static equilibrium of the interior barrel was satisfied by application of loads T_{LM} and S_{LM}. To maintain this stability the summation of vertical components of line loads R_L and T_L must equal zero. The expression for $\Sigma V = 0$ at one edge is developed from the sketch of Fig. 9.

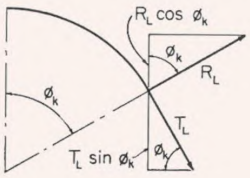


FIG. 9

Assuming the downward direction positive gives:

$$-R_L \cos \phi_k + T_L \sin \phi_k = 0 \quad (9)$$

$$-R_L \times 0.8958 + T_L \times 0.4444 = 0 \quad (9a)$$

$$T_L = 2.016\,R_L \quad (9b)$$

As previously discussed, shear is zero at the edges of the interior barrel in this example. Since shear equilibrium is produced by the load S_{LM} of 1620 lb. per ft. which resists shear resulting from the membrane analysis, the only other shearing force involved, line load S_L, along these edges must equal zero.

Substituting the value of T_L from equation (9b) and setting $S_L = 0$, equations (7b) and (8b) become:

$$233{,}700 - 383.5\,R_L - 16.09\,\frac{M_L}{t} = 0$$

$$1380 - 3.017\,R_L - 0.1920\,\frac{M_L}{t} = 0$$

Solving these simultaneously gives:

$$R_L = +903 \text{ lb. per ft.}$$

$$\frac{M_L}{t} = -7000 \text{ ft. lb. per ft.}^2$$

and from equation (9b):

$$T_L = 1820 \text{ lb. per ft.}$$

These line loads satisfy requirements of transverse continuity along longitudinal edges of the interior barrel. Since T_{LM} acts in the same direction as the force T_L these two forces are combined to form a final T_L of $+1820 + 3940 = +5760$ lb. per ft. Similarly, the value of S_L is added to S_{LM} to give a final S_L of $0 + 1620 = +1620$ lb. per ft. The sign convention for T_L and S_L is the same as that for T_ϕ and S, respectively. Positive R_L is in the outward direction while positive M_L produces compression at the upper surface of the shell.

Internal forces resulting from edge loads are determined by equations in the heading of Table 3A. In these equations the terms $\sin \frac{\pi x}{l}$ and $\cos \frac{\pi x}{l}$ equal 1.0 at $x = \frac{l}{2}$ and $x = 0$, respectively. As previously discussed, the multiplier is the combination of all terms in one equation with the exception of the coefficient. For example, the multiplier for computing internal forces T_ϕ, S and T_x resulting from line load T_L equals $T_L \times 1.0 = +5760$ lb. per ft. Similarly, the multiplier for these same forces due to R_L equals $R_L \times \frac{l}{t} \times 1.0 = +903 \times \frac{50}{0.333} \times 1.0 = +135{,}400$ lb. per ft., while the multiplier for moment M_ϕ due to the edge moment M_L is $M_L \times 1.0 = \frac{M_L}{t} \times t \times 1.0 = -7000 \times 0.333 \times 1.0 = -2330$ lb. per ft. All multipliers are tabulated in the center column of Table I.

Coefficients taken from Table 3A for $\frac{rt}{l^2} = 0.006$ are listed in rows ④ through ⑦ at the left side of Table I. These coefficients times appropriate multipliers give the forces T_ϕ, T_x, S and M_ϕ at the points indicated by $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$. These forces are listed at the right side of the table.

For illustration, the internal force T_ϕ produced by line load T_L at $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 0.4$ is obtained by multiplying the coefficient $+0.347$ by the multiplier $+5760$ to give $+2000$ lb. per ft. Other values of T_ϕ at this location due to line loads R_L, S_L and M_L are determined in a similar manner and all are added algebraically in row ⑧ and plotted in Fig. 10 to show the variation of T_ϕ across the shell. Similar curves for T_x, S and M_ϕ are also included. Although values are not available for plotting between $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 1.6$ and 3.2, curves can be estimated with a satisfactory degree of accuracy since the magnitude of forces between these values becomes smaller and curvatures diminish.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

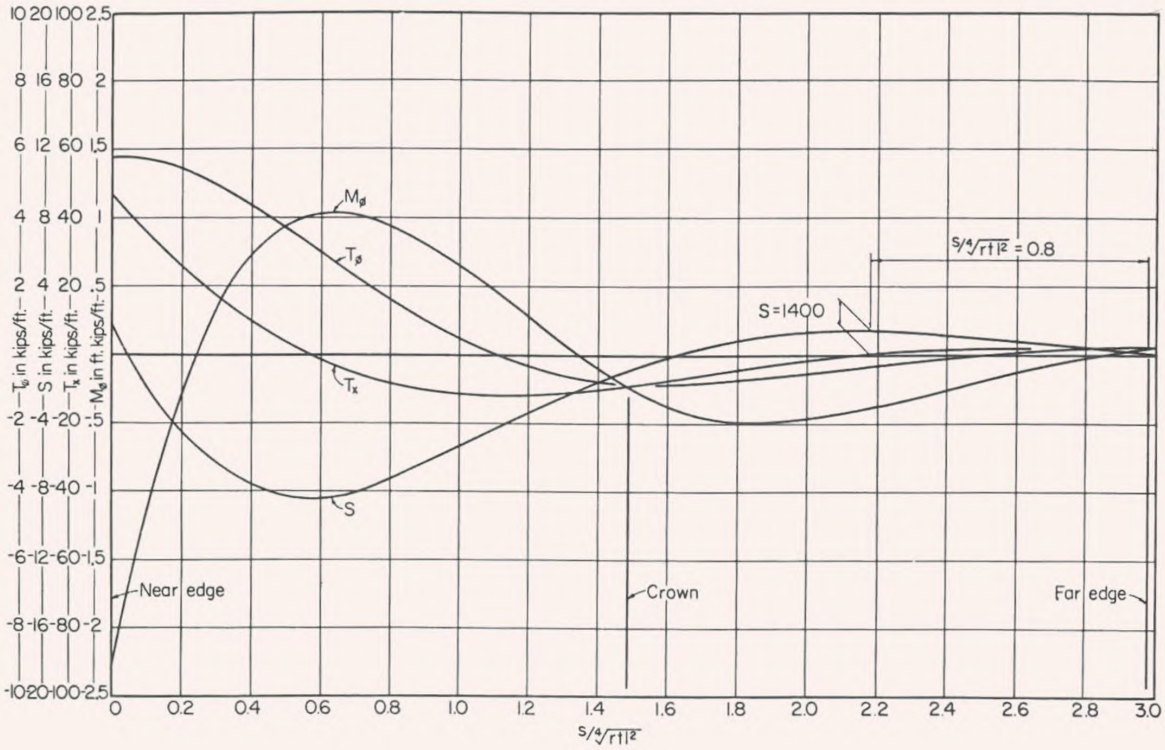


FIG. 10

The curves of Fig. 10 involve line loads applied only at the near edge. Symmetry of structure and loading allows the use of these same curves for determining forces resulting from line loads acting at the far edge. This is done by reversing the abscissa scale of Fig. 10 so that the right edge represents the near edge of the shell and then scaling directly from the curves. For example, the magnitude of force S at $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 0.8$ (measured on the reversed scale) due to line loads at the far edge is scaled as 1400 lb. per ft. Forces determined in this manner are tabulated in rows ⑨ of Table I.

Although algebraic signs tabulated for shear in row ⑧ of Table I agree with those of the S curve in Fig. 10, signs in row ⑨ are opposite to those indicated by this curve. This is due to the fact that the shear sign convention defined on page 9 is related to the origin of the coordinate axes. The signs of coefficients for line loads are based on a coordinate system originating at the loaded edge. Therefore, line loads applied at near and far edges have different referent axes, and positive shears due to these two loads will be opposite in direction.

The difference between positive shear directions can be seen by reference to Fig. 11 in which face BB' is assumed to be parallel to and facing the near edge of the shell. Shear resulting from line loads acting at the near edge is referenced to the coordinate origin at the right and is positive as shown in conformance with the definition that it produce tension in the direction of increasing values of ϕ and x, or along diagonal AB. For this condition positive shear on face BB' acts toward the origin of x.

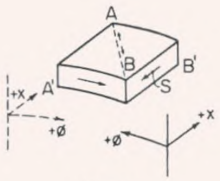


FIG. 11

Similarly, shear produced by line loads acting at the far edge is referenced to the origin at the left and when positive is directed toward the origin of x on face AA' which is nearest to the loaded edge. In this case shear on face BB' is opposite to that shown. Consequently, on a face such as BB', positive shear due to line loads at the far edge is opposite in direction to positive shear caused by line loads at the near edge. Direction is made consistent by changing signs.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Rows ⑩ of Table I give final internal forces in the simply supported interior barrel. These are obtained by summation of membrane forces and effects of line loads applied at both longitudinal edges. Variation of these forces is shown graphically in Fig. 12.

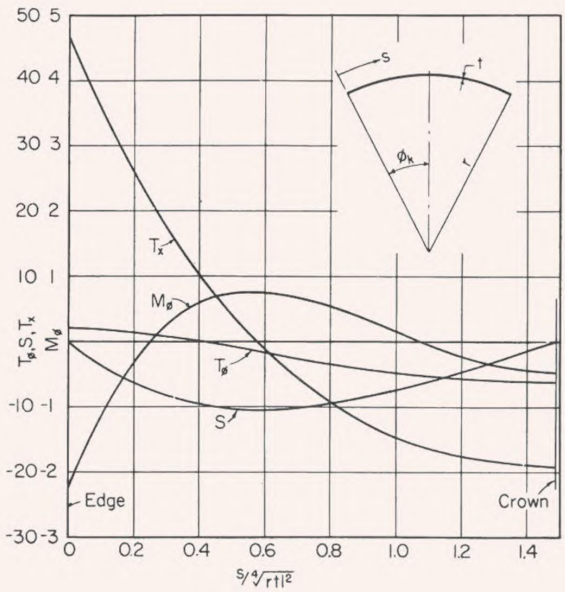


FIG. 12

Statical Check of Forces in Interior Barrel

A statical check of internal forces should be made as a precautionary measure against numerical errors. The sum of horizontal T_x-forces across a transverse section of the barrel must equal zero, the sum of vertical components of the shearing force S at each support must equal one-half the total load on the shell, and the total internal longitudinal moment at midspan due to the T_x-forces must equal the external moment.

The summation of horizontal forces at midspan is made by means of Simpson's rule. This method, useful in integrating non-linear functions, expresses area as:

$$\frac{\triangle L}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 \ldots + y_n)$$

in which y_o to y_n are equally spaced ordinates of the curve enclosing the area, n is an even number, and $\triangle L$ the distance between ordinates. In this example, the arc distance from shell edge to crown is divided into four equal parts. The angle ϕ_k was shown to be 26°23′ (26.38°) and its value in radians is obtained by multiplying by $\frac{\pi}{180}$.

Hence:

$$\triangle L = \frac{s}{4} = \frac{r\phi_k}{4} = \frac{45 \times 26.38 \times \pi}{4 \times 180} = 5.18 \text{ ft.}$$

The value of $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$ corresponding to this interval equals:

$$\frac{5.18}{\sqrt[4]{45 \times 0.333 \times 50^2}} = 0.372$$

Because values of internal forces tabulated in rows ⑩ of Table I occur at locations different from those required for ordinates in Simpson's rule, scaled values from Fig. 12 are used. With scaled values, the summation of longitudinal forces is:

$$\Sigma H = \frac{5.18}{3}[47{,}180 + 4 \times 13{,}800 + 2 \times (-7{,}200) + 4 \times (-16{,}300) + (-19{,}400)]$$

$$\Sigma H = +177{,}000 - 171{,}000 = +6000 \text{ lb.}$$

The difference between positive and negative values is less than 2 per cent of their arithmetic sum.

The internal moment produced by T_x-forces at any section is always the same regardless of where the axis is chosen. Here moment is computed about the bottom edge of the shell and Simpson's rule takes the form:

$$\text{Moment} = \frac{\triangle L}{3} \times 2\,[y_o h_o + 4\,y_1 h_1 + 2\,y_2 h_2 + 4\,y_3 h_3 \ldots + y_n h_n]$$

where the ordinate y with its subscript is again the magnitude of the force T_x at the same locations specified for the summation of horizontal forces and h is the companion moment arm measured from the lower edge of the shell. The moment arm equals $r\,[\cos(\phi_k - \phi) - \cos\phi_k]$. The summation is multiplied by 2 to include the moment at either side of the crown.

To illustrate computations used in the moment summation, the ordinate y_1 at the point $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 0.372$ was scaled previously from Fig. 12 as 13,800 lb. per ft. The angle ϕ subtended by this point equals 6°36′ and $\phi_k - \phi$ is approximately 19°50′. The moment arm therefore equals $45(0.9407 - 0.8958) = 2.02$ ft. The complete expression for moment is:

$$\Sigma M = \frac{5.18}{3} \times 2[0 + 4 \times 13{,}800 \times 2.02 + 2 \times (-7200) \times 3.51 + 4 \times (-16{,}300) \times 4.38 + (-19{,}400) \times 4.69]$$

from which:

$$M \text{ (internal)} = -1{,}077{,}000 \text{ ft. lb.}$$

Midspan moment due to external load is determined from equation (3), $M = -\frac{pl^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{l}$, as developed on page 8. With shell arc length equal to $8\triangle L = 8 \times 5.18 = 41.4$ ft. and $p_u = 30$ psf and $p_d = 50$ psf, external moment is:

$$M = -\frac{50^2}{\pi^2}\left[30 \times 40 \times \frac{4}{\pi} + 50 \times 41.4 \times \frac{4}{\pi}\right]$$
$$= -1{,}055{,}000 \text{ ft. lb.}$$

As previously discussed, dead and live loads are multiplied by $\frac{4}{\pi}$ in accordance with the Fourier Analysis. According to sign conventions adopted, both external and internal moments produce compression at the top of the shell and internal moment is only 2 per cent greater than the external.

Summation of vertical components of the shearing force S at one end of the barrel is:

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

$$\Sigma V = \frac{\Delta L}{3} \times 2\,[y_o \sin(\phi_k-\phi_o) + 4\,y_1 \sin(\phi_k-\phi_1) + 2\,y_2 \sin(\phi_k-\phi_2) + \ldots y_n \sin(\phi_k-\phi_n)]$$

where y now represents ordinates of the shear curve of Fig. 12. For example, y_1 scales -9000 lb. per ft. For $\phi_k-\phi_1=19°50'$, $\sin(\phi_k-\phi_1)$ equals 0.3393 and the vertical component at this point is -9000×0.3393. Values at other points are obtained in a similar manner. Total upward force acting at the support is:

$$\Sigma V = \frac{5.18}{3} \times 2[0 + 4 \times (-9000) \times 0.3393 + 2 \times (-9750) \times 0.2278 + 4 \times (-5850) \times 0.1161 + 0]$$

$$\Sigma V = -66{,}800 \text{ lb.}$$

Equation (2) shows that total vertical shear due to a sinusoidal load is equal to $-p\frac{l}{\pi}\cos\frac{\pi x}{l}$. At the support where $x = 0$, $\cos\frac{\pi x}{l} = 1$ and the reaction becomes $-p\frac{l}{\pi}$. Substituting for p the numerical values used in the moment expression, total shear is:

$$V = -\frac{50}{\pi}\left[30 \times 40 \times \frac{4}{\pi} + 50 \times 41.4 \times \frac{4}{\pi}\right] = -66{,}300 \text{ lb.}$$

In this example, good agreement is obtained between the summation of internal and external forces with a maximum difference of less than 2 per cent. Such a favorable comparison cannot always be expected. Scaled ordinates, approximate integration given by Simpson's rule and, to a minor extent, the incomplete satisfaction of edge conditions may result in differences amounting to as much as 10 per cent in exceptional cases.

Analysis of Simply Supported Exterior Barrel Shell

Geometrical properties of exterior and interior barrels of the roof in this example are similar except that a beam 24 in. deep and 9 in. wide is added at the outside edge of exterior shells. This vertical extension, defined as an edge beam, acts integrally with the shell and should not be considered a separate member.

Analysis of the exterior barrel follows almost the same procedure outlined for the interior barrel. The first step involves determination of membrane forces created by surface loads. Since identical loading is applied to all barrels, membrane forces for exterior and interior barrels are the same and their summation is taken directly from Table I or computed from Table 1B and tabulated in rows ③ of Table III on page 20. Effects of line loads at the inside edge of the exterior barrel also are similar to those previously determined for the interior barrel and these values are tabulated in rows ⑨ of Table III.

Restraint at the outside edge of the exterior barrel is quite different from that at the interior edge since displacement is resisted only by the edge beam. As a result, investigation of the exterior barrel chiefly concerns conditions at the outside edge.

It is first assumed that the exterior shell is detached temporarily from the adjoining barrel and edge beam as illustrated in Fig. 13. Line loads which re-establish unity of beam and shell can be determined in the manner shown for the interior barrel. However, to emphasize the pronounced effect of the edge beam on deflection, longitudinal stress and vertical displacement of the shell are computed without taking the edge beam into account. The force T_x created in the single barrel is:

$$T_x = (-1020 + 3940 \times 19.407 + 1620 \times 6.328) \sin\frac{\pi x}{l}$$

$$\text{or } T_x = 85{,}700 \sin\frac{\pi x}{l} \text{ lb. per ft.}$$

In the equation above, -1020 is the longitudinal force due to membrane forces and is taken directly from row ③ of Table I, while the two products constitute effects of line loads which counteract tangential and shear reactions at the edge resulting from the membrane analysis.

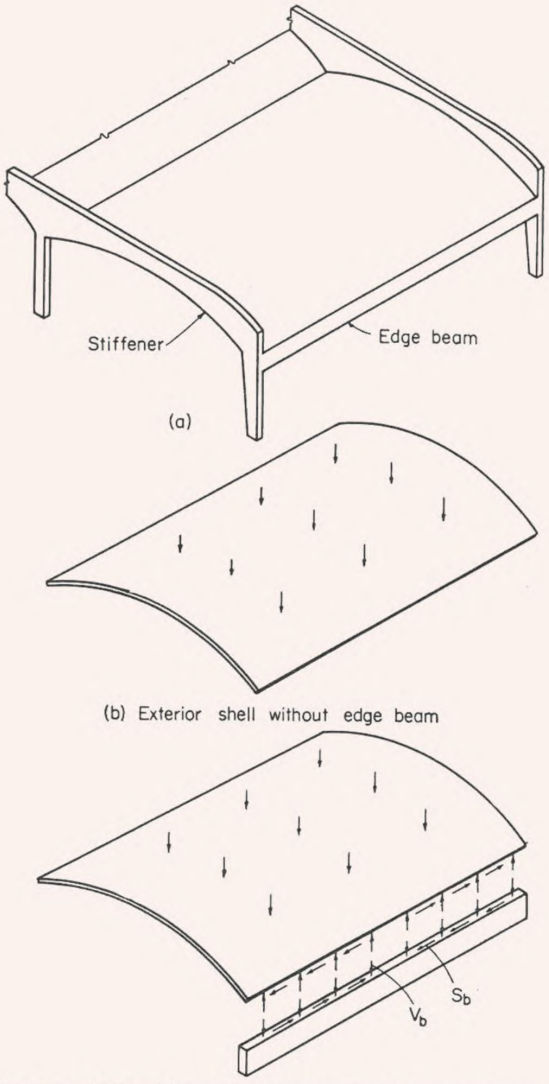


FIG. 13

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Coefficients are taken from Table 3A. The final value of 85,700 sin $\frac{\pi x}{l}$ lb. per ft. is the longitudinal edge force existing when the shell is independent of the edge beam.

Vertical displacement of the outside edge for this condition is computed by means of Table 3B by adding vertical components of tangential and radial displacements.

$$\Delta_V = \frac{l}{Et}\,[(-3940 \times 29.98 - 1620 \times 6.176)\ 0.4444 + 150 \times (-3940 \times 1.243 - 1620 \times 0.2041)\ 0.8958]\ \sin\frac{\pi x}{l}$$

$$\Delta_V = -759{,}000\ \frac{l}{Et}\ \sin\frac{\pi x}{l} = \frac{114 \times 10^6}{E}\ \sin\frac{\pi x}{l}$$

If E is assumed equal to 3,000,000 psi, dead load taken as 5/8 of the total load and long-time deflection assumed 3.8* times the instantaneous deflection, then:

$$\Delta_V = \frac{5 \times 114 \times 10^6 \times 3\ 8}{8 \times 3 \times 10^6 \times 144} + \frac{3 \times 114 \times 10^6}{8 \times 3 \times 10^6 \times 144} = 0.73 \text{ ft. or } 8\tfrac{3}{4} \text{ in.}$$

Although actual deflection would be approximately 1/4 to 1/5 of 0.73 ft. because of longitudinal continuity, edge deflection still would be excessive without an edge beam. Because of the nonlinear variation of the T_x-forces in all shell roofs except those having very large $\frac{l}{r}$ ratios, it is probable that the creep will be considerably less than that prevailing in ordinary beams. The factor 3.8 is used here only to indicate the maximum value.

The next step is to reunite common edges of barrel and beam by making vertical displacement and longitudinal strain coincident throughout their length. The other two requirements of continuity, that horizontal displacement and angular rotation of common edges agree, can be neglected since horizontal and rotational stiffnesses of the beam are slight as compared with those of the shell.

*See *Deflection of Reinforced Concrete Members*, p. 16, available free in U.S. and Canada on request to Portland Cement Association.

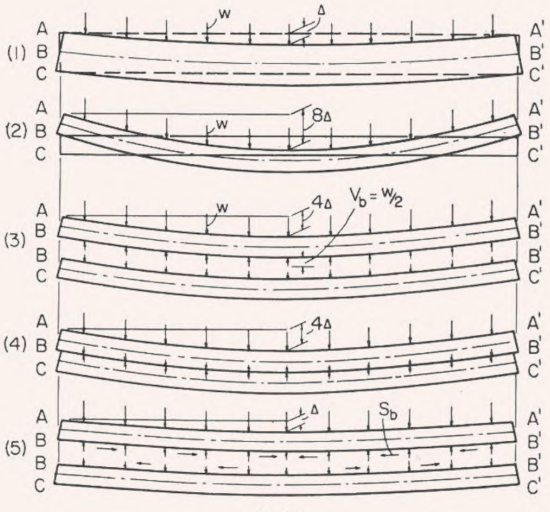


FIG. 14

Because two conditions of compatibility are to be satisfied, two types of forces must be applied at the junction of edge beam and shell. The necessity for considering two force conditions rather than one can be demonstrated easily for a simply supported rectangular beam carrying uniform load. As shown in Fig. 14 (1), deflection of the beam due to a uniform load w is designated as Δ. While impractical, analysis of this beam can be made by dividing it horizontally into two parts and then reuniting these parts by internal forces. In Fig. 14 (2), the beam is split and the entire load is assumed carried by the upper half, the deflection of this half becoming 8 Δ. The lower portion assumed unloaded remains in its undeflected position:

If equal and opposite loads of magnitude $\frac{w}{2}$ are added to both the upper and lower sections of the beam as shown in Fig. 14 (3), both parts are subjected to a net downward force of $\frac{w}{2}$ and the deflection of each becomes 4 Δ. However, strains of the common face BB' differ and can only be brought into agreement by equal and opposite shearing forces acting along this common surface. The shearing forces shorten bottom fibers of the upper beam and lengthen top fibers of the lower beam while maintaining the same relative deflection of both. Hence both displacement and strain requirements are satisfied. Final stresses and deflections obtained by this indirect procedure are identical to those obtained from a consideration of the beam as a unit.

As in this simple beam illustration, line loads acting on the edge of the exterior barrel must be equal and opposite to those carried by the edge beam. Since the edge beam is assumed to resist only vertical loads and horizontal shearing loads, forces acting on the shell must correspond to these two loads. Therefore, if forces acting on the beam are designated as V_b and S_b, shell line loads

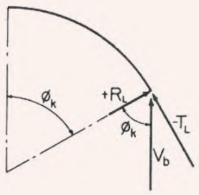


FIG. 15

are, from Fig. 15:

$$T_L = -V_b \sin\phi_k = -0.4444\ V_b \qquad (10a)$$

$$R_L = V_b \cos\phi_k = 0.8958\ V_b \qquad (10b)$$

$$S_L = S_b \qquad (10c)$$

The positive direction of V_b shown represents the reaction of the beam on the shell. The relationship expressed by equations (10a) and (10b) satisfies the condition that the horizontal edge force equals zero.

Longitudinal stress and vertical displacement at the edge are determined by superimposing effects of these line loads on those previously determined for the single barrel. With the influence of line loads applied at the far

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese, potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

edge neglected, $\frac{T_x}{t}$ and Δ_V are:

$$\frac{T_x}{t} = \frac{1}{t}\,(85{,}700 + 19.407\,T_L - 150 \times 0.6412\,R_L + 6.328\,S_L)\,\sin\frac{\pi x}{l} \tag{11a}$$

$$\Delta_V = -\frac{l}{Et}\Big[-759{,}000 + (-29.98\,T_L + 150 \times 1.243\,R_L - 6.176\,S_L)\,0.4444 + 150\,(-1.243\,T_L + 150 \times 0.06635\,R_L - 0.2041\,S_L)\,0.8958\Big]\,\sin\frac{\pi x}{l} \tag{11b}$$

Substituting in equations (11a) and (11b) the values of T_L, R_L, and S_L as expressed by equations (10) gives:

$$\frac{T_x}{t} = \frac{1}{t}\,(85{,}700 - 94.78\,V_b + 6.328\,S_b)\,\sin\frac{\pi x}{l} \tag{12a}$$

$$\Delta_V = -\frac{l}{Et}\,(-759{,}000 + 1352\,V_b - 30.17\,S_b)\,\sin\frac{\pi x}{l} \tag{12b}$$

Equations (12a) and (12b) express longitudinal stress and vertical displacement of the shell's edge in terms of internal forces acting on the beam. Numerical values of these unknown forces are determined by developing similar expressions for the beam based on its elastic behavior.

To maintain a constant relationship between T_L and V_b and between S_L and S_b over the entire length of shell, vertical loading V_b and shearing force S_b must vary respectively as $\sin\frac{\pi x}{l}$ and $\cos\frac{\pi x}{l}$. Effects of vertical and shear loads having these variations are obtained by the ordinary flexural theory for homogeneous beams. This theory is considered adequate because of the large length-to-depth ratio.

Expressions for moment and vertical displacement produced by a vertical sine load are given by equations (3) and (5). A rectangular homogeneous beam carrying this type of load is subjected to flexural action only and its fiber stresses are symmetrical about the centroidal axis. In contrast, a similar beam carrying only a shear load applied along one surface is subjected to both direct and bending stresses and extreme fiber stresses are not of equal magnitude. Axial thrust at any section is equal to the summation of shear from that section to the end of the beam, moment is equal to this thrust times its eccentricity about the centroidal axis, and vertical displacement is determined by conventional means from this induced moment.

In spite of the fact that vertical and shear loads are dissimilar in direction and distribution, fiber stresses and displacements resulting from each have the same longitudinal variation expressed in terms of $\sin\frac{\pi x}{l}$. Coefficients for fiber stress and displacement in a beam due to these loads are taken from ASCE Manual No. 31, page 59, equations (9f) and (10c).

Extreme fiber stress at the top of the beam is:

$$f = -\frac{l}{bh}\Big[0.60793 \times \frac{l}{h}(V_b + 286) + 1.2732\,S_b\Big]\,\sin\frac{\pi x}{l} \tag{13}$$

in which the sign convention for fiber stress conforms to that used in shell analysis; i.e., positive indicates tension. Positive directions of loads are as shown in Fig. 16. In equation (13), the value 286 accounts for the dead weight of the beam and is obtained by multiplying the actual weight of the beam, 225 lb. per ft., by $\frac{4}{\pi}$.

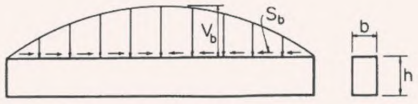


FIG. 16

From equations (9d) and (10e) of ASCE Manual No. 31, vertical displacement of the beam is:

$$\Delta_V = \frac{l^3}{bh^2E}\Big[0.12319\,\frac{l}{h}\,(V_b + 286) + 0.19351\,S_b\Big]\,\sin\frac{\pi x}{l} \tag{14}$$

Equating stresses and deflections given by equations (12) to those of equations (13) and (14) and multiplying by t and $\frac{Et}{l}$ respectively gives:

$$+85{,}700 - 94.78\,V_b + 6.328\,S_b = -\frac{lt}{hb}\Big[0.60793\,\frac{l}{h}\,(V_b + 286) + 1.2732\,S_b\Big] \tag{15a}$$

$$+759{,}000 - 1352\,V_b + 30.17\,S_b = \frac{l^2t}{h^2b}\Big[0.12319\,\frac{l}{h}\,(V_b + 286) + 0.19351\,S_b\Big] \tag{15b}$$

Substituting values of:

$$\frac{l}{h} \times \frac{t}{b} = \frac{50}{2} \times \frac{4}{9} = 11.11$$

$$\Big(\frac{l}{h}\Big)^2 \times \frac{t}{b} = 11.11 \times \frac{50}{2} = 277.7$$

and

$$\Big(\frac{l}{h}\Big)^3 \times \frac{t}{b} = 277.7 \times 25 = 6944$$

in equations (15) and simplifying gives:

$$74.04\,V_b + 20.47\,S_b = -134{,}000$$
$$-2207\,V_b - 23.57\,S_b = -514{,}000$$

from which a simultaneous solution results in:

$$V_b = +315 \text{ lb. per ft.}$$
$$S_b = -7680 \text{ lb. per ft.}$$

Substitution of these values in equations (10) gives line loads which reunite common edges of barrel and beam:

$$T_L = -0.4444 \times 315 = -140 \text{ lb. per ft.}$$
$$R_L = +0.8958 \times 315 = +280 \text{ lb. per ft.}$$
$$S_L = -7680 \text{ lb. per ft.}$$

Total line loads must include T_{LM} and S_{LM}, the reactions to membrane forces created by surface loads. Final line loads then are:

$$T_L = -140 + 3940 = +3800 \text{ lb. per ft.}$$
$$R_L = +280 \text{ lb. per ft.}$$
$$S_L = -7680 + 1620 = -6060 \text{ lb. per ft.}$$

Effects of these three line loads on internal forces T_x, S, T_ϕ and M_ϕ are determined from formulas given at the

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

TABLE II—INTERNAL FORCES IN AN EXTERIOR BARREL OF A SIMPLY SUPPORTED MULTIPLE BARREL ROOF DUE TO LINE LOADS AT OUTSIDE EDGE

$\frac{rt}{l^2} = 0.006$ $\phi_k = 26° 23'$ $\frac{r}{l} = 0.90$

$\frac{s}{\sqrt{r\,t\,l^2}}$	3.2	1.6	0.8	0.4	0.2	0.1	0		3.2	1.6	0.8	0.4	0.2	0.1	0
s	44.5	22.3	11.1	5.6	2.8	1.4	0		44.5	22.3	11.1	5.6	2.8	1.4	0
ϕ	56° 40′	28° 20′	14° 10′	7° 5′	3° 30′	1° 45′	0°		56° 40′	28° 20′	14° 10′	7° 5′	3° 30′	1° 45′	0°
$\phi_k - \phi$		−2°	12°	19°	23°	25°	26° 23′			−2°	12°	19°	23°	25°	26° 23′
Load	Coefficients							Multipliers	Forces						
T_ϕ at $x = \frac{l}{2}$ (Lb. per ft.)															
④ T_L	+0.047	−0.230	−0.344	+0.347	+0.778	+ 0.936	+ 1.000	3,800	+ 180	− 870	− 1,310	+ 1,320	+ 2,960	+ 3,560	+ 3,800
⑤ R_L	−0.00034	+0.00239	+0.02822	+0.01810	+0.00677	+ 0.00205	0	42,000	− 10	+ 100	+ 1,190	+ 760	+ 280	+ 90	0
⑥ S_L	+0.0122	−0.0522	−0.0089	+0.0890	+0.0955	+ 0.0655	0	−6,060	− 70	+ 320	+ 50	− 540	− 580	− 400	0
⑧ Σ									+ 100	− 450	− 70	+ 1,540	+ 2,660	+ 3,250	+ 3,800
S at $x = 0$ (Lb. per ft.)															
④ T_L	−0.209	+0.827	−1.161	−2.556	−2.158	− 1.363	0	3,800	− 790	+ 3,140	− 4,410	− 9,710	− 8,200	− 5,180	0
⑤ R_L	+0.00877	−0.03918	−0.0048	+0.05977	+0.06253	+ 0.04246	0	42,000	+ 370	− 1,650	− 200	+ 2,510	+ 2,630	+ 1,780	0
⑥ S_L	−0.029	+0.094	−0.263	−0.197	+0.182	+ 0.523	+ 1.000	−6,060	+ 180	− 570	+ 1,590	+ 1,190	− 1,100	− 3,170	− 6,060
⑧ Σ									− 240	+ 920	− 3,020	− 6,010	− 6,670	− 6,570	− 6,060
T_x at $x = \frac{l}{2}$ (Lb. per ft.)															
④ T_L	−0.153	−0.103	−5.182	−1.030	+6.371	+12.071	+19.407	3,800	− 580	− 390	−19,700	− 3,910	+24,200	+45,900	+ 73,700
⑤ R_L	+0.0179	−0.0591	+0.1807	+0.1227	−0.1270	− 0.3444	− 0.6412	42,000	+ 750	− 2,480	+ 7,590	+ 5,150	− 5,330	−14,500	− 26,900
⑥ S_L	+0.017	−0.202	−0.481	+1.253	+3.240	+ 4.628	+ 6.328	−6,060	− 110	+ 1,220	+ 2,910	− 7,590	−19,600	−28,000	− 38,300
⑧ Σ									+ 60	− 1,650	− 9,200	− 6,350	− 730	+ 3,400	+ 8,500
M_ϕ at $x = \frac{l}{2}$ (Ft. lb. per ft.)															
④ T_L	+0.1550	−0.9042	−0.8634	−0.0900	+0.1355	+ 0.1232	0	1,260	+ 200	− 1,140	− 1,090	− 110	+ 170	+ 160	0
⑤ R_L	−0.00493	+0.03457	+0.07956	+0.05372	+0.02870	+ 0.01463	0	14,000	− 70	+ 480	+ 1,110	+ 750	+ 400	+ 200	0
⑥ S_L	+0.0265	−0.1554	−0.0585	+0.0380	+0.0382	+ 0.0224	0	−2,020	− 50	+ 310	+ 120	− 80	− 80	− 50	0
⑧ Σ									+ 80	− 350	+ 140	+ 560	+ 490	+ 310	0

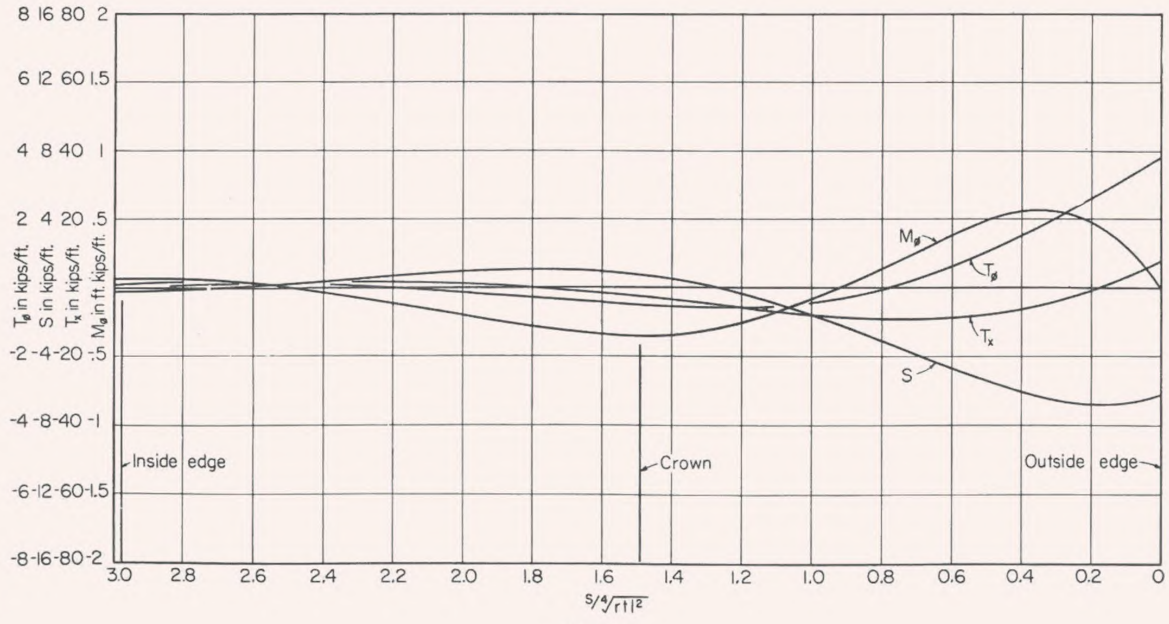


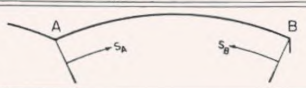
FIG. 17

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

TABLE III—Internal Forces in an Exterior Barrel of a Simply Supported Multiple Barrel Roof



$\frac{s_B}{\sqrt[4]{r\,t\,l^2}}$	2.98	2.88	2.78	2.58	2.18	1.78	1.49 Crown	1.2	0.8	0.4	0.2	0.1	0
$\frac{s_A}{\sqrt[4]{r\,t\,l^2}}$	0	0.1	0.2	0.4	0.8	1.2	1.49	1.78	2.18	2.58	2.78	2.88	2.98
T_ϕ at $x = \frac{l}{2}$ (Lb. per ft.)													
③ Membrane forces	− 3,940	− 4,000	− 4,090	−4,240	−4,430	− 4,500	− 4,580	− 4,500	− 4,430	−4,240	−4,090	−4,000	−3,940
⑧ Line loads at B	+ 140	+ 150	+ 160	+ 150	0	− 300	− 520	− 610	− 70	+1,540	+2,660	+3,250	+3,800
⑨ Line loads at A	+ 5,760	+ 5,750	+ 5,440	+4,340	+1,580	− 310	− 880	− 750	− 360	+ 50	+ 150	+ 190	+ 200
⑩=③+⑧+⑨	+ 1,960	+ 1,900	+ 1,510	+ 250	−2,850	− 5,110	− 5,980	− 5,860	− 4,860	−2,650	−1,280	− 560	+ 60
S at $x = 0$ (Lb. per ft.)													
③ Membrane forces	+ 1,620	+ 1,550	+ 1,440	+1,220	+ 790	+ 460	0	− 460	− 790	−1,220	−1,440	−1,550	−1,620
⑧ Line loads at B	− 200	− 150	− 50	+ 100	+ 700	+ 1,050	+ 750	− 310	− 3,020	−6,010	−6,670	−6,570	−6,060
⑨ Line loads at A	− 1,620	+ 1,930	+ 4,550	+7,520	+7,210	+ 3,400	+ 900	− 750	− 1,400	− 800	− 420	− 250	0
⑩=③+⑧+⑨	− 200	+ 3,330	+ 5,940	+8,840	+8,700	+ 4,910	+ 1,650	− 1,520	− 5,210	−8,030	−8,530	−8,370	−7,680
T_x at $x = \frac{l}{2}$ (Lb. per ft.)													
③ Membrane forces	− 1,020	− 1,080	− 1,110	−1,190	−1,290	− 1,320	− 1,350	− 1,320	− 1,290	−1,190	−1,110	−1,080	−1,020
⑧ Line loads at B	+ 300	+ 800	+ 900	+1,200	+1,500	− 300	− 2,500	− 5,770	− 9,200	−6,350	− 730	+3,400	+8,500
⑨ Line loads at A	+46,700	+35,220	+25,360	+9,440	−8,340	−11,400	− 9,000	− 4,800	+ 200	+1,900	+2,000	+2,000	+1,500
⑩=③+⑧+⑨	+45,980	+34,940	+25,150	+9,450	−8,130	−13,020	−12,850	−11,890	−10,290	−5,640	+ 160	+4,320	+8,980
M_ϕ at $x = \frac{l}{2}$ (Ft. lb. per ft.)													
⑧ Line loads at B	+ 70	+ 70	+ 60	+ 30	− 120	− 290	− 360	− 270	+ 140	+ 560	+ 490	+ 310	0
⑨ Line loads at A	− 2,330	− 1,190	− 320	+ 730	+ 940	+ 290	− 240	− 480	− 390	− 140	− 35	+ 15	+ 50
⑩=⑧+⑨	− 2,260	− 1,120	− 260	+ 760	+ 820	0	− 600	− 750	− 250	+ 420	+ 455	+ 325	+ 50

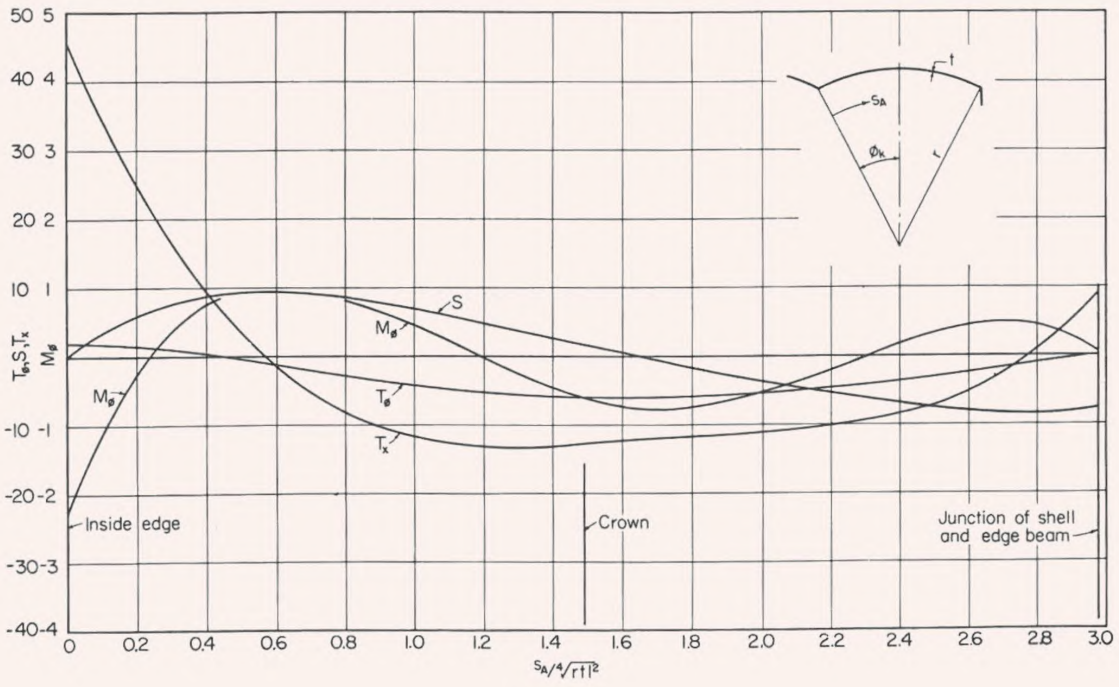


FIG. 18

PAGE 18

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

top of Table 3A. The combination of all terms in one formula with the exception of the coefficient indicated by column number constitutes the multiplier. For example, the multipliers of the tangential and shear edge loads for forces T_x, S and T_ϕ are merely T_L and S_L while the multiplier of the radial edge load for these forces is $R_L \times \frac{l}{t}$ $= +280 \times 150 = 42{,}000$ lb. per ft. Multipliers for tangential, radial and shear edge loads for the transverse moment M_ϕ are respectively:

$$T_L \times t = +3800 \times \tfrac{1}{3} = +1260 \text{ ft. lb. per ft.}$$
$$R_L \times l = +280 \times 50 = +14{,}000 \text{ ft. lb. per ft.}$$
$$S_L \times t = -6060 \times \tfrac{1}{3} = -2020 \text{ ft. lb. per ft.}$$

Internal forces produced by line loads acting at the exterior edge are obtained as the products of coefficients and multipliers. These operations are given in rows ④, ⑤ and ⑥ of Table II. Since the curved shell portions of interior and exterior barrels are identical, coefficients in Table II are the same as those listed in Table I. Effects of the various line loads are combined in rows ⑧ of Table II and are plotted in Fig. 17.

Because restraint differs at the two longitudinal edges of the exterior barrel, internal forces are not symmetrical about the crown. Consequently, values of $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$ in Table III are extended from one edge to the other with subscripts A and B designating the edge from which s is measured. The exterior edge is considered the near edge.

As in Table I, rows ③ in Table III represent membrane forces, and values given are taken directly from rows ③ of Table I or computed from Table 1B. Values in rows ⑧, Table III, from $\frac{s_B}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 0$ to 0.8 are copied from rows ⑧ of Table II while values from 1.2 to 2.98 are scaled from curves in Fig. 17. Values in rows ⑨ represent effects of line loads at the interior edge and are obtained from rows ⑧ and ⑨ of Table I with the exception of values at $\frac{s_A}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 1.2$, 1.49 and 1.78 which are scaled from Fig. 10.

Algebraic sums of these individual effects are tabulated in rows ⑩ of Table III and are shown graphically in Fig. 18. Inspection of the curves indicates that the neutral axis is not horizontal but sloped and that shear is not zero at the crown.

Statical Check of Forces in Exterior Barrel

The accuracy of numerical calculations for the exterior barrel is checked in a manner similar to that used for the interior barrel with the provision that internal forces acting in the edge beam must be added to those in the shell. Internal stress at the top, midspan fibers of the edge beam is by equation (13):

$$f \text{ (top)} = -\frac{50}{0.75 \times 2}\left[0.60793 \times \frac{50}{2} \times (315+286) + 1.2732 \times (-7680)\right] = -304{,}500 + 325{,}900 = +21{,}400 \text{ psf.} \quad (16)$$

Equation (16) includes effects of vertical and shear loads. Top and bottom fiber stresses due to the vertical load are equal and opposite. Inspection of formulas (10c) and (10d) of ASCE Manual No. 31 indicates that bottom fiber stress resulting from a shear load acting at the top of the beam is one-half that at the top. Therefore, midspan bottom fiber stress in the edge beam is expressed simply as:

$$f \text{ (bottom)} = +304{,}500 - \frac{325{,}900}{2} = 141{,}500 \text{ psf} \quad (17)$$

The force per foot at top and bottom of beam is:

T_x (top) $= 21{,}400 \times 0.75 = 16{,}000$ lb. per ft.
T_x (bottom) $= 141{,}500 \times 0.75 = 106{,}000$ lb. per ft.

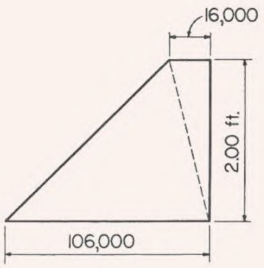


FIG. 19

The assumed straight line variation results in the T_x-force diagram of Fig. 19. Total horizontal force in the beam is $(106{,}000 + 16{,}000)\ 0.5 \times 2 = 122{,}000$ lb. and the moment of this force about the top of the beam is:

$$0.5 \times 2\left[16{,}000 \times \tfrac{2}{3} + 106{,}000 \times \tfrac{4}{3}\right] = 152{,}000 \text{ ft. lb.}$$

The complete summation of horizontal forces including those in the edge beam is:

$$\Sigma H = \frac{5.18}{3}[+45{,}980 + (4)(+11{,}200) + (2)(-6{,}500) + (4)(-12{,}600) + (2)(-12{,}850) + (4)(-11{,}550) + (2)(-10{,}000) + (4)(-5000) + 8980] + 122{,}000$$

from which $\Sigma H = -302{,}000 + 294{,}300 = -7{,}700$ lb.

In theory this summation should equal zero. Here the difference between positive and negative values is less than 2 per cent of their arithmetical sum.

In computing internal moment due to T_x, forces taken at points symmetrical about the crown have equal moment arms and therefore are grouped in parentheses. The resulting expression is:

$$\Sigma M = \frac{5.18}{3}[0 + 4\ (11{,}200-5{,}000)\ 2.02 + 2(-6{,}500-10{,}000) \times 3.51 + 4\ (-12{,}600-11{,}550)\ 4.38 + 2(-12{,}850)\ 4.69 + 0]\ -152{,}000$$

from which $\Sigma M = -1{,}204{,}000$ ft. lb.

External moment equals the sum of that already computed for the interior barrel (page 15) and the moment resulting from the weight of the edge beam. Though the

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

edge beam is of uniform cross-section throughout its length, its weight is expressed as a sinusoidal load for reasons discussed on page 8. This is done by multiplying the weight per foot by $\frac{4}{\pi}$ giving 286 lb. per ft. Midspan moment developed by this load is given by equation (3) as:

$$M = -\frac{pl^2}{\pi^2} = -286 \times \frac{50^2}{\pi^2} = -72{,}500 \text{ ft. lb.}$$

Total external moment then equals:

$$\Sigma M = -1{,}055{,}000 - 72{,}500 = -1{,}127{,}500 \text{ ft. lb.}$$

The difference between computed internal and external moments is 1,204,000 − 1,127,500 = 76,500. Internal moment is approximately 7 per cent greater than the external.

As previously explained, a percentage difference of this magnitude is not excessive but this discrepancy could be reduced by correcting for the residual T_ϕ edge forces of +140 and +200 lb. per ft. indicated in Table III. Line loads T_L of −140 and −200 lb. per ft. applied at the respective edges would decrease the internal moment. The effect of this correction can be estimated by computing the external moment which the residual forces produce. Edge forces of +140 and +200 lb. per ft. represent an additional downward load of (140+200) 0.4444 = 150 lb. per ft. assumed acting on the shell. The moment created by this load is equal to $\frac{150}{286} \times 72{,}500 = 38{,}000$ ft. lb. If this correction is applied to the internal moment, the corrected value would be −1,204,000 + 38,000 = −1,166,000 ft. lb., which exceeds the external moment by only 3.5 per cent.

A comparison of internal and external shear at the support must include forces within the edge beam which is subjected to its own dead weight and to forces V_b and S_b shown in Fig. 16. It should be noted that although the horizontal shearing force S_b produces vertical shearing stresses at any cross-section, a summation of these stresses equals zero. This is evident from the fact that S_b alone does not create external reactions. Hence, shear in the edge beam at the support is determined from equation (2) as:

$$V = -p\frac{l}{\pi}$$

where p is the sum of V_b and the dead weight of the beam or 315 + 286 = 601 lb. per ft. From this

$$V = -601 \times \frac{50}{\pi} = -9570 \text{ lb.}$$

The complete expression for internal shear is similar to that given on page 16 for the interior barrel. For values of ϕ greater than ϕ_k, sin $(\phi_k - \phi)$ is negative. Shear ordinates which are multiplied by common values of sin $(\phi_k - \phi)$ are combined in parentheses. The expression is:

$$\Sigma V = \frac{5.18}{3}[(-7680 + 200)\ 0.4444 + 4(-8150 - 8550)\ 0.3393 + 2(-5600 - 9000)\ 0.2278 + 4(-2500 - 5700)\ 0.1161] - 9570 = 72{,}600 \text{ lb.}$$

Reaction at the support is equal to the sum of that previously determined for the interior barrel and that due to the weight of the beam.

$$\Sigma V \text{ (external)} = -66{,}300 - 286 \times \frac{50}{\pi} = -70{,}850 \text{ lb.}$$

The percentage difference of 2.5 per cent can be reduced if the 150 lb. per ft. vertical load due to uncompensated T_ϕ forces is taken into account.

Modification of Internal Forces for Continuity

In preceding discussions force distribution has been obtained in terms of a simply supported barrel although the roof structure in Fig. 4 consists of two equal spans continuous over a center support. This force distribution now must be modified for continuity. As discussed in ASCE Manual No. 31, the effect of continuity on shells and conventional beams is similar since it affects only longitudinal variation of stress. Manual No. 31 points out that while forces in the continuous structure can be obtained by a rigorous satisfaction of boundary conditions, force distribution also may be determined by proportioning on the basis of the ratio of moments in a continuous beam to moment in a simply supported span. The second procedure is used in this design example. In order to evaluate the change in force distribution, the fixed end moment in a beam subject to sinusoidal loading is determined first.

Slopes of tangents at the ends of a simply supported beam carrying a sinusoidal load are given by equation (4) as:

$$\theta = \frac{pl^3}{EI\pi^3}$$

To produce a fixed end condition, end moments must be applied which rotate both ends of the beam through this angle. It is known that an end moment of $\frac{4EI}{l}$ will rotate the near end of a beam through a unit angle when the far end is fixed. Therefore, applying a moment of $\frac{4EI}{l} \times \frac{pl^3}{EI\pi^3}$ at each end and including the carryover moment, final fixed end moment is equal to:

$$M = \frac{pl^3}{EI\pi^3} \times \frac{4EI}{l}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{2pl^2}{\pi^3} \qquad (18)$$

If one end of the beam is hinged, moment at the fixed end by moment distribution is:

$$M = \frac{2pl^2}{\pi^3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3pl^2}{\pi^3} \qquad (19)$$

Final moment at any point in a beam having one end fixed and the other hinged is found by adding algebraically the simple span moment given by equation (3) and the effect of the end moment indicated by equation (19). These two moments are shown in Fig. 20. After superposition the resulting moment is:

$$M = \frac{3pl^2}{\pi^3}\left(1 - \frac{x}{l}\right) - \frac{pl^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l}$$

Expressed in terms of the midspan moment $-\frac{pl^2}{\pi^2}$ of the

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese, potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

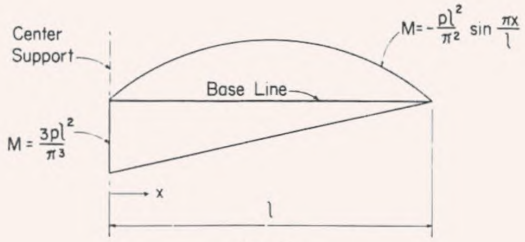


FIG. 20

simply supported span this becomes:

$$M = -\frac{pl^2}{\pi^2}\left[-\frac{3}{\pi}\left(1-\frac{x}{l}\right)+\sin\frac{\pi x}{l}\right]$$

Conditions of support for this beam are similar to those in the design example where, due to symmetry of structure and loading, a fixed end exists at the center cross frame with hinged supports at the far ends. A beam bearing such similarity to a shell structure may be used to proportion internal forces for continuity. For example, in a continuous shell of two equal spans l, longitudinal T_x-forces at any section are approximately equal to the midspan T_x-forces in a simply supported shell of span l times the ratio of moment at the same section in a continuous beam of two equal spans to the midspan moment of one simply supported span of the beam. From this, longitudinal force at any section in the continuous shell roof of this example is:

$$T_x \text{ (continuous)} = T_x^*\left[-\frac{3}{\pi}\left(1-\frac{x}{l}\right)+\sin\frac{\pi x}{l}\right] \tag{20}$$

Shear determined for the simply supported single span shell also is modified by the condition of continuity. Shear due to end restraint is equal to the fixed-end moment divided by span length while that due to the simply supported sinusoidal load is given by equation (2). The complete expression for shear is the sum of these effects or:

$$S = -\frac{3pl}{\pi^3} - \frac{pl}{\pi}\cos\frac{\pi x}{l} \tag{21}$$

Expressed in terms of $-\frac{pl}{\pi}$, the shear at the support of the simple span, shear in the continuous structure is found from:

$$S = -\frac{pl}{\pi}\left[\frac{3}{\pi^2}+\cos\frac{\pi x}{l}\right] \tag{21a}$$

Modification of transverse moment M_ϕ for continuity is given by formula (236b) of ASCE Manual No. 31 as follows:

$$M_\phi \text{ (continuous)} = M_\phi^*\left\{\sin\frac{\pi x}{l} - 3\pi\left[\frac{1}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2+\frac{1}{3}\frac{x}{l}\right]\right\} \tag{22}$$

The effect of end restraint on T_ϕ-forces calculated previously for the simply supported shell is negligible.

*The superscript (*) indicates the force at the centerline of the simply supported shell span.

TABLE IV—Internal Forces in the Interior Barrel of the Continuous Shell Roof

T_ϕ in lb. per ft.

s (ft.)	$\frac{s}{\sqrt{rt}}$	Midspan forces in simple span	$\frac{x}{l}$: 0	0.25	0.60	0.75	1.0
			Multiplier = $\sin\frac{\pi x}{l}$: 0	0.707	0.953	0.707	0
			Force = Col. (3) × Multiplier				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Crown	Crown	−6,300	0	−4,450	−6,000	−4,450	0
16.8	1.2	−5,600	0	−3,960	−5,340	−3,960	0
11.1	0.8	−3,210	0	−2,270	−3,060	−2,270	0
5.6	0.4	+ 150	0	+ 110	+ 140	+ 110	0
2.8	0.2	+1,500	0	+1,060	+1,430	+1,060	0
1.4	0.1	+1,940	0	+1,370	+1,850	+1,370	0
0	0	+2,020	0	+1,430	+1,930	+1,430	0

S in lb. per ft.

s (ft.)	$\frac{s}{\sqrt{rt}}$	Forces at supports in simple span	$\frac{x}{l}$: 0	0.25	0.60	0.75	1.0
			Multiplier = $\frac{3}{\pi^2}+\cos\frac{\pi x}{l}$: +1.304	+1.011	0	−0.403	−0.696
			Force = Col. (3) × Multiplier				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Crown	Crown	0	0	0	0	0	0
16.8	1.2	−4,600	− 6,000	−4,700	0	+1,900	+3,200
11.1	0.8	−9,400	−12,300	−9,500	0	+3,800	+6,600
5.6	0.4	−9,540	−12,500	−9,700	0	+3,900	+6,700
2.8	0.2	−6,410	− 8,400	−6,500	0	+2,600	+4,500
1.4	0.1	−3,730	− 4,900	−3,800	0	+1,500	+2,600
0	0	0	0	0	0	0	0

T_x in lb. per ft.

s (ft.)	$\frac{s}{\sqrt{rt}}$	Midspan forces in simple span	$\frac{x}{l}$: 0	0.25	0.60	0.75	1.0
			Multiplier = $-\frac{3}{\pi}\left(1-\frac{x}{l}\right)+\sin\frac{\pi x}{l}$: −0.955	−0.009	+0.571	+0.468	0
			Force = Col. (3) × Multiplier				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Crown	Crown	−19,400	+18,500	+170	−11,100	− 9,100	0
16.8	1.2	−17,500	+16,700	+160	−10,000	− 8,200	0
11.1	0.8	− 9,430	+ 9,000	+ 80	− 5,400	− 4,400	0
5.6	0.4	+10,150	− 9,700	− 90	+ 5,800	+ 4,800	0
2.8	0.2	+26,250	−25,100	−240	+15,000	+12,300	0
1.4	0.1	+36,140	−34,500	−330	+20,600	+16,900	0
0	0	+47,180	−45,000	−420	+26,900	+22,100	0

M_ϕ in ft. lb. per ft.

s (ft.)	$\frac{s}{\sqrt{rt}}$	Midspan forces in simple span	$\frac{x}{l}$: 0	0.25	0.60	0.75	1.0
			Multiplier = $\sin\frac{\pi x}{l}-3\pi\left[\frac{1}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2+\frac{1}{3}\frac{x}{l}\right]$: 0	0.192	0.425	0.339	0
			Force = Col. (3) × Multiplier				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Crown	Crown	− 480	0	− 90	−200	−160	0
16.8	1.2	− 190	0	− 40	− 80	− 60	0
11.1	0.8	+ 550	0	+110	+230	+190	0
5.6	0.4	+ 590	0	+110	+250	+200	0
2.8	0.2	− 355	0	− 70	−150	−120	0
1.4	0.1	−1,175	0	−230	−500	−400	0
0	0	−2,280	0	−440	−970	−770	0

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Table IV deals with evaluation of internal forces in the continuous interior barrel, these forces being symmetrical about the crown. Forces in the exterior barrel would be computed in a similar manner but are not symmetrical about the crown.

Since the longitudinal T_x-force is of considerable importance in determining reinforcement, it is desirable to compute maximum values. For this purpose equation (20) expressing the variation of T_x is differentiated with respect to x and set equal to zero to determine the location of maximum force. The first derivative of equation (20) is:

$$\frac{dT_x}{d_x} = T_x{}^* \left[\frac{3}{\pi} + \pi \cos \frac{\pi x}{l}\right] = 0$$

from which:

$$\cos \frac{\pi x}{l} = -\frac{3}{\pi^2} = -0.3039$$

and:

$$\frac{\pi x}{l} = 107° 42' \text{ or } 1.88 \text{ radians}$$

The negative sign indicates a second quadrant angle. Solving for $\frac{x}{l}$, the location of maximum T_x-force, gives:

$$\frac{x}{l} = \frac{1.88}{\pi} = 0.60$$

The four internal forces are computed at five sections: at supports where $\frac{x}{l} = 0$ and 1.0, and at $\frac{x}{l}$ equal to 0.25, 0.60 and 0.75. At each section forces are determined for the seven points indicated in columns ① and ② of Table IV.

Forces occurring in the simply supported interior barrel are tabulated in columns ③ of Table IV. Values given for T_ϕ, T_x and M_ϕ occur at midspan while those for shear S are at the support. For values of $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$ from 0 through 0.8, these forces are taken directly from rows ⑩ of Table I while at $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$ equal to 1.2 and at the crown forces are scaled from Fig. 12.

Multipliers are listed at the top of each table for various values of $\frac{x}{l}$. For forces M_ϕ, T_x and S these multipliers include corrections for continuity and are equal to the bracketed terms of equations (22), (20) and (21a), respectively. The multiplier for T_ϕ is equal merely to sin $\frac{\pi x}{l}$.

Values in columns ④ through ⑧ are final forces obtained by multiplying forces in columns ③ by appropriate multipliers. For example, force T_x at $\frac{x}{l}$ equal to 0.60 and $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 0.4$ is found by multiplying +10,150 found in column ③ by multiplier +0.571 to give +5,800 lb. per ft. It should be noted that since T_x-forces are maximum at $\frac{x}{l} = 0.6$, the moment they produce at this section is also maximum and, as with an ordinary beam, shear is zero.

*The superscript (*) indicates the force at the centerline of the simply supported shell span.

The horizontal neutral axis falls between values of $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$ equal to 0.4 and 0.8 and is approximately 3 ft. above the lower edge of the shell.

Shell Reinforcement

Design of reinforcement for the interior barrel is based on final forces summarized in Table IV. In general, shell reinforcement is provided for three force conditions: tensile T_x-forces are resisted by horizontal steel; moment M_ϕ combined with the direct force T_ϕ is resisted by transverse reinforcement while shearing forces S are resisted primarily by diagonal reinforcement.

A major question arising in the design of shells is whether the stress assigned to the steel shall vary according to n times the computed concrete stress or whether an arbitrarily designated value of f_s such as 20,000 psi can be assumed disregarding concrete stress. Shell analysis has been based on the assumption of homogeneity of material. In other words, strains in the structure are proportional to induced concrete stresses. To be consistent, steel stresses should be based on steel strains that are equal to concrete strains. This condition requires the use of a constant percentage of steel throughout the tensile zone.

The same problem exists in detailing indeterminate structures such as rigid frames and arches. In this case it is customary to analyze the structure on the basis of the constant elastic property of the members and then determine required steel area on the assumption that reinforcement is stressed to an allowable design value. This same practice will be followed in shell design.

There are several methods of proportioning horizontal or longitudinal reinforcing steel. One method is to divide the external moment by the product of the allowable steel stress and the distance between centroids of reinforcement and compressive T_x-forces. A minimum amount of reinforcement is provided by this method since the bars generally are concentrated as far from the neutral axis as possible.

According to the method proposed in ASCE Manual No. 31, longitudinal steel stresses vary linearly from a maximum at the edge of the shell to zero at the neutral axis. Tensile reinforcement is distributed over the entire tension zone.

A third procedure is suggested in which the required steel area at any point is given by T_x at that point divided by a constant allowable stress. For example, from Table IV at $s = 0$ and $\frac{x}{l} = 0.6$ with $T_x = +26{,}900$ lb. per ft.,

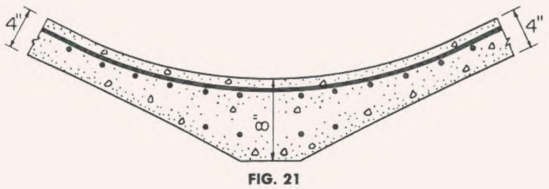


FIG. 21

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

required reinforcement is:

$$A_s = \frac{26{,}900}{20{,}000} = 1.4 \text{ sq. in. per ft.}$$

Five #5 bars providing an area of 1.55 sq. in. are placed as shown in Fig. 21 within the first foot at either side of the valley formed by the junction of adjacent barrels. At $s = 1.4$ and $\frac{x}{l} = 0.6$, a required steel area of $\frac{20{,}600}{20{,}000} =$ 1.03 sq. in. per ft. is supplied by #5 bars spaced at 3½ in., this spacing being continued to $s = 2.8$ ft. The procedure is repeated up to the neutral axis. In the compression zone reinforcement is theoretically unnecessary but minimum reinforcement equal to approximately 0.4 per cent is provided either by welded wire fabric or small diameter bars spaced at about 1-ft. intervals.

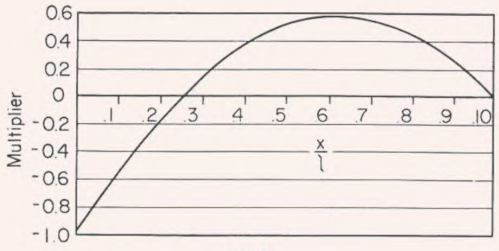


FIG. 22

Cut-off points for longitudinal bars are determined by means of Fig. 22, which shows a curve representing the multiplier in Table IV: $-\frac{3}{\pi}\left(1-\frac{x}{l}\right) + \sin\frac{\pi x}{l}$. For illustration note in Fig. 22 that multipliers are -0.955 at $\frac{x}{l} = 0$ and $+0.571$ at $\frac{x}{l} = 0.6$. The use of this curve is illustrated by determining cut-off points for one of the five longitudinal #5 bars provided at $s = 0$ and $\frac{x}{l} = 0.6$. Four #5 bars resist a tensile force of $4 \times 0.31 \times 20{,}000 = 24{,}800$ lb. per ft. To obtain a force of 24,800 lb. per ft., the midspan T_x-force of 47,180 lb. per ft. in the simply supported shell must be multiplied by the factor:

$$\frac{24{,}800}{47{,}180} = 0.526$$

In Fig. 22 the multiplier 0.526 occurs at $\frac{x}{l}$ equal to 0.52 and 0.67, these being the points at which four #5 bars are sufficient. This illustration applies to all horizontal reinforcement.

Transverse reinforcement is computed for moment M_ϕ and direct force T_ϕ. The procedure is similar to that used for ordinary reinforced concrete beams subjected to combined stresses. In this example design is based on a rectangular section 12 in. wide and 4 in. deep except at the junction of adjacent barrels where depth is increased to provide a smooth transition from one barrel to the other.

Consider selecting transverse reinforcement at $s = 0$ and $\frac{x}{l} = 0.6$, where $M_\phi = -0.97$ ft. kips per ft. producing tension at the top surface and $T_\phi = 1.93$ kips per ft. in tension. A total depth of 8 in. is scaled from Fig. 21 and effective depth is taken as 7 in. Steel area is 0.15 sq. in. per ft. as determined according to Example 8 of the *Reinforced Concrete Design Handbook*.* For an allowable concrete stress of 1350 psi., compression reinforcement is not required. As shown in Fig. 21, transverse reinforcement at this location is placed near the top of the shell and is continuous from one barrel to the next. Transverse reinforcement required throughout the interior barrel is nominal in amount and may be evenly spaced as shown in Fig. 23.

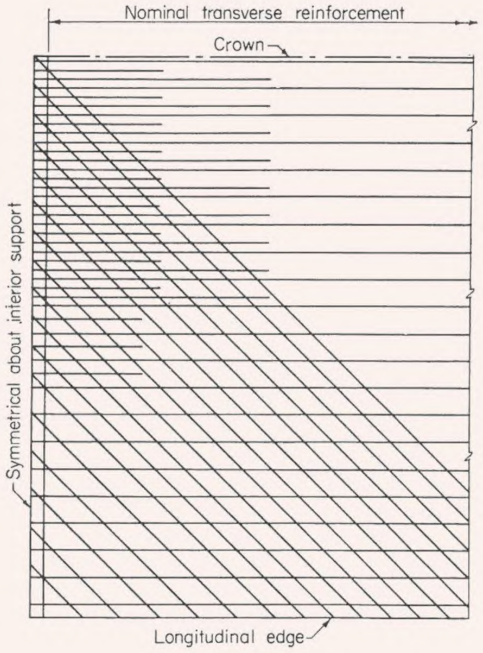


FIG. 23

Diagonal reinforcement shown in Fig. 23 may be designed by several methods. Reinforcement may be provided on the basis of principal stresses computed at various points. Such an approach implies the placement of bars parallel to stress trajectories.

In this example diagonal reinforcement is designed as for conventional reinforced concrete beams and is provided to resist shear in excess of $0.3 f'_c$. For example, from Table IV at $s = 5.6$ and $\frac{x}{l} = 0.25$, $S = -9700$ lb. per ft.

*Published by the American Concrete Institute, Detroit, Mich.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

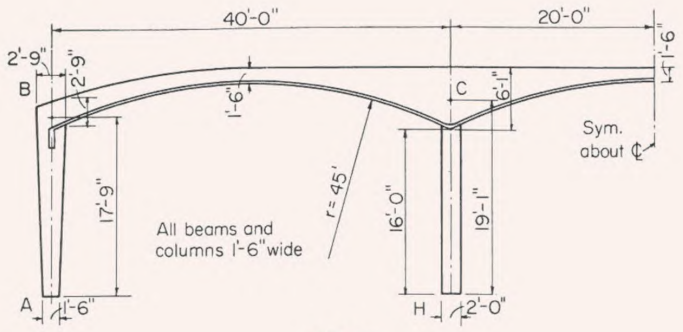


FIG. 24

Assuming 3000-lb. concrete, required diagonal steel is:

$$A_s = (9700 - 90 \times 4 \times 12) \div 20{,}000$$
$$= (9700 - 4300) \div 20{,}000 = 0.27 \text{ sq. in. per ft.}$$

Critical shear stress which determines spacing of diagonal bars does not necessarily occur at the supports and it may be desirable to compute shear at intermediate points.

Longitudinal and transverse reinforcement also may be used to resist diagonal tension if these bars are only lightly stressed by their primary loads. However, horizontal and vertical bars make an angle of 45° with the axis of diagonal tension and, as pointed out by formula (6d) of ASCE Manual No. 31, their effectiveness in the 45° direction is only one-half its normal value.

Shear is investigated at $s = 5.6$ and $\frac{x}{l} = 0.125$ to illustrate the distribution of diagonal tension over reinforcement extending in more than one direction. Since Table IV gives no values at $\frac{x}{l} = 0.125$, shear at this point must be computed. Substituting in the expression for the shear multiplier $\frac{3}{\pi^2} + \cos\frac{\pi x}{l}$ gives $+1.228$ which, when multiplied by -9540, the support shear in the simply supported barrel at $s = 5.6$, gives a total shear of $-11{,}700$ lb. per ft. This value then is reduced by 4300 lb. per ft., the previously determined allowable shear strength of the concrete, leaving 7400 lb. per ft. to be resisted by reinforcement. Required steel area is $\frac{7400}{20{,}000}$ or 0.37 sq. in. per ft.

Inspection of Table IV indicates that T_x-forces at $s = 5.6$ are compressive from the support to $\frac{x}{l} = 0.25$. Therefore, longitudinal steel at $\frac{x}{l} = 0.125$ carries no tensile stress and may be used to resist some diagonal tension. Effective area of these #5 bars spaced at 12 in. is reduced from 0.31 to 0.15 sq. in. per ft. because of the 45° displacement. Diagonal reinforcement is then supplied for 0.37 less 0.15 or 0.22 sq. in. per ft. Similar advantage can be taken of transverse steel when the stress produced by T_ϕ and M_ϕ is small.

Although not discussed here, design of reinforcement for the exterior barrel follows a procedure similar to that outlined for the interior barrel. The total tensile longitudinal force at midspan in the edge beam is found on page 21 to be 122,000 lb. To determine the companion force in the continuous structure at $\frac{x}{l} = 0.6$, this value is multiplied by the multiplier 0.571 in Table IV giving a final tensile force of 69,600 lb. The required steel area of 3.48 sq. in. should be located with its center of gravity at or below the center of gravity of the 122,000 lb. longitudinal force.

Frame Design

The analysis of any frame supporting a shell is similar to the analysis of a continuous bent supporting a conventional slab except that the shell induces a direct force in the frame. As explained in ASCE Manual No. 31, frames are designed for their own dead weight plus live and dead loads on the shell.

The 18-in. wide frame shown in Fig. 24 is selected to illustrate steps involved in the analysis of a frame. The choice of this shape with the shell at the bottom edge does not imply that this is the best or only solution. Under certain circumstances it may be desirable to have the shell at the top of the frame with the soffit straight. Also, economic considerations may favor the use of an arch following the curve of the shell.

The frame in Fig. 24 is the center frame of the roof unit shown in Fig. 4. It is symmetrical about the centerline of the interior bay and has a depth varying from 33 in. at the inner face of the exterior column to 18 in. at midspan. Depth at interior columns is 73 in. with the top surface of the frame horizontal between centerlines of exterior bays. Although depth at midspan may seem excessively shallow, it is shown subsequently that in this area the frame carries a large axial tensile force.

ASCE Manual No. 31 points out that the shell acts as a flange of the frame, the effective flange overhang at either side of a supporting rib in a shell roof continuous over its supports being $0.76\sqrt{rt}$. The overhang in this example is $0.76\sqrt{45 \times 0.33} = 2.94$ ft. Total overall flange width is $2 \times 2.94 + 1.50 = 7.38$ ft. In the analysis, cross sections are assumed T-shaped.

Frame analysis for loads is made by moment distribution with carry-over factors, distribution factors and fixed-end moments for horizontal members determined on the basis of parabolic haunches. (The use of parabolic haunches to approximate the circular curve of the soffit is considered sufficiently accurate.) These factors are extrapolated from values given in the *Handbook of Frame Constants.** It should be recognized that the use of these constants involves a slight inaccuracy since a horizontal centroidal axis is assumed while in reality this axis is curved. However, the effect of curvatures as large as

*Available free in the U.S. and Canada on request to the Portland Cement Association.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

those encountered in this example may be neglected since the small error introduced is conservative.

To avoid lengthy computations in determining the moment of inertia I of the T-section, use is made of Fig. 5 in *Continuity in Concrete Building Frames** which gives I of a T-section as the I of its web times a coefficient C. This coefficient is a function of A, the ratio of flange to web widths and B, the ratio of flange to web depths. At interior columns these are:

$$A = \frac{7.38}{1.50} = 4.9$$

$$B = \frac{0.33}{6.10} = 0.054$$

From Fig. 5, $C = 1.50$. At midspan of each bay A has the same value but $B = \frac{0.33}{1.50} = 0.220$ and hence $C = 1.85$.

At exterior columns $C = 1.70$ since $B = \frac{0.33}{2.75} = 0.120$.

Constants in the *Handbook* are for rectangular sections and are given in terms of the ratio of centerline to haunch depths. Therefore, the I of the T-section must be expressed in terms of the depth of a rectangular section possessing the same moment of inertia as the T. Since $I = CI_{web}$, this equivalent depth is $d\sqrt[3]{C}$. Hence equivalent depths are:

at B $\quad h_B = 2.75\ \sqrt[3]{1.70} = 3.27$ ft.
at midspan $\quad h_{\text{℄}} = 1.50\ \sqrt[3]{1.85} = 1.85$ ft.
at C $\quad h_C = 6.10\ \sqrt[3]{1.50} = 7.06$ ft.

The various coefficients are tabulated in Table V for the exterior bay with:

$$r_B = \frac{3.27 - 1.85}{1.85} = 0.77$$

$$r_C = \frac{7.06 - 1.85}{1.85} = 2.81$$

and for the interior bay having:

$$r_C = r_D = 2.81$$

Carry-over and stiffness factors for the exterior column, assumed to have a straight haunch, are taken from Table 52 of the *Handbook* for $r_B = \frac{2.75 - 1.50}{1.50} = 0.833$:

$$C_{AB} = -0.78$$
$$C_{BA} = -0.32$$
$$k_{BA} = 16.20$$

Assuming columns to be hinged at the base, stiffnesses of members at various points are:

$$K_{BA} = \frac{16.20 \times 1.5^3\ (1 - 0.78 \times 0.32)}{17.75} = 2.31$$

$$K_{BC} = \frac{13.20 \times 1.85^3}{40} = 2.09$$

$$K_{CB} = \frac{21.7 \times 1.85^3}{40} = 3.43$$

$$K_{CH} = \frac{4 \times 2^3\ (1 - 0.5^2)}{19.1} = 1.26$$

$$K_{CD} = \frac{32.3 \times 1.85^3}{40} = 5.11$$

Distribution factors are therefore:

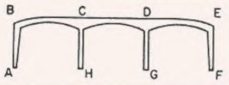
$$d_{BC} = \frac{2.09}{2.31 + 2.09} = 0.48$$

$$d_{CB} = \frac{3.43}{3.43 + 5.11 + 1.26} = 0.35$$

$$d_{CD} = \frac{5.11}{3.43 + 5.11 + 1.26} = 0.52$$

These values are tabulated in Table V to simplify the computations.

TABLE V—Moment Distribution For Dead and Live Loads



	B		C	D
Carry-over factor	− 0.95	− 0.58	− 0.82	− 0.82
Stiffness factor	13.2	21.7	32.3	32.3
M^F Uniform	− 0.0730	− 0.1470	− 0.1130	− 0.1130
M^F Right haunch	− 0.0012	− 0.0190	− 0.0018	− 0.0184
M^F Left haunch	− 0.0147	− 0.0050	− 0.0184	− 0.0018
Distribution factor	0.48	0.35	0.52	0.52
Fixed-end moments	−629	−1280	−993	−993
1st Distribution	+302	+ 100	−149	−149
Carry over	− 58	− 287	+122	+122
2nd Distribution	+ 28	+ 143	−213	−213
Carry over	− 83	− 27	+175	+175
3rd Distribution	+ 40	+ 71	−105	−105
Carry over	− 41	− 38	+ 86	+ 86
4th Distribution	+ 20	+ 43	− 65	− 65
End moment	−421	−1275	−1142	−1142

The load on the frame consists of its own weight and the shell reactions. As discussed in Manual No. 31, the effect of these reactions can be simulated by applying the shell load on the frame. Since the rise is small, dead weight of the shell can be assumed to be uniform in the transverse as well as the longitudinal direction. Uniform load carried by the center frame is:

Dead wt. of shell: $2 \times 0.625 \times 50 \times 0.050 = 3.1$ kips per ft.
Live load on shell: $2 \times 0.625 \times 50 \times 0.030 = 1.9$ kips per ft.
Partial wt. of frame: $1.5 \times 1.17 \times 0.150 = 0.3$ kips per ft.
Total uniform load $= \overline{5.3}$ kips per ft.

The value 0.625×50 gives the position of zero shear on either side of the center support in a uniformly loaded continuous beam of two 50-ft. spans. The load on this portion of each shell span is carried by the center frame. Haunch loads are:

at B: $\quad 1.5\ (2.75 - 1.5) \times 0.150 = 0.28$ kips per ft.
at C: $\quad 1.5\ (6.10 - 1.5) \times 0.150 = 1.04$ kips per ft.

Utilizing coefficients in Table V, the fixed-end moments are:

$$M^F_{BC} = -(5.3 \times 0.073 + 0.28 \times 0.0147 + 1.04 \times 0.0012)\ 40^2 = -629 \text{ ft. kips}$$

$$M^F_{CB} = -(5.3 \times 0.147 + 0.28 \times 0.0050 + 1.04 \times 0.0190)\ 40^2 = -1280 \text{ ft. kips}$$

$$M^F_{CD} = -[5.3 \times 0.1130 + 1.04\ (0.0184 + 0.0018)]\ 40^2 = -993 \text{ ft. kips}$$

Final moments as determined by moment distribution are tabulated in the last row of Table V.

In addition to these moments, there is induced in the frame a horizontal tensile force T which equals the sum of the horizontal components of the T_ϕ-forces acting between planes of zero shear as shown in Fig. 26. This force results from the satisfaction of internal equilibrium re-

*Available free in the U.S. and Canada on request to the Portland Cement Association.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

quirements and should not be confused with thrust created by foundation restraint

To prove the existence of the force T, reference is made to Figs. 25 and 26. Internal forces in the typical rigid frame of Fig. 25(a) are equal to the sum of those present when the frame is made statically determinate by rollers at A' and those due to the final horizontal reaction $H_{A'}$. In the statically determinate condition there are no external horizontal reactions and as a result no thrust exists in member $B'C'$. However, in the indeterminate condition a thrust is induced in $B'C'$ equal to $H_{A'}$.

In a similar manner the frame of Fig. 25(b), assumed to support a thin shell roof, has no horizontal reaction at A when in the statically determinate state. However, an examination of part of the frame as the free body shown in Fig. 26 indicates that resistance must be given to the horizontal components of the T_ϕ-forces. Since there is no horizontal reaction, this resistance is supplied by the frame itself in the form of the internal force T acting in the same plane as the T_ϕ-forces. Since any indeterminate structure can be analyzed by first considering it to be statically determinate, it follows that all cross frames are subject to an internal force equal and opposite to the sum of the horizontal components of the T_ϕ-forces. This force, of course, is superimposed on the thrust produced by the external reactions in the final indeterminate condition.

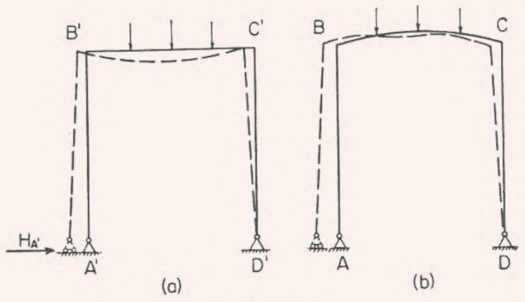


FIG. 25

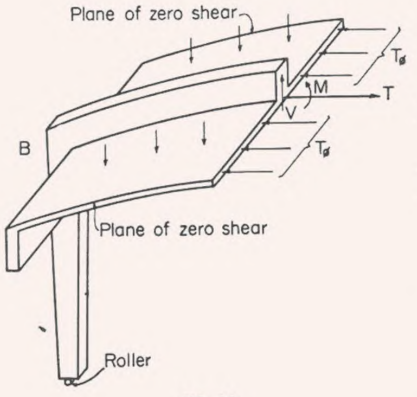


FIG. 26

When the force T acts with an eccentricity e from the centroidal axis of a member, a moment Te is produced in addition to the moment calculated for external loads. If the member is statically indeterminate the angular rotation caused by moment Te produces external reactions.

Computations for fixed-end moments in member BC resulting from the moment Te are tabulated in Table VI. The procedure is based on the method of elastic weights explained in *Analysis of Arches, Rigid Frames and Sewer Sections.** In Table VI, slide rule accuracy is sufficient since end moments produced by the T-force are small when compared with total moments. For practical purposes, fixed-end moments can be taken as being equal to the value of Te at midspan since at this point Te is relatively large and the member BC most flexible. Generally, fixed-end moments due to Te can be approximated in this manner. Table VI is included here only for completeness and as evidence of the validity of this suggested approximation. In the case of an arch rib having constant moment of inertia, fixed-end moments would be equal to the average value of the moment Te. The advisability of estimating fixed-end moments in this manner will depend upon the ratio of Te to the moment due to loads.

In Table VI depths h, Col. (1), of the frame at distances x, Col. (3), from point B are scaled from a drawing having a scale of approximately 1 in. = 3 ft. Col. (2) contains values of coefficient C interpolated linearly in proportion to the x distance from the centerline between 1.70 at B and 1.85 at centerline of span BC and between 1.85 and 1.50 at C. This coefficient when multiplied by I of the rectangular web gives the moment of inertia of the T-section. Instead of the absolute value of a, which is taken as $\frac{ds}{EI}$, Col. (4) gives relative values of $\frac{1}{Ch^3}$. Since ds is equal to zero at B, ℄ and C, no values are listed at these points.

Eccentricity e of the force T with respect to the centroidal axis is listed in Col. (7). With a frame width of 1.50 ft., overhanging flange width of 2.94 ft. and shell thickness of 0.33 ft., the distance y from bottom surface

*Available free in the U.S. and Canada on request to the Portland Cement Association.

TABLE VI—Determination of Fixed-End Moments Due to Moment Te in Exterior Bay

	h	C	x	$a=\frac{1}{Ch^3}$	ax	ax^2	e	T_ϕ	Cos $(\phi_k-\phi)$	$T=42T_\phi\times$ cos $(\phi_k-\phi)$	$m=-Te$	ma	max
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
B	2.75	1.70	0	—	—	—	0.82	—	0.90	—	—	—	—
1	2.5	1.71	2.0	0.037	0.07	0.2	0.71	−0.9	0.92	− 35	+ 25	+ 0.9	+ 2
2	2.1	1.74	6.0	0.062	0.37	2.2	0.55	−3.0	0.95	−120	+ 66	+ 4.1	+ 24
3	1.8	1.77	10.0	0.097	0.97	9.7	0.43	−4.6	0.98	−189	+ 81	+ 7.9	+ 79
4	1.6	1.80	14.0	0.136	1.90	26.7	0.35	−5.6	0.99	−233	+ 82	+11.1	+156
5	1.5	1.83	18.0	0.162	2.92	52.5	0.31	−6.0	1.0	−252	+ 78	+12.6	+228
℄	1.50	1.85	20.0	—	—	—	0.31	−6.0	1.0	−252	+ 78	—	—
6	1.5	1.81	22.0	0.164	3.61	79.4	0.31	−5.7	1.0	−239	+ 74	+12.1	+267
7	1.9	1.74	26.0	0.084	2.18	56.8	0.47	−4.4	0.99	−183	+ 86	+ 7.2	+187
8	2.6	1.67	30.0	0.034	1.02	30.6	0.76	−2.4	0.98	− 99	+ 75	+ 2.5	+ 77
9	3.8	1.60	34.0	0.011	0.37	12.7	1.29	−0.1	0.95	+ 4	− 5	− 0.1	− 2
10	5.3	1.53	38.0	0.004	0.15	5.7	2.00	+1.7	0.92	+ 66	−132	− 0.5	− 20
C	6.1	1.50	40.0	—	—	—	2.38	+2.0	0.90	+ 76	−181	—	—
			Σ	0.791	13.56	276.5						57.8	998

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

to centroidal axis is:

$$y = \frac{0.75h^2 + 2(2.94\times0.33\times0.167)}{1.5h + 2\times2.94\times0.33} = 0.5h - \frac{0.97h-0.324}{1.5h + 1.94}$$

Since T is assumed to act at mid-depth of the flange:

$$e = 0.5h - \frac{0.97h-0.324}{1.5h + 1.94} - 0.17$$

Values of T_ϕ in Col. (8) are scaled from Fig. 18. Total tension T is equal to the summation of the horizontal components of the T_ϕ-forces acting between planes of zero tangential shear previously found to be at $\frac{x}{l} = 0.6$. Integrating T_ϕ on both sides of the frame gives:

$$T = 2T_\phi \cos(\phi_k-\phi) \int_0^{30} \sin\frac{\pi x}{l}\,dx$$
$$= \frac{131}{\pi} T_\phi \cos(\phi_k-\phi) = 42\, T_\phi \cos(\phi_k-\phi)$$

Moment produced by this tensile force is equal to the product of T and $-e$ and is tabulated in Col. (11). Values in Cols. (12) and (13) are the products of those in Col. (11) and Cols. (4) and (5) respectively. The summation of these columns times $\frac{12\,ds}{E}$ represents the angular rotation and vertical displacement of joint B with respect to joint C, assuming that the member is free at B and fixed at C. Applying a moment M^F_{BC} and a vertical reaction V_B and setting angular rotation and vertical displacement at B equal to zero gives respectively:

$$0.791\, M^F_{BC} + 13.56\, V_B + 57.8 = 0$$
$$13.56\, M^F_{BC} + 276.5\, V_B + 998 = 0$$

The solution of these simultaneous equations gives:

$$M^F_{BC} = -70 \text{ ft. kips}$$
$$V_B = -0.17 \text{ kips}$$

and by statics:

$$M^F_{CB} = -70-(40\times0.17) = -77 \text{ ft. kips}$$

As stated earlier, an approximate value of -74 ft. kips, the midspan moment, could have been used. Therefore, for the interior bay fixed-end moments are taken as -82 ft. kips, the value of midspan moment given in Table VII. Thrust, eccentricity and moment of the force T at various points between joint C and the centerline of span CD are tabulated in Table VII. Eccentricity is taken directly from Table VI while values of T_ϕ are scaled from Fig. 12.

End moments resulting from the T-forces are computed by moment distribution as shown in Table VIII. Total moments equal to the sum of end moments due to vertical loads and T-forces are likewise included in Table VIII.

TABLE VII—T-FORCE IN INTERIOR BAY

x	e	T_ϕ	Cos $(\phi_k-\phi)$	$T=42T_\phi\times$ cos $(\phi_k-\phi)$	$m=-Te$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0	2.38	+2.0	0.90	+ 76	−181
2	2.00	+1.7	0.92	+ 66	−132
6	1.29	−0.3	0.95	− 12	+ 16
10	0.76	−2.8	0.98	−115	+ 87
14	0.47	−4.9	0.99	−204	+ 96
18	0.31	−6.0	1.0	−252	+ 78
20	0.31	−6.3	1.0	−265	+ 82

TABLE VIII—MOMENT DISTRIBUTION DUE TO ECCENTRICITY OF T_ϕ-FORCES

	B	C		D
Carry-over factor	−0.95	−0.58	−0.82	−0.82
Distribution factor	0.48	0.35	0.52	0.52
Fixed-end moments	−70	−77	−82	−82
1st Distribution	+34	—	—	—
Carry over	—	−32	—	—
2nd Distribution		+11	−17	−17
End moment	− 36	− 98	− 99	− 99
End moment—Table V	−421	−1275	−1142	−1142
Total moment	−457	−1373	−1241	−1241

With end moments determined, moment at any other point in the frame is found by statics. For example, moment at midspan of the interior bay is:

$$M = -1241 + (5.3\times0.125 + 1.04\times0.0208)40^2 + 82$$
$$= -64 \text{ ft. kips}$$

in which 0.0208 is the simple beam centerline moment coefficient for parabolic haunch loads. In the above expression the moment +82 ft. kips due to the eccentric T-force is included. Because the distance center to center of columns is used, midspan moment should be modified to take into account the width of columns. Vertical reactions at columns CH and DG are equal to $\left(5.3 + \frac{1.04}{3}\right) \times 20 = 113$ kips. In accordance with recommendations in Section 13 of *Continuity in Concrete Building Frames* the modified moment is:

$$M = -64 - \frac{113\times2}{6} = -102 \text{ ft. kips}$$

Tensile thrust at the section is:

$$N = -265 + \frac{457}{17.8} + \frac{1373 - 1241}{19.1} = -232 \text{ kips}$$

Because of this large thrust, tension can be assumed to exist over the entire cross section and total required steel area is:

$$\frac{232{,}000}{20{,}000} = 11.6 \text{ sq.in.}$$

This total area is apportioned between top and bottom bars by making the centroid of reinforcement coincide with the line of action of thrust. Distance from bottom of the beam to lower reinforcement is assumed to be 1¼ in. or 0.10 ft. and to top reinforcement 1.22 ft. As shown in Fig. 27, eccentricity of thrust N measured from the centroid of bottom reinforcement is:

$$0.31 + 0.17 - 0.10 + \frac{102}{232} = 0.82 \text{ ft.}$$

Top reinforcement A^t_s is determined by taking moments of internal forces about the bottom layer:

$$0.82\, N = A^t_s \times 1.12 \times 20{,}000$$

from which:

$$A^t_s = \frac{11.6 \times 0.82}{1.12} = 8.5 \text{ sq.in.}$$
$$A^b_s = 11.6 - 8.5 = 3.1 \text{ sq.in.}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

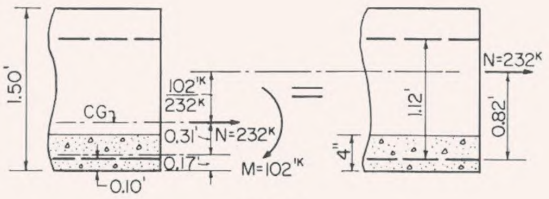


FIG. 27

In the exterior bay, vertical reaction at the face of column *CH* is:

$$V_C = \left(5.3+1.04\times\frac{7}{24}+0.28\times\frac{1}{24}\right)20+\frac{1373-457}{40}$$
$$= 112+23 = 135 \text{ kips}$$

In the above expression, reactions of the haunch loads of member *BC* are equal to $\frac{7}{24}$ and $\frac{1}{24}$ of $W\times\frac{l}{2}$. Taking into account the *T*-force and the reduction because of the use of the clear span, moment at the column face is:

$$M = -1373-157+\frac{135\times2}{3} = -1440 \text{ ft. kips}$$

Interpolating for the value of T at $x = 39$ ft., thrust at the section is:

$$N = 71+26 = 97 \text{ kips}$$

Reinforcement is determined for this moment and thrust as illustrated in Example 7 of the *Reinforced Concrete Design Handbook*. At midspan of exterior bay:

$$M = -(1373+457)0.5+[5.3\times0.125$$
$$+0.0104(1.04+0.28)]40^2+78-\frac{135\times2}{6}$$
$$= +200 \text{ ft. kips}$$
$$N = -252+26 = -226 \text{ kips}$$

Example 8 of the *Handbook* may be followed for design of reinforcement. The small amount of compression reinforcement required at midspan can be supplied by extending a few bars from the top negative reinforcement. It is desirable to have some of these bars continuous in any case since a large tensile force exists throughout most of the frame.

Moment and thrust at joint *B* are obtained in a conventional manner since T is zero at this point.

As pointed out in ASCE Manual No. 31, strains in a frame over which a shell is continuous induce a longitudinal moment M_x at the junction of shell and frame equal to:

$$M_x = -\frac{t^2}{3.56}f_c \qquad (23)$$

in which f_c is the stress in the frame considered to be a homogeneous section. For example, at midspan of the interior bay:

$h = 18$ in.
$b' = 18$ in.
$C = 1.85$
$b-b' = 2.94\times2\times12 = 70.6$ in.
$M = -102$ ft. kips
$N = -232$ kips

The distance y_b from centroid of section to middle of shell equals 0.31 ft. or 3.7 in. Therefore:

$$\frac{I}{y_b} = \frac{18^4\times1.85}{12\times(-3.7)} = -4380 \text{ in.}^3$$
$$A = 18^2+4\times70.6 = 606 \text{ in.}^2$$

and at mid-depth of the shell:

$$f_c = -\left(\frac{-102\times12000}{-4380}-\frac{232\times1000}{606}\right)$$
$$= +103 \text{ psi (tension)}$$

From equation (23):

$$M_x = -\frac{4^2\times103}{3.56} = -460 \text{ ft. lb. per ft.}$$

At the face of column *CH* with:

$h = 68$ in.
$b' = 18$ in.
$C = 1.50$
$b-b' = 70.6$ in.
$y_b = 2.17$ ft. or 26.0 in.
$M = -1440$ ft. kips
$N = +97$ kips

then:

$$\frac{I}{y_b} = \frac{68^3\times18\times1.50}{12\times(-26.0)} = -27{,}200 \text{ in.}^3$$
$$A = 68\times18+70.6\times4 = 1506 \text{ in.}^2$$
$$f_c = -\left(\frac{-1440\times12000}{-27{,}200}+\frac{97\times1000}{1506}\right)$$
$$= -700 \text{ psi}$$

and:

$$M_x = -\frac{4^2\times(-700)}{3.56} = +3{,}100 \text{ ft. lb. per ft.}$$

At crown of exterior bay:

$$\frac{I}{y_b} = -4{,}380 \text{ in.}^3$$
$A = 606$ in.^{2}
$M = +200$ ft. kips
$N = -226$ kips

Therefore:

$$f_c = -\left(\frac{200\times12000}{-4380}-\frac{226\times1000}{606}\right)$$
$$= +921 \text{ psi}$$

from which:

$$M_x = -\frac{4^2\times921}{3.56} = -4100 \text{ ft. lb. per ft.}$$

M_x is computed in a similar manner at other points.

M_x is a local moment and decreases rapidly. At a distance of $\frac{2.94}{2}$ ft. or about 1.5 ft. from the junction of shell and frame its value is reduced by 76 per cent and practically diminishes to zero at 4 ft. As a result, only short bars are needed to handle the induced stresses. In providing the required steel area it may be advantageous in some cases to utilize previously provided longitudinal reinforcement if it is not already stressed to its maximum value. Relatively large values of M_x at the crown of the exterior bay and at the face of interior columns indicate that the shell should be thickened to about 6 in. at the frame, tapering to 4 in. within a distance of 3 ft.

Portland Cement Association · 33 West Grand Avenue, Chicago, Illinois 60610

Printed in U.S.A.

R/C 30

ST 77

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Appendice G

Set di dati del ponte di Alamillo

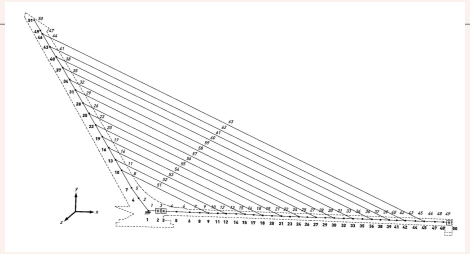
Abstract

Pollalis, 1999 pubblicato un ottimo libro che descrive la realizzazione del ponte Alamillo di Calatrava (§15.6.1.3). In esso l'autore ha pubblicato il set di dati necessario per un'analisi degli elementi finiti del ponte, più specificamente: coordinate nodali, connettività e proprietà degli elementi, condizioni limite e carico.

Sono riprodotti qui per il lettore che vorrebbe modellare il ponte con un semplice codice scritto (come quello elencato in §I.2.7).

L'elenco delle condizioni di carico (Tabella G.4) è anche di particolare interesse in quanto il lettore non può essere pienamente consapevole dei vari tipi di carichi che una struttura deve resistere.





COPIA DI REVISIONE

Tabella G.1: Le coordinate nodali di Alamillo (Pollalis, 1999)

#	X	y	z	Node	x	y	z
1	1.00	13.50	0.00	27	113.60	12.12	0.00
2	7.61	13.30	0.00	28	-44.95	84.33	0.00
3	11.65	13.18	0.00	29	119.57	12.06	0.00
4	-5.58	21.57	0.00	30	125.54	12.00	0.00
5	19.72	12.94	0.00	31	-49.47	91.73	0.00
6	28.43	12.68	0.00	32	131.53	11.93	0.00
7	-10.28	28.29	0.00	33	137.52	11.87	0.00
8	35.64	12.50	0.00	34	-54.00	99.12	0.00
9	42.85	12.32	0.00	35	143.49	11.80	0.00
10	-17.55	39.82	0.00	36	149.45	11.74	0.00
11	48.99	12.20	0.00	37	-58.52	106.52	0.00
12	55.15	12.09	0.00	38	155.41	11.68	0.00
13	-22.10	47.23	0.00	39	161.37	11.62	0.00
14	60.86	12.15	0.00	40	-63.04	113.92	0.00
15	66.58	12.22	0.00	41	167.33	11.56	0.00
16	-26.65	54.65	0.00	42	173.30	11.49	0.00
17	72.21	12.33	0.00	43	-67.56	121.32	0.00
18	77.83	12.43	0.00	44	179.30	11.43	0.00
19	-31.19	62.04	0.00	45	185.31	11.36	0.00
20	83.79	12.38	0.00	46	-72.10	128.76	0.00
21	89.75	12.33	0.00	47	191.70	11.29	0.00
22	-35.75	69.46	0.00	48	197.70	11.23	0.00
23	95.71	12.28	0.00	49	-73.43	130.94	0.00
24	101.67	12.22	0.00	50	201.00	11.20	0.00
25	-40.34	76.89	0.00	51	-78.21	138.75	0.00
26	107.64	12.17	0.00				

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella G.2: Proprietà membri di Alamillo (Pollalis, 1999)

#	i	j	A mm^2	I_Z m^4	I_Y m^4	J m^4	#	i	j	A mm^2	I_Z m^4	I_Y m^4	J m^4
Pylon							Desiderio						
2	1	4	86.06	1048.40	524.44	721.30	1	1	2	82.24	672.00	946.30	92.90
5	4	7	68.33	625.90	423.43	424.70	3	2	3	60.99	327.80	724.50	92.90
8	7	10	62.90	512.70	374.38	321.83	4	3	5	40.30	95.92	572.90	92.90
11	10	13	56.80	428.90	354.31	293.87	6	5	6	33.29	61.03	449.80	89.93
14	13	16	54.15	393.20	334.82	267.32	7	6	8	33.37	68.44	371.83	69.83
17	16	19	51.71	361.73	315.92	242.20	9	8	9	26.22	61.60	304.29	49.74
20	19	22	48.95	327.90	297.58	218.45	10	9	11	17.02	41.47	248.56	39.64
23	22	25	46.57	300.05	279.78	196.11	12	11	12	14.22	33.91	233.18	34.90
26	25	28	53.29	278.64	268.43	175.12	13	12	14	12.84	31.61	232.17	32.50
29	28	31	50.96	253.40	257.61	155.49	15	14	15	11.70	29.69	220.82	31.60
32	31	34	48.65	229.90	241.41	137.19	16	15	17	10.70	26.91	219.00	31.60
35	34	37	46.04	205.01	225.72	120.20	18	17	18	9.46	21.67	217.51	31.60
38	37	40	43.78	184.90	210.54	104.51	19	18	20	9.46	21.67	217.51	31.60
41	40	43	41.23	163.75	195.85	90.07	21	20	21	9.13	21.12	216.04	28.80
44	43	46	39.02	146.72	181.63	76.89	22	21	23	8.79	20.57	214.57	26.10
47	46	49	37.46	135.37	167.89	64.91	24	23	24	8.79	20.57	214.57	26.10
50	49	51	37.46	135.37	167.89	64.91	25	24	26	8.93	21.04	214.70	26.50
Cavi							27	26	27	8.93	21.04	214.70	26.50
51	9	10	0.00	0.00	0.00	0.00	28	27	29	8.93	21.04	214.70	26.50
52	12	13	0.00	0.00	0.00	0.00	30	29	30	8.93	21.04	214.70	26.50
53	15	16	0.00	0.00	0.00	0.00	31	30	32	8.93	21.04	214.70	26.50
54	18	19	0.00	0.00	0.00	0.00	33	32	33	9.26	21.63	216.17	29.30
55	21	22	0.00	0.00	0.00	0.00	34	33	35	9.60	22.15	217.64	32.20
56	24	25	0.00	0.00	0.00	0.00	36	35	36	9.60	22.15	217.64	32.20
57	27	28	0.00	0.00	0.00	0.00	37	36	38	9.60	22.15	217.64	32.20
58	30	31	0.00	0.00	0.00	0.00	39	38	39	9.60	22.15	217.64	32.20
59	33	34	0.00	0.00	0.00	0.00	40	39	41	9.60	22.15	217.64	32.20
60	36	37	0.00	0.00	0.00	0.00	42	41	42	9.60	22.15	217.64	32.20
61	39	40	0.00	0.00	0.00	0.00	43	42	44	9.46	21.67	217.51	31.60
62	42	43	0.00	0.00	0.00	0.00	45	44	45	9.46	21.67	217.51	31.60
63	45	46	0.00	0.00	0.00	0.00	46	45	47	9.46	21.67	217.51	31.60
							48	47	48	9.46	21.67	217.51	31.60
							49	48	50	9.46	21.67	217.51	31.60

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella G.3: Le condizioni di confine di Alamillo (Pollalis, 1999)

	Slocamento			Rotazione		
#	X	Y	Z	X	Y	Z
1	Fisso	Fisso	Fisso	Fisso	Fisso	Fisso
2	Gratis	Fisso	Fisso	Fisso	Gratis	Gratis
3	Gratis	Fisso	Fisso	Fisso	Gratis	Gratis
50	Gratis	Fisso	Fisso	Fisso	Gratis	Gratis

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella G.4: Combinazioni di carico di Alamillo (Pollalis, 1999)

	1. Carico morto e permanente
1.1	Cariche morte e permanenti del pilone, W_{pylon}
1.2	Cariche morte e permanenti del ponte, W_{deck}
1.3	Post-tensione dei soggiorni cavi, T_{cable}
	2. Carico vivo
2.1	Carico uniforme 4 KPa su tutto il ponte e la passerella pedonale
2.2	Carico uniforme 4 KPa a metà ponte e mezza passerella pedonale Ito produrre massima torsione sulla scatola di acciaio)
2.3	600 kN carico del camion al nodo 6 [asse 44; 172 m dall'abutment orientale], eccentricità 13.30 m
2.4	600 kN carico del camion al nodo 9 [asse 41; 160 m dall'abutment orientale], eccentricità 13.30 m
2.5	600 kN carico del camion al nodo 15 [asse 35; 136 m dall'abbattimento est], eccentricità 13.30 m
2.6	600 kN carico camion al nodo 21 [asse 29; 104 m dall'abutment orientale], eccentricità 13.30 m
2.7	600 kN carico del camion al nodo 27 [asse 23; 88 m dall'abutment orientale], eccentricità 13 .30 m
2.8	600 kN carico del camion al nodo 33 [asse 17; 64 m dall'abbattimento est], eccentricità 13 .30 m
2.9	600 kN carico camion al nodo 39 [asse 11; 40 m dall'abutment orientale], eccentricità 13.30 m
2.10	600 kN carico del camion al nodo 45 [asse 5; 16 m dall'abutment orientale], eccentricità 13.30 m
	3. Caricamenti termici
3.1	Cambio uniforme della temperatura dei cavi da 26°C
3.2	Variazione uniforme della temperatura del pilone entro 13.5°C
3.3	Cambio uniforme della temperatura del ponte di 23.3°C
3.4	Variazione lineare della temperatura all'interno del ponte [inferiore a superficie superiore] by 21°C
3.5	Variazione longitudinale lineare della temperatura all'interno del pilone di 4.5°C
3.6	Variazione lineare della temperatura all'interno del pilone di 5.1°C
	4. Carico del vento statico
4.1	Carico del vento longitudinale
4.2	Carico del vento trasversale
	5. Rotazione della fondazione del pilone
5.1	0.25% (0.225°) rotazione nella direzione longitudinale; massima rotazione prevista 0,06°
5.2	0.10% (0.090°) rotazione nella direzione trasversale; massima rotazione prevista 0.026°
	6. Carico sismico statico
6.1	Carico sismico longitudinale sul pilone (3% di carico morto)
6.2	Carico sismico trasversale sul pilone (3% di carico morto)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Appendice H

Identicon: hashing visivo

Questa appendice, e la corrispondente MATLAB®(§I.8.1) il codice è stato interamente generato da uno strumento AI (Anthropic, 2025).

Abstract

Questo documento fornisce una spiegazione completa di identicons—rappresentazioni visive dei valori hash che creano modelli unici e riconoscibili. Esso copre sia le basi teoriche degli algoritmi di generazione identicon che i dettagli specifici dell'implementazione del nostro programma MATLAB. Il documento spiega come identicons possono essere utilizzati per rappresentare visivamente capitoli di libro, creando distintivi "impronta digitale" visive che servono come marcatori o identificativi dei capitoli. Sono discussi sia i principi matematici che gli aspetti pratici di attuazione, fornendo una comprensione completa del processo di generazione dell'identitàcon.

H.1 Introduzione agli identicon 2562
H.2 Algoritmi di generazione degli identicon 2562
H.3 Implementazioni degli identicon di GitHub e Stack Exchange 2564
H.4 La nostra applicazione MATLAB . . 2565
H.5 Segmenti principali del codice . . . 2567
H.6 Utilizzo del programma 2568
H.7 Vantaggi e applicazioni 2569
H.8 Conclusioni 2570

Parte 3: Implementazioni del codice

COPIA DI REVISIONE

H.1 Introduzione agli identicon

Identicons sono rappresentazioni visive di valori hash, tipicamente utilizzati per creare immagini uniche e riconoscibili senza richiedere la creazione manuale dell'immagine o lo storage. Originariamente sviluppato per gli avatar degli utenti nelle comunità online, identicons hanno trovato applicazione in vari contesti dove è utile un "impronta digitale" visiva dei dati testuali.

Le caratteristiche chiave di identicons includono:

- **Generazione di deterni**: Lo stesso testo di input produce sempre lo stesso modello
- **Distinta visiva**: Ingressi diversi producono modelli visivamente differenti
- **Creazione automatica**: Nessun intervento di progettazione umana richiesto
- **Minimal storage**: Solo il testo sorgente deve essere memorizzato, non l'immagine stessa

Le implementazioni più popolari includono gli avatar utente di GitHub e gli identificatori utente di Stack Exchange, che generano modelli distintivi basati su nomi utente o indirizzi email.

Applicazioni nella pubblicazione del libro

Nel contesto della pubblicazione di libri, identicons può servire come:

- Segnali di capitolo visivo
- Le impronte digitali dei contenuti che distinguono visivamente argomenti simili
- Elementi decorativi che indicano sotto brevemente il contenuto
- Aiuti di navigazione che aiutano i lettori a riconoscere i capitoli visivamente

Generando un identico da ogni titolo del capitolo, creiamo una firma visiva unica che corrisponde al contenuto di quel capitolo, migliorando il riconoscimento e la navigazione aggiungendo l'interesse visivo al libro.

H.2 Algoritmi di generazione degli identicon

Panoramica dell'algoritmo principale

Il processo fondamentale di generazione di identicon comporta la conversione dell'ingresso del testo in un modello visivo attraverso una serie di passi deterministici:

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Algorithm 1 Identicon Generazione Algoritmo

Require: stringa di testo (titolo del capitolo, identificatore)
Ensure: Modello visivo (identicon)
1: Generare un hash crittografico del testo di input
2: Definire una griglia (tipicamente 5×5)
3: Utilizzare segmenti dell'hash per determinare i modelli delle cellule:
4: a. Quali celle contengono forme (su / fuori stato)
5: b. Quali forme utilizzare nelle cellule attive
6: c. Quali colori applicare alle forme
7: Applicare simmetria (solitamente specchiando la metà della griglia)
8: Rimangiare il modello risultante come immagine

Funzione di hash

La funzione hash è la base della generazione di identicon, convertendo il testo variabile-lunghezza in una sequenza fissa-l'altezza dei valori.

- **Determinazione**: Lo stesso input produce sempre la stessa uscita
- **Effetto valanga**: I piccoli cambiamenti di input causano grandi variazioni dell'output
- **Distribuzione uniforme**: I valori di uscita sono distribuiti uniformemente in tutta la gamma possibile

Mentre le funzioni crittografiche dell'hash come MD5, SHA-1 o SHA-256 sono comunemente utilizzate nelle implementazioni professionali, il nostro programma MATLAB utilizza una funzione di hash personalizzato più semplice per scopi educativi:

```
function hash_values = simpleHash(str)
    % Sum ASCII values with position weighting
    hash_values = zeros(1, 32);
    for i = 1:length(str)
        char_code = double(str(i));
        for j = 1:min(32, length(str))
            position_factor = mod(i*j, 32) + 1;
            hash_values(position_factor) = mod(hash_values(position_factor) +
   char_code * i, 256);
        end
    end
end
```

Listing H.1: Simple Hash Function

Questa funzione crea una serie di valori da 32 elementi tra 0 e 255, incorporando sia i codici dei caratteri che le informazioni di posizione dalla stringa di input.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Mappatura del modello

Il processo di mappatura del pattern trasforma i valori hash in una griglia visiva, tipicamente 5×5. Ciò comporta:

1. **inizializzazione della griglia**: Creare una griglia vuota della dimensione desiderata
2. **Incarico del valore della cella**: Valori di hash della mappa ai valori delle celle a griglia
3. **Applicazione simmetria**: Parte a specchio della griglia per bilanciamento visivo

Nelle implementazioni come quelle di GitHub, ogni cella è "on" o "off" (binary), in versioni più sofisticate come la nostra, ciascuna cellula può contenere forme diverse basate sul valore hash corrispondente.

Rendering visivo

Il passo finale converte il modello astratto in una rappresentazione visiva:

- **Selezione della forma**: Convertire i valori delle celle in forme specifiche
- **Applicazione colore**: Applicare i colori derivati dall'hash
- **Scale e imbottiture**: Regolare le proprietà visive per chiarezza

H.3 Implementazioni degli identicon di GitHub e Stack Exchange

Le diverse piattaforme implementano identicons con variazioni sottili:

Implementazione di GitHub

GitHub utilizza un approccio semplice ma efficace:

- 5×5 griglia (25 celle)
- Modello binario (ogni cella è riempita o vuota)
- Simmetria orizzontale (i mirrori hanno lasciato metà a destra)
- Colore singolo derivato dall'hash, più sfondo bianco

Ciò richiede solo 15 bit di informazioni (mezza la griglia + colonna centrale) più i dati di colore.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Implementazione di Stack Exchange

Stack Exchange (incluso il sovraflusso di Stack) utilizza un approccio più vario:

- Forme multiple possibili per cella (quadrati, triangoli)
- Schema di colore singolo
- Sfondo luminoso con forme colorate
- Simmetria orizzontale

La nostra implementazione trae ispirazione da entrambi gli approcci, aggiungendo funzionalità aggiuntive.

H.4 La nostra applicazione MATLAB

Il nostro programma MATLAB genera identicons con le seguenti caratteristiche:

Panoramica del programma

Il programma prende due ingressi:

- Un nome file per l'output PDF
- Un titolo del capitolo utilizzato per generare l'identità

Produce un'immagine a doppia colonna che mostra:

- L'identicon reso con forme colorate (lato sinistro)
- La matrice di pattern numerico che mostra i valori sottostanti (lato destro)

Il titolo mostra sia il capitolo che una parte del suo hash, fornendo tracciabilità del processo di generazione.

Caratteristiche del programma chiave

1. **Tipi di forma multipli**: A differenza delle implementazioni più semplici, il nostro programma utilizza cinque stati diversi per ogni cella:
    - 0: Cellula vuota (nessuna forma)
    - 1: quadrato arrotondato
    - 2: Triangolo (da sinistra a destra inferiore)
    - 3: Triangolo (da destra a sinistra)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

- 4: Cerchio

2. **Schema di colore complementare**: Piuttosto che utilizzare un singolo colore, generiamo più colori complementari basati sull'hash, creando modelli più visivamente accattivanti e distintivi.
3. **Sfondo trasparente**: L'output utilizza uno sfondo trasparente, che lo rende adatto per l'integrazione con vari stili di documento.
4. **Doppia visualizzazione**: Il display laterale dell'identità visiva e la sua rappresentazione numerica fornisce valore educativo rendendo trasparente il processo di mappatura.
5. **Uscita PDF**: Il programma salva l'identità direttamente in un file PDF chiamato secondo il primo parametro di input.

Processo di attuazione dettagliato

Generazione e mappatura dei modelli

La correlazione tra l'hash e i valori della griglia segue questo processo specifico:

1. **Creazione di Hash**:
   - Il `simpleHash` la funzione converte il titolo del capitolo in un array di 32 elementi
   - I valori variano da 0 a 255, in base ai codici di carattere e alle posizioni
2. **Creazione di matrice modello**:
   - A 5×5 matrice è inizializzata con zero
   - Per ogni cella nella metà sinistra (più la colonna centrale se dispari):

     ```
     hash_idx = mod((i-1)*size_matrix + j, length(hash_values)) + 1
     pattern(i,j) = mod(hash_values(hash_idx), 5)
     ```

   - Ogni valore è mappato alla gamma 0-4 utilizzando modulo
   - La metà destra è specchiata dalla metà sinistra

Esempio di mappatura delle celle

Per una cella specifica in posizione (i,j):

1. Calcola un indice hash:
   $hash_idx = mod((i-1) \times size_matrix + j, 32) + 1$
2. Ad esempio, con cella (2,3) in un 5×5 griglia:

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

$hash_idx = mod((2-1) \times 5 + 3, 32) + 1 = 8$

3. Ottieni il valore hash in quell'indice:
   $hash_value = hash_values(hash_idx)$
4. If $hash_values(8) = 173$, usiamo 173
5. Mappa a forma tipo utilizzando modulo:
   $pattern(i, j) = mod(hash_value, 5) = mod(173, 5) = 3$
6. Cell (2,3) ottiene forma tipo 3 (angolo superiore a destra in basso a sinistra)

Generazione di colori

I colori sono anche derivati dall'hash:

1. Calcola una tonalità base dai primi valori hash:
   $base_hue = mod(sum(hash_values(1:3)), 360)/360$
2. Generare colori complementari spostando la tonalità:

```
colors = [
    hsv2rgb([mod(base_hue, 1), 0.8, 0.9]);          % Primary
    hsv2rgb([mod(base_hue + 0.25, 1), 0.7, 0.9]);  % Complement 1
    hsv2rgb([mod(base_hue + 0.5, 1), 0.8, 0.8]);   % Complement 2
    hsv2rgb([mod(base_hue + 0.75, 1), 0.7, 0.85])  % Complement 3
];
```

3. Assegna colori alle celle in base alla posizione e al valore:
   $color_idx = mod(i \times j + value, 4) + 1$

H.5 Segmenti principali del codice

I seguenti segmenti di codice illustrano le parti chiave della nostra implementazione:

Generazione di modelli

```
% Fill half the pattern with values from the hash
for i = 1:size_matrix
    for j = 1:floor(size_matrix/2)
        hash_idx = mod((i-1)*size_matrix + j, length(hash_values)) + 1;
        pattern(i,j) = mod(hash_values(hash_idx), 5);

        % Mirror for symmetry
        pattern(i, size_matrix-j+1) = pattern(i,j);
    end
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
    % Middle column for odd-sized grid
    if mod(size_matrix, 2) == 1
        j = ceil(size_matrix/2);
        hash_idx = mod((i-1)*size_matrix + j, length(hash_values)) + 1;
        pattern(i,j) = mod(hash_values(hash_idx), 5);
    end
end
```

Listing H.2: Pattern Generation from Hash

Rendering di forma

```
case 4 % Circle
    center_r = (row_start + row_end) / 2;
    center_c = (col_start + col_end) / 2;
    radius = (row_end - row_start) / 2 * 0.9; % 90% of half cell size

    for r = row_start:row_end
        for c = col_start:col_end
            distance = sqrt((r - center_r)^2 + (c - center_c)^2);
            if distance <= radius
                identicon(r, c, :) = color;
            end
        end
    end
```

Listing H.3: Shape Rendering Example (Circle)

H.6 Utilizzo del programma

Eseguire lo script

Per usare il programma:

1. Salvare lo script MATLAB come `generateIdenticon.m`
2. Apri MATLAB e naviga nella directory contenente lo script
3. Eseguire lo script digitando `generateIdenticon` nella finestra di comando MATLAB
4. Quando viene richiesto, inserire il nome del file desiderato (ad esempio "C-14")
5. Quando viene richiesto, inserire il titolo del capitolo (ad esempio "Ingegneria basata su performazioni Terremoto")
6. Il programma genererà l'identicon e lo salverà come PDF (ad esempio, "C-14.pdf")

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Comprendere l'uscita

Il PDF generato contiene:

- Un titolo che mostra il nome del capitolo e una parte del suo valore hash
- Pannello sinistro: L'identicon visivo con forme colorate
- Pannello destro: La matrice numerica (0-4) che mostra quali valori generati dalle forme

Questa doppia rappresentazione aiuta a capire come il titolo del capitolo si trasforma in un unico modello visivo.

H.7 Vantaggi e applicazioni

Vantaggi degli identicon

- **Unico**: Diversi titoli di capitolo producono modelli visivamente distinti
- **Reproducibilità**: Lo stesso titolo produce sempre lo stesso modello
- **Efficienza**: Non c'è bisogno di creare o memorizzare manualmente le immagini
- **Scalabilità**: Può generare identiconi unici per qualsiasi numero di capitoli

Applicazioni nella pubblicazione del libro

Identicons può migliorare i libri in diversi modi:

- **Identificazione del capitolo**: Marcatori visivi che aiutano i lettori a riconoscere e ricordare i capitoli
- **Aiuti di navigazione**: Cue visive che supportano la navigazione rapida attraverso il libro
- **Consistenza progettuale**: Un linguaggio visivo unificato in tutto il libro
- **Impronte di contenuti**: Rappresentanza visiva della "essenza" del contenuto

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

H.8 Conclusioni

Identicons offrono una soluzione elegante per creare rappresentazioni visive uniche di contenuto testo, generando modelli distinti dai titoli dei capitoli, servono sia come strumenti di navigazione funzionali che elementi estetici nel design del libro.

La nostra implementazione MATLAB combina caratteristiche di vari approcci identicon, producendo modelli visivamente accattivanti con forme e colori multipli mantenendo le proprietà essenziali del determinismo e dell'unicità. Il doppio display del pattern visivo e dei suoi valori numerici sottostanti fornisce una panoramica educativa sul processo di generazione.

Questo approccio all'identificazione del capitolo dimostra come le tecniche algoritmiche possono migliorare il design tradizionale del libro, creando un ponte tra contenuto testuale e riconoscimento visivo che beneficia i lettori attraverso una migliore navigazione e memorabilità.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Appendice I

MATLAB®, Mathematica Codici

Il MATLAB®i codici presentati in questa appendice sono stati originariamente scritti dall'autore. Successivamente furono rifatto da Claude (Antropic, Sonnet 4.6, 2026) per chiarezza, documentazione e accessibilità pedagogica — con una migliore denominazione variabile, spiegazioni inline della teoria sottostante e correzione di bug minori dove I algoritmi e la logica numerica sono interamente quelli dell'autore originale; il contributo di Claude è stato strettamente editoriale. Per questo motivo, e per evitare qualsiasi rischio di corrompere il codice durante la traduzione automatica, questa appendice è presentata solo in inglese.

Les codici MATLAB®présentés dans cette annesse ont été écrits à l'origine par l'auteur. Ils ont ensuite été remaniés par Claude (Antropic, Sonnet 4.6, 2026) dans un souci de clarté, de document et d'accessibilité pédagogique — avec une amélioration des noms de variabili, des explications intégrées de la théorie sous-jacente, et la correzione de bogues mineurs identifiés au fil du travail. Les algoritmies et la logique numérique sont entièrement ceux de l'auteur original ; la contributo de Claude a été strictement éditoriale. La relazione è stata approvata dal Consiglio europeo di Bruxelles, che ha presentato una proposta di direttiva relativa alla protezione dei dati personali.

La mia vita MATLAB®presentados en este apéndice fueron escritos originalmente por el autor. Posteriormente fueron refactorizados por Claude (Antropic, Sonnet 4.6, 2026) con el fin de mejorar la claridad, la documentación y la accesibilidad pedagógica — con una nomenclatura de variabili más descriptiva, explicaciones integradas de la teoría sottoyacente, y la corrección de erroris menores identificados durante el proceso. Los universitas y la lógica numérica son íntegramente los del autor original; la contribución de Claude fue estrictamente editorial. Por esta razón, y para evitar cualquier riesgo de alteración del código durante una traducción automática, este apéndice se presenta únicamente en inglés.

Abstract

Questa appendice presenta una raccolta completa di codici MATLAB e Mathematica che implementano i metodi computazionali fondamentali ed avanzati descritti in tutto il libro. I codici coprono la meccanica strutturale fondazionale (statiche, metodi di matrice per capriate e travi), tecniche di analisi classiche ed avanzate (metodo variativo, elementi

COPIA DI REVISIONE

finiti isoparametrici) e algoritmi di simulazione numerica (Monte Carlo Ogni codice è documentato con convenzioni di denominazione variabile, spiegazioni teoriche inline e esempi di lavoro per supportare sia l'apprendimento che l'applicazione pratica. Le implementazioni software traducono i quadri matematici e gli algoritmi presentati nei capitoli principali in strumenti computazionali eseguibili adatti per analisi strutturali, identificazione dei parametri e valutazione dell'affidabilità. Questa appendice è presentata in inglese solo per preservare l'integrità del codice attraverso le edizioni.

I.1 Parte I: Metodi di analisi fondamentali e computazionali . . . 2573
I.1.1 Statici matrice di una truppa B 2573
I.1.2 Forma dell'arco di St louis . 2575
I.1.3 Arbitro tre arco circolare a cerniera; mathematica 2577
I.1.4 Collasso di archi murari . . . 2588
I.1.5 Principali 2588
I.1.6 Grande deflettore di un fascio 2599
I.2 Parte II: Progettazione e analisi strutturali 2604
I.2.1 Progettazione di conchiglie cilindriche 2604
I.2.2 Analisi approssimativa del telaio; metodo cantilever . . 2616
I.2.3 Torsione non uniforme . . . 2628
I.2.4 Cornice ortogonale 2630
I.2.5 Cornice ortogonale ibrida . . 2634
I.2.6 Telaio; filo duro 2637
I.2.7 Metodo di rigidità diretta; telaio 2641
I.2.8 Codice principale 2641
I.2.9 Matrice di stiffness dei membri non prismatici 2653
I.2.10 Linee isostatiche 2659
I.2.11 Design evolutivo 2665
I.2.12 Principali 2665
I.2.13 Schema di interazione colonna 2671
I.2.14 Metodi variabili; mathematica 2674
I.2.15 Simulazione Monte Carlo della risposta elastica lineare di un edificio al carico laterale 2685
I.2.16 Elementi isoparametrici . . . 2687
I.3 Parte III: Modellazione dei materiali e comportamento costitutivo 2698
I.3.1 Plastica fondamentale 2698
I.3.2 Modelli costitutivi 2702
I.3.3 Modello bilineare 2703
I.3.4 Indurimento 2707
I.3.5 Isteresi 2710
I.3.6 Modificato giuffre monegotto pinto 2729
I.3.7 Parco di kent modificato . . 2734
I.3.8 Ibarra 2739
I.3.9 Portata di stato limite 2780
I.4 Parte IV: Metodi e Identificazione dei parametri Data-Driven 2801
I.4.1 Programma di identificazione del parametro 2801
I.4.2 Programma principale e Orchestrazione di base 2802
I.4.3 Integrazione di dati I/O e Spreadsheet 2811
I.4.4 Ottimizzazione del flusso di lavoro e funzioni ausiliarie . 2823
I.5 Parte V: Fondazioni numeriche e statistiche 2836
I.5.1 Levenberg-Marquardt . . 2836
I.5.2 Tecniche numeriche 2837
I.5.3 Filtri FFT e butterworth . . . 2837
I.5.4 Decomposizione del valore singolare 2840
I.5.5 Precondizioni 2842
I.5.6 Consenso di campionamento casuale (RANSAC) 2844
I.5.7 Ipercubo latino 2848
I.5.8 Regressione baieana con una base quadratica 2853
I.5.9 Markov catena Monte Carlo Simulazione 2860
I.6 Parte VI: Ottimizzazione e montaggio del parametro 2862
I.6.1 Levenberg-Marquardt . . 2862
I.6.2 Attuazione doganale 2862
I.6.3 Utilizzo della funzione integrata 2865
I.7 Parte VII: Affidabilità sismica e incertezza 2867
I.7.1 Analisi dei rischi sismici . 2867
I.7.2 Ingegneria basata sulle prestazioni 2870

COPIA DI REVISIONE

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

I.8 Parte VIII: Utilità 2875
I.8.1 Identico 2875

Parte 4: Metodi numerici e statistici

I.1 Parte I: Metodi di analisi fondamentali e computazionali

Questa sezione copre sia la meccanica strutturale fondazionale che le tecniche computazionali avanzate per l'analisi, tra cui statici, archi, travi, metodi variativi, simulazione Monte Carlo e elementi isoparametrici.

I.1.1 Statici matrice di una truppa B

Come discusso in

```
%  Initialize the statics matrix
% ========================================================================
% STATICS MATRIX OF A TRUSS
% ========================================================================
% Builds the statics matrix B, which relates internal bar forces (and
% support reactions) to external nodal loads via:
%
%                        B * q = f
%
% where:
%   B  : statics matrix          [2*npoin x (nelem + nbc)]
%   q  : generalized forces      [bar forces | reaction forces]
%   f  : external nodal loads    [Fx1, Fy1, Fx2, Fy2, ...]
%
% Each bar contributes two columns (its direction cosines) to B.
% Each restrained DOF contributes one additional column (a unit reaction).
%
% Inputs assumed to exist in the workspace:
%   npoin        : number of nodes
%   nelem        : number of bar elements
%   coord(i,1:2) : x,y coordinates of node i
%   lnods(e,1:2) : global node numbers of element e  [node_i, node_j]
%   id(i,1:2)    : boundary condition flag for node i, DOF 1(x) and 2(y)
%                  id = 1 means the DOF is restrained (support reaction)
% ========================================================================

%------------------------------------------------------------------------
% Step 1 -- Allocate the statics matrix
%------------------------------------------------------------------------
% The matrix has one row per DOF (2 per node: x and y)
% and one column per unknown force (bar forces + support reactions).
% We don't know nbc yet, so we allocate a square upper-bound and trim later.
```

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
33
34 nDOF = 2 * npoin;                  % total degrees of freedom
35 B    = zeros(nDOF, nDOF);          % over-allocated; will trim after BCs
36
37 %--------------------------------------------------------------------------
38 % Step 2 -- Fill columns corresponding to bar forces (direction cosines)
39 %--------------------------------------------------------------------------
40 % For each bar element, project the unit bar force onto the global x and y
41 % axes at both end nodes.  For bar e connecting nodes i and j:
42 %
43 %   At node i:  contribution is [ cos(theta);  sin(theta) ]   (tension +ve)
44 %   At node j:  contribution is [-cos(theta); -sin(theta) ]   (equal &
    opposite)
45 %
46 % where theta is the angle the bar makes with the global x-axis, and
47 %   cos(theta) = lx / L,   sin(theta) = ly / L
48 %
49 % These are stored in rows (2*node-1) and (2*node) of column e.
50
51 l_elem = zeros(nelem, 1);          % pre-allocate element length vector
52
53 for e = 1:nelem
54
55     % --- Retrieve the two end nodes of this element ---
56     node_i = lnods(e, 1);
57     node_j = lnods(e, 2);
58
59     % --- Compute the projection of the bar onto x and y ---
60     lx = coord(node_j, 1) - coord(node_i, 1);   % x-component of bar vector
61     ly = coord(node_j, 2) - coord(node_i, 2);   % y-component of bar vector
62
63     % --- Bar length (Pythagorean theorem) ---
64     l_elem(e) = sqrt(lx^2 + ly^2);
65
66     % --- Direction cosines (unit vector along the bar) ---
67     cos_theta =  lx / l_elem(e);   % = cos(theta)
68     sin_theta =  ly / l_elem(e);   % = sin(theta)
69
70     % --- Insert at node i (rows 2*node_i-1 and 2*node_i, column e) ---
71     % A tensile force in the bar pulls node i toward node j
72     B(2*node_i - 1, e) =  cos_theta;   % x-equilibrium at node i
73     B(2*node_i,     e) =  sin_theta;   % y-equilibrium at node i
74
75     % --- Insert at node j (equal and opposite by Newton's third law) ---
76     B(2*node_j - 1, e) = -cos_theta;   % x-equilibrium at node j
77     B(2*node_j,     e) = -sin_theta;   % y-equilibrium at node j
78
79 end
80
81 %--------------------------------------------------------------------------
82 % Step 3 -- Append columns corresponding to support reactions
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
%-------------------------------------------------------------------------
% Each restrained DOF introduces one unknown reaction force.
% Its contribution to equilibrium is simply +1 in the corresponding row
% (a unit force in the restrained direction).
% These reactions occupy columns (nelem+1) through (nelem+nbc) of B.

nbc = 0;   % reaction counter (incremented each time a restrained DOF is found
    )

for inode = 1:npoin
    for iDOF = 1:2            % iDOF = 1 -> x-direction,  iDOF = 2 -> y-
    direction

        if id(inode, iDOF) == 1    % this DOF is restrained -> there is a
    reaction

            nbc = nbc + 1;         % one more reaction unknown

            % Global row index for this DOF
            row = 2*(inode - 1) + iDOF;

            % Place a unit entry in the next available reaction column
            B(row, nelem + nbc) = 1.0;

        end
    end
end

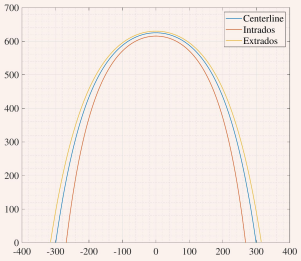
%-------------------------------------------------------------------------
% Step 4 -- Trim B to its actual size
%-------------------------------------------------------------------------
% Now that we know nbc, discard the unused trailing columns.

B = B(:, 1 : nelem + nbc);

% B is now [2*npoin  x  (nelem + nbc)] -- ready for use.
```

I.1.2 Forma dell'arco di St louis

Questo codice, basato sulla geometria effettiva dell'arco, genera Fig. 15.30b



COPIA DI REVISIONE

```
clear;close;clc;opengl software
% From http://www.jug.net/wt/archcgs.htm
%=================
% Graphics stuff
%=================
scrsz = get(0,'ScreenSize');GS = 'gswin64.exe';opengl software
fs=18;
font='Times New Roman';
%===============
% Initialize
%===============
L=299.2239;% half widdth
Ab=1262.6651;% max x section bottom ft^2
At=125.1406;% max x section top ft^2
x=(299.2239:-0.001:0);
%=================
% Some Constants
%=================
C=acosh(Ab/At);
h=625.0925;% maximum height
A=h/((Ab/At)-1);
%============
% centroid
%============
y=693.8597-A*(cosh(C*x/L));% CHECKED
yp=interp1(x,y,118.4123);
%======================
% slope of the normal
%======================
m=1.44935529./sinh(0.0100333*x);% CHECKED
mp=interp1(x,m,118.4123);
%======================
% Cross sectional area
%======================
Q=((At-Ab)/h).*y+Ab;%cross section linearly varying
%======================
% height of section
%======================
h=sqrt(cotd(30)*Q);
hi=2*h/3;ho=h/3;
%================================
% Intrados and extrados curves
%================================
xi=x-hi./sqrt(1+m.^2);yi=y-m.*hi./sqrt(1+m.^2);
ypi=interp1(xi,yi,108.9984);
xo=x+ho./sqrt(1+m.^2);yo=y+m.*ho./sqrt(1+m.^2);
ypo=interp1(xo,yo,123.1192);
%=======================================
% take mirrors for the -ve side & merge
%=======================================
rx=-flip(x);xx=cat(2,x,rx);
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
rxi=-flip(xi);xxi=cat(2,xi,rxi);
rxo=-flip(xo);xxo=cat(2,xo,rxo);
ry=flip(y);yy=cat(2,y,ry);
ryi=flip(yi);yyi=cat(2,yi,ryi);
ryo=flip(yo);yyo=cat(2,yo,ryo);
%===============
% plot curves
%===============
hf1 = figure('Position',[1 scrsz(4)/4.5 scrsz(3)/3 scrsz(4)/2]);
plot(xx,yy,xxi,yyi,xxo,yyo,'linewidth',1);
lgd=legend('Centerline','Intrados','Extrados','location','NorthEast');
lgd.FontSize=fs;
grid minor; grid;
ylim([0 700]);daspect([1 1 1]);
```

I.1.3 Arbitro tre arco circolare a cerniera; mathematica

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Circular Three Hinged Arch self weight

Determine Reactions

In[1]:=
```
Sol1 = Solve[-2 R Cy +
      Integrate[w R^2 (1 + Cos[theta]), {theta, Pi / 2 - alpha, Pi / 2 + alpha}] == 0, Cy][[1]];
```

In[2]:=
```
Cy = Cy /. Sol1
```

Out[2]=
```
alpha R w
```

In[3]:=
```
Sol2 =
  Simplify[Solve[-R Cx + R Cy - Integrate[w R^2 Cos[theta], {theta, Pi / 2 - alpha, Pi / 2}] ==
      0, Cx]][[1]] /. Sol1;
```

In[4]:=
```
Cx = Cx /. Sol2
```

Out[4]=
```
R w (-1 + alpha + Cos[alpha])
```

In[5]:=
```
alpha = 2 ArcTan[2 h / s]
```

Out[5]=
$$2\,\text{ArcTan}\left[\frac{2\,h}{s}\right]$$

In[6]:=
```
w = 1;
```

In[7]:=
```
Cxs = FullSimplify[Cx / s]
```

Out[7]=
$$\frac{R\left(-1+2\,\text{ArcTan}\left[\frac{2\,h}{s}\right]+\text{Cos}\left[2\,\text{ArcTan}\left[\frac{2\,h}{s}\right]\right]\right)}{s}$$

In[8]:=
```
TeXForm[Cxs]
```

Out[8]//TeXForm=
```
\frac{R \left(2 \tan ^{-1}\left(\frac{2 h}{s}\right)+\cos \left(2 \tan ^{-1}\left(\fr
   h}{s}\right)\right)-1\right)}{s}
```

In[9]:=
```
Cxs = Cx / s /. R / s → 1 / (2 Sin[alpha]) /. h / s → hs
```

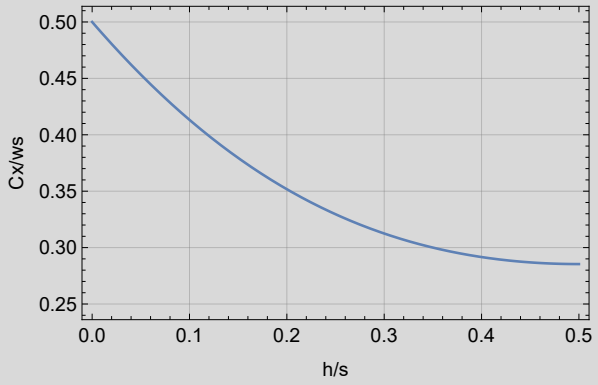
Out[9]=
$$\frac{1}{2}\times(-1+2\,\text{ArcTan}[2\,hs]+\text{Cos}[2\,\text{ArcTan}[2\,hs]])\,\text{Csc}[2\,\text{ArcTan}[2\,hs]]$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

In[10]:=
```
CxsPlot =
 Plot[Cxs, {hs, 0., 0.5}, AxesOrigin → {0, 0.25}, LabelStyle → Directive[Black, Medium],
  Frame → True, FrameLabel → {"h/s", "Cx/ws"}, GridLines → Automatic]
```

Out[10]=



In[11]:=
```
Export["CxsPlot.pdf", CxsPlot]
```

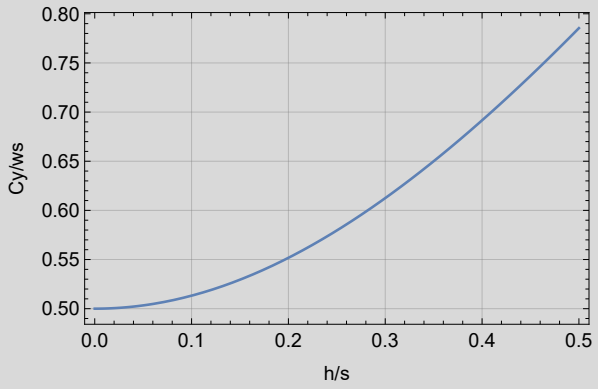
Out[11]=
```
CxsPlot.pdf
```

In[12]:=
```
Cys = Cy / s /. R / s → 1 / (2 Sin[alpha]) /. h / s → hs
```

Out[12]=
```
ArcTan[2 hs] Csc[2 ArcTan[2 hs]]
```

In[13]:=
```
CysPlot =
 Plot[Cys, {hs, 0., 0.5}, AxesOrigin → {0, 0.5}, LabelStyle → Directive[Black, Medium],
  Frame → True, FrameLabel → {"h/s", "Cy/ws"}, GridLines → Automatic]
```

Out[13]=



COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

In[14]:=
```
Export["CysPlot.pdf", CysPlot]
```

Out[14]=
```
CysPlot.pdf
```

Determine Internal Forces Arbitrary Case

Shear

In[15]:=
```
Sol6 = FullSimplify[Solve[-Cx Cos[theta] + Cy Sin[theta] -
      Integrate[w R Sin [theta], {beta, 0, theta}] + V == 0, V]][[1]]
```

Out[15]=
$$\left\{V \to R \left(\text{Cos}[\text{theta}] \left(-1+\text{Cos}\left[2\,\text{ArcTan}\left[\frac{2\,h}{s}\right]\right]\right)+ 2\,\text{ArcTan}\left[\frac{2\,h}{s}\right](\text{Cos}[\text{theta}]-\text{Sin}[\text{theta}])+\text{theta}\,\text{Sin}[\text{theta}]\right)\right\}$$

In[16]:=
```
V[theta_] := R (Cos[theta] (-1 + Cos[2 ArcTan[2 h / s]]) +
    2 ArcTan[2 h / s] (Cos[theta] - Sin[theta]) + theta Sin[theta])
```

Axial

In[17]:=
```
Sol7 = FullSimplify[Solve[Cx Sin[theta] + Cy Cos[theta] -
      Integrate[w R Cos [theta], {beta, 0, theta}] + NN == 0, NN]][[1]]
```

Out[17]=
$$\left\{NN \to R \left(\text{theta}\,\text{Cos}[\text{theta}]+\text{Sin}[\text{theta}]- \text{Cos}\left[2\,\text{ArcTan}\left[\frac{2\,h}{s}\right]\right]\text{Sin}[\text{theta}]-2\,\text{ArcTan}\left[\frac{2\,h}{s}\right](\text{Cos}[\text{theta}]+\text{Sin}[\text{theta}])\right)\right\}$$

In[18]:=
```
NN[theta_] := R (theta Cos[theta] + Sin[theta] - Cos[2 ArcTan[2 h / s]] Sin[theta] -
      2 ArcTan[2 h / s] (Cos[theta] + Sin[theta])) /. h / s → 1 / 2;
```

In[19]:=
```
NN[x]
```

Out[19]=
$$R\left(x\,\text{Cos}[x]+\text{Sin}[x]-\frac{1}{2}\pi\,(\text{Cos}[x]+\text{Sin}[x])\right)$$

COPIA DI REVISIONE

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Moment

In[20]:=
```
Sol8 = FullSimplify[Solve[Cx R Sin[theta] - Cy R (1 - Cos[theta]) +
      Integrate[w R R (Cos[beta] - Cos[theta]), {beta, 0, theta}] + M == 0, M][[1]]]
```

Out[20]=
$$\left\{M \to R^2 \left(\text{theta} \cos[\text{theta}] - \cos\left[2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right]\right] \sin[\text{theta}] - 2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right] (-1 + \cos[\text{theta}] + \sin[\text{theta}])\right)\right\}$$

In[21]:=
```
M[theta_] := R^2 (theta Cos[theta] -
     Cos[2 ArcTan[2 h / s]] Sin[theta] - 2 ArcTan[2 h / s] (-1 + Cos[theta] + Sin[theta]))
```

In[22]:=
```
NN[x]
```

Out[22]=
$$R\left(x \cos[x] + \sin[x] - \frac{1}{2}\pi (\cos[x] + \sin[x])\right)$$

In[23]:=
```
V[x]
```

Out[23]=
$$R\left(\cos[x]\left(-1 + \cos\left[2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right]\right]\right) + 2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right] (\cos[x] - \sin[x]) + x \sin[x]\right)$$

In[24]:=
```
M[x]
```

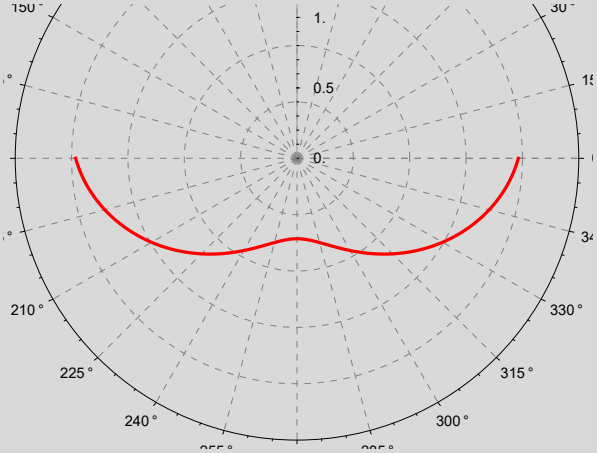
Out[24]=
$$R^2\left(x \cos[x] - \cos\left[2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right]\right] \sin[x] - 2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right] (-1 + \cos[x] + \sin[x])\right)$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

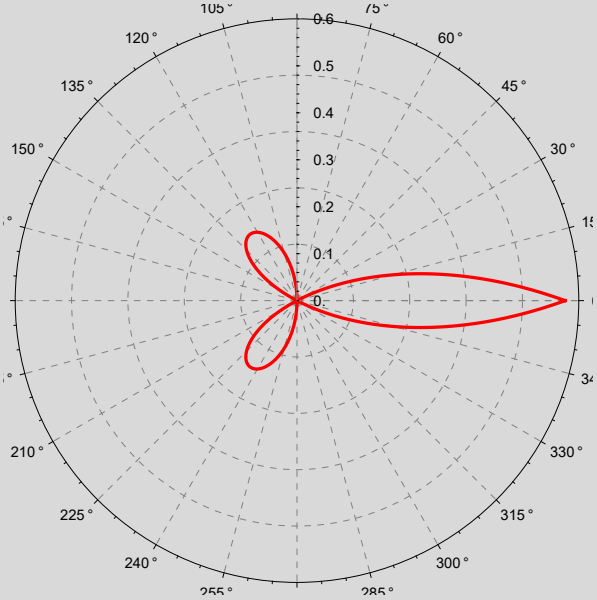
In[25]:=
```
P1 = PolarPlot[NN[x] / R, {x, 0, Pi}, PlotStyle → {Red, Thick},
  PolarGridLines → Automatic, PolarAxes → {True, True},
  PolarTicks → {"Degrees", Automatic}, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed]]
```

Out[25]=



In[26]:=
```
P2 = PolarPlot[V[x] / R /. h / s → 1 / 2, {x, 0, Pi},
  PlotStyle → {Red, Thick}, PolarGridLines → Automatic, PolarAxes → {True, True},
  PolarTicks → {"Degrees", Automatic}, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed]]
```

Out[26]=



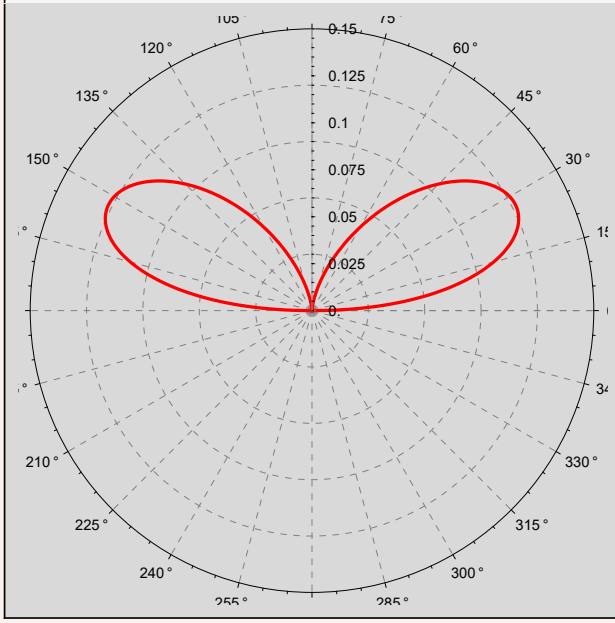
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

In[27]:=
```
M[x]
```

Out[27]=
$$R^2 \left(x \cos[x] - \cos\left[2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right]\right] \sin[x] - 2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right] (-1 + \cos[x] + \sin[x])\right)$$

In[28]:=
```
P6 = PolarPlot[-M[x] / R^2 /. h / s → 1 / 2, {x, 0, Pi},
  PlotStyle → {Red, Thick}, PolarGridLines → Automatic, PolarAxes → {True, True},
  PolarTicks → {"Degrees", Automatic}, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed]]
```

Out[28]=


Determine Internal Forces Semi-Circular Case

In[29]:=
```
Clear[alpha];
```

Shear

In[30]:=
```
Sol3 = FullSimplify[Solve[-Cx Cos[theta] + Cy Sin[theta] -
       Integrate[w R Sin [theta], {alpha, 0, theta}] + V == 0, V]][[1]]
```

Out[30]=
$$\{V \to R\,((-1 + \text{alpha} + \cos[\text{alpha}])\cos[\text{theta}] + (-\text{alpha} + \text{theta})\sin[\text{theta}])\}$$

In[31]:=
```
V[theta_] := 1/2 R w ((-2 + π) Cos[theta] - (π - 2 theta) Sin[theta])
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Axial

In[32]:=
```
Sol4 = FullSimplify[Solve[Cx Sin[theta] + Cy Cos[theta] -
       Integrate[w R Cos [theta], {alpha, 0, theta}] + NN == 0, NN]][[1]]
```

Out[32]=
```
{NN → R ((-alpha + theta) Cos[theta] - (-1 + alpha + Cos[alpha]) Sin[theta])}
```

In[33]:=
```
NN[theta_] := -1/2 R w ((π - 2 theta) Cos[theta] + (-2 + π) Sin[theta]);
```

Moment

In[34]:=
```
Sol5 = FullSimplify[Solve[Cx R Sin[theta] - Cy R (1 - Cos[theta]) +
       Integrate[w R R (Cos[alpha] - Cos[theta]), {alpha, 0, theta}] + M == 0, M]][[1]]
```

Out[34]=
```
{M → R^2 (alpha + (-alpha + theta) Cos[theta] - (alpha + Cos[alpha]) Sin[theta])}
```

In[35]:=
```
M[theta_] := -1/2 R^2 w ((π - 2 theta) Cos[theta] + π (-1 + Sin[theta]))
```

Plot Internal Forces

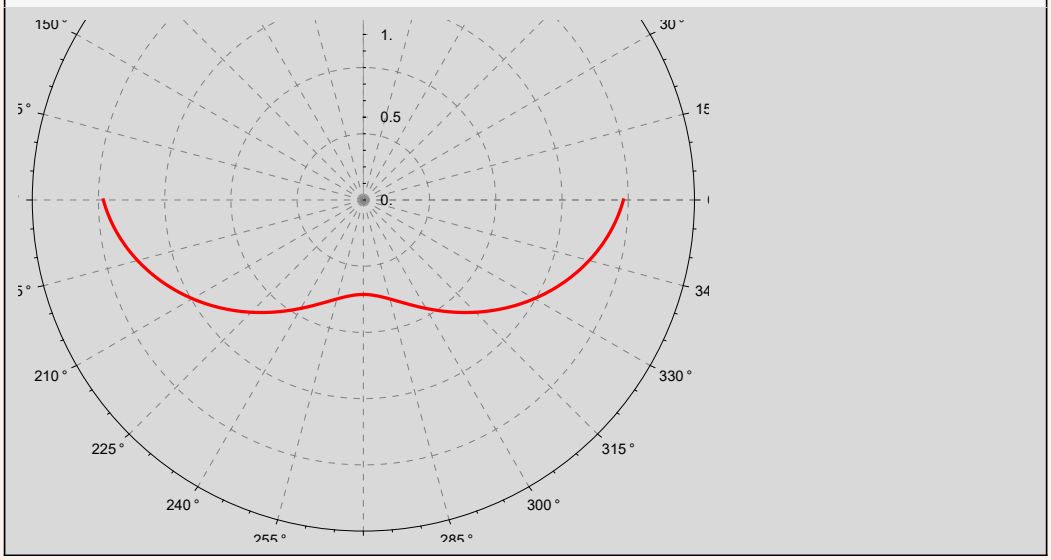
In[36]:=
```
w = 1; R = 1;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

In[37]:=
```
P4 = PolarPlot[NN[x], {x, 0, Pi}, PlotStyle → {Red, Thick},
  PolarGridLines → Automatic, PolarAxes → {True, True},
  PolarTicks → {"Degrees", Automatic}, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed]]
```

Out[37]=



In[38]:=
```
Export["NxPlot.pdf", P1]
```

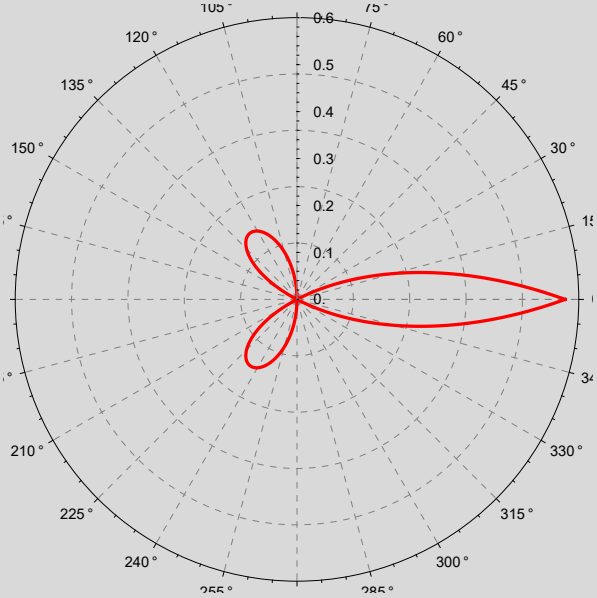
Out[38]=
```
NxPlot.pdf
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

In[39]:=
```
P5 = PolarPlot[V[x], {x, 0, Pi}, PlotStyle → {Red, Thick},
  PolarGridLines → Automatic, PolarAxes → {True, True},
  PolarTicks → {"Degrees", Automatic}, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed]]
```

Out[39]=



In[40]:=
```
Export["VxPlot.pdf", P2]
```

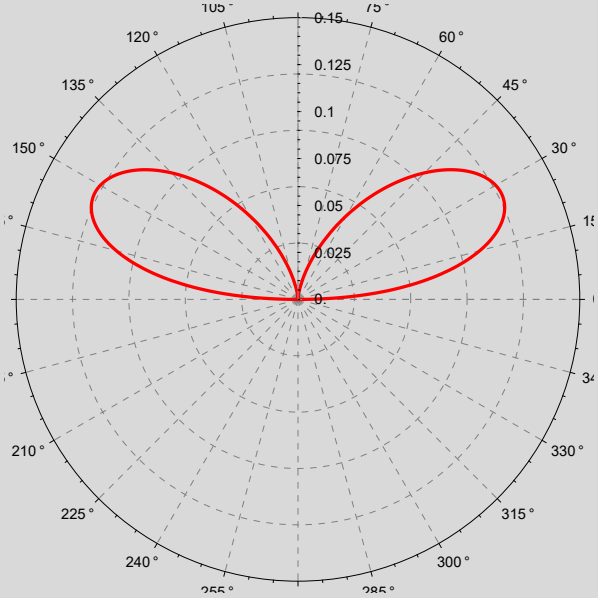
Out[40]=
```
VxPlot.pdf
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

In[41]:=
```
P6 = PolarPlot[-M[x], {x, 0, Pi}, PlotStyle → {Red, Thick},
  PolarGridLines → Automatic, PolarAxes → {True, True},
  PolarTicks → {"Degrees", Automatic}, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed]]
```

Out[41]=



In[42]:=
```
Export["MxPlot.pdf", P6]
```

Out[42]=
```
MxPlot.pdf
```

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

I.1.4 Collasso di archi murari

Codice scritto da Pierre Mars in Octave, riprogrammato MATLAB®dell'autore.

I.1.5 Principali

```
% ========================================================================
% COLLAPSE ANALYSIS OF A MASONRY ARCH -- THRUST LINE METHOD
% ========================================================================
% This code determines the minimum and maximum thrust states of a circular
% masonry arch using the "line of resistance" (thrust line) approach.
%
% THEORY:
%   A masonry arch can carry load as long as the thrust line -- the locus
%   of the resultant compressive force -- remains within the arch thickness
%   at every cross-section.  Collapse occurs when the thrust line touches
%   the boundary (intrados or extrados) at enough sections to form a
%   mechanism (typically 4 hinges for a symmetric arch).
%
%   The thrust line position is controlled by three "points of passage":
%   sections n1, n2, n3 where the normalised eccentricities e1, e2, e3
%   are prescribed.  The algorithm iteratively relocates these points
%   until the thrust line just touches the arch boundary -- the limit state.
%
% SIGN CONVENTION FOR ECCENTRICITY:
%   e = +1  ->  point on extrados  (outer face)
%   e = -1  ->  point on intrados  (inner face)
%   e =  0  ->  centroid of section (centerline)
%
% TWO LIMIT STATES COMPUTED:
%   Minimum thrust : thrust line hugs intrados at supports, extrados at crown
%   Maximum thrust : opposite -- extrados at supports, intrados at crown
%
% FILE STRUCTURE (all functions at bottom, MATLAB convention):
%   Part 1  --  Main script: parameters, calls min_thrust then max_thrust
%   Part 2  --  min_thrust  : iterative minimum thrust algorithm
%   Part 3  --  max_thrust  : iterative maximum thrust algorithm
%   Part 4  --  resistance_line : plots thrust line, voussoirs, N and V
    diagrams
%   Part 5  --  face_points : (x,y) of a point at given eccentricity on each
    face
%   Part 6  --  faces_wrenches : self-weight wrench at each section face  ***
    STUB ***
%   Part 7  --  faces_efforts : internal N, V, eccentricity at every face
%   Part 8  --  three_points : force on first face to pass thrust line through
     3 points
%
% Original code: Pierre Smars (smars@yuntech.edu.tw), ver. 2022-12-02
% License: GNU GPL v2 or later -- https://www.gnu.org/licenses/
% Reprogrammed in MATLAB from Octave by V.E. Saouma
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
% ========================================================================

% ========================================================================
% PART 1 -- MAIN SCRIPT
% ========================================================================
% Sets all parameters, runs both limit-state analyses, then cleans up.
%
% NOTE ON GLOBAL VARIABLES:
%   All geometry and state are stored in globals so that helper functions
%   can access them without long argument lists.  For a production code
%   one would pass a parameter struct instead, but globals are clearer
%   for a teaching context of this size.

clear; close all; clc;

global n radius_cst density_cst thickness_cst g aperture ...
       maximum_eccentricity small x y xe ye xi yi density angles radius ...
       thickness iter fn LimitState

% --- Execution control ---
% iWait = 1 : pause at every iteration with a dialog box  (useful for demos)
% iWait = 0 : run silently to completion                  (normal use)
iWait = 0;

% --- Output file base name (used in figure titles and saved EPS/PDF) ---
fn = 'arch-1';

% --- Arch geometry ---
n             = 40;    % number of voussoir blocks
radius_cst    = 5;     % centerline radius of the arch           [m]
thickness_cst = 1;     % uniform voussoir thickness              [m]
aperture      = 90;    % half-opening angle                      [deg]
                       % 90 deg -> semicircular arch

% --- Material and physical constants ---
density_cst = 2500;    % masonry density                         [kg/m^3]
g           = 9.81;    % gravitational acceleration              [m/s^2]

% --- Algorithm parameters ---
maximum_eccentricity = 1;      % |e| <= 1 defines the admissible zone
small                = 1e-6;   % convergence tolerance on eccentricity

% --- Run both limit-state analyses ---
if iWait == 1
    waitfor(warndlg('Starting with Minimum thrust'));
    close;
end
min_thrust;

if iWait == 1
    waitfor(warndlg('Next: Maximum thrust'));
```

COPIA DI REVISIONE

```
    close;
end
max_thrust;

% Clean up EPS files generated during iterations
delete('*.eps');


% ========================================================================
% PART 2 -- FUNCTION: min_thrust
% ========================================================================
% Finds the minimum thrust state by iteratively adjusting the three points
% of passage until the thrust line just fits inside the arch.
%
% MINIMUM THRUST PATTERN:
%   The thrust line touches the intrados at both supports (e = -1)
%   and the extrados at the crown (e = +1).
%
% ALGORITHM (iterative heuristic):
%   1. Start with passage points at supports (n1, n3) and crown (n2).
%   2. Compute internal forces and eccentricity profile.
%   3. Find the section r0 with the largest eccentricity violation.
%   4. Move the nearest passage point to r0.
%   5. Repeat until max|ex| <= maximum_eccentricity + small.
%
% WARNING: the while condition  (ok==0)||(iter>10)  is logically
%   questionable -- the ||iter>10 clause keeps looping even after
%   convergence when iter>10.  Preserved faithfully from the original.

function min_thrust

global n maximum_eccentricity small iter iWait fn LimitState

% --- Initial guess for the three passage points ---
e1 = -maximum_eccentricity;   % intrados at left support
e2 =  maximum_eccentricity;   % extrados at crown
e3 = -maximum_eccentricity;   % intrados at right support
n1 = 1;
n2 = round(n/2) + 1;          % section closest to the crown
n3 = n + 1;

iter           = 0;
LimitState     = 'min';
ok_eccentricity = 0;

while ok_eccentricity == 0 || (iter > 10)   % see WARNING above

    iter = iter + 1;

    % Compute internal forces N, V and eccentricity profile ex
    [N, V, ex] = faces_efforts(n1, e1, n2, e2, n3, e3);  %#ok<ASGLU>
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
143
144     % Plot the current thrust line at this iteration
145     Plott(n1, e1, n2, e2, n3, e3);
146
147     if iWait == 1
148         waitfor(warndlg(['Iteration: ' int2str(iter)], 'Warning'));
149         close;
150     end
151
152     % --- Find the most violated section ---
153     % r0 is the index of the section where |eccentricity| is maximum
154     [~, r0] = max(abs(ex));
155
156     % --- Relocate the nearest passage point to the offending section ---
157     % Intrados violation (ex < 0): move whichever support point is closer
158     % Extrados violation (ex > 0): move the crown point
159     if ex(r0) < 0
160         if abs(r0 - n1) < abs(r0 - n3)
161             n1 = r0;
162         else
163             n3 = r0;
164         end
165     else
166         n2 = r0;
167     end
168
169     % --- Check convergence ---
170     if max(abs(ex)) - maximum_eccentricity < small
171         ok_eccentricity = 1;
172     else
173         ok_eccentricity = 0;
174     end
175
176 end
177
178 % Plot the final (converged or last-iteration) thrust line
179 Plott(n1, e1, n2, e2, n3, e3);
180
181 end   % min_thrust
182
183
184 % ========================================================================
185 % PART 3 -- FUNCTION: max_thrust
186 % ========================================================================
187 % Finds the maximum thrust state.  Mirror image of min_thrust:
188 %
189 % MAXIMUM THRUST PATTERN:
190 %   The thrust line touches the extrados at both supports (e = +1)
191 %   and the intrados at the crown (e = -1).
192 %
193 % The relocation logic is the reverse of min_thrust:
```

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

```
%   Extrados violation -> move a support point
%   Intrados violation -> move the crown point

function max_thrust

global n maximum_eccentricity small iter iWait fn LimitState

% --- Initial guess (reversed signs relative to min_thrust) ---
e1 =  maximum_eccentricity;   % extrados at left support
e2 = -maximum_eccentricity;   % intrados at crown
e3 =  maximum_eccentricity;   % extrados at right support
n1 = 1;
n2 = round(n/2) + 1;
n3 = n + 1;

iter           = 0;
LimitState     = 'max';
ok_eccentricity = 0;

while ok_eccentricity == 0 || (iter > 10)   % see WARNING in min_thrust

    iter = iter + 1;

    [N, V, ex] = faces_efforts(n1, e1, n2, e2, n3, e3);  %#ok<ASGLU>
    Plott(n1, e1, n2, e2, n3, e3);

    if iWait == 1
        waitfor(warndlg(['Iteration: ' int2str(iter)], 'Warning'));
        close;
    end

    [~, r0] = max(abs(ex));

    % Reversed logic relative to min_thrust
    if ex(r0) < 0
        % Intrados violation: move the crown point
        n2 = r0;
    else
        % Extrados violation: move the nearer support point
        if abs(r0 - n1) < abs(r0 - n3)
            n1 = r0;
        else
            n3 = r0;
        end
    end

    if max(abs(ex)) - maximum_eccentricity < small
        ok_eccentricity = 1;
    else
        ok_eccentricity = 0;
    end
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```

end

Plott(n1, e1, n2, e2, n3, e3);

end   % max_thrust


% ========================================================================
% PART 4 -- FUNCTION: resistance_line
% ========================================================================
% Produces the final result figure for a converged limit state showing:
%
%   (a) Arch geometry: voussoir blocks drawn as alternating grey/white
%       patches ("Alhambra style"), with centroids marked
%   (b) Thrust line: dashed red curve
%   (c) Three passage points: filled red circles
%   (d) Internal force diagrams: axial N (red sticks) and shear V (blue sticks
    )
%       drawn as scaled arrows at each section face
%
% Output: EPS file, converted to PDF via Ghostscript (eps2pdf).

function resistance_line(n1, e1, n2, e2, n3, e3)

global n x y xe ye xi yi angles radius thickness iter fn LimitState

fs   = 16;
font = 'Times New Roman';
GS   = 'gswin64.exe';    % path to Ghostscript executable

% --- Compute converged internal forces ---
[N, V, ex] = faces_efforts(n1, e1, n2, e2, n3, e3);

% --- Thrust line coordinates ---
% The thrust line at section i is offset from the centerline by
%   ex(i) * thickness(i)/2  in the radial direction
xz = sind(angles) .* (radius + thickness/2 .* ex);
yz = cosd(angles) .* (radius + thickness/2 .* ex);

% --- Draw voussoir blocks ---
for i = 1:n

    % Four corners of voussoir i (two intrados + two extrados nodes)
    xp = [xi(i), xi(i+1), xe(i+1), xe(i)];
    yp = [yi(i), yi(i+1), ye(i+1), ye(i)];

    % Alternating grey / white shading
    if rem(i, 2) == 1
        C = [0.5, 0.5, 0.5];   % grey
    else
```


I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

```
        C = 'White';
    end

    patch(xp, yp, C);
    hold on;

    % Centroid of each voussoir (for verification)
    poly_i        = polyshape(xp, yp);
    [x0(i), y0(i)] = centroid(poly_i);

end

plot(x0, y0, 'k.');   % centroid markers

% --- Thrust line and passage points ---
plot(xz, yz, '--r', 'LineWidth', 2);
xzz = [xz(n1), xz(n2), xz(n3)];
yzz = [yz(n1), yz(n2), yz(n3)];
scatter(xzz, yzz, 80, 'red', 'filled');

axis('equal', 'tight');
grid minor; grid on;
title([fn ' - ' LimitState ' - iter ' num2str(iter)]);

% --- Axial (N) and shear (V) force diagrams ---
% Each stick starts at the thrust line point and extends in the direction
% normal (N) or tangential (V) to the section face.
% Scale: alpha chosen so the largest N fills 80% of the arch thickness.
alpha = 0.8 * thickness(1) / max(N);

for i = 1:n

    % Base point at the thrust line location for section i
    xBase = x(i) + ex(i) * thickness(i) * cosd(90 - angles(i)) / 2;
    yBase = y(i) + ex(i) * thickness(i) * sind(90 + angles(i)) / 2;

    % Axial force stick (red) -- along the arch axis
    xN = [xBase,  xBase + alpha * N(i) * sind(90 - angles(i))];
    yN = [yBase,  yBase - alpha * N(i) * cosd(90 - angles(i))];
    plot(xN, yN, '-r', 'LineWidth', 1);

    % Shear force stick (blue) -- perpendicular to arch axis
    xV = [xBase,  xBase + alpha * V(i) * cosd(90 - angles(i))];
    yV = [yBase,  yBase + alpha * V(i) * sind(90 - angles(i))];
    plot(xV, yV, '-b', 'LineWidth', 1);

end

% --- Export ---
FileName = [fn '-' LimitState '-Iter-' num2str(iter) '.eps'];
set(gca, 'FontSize', 0.8*fs, 'FontName', font);
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'auto');
print(FileName, '-depsc');
eps2pdf(FileName, GS, 0);
close all;

end   % resistance_line


% ========================================================================
% PART 5 -- FUNCTION: face_points
% ========================================================================
% Returns the (x,y) coordinates of the point on each section face at a
% prescribed normalised eccentricity.
%
%   eccentricity = +1  ->  extrados
%   eccentricity = -1  ->  intrados
%   eccentricity =  0  ->  centroid (centerline)
%
% NOTE: this function calls angles() and radius(), thickness() as
% functions -- in the original Octave code these were functions returning
% the global arrays.  In MATLAB with globals they resolve to the global
% variables directly; the call syntax is preserved from the original.

function [x, y] = face_points(eccentricity)

global n aperture

a = angles();

x = sin(a) .* (radius(a) + thickness(a)/2 .* eccentricity);
y = cos(a) .* (radius(a) + thickness(a)/2 .* eccentricity);

end   % face_points


% ========================================================================
% PART 6 -- FUNCTION: faces_wrenches  *** STUB -- BODY NOT PROVIDED ***
% ========================================================================
% PURPOSE:
%   Computes the resultant force wrench (Fx, Fy, M) acting on each section
%   face due to the cumulative self-weight of all voussoirs above that face.
%
% EXPECTED OUTPUTS  (each an (n+1) x 1 vector):
%   Fx(i) : horizontal force resultant at face i due to blocks above   [N]
%   Fy(i) : vertical   force resultant at face i due to blocks above   [N]
%   M(i)  : moment resultant at face i about the centerline point      [N.m]
%
% EXPECTED ALGORITHM (not provided in original source):
%   For each block j above face i:
%     weight_j = density(j) * g * volume_j
%     volume_j = area of trapezoidal block j * thickness_cst  (unit depth)
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
%     Add weight_j to Fy(i) and compute its moment arm about x(i),y(i)
%
% *** This function must be completed before the code will run. ***

function [Fx, Fy, M] = faces_wrenches

global n x y density g angles radius thickness  %#ok<NUSED>

% TODO: implement self-weight accumulation loop here
error('faces_wrenches: function body not provided in original source -- must
    be implemented.');

end   % faces_wrenches


% ========================================================================
% PART 7 -- FUNCTION: faces_efforts
% ========================================================================
% Computes the internal stress resultants at every section face:
%
%   N(i)  : normal (axial compressive) force at face i        [N]
%   V(i)  : shear force at face i                             [N]
%   ex(i) : normalised eccentricity of thrust line at face i  [-1 .. +1]
%
% ALGORITHM:
%   1. Find the boundary force (Fx1,Fy1,M1) on the first face that makes
%      the thrust line pass through the three prescribed points
%      -> calls three_points()
%   2. Get the self-weight wrench at every face
%      -> calls faces_wrenches()
%   3. Superpose: total wrench = self-weight + boundary force
%      (the boundary force contributes a linearly growing moment)
%   4. Rotate from global (x,y) axes to local (normal, tangential) frame
%      using the section face angle
%   5. Compute eccentricity from bending moment and axial force

function [N, V, ex] = faces_efforts(n1, e1, n2, e2, n3, e3)

global x y angles thickness

% Step 1 -- Boundary force on the first face
[Fx1, Fy1, M1] = three_points(n1, e1, n2, e2, n3, e3);

% Step 2 -- Self-weight wrench at every face
[Fx, Fy, M] = faces_wrenches();

% Step 3 -- Superpose contributions
% The moment arm of (Fx1,Fy1) grows linearly from the first face
Fx = Fx + Fx1;
Fy = Fy + Fy1;
M  = M  + M1 + (x - x(1)) .* Fy1 - (y - y(1)) .* Fx1;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```

% Step 4 -- Rotate to local section frame
% angles(i) is measured from the vertical [deg]
% Convention: N positive in compression (masonry standard)
N  = -cosd(angles) .* Fx + sind(angles) .* Fy;
V  =  sind(angles) .* Fx + cosd(angles) .* Fy;

% Step 5 -- Eccentricity: e = M / (N * t/2)
% Normalised by half-thickness so |e| = 1 at the face boundary
ex = -2 .* M ./ (N .* thickness);

end   % faces_efforts


% ========================================================================
% PART 8 -- FUNCTION: three_points
% ========================================================================
% Determines the force (Fx1, Fy1, M1) that must act on the FIRST section
% face in order to make the thrust line pass through three prescribed points.
%
% METHOD -- moment equilibrium at each passage point:
%   For the thrust line to pass through point (xa,ya) on face n1, the
%   total moment about that point must be zero.  This gives one linear
%   equation in (Fx1, Fy1, M1).  Writing it for all three points:
%
%       A * [Fx1; Fy1; M1] = Mp
%
%   where A is 3x3 and Mp contains the self-weight moments at the
%   passage points.  Solved by Gaussian elimination (A\Mp).
%
% SIDE EFFECT: this function also initialises all arch geometry globals
%   (angles, thickness, radius, x, y, xe, ye, xi, yi, density)
%   because it is the deepest call in the chain.

function [Fx1, Fy1, M1] = three_points(n1, e1, n2, e2, n3, e3)

global n radius_cst density_cst thickness_cst g aperture ...
       x y xe ye xi yi density angles radius thickness

% --- Build arch geometry ---
% Section face angles uniformly distributed over the full arch opening
a      = aperture;
da     = 2*a / n;
angles = (-a : da : a)';          % (n+1) x 1  [deg]

% Constant thickness and radius for all faces (could be made variable)
thickness = ones(n+1, 1) * thickness_cst;
radius    = ones(n+1, 1) * radius_cst;

% --- Extrados coordinates  (e = +1) ---
xe = sind(angles) .* (radius + thickness/2);
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
ye = cosd(angles) .* (radius + thickness/2);

% --- Intrados coordinates  (e = -1) ---
xi = sind(angles) .* (radius - thickness/2);
yi = cosd(angles) .* (radius - thickness/2);

% --- Voussoir density (one value per block, not per face) ---
density = ones(n, 1) * density_cst;

% --- Centerline coordinates  (e = 0) ---
x = sind(angles) .* radius;
y = cosd(angles) .* radius;

% Reference point: centre of the first section face
xr = x(1);
yr = y(1);

% --- Coordinates of the three passage points ---
% Each lies at its prescribed eccentricity on its respective face
x1 = sind(angles) .* (radius + thickness/2 .* e1);
y1 = cosd(angles) .* (radius + thickness/2 .* e1);

x2 = sind(angles) .* (radius + thickness/2 .* e2);
y2 = cosd(angles) .* (radius + thickness/2 .* e2);

x3 = sind(angles) .* (radius + thickness/2 .* e3);
y3 = cosd(angles) .* (radius + thickness/2 .* e3);

xa = x1(n1);  ya = y1(n1);
xb = x2(n2);  yb = y2(n2);
xc = x3(n3);  yc = y3(n3);

% --- Moment-equilibrium matrix A ---
% Row i: moment of (Fx1,Fy1,M1) about passage point i = 0
%   (y_pt - yr)*Fx1 - (x_pt - xr)*Fy1 - M1 = -M_selfweight(ni)
A = [ ya-yr,  -(xa-xr),  -1 ;
      yb-yr,  -(xb-xr),  -1 ;
      yc-yr,  -(xc-xr),  -1 ];

% --- Self-weight wrench ---
[Fx, Fy, M] = faces_wrenches();

% --- Shift moment to the passage points ---
% Subtract lever arm from section centroid to passage point
xa = xa - x(n1);  ya = ya - y(n1);
xb = xb - x(n2);  yb = yb - y(n2);
xc = xc - x(n3);  yc = yc - y(n3);

% Moment at each passage point = face moment + transport term
Ma = M(n1) - Fx(n1)*ya + Fy(n1)*xa;
Mb = M(n2) - Fx(n2)*yb + Fy(n2)*xb;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

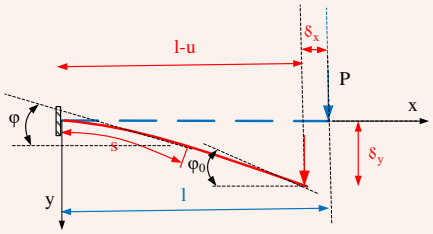
```
Mc = M(n3) - Fx(n3)*yc + Fy(n3)*xc;

Mp = [Ma; Mb; Mc];

% --- Solve for the unknown boundary force ---
W   = A \ Mp;
Fx1 = W(1);
Fy1 = W(2);
M1  = W(3);

end   % three_points
```

I.1.6 Grande deflettore di un fascio



Soluzione di problema in §29.2.3

Nota: solo `Sol=1` le altre due non danno risposta giusta, fino al lettore per debug.

```
% ========================================================================
% LARGE DEFLECTION ANALYSIS OF A CANTILEVER BEAM UNDER END LOAD
% ========================================================================
% A cantilever beam of length L carries a tip load P (vertical).
% For large deflections, the classical Euler-Bernoulli linear theory
% (delta = PL^3/3EI) is no longer accurate. The exact solution requires
% solving a nonlinear boundary value problem based on the elastica equation:
%
%         d^2 phi / ds^2 = -P*cos(phi) / EI
%
% where phi(s) is the rotation at arc-length s from the fixed end.
%
% This script compares three solution methods for the tip displacement:
%   Sol = 1 : Direct numerical integration (RECOMMENDED -- others are buggy)
%   Sol = 2 : Elliptic integral form (incomplete -- currently incorrect)
%   Sol = 3 : Complete elliptic integral of the 2nd kind
%
% Outputs: plot of phi_0 and normalised displacements vs load parameter PL^2/
    EI
% ========================================================================

clear; clc; close all;

% ------------------------------------------------------------------------
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
% Section 1 -- Beam properties
% ------------------------------------------------------------------------
L  = 4;                  % Length [m]
A  = 50e-6;              % Cross-sectional area [m^2]  (not used here)
I  = 1e7 * 1e-12;        % Second moment of area [m^4]
E  = 800e9;              % Young's modulus [Pa]
EI = E * I;              % Bending stiffness [N.m^2]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Load stepping
% ------------------------------------------------------------------------
% We sweep P from dP to P_max in equal increments.
% The load parameter x = P*L^2/EI is dimensionless -- it is the natural
% variable for the elastica problem.

dP     = 1000;                   % Load increment [N]
P_max  = 5000000;                % Maximum load   [N]
nSteps = P_max / dP;             % Number of load steps

% Pre-allocate result arrays (faster than growing inside the loop)
PP      = zeros(1, nSteps);      % Applied load at each step
x       = zeros(1, nSteps);      % Dimensionless load PL^2/EI
y0      = zeros(1, nSteps);      % Linear (small-deflection) tip displacement
   / L
phi     = zeros(1, nSteps);      % Tip rotation phi_0 [rad]
yv      = zeros(1, nSteps);      % Vertical tip displacement / L  (nonlinear)
yh      = zeros(1, nSteps);      % Horizontal tip displacement / L (nonlinear)

% Choose solution method (only Sol=1 is currently verified)
sol = 1;

% fsolve options -- suppress iteration output; tight tolerance
fsolve_opts = optimset('TolFun', 1e-6, 'Display', 'off');

% Initial guess for phi_0 (tip rotation).
% pi/4 works well for moderate loads; may need adjustment at very large P.
phi0_guess = pi / 4;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Main loop over load steps
% ------------------------------------------------------------------------
for i = 1 : nSteps

    % Current load and dimensionless load parameter
    P     = i * dP;
    PP(i) = P;
    x(i)  = P * L^2 / EI;           % PL^2/EI  (horizontal axis of final plot)

    % Linear (Euler-Bernoulli) tip deflection, normalised by L
    % Valid only for small deflections; included for comparison
    y0(i) = (P * L^3 / (3*EI)) / L;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
74
75      % alpha appears repeatedly: alpha = sqrt(P/EI)  [1/m]
76      alpha = sqrt(P / EI);
77
78      % ------------------------------------------------------------------
79      % Step 3a -- Solve for phi_0 (rotation at the free tip)
80      % ------------------------------------------------------------------
81      % The exact arc-length condition gives an implicit equation for phi_0:
82      %
83      %   (1/sqrt(2)*alpha) * integral_0^phi0 [ 1/sqrt(sin(phi0)-sin(phi)) ]
    dphi = L
84      %
85      % We solve this numerically with fsolve.
86      % FuncPhi0 (defined at the bottom) returns the residual of this equation.
87
88      [phi0, ~, exitflag] = fsolve( ...
89          @(phi0) FuncPhi0(phi0, alpha, L), ...
90          phi0_guess, fsolve_opts);
91
92      if exitflag <= 0
93          warning('Step %d: fsolve did not converge. phi0 may be unreliable.', i
    );
94      end
95
96      phi(i) = phi0;    % Store converged tip rotation
97
98      % ------------------------------------------------------------------
99      % Step 3b -- Compute tip displacements using the chosen method
100     % ------------------------------------------------------------------
101
102     beta = alpha * L;    % dimensionless load parameter (= sqrt(PL^2/EI))
103
104     if sol == 1
105         % --- Method 1: Direct numerical integration ---
106         % Vertical displacement (normalised by L):
107         %   delta_y/L = (sqrt(2)/(2*beta)) * integral_0^phi0 [ sin(phi)/sqrt(
    sin(phi0)-sin(phi)) ] dphi
108         %
109         % Horizontal shortening (normalised by L):
110         %   delta_x/L = (sqrt(2)/(alpha*L)) * sqrt(sin(phi0)) - 1
111
112         integrand_v = @(phi) sin(phi) ./ sqrt( max(eps, sin(phi0) - sin(phi))
    );
113         integral_v  = integral(integrand_v, 0, phi0);
114
115         yv(i) = (sqrt(2) / (2*beta)) * integral_v;
116         yh(i) = (sqrt(2) / (alpha*L)) * sqrt(sin(phi0)) - 1;
117
118     elseif sol == 2
119         % --- Method 2: Elliptic integral formulation (CURRENTLY INCORRECT)
    ---
```


I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

```
        % The substitution k = sqrt((1+sin(phi0))/2) transforms the integral
        % into a standard elliptic form.  This branch has a known bug -- left
        % as an exercise for the reader.

        k = sqrt( (1 + sin(phi0)) / 2 );

        integrand_v = @(theta) (2*k^2*sin(theta).^2 - 1) ...
                               ./ sqrt(1 - k^2*sin(theta).^2);
        integral_v  = integral(integrand_v, 0, pi/2);

        yv(i) = (1 / beta) * integral_v;
        % yh not computed in this branch

    elseif sol == 3
        % --- Method 3: Complete and incomplete elliptic integrals of 2nd kind
    ---
        % Uses MATLAB's built-in ellipticE.
        % delta_y/L = 1 - (2/beta) * [ E(k) - E(phi0, k) ]
        % where E(k) is the complete and E(phi0,k) the incomplete elliptic
    integral.

        k        = sqrt( (1 + sin(phi0)) / 2 );
        E_k      = ellipticE(k);                        % complete
        E_k_phi0 = ellipticE(asin(sin(phi0)), k);       % incomplete

        yv(i) = 1 - (2/beta) * (E_k - E_k_phi0);
        yh(i) = (sqrt(2) / (alpha*L)) * sqrt(sin(phi0)) - 1;

    end

end   % end load-step loop

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Plot results
% -------------------------------------------------------------------------
scrsz = get(0, 'ScreenSize');
fs    = 14;   % font size

hf1 = figure('Position', [1, scrsz(4)/4.5, scrsz(3)/2.5, scrsz(4)/2.0]);

% --- Upper panel: tip rotation vs load parameter ---
subplot(2, 1, 1)
plot(x, phi, 'k', 'LineWidth', 2)
set(gca, 'XLim', [0 10], 'XTick', 0:1:10)
set(gca, 'YLim', [0 1.6], 'YTick', 0:0.2:1.6)
grid on
xlabel('PL^2 / EI',  'FontSize', fs)
ylabel('\phi_0  [rad]', 'FontSize', fs)
title('Tip rotation', 'FontSize', fs)
set(gca, 'FontSize', fs, 'Color', 'none')

```

COPIA DI REVISIONE

```
% --- Lower panel: normalised tip displacements vs load parameter ---
subplot(2, 1, 2)
plot(x, yv, 'r', x, yh, 'b', 'LineWidth', 2)
set(gca, 'XLim', [0 10], 'XTick', 0:1:10)
set(gca, 'YLim', [-0.6 1.0], 'YTick', -0.6:0.2:1.0)
grid on
xlabel('PL^2 / EI', 'FontSize', fs)
ylabel('Normalised displacement', 'FontSize', fs)
title('Tip displacements (normalised by L)', 'FontSize', fs)
lgnd = legend('\delta_y / L', '\delta_x / L', 'Location', 'best');
set(lgnd, 'Color', 'none')
set(gca, 'FontSize', fs, 'Color', 'none')

exportgraphics(hf1, 'Displ-Load-Anal.pdf', 'BackgroundColor', 'none')

% ========================================================================
% LOCAL FUNCTION: FuncPhi0
% ========================================================================
function residual = FuncPhi0(phi0, alpha, L)
% FuncPhi0  Residual of the arc-length constraint for the elastica problem.
%
%   The exact arc-length condition for a cantilever under tip load P is:
%
%     (1 / (sqrt(2)*alpha)) * integral_0^phi0 [ 1/sqrt(sin(phi0)-sin(phi)) ] dphi = L
%
%   Rearranging, the residual (which fsolve drives to zero) is:
%
%     residual = (1/(sqrt(2)*alpha)) * integral(...) - L
%
%   Inputs:
%     phi0     : current guess for tip rotation [rad]
%     alpha    : sqrt(P/EI)  [1/m]
%     L        : beam length [m]
%
%   Output:
%     residual : how far the arc-length condition is from being satisfied

    % The integrand has a square-root singularity at phi = phi0.
    % max(eps, ...) prevents division by exactly zero at the upper limit.
    integrand = @(phi) 1 ./ sqrt( max(eps, sin(phi0) - sin(phi)) );

    % Numerical integration from 0 to phi0
    integralValue = integral(integrand, 0, phi0, 'RelTol', 1e-6, 'AbsTol', 1e-9);

    % Residual: left-hand side minus right-hand side of the arc-length equation
    residual = (1 / (sqrt(2) * alpha)) * integralValue - L;

end
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

I.2 Parte II: Progettazione e analisi strutturali

Questa sezione affronta la progettazione strutturale dettagliata e l'analisi dei frame, tra cui il design delle conchiglie, i metodi di analisi del telaio, la torsione e l'ottimizzazione.

I.2.1 Progettazione di conchiglie cilindriche

Codice scritto da Georg, R., 2014; Necessità di verifica.

Il codice seguente è sviluppato per la progettazione della parte di guscio del guscio semplicemente supportato conchiglia cilindrica.Il codice segue la procedura di disegno delineata dalla teoria delle gusci superficiali e viene discusso in §35.2.3.2.2. Lo scopo dello strumento di progettazione è quello di determinare le forze interne e spostamenti all'interno della shell.The codice di progettazione del guscio consiste degli input base e formulazioni il dimensionamento della shell . La funzione del coefficiente di shell produce le equazioni simultanee necessarie per risolvere le costanti arbitrarie, con valori costanti noti, la funzione delle forze di guscio determina le forze interne e lo spostamento della shell. Il codice è presentato come segue:

```
% ========================================================================
% DESIGN OF CYLINDRICAL BARREL VAULT SHELLS
% ========================================================================
% Analyzes a cylindrical concrete shell roof using the Beam-Arch (Schorer)
% method, which decomposes the shell response into:
%
%   (a) MEMBRANE (PARTICULAR) SOLUTION:
%       The shell carries load by in-plane membrane forces only.
%       Valid in the interior, away from edges.
%
%   (b) BENDING (HOMOGENEOUS) SOLUTION:
%       Edge disturbances decay inward from the free longitudinal edges.
%       Governed by a 4th-order ODE whose characteristic roots involve
%       mixed trig/hyperbolic functions.
%
%   (c) EDGE BEAM COMPATIBILITY:
%       The shell edge and the stiffening edge beam must deform together.
%       A 2x2 compatibility system is solved for the edge forces.
%
% GEOMETRY (single barrel vault):
%   x  : longitudinal axis  (0 to L)
%   phi: circumferential angle from crown  (0 at crown, phi_k at edge)
```

COPIA DI REVISIONE

```
%   r  : radius of curvature
%   h  : shell thickness
%
% LOAD: uniform dead/live load q [ksf] on the projected plan area
%
% SIGN CONVENTION: forces per unit length [kip/ft], moments [kip.ft/ft]
%   N_phi  : circumferential membrane force
%   N_x    : longitudinal membrane force
%   N_xphi : in-plane shear
%   M_phi  : circumferential bending moment
%   M_x    : longitudinal bending moment
%   Q_phi  : circumferential transverse shear
%   Q_x    : longitudinal transverse shear
%
% UNITS: kip, ft throughout (E in ksf, q in ksf, dimensions in ft)
%
% STRUCTURE OF THIS FILE:
%   Part 1  -- Shell analysis (membrane + bending solution)
%   Part 2  -- Edge beam compatibility analysis
%   Part 3  -- function shell_coefficients  (coefficient matrix rows)
%   Part 4  -- function shell_forces        (force/displacement evaluation)
% ========================================================================


% ========================================================================
% PART 1 -- SHELL ANALYSIS
% ========================================================================

close all; fclose all; clear all; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.1 -- Geometry and loading
% ------------------------------------------------------------------------
L     = 66.5;           % shell span (longitudinal)             [ft]
r     = 26.6;           % radius of curvature                   [ft]
h     = 0.25;           % shell thickness                       [ft]
phi_k = 45 * pi/180;    % half-angle of shell (edge angle)      [rad]
phi   = 0;              % current evaluation angle from edge    [rad]
q     = 0.080;          % uniform surface load                  [ksf]

% phit: angle measured from the crown (phi=0 at crown, phi_k at edge)
% Note: phi is measured FROM the edge, so phit = phi - phi_k
phit = phi - phi_k;
Phi  = phi_k - phi;     % complementary angle (from crown)      [rad]

% Pack geometry into struct for reference
dimload.Length  = L;
dimload.Radius  = r;
dimload.Height  = h;
dimload.Phi_k   = phi_k;
dimload.Phi     = phi;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
dimload.Pd      = q;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.2 -- Shell bending stiffness constants
% ------------------------------------------------------------------------
% The Fourier series representation uses a single half-wave (n=1).
% k = n*pi/L is the longitudinal wave number.

n_fourier = 1;              % Fourier harmonic number (single half-wave)
k         = n_fourier * pi / L;   % longitudinal wave number         [1/ft]

% Bending rigidity of the shell plate
E = 4.32e5;             % Young's modulus of concrete            [ksf]
D = E * h^3 / 12;       % flexural rigidity                      [kip.ft]

% Shell bending parameter (Schorer theory)
% gamma combines the wave number, radius, and thickness
gamma = r * k / 3^(1/4) * sqrt(h/r);

% Q: combined shell parameter used in the characteristic equation
Q = 3^(1/8) * (r/h)^(1/4) * sqrt(r*k);

% Evaluation point: midspan (where Fourier sin/cos terms are maximum)
x = L/2;

Shell.k     = k;
Shell.gamma = gamma;
Shell.Q     = Q;
Shell.x     = x;
Shell.E     = E;
Shell.D     = D;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.3 -- Characteristic roots of the bending equation
% ------------------------------------------------------------------------
% The homogeneous bending solution involves four complex characteristic
% roots.  Their real and imaginary parts m1,n1,m2,n2 are computed from
% Eq. 4.54 of the reference text:
%
%   roots involve  sqrt( sqrt((1+/-gamma)^2 + 1)  +/-  (1+/-gamma) ) / 2

m1 = sqrt( ( sqrt((1+gamma)^2 + 1) + (1+gamma) ) / 2 );
n1 = sqrt( ( sqrt((1+gamma)^2 + 1) - (1+gamma) ) / 2 );
m2 = sqrt( ( sqrt((1-gamma)^2 + 1) - (1-gamma) ) / 2 );
n2 = sqrt( ( sqrt((1-gamma)^2 + 1) + (1-gamma) ) / 2 );

mn = [m1, n1, m2, n2];   % collect for passing to sub-functions

% Root powers (Eq. 4.55): scale m,n by the shell parameter Q
% These appear as arguments of the trig/hyperbolic functions in the solution
alpha1  = Q * m1;    % decay/oscillation rate, first root pair
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
beta1   = Q * n1;
alpha1p = Q * m2;    % decay/oscillation rate, second root pair
beta1p  = Q * n2;

rp = [alpha1, beta1, alpha1p, beta1p];   % collect for sub-functions

Roots.M1     = m1;      Roots.N1     = n1;
Roots.M2     = m2;      Roots.N2     = n2;
Roots.Alpha1 = alpha1;  Roots.Alpha2 = alpha1p;
Roots.Beta1  = beta1;   Roots.Beta2  = beta1p;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.4 -- Edge loading (Fourier coefficients)
% ------------------------------------------------------------------------
% The boundary conditions at the free edge (phi = phi_k) are expressed
% as Fourier series.  For a single half-wave the coefficients are:
%
%   TL  : tangential load resultant at the edge
%   SL  : shear load resultant at the edge

TL       =  4/pi * q * r * cos(phi_k - phi) * sin(k*x);
SL       =  4/pi * q * r * 2/(r*k) * sin(phi_k - phi) * cos(k*x);

M_phi_edge   = 0;         % free edge: no moment applied
Np_phi_edge  = -TL;       % normal membrane force at edge
Qp_phi_edge  = 0;         % free edge: no transverse shear
Np_xphi_edge = -SL;       % in-plane shear at edge

EdgeLoad.M_phi   = M_phi_edge;
EdgeLoad.N_phi   = Np_phi_edge;
EdgeLoad.Qp_phi  = Qp_phi_edge;
EdgeLoad.N_xphi  = Np_xphi_edge;

% Assemble right-hand side vector for the 4x4 coefficient system
f = [M_phi_edge; Np_phi_edge; Qp_phi_edge; Np_xphi_edge];

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.5 -- Assemble the 4x4 coefficient matrix and solve
% ------------------------------------------------------------------------
% The bending solution has 4 unknown constants (a,b,c,d).
% We enforce the 4 edge boundary conditions, each yielding one row of F.
% shell_coefficients(SC,...) returns the row of F corresponding to
% stress resultant type SC evaluated at the edge.
%
% SC index map:
%   1=M_phi  2=M_x   3=Q_x   4=N_phi  5=N_x    6=u
%   7=w      8=Q_phi 9=N_xphi 10=v   11=M_xphi 12=Q_phip

F1 = shell_coefficients(1,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % M_phi
F2 = shell_coefficients(4,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % N_phi
F3 = shell_coefficients(12, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % Q_phip
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
F4 = shell_coefficients(9,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % N_xphi

F = [F1; F2; F3; F4];   % 4x4 coefficient matrix

ShellCoef.M_phi  = F1;
ShellCoef.N_phi  = F2;
ShellCoef.Qp_phi = F3;
ShellCoef.N_xphi = F4;

% Solve for the 4 integration constants: F * constants = -f
constants = -F \ f;     % [a; b; c; d]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.6 -- Evaluate total forces (membrane + bending) at midspan
% ------------------------------------------------------------------------
% Reset evaluation point to midspan, crown (phi=0)
phi  = 0;
phit = phi - phi_k;
x    = L/2;

% --- Membrane (particular) solution at midspan, crown ---
Np_x     = -4/pi * 2*q/(r*k^2)       * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
Np_phi   = -4/pi * q*r                * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
Np_xphi  = -4/pi * q*r * 2/(r*k)     * sin(phi_k-phi) * cos(k*x);
up       =  2*q/(E*h*r*k^3)           * cos(phi_k-phi) * cos(k*x);
vp       = -2*q/(E*h*r^2*k^4) * (1 + 2*k^2*r^2) * sin(phi_k-phi) * sin(k*x);
wp       = -2*q/(E*h*r^2*k^4) * (1 + 2*k^2*r^2 + r^4*k^4/2) * cos(phi_k-phi) *
    sin(k*x);

% --- Total forces = bending (homogeneous) + membrane (particular) ---
% shell_forces evaluates the homogeneous part; membrane part added here

M_phi  = shell_forces(1,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
M_x    = shell_forces(2,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
M_xphi = shell_forces(11, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
Q_phi  = shell_forces(8,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
Q_x    = shell_forces(3,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
N_phi  = shell_forces(4,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) +
   Np_phi;
N_x    = shell_forces(5,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) +
   Np_x;
N_xphi = shell_forces(9,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) +
   Np_xphi;
u      = shell_forces(6,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + up;
v      = shell_forces(10, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + vp;
w      = shell_forces(7,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + wp;

% --- Resolve displacements into vertical and horizontal components ---
DV = -v * sin(phi_k-phi) + w * cos(phi_k-phi);   % vertical displacement
DH =  v * cos(phi_k-phi) + w * sin(phi_k-phi);   % horizontal displacement

```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
% --- Store results ---
Forces.M_phi   = M_phi;    Forces.N_phi  = N_phi;
Forces.N_x     = N_x;      Forces.N_xphi = N_xphi;
Displacement.u = u;        Displacement.v = v;    Displacement.w = w;
Displacement.up = up;      Displacement.vp = vp;  Displacement.wp = wp;


% ========================================================================
% PART 2 -- EDGE BEAM COMPATIBILITY ANALYSIS
% ========================================================================
% The shell free edge is stiffened by a rectangular edge beam.
% At the shell-beam interface, vertical displacement and rotation must
% be compatible.  This gives a 2x2 linear system for the unknown
% edge forces: vertical edge load Vb and in-plane shear SB.
%
% The approach follows ASCE Manual 31 (Cylindrical Shell Roofs).

close all; fclose all; clear all; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.1 -- Inputs
% ------------------------------------------------------------------------
b     = 1;              % edge beam width                       [ft]
d_eb  = 2.25;           % edge beam depth                       [ft]
L     = 66.5;           % span                                  [ft]
r     = 26.6;           % shell radius                          [ft]
h     = 0.25;           % shell thickness                       [ft]
phi_k = 45 * pi/180;    % shell edge angle                      [rad]
phi   = 0 * pi/180;     % evaluation angle from edge            [rad]
q     = 0.080;          % shell surface load                    [ksf]
rho   = 0.150;          % concrete unit weight                  [kcf]
w_eb  = b * d_eb * rho; % edge beam self-weight per unit length [klf]

n_fourier = 1;
k = n_fourier * pi / L;
x = L/2;
E = 4.32e5;             % Young's modulus                       [ksf]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.2 -- Known shell force at edge (from Part 1)
% ------------------------------------------------------------------------
N_x_shell = 99.03;      % longitudinal membrane force from shell analysis [kip
    /ft]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.3 -- ASCE Manual 31 influence coefficients
% ------------------------------------------------------------------------
% These coefficients relate unit edge loads (vertical V, shear S) to
% shell displacements and forces at the edge.
% Table 2B: deformation coefficients (delta_v)
C1 =  96.10;    % vertical edge load  -> vertical displacement
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
C2 = -64.69;    % horizontal edge load -> vertical displacement
C3 =   2.500;   % shear edge load     -> vertical displacement

% Table 2A: force coefficients (T_x)
C4 =  19.64;    % vertical edge load  -> N_x
C5 =   1.388;   % shear edge load     -> N_x

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.4 -- Membrane forces and edge load resultants
% ------------------------------------------------------------------------
Np_phi  = -4/pi * q * r * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
Np_xphi = -4/pi * q * r * 2/(r*k) * sin(phi_k-phi) * cos(0);

% Resolve membrane force at the edge into vertical, horizontal, shear
VL =  -Np_phi  * sin(phi_k);   % vertical component of N_phi at edge
HL =  -Np_phi  * cos(phi_k);   % horizontal component
SL =  -Np_xphi;                % shear component

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.5 -- Compatibility matrix and right-hand side
% ------------------------------------------------------------------------
% The shell and beam flexibility matrices S and B are assembled.
% NS, NB: normalisation factors (flexibility denominators)

NS = L^4 / (r^3 * h * E);   % shell flexibility normalisation
NB = L^4 / (d_eb^3 * b * E); % beam flexibility normalisation

% Shell flexibility matrix and fixed-end load vector
% Row 1: vertical displacement compatibility
% Row 2: N_x compatibility
FS(1,1) = NS * (q*r * (((2*r)/(pi*L))^2 + 2/pi^4 + (r/L)^4 * cos(phi_k-phi)^2)
    ...
              + C1*VL + C2*HL + C3*SL) * sin(k*x);
FS(2,1) = N_x_shell / h;

S(1,1) = NS * C1 * sin(k*x);
S(1,2) = NS * C3 * sin(k*x);
S(2,1) = NS * E*r/L^2 * C4 * sin(k*x);
S(2,2) = NS * E*r/L^2 * C5 * sin(k*x);

% Beam flexibility matrix and fixed-end load vector
FB(1,1) = NB * (-4/pi) * w_eb * 12/(pi*n_fourier)^4 * sin(k*x);
FB(2,1) = NB * E*d_eb/L^2 * 4/pi * w_eb * 6/(pi*n_fourier)^2 * sin(k*x);

B(1,1) =  NB * 12/(pi*n_fourier)^4 * sin(k*x);
B(1,2) = -NB * d_eb/L * 6/(pi*n_fourier)^3 * sin(k*x);
B(2,1) = -NB * E*d_eb/L^2 * 6/(pi*n_fourier)^2 * sin(k*x);
B(2,2) =  L/(b*d_eb) * 4/(pi*n_fourier) * sin(k*x);

% Combined system: (S + B) * X = -(FS + FB)
BS = S + B;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
F  = FS + FB;
X  = BS \ (-F);

Vb = X(1);   % vertical edge force solution   [kip/ft]
SB = X(2);   % in-plane shear edge force      [kip/ft]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.6 -- Final internal forces including edge beam correction
% ------------------------------------------------------------------------
% The ASCE Manual 31 influence coefficients translate the solved edge
% forces back into increments of each stress resultant.

% N_x: longitudinal force
N_x = N_x_shell + Vb*C4 + SB*C5;

% N_xphi: in-plane shear (C4=0 for shear, C5=0.4)
N_xphi = 0 + Vb*0 + SB*0.4;

% N_phi: circumferential force (C4=0.707 for vertical, C5=0 for shear)
N_phi = 0 + Vb*0.707 + SB*0;

% M_phi: bending moment (no correction from edge beam for this case)
M_phi = 0;

Forces.N_x     = N_x;
Forces.N_xphi  = N_xphi;
Forces.N_phi   = N_phi;
Forces.M_phi   = M_phi;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.7 -- Reinforcement design (ACI working stress)
% ------------------------------------------------------------------------
fs = 20;    % allowable steel stress                          [ksi]
ds = 2;     % effective depth of shell reinforcement          [in]

% Principal membrane forces from Mohr's circle for membrane forces
N1 = (N_x + N_phi)/2 + sqrt(N_xphi^2 + ((N_x - N_phi)/2)^2);  % max principal
N2 = (N_x + N_phi)/2 - sqrt(N_xphi^2 + ((N_x - N_phi)/2)^2);  % min principal

% Shell reinforcement: tension governed by N1
As_shell = N1 / fs;                          % [in^2/ft] -- tension steel in
   shell

% Bending reinforcement (if M_phi produces tension)
As_bend  = M_phi * 12 / (fs * 7/8 * ds);    % [in^2/ft] -- bending steel

% Edge beam reinforcement: tension from arch action
T        = ((N1 + 8.32)/2 - 8.32) * d_eb;
As_beam  = T / fs;                           % [in^2] -- beam longitudinal
   steel

```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
% Minimum reinforcement per ACI (temperature and shrinkage)
Amin1 = 0.0035 * h * 12 * 12;   % [in^2/ft] -- each direction (deformed bars)
Amin2 = 0.0018 * h * 12 * 12;   % [in^2/ft] -- welded wire fabric

fprintf('\n--- Reinforcement Summary ---\n');
fprintf('  Shell tension steel  As_shell = %.4f in^2/ft\n', As_shell);
fprintf('  Shell bending steel  As_bend  = %.4f in^2/ft\n', As_bend);
fprintf('  Edge beam steel      As_beam  = %.4f in^2\n',    As_beam);
fprintf('  Min steel (bars)     Amin1    = %.4f in^2/ft\n', Amin1);
fprintf('  Min steel (WWF)      Amin2    = %.4f in^2/ft\n', Amin2);


% ========================================================================
% PART 3 -- FUNCTION: shell_coefficients
% ========================================================================
% Builds one row of the 4x4 coefficient matrix F used to enforce the
% edge boundary conditions on the bending (homogeneous) solution.
%
% Each stress resultant SC has the form:
%
%   F_SC = 2 * R(SC) * [ B1*T1 - B2*T2,  -B2*T1 - B1*T2,
%                        B3*T3 - B4*T4,  -B4*T3 - B3*T4 ]
%
% where T1..T8 are trig/hyperbolic combinations evaluated at the edge,
% and B1..B4 are dimensionless coefficients specific to each resultant.
%
% The distinction SC<8 / SC>=8 selects between two sets of T functions
% (T1..T4 for moments/axial; T5..T8 for shears/twists).
%
% INPUT:
%   SC      : stress resultant selector (1..12, see index map in Part 1)
%   k       : longitudinal wave number [1/ft]
%   r       : shell radius [ft]
%   phit    : angle from crown to evaluation point [rad]
%   rp      : [alpha1, beta1, alpha1p, beta1p] root parameters
%   mn      : [m1, n1, m2, n2] root components
%   Q       : shell parameter
%   gamma   : shell bending parameter
%   h       : thickness [ft]
%   x       : longitudinal evaluation point [ft]
%
% OUTPUT:
%   Shell   : 1x4 row vector -- one row of the coefficient matrix

function Shell = shell_coefficients(SC, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x)

alpha1  = rp(1);  beta1   = rp(2);
alpha1p = rp(3);  beta1p  = rp(4);
m1 = mn(1);  n1 = mn(2);  m2 = mn(3);  n2 = mn(4);

% --- Trig/hyperbolic basis functions evaluated at phit ---
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
% Set 1 (for SC < 8: moments, axial forces, displacements u, w)
T1 = cos(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T2 = sin(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T3 = cos(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);
T4 = sin(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
% Set 2 (for SC >= 8: shears, twists, displacement v)
T5 = cos(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T6 = sin(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T7 = cos(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
T8 = sin(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);

% --- Material and bending stiffness ---
E_mod = 4.32e5;
D     = E_mod * h^3 / 12;

% --- Scaling factor R(SC) and shape coefficients B1..B4 for each SC ---
% R: the 'particular solution' scale factor  (depends on x via sin/cos)
% B1..B4: dimensionless coefficients from the theory (Eq. 4.5x)
R  = zeros(1,12);
B1 = zeros(1,12);
B2 = zeros(1,12);
B3 = zeros(1,12);
B4 = zeros(1,12);

R(1)  = -2*D/r^2          * sin(k*x);   % M_phi
B1(1) = Q^2*(1+gamma);   B2(1) = Q^2;   B3(1) = Q^2*(gamma-1); B4(1) = Q^2;

R(2)  =  2*D*k^2          * sin(k*x);   % M_x
B1(2) = 1;  B2(2) = 0;  B3(2) = 1;  B4(2) = 0;

R(3)  = -2*D*k^3/gamma    * cos(k*x);   % Q_x
B1(3) = 1;  B2(3) = 1;  B3(3) = -1; B4(3) = 1;

R(4)  =  4*D*r*k^4/gamma^2 * sin(k*x);   % N_phi
B1(4) = 0;  B2(4) = 1;  B3(4) = 0;  B4(4) = -1;

R(5)  = -4*D*r*k^4/gamma^3 * sin(k*x);   % N_x
B1(5) = -1;  B2(5) = 1+gamma;  B3(5) = 1;  B4(5) = 1-gamma;

R(6)  =  4*D*r*k^3/(h*E_mod*gamma^3) * cos(k*x);   % u
B1(6) = -1;  B2(6) = 1+gamma;  B3(6) = 1;  B4(6) = 1-gamma;

R(7)  =  2                * sin(k*x);   % w
B1(7) = 1;  B2(7) = 0;  B3(7) = 1;  B4(7) = 0;

R(8)  = -2*D*k^3/(sqrt(gamma))^3 * sin(k*x);   % Q_phi
B1(8) = m1-n1;   B2(8) = m1+n1;   B3(8) = -(m2+n2); B4(8) = m2-n2;

R(9)  =  4*D*r*k^4/(sqrt(gamma))^5 * cos(k*x);   % N_xphi
B1(9) = -n1;  B2(9) = m1;  B3(9) = n2;  B4(9) = -m2;

```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
R(10) =  4*D*r*k^3/(E_mod*h*(sqrt(gamma))^7) * sin(k*x);   % v
B1(10) = m1+n1*(1-gamma);   B2(10) = n1-m1*(1-gamma);
B3(10) = -m2+n2*(1+gamma);  B4(10) = -n2-m2*(1+gamma);

R(11) =  2*D*k/r           * cos(k*x);   % M_xphi
B1(11) = alpha1;  B2(11) = beta1;  B3(11) = alpha1p;  B4(11) = beta1p;

R(12) = -2*D*k^3/(sqrt(gamma))^3 * sin(k*x);   % Q_phip
B1(12) = m1*(1-gamma)-n1;    B2(12) = m1+n1*(1-gamma);
B3(12) = -m2*(1+gamma)-n2;   B4(12) = m2-n2*(1+gamma);

% --- Assemble the row vector for stress resultant SC ---
% SC < 8: use T1..T4 (moments, axial, u, w)
% SC >= 8: use T5..T8 (shears, twists, v)
if SC < 8
    A_col = ( B1(SC)*T1 - B2(SC)*T2);
    B_col = (-B2(SC)*T1 - B1(SC)*T2);
    C_col = ( B3(SC)*T3 - B4(SC)*T4);
    D_col = (-B4(SC)*T3 - B3(SC)*T4);
else
    A_col = ( B1(SC)*T5 - B2(SC)*T6);
    B_col = (-B2(SC)*T5 - B1(SC)*T6);
    C_col = ( B3(SC)*T7 - B4(SC)*T8);
    D_col = (-B4(SC)*T7 - B3(SC)*T8);
end

Shell = [A_col, B_col, C_col, D_col] * 2 * R(SC);

end   % shell_coefficients


% ========================================================================
% PART 4 -- FUNCTION: shell_forces
% ========================================================================
% Evaluates a single stress resultant or displacement at a given point
% using the four known integration constants (a, b, c, d).
%
% This is the same basis as shell_coefficients, but now the constants
% are known and we compute the scalar force value rather than a matrix row.
%
% INPUT:
%   SC        : stress resultant selector (same index as shell_coefficients)
%   constants : [a; b; c; d] -- solved integration constants
%   (remaining arguments same as shell_coefficients)
%
% OUTPUT:
%   F  : scalar value of the requested stress resultant or displacement

function F = shell_forces(SC, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x)

a = constants(1);  b = constants(2);
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
c = constants(3);  d = constants(4);

alpha1  = rp(1);  beta1   = rp(2);
alpha1p = rp(3);  beta1p  = rp(4);
m1 = mn(1);  n1 = mn(2);  m2 = mn(3);  n2 = mn(4);

% --- Same trig/hyperbolic basis functions as shell_coefficients ---
T1 = cos(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T2 = sin(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T3 = cos(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);
T4 = sin(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
T5 = cos(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T6 = sin(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T7 = cos(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
T8 = sin(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);

% --- Same R and B coefficient tables ---
E_mod = 4.32e5;
D     = E_mod * h^3 / 12;

R  = zeros(1,11);   % only SC 1..11 used in shell_forces (no SC=12 here)
B1 = zeros(1,11);
B2 = zeros(1,11);
B3 = zeros(1,11);
B4 = zeros(1,11);

R(1)  = -2*D/r^2           * sin(k*x);
B1(1) = Q^2*(1+gamma);  B2(1) = Q^2;  B3(1) = Q^2*(gamma-1);  B4(1) = Q^2;

R(2)  =  2*D*k^2            * sin(k*x);
B1(2) = 1;  B2(2) = 0;  B3(2) = 1;  B4(2) = 0;

R(3)  = -2*D*k^3/gamma      * cos(k*x);
B1(3) = 1;  B2(3) = 1;  B3(3) = -1;  B4(3) = 1;

R(4)  =  4*D*r*k^4/gamma^2  * sin(k*x);
B1(4) = 0;  B2(4) = 1;  B3(4) = 0;  B4(4) = -1;

R(5)  = -4*D*r*k^4/gamma^3  * sin(k*x);
B1(5) = -1;  B2(5) = 1+gamma;  B3(5) = 1;  B4(5) = 1-gamma;

R(6)  =  4*D*r*k^3/(h*E_mod*gamma^3) * cos(k*x);
B1(6) = -1;  B2(6) = 1+gamma;  B3(6) = 1;  B4(6) = 1-gamma;

R(7)  =  2                   * sin(k*x);
B1(7) = 1;  B2(7) = 0;  B3(7) = 1;  B4(7) = 0;

R(8)  = -2*D*k^3/(sqrt(gamma))^3 * sin(k*x);
B1(8) = m1-n1;   B2(8) = m1+n1;   B3(8) = -(m2+n2);  B4(8) = m2-n2;

R(9)  =  4*D*r*k^4/(sqrt(gamma))^5 * cos(k*x);
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
B1(9) = -n1;  B2(9) = m1;  B3(9) = n2;  B4(9) = -m2;

R(10) =  4*D*r*k^3/(E_mod*h*(sqrt(gamma))^7) * sin(k*x);
B1(10) = m1+n1*(1-gamma);   B2(10) = n1-m1*(1-gamma);
B3(10) = -m2+n2*(1+gamma);  B4(10) = -n2-m2*(1+gamma);

R(11) =  2*D*k/r             * cos(k*x);
B1(11) = alpha1;  B2(11) = beta1;  B3(11) = alpha1p;  B4(11) = beta1p;

% --- Evaluate with known constants a, b, c, d ---
if SC < 8
    A_val = a*B1(SC)*T1 - a*B2(SC)*T2;
    B_val = b*(-B2(SC)*T1 - B1(SC)*T2);
    C_val = c*(B3(SC)*T3 - c*B4(SC)*T4);
    D_val = d*(-B4(SC)*T3 - d*B3(SC)*T4);
else
    A_val = a*B1(SC)*T5 - a*B2(SC)*T6;
    B_val = b*(-B2(SC)*T5 - b*B1(SC)*T6);
    C_val = c*B3(SC)*T7 - c*B4(SC)*T8;
    D_val = d*(-B4(SC)*T7 - d*B3(SC)*T8);
end

F = 2 * R(SC) * (A_val + B_val + C_val + D_val);

end   % shell_forces
```

I.2.2 Analisi approssimativa del telaio; metodo cantilever

```
% ========================================================================
% DESIGN OF CYLINDRICAL BARREL VAULT SHELLS
% ========================================================================
% Analyzes a cylindrical concrete shell roof using the Beam-Arch (Schorer)
% method, which decomposes the shell response into:
%
%   (a) MEMBRANE (PARTICULAR) SOLUTION:
%       The shell carries load by in-plane membrane forces only.
%       Valid in the interior, away from edges.
%
%   (b) BENDING (HOMOGENEOUS) SOLUTION:
%       Edge disturbances decay inward from the free longitudinal edges.
%       Governed by a 4th-order ODE whose characteristic roots involve
%       mixed trig/hyperbolic functions.
%
%   (c) EDGE BEAM COMPATIBILITY:
%       The shell edge and the stiffening edge beam must deform together.
%       A 2x2 compatibility system is solved for the edge forces.
%
% GEOMETRY (single barrel vault):
%   x  : longitudinal axis  (0 to L)
%   phi: circumferential angle from crown  (0 at crown, phi_k at edge)
```


I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

```
%   r  : radius of curvature
%   h  : shell thickness
%
% LOAD: uniform dead/live load q [ksf] on the projected plan area
%
% SIGN CONVENTION: forces per unit length [kip/ft], moments [kip.ft/ft]
%   N_phi  : circumferential membrane force
%   N_x    : longitudinal membrane force
%   N_xphi : in-plane shear
%   M_phi  : circumferential bending moment
%   M_x    : longitudinal bending moment
%   Q_phi  : circumferential transverse shear
%   Q_x    : longitudinal transverse shear
%
% UNITS: kip, ft throughout (E in ksf, q in ksf, dimensions in ft)
%
% STRUCTURE OF THIS FILE:
%   Part 1  -- Shell analysis (membrane + bending solution)
%   Part 2  -- Edge beam compatibility analysis
%   Part 3  -- function shell_coefficients  (coefficient matrix rows)
%   Part 4  -- function shell_forces        (force/displacement evaluation)
% ========================================================================


% ========================================================================
% PART 1 -- SHELL ANALYSIS
% ========================================================================

close all; fclose all; clear all; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.1 -- Geometry and loading
% ------------------------------------------------------------------------
L     = 66.5;           % shell span (longitudinal)             [ft]
r     = 26.6;           % radius of curvature                   [ft]
h     = 0.25;           % shell thickness                       [ft]
phi_k = 45 * pi/180;    % half-angle of shell (edge angle)      [rad]
phi   = 0;              % current evaluation angle from edge    [rad]
q     = 0.080;          % uniform surface load                  [ksf]

% phit: angle measured from the crown (phi=0 at crown, phi_k at edge)
% Note: phi is measured FROM the edge, so phit = phi - phi_k
phit = phi - phi_k;
Phi  = phi_k - phi;     % complementary angle (from crown)      [rad]

% Pack geometry into struct for reference
dimload.Length  = L;
dimload.Radius  = r;
dimload.Height  = h;
dimload.Phi_k   = phi_k;
dimload.Phi     = phi;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
dimload.Pd      = q;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.2 -- Shell bending stiffness constants
% ------------------------------------------------------------------------
% The Fourier series representation uses a single half-wave (n=1).
% k = n*pi/L is the longitudinal wave number.

n_fourier = 1;              % Fourier harmonic number (single half-wave)
k         = n_fourier * pi / L;   % longitudinal wave number         [1/ft]

% Bending rigidity of the shell plate
E = 4.32e5;             % Young's modulus of concrete            [ksf]
D = E * h^3 / 12;       % flexural rigidity                      [kip.ft]

% Shell bending parameter (Schorer theory)
% gamma combines the wave number, radius, and thickness
gamma = r * k / 3^(1/4) * sqrt(h/r);

% Q: combined shell parameter used in the characteristic equation
Q = 3^(1/8) * (r/h)^(1/4) * sqrt(r*k);

% Evaluation point: midspan (where Fourier sin/cos terms are maximum)
x = L/2;

Shell.k     = k;
Shell.gamma = gamma;
Shell.Q     = Q;
Shell.x     = x;
Shell.E     = E;
Shell.D     = D;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.3 -- Characteristic roots of the bending equation
% ------------------------------------------------------------------------
% The homogeneous bending solution involves four complex characteristic
% roots.  Their real and imaginary parts m1,n1,m2,n2 are computed from
% Eq. 4.54 of the reference text:
%
%   roots involve  sqrt( sqrt((1+/-gamma)^2 + 1)  +/-  (1+/-gamma) ) / 2

m1 = sqrt( ( sqrt((1+gamma)^2 + 1) + (1+gamma) ) / 2 );
n1 = sqrt( ( sqrt((1+gamma)^2 + 1) - (1+gamma) ) / 2 );
m2 = sqrt( ( sqrt((1-gamma)^2 + 1) - (1-gamma) ) / 2 );
n2 = sqrt( ( sqrt((1-gamma)^2 + 1) + (1-gamma) ) / 2 );

mn = [m1, n1, m2, n2];   % collect for passing to sub-functions

% Root powers (Eq. 4.55): scale m,n by the shell parameter Q
% These appear as arguments of the trig/hyperbolic functions in the solution
alpha1  = Q * m1;    % decay/oscillation rate, first root pair
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
beta1   = Q * n1;
alpha1p = Q * m2;    % decay/oscillation rate, second root pair
beta1p  = Q * n2;

rp = [alpha1, beta1, alpha1p, beta1p];   % collect for sub-functions

Roots.M1     = m1;      Roots.N1     = n1;
Roots.M2     = m2;      Roots.N2     = n2;
Roots.Alpha1 = alpha1;  Roots.Alpha2 = alpha1p;
Roots.Beta1  = beta1;   Roots.Beta2  = beta1p;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.4 -- Edge loading (Fourier coefficients)
% ------------------------------------------------------------------------
% The boundary conditions at the free edge (phi = phi_k) are expressed
% as Fourier series.  For a single half-wave the coefficients are:
%
%   TL  : tangential load resultant at the edge
%   SL  : shear load resultant at the edge

TL       =  4/pi * q * r * cos(phi_k - phi) * sin(k*x);
SL       =  4/pi * q * r * 2/(r*k) * sin(phi_k - phi) * cos(k*x);

M_phi_edge   = 0;         % free edge: no moment applied
Np_phi_edge  = -TL;       % normal membrane force at edge
Qp_phi_edge  = 0;         % free edge: no transverse shear
Np_xphi_edge = -SL;       % in-plane shear at edge

EdgeLoad.M_phi   = M_phi_edge;
EdgeLoad.N_phi   = Np_phi_edge;
EdgeLoad.Qp_phi  = Qp_phi_edge;
EdgeLoad.N_xphi  = Np_xphi_edge;

% Assemble right-hand side vector for the 4x4 coefficient system
f = [M_phi_edge; Np_phi_edge; Qp_phi_edge; Np_xphi_edge];

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.5 -- Assemble the 4x4 coefficient matrix and solve
% ------------------------------------------------------------------------
% The bending solution has 4 unknown constants (a,b,c,d).
% We enforce the 4 edge boundary conditions, each yielding one row of F.
% shell_coefficients(SC,...) returns the row of F corresponding to
% stress resultant type SC evaluated at the edge.
%
% SC index map:
%   1=M_phi  2=M_x   3=Q_x   4=N_phi  5=N_x    6=u
%   7=w      8=Q_phi 9=N_xphi 10=v   11=M_xphi 12=Q_phip

F1 = shell_coefficients(1,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % M_phi
F2 = shell_coefficients(4,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % N_phi
F3 = shell_coefficients(12, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % Q_phip
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
F4 = shell_coefficients(9,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % N_xphi

F = [F1; F2; F3; F4];   % 4x4 coefficient matrix

ShellCoef.M_phi  = F1;
ShellCoef.N_phi  = F2;
ShellCoef.Qp_phi = F3;
ShellCoef.N_xphi = F4;

% Solve for the 4 integration constants: F * constants = -f
constants = -F \ f;     % [a; b; c; d]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.6 -- Evaluate total forces (membrane + bending) at midspan
% ------------------------------------------------------------------------
% Reset evaluation point to midspan, crown (phi=0)
phi  = 0;
phit = phi - phi_k;
x    = L/2;

% --- Membrane (particular) solution at midspan, crown ---
Np_x     = -4/pi * 2*q/(r*k^2)       * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
Np_phi   = -4/pi * q*r                * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
Np_xphi  = -4/pi * q*r * 2/(r*k)     * sin(phi_k-phi) * cos(k*x);
up       =  2*q/(E*h*r*k^3)           * cos(phi_k-phi) * cos(k*x);
vp       = -2*q/(E*h*r^2*k^4) * (1 + 2*k^2*r^2) * sin(phi_k-phi) * sin(k*x);
wp       = -2*q/(E*h*r^2*k^4) * (1 + 2*k^2*r^2 + r^4*k^4/2) * cos(phi_k-phi) *
    sin(k*x);

% --- Total forces = bending (homogeneous) + membrane (particular) ---
% shell_forces evaluates the homogeneous part; membrane part added here

M_phi  = shell_forces(1,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
M_x    = shell_forces(2,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
M_xphi = shell_forces(11, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
Q_phi  = shell_forces(8,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
Q_x    = shell_forces(3,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
N_phi  = shell_forces(4,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) +
   Np_phi;
N_x    = shell_forces(5,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) +
   Np_x;
N_xphi = shell_forces(9,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) +
   Np_xphi;
u      = shell_forces(6,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + up;
v      = shell_forces(10, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + vp;
w      = shell_forces(7,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + wp;

% --- Resolve displacements into vertical and horizontal components ---
DV = -v * sin(phi_k-phi) + w * cos(phi_k-phi);   % vertical displacement
DH =  v * cos(phi_k-phi) + w * sin(phi_k-phi);   % horizontal displacement

```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
% --- Store results ---
Forces.M_phi   = M_phi;    Forces.N_phi  = N_phi;
Forces.N_x     = N_x;      Forces.N_xphi = N_xphi;
Displacement.u = u;        Displacement.v = v;    Displacement.w = w;
Displacement.up = up;      Displacement.vp = vp;  Displacement.wp = wp;


% ========================================================================
% PART 2 -- EDGE BEAM COMPATIBILITY ANALYSIS
% ========================================================================
% The shell free edge is stiffened by a rectangular edge beam.
% At the shell-beam interface, vertical displacement and rotation must
% be compatible.  This gives a 2x2 linear system for the unknown
% edge forces: vertical edge load Vb and in-plane shear SB.
%
% The approach follows ASCE Manual 31 (Cylindrical Shell Roofs).

close all; fclose all; clear all; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.1 -- Inputs
% ------------------------------------------------------------------------
b     = 1;              % edge beam width                       [ft]
d_eb  = 2.25;           % edge beam depth                       [ft]
L     = 66.5;           % span                                  [ft]
r     = 26.6;           % shell radius                          [ft]
h     = 0.25;           % shell thickness                       [ft]
phi_k = 45 * pi/180;    % shell edge angle                      [rad]
phi   = 0 * pi/180;     % evaluation angle from edge            [rad]
q     = 0.080;          % shell surface load                    [ksf]
rho   = 0.150;          % concrete unit weight                  [kcf]
w_eb  = b * d_eb * rho; % edge beam self-weight per unit length [klf]

n_fourier = 1;
k = n_fourier * pi / L;
x = L/2;
E = 4.32e5;             % Young's modulus                       [ksf]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.2 -- Known shell force at edge (from Part 1)
% ------------------------------------------------------------------------
N_x_shell = 99.03;      % longitudinal membrane force from shell analysis [kip
    /ft]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.3 -- ASCE Manual 31 influence coefficients
% ------------------------------------------------------------------------
% These coefficients relate unit edge loads (vertical V, shear S) to
% shell displacements and forces at the edge.
% Table 2B: deformation coefficients (delta_v)
C1 =  96.10;    % vertical edge load  -> vertical displacement
```


I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

```
C2 = -64.69;    % horizontal edge load -> vertical displacement
C3 =   2.500;   % shear edge load     -> vertical displacement

% Table 2A: force coefficients (T_x)
C4 =  19.64;    % vertical edge load  -> N_x
C5 =   1.388;   % shear edge load     -> N_x

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.4 -- Membrane forces and edge load resultants
% ------------------------------------------------------------------------
Np_phi  = -4/pi * q * r * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
Np_xphi = -4/pi * q * r * 2/(r*k) * sin(phi_k-phi) * cos(0);

% Resolve membrane force at the edge into vertical, horizontal, shear
VL =  -Np_phi  * sin(phi_k);   % vertical component of N_phi at edge
HL =  -Np_phi  * cos(phi_k);   % horizontal component
SL =  -Np_xphi;                % shear component

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.5 -- Compatibility matrix and right-hand side
% ------------------------------------------------------------------------
% The shell and beam flexibility matrices S and B are assembled.
% NS, NB: normalisation factors (flexibility denominators)

NS = L^4 / (r^3 * h * E);   % shell flexibility normalisation
NB = L^4 / (d_eb^3 * b * E); % beam flexibility normalisation

% Shell flexibility matrix and fixed-end load vector
% Row 1: vertical displacement compatibility
% Row 2: N_x compatibility
FS(1,1) = NS * (q*r * (((2*r)/(pi*L))^2 + 2/pi^4 + (r/L)^4 * cos(phi_k-phi)^2)
    ...
              + C1*VL + C2*HL + C3*SL) * sin(k*x);
FS(2,1) = N_x_shell / h;

S(1,1) = NS * C1 * sin(k*x);
S(1,2) = NS * C3 * sin(k*x);
S(2,1) = NS * E*r/L^2 * C4 * sin(k*x);
S(2,2) = NS * E*r/L^2 * C5 * sin(k*x);

% Beam flexibility matrix and fixed-end load vector
FB(1,1) = NB * (-4/pi) * w_eb * 12/(pi*n_fourier)^4 * sin(k*x);
FB(2,1) = NB * E*d_eb/L^2 * 4/pi * w_eb * 6/(pi*n_fourier)^2 * sin(k*x);

B(1,1) =  NB * 12/(pi*n_fourier)^4 * sin(k*x);
B(1,2) = -NB * d_eb/L * 6/(pi*n_fourier)^3 * sin(k*x);
B(2,1) = -NB * E*d_eb/L^2 * 6/(pi*n_fourier)^2 * sin(k*x);
B(2,2) =  L/(b*d_eb) * 4/(pi*n_fourier) * sin(k*x);

% Combined system: (S + B) * X = -(FS + FB)
BS = S + B;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
F  = FS + FB;
X  = BS \ (-F);

Vb = X(1);   % vertical edge force solution   [kip/ft]
SB = X(2);   % in-plane shear edge force      [kip/ft]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.6 -- Final internal forces including edge beam correction
% ------------------------------------------------------------------------
% The ASCE Manual 31 influence coefficients translate the solved edge
% forces back into increments of each stress resultant.

% N_x: longitudinal force
N_x = N_x_shell + Vb*C4 + SB*C5;

% N_xphi: in-plane shear (C4=0 for shear, C5=0.4)
N_xphi = 0 + Vb*0 + SB*0.4;

% N_phi: circumferential force (C4=0.707 for vertical, C5=0 for shear)
N_phi = 0 + Vb*0.707 + SB*0;

% M_phi: bending moment (no correction from edge beam for this case)
M_phi = 0;

Forces.N_x     = N_x;
Forces.N_xphi  = N_xphi;
Forces.N_phi   = N_phi;
Forces.M_phi   = M_phi;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.7 -- Reinforcement design (ACI working stress)
% ------------------------------------------------------------------------
fs = 20;    % allowable steel stress                          [ksi]
ds = 2;     % effective depth of shell reinforcement          [in]

% Principal membrane forces from Mohr's circle for membrane forces
N1 = (N_x + N_phi)/2 + sqrt(N_xphi^2 + ((N_x - N_phi)/2)^2);  % max principal
N2 = (N_x + N_phi)/2 - sqrt(N_xphi^2 + ((N_x - N_phi)/2)^2);  % min principal

% Shell reinforcement: tension governed by N1
As_shell = N1 / fs;                          % [in^2/ft] -- tension steel in
   shell

% Bending reinforcement (if M_phi produces tension)
As_bend  = M_phi * 12 / (fs * 7/8 * ds);    % [in^2/ft] -- bending steel

% Edge beam reinforcement: tension from arch action
T        = ((N1 + 8.32)/2 - 8.32) * d_eb;
As_beam  = T / fs;                           % [in^2] -- beam longitudinal
   steel

```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
% Minimum reinforcement per ACI (temperature and shrinkage)
Amin1 = 0.0035 * h * 12 * 12;   % [in^2/ft] -- each direction (deformed bars)
Amin2 = 0.0018 * h * 12 * 12;   % [in^2/ft] -- welded wire fabric

fprintf('\n--- Reinforcement Summary ---\n');
fprintf('  Shell tension steel  As_shell = %.4f in^2/ft\n', As_shell);
fprintf('  Shell bending steel  As_bend  = %.4f in^2/ft\n', As_bend);
fprintf('  Edge beam steel      As_beam  = %.4f in^2\n',    As_beam);
fprintf('  Min steel (bars)     Amin1    = %.4f in^2/ft\n', Amin1);
fprintf('  Min steel (WWF)      Amin2    = %.4f in^2/ft\n', Amin2);


% ========================================================================
% PART 3 -- FUNCTION: shell_coefficients
% ========================================================================
% Builds one row of the 4x4 coefficient matrix F used to enforce the
% edge boundary conditions on the bending (homogeneous) solution.
%
% Each stress resultant SC has the form:
%
%   F_SC = 2 * R(SC) * [ B1*T1 - B2*T2,  -B2*T1 - B1*T2,
%                        B3*T3 - B4*T4,  -B4*T3 - B3*T4 ]
%
% where T1..T8 are trig/hyperbolic combinations evaluated at the edge,
% and B1..B4 are dimensionless coefficients specific to each resultant.
%
% The distinction SC<8 / SC>=8 selects between two sets of T functions
% (T1..T4 for moments/axial; T5..T8 for shears/twists).
%
% INPUT:
%   SC      : stress resultant selector (1..12, see index map in Part 1)
%   k       : longitudinal wave number [1/ft]
%   r       : shell radius [ft]
%   phit    : angle from crown to evaluation point [rad]
%   rp      : [alpha1, beta1, alpha1p, beta1p] root parameters
%   mn      : [m1, n1, m2, n2] root components
%   Q       : shell parameter
%   gamma   : shell bending parameter
%   h       : thickness [ft]
%   x       : longitudinal evaluation point [ft]
%
% OUTPUT:
%   Shell   : 1x4 row vector -- one row of the coefficient matrix

function Shell = shell_coefficients(SC, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x)

alpha1  = rp(1);  beta1   = rp(2);
alpha1p = rp(3);  beta1p  = rp(4);
m1 = mn(1);  n1 = mn(2);  m2 = mn(3);  n2 = mn(4);

% --- Trig/hyperbolic basis functions evaluated at phit ---
```

COPIA DI REVISIONE

```
% Set 1 (for SC < 8: moments, axial forces, displacements u, w)
T1 = cos(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T2 = sin(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T3 = cos(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);
T4 = sin(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
% Set 2 (for SC >= 8: shears, twists, displacement v)
T5 = cos(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T6 = sin(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T7 = cos(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
T8 = sin(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);

% --- Material and bending stiffness ---
E_mod = 4.32e5;
D     = E_mod * h^3 / 12;

% --- Scaling factor R(SC) and shape coefficients B1..B4 for each SC ---
% R: the 'particular solution' scale factor  (depends on x via sin/cos)
% B1..B4: dimensionless coefficients from the theory (Eq. 4.5x)
R  = zeros(1,12);
B1 = zeros(1,12);
B2 = zeros(1,12);
B3 = zeros(1,12);
B4 = zeros(1,12);

R(1)  = -2*D/r^2          * sin(k*x);   % M_phi
B1(1) = Q^2*(1+gamma);   B2(1) = Q^2;   B3(1) = Q^2*(gamma-1); B4(1) = Q^2;

R(2)  =  2*D*k^2          * sin(k*x);   % M_x
B1(2) = 1;  B2(2) = 0;  B3(2) = 1;  B4(2) = 0;

R(3)  = -2*D*k^3/gamma    * cos(k*x);   % Q_x
B1(3) = 1;  B2(3) = 1;  B3(3) = -1; B4(3) = 1;

R(4)  =  4*D*r*k^4/gamma^2 * sin(k*x);   % N_phi
B1(4) = 0;  B2(4) = 1;  B3(4) = 0;  B4(4) = -1;

R(5)  = -4*D*r*k^4/gamma^3 * sin(k*x);   % N_x
B1(5) = -1;  B2(5) = 1+gamma;  B3(5) = 1;  B4(5) = 1-gamma;

R(6)  =  4*D*r*k^3/(h*E_mod*gamma^3) * cos(k*x);   % u
B1(6) = -1;  B2(6) = 1+gamma;  B3(6) = 1;  B4(6) = 1-gamma;

R(7)  =  2                * sin(k*x);   % w
B1(7) = 1;  B2(7) = 0;  B3(7) = 1;  B4(7) = 0;

R(8)  = -2*D*k^3/(sqrt(gamma))^3 * sin(k*x);   % Q_phi
B1(8) = m1-n1;   B2(8) = m1+n1;   B3(8) = -(m2+n2); B4(8) = m2-n2;

R(9)  =  4*D*r*k^4/(sqrt(gamma))^5 * cos(k*x);   % N_xphi
B1(9) = -n1;  B2(9) = m1;  B3(9) = n2;  B4(9) = -m2;

```

COPIA DI REVISIONE

```
R(10) =  4*D*r*k^3/(E_mod*h*(sqrt(gamma))^7) * sin(k*x);   % v
B1(10) = m1+n1*(1-gamma);   B2(10) = n1-m1*(1-gamma);
B3(10) = -m2+n2*(1+gamma);  B4(10) = -n2-m2*(1+gamma);

R(11) =  2*D*k/r           * cos(k*x);   % M_xphi
B1(11) = alpha1;  B2(11) = beta1;  B3(11) = alpha1p;  B4(11) = beta1p;

R(12) = -2*D*k^3/(sqrt(gamma))^3 * sin(k*x);   % Q_phip
B1(12) = m1*(1-gamma)-n1;    B2(12) = m1+n1*(1-gamma);
B3(12) = -m2*(1+gamma)-n2;   B4(12) = m2-n2*(1+gamma);

% --- Assemble the row vector for stress resultant SC ---
% SC < 8: use T1..T4 (moments, axial, u, w)
% SC >= 8: use T5..T8 (shears, twists, v)
if SC < 8
    A_col = ( B1(SC)*T1 - B2(SC)*T2);
    B_col = (-B2(SC)*T1 - B1(SC)*T2);
    C_col = ( B3(SC)*T3 - B4(SC)*T4);
    D_col = (-B4(SC)*T3 - B3(SC)*T4);
else
    A_col = ( B1(SC)*T5 - B2(SC)*T6);
    B_col = (-B2(SC)*T5 - B1(SC)*T6);
    C_col = ( B3(SC)*T7 - B4(SC)*T8);
    D_col = (-B4(SC)*T7 - B3(SC)*T8);
end

Shell = [A_col, B_col, C_col, D_col] * 2 * R(SC);

end   % shell_coefficients


% ========================================================================
% PART 4 -- FUNCTION: shell_forces
% ========================================================================
% Evaluates a single stress resultant or displacement at a given point
% using the four known integration constants (a, b, c, d).
%
% This is the same basis as shell_coefficients, but now the constants
% are known and we compute the scalar force value rather than a matrix row.
%
% INPUT:
%   SC        : stress resultant selector (same index as shell_coefficients)
%   constants : [a; b; c; d] -- solved integration constants
%   (remaining arguments same as shell_coefficients)
%
% OUTPUT:
%   F  : scalar value of the requested stress resultant or displacement

function F = shell_forces(SC, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x)

a = constants(1);  b = constants(2);
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
c = constants(3);  d = constants(4);

alpha1  = rp(1);  beta1   = rp(2);
alpha1p = rp(3);  beta1p  = rp(4);
m1 = mn(1);  n1 = mn(2);  m2 = mn(3);  n2 = mn(4);

% --- Same trig/hyperbolic basis functions as shell_coefficients ---
T1 = cos(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T2 = sin(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T3 = cos(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);
T4 = sin(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
T5 = cos(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T6 = sin(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T7 = cos(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
T8 = sin(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);

% --- Same R and B coefficient tables ---
E_mod = 4.32e5;
D     = E_mod * h^3 / 12;

R  = zeros(1,11);   % only SC 1..11 used in shell_forces (no SC=12 here)
B1 = zeros(1,11);
B2 = zeros(1,11);
B3 = zeros(1,11);
B4 = zeros(1,11);

R(1)  = -2*D/r^2           * sin(k*x);
B1(1) = Q^2*(1+gamma);  B2(1) = Q^2;  B3(1) = Q^2*(gamma-1);  B4(1) = Q^2;

R(2)  =  2*D*k^2            * sin(k*x);
B1(2) = 1;  B2(2) = 0;  B3(2) = 1;  B4(2) = 0;

R(3)  = -2*D*k^3/gamma      * cos(k*x);
B1(3) = 1;  B2(3) = 1;  B3(3) = -1;  B4(3) = 1;

R(4)  =  4*D*r*k^4/gamma^2  * sin(k*x);
B1(4) = 0;  B2(4) = 1;  B3(4) = 0;  B4(4) = -1;

R(5)  = -4*D*r*k^4/gamma^3  * sin(k*x);
B1(5) = -1;  B2(5) = 1+gamma;  B3(5) = 1;  B4(5) = 1-gamma;

R(6)  =  4*D*r*k^3/(h*E_mod*gamma^3) * cos(k*x);
B1(6) = -1;  B2(6) = 1+gamma;  B3(6) = 1;  B4(6) = 1-gamma;

R(7)  =  2                   * sin(k*x);
B1(7) = 1;  B2(7) = 0;  B3(7) = 1;  B4(7) = 0;

R(8)  = -2*D*k^3/(sqrt(gamma))^3 * sin(k*x);
B1(8) = m1-n1;   B2(8) = m1+n1;   B3(8) = -(m2+n2);  B4(8) = m2-n2;

R(9)  =  4*D*r*k^4/(sqrt(gamma))^5 * cos(k*x);
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
B1(9) = -n1;  B2(9) = m1;  B3(9) = n2;  B4(9) = -m2;

R(10) =  4*D*r*k^3/(E_mod*h*(sqrt(gamma))^7) * sin(k*x);
B1(10) = m1+n1*(1-gamma);   B2(10) = n1-m1*(1-gamma);
B3(10) = -m2+n2*(1+gamma);  B4(10) = -n2-m2*(1+gamma);

R(11) =  2*D*k/r             * cos(k*x);
B1(11) = alpha1;  B2(11) = beta1;  B3(11) = alpha1p;  B4(11) = beta1p;

% --- Evaluate with known constants a, b, c, d ---
if SC < 8
    A_val = a*B1(SC)*T1 - a*B2(SC)*T2;
    B_val = b*(-B2(SC)*T1 - B1(SC)*T2);
    C_val = c*(B3(SC)*T3 - c*B4(SC)*T4);
    D_val = d*(-B4(SC)*T3 - d*B3(SC)*T4);
else
    A_val = a*B1(SC)*T5 - a*B2(SC)*T6;
    B_val = b*(-B2(SC)*T5 - b*B1(SC)*T6);
    C_val = c*B3(SC)*T7 - c*B4(SC)*T8;
    D_val = d*(-B4(SC)*T7 - d*B3(SC)*T8);
end

F = 2 * R(SC) * (A_val + B_val + C_val + D_val);

end   % shell_forces
```

I.2.3 Torsione non uniforme

```
% ========================================================================
% NON-UNIFORM (WARPING) TORSION -- DISTRIBUTION OF TORQUE COMPONENTS
% ========================================================================
% When a thin-walled open section (e.g. I-beam, channel) is twisted, the
% total applied torque T is resisted by TWO mechanisms:
%
%   1. ST. VENANT TORSION (T_SV):
%      Pure shear flow around the cross-section.  Dominates in short
%      members and near free ends where warping is unrestrained.
%
%   2. WARPING TORSION (T_V):
%      Bending of the flanges in opposite directions (bimoment).
%      Dominates near fixed ends where warping is fully restrained.
%
% The governing ODE for a member fixed at the base (x=0) and free at
% the top (x=L), carrying a concentrated torque T at the free end, gives:
%
%   T_V(x)  = T * cosh((L-x)/lambda) / cosh(L/lambda)
%   T_SV(x) = T * [ 1 - cosh((L-x)/lambda) / cosh(L/lambda) ]
%
% where:
%   lambda = sqrt(E*C_w / G*J)   [length]  -- torsional characteristic length
```

COPIA DI REVISIONE

```
%
% For this W-section example lambda = 65.9 in (= 5.49 ft).
%
% AT THE FIXED END (x=0):
%   T_V   = T / cosh(L/lambda)   -> small for long members (SV dominates)
%   T_SV  = T * [1 - 1/cosh(L/lambda)]
%
% AT THE FREE END (x=L):
%   T_V   = T   (all torque is warping torsion at the point of application)
%   T_SV  = 0
%
% This script plots the distribution of both torque components over the
% member height for four different member lengths, illustrating how the
% relative importance of warping vs. St. Venant torsion varies with L/lambda.
%
% REFERENCE SECTION: W-shape with lambda = 65.9 in
% Units: inches for internal calculation, feet for plotting
% ========================================================================

clear; clc; close all;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Display settings
% ------------------------------------------------------------------------
fs   = 16;
font = 'Times New Roman';
scrsz = get(0, 'ScreenSize');

hf1 = figure('Position', [1, scrsz(4)/4.5, scrsz(3)/1.5, scrsz(4)/2]);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Problem parameters
% ------------------------------------------------------------------------
T      = 1;               % applied torque (normalised)         [kip.in]
lambda = 65.9;            % torsional characteristic length     [in]
                          % lambda = sqrt(E*Cw / G*J) for the section

L_ft   = [10, 20, 25, 30]; % member lengths to compare          [ft]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Plot torque distributions for each member length
% ------------------------------------------------------------------------
% Four subplots, one per length.
% x runs from 0 (fixed base) to L (free top where torque is applied).
% Torques are normalised by T so the plots show fractions [0..1].
% Height axis is plotted in feet (x/12) for readability.

for i = 1 : 4

    L_in = L_ft(i) * 12;          % member length in inches
    x    = (0 : L_in);            % position vector, inch increments
```


I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

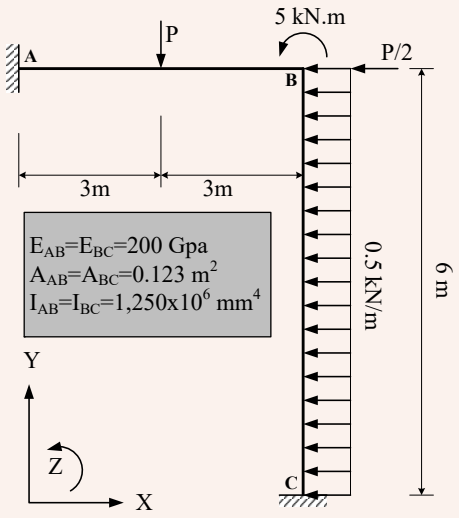
```
74
75      % --- Warping torsion component ---
76      % T_V = T * cosh((L-x)/lambda) / cosh(L/lambda)
77      % Maximum at the free end (x=L), minimum at the fixed end (x=0)
78      T_V  = T * cosh((L_in - x) / lambda) / cosh(L_in / lambda);
79
80      % --- St. Venant torsion component ---
81      % T_SV = T - T_V  (the two must sum to T at every section)
82      % Maximum at the fixed end, zero at the free end
83      T_SV = T * (1 - cosh((L_in - x) / lambda) / cosh(L_in / lambda));
84
85      % --- Plot: torque on horizontal axis, height on vertical axis ---
86      % (vertical axis matches the physical orientation of the member)
87      subplot(2, 2, i);
88      plot(T_V,  x/12, 'b', ...
89           T_SV, x/12, 'r', ...
90           'LineWidth', 1.5);
91
92      % Axes: normalised torque 0->1, height 0->30 ft
93      xlim([0 1]);
94      ylim([0 30]);
95      set(gca, 'XTick', 0 : 0.2 : 1.0);
96      set(gca, 'YTick', 0 : 5  : 30  );
97
98      grid on;
99      xlabel('T / T_{total}  (normalised)',        'FontSize', fs);
100     ylabel('Height  [ft]',                       'FontSize', fs);
101     title( ['Member length  L = ' num2str(L_ft(i)) ' ft  '  ...
102             '(L/\lambda = ' num2str(L_in/lambda,'%.1f') ')'], ...
103            'FontSize', fs);
104
105     lgd = legend('T_V  (warping)', 'T_{SV}  (St. Venant)', ...
106                  'Location', 'North');
107     lgd.FontSize = fs - 2;
108
109     set(gca, 'FontSize', fs, 'FontName', font);
110
111 end
112
113 sgtitle(['Non-Uniform Torsion:  \lambda = ' num2str(lambda) ' in'], ...
114         'FontSize', fs + 2);
```

I.2.4 Cornice ortogonale

Analisi del seguente telaio ortogonale, §42.3.2

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.




```m
% ========================================================================
% DIRECT STIFFNESS METHOD -- ORTHOGONAL FRAME (L-SHAPED)
% ========================================================================
% Analyzes a two-element frame with members oriented perpendicular to each
% other (one horizontal, one vertical), meeting at a common node B.
%
% GEOMETRY:
%
%        C (pin -- vertical reaction only)
%        |
%        | Element BC (vertical, length L2)
%        |
%   A ---B   (B = free node: DOFs u_B, v_B, theta_B)
%   Element AB (horizontal, length L1)
%   A is fully fixed.
%
% Both elements are aligned with global axes -> no coordinate transform needed
%
% FREE DOFs AT NODE B:
%   DOF 1: horizontal displacement u_B
%   DOF 2: vertical displacement   v_B
%   DOF 3: rotation                theta_B
%
% Original code courtesy of Xiao Fu.
% ========================================================================

clear; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Element properties  (SI: kN, m)
% ------------------------------------------------------------------------
L = [6.0;  6.0];         % element lengths            [m]      index: (AB, BC)
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
A = [0.123; 0.123];      % cross-sectional areas      [m^2]
E = [200e6; 200e6];      % Young's moduli             [kN/m^2]
I = [1250e-6; 1250e-6];  % second moments of area     [m^4]

EA = E .* A;             % axial stiffnesses          [kN]
EI = E .* I;             % bending stiffnesses        [kN.m^2]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Applied loads
% ------------------------------------------------------------------------
P = 1;    % concentrated horizontal force at B    [kN]
M = 5;    % concentrated moment at B              [kN.m]
w = 0.5;  % uniform distributed load on BC        [kN/m]  (transverse on BC)

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Reduced global stiffness matrix K (free DOFs at B)
% ------------------------------------------------------------------------
% Assembled by superposing contributions from AB and BC:
%
%   K(1,1): axial  AB  +  bending BC  (u_B direction)
%   K(2,2): bending AB +  axial  BC   (v_B direction)
%   K(3,3): bending AB +  bending BC  (theta_B)
%   K(1,3): coupling from BC (6EI2/L2^2)
%   K(2,3): coupling from AB (-6EI1/L1^2)

K = [ EA(1)/L(1) + 12*EI(2)/L(2)^3,                          0,    6*EI(2)/L
   (2)^2              ;
                              0,   EA(2)/L(2) + 12*EI(1)/L(1)^3,  -6*EI(1)/L
   (1)^2              ;
             6*EI(2)/L(2)^2,              -6*EI(1)/L(1)^2,    4*EI(1)/L(1)
   + 4*EI(2)/L(2)  ]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Equivalent nodal load vector
% ------------------------------------------------------------------------
% Distributed and element loads -> fixed-end reactions (sign-reversed at B)
% plus directly applied nodal loads.
%
%   AB carries midpoint load P (vertical):
%     fixed-end shear = P/2, fixed-end moment = +/-P*L1/8
%
%   BC carries uniform load w (transverse = horizontal on vertical member):
%     fixed-end shear = w*L2/2, fixed-end moment = +/-w*L2^2/12

NEL = [ -w*L(2)/2                 ;   % DOF 1: fixed-end shear from BC
        -P/2                      ;   % DOF 2: fixed-end shear from AB
         P*L(1)/8 - w*L(2)^2/12   ];  % DOF 3: fixed-end moments from AB and
   BC

F   = [ -P/2 ;   % DOF 1: applied horizontal force (half at B)
         0   ;   % DOF 2: no direct vertical force
```


I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

```
         M   ];  % DOF 3: applied moment

F_ext = NEL + F;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- Solve for displacements at B
% ------------------------------------------------------------------------
Disp = K \ F_ext

% Disp = [u_B [m];  v_B [m];  theta_B [rad]]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 6 -- Internal forces in element AB
% ------------------------------------------------------------------------
% End A fixed (zero displacements); end B has solved Disp values.
% F_int = k * d - NEL_elem

k_AB   = stiff(E(1), I(1), L(1), A(1));
NEL_AB = [0; -P/2; -P*L(1)/8; 0; -P/2; P*L(1)/8];
d_AB   = [0; 0; 0; Disp(1); Disp(2); Disp(3)];

F_AB = k_AB * d_AB - NEL_AB   % [N_A, V_A, M_A, N_B, V_B, M_B] in LCS

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 7 -- Internal forces in element BC
% ------------------------------------------------------------------------
% BC is vertical: local axial = global y, local transverse = global x.
% LCS displacements at B:  u_local = -v_B,  v_local = +u_B

k_BC   = stiff(E(2), I(2), L(2), A(2));
NEL_BC = [0; -w*L(2)/2; -w*L(2)^2/12; 0; -w*L(2)/2; w*L(2)^2/12];
d_BC   = [-Disp(2); Disp(1); Disp(3); 0; 0; 0];

F_BC = k_BC * d_BC - NEL_BC   % [N_B, V_B, M_B, N_C, V_C, M_C] in LCS


% ========================================================================
% LOCAL FUNCTION: stiff
% ========================================================================
% 6x6 Euler-Bernoulli beam-column stiffness matrix in LCS.
%
% DOF order: [u1, v1, theta1, u2, v2, theta2]
%   u     : axial displacement
%   v     : transverse displacement
%   theta : rotation
%   1, 2  : near and far end nodes

function k = stiff(E, I, L, A)

EA = E * A;
EI = E * I;
```

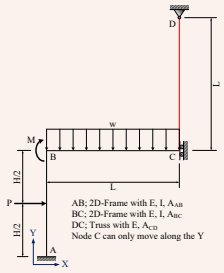
COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
131
132 k = [ EA/L,          0,          0,  -EA/L,          0,          0 ;
133           0,  12*EI/L^3,  6*EI/L^2,      0, -12*EI/L^3,  6*EI/L^2 ;
134           0,   6*EI/L^2,    4*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    2*EI/L ;
135      -EA/L,          0,          0,   EA/L,          0,          0 ;
136           0, -12*EI/L^3, -6*EI/L^2,      0,  12*EI/L^3, -6*EI/L^2 ;
137           0,   6*EI/L^2,    2*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    4*EI/L ];
138
139 end
```

I.2.5 Cornice ortogonale ibrida

Telaio ortogonale risolto in §42.3.4




```
1  % ========================================================================
2  % DIRECT STIFFNESS METHOD -- HYBRID ORTHOGONAL FRAME
3  % ========================================================================
4  % Three-element frame: vertical beam-column AB, horizontal beam BC,
5  % and a vertical axial bar DC connecting node C to a fixed support D.
6  %
7  % GEOMETRY:
8  %   A (fixed wall)
9  %   |
10 %   | AB (vertical beam-column, length Lab)
11 %   |
12 %   B ------------------------- C (roller: horizontal DOF only)
13 %         BC (horizontal beam, length Lbc)
14 %                   |
15 %                   | DC (axial bar only, length Ldc)
16 %                   |
17 %                   D (fixed)
18 %
19 % FREE DOFs (4 total at nodes B and C):
20 %   DOF 1: horizontal displacement of B  (Delta_1)
21 %   DOF 2: vertical   displacement of B  (Delta_2)
22 %   DOF 3: rotation at B                 (theta_3)
23 %   DOF 4: horizontal displacement of C  (Delta_4)
24 %
25 % LOADING:
26 %   P : concentrated transverse load at midspan of AB
```

COPIA DI REVISIONE

```
%   w : uniform distributed load along BC (transverse = vertical)
%   Applied moment -P*Lbc at node B (in NF vector)
%
% UNITS: GPa, kN, mm (consistent throughout)
% ========================================================================

clear; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Structural properties
% ------------------------------------------------------------------------
E   = 200;          % Young's modulus                   [kN/mm^2 = GPa]
I   = 200e6;        % second moment of area (beams)     [mm^4]

Lab = 8000;         % length of AB                      [mm]
Lbc = 10000;        % length of BC                      [mm]
Ldc = 10000;        % length of DC                      [mm]

Aab = 5000;         % area of AB                        [mm^2]
Abc = 5000;         % area of BC                        [mm^2]
Adc = 100;          % area of DC (axial bar only)       [mm^2]

P   = 10;           % midspan load on AB                [kN]
w   = 1e-3;         % uniform load on BC                [kN/mm]

EI   = E * I;
EAab = E * Aab;
EAbc = E * Abc;
EAdc = E * Adc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Nodal force vectors
% ------------------------------------------------------------------------
% NF : forces/moments applied directly at free DOFs
NF = [  0      ;   % DOF 1
        0      ;   % DOF 2
       -P*Lbc  ;   % DOF 3: applied moment at B
        0      ];  % DOF 4

% NEF : equivalent nodal forces from element loads (fixed-end reactions
%       carried to the free DOFs, sign reversed)
%   AB: midpoint load P -> shear P/2 at B, moment P*Lab/8 at B
%   BC: uniform load w  -> shear w*Lbc/2 at B and C, moment w*Lbc^2/12 at B
NEF = [  P/2                    ;   % DOF 1: from AB
        -w*Lbc/2                ;   % DOF 2: from BC
         P*Lab/8 - w*Lbc^2/12   ;   % DOF 3: from AB and BC
        -w*Lbc/2                ];  % DOF 4: from BC at C

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Reduced global stiffness matrix (4 x 4)
% ------------------------------------------------------------------------
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
% Superposition of AB (vertical beam), BC (horizontal beam), DC (axial bar)
Ktt = [ 12*EI/Lab^3 + EAbc/Lbc,                    0,         6*EI/Lab^2,
             0        ;
                              0,  EAab/Lab + 12*EI/Lbc^3,  6*EI/Lbc^2,
   -12*EI/Lbc^3         ;
                 6*EI/Lab^2,            6*EI/Lbc^2,  4*EI/Lab + 4*EI/Lbc,
   -6*EI/Lbc^2         ;
                              0,          -12*EI/Lbc^3,     -6*EI/Lbc^2,   12*
   EI/Lbc^3 + EAdc/Ldc ];

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Solve for displacements
% ------------------------------------------------------------------------
Delta = Ktt \ (NF + NEF);

Delta_1 = Delta(1);   % horizontal displacement of B   [mm]
Delta_2 = Delta(2);   % vertical   displacement of B   [mm]
theta_3 = Delta(3);   % rotation at B                  [rad]
Delta_4 = Delta(4);   % horizontal displacement of C   [mm]

fprintf('Node B:  u = %+.6f mm   v = %+.6f mm   theta = %+.4e rad\n', ...
        Delta_1, Delta_2, theta_3);
fprintf('Node C:  u = %+.6f mm\n', Delta_4);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- Internal forces in element AB (vertical beam-column)
% ------------------------------------------------------------------------
% LCS: local x points up (A->B).
%   Local axial at B  =  global vertical  =  Delta_2
%   Local transverse  = -global horizontal = -Delta_1

k_ab   = beam_stiff(E, I, Lab, Aab);
nef_ab = [0; -P/2; -P*Lab/8; 0; -P/2; P*Lab/8];
d_ab   = [0; 0; 0; Delta_2; -Delta_1; theta_3];

F_int_ab = k_ab * d_ab - nef_ab   % [N_A, V_A, M_A, N_B, V_B, M_B]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 6 -- Internal forces in element BC (horizontal beam)
% ------------------------------------------------------------------------
% LCS = GCS (BC is horizontal, no transformation needed).
% C: roller -> v_C = 0, pin -> theta_C = 0; only u_C = Delta_4 is free.

k_bc   = beam_stiff(E, I, Lbc, Abc);
nef_bc = [0; -w*Lbc/2; -w*Lbc^2/12; 0; -w*Lbc/2; w*Lbc^2/12];
d_bc   = [Delta_1; Delta_2; theta_3; 0; Delta_4; 0];

F_int_bc = k_bc * d_bc - nef_bc   % [N_B, V_B, M_B, N_C, V_C, M_C]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 7 -- Internal forces in element DC (axial bar)
```

COPIA DI REVISIONE

```
% ------------------------------------------------------------------------
% Pin-ended bar: 2x2 stiffness, axial only.
% D is fixed; C moves horizontally by Delta_4.
% DC is vertical so local axial of C = -Delta_4.

k_dc  = EAdc/Ldc * [1, -1; -1, 1];
d_dc  = [0; -Delta_4];

F_int_dc = k_dc * d_dc   % [N_D, N_C] axial forces


% ========================================================================
% LOCAL FUNCTION: beam_stiff
% ========================================================================
% 6x6 Euler-Bernoulli beam-column stiffness matrix in LCS.
% DOF order: [u1, v1, theta1, u2, v2, theta2]

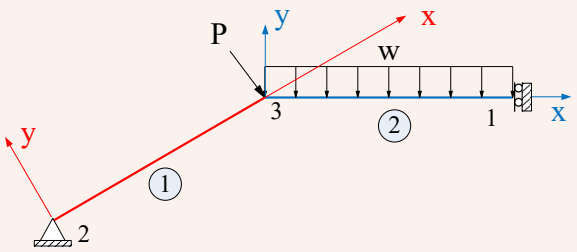
function k = beam_stiff(E, I, L, A)

EA = E * A;
EI = E * I;

k = [ EA/L,          0,          0,  -EA/L,          0,          0 ;
         0,  12*EI/L^3,  6*EI/L^2,      0, -12*EI/L^3,  6*EI/L^2 ;
         0,   6*EI/L^2,    4*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    2*EI/L ;
     -EA/L,          0,          0,   EA/L,          0,          0 ;
         0, -12*EI/L^3, -6*EI/L^2,      0,  12*EI/L^3, -6*EI/L^2 ;
         0,   6*EI/L^2,    2*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    4*EI/L ];

end
```

I.2.6 Telaio; filo duro




```
clc; clear;

% ========================================================================
% DIRECT STIFFNESS METHOD -- INCLINED FRAME (HARD-WIRED)
% ========================================================================
% Analyzes a two-element plane frame where both elements are inclined,
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
% requiring coordinate transformation between LCS and GCS.
%
% GEOMETRY (coordinates in meters):
%   Node 1: (0,     0)     fixed support  (restrained DOFs 4, 5, 6)
%   Node 2: (7.416, 3)     free node      (free DOFs 1, 2, 3)
%   Node 3: (15.416,3)     fixed support  (restrained DOFs 7, 8, 9)
%
%   Element 1: Node 1 to Node 2  (inclined)
%   Element 2: Node 2 to Node 3  (horizontal at y = 3 m)
%
% FREE DOFs AT NODE 2:
%   DOF 1: horizontal displacement u
%   DOF 2: vertical   displacement v
%   DOF 3: rotation theta
%
% LOADING:
%   Element 2: uniform distributed load 4 kN/m (transverse)
%   Node 2:    concentrated 50 kN load (components resolved into DOFs 1,2,3)
%
% KEY STEPS:
%   1. stiff() builds k (LCS), K (GCS), Gamma for each inclined element
%   2. Augmented 9x9 stiffness matrix assembled via LM connectivity
%   3. Ktt (3x3 free-DOF block) solved for Node 2 displacements
%   4. Reactions recovered from Kut partition + fixed-end corrections
%   5. Internal forces recovered in LCS for each element
%
% UNITS: kN, m, kPa  (converted from mm^2, mm^4, GPa at input)
% ========================================================================

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 - Structural properties (input in mm/GPa, converted to m/kPa)
% ------------------------------------------------------------------------
A  = 6000  / 1e6;    % cross-sectional area  [mm^2 -> m^2]
II = 200e6 / 1e12;   % second moment         [mm^4 -> m^4]
EE = 200   * 1e6;    % Young's modulus       [GPa  -> kPa]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 - Element stiffness matrices
% ------------------------------------------------------------------------
k_loc = zeros(6,6,2);   % LCS stiffness
K_glo = zeros(6,6,2);   % GCS stiffness
Gamma = zeros(6,6,2);   % rotation matrices

% Element 1: Node1(0,0) to Node2(7.416,3)
[k_loc(:,:,1), K_glo(:,:,1), Gamma(:,:,1)] = stiff(EE, II, A, [0,0],
    [7.416,3]);

% Element 2: Node2(7.416,3) to Node3(15.416,3)
[k_loc(:,:,2), K_glo(:,:,2), Gamma(:,:,2)] = stiff(EE, II, A, [7.416,3],
    [15.416,3]);

```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 - Location matrix (connectivity)
% ------------------------------------------------------------------------
% LM(elem, 1:6) maps local DOFs 1-6 to global DOF numbers.
% Rows = elements; columns = [near-end DOFs, far-end DOFs].
%
%   Element 1: near=Node1 (global 4,5,6), far=Node2 (global 1,2,3)
%   Element 2: near=Node2 (global 1,2,3), far=Node3 (global 7,8,9)

LM = [ 4, 5, 6, 1, 2, 3 ;
       1, 2, 3, 7, 8, 9 ];

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 - Assemble augmented global stiffness matrix (9x9)
% ------------------------------------------------------------------------
Kaug = zeros(9);
for elem = 1:2
    for r = 1:6
        lr = abs(LM(elem,r));
        for c = 1:6
            lc = abs(LM(elem,c));
            Kaug(lr,lc) = Kaug(lr,lc) + K_glo(r,c,elem);
        end
    end
end

Ktt = Kaug(1:3, 1:3);   % free-DOF partition (Node 2)
Kut = Kaug(4:9, 1:3);   % restrained-free coupling (for reactions)

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 - Fixed-end actions (FEA) from distributed load on Element 2
% ------------------------------------------------------------------------
% Element 2 carries w = 4 kN/m uniform transverse load.
% Fixed-end reactions in LCS (Euler-Bernoulli, both ends clamped):
%   Shear at each end:    w*L/2
%   Moment at near end:  +w*L^2/12
%   Moment at far  end:  -w*L^2/12

w   = 4;     % distributed load on element 2   [kN/m]
L2  = sqrt((15.416-7.416)^2 + (3-3)^2);        % = 8 m

fea = zeros(6,2);
fea(:,2) = [0; w*L2/2; w*L2^2/12; 0; w*L2/2; -w*L2^2/12];

% Transform FEA to GCS
FEA_glo = zeros(6,2);
for elem = 1:2
    FEA_glo(:,elem) = Gamma(:,:,elem) * fea(:,elem);
end

% Fixed-end actions at restrained DOFs (for reaction correction)
```

COPIA DI REVISIONE

```
FEA_Rest = [0, 0, 0, FEA_glo(4:6,2)'];

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 6 - Applied load vector at free DOFs
% ------------------------------------------------------------------------
% 50 kN concentrated load on element 2; position gives reaction fractions.
% Negative of near-end FEA is added to account for element loading.

P = zeros(3,1);
P(1) =  50 * 3/8;
P(2) = -50 * 7.416/8 - fea(2,2);
P(3) = -fea(3,2);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 7 - Solve for displacements at Node 2
% ------------------------------------------------------------------------
Displacements = Ktt \ P

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 8 - Support reactions
% ------------------------------------------------------------------------
Reactions = Kut * Displacements + FEA_Rest'

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 9 - Internal forces in LCS for each element
% ------------------------------------------------------------------------
d_global        = zeros(6,1,2);
d_global(:,:,1) = [0;0;0; Displacements(1:3)];
d_global(:,:,2) = [Displacements(1:3); 0;0;0];

fprintf('\n--- Internal Forces in LCS ---\n');
fprintf('%-12s %8s %8s %8s %8s %8s %8s\n', 'Element','N_i','V_i','M_i','N_j','
    V_j','M_j');
for elem = 1:2
    d_local = Gamma(:,:,elem) * d_global(:,:,elem);
    f_int   = k_loc(:,:,elem) * d_local + fea(:,elem);
    fprintf('Element %-4d %+8.3f %+8.3f %+8.3f %+8.3f %+8.3f %+8.3f\n', ...
            elem, f_int(1),f_int(2),f_int(3),f_int(4),f_int(5),f_int(6));
end


% ========================================================================
% LOCAL FUNCTION: stiff
% ========================================================================
% Computes LCS stiffness k, GCS stiffness K, and rotation matrix Gamma
% for an inclined 2D Euler-Bernoulli beam-column.
%
% alpha = atan2(dy,dx) is the element inclination angle.
% Gamma rotates a GCS 6-DOF vector into LCS.
% K = Gamma' * k * Gamma

```

COPIA DI REVISIONE

```
function [k, K, Gamma] = stiff(EE, II, A, i, j)

dx    = j(1) - i(1);
dy    = j(2) - i(2);
L     = sqrt(dx^2 + dy^2);
alpha = atan2(dy, dx);
c     = cos(alpha);
s     = sin(alpha);

Gamma = [ c,  s,  0,  0,  0,  0 ;
         -s,  c,  0,  0,  0,  0 ;
          0,  0,  1,  0,  0,  0 ;
          0,  0,  0,  c,  s,  0 ;
          0,  0,  0, -s,  c,  0 ;
          0,  0,  0,  0,  0,  1 ];

EI = EE * II;
EA = EE * A;

k = [ EA/L,          0,          0,  -EA/L,          0,          0 ;
         0,  12*EI/L^3,  6*EI/L^2,      0, -12*EI/L^3,  6*EI/L^2 ;
         0,   6*EI/L^2,    4*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    2*EI/L ;
     -EA/L,          0,          0,   EA/L,          0,          0 ;
         0, -12*EI/L^3, -6*EI/L^2,      0,  12*EI/L^3, -6*EI/L^2 ;
         0,   6*EI/L^2,    2*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    4*EI/L ];

K = Gamma' * k * Gamma;

end
```

I.2.7 Metodo di rigidità diretta; telaio

I.2.8 Codice principale

```
% ========================================================================
% GENERAL 2D FRAME ANALYSIS -- DIRECT STIFFNESS METHOD
% ========================================================================
% A general-purpose program for linear elastic analysis of 2D frames
% (beam-columns with axial, shear, and bending DOFs).
%
% STRUCTURE OF THIS FILE:
%   Part 1  -- Main driver script
%   Part 2  -- Input data (problem definition): prob_1 (inline)
%   Part 3  -- function stiff        : element k, K, Gamma
%   Part 4  -- function plot_frame   : geometry and support visualisation
%   Part 5  -- function print1       : echo input to output file
%   Part 6  -- function print2       : write results to output file
%
% THEORY SUMMARY:
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
%   Each 2D beam-column element has 6 DOFs: [u_i, v_i, theta_i, u_j, v_j,
    theta_j]
%   The element stiffness is formed in the Local Coordinate System (LCS)
%   and rotated to the Global Coordinate System (GCS) via:
%       K_global = Gamma^T * k_local * Gamma
%
%   The augmented system (free + restrained DOFs) is assembled and
%   partitioned:
%       [ K_tt  K_tu ] { Delta_t }   { P_t }
%       [ K_ut  K_uu ] { Delta_u } = { R   }
%   where t = free (unknown) DOFs, u = restrained (known = 0) DOFs.
%   Solving the top partition: Delta_t = K_tt^-1 * P_t
%   Reactions from the bottom: R = K_ut * Delta_t - FEA_restrained
%
% ID MATRIX CONVENTION:
%   ID(node, dof) = 0 -> DOF is FREE    (will be numbered first)
%   ID(node, dof) = 1 -> DOF is FIXED   (will be numbered after free DOFs)
%   After renumbering, ID holds the global equation number for each DOF.
%
% INPUT DATA ARRAYS (defined in prob_1 section below):
%   coord(n,2)          : nodal x,y coordinates
%   lnods(e,2)          : element connectivity [near_node, far_node]
%   ID(n,3)             : boundary condition flags (0=free, 1=fixed)
%   E(e), A(e), Iz(e)   : element material and section properties
%   NodalLoad(i,4)      : [node, Fx, Fy, Mz] for each applied nodal load
%   ElementLoad(e,2)    : [element, w] for each distributed load
%
% OUTPUT: text file 'my_output.dat' with full analysis results
% =========================================================================

clear;
fid = fopen('my_output.dat', 'w');
ndofpn = 3;   % degrees of freedom per node (u, v, theta)

% =========================================================================
% PART 1 -- PROBLEM DEFINITION  (inline replacement for prob_1.m)
% =========================================================================
% 5-node, 5-element portal frame with two fixed supports.
% Units: mm, kN  (E in kN/mm^2, A in mm^2, Iz in mm^4)
%
% NODE LAYOUT:
%   Node 1: (0,    0)     fixed base left
%   Node 2: (9000, 0)     fixed base right
%   Node 3: (0,    6000)  left knee (free)
%   Node 4: (9000, 6000)  right knee (free)
%   Node 5: (0,   12000)  top left (free)
%
% ELEMENT CONNECTIVITY:
%   Elem 1: Node 1 -> Node 3  (left column, lower)
%   Elem 2: Node 2 -> Node 4  (right column)
%   Elem 3: Node 3 -> Node 5  (left column, upper)
```

COPIA DI REVISIONE

```
%   Elem 4: Node 3 -> Node 4  (beam at mid-height)
%   Elem 5: Node 4 -> Node 5  (diagonal or upper beam)

Nnodes = 5;
Nelem  = 5;

% ID matrix: 0 = free DOF, 1 = restrained DOF
% Rows = nodes, columns = [u, v, theta]
ID = [ 1, 1, 1 ;    % Node 1: fully fixed
       1, 1, 1 ;    % Node 2: fully fixed
       0, 0, 0 ;    % Node 3: free
       0, 0, 0 ;    % Node 4: free
       0, 0, 0 ];   % Node 5: free

coord = [      0,     0 ;
          9000,     0 ;
             0,  6000 ;
          9000,  6000 ;
             0, 12000 ];

lnods = [ 1, 3 ;
          2, 4 ;
          3, 5 ;
          3, 4 ;
          4, 5 ];

% Section and material properties (uniform for all elements)
E  = 30e6  * ones(1, Nelem);   % Young's modulus     [kN/mm^2]
A  = 75000 * ones(1, Nelem);   % cross-section area  [mm^2]
Iz = 4.8e8 * ones(1, Nelem);   % second moment       [mm^4]

% Nodal loads: [node, Fx, Fy, Mz]
Nnodal_load = 2;
NodalLoad = [ 3,  80,  0,  0 ;   % 80 kN horizontal at Node 3
              5,  40,  0,  0 ];   % 40 kN horizontal at Node 5

% Element loads: [element, w (transverse distributed load)]
Nelement_load = 1;
ElementLoad   = [ 4,  1e-3 ];    % w = 0.001 kN/mm on element 4

% ========================================================================
% PART 2 -- VISUALISE FRAME GEOMETRY
% ========================================================================
plot_frame(coord, lnods, ID);

% ========================================================================
% PART 3 -- ELEMENT STIFFNESS MATRICES
% ========================================================================
% For each element, compute:
%   k_loc : stiffness in Local Coordinate System  (6x6)
%   K_glo : stiffness in Global Coordinate System (6x6) = Gamma^T k Gamma
```

COPIA DI REVISIONE

```
%   Gamma : rotation matrix from GCS to LCS       (6x6)

k_loc = zeros(6, 6, Nelem);
K_glo = zeros(6, 6, Nelem);
Gamma = zeros(6, 6, Nelem);

for e = 1 : Nelem
    n1 = lnods(e,1);
    n2 = lnods(e,2);
    xy1 = coord(n1, :);
    xy2 = coord(n2, :);
    [k_loc(:,:,e), K_glo(:,:,e), Gamma(:,:,e)] = stiff(E(e), Iz(e), A(e), xy1,
     xy2);
end

% ========================================================================
% PART 4 -- DOF NUMBERING: update ID matrix
% ========================================================================
% Free DOFs are numbered first (1 .. size_K_tt),
% then restrained DOFs (size_K_tt+1 .. size_K_aug).
% This ensures the free-DOF partition occupies the top-left of K_aug.

orig_ID = ID;
eq_num  = 0;

% Pass 1: number free DOFs
for i = 1 : Nnodes
    for j = 1 : ndofpn
        if orig_ID(i,j) == 0
            eq_num      = eq_num + 1;
            ID(i,j) = eq_num;
        end
    end
end
size_K_tt = eq_num;   % number of free DOFs (= size of K_tt)

% Pass 2: number restrained DOFs
for i = 1 : Nnodes
    for j = 1 : ndofpn
        if orig_ID(i,j) == 1
            eq_num      = eq_num + 1;
            ID(i,j) = eq_num;
        end
    end
end
size_K_aug = eq_num;  % total DOFs (free + restrained)

print1(fid, Nnodes, Nelem, size_K_tt, size_K_aug, coord, ID, lnods, E, A, Iz);

% ========================================================================
% PART 5 -- LOCATION MATRIX (LM)
```

COPIA DI REVISIONE

```
% ========================================================================
% LM(e, 1:6) maps local DOF indices 1..6 of element e
% to global equation numbers using the updated ID matrix.
% Local DOFs 1-3 = near-end node; 4-6 = far-end node.

LM = zeros(Nelem, 6);
for e = 1 : Nelem
    LM(e,:) = [ ID(lnods(e,1), :),  ID(lnods(e,2), :) ];
end

% ========================================================================
% PART 6 -- ASSEMBLE AUGMENTED GLOBAL STIFFNESS MATRIX
% ========================================================================
% The augmented matrix K_aug includes all DOFs (free + restrained).
% Each element's GCS stiffness is scattered into K_aug via LM.

K_aug = zeros(size_K_aug);

for e = 1 : Nelem
    for r = 1 : 6
        lr = LM(e, r);      % global row
        for c = 1 : 6
            lc = LM(e, c);  % global column
            K_aug(lr, lc) = K_aug(lr, lc) + K_glo(r, c, e);
        end
    end
end

% Extract the free-DOF partition (top-left block)
K_tt = K_aug(1:size_K_tt, 1:size_K_tt);

% Extract the coupling partition (needed for reaction recovery)
K_ut = K_aug(size_K_tt+1 : size_K_aug,  1:size_K_tt);

% ========================================================================
% PART 7 -- LOAD VECTOR ASSEMBLY
% ========================================================================
% The total load vector P_tt combines:
%   (a) Directly applied nodal forces/moments
%   (b) Equivalent nodal forces (fixed-end reactions) from element loads,
%       transformed to GCS and added at the free DOFs with reversed sign

P_tt = zeros(size_K_tt, 1);

% --- (a) Directly applied nodal loads ---
for i = 1 : Nnodal_load
    node = NodalLoad(i, 1);
    for j = 1 : ndofpn
        eq = ID(node, j);
        if eq <= size_K_tt
            P_tt(eq) = P_tt(eq) + NodalLoad(i, j+1);
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
        end
    end
end

% --- (b) Equivalent nodal forces from distributed element loads ---
% Fixed-end reactions in LCS for uniform transverse load w over length L:
%   Near end: [ 0,  w*L/2,  w*L^2/12,  0,  w*L/2,  -w*L^2/12 ]
%
% These are transformed to GCS and subtracted from the load vector
% at free DOFs (and stored for reaction correction at restrained DOFs).

NEF_local  = zeros(Nelement_load, 6);
NEF_global = zeros(Nelement_load, 6);
R_nef      = zeros(size_K_aug - size_K_tt, 1);  % FEA at restrained DOFs

for e = 1 : Nelement_load
    elem = ElementLoad(e, 1);
    w    = ElementLoad(e, 2);
    n1   = lnods(elem, 1);
    n2   = lnods(elem, 2);
    xy1  = coord(n1, :);
    xy2  = coord(n2, :);
    L    = sqrt((xy2(2)-xy1(2))^2 + (xy2(1)-xy1(1))^2);

    % Fixed-end reactions in LCS (uniform transverse load, both ends fixed)
    NEF_local(e,:)  = [0,  w*L/2,  w*L^2/12,  0,  w*L/2,  -w*L^2/12];

    % Transform to GCS using Gamma^T (Gamma maps GCS->LCS, so Gamma^T maps LCS
    ->GCS)
    NEF_global(e,:) = (Gamma(:,:,elem)' * NEF_local(e,:)')';
end

% Scatter NEF into load vector (free DOFs) or reaction correction (fixed DOFs)
for e = 1 : Nelement_load
    elem = ElementLoad(e, 1);
    for i = 1 : 6
        eq = LM(elem, i);
        if eq <= size_K_tt
            P_tt(eq) = P_tt(eq) + NEF_global(e, i);
        else
            R_nef(eq - size_K_tt) = R_nef(eq - size_K_tt) + NEF_global(e, i);
        end
    end
end

% ========================================================================
% PART 8 -- SOLVE FOR DISPLACEMENTS
% ========================================================================
Displacements = K_tt \ P_tt;

% ========================================================================
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
% PART 9 -- RECOVER SUPPORT REACTIONS
% ========================================================================
% Reactions = K_ut * Delta_t - FEA_restrained
% The FEA term corrects for the equivalent loads that were applied at
% restrained nodes due to element distributed loads.

Reactions = K_ut * Displacements - R_nef;

% ========================================================================
% PART 10 -- RECOVER ELEMENT INTERNAL FORCES (in LCS)
% ========================================================================
% For each element:
%   1. Extract global displacements at both end nodes from Displacements
%      (restrained DOFs have zero displacement)
%   2. Rotate to LCS:  d_local = Gamma * d_global
%   3. Compute internal forces:  f = k_loc * d_local
%   4. Subtract fixed-end actions for loaded elements (equilibrium correction)

int_forces = zeros(6, Nelem);

for e = 1 : Nelem
    % Assemble the 6x1 global displacement vector for this element
    d_global = zeros(6, 1);
    for i = 1 : 6
        eq = LM(e, i);
        if eq <= size_K_tt
            d_global(i) = Displacements(eq);
        else
            d_global(i) = 0;   % restrained DOF
        end
    end

    % Rotate to LCS and compute internal forces
    d_local        = Gamma(:,:,e) * d_global;
    int_forces(:,e) = k_loc(:,:,e) * d_local;

    % Subtract fixed-end actions for distributed loads on this element
    for j = 1 : Nelement_load
        if ElementLoad(j,1) == e
            int_forces(:,e) = int_forces(:,e) - NEF_local(j,:)';
        end
    end
end

% Write all results to output file
print2(fid, size_K_tt, size_K_aug, ID, Displacements, Reactions, ...
       Nelem, lnods, int_forces, Nnodal_load, NodalLoad, ...
       Nelement_load, ElementLoad);

fclose(fid);
fprintf('Analysis complete. Results written to my_output.dat\n');
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
319
320
321 % ========================================================================
322 % FUNCTION: stiff
323 % ========================================================================
324 % Computes element stiffness for an arbitrarily inclined 2D beam-column.
325 %
326 % INPUTS:
327 %   EE, II, A  : Young's modulus, second moment, cross-section area
328 %   xy_1, xy_2 : [x,y] coordinates of near and far end nodes
329 %
330 % OUTPUTS:
331 %   k     : 6x6 stiffness matrix in LCS
332 %   K     : 6x6 stiffness matrix in GCS  (= Gamma^T k Gamma)
333 %   Gamma : 6x6 rotation matrix (GCS vector -> LCS vector)
334 %
335 % SPECIAL CASE: vertical elements (dx approx 0) are detected explicitly
336 % to avoid numerical issues with atan2 near +/-pi/2.
337
338 function [k, K, Gamma] = stiff(EE, II, A, xy_1, xy_2)
339
340 dx = xy_2(1) - xy_1(1);
341 dy = xy_2(2) - xy_1(2);
342 L  = sqrt(dx^2 + dy^2);
343
344 % Inclination angle -- handle near-vertical elements explicitly
345 if abs(dx) > max(abs(xy_2(1)), abs(xy_1(1))) * 1e-6
346     alpha = atan2(dy, dx);
347 else
348     alpha = (dy > 0) * pi/2 + (dy <= 0) * (-pi/2);
349 end
350
351 c = cos(alpha);
352 s = sin(alpha);
353
354 % Rotation matrix: transforms a GCS 6-DOF vector to LCS
355 Gamma = [ c,  s,  0,  0,  0,  0 ;
356          -s,  c,  0,  0,  0,  0 ;
357           0,  0,  1,  0,  0,  0 ;
358           0,  0,  0,  c,  s,  0 ;
359           0,  0,  0, -s,  c,  0 ;
360           0,  0,  0,  0,  0,  1 ];
361
362 % Element stiffness in LCS (Euler-Bernoulli beam-column)
363 EI = EE * II;
364 EA = EE * A;
365
366 k = [ EA/L,          0,          0,  -EA/L,          0,          0 ;
367          0,  12*EI/L^3,  6*EI/L^2,      0, -12*EI/L^3,  6*EI/L^2 ;
368          0,   6*EI/L^2,    4*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    2*EI/L ;
369      -EA/L,          0,          0,   EA/L,          0,          0 ;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
         0, -12*EI/L^3, -6*EI/L^2,      0,  12*EI/L^3, -6*EI/L^2 ;
         0,   6*EI/L^2,    2*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    4*EI/L ];

K = Gamma' * k * Gamma;

end   % stiff


% ======================================================================
% FUNCTION: plot_frame
% ======================================================================
% Draws the frame geometry: elements (blue), free nodes (magenta circles),
% support symbols (red), element numbers, and node numbers.
%
% Support type is inferred from the ID row for each node:
%   [1,1,1] -> fixed wall     (hatched bar)
%   [1,1,0] -> pin support    (triangle)
%   [0,1,0] -> horizontal roller
%   [1,0,0] -> vertical roller
%   [0,1,1] -> horizontal roller with rotation fixed
%   [1,0,1] -> vertical roller with rotation fixed

function plot_frame(coord, lnods, ID)

x = coord(:,1);
y = coord(:,2);

figure;
margin      = max(max(x)-min(x), max(y)-min(y)) / 10;
ax          = [min(x)-margin, max(x)+margin, min(y)-margin, max(y)+margin];
axis(ax);  axis('equal');  hold on;

n_nodes    = size(coord,  1);
n_elements = size(lnods,  1);
n_nodes_id = size(ID,     1);   % may differ from n_nodes if ID is larger
axlim      = axis;
cs         = max(axlim(2)-axlim(1), axlim(4)-axlim(3)) / 40;  % circle size

% --- Draw support symbols ---
for i = 1 : n_nodes_id
    bc = ID(i,:);
    xi = x(i);  yi = y(i);
    theta_circle = 0 : 0.1 : 2*pi;

    % Roller symbols (circles)
    if isequal(bc, [0,1,0]) || isequal(bc, [1,1,0]) || isequal(bc, [0,1,1])
        plot(sin(theta_circle)*cs/2 + xi, ...
             cos(theta_circle)*cs/2 - cs/2 + yi, 'r');
    end
    if isequal(bc, [1,0,0]) || isequal(bc, [1,0,1])
        plot(sin(theta_circle)*cs/2 + xi - cs*0.5, ...
```

COPIA DI REVISIONE

```
            cos(theta_circle)*cs/2, 'r');
    end

    % Triangle for pin
    if isequal(bc, [1,1,0])
        plot([xi, xi-cs, xi+cs, xi], [yi, yi-cs, yi-cs, yi], 'r');
    end

    % Horizontal platform (hatching) -- for horizontal rollers, pins, fixed
    if any([isequal(bc,[0,1,0]), isequal(bc,[1,1,0]), isequal(bc,[0,1,1]),
   isequal(bc,[1,1,1])])
        ybase = yi - cs + cs * isequal(bc,[1,1,1]);
        plot([xi-2*cs, xi+2*cs], [ybase, ybase], 'r');
        for hx = -2:0.5:2
            plot([xi+hx*cs, xi+(hx-0.5)*cs], [ybase, ybase-cs*0.5], 'r');
        end
    end

    % Vertical platform -- for vertical rollers
    if any([isequal(bc,[1,0,0]), isequal(bc,[1,0,1])])
        xbase = xi - cs;
        plot([xbase, xbase], [yi-2*cs, yi+2*cs], 'r');
        for vy = -1.5:0.5:2
            plot([xbase, xbase-cs], [yi+vy*cs, yi+(vy-0.5)*cs], 'r');
        end
    end

    % Extra rollers for multi-roller supports
    if isequal(bc, [0,1,1])
        for dx = [-1, 0, 1]
            plot(sin(theta_circle)*cs/2 + xi + dx*cs, ...
                 cos(theta_circle)*cs/2 - cs/2 + yi, 'r');
        end
    end
    if isequal(bc, [1,0,1])
        for dy = [-1, 0, 1]
            plot(sin(theta_circle)*cs/2 + xi - cs*0.5, ...
                 cos(theta_circle)*cs/2 + dy*cs, 'r');
        end
    end
end

% --- Draw elements ---
for i = 1 : n_elements
    plot([x(lnods(i,1)), x(lnods(i,2))], ...
         [y(lnods(i,1)), y(lnods(i,2))], 'b', 'LineWidth', 1.5);
end

% --- Draw free nodes ---
for i = 1 : n_nodes
    if ~max(ID(i,:))
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
        plot(x(i), y(i), 'mo', 'MarkerSize', 6);
    end
end

% --- Element numbers (blue, at midpoint) ---
set(gca, 'DefaultTextColor', 'blue');
for i = 1 : n_elements
    xm = (x(lnods(i,1)) + x(lnods(i,2)))/2 + cs;
    ym = (y(lnods(i,1)) + y(lnods(i,2)))/2 + cs;
    text(xm, ym, int2str(i), 'Color', 'blue');
end

% --- Node numbers (magenta, offset) ---
for i = 1 : n_nodes
    text(x(i)+cs, y(i)+cs, int2str(i), 'Color', 'magenta');
end

hold off;  grid on;
title('Frame Geometry');

end   % plot_frame


% ========================================================================
% FUNCTION: print1  (echo input data to output file)
% ========================================================================
function print1(fid, Nnodes, Nelem, size_K_tt, size_K_aug, coord, ID, ...
                lnods, E, A, Iz)

fprintf(fid, '      *****************************************\n');
fprintf(fid, '      *  Computer Program for 2D Frame Analysis  *\n');
fprintf(fid, '      *****************************************\n');
fprintf(fid, '\nNumber of Nodes:              %d\n', Nnodes);
fprintf(fid, 'Number of Elements:          %d\n', Nelem);
fprintf(fid, 'Number of Free DOFs:         %d\n', size_K_tt);
fprintf(fid, 'Number of Restrained DOFs:   %d\n', size_K_aug - size_K_tt);

fprintf(fid, '\nNodal Information:\n');
for inode = 1 : Nnodes
    fprintf(fid, '  Node %d  (x=%9.3e, y=%9.3e)\n', ...
            inode, coord(inode,1), coord(inode,2));
    dof_str = '';
    labels  = {'  u (X)', '  v (Y)', '  theta'};
    for j = 1 : 3
        if ID(inode,j) <= size_K_tt && ID(inode,j) > 0
            dof_str = [dof_str, labels{j}];
        end
    end
    if isempty(dof_str)
        dof_str = '  none (fully fixed)';
    end
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
    fprintf(fid, '    Free DOFs:%s\n', dof_str);
end

fprintf(fid, '\nElement Information:\n');
for ielem = 1 : Nelem
    fprintf(fid, '  Element %d  (%d -> %d)', ielem, lnods(ielem,1), lnods(
   ielem,2));
    fprintf(fid, '   E=%9.3e  A=%9.3e  Iz=%9.3e\n', E(ielem), A(ielem), Iz(
   ielem));
end

end   % print1


% ========================================================================
% FUNCTION: print2  (write results to output file)
% ========================================================================
function print2(fid, size_K_tt, size_K_aug, ID, Displacements, Reactions, ...
                Nelem, lnods, int_forces, Nnodal_load, NodalLoad, ...
                Nelement_load, ElementLoad)

dof_names = {'delta_X', 'delta_Y', 'rot_Z  '};

% --- Applied loads ---
fprintf(fid, '\n\nApplied Nodal Loads:\n');
for i = 1 : Nnodal_load
    fprintf(fid, '  Node %d:  Fx=%9.3e  Fy=%9.3e  Mz=%9.3e\n', ...
            NodalLoad(i,1), NodalLoad(i,2), NodalLoad(i,3), NodalLoad(i,4));
end

fprintf(fid, '\nApplied Element Loads:\n');
for i = 1 : Nelement_load
    fprintf(fid, '  Element %d:  distributed w = %9.3e\n', ...
            ElementLoad(i,1), ElementLoad(i,2));
end

% --- Displacements ---
fprintf(fid, '\n\nNodal Displacements:\n');
for eq = 1 : size_K_tt
    [node, dof] = find(ID == eq);
    fprintf(fid, '  Node %2d  %-9s  %+12.5e\n', ...
            node, dof_names{dof}, Displacements(eq));
end

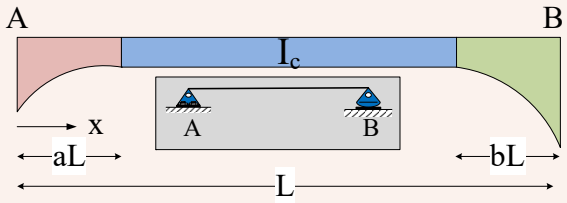
% --- Reactions ---
fprintf(fid, '\n\nSupport Reactions:\n');
for eq = 1 : size_K_aug - size_K_tt
    [node, dof] = find(ID == size_K_tt + eq);
    fprintf(fid, '  Node %2d  %-9s  %+12.5e\n', ...
            node, dof_names{dof}, Reactions(eq));
end
```

COPIA DI REVISIONE

```
571
572 % --- Internal forces ---
573 fprintf(fid, '\n\nElement Internal Forces (Local Coordinate System):\n');
574 force_labels = {'N  (axial)', 'V  (shear)', 'M  (moment)', ...
575                 'N  (axial)', 'V  (shear)', 'M  (moment)'};
576 for ielem = 1 : Nelem
577     fprintf(fid, '\n  Element %d\n', ielem);
578     for idof = 1 : 6
579         if idof == 1
580             fprintf(fid, '    Near-end node %d:\n', lnods(ielem,1));
581         end
582         if idof == 4
583             fprintf(fid, '    Far-end  node %d:\n', lnods(ielem,2));
584         end
585         fprintf(fid, '      %-12s  %+12.5e\n', ...
586                 force_labels{idof}, int_forces(idof,ielem));
587     end
588 end
589
590 end   % print2
```

I.2.9 Matrice di stiffness dei membri non prismatici

Elenco del codice Matlab che genera trame in Fig. 46.11, e generare la matrice di rigidità dei membri non prismatici. (Portland Cement Association, 1947).




```
1  % ========================================================================
2  % STIFFNESS MATRIX AND FIXED-END MOMENTS FOR NON-PRISMATIC BEAM MEMBERS
3  % ========================================================================
4  % Computes the exact stiffness matrix and fixed-end moments (FEM) for a
5  % beam with variable cross-section -- specifically a member with haunches
6  % (tapered ends) and a prismatic central segment.
7  %
8  % MEMBER PROFILE:
9  %
10 %   |<-- a*L -->|<------ (1-a-b)*L ------>|<-- b*L -->|
11 %   A           |                         |           B
12 %   [left haunch]   [prismatic centre]      [right haunch]
13 %
14 %   Moment of inertia profile:
```

COPIA DI REVISIONE

```
%     Left haunch  (0 <= x <= a*L):        I(x) = Ic * (1 + ra*(1 - x/(a*L))^n)^3
%     Centre segment (a*L <= x <= (1-b)*L): I(x) = Ic  (constant)
%     Right haunch ((1-b)*L <= x <= L):    I(x) = Ic * (1 + rb*(1 - (L-x)/(b*L))^n)^3
%
%   where ra, rb are the haunch depth ratios (0 = no haunch, prismatic)
%   and n is the haunch shape exponent (n=1: linear, n=2: parabolic).
%
% METHOD -- FLEXIBILITY APPROACH:
%   The 2x2 flexibility matrix d is built by numerical integration of the
%   virtual work integrals (unit moment diagrams x 1/EI).
%   The stiffness matrix is then obtained by inversion and static
%   condensation, following the force method:
%       k_tt = d^-1
%       k = B^T * d^-1 * B  (after condensation and permutation)
%
% FIXED-END MOMENTS (FEM) for uniform transverse load w:
%   Computed from the compatibility equations for a fixed-fixed beam,
%   integrating the particular solution against the flexibility kernel.
%   Output FEM = [M_A; M_B] normalised so that w=1 gives actual moments.
%
% DOF ORDER IN OUTPUT STIFFNESS MATRIX k (4x4):
%   [v_A, theta_A, v_B, theta_B]   (transverse displacements and rotations)
%
% PARAMETRIC STUDY (driver script below):
%   Plots surfaces of k(2,2) and FEM(1) as functions of haunch geometry
%   to visualise sensitivity of stiffness and fixed-end moments to
%   haunch length (a,b) and depth ratio (r).
%
% INPUTS TO NonPrismatic():
%   a   : left  haunch length as fraction of L    [0..0.5]
%   b   : right haunch length as fraction of L    [0..0.5]  (a+b <= 1)
%   L   : member length                           [any consistent unit]
%   Ic  : moment of inertia of prismatic centre   [length^4]
%   ra  : left  haunch depth ratio                [>= 0]
%   rb  : right haunch depth ratio                [>= 0]
%   n   : haunch shape exponent (1=linear,2=parabolic)
%
% OUTPUTS:
%   k   : 4x4 stiffness matrix  [force/length units consistent with input]
%   FEM : [M_A; M_B] fixed-end moments for w=1 uniform load
% ========================================================================


% ========================================================================
% DRIVER SCRIPT -- parametric surfaces
% ========================================================================

scrsz = get(0, 'ScreenSize');
fs    = 14;
```


I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

```
font  = 'Times New Roman';

% Fixed parameters for the parametric study
Ic = 1;    % normalised (results are per unit Ic)
n  = 2;    % parabolic haunches
L  = 1;    % normalised length

hf1 = figure('Position', [1, scrsz(4)/4.5, scrsz(3)/2.5, scrsz(4)/2.5]);

% ------------------------------------------------------------------------
% Plot 1 & 3: symmetric haunches (a=b, ra=rb)
% Vary haunch length a in [0.2, 0.4] and depth ratio r in [0, 4]
% ------------------------------------------------------------------------
[A_grid, R_grid] = meshgrid(0.2:0.01:0.4,  0:0.2:4);
K_surf   = zeros(size(A_grid));
FEM_surf = zeros(size(A_grid));

for i = 1 : size(A_grid, 1)
    for j = 1 : size(A_grid, 2)
        a = A_grid(i,j);
        r = R_grid(i,j);
        [k_ij, fem_ij] = NonPrismatic(a, a, L, Ic, r, r, n);
        K_surf(i,j)   = k_ij(2,2) / 4;    % normalised bending stiffness
        FEM_surf(i,j) = fem_ij(1) * 12;   % normalised fixed-end moment
    end
end

subplot(2,2,1);
surf(A_grid, R_grid, K_surf);
xlabel('a');  ylabel('r');  zlabel('k_{22}/4');
title('Stiffness: a=b, r_a=r_b');
xticks([0.2 0.25 0.3 0.35 0.4]);
yticks([0 1 2 3 4]);
zticks([0 2 4 6 8]);
set(gca, 'FontSize', fs, 'FontName', font);

subplot(2,2,3);
surf(A_grid, R_grid, FEM_surf);
xlabel('a');  ylabel('r');  zlabel('FEM');
title('Fixed-End Moment: a=b, r_a=r_b');
xticks([0.2 0.25 0.3 0.35 0.4]);
yticks([0 1 2 3 4]);
zticks([1 1.1 1.2 1.3 1.4]);
set(gca, 'FontSize', fs, 'FontName', font);

% ------------------------------------------------------------------------
% Plot 2 & 4: asymmetric haunches (a ~= b, fixed r=0.2)
% Vary both haunch lengths independently
% ------------------------------------------------------------------------
r_fixed = 0.2;
[A_grid2, B_grid2] = meshgrid(0.2:0.01:0.4,  0.1:0.01:0.4);
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
K_ratio   = zeros(size(A_grid2));
FEM_ratio = zeros(size(A_grid2));

for i = 1 : size(A_grid2, 1)
    for j = 1 : size(A_grid2, 2)
        a = A_grid2(i,j);
        b = B_grid2(i,j);
        % WARNING: no check that a+b <= 1; caller must ensure valid geometry
        [k_ij, fem_ij] = NonPrismatic(a, b, L, Ic, r_fixed, r_fixed, n);
        K_ratio(i,j)   = k_ij(2,2) / k_ij(4,4);   % ratio of end stiffnesses
        FEM_ratio(i,j) = fem_ij(1) / fem_ij(2);    % ratio of end moments
    end
end

subplot(2,2,2);
surf(A_grid2, B_grid2, K_ratio);
xlabel('a');  ylabel('b');  zlabel('k_{11}/k_{12}');
title('Stiffness ratio: r_a=r_b=0.2');
xticks([0.2 0.25 0.3 0.35 0.4]);
yticks([0.2 0.25 0.3 0.35 0.4]);
zticks([0.9 0.95 1 1.05 1.1]);
set(gca, 'FontSize', fs, 'FontName', font);

subplot(2,2,4);
surf(A_grid2, B_grid2, FEM_ratio);
xlabel('a');  ylabel('b');  zlabel('FEM_A / FEM_B');
title('FEM ratio: r_a=r_b=0.2');
xticks([0.2 0.25 0.3 0.35 0.4]);
yticks([0.2 0.25 0.3 0.35 0.4]);
zticks([0.9 0.95 1 1.05 1.1]);
set(gca, 'FontSize', fs, 'FontName', font);

% Export figure
if n == 2
    FileName = 'Haunches-Parab.eps';
else
    FileName = 'Haunches-Straight.eps';
end
% print(FileName, '-depsc');   % uncomment to save


% ========================================================================
% FUNCTION: NonPrismatic
% ========================================================================
% Computes the 4x4 stiffness matrix and fixed-end moments for a
% non-prismatic beam with left and right haunches and a prismatic centre.
%
% The flexibility approach is used:
%   Step 1: Build 2x2 flexibility matrix d by numerical integration
%   Step 2: Invert to get the 2x2 rotational stiffness k_tt
%   Step 3: Expand to 4x4 using statics matrix B (static condensation)
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
%   Step 4: Permute rows/columns to standard DOF order
%   Step 5: Integrate compatibility equations for FEM under uniform load

function [k, FEM] = NonPrismatic(a, b, L, Ic, ra, rb, n)

% ------------------------------------------------------------------------
% Step 1 -- Build the 2x2 flexibility matrix d
% ------------------------------------------------------------------------
% d(i,j) = integral of (m_i(x) * m_j(x) / (E*I(x))) dx   over [0, L]
%
% where m_1(x) = (x/L - 1) and m_2(x) = (x/L) are the unit moment
% diagrams for unit end moments at A and B respectively.
%
% The integral is split into three segments matching the I(x) profile.
% Each segment uses MATLAB's adaptive quadrature (integral()).

% --- Left haunch  (0 <= x <= a*L) ---
% I(x) = Ic * (1 + ra*(1 - x/(a*L))^n)^3
I_L  = @(x) Ic .* (1 + ra .* (1 - x./(a*L)).^n).^3;

d11_L = integral(@(x) ((-1+x/L).^2) ./ I_L(x), 0,   a*L);
d12_L = integral(@(x) ((-1+x/L).*(x/L)) ./ I_L(x), 0,   a*L);
d22_L = integral(@(x) ((x/L).^2)    ./ I_L(x), 0,   a*L);

% --- Prismatic centre  (a*L <= x <= (1-b)*L) ---
d11_C = integral(@(x) ((-1+x/L).^2) ./ Ic,     a*L, (1-b)*L);
d12_C = integral(@(x) ((-1+x/L).*(x/L)) ./ Ic, a*L, (1-b)*L);
d22_C = integral(@(x) ((x/L).^2)    ./ Ic,     a*L, (1-b)*L);

% --- Right haunch  ((1-b)*L <= x <= L) ---
% I(x) = Ic * (1 + rb*(1 - (L-x)/(b*L))^n)^3
I_R  = @(x) Ic .* (1 + rb .* (1 - (L-x)./(b*L)).^n).^3;

d11_R = integral(@(x) ((-1+x/L).^2) ./ I_R(x), (1-b)*L, L);
d12_R = integral(@(x) ((-1+x/L).*(x/L)) ./ I_R(x), (1-b)*L, L);
d22_R = integral(@(x) ((x/L).^2)    ./ I_R(x), (1-b)*L, L);

% Assemble full 2x2 flexibility matrix (sum of three segments)
d = [ d11_L+d11_C+d11_R,  d12_L+d12_C+d12_R ;
      d12_L+d12_C+d12_R,  d22_L+d22_C+d22_R ];

% ------------------------------------------------------------------------
% Step 2 -- Build stiffness sub-matrices via inversion
% ------------------------------------------------------------------------
% The statics matrix B relates the two redundant moments (M_A, M_B)
% to the four end forces via equilibrium:
%   B = [1/L, 1/L; -1/L, -1/L]  (shear equilibrium)

B_stat = [1, 1; -1, -1] / L;

d_inv = inv(d);             % 2x2 rotational stiffness
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
217
218 k_tt  = d_inv;               % rotational DOFs (2x2)
219 k_ut  = B_stat * d_inv;      % coupling: translational from rotational (2x2)
220 k_tu  = d_inv * B_stat';     % coupling: rotational from translational (2x2)
221 k_uu  = B_stat * d_inv * B_stat';  % translational stiffness (2x2)
222
223 % Assemble full 4x4 in order [theta_A, theta_B, v_A, v_B]
224 k_full = [ k_tt,  k_tu ;
225            k_ut,  k_uu ];
226
227 % ------------------------------------------------------------------------
228 % Step 3 -- Permute to standard DOF order [v_A, theta_A, v_B, theta_B]
229 % ------------------------------------------------------------------------
230 idx = [3, 2, 4, 1];
231 k   = k_full(idx, idx);
232
233 % ------------------------------------------------------------------------
234 % Step 4 -- Fixed-end moments for uniform transverse load (w = 1)
235 % ------------------------------------------------------------------------
236 % For a fixed-fixed beam under uniform load w, the FEM are found by
237 % solving the compatibility equations:
238 %
239 %   [d11, d12] [M_A]   [integral of x^2*(L-x)/I dx / 2     ]
240 %   [d21, d22] [M_B] = [integral of x*(L-x)^2/I dx / 2     ]
241 %
242 % (These are the particular-solution integrals for w=1.)
243 % The factor /2 comes from the parabolic bending moment diagram m_p(x)
244 % for a simply-supported beam under uniform load: m_p = w*x*(L-x)/2.
245
246 % Numerator integral 1: integral of x^2 * m_unit_1 / I dx  = integral of x^2*(
    L-x) / (2*I) dx
247 % Split into three segments as before
248
249 eq11_L = integral(@(x) (x.^2)        ./ I_L(x), 0,       a*L    );
250 eq11_C = integral(@(x) (x.^2)        ./ Ic,     a*L,     (1-b)*L);
251 eq11_R = integral(@(x) (x.^2)        ./ I_R(x), (1-b)*L, L      );
252 eq11   = eq11_L + eq11_C + eq11_R;
253
254 eq12_L = integral(@(x) ((L-x).*x)    ./ I_L(x), 0,       a*L    );
255 eq12_C = integral(@(x) ((L-x).*x)    ./ Ic,     a*L,     (1-b)*L);
256 eq12_R = integral(@(x) ((L-x).*x)    ./ I_R(x), (1-b)*L, L      );
257 eq12   = eq12_L + eq12_C + eq12_R;
258
259 % Right-hand side: particular moment integral for m_1 = (x/L - 1)
260 eq13_L = integral(@(x) ((L-x).*x.^2) ./ I_L(x), 0,       a*L    );
261 eq13_C = integral(@(x) ((L-x).*x.^2) ./ Ic,     a*L,     (1-b)*L);
262 eq13_R = integral(@(x) ((L-x).*x.^2) ./ I_R(x), (1-b)*L, L      );
263 eq13   = eq13_L + eq13_C + eq13_R;
264
265 % Numerator integral 2: for m_unit_2 = (x/L)
266 eq22_L = integral(@(x) ((L-x).^2)    ./ I_L(x), 0,       a*L    );
```

COPIA DI REVISIONE

```
eq22_C = integral(@(x) ((L-x).^2)    ./ Ic,     a*L,     (1-b)*L);
eq22_R = integral(@(x) ((L-x).^2)    ./ I_R(x), (1-b)*L, L      );
eq22   = eq22_L + eq22_C + eq22_R;

% Right-hand side: particular moment integral for m_2 = (x/L)
eq23_L = integral(@(x) (x.*(L-x).^2) ./ I_L(x), 0,       a*L    );
eq23_C = integral(@(x) (x.*(L-x).^2) ./ Ic,     a*L,     (1-b)*L);
eq23_R = integral(@(x) (x.*(L-x).^2) ./ I_R(x), (1-b)*L, L      );
eq23   = eq23_L + eq23_C + eq23_R;

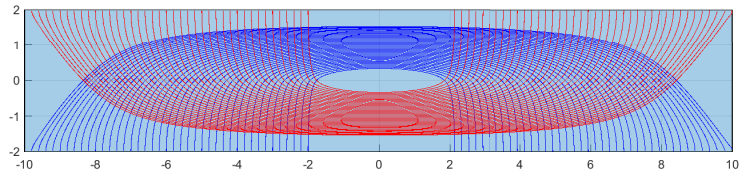
% Solve the 2x2 compatibility system for the unknown FEM
% NOTE: eq21 = eq12 by symmetry of the flexibility matrix (Maxwell's theorem)
A_fem = [ eq11,  eq12 ;
          eq12,  eq22 ];    % eq21 == eq12 by reciprocity
B_fem = [ eq13 ;
          eq23 ] / 2;       % divide by 2 for the w*x*(L-x)/2 moment diagram

FEM = A_fem \ B_fem;        % [M_A; M_B]

end   % NonPrismatic
```

I.2.10 Linee isostatiche

Codice per tracciare linee isostatice come mostrato in §15.4.7




```
% ========================================================================
% ISOSTATIC LINES (STRESS TRAJECTORIES) IN A SIMPLY-SUPPORTED BEAM
% ========================================================================
% Isostatic lines (also called stress trajectories or principal stress
% lines) are curves that are everywhere tangent to a principal stress
% direction.  They reveal the internal "flow" of compression and tension
% through a structural member.
%
% THEORY:
%   At any point (x,y) in the beam, the stress state under bending and
%   shear is:
%       [sigma,  tau ]
%       [tau,    0   ]
%
%   where sigma = -M(x)*y/I  (bending stress, zero at neutral axis)
%   and   tau   = V(x)*(h^2/4 - y^2)*A_eff  (parabolic shear stress)
%
%   The principal stress directions are the eigenvectors of this tensor.
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
%   Two families of isostatic lines exist:
%     Family 1 (blue):  major principal stress direction (compression or tension)
%     Family 2 (red):   minor principal stress direction (orthogonal to family 1)
%
% TRACING ALGORITHM:
%   Each isostatic line is traced by a simple Euler integration:
%     x(k+1) = x(k) +/- step * eigenvector_component_x
%     y(k+1) = y(k) +/- step * eigenvector_component_y
%
%   The sign of the step is chosen based on the quadrant of (x,y) to
%   keep the tracing moving in a consistent direction (see inline notes).
%
%   WARNING: the sign logic in both tracing loops is heuristic and was
%   tuned for this specific beam geometry.  It may not generalise to
%   other load cases or starting points without adjustment.
%
% LOADS SUPPORTED:
%   Load = 1 : uniformly distributed load w on a simply-supported beam
%   Load = 2 : midspan point load W on a simply-supported beam
%
% BEAM GEOMETRY:
%   Origin at the beam centroid (x=0, y=0 at mid-span, mid-height).
%   x in [-L/2, L/2],  y in [-h/2, h/2]
%
% OUTPUT:
%   Figure with beam outline, blue compression trajectories (Family 1),
%   and red tension trajectories (Family 2).
%   Exported to EPS and converted to PDF via Ghostscript.
% ========================================================================

clear; clc; close all;

scrsz = get(0, 'ScreenSize');
fs    = 16;
font  = 'Times New Roman';
GS    = 'gswin64.exe';   % Ghostscript executable for EPS->PDF

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Problem parameters
% ------------------------------------------------------------------------
Load   = 1;      % 1 = uniform load;  2 = midspan point load
nlines = 40;     % number of isostatic lines per family
delta  = 100;    % spacing denominator: starting x = -L/2 + i*L/delta

w    = 1;        % load intensity (normalised)
L    = 20;       % beam span                          [length units]
h    = L/5;      % beam depth                         [length units]
B    = 1;        % beam width                         [length units]
A    = 4;        % cross-sectional area               [length^2]
```

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

```
Inrt = B*h^3/12; % second moment of area              [length^4]

% Reference stress values (for context, not used in tracing)
Mmax   = w*L^2/8;
sigmax = Mmax * (h/2) / Inrt;     % maximum bending stress at extreme fibre
taumax = 1.5 * w*L / (2*A);       % maximum shear stress at neutral axis

step = h/100;    % integration step size for Euler tracing

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Draw beam outline
% ------------------------------------------------------------------------
hf1 = figure('Position', [1, scrsz(4)/4.5, scrsz(3)/2.5, scrsz(4)/4]);

pgon = polyshape([-L/2, L/2, L/2, -L/2], [-h/2, -h/2, h/2, h/2]);
plot(pgon);
hold on;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Family 1: traces along the FIRST eigenvector (column 1)
% ------------------------------------------------------------------------
% Starting points: bottom fibre (y approx -h/2), evenly spaced along the span.
% Traces upward through the beam following the compression arch.
%
% Sign convention for step direction (heuristic, tuned for this geometry):
%   y > 0 (upper half):  move right in x, downward in y
%   y < 0 & x < 0:       move left  in x, upward   in y
%   y < 0 & x > 0:       move right in x, downward in y
%
% WARNING: this quadrant-based sign logic is geometry-specific.

for i = 1 : nlines
    x0 = -L/2 + i * L/delta;   % starting x position
    y0 = -0.99 * h/2;          % start near (but inside) bottom fibre

    xv = zeros(1, 1000);  yv = zeros(1, 1000);
    xv(1) = x0;  yv(1) = y0;

    for k = 1 : 999
        % Compute stress tensor at current point
        sig = Sigma(xv(k), yv(k), w, L, Inrt, Load);
        tau = Tau(xv(k), yv(k), w, A, h, Load);
        T   = [sig, tau; tau, 0];

        % Eigenvectors give principal stress directions
        [Ve, D]    = eig(T);
        [~, idx]   = sort(diag(D));   % sort by ascending eigenvalue
        Vect       = Ve(:, idx);
        Vect       = -Vect / norm(Vect);   % normalise (sign absorbed below)

        % Step in the direction of eigenvector 1 (column 1 after sorting)
```

COPIA DI REVISIONE

```
        if yv(k) > 0
            xv(k+1) = xv(k) + step * Vect(1,1);
            yv(k+1) = yv(k) - step * Vect(2,1);
        elseif yv(k) < 0 && xv(k) < 0
            xv(k+1) = xv(k) - step * Vect(1,1);
            yv(k+1) = yv(k) + step * Vect(2,1);
        else   % y < 0 and x >= 0
            xv(k+1) = xv(k) + step * Vect(1,1);
            yv(k+1) = yv(k) - step * Vect(2,1);
        end

        % Terminate if the line exits through the bottom fibre
        if yv(k+1) < -h/2
            xv(k+1) = NaN;  yv(k+1) = NaN;
            xv = xv(1:k+1);  yv = yv(1:k+1);
            break
        end
    end

    plot(xv, yv, 'b-');
    hold on;
end

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Family 2: traces along the SECOND eigenvector (column 2)
% ------------------------------------------------------------------------
% Starting points: top fibre (y approx +h/2), same x spacing.
% Traces downward following the tension arch (orthogonal to Family 1).
%
% Sign convention (heuristic):
%   y > 0 & x < 0:  move right, downward
%   y > 0 & x > 0:  move left,  upward    (note: reversed direction)
%   y < 0:          move right, downward  (both half-planes)
%
% WARNING: the y>0 & x>0 branch has a two-step logic in the original
% that sets (x,y) to the current value then immediately overwrites it.
% The first assignment is dead code -- preserved here as a no-op comment.

for i = 1 : nlines
    x0 = -L/2 + i * L/delta;
    y0 =  0.99 * h/2;   % start near (but inside) top fibre

    xv = zeros(1, 1000);  yv = zeros(1, 1000);
    xv(1) = x0;  yv(1) = y0;

    for k = 1 : 999
        sig = Sigma(xv(k), yv(k), w, L, Inrt, Load);
        tau = Tau(xv(k), yv(k), w, A, h, Load);
        T   = [sig, tau; tau, 0];

        [Ve, D]  = eig(T);
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
        [~, idx] = sort(diag(D));
        Vect     = Ve(:, idx);
        Vect     = -Vect / norm(Vect);

        % Step in the direction of eigenvector 2 (column 2 after sorting)
        if yv(k) > 0 && xv(k) < 0
            xv(k+1) = xv(k) + step * Vect(1,2);
            yv(k+1) = yv(k) - step * Vect(2,2);
        elseif yv(k) > 0 && xv(k) >= 0
            % BUG FIX: original had a dead assignment (x,y)=(x,y) before
            % this step -- removed; only the active step is kept.
            xv(k+1) = xv(k) - step * Vect(1,2);
            yv(k+1) = yv(k) + step * Vect(2,2);
        elseif yv(k) < 0 && xv(k) < 0
            xv(k+1) = xv(k) + step * Vect(1,2);
            yv(k+1) = yv(k) - step * Vect(2,2);
        else   % y < 0 and x >= 0
            xv(k+1) = xv(k) + step * Vect(1,2);
            yv(k+1) = yv(k) - step * Vect(2,2);
        end

        % Terminate if the line exits through the top fibre
        if yv(k+1) > h/2
            xv(k+1) = NaN;  yv(k+1) = NaN;
            xv = xv(1:k+1);  yv = yv(1:k+1);
            break
        end
    end

    plot(xv, yv, 'r-');
    hold on;
end

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- Formatting and export
% ------------------------------------------------------------------------
grid on;
daspect([1 1 1]);
xlim([-L/2, L/2]);
ylim([-h/2,  h/2]);
xlabel('x', 'FontSize', fs);
ylabel('y', 'FontSize', fs);
title(['Isostatic Lines -- Load type ' num2str(Load) ...
       '  (blue = Family 1,  red = Family 2)'], 'FontSize', fs);
set(gca, 'FontSize', fs, 'FontName', font);

FileName = ['Stress-Flow-' num2str(Load) '.eps'];
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'auto');
print(FileName, '-depsc');
eps2pdf(FileName, GS, 0);

```

COPIA DI REVISIONE

```
221
222 % ========================================================================
223 % FUNCTION: Tau  -- shear stress at point (x,y)
224 % ========================================================================
225 % Parabolic shear stress distribution (Jourawski formula):
226 %   tau(y) = V(x) * (h^2/4 - y^2) * (B/2) / I
227 %          = V(x) * (1.5/A) * (1 - (2y/h)^2)
228 %
229 % INPUTS:
230 %   x, y  : coordinates (origin at centroid)
231 %   w     : load intensity
232 %   A     : cross-sectional area
233 %   h     : section depth
234 %   Load  : 1 = uniform load,  2 = point load at midspan
235 %
236 % OUTPUT:
237 %   tau   : shear stress at (x,y)
238
239 function tau = Tau(x, y, w, A, h, Load)
240
241 % Shear force at section x
242 if Load == 1   % uniform load: V(x) = -w*x  (reactions at +/-L/2 = +w*L/2)
243     V = -w * x;
244 else           % midspan point load W=w: V = +/-w/2
245     if x > 0
246         V = -w/2;
247     else
248         V =  w/2;
249     end
250 end
251
252 % Parabolic distribution (zero at extreme fibres, max at neutral axis)
253 tau = -6*V*y^2 / (A*h^2) + 1.5*V/A;
254
255 end   % Tau
256
257
258 % ========================================================================
259 % FUNCTION: Sigma  -- bending stress at point (x,y)
260 % ========================================================================
261 % Linear bending stress (Navier formula):
262 %   sigma(x,y) = -M(x) * y / I
263 %
264 % INPUTS:
265 %   x, y  : coordinates (origin at centroid)
266 %   w     : load intensity
267 %   L     : beam span
268 %   Inrt  : second moment of area
269 %   Load  : 1 = uniform load,  2 = point load at midspan
270 %
271 % OUTPUT:
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
%   sigma : bending stress at (x,y)

function sigma = Sigma(x, y, w, L, Inrt, Load)

% Bending moment at section x
if Load == 1   % uniform load: M(x) = w*L^2/8 - w*x^2/2
    M = -w*x^2/2 + w*L^2/8;
else           % midspan point load W=w
    if x >= 0
        M = w*L/2 - w*x/2;   % right half
    else
        M = w*L/2 + w*x/2;   % left half (x is negative here)
    end
end

sigma = -M * y / Inrt;

end   % Sigma
```

I.2.11 Design evolutivo

I.2.12 Principali

```
% ========================================================================
% EVOLUTIONARY STRUCTURAL DESIGN -- RANDOM ELEMENT REMOVAL
% ========================================================================
% Demonstrates the concept of evolutionary structural optimization (ESO):
% a fully-connected 3D truss is progressively simplified by removing one
% element at a time, while checking that no node becomes under-connected.
%
% CONCEPT:
%   In a real ESO implementation, elements are removed based on a stress
%   or strain energy criterion (least-stressed elements removed first).
%   Here, removal is RANDOM -- this is a demonstration scaffold showing
%   the bookkeeping, visualization, and termination logic that a full
%   optimizer would use.
%
% ALGORITHM:
%   1. Generate a node grid (regular or random)
%   2. Connect ALL pairs of nodes -> fully-connected truss (Hankel indexing)
%   3. Loop:
%      a. Select an element to remove (here: random; replace with criterion)
%      b. Highlight it, remove it from the connectivity list
%      c. Check that both end nodes still have >= min_elem connections
%      d. If a node drops below the minimum, stop and report
%      e. Re-plot the updated mesh and write a video frame
%   4. Stop after MaxSteps or if a termination condition is met
%
% STRUCTURE OF THIS FILE:
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
%   Part 1  -- Main driver script
%   Part 2  -- function Node_Generation   : create node coordinates
%   Part 3  -- function Check_Lonely      : verify node connectivity
%   Part 4  -- function PlotMesh          : draw 3D truss and export frame
%
% NOTE: In a production ESO code, the line:
%   ElemOut = randi([1 nelem], 1, 1);
% would be replaced by a finite element analysis call that returns the
% index of the least-stressed (or lowest strain-energy) element.
% ========================================================================


% ========================================================================
% PART 1 -- MAIN DRIVER
% ========================================================================

clear; close all; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.1 -- Control parameters
% ------------------------------------------------------------------------
Random   = 1;      % 0 = 8 random nodes;  1 = regular grid of nodes
MaxSteps = 30;     % maximum number of element removals

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.2 -- Generate nodes
% ------------------------------------------------------------------------
[x, y, z, N] = Node_Generation(Random);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.3 -- Generate fully-connected element list
% ------------------------------------------------------------------------
% Every unique pair of nodes (i,j) with i < j forms one element.
% The Hankel matrix trick generates all such pairs without duplication.
%
% hankel(2:N) produces a matrix whose (r,c) entry is r+c (shifted),
% and find() returns the row/column indices of all non-zero entries.
% The result is a 2 x nelem matrix of [node_i; node_j] pairs.

[r, c, ~]  = find(hankel(2:N));
index      = [c, r]';        % each column is one element: [near_node;
   far_node]
nelem      = size(index, 2);
lnods      = index';         % nelem x 2: each row = [node_i, node_j]

step = 0;
OK   = 0;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.4 -- Set up video writer
% ------------------------------------------------------------------------
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
vid          = VideoWriter('Design_Opti.avi');
vid.FrameRate = 1;   % 1 frame per second (slow enough to follow visually)
open(vid);

% Draw and record the initial fully-connected mesh
PlotMesh(x, y, z, lnods, nelem, step);
frame = getframe(gcf);
writeVideo(vid, frame);

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 1.5 -- Evolutionary removal loop
% -------------------------------------------------------------------------
while OK == 0 && step < MaxSteps

    % --- Select element to remove ---
    % NOTE: in a real ESO, replace this random selection with:
    %   ElemOut = index_of_least_stressed_element_from_FEA;
    ElemOut = randi([1, nelem], 1, 1);

    % --- Highlight the element being removed (red, thick) ---
    X  = [x(lnods(ElemOut,1)),  x(lnods(ElemOut,2))];
    Y  = [y(lnods(ElemOut,1)),  y(lnods(ElemOut,2))];
    Z  = [z(lnods(ElemOut,1)),  z(lnods(ElemOut,2))];
    plot3(X, Y, Z, 'LineWidth', 3, 'Color', 'r');
    hold on;
    frame = getframe(gcf);
    writeVideo(vid, frame);

    % --- Record which nodes this element connected ---
    NodesOut = lnods(ElemOut, 1:2);

    % --- Remove element from connectivity list ---
    % Compact the lnods array by shifting rows up from ElemOut onward.
    % WARNING: for large meshes this in-place shift is O(nelem) per step.
    %          A more efficient approach would use logical indexing:
    %          lnods = lnods([1:ElemOut-1, ElemOut+1:end], :);
    for i = ElemOut : nelem-1
        lnods(i, 1:2) = lnods(i+1, 1:2);
    end
    lnods = lnods(1:nelem-1, :);   % trim the now-redundant last row
    nelem = nelem - 1;
    step  = step  + 1;

    % --- Re-plot the updated mesh ---
    PlotMesh(x, y, z, lnods, nelem, step);

    % --- Check that neither end node has become under-connected ---
    min_elem = 2;   % minimum number of elements required at any node
    Del_Nodes = Check_Lonely(NodesOut, lnods, min_elem, vid);

    frame = getframe(gcf);
```

COPIA DI REVISIONE

```
    writeVideo(vid, frame);

end   % evolutionary loop

close(vid);
fprintf('Evolutionary design complete after %d steps.\n', step);


% ========================================================================
% PART 2 -- FUNCTION: Node_Generation
% ========================================================================
% Generates the node coordinate arrays x, y, z.
%
% If Random == 0: generates 8 nodes at random positions in [0,1]^3.
%                 (despite the name 'Random==0', these ARE random -- the
%                 flag controls grid vs random, but the naming is inverted
%                 from what one would expect)
%
% If Random == 1: generates a regular rectangular grid of nodes with
%                 specified range and spacing in each direction.
%
% WARNING: the grid generation uses Rx/Deltaz (not Rz/Deltaz) for nz.
%          This is preserved from the original -- verify if Rz was intended.
%
% OUTPUTS:
%   x, y, z : 1 x N coordinate arrays
%   N       : total number of nodes

function [x, y, z, N] = Node_Generation(Random)

if Random == 0
    % 8 random nodes in the unit cube
    N = 8;
    x = rand(1, N);
    y = rand(1, N);
    z = rand(1, N);

else
    % Regular grid
    Rx = 20;  Ry = 20;  RZ = 60;    % grid extents in x, y, z   [units]
    Dx = 20;  Dy = 20;  Dz = 30;    % grid spacing in x, y, z   [units]

    xmin = 0;  ymin = 0;  zmin = 0;

    nx = round(Rx/Dx) + 1;   % number of nodes in x
    ny = round(Ry/Dy) + 1;   % number of nodes in y
    % WARNING: original uses Rx/Dz (not RZ/Dz) for nz -- may be a typo.
    %          If the z-extent should be RZ=60 with spacing Dz=30, nz=3.
    %          Currently nz = round(Rx/Dz)+1 = round(20/30)+1 = 2.
    nz = round(Rx/Dz) + 1;

```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
    N = 0;
    x = zeros(1, nx*ny*nz);
    y = zeros(1, nx*ny*nz);
    z = zeros(1, nx*ny*nz);

    for ix = 1 : nx
        for iy = 1 : ny
            for iz = 1 : nz
                N      = N + 1;
                x(N)   = xmin + (ix-1) * Dx;
                y(N)   = ymin + (iy-1) * Dy;
                z(N)   = zmin + (iz-1) * Dz;
            end
        end
    end

    % Trim to actual size
    x = x(1:N);
    y = y(1:N);
    z = z(1:N);
end

end   % Node_Generation


% ========================================================================
% PART 3 -- FUNCTION: Check_Lonely
% ========================================================================
% After removing an element, checks that both of its end nodes still have
% at least min_elem elements connected to them.  If either node drops
% below the minimum, an error dialog is shown and execution stops.
%
% INPUTS:
%   NodesOut : 1x2 vector of the two node indices of the removed element
%   lnods    : current (reduced) connectivity array  [nelem x 2]
%   min_elem : minimum acceptable element count per node
%   v        : VideoWriter object (passed in but not used -- legacy arg)
%
% OUTPUT:
%   Del_Nodes : 0 if both nodes are adequately connected;
%               otherwise the count of the under-connected node

function Del_Nodes = Check_Lonely(NodesOut, lnods, min_elem, v) %#ok<INUSD>

Del_Nodes = 0;

for i = 1 : 2
    % Count how many rows in lnods contain this node number
    % (checking both columns: lnods(:,1) and lnods(:,2))
    matches  = (lnods == NodesOut(i));   % logical array, same size as lnods
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
    n_connected = sum(matches(:));       % total occurrences = number of
   connected elements

    if n_connected < min_elem
        msg = ['Number of elements connected to node ' num2str(NodesOut(i))
   ...
               ' dropped below minimum (' num2str(min_elem) ')'];
        errordlg(msg, 'END EXECUTION');
        Del_Nodes = n_connected;
        error('Evolutionary design terminated: node %d under-connected.',
   NodesOut(i));
    end
end

end   % Check_Lonely


% ========================================================================
% PART 4 -- FUNCTION: PlotMesh
% ========================================================================
% Draws the current 3D truss in a new figure window:
%   - node positions as red asterisks with node number labels
%   - elements as lines with element number labels at midpoints
%   - title showing the current step number
% Exports to EPS and converts to PDF.
%
% INPUTS:
%   x, y, z  : node coordinate arrays
%   lnods    : connectivity array  [nelem x 2]
%   nelem    : number of active elements
%   step     : current removal step (used in title and filename)

function PlotMesh(x, y, z, lnods, nelem, step)

figure;
plot3(x, y, z, '*');
hold on;

N = length(x);

% Node labels (red numbers at node positions)
for i = 1 : N
    text(x(i), y(i), z(i), num2str(i), 'Color', 'red', 'FontSize', 14);
end

% Elements (lines with element number at midpoint)
for ie = 1 : nelem
    X  = [x(lnods(ie,1)),  x(lnods(ie,2))];
    Y  = [y(lnods(ie,1)),  y(lnods(ie,2))];
    Z  = [z(lnods(ie,1)),  z(lnods(ie,2))];
    Xc = mean(X);  Yc = mean(Y);  Zc = mean(Z);
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
277
278     plot3(X, Y, Z);
279     text(Xc, Yc, Zc, num2str(ie), 'FontSize', 10);
280 end
281
282 title(['Step: ' num2str(step)]);
283 pbaspect([1 1 1]);
284 grid minor;
285 view(-36, 24);
286
287 % Export frame
288 GS       = 'c:/Program Files/gs/gs9.10/bin/gswin64.exe';
289 FileName = ['./Figs/Mesh-No-' num2str(step) '.eps'];
290 set(gcf, 'PaperPositionMode', 'auto');
291 print(FileName, '-depsc');
292 eps2pdf(FileName, GS, 0);
293
294 end   % PlotMesh
```

I.2.13 Schema di interazione colonna

```
1  % ========================================================================
2  % RECTANGULAR RC COLUMN -- NOMINAL INTERACTION DIAGRAM (P-M)
3  % ========================================================================
4  % Constructs the nominal axial force - bending moment (P_n vs M_n)
5  % interaction diagram for a doubly-reinforced rectangular concrete column
6  % using ACI 318 rectangular stress block assumptions.
7  %
8  % THEORY:
9  %   The interaction diagram is the locus of (M_n, P_n) pairs at which the
10 %   column reaches its nominal strength.  Each point corresponds to a
11 %   specific neutral axis depth c (measured from the compression face).
12 %
13 %   ACI rectangular stress block:
14 %     Compression force in concrete: C_c = 0.85 * f'c * a * b
15 %     where  a = Beta1 * c  (depth of equivalent stress block)
16 %     Beta1 = 0.85 for f'c <= 4 ksi, reduced 0.05 per 1 ksi above 4,
17 %     minimum Beta1 = 0.65
18 %
19 %   Steel strains (linear strain compatibility):
20 %     eps_s  = eps_cu * (d  - c) / c   (tension steel at depth d)
21 %     eps_s' = eps_cu * (c  - d') / c  (compression steel at depth d')
22 %
23 %   Steel stresses capped at f_y (elastic-perfectly-plastic model).
24 %
25 % TWO BRANCHES:
26 %   Tension failure  (c < c_b): steel yields before concrete crushes
27 %   Compression failure (c > c_b): concrete crushes before steel yields
28 %   Balanced point  (c = c_b): both occur simultaneously
29 %
```

COPIA DI REVISIONE

```
% UNITS: kips, inches (moments converted to k-ft for output)
% =========================================================================

close all; clear; clc;

fss    = 24;
scrsz  = get(0, 'ScreenSize');
figpos = [2, 2, scrsz(3)/3, scrsz(4)/2];

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 1 - Material properties
% -------------------------------------------------------------------------
E_s    = 29000;   % steel Young's modulus          [ksi]
eps_cu = 0.003;   % ACI ultimate concrete strain   [in/in]

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 2 - Section geometry and reinforcement
% -------------------------------------------------------------------------
h    = 20;     % section depth (in bending direction)  [in]
b    = 12;     % section width                          [in]
dp   = 2.5;    % cover to compression steel centroid   [in]
d    = h - dp; % effective depth to tension steel      [in]

f_y  = 50;     % steel yield strength                  [ksi]
f_c  = 3.5;    % concrete compressive strength         [ksi]
A_s  = 2;      % tension steel area                    [in^2]
Ap_s = 2;      % compression steel area                [in^2]

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 3 - ACI Beta1 factor
% -------------------------------------------------------------------------
if f_c <= 4
    Beta1 = 0.85;
else
    Beta1 = max(0.85 - 0.05*(f_c - 4), 0.65);
end

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 4 - Balanced failure point
% -------------------------------------------------------------------------
% Strain compatibility at balanced condition:
%   c_b/d = eps_cu / (eps_cu + eps_y)

eps_y  = f_y / E_s;
c_b    = eps_cu * d / (eps_cu + eps_y);
a_b    = Beta1 * c_b;

fp_s_b = min(E_s * eps_cu * (c_b - dp) / c_b, f_y);
C_c_b  = 0.85 * f_c * a_b * b;
Pn_b   = C_c_b + Ap_s * fp_s_b - A_s * f_y;
Mn_b   = C_c_b * (d - a_b/2) + Ap_s * fp_s_b * (d - dp);
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
e_b    = Mn_b / Pn_b;   % balanced eccentricity [in]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 - Tension failure branch  (c_min to c_b)
% ------------------------------------------------------------------------
% Tension steel has yielded (f_s = f_y).
% Compression steel stress varies with c; capped at f_y.

n     = 400;
cmin  = h / n;   % avoid c=0 singularity
c_vec = linspace(cmin, c_b, n+1);
PT    = zeros(1, n+1);
MT    = zeros(1, n+1);

for i = 1 : n+1
    c     = c_vec(i);
    a     = Beta1 * c;
    fp_s  = min(E_s * eps_cu * (c - dp) / c, f_y);
    C_c   = 0.85 * f_c * a * b;
    PT(i) = C_c + Ap_s * fp_s - A_s * f_y;
    MT(i) = (C_c * (d - a/2) + Ap_s * fp_s * (d - dp)) / 12;
end

figure('Position', figpos);
set(gca, 'FontSize', fss);
plot(MT, PT, 'b', 'LineWidth', 2);
hold on;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 6 - Compression failure branch  (c_b to c_max)
% ------------------------------------------------------------------------
% Both steel stresses vary with c; each capped at f_y.

cmax    = 50;
c_vec2  = linspace(c_b, cmax, n);
PC      = zeros(1, n);
MC      = zeros(1, n);

for i = 1 : n
    c     = c_vec2(i);
    a     = Beta1 * c;
    f_s   = min(E_s * eps_cu * (d  - c) / c, f_y);
    fp_s  = min(E_s * eps_cu * (c  - dp) / c, f_y);
    C_c   = 0.85 * f_c * a * b;
    PC(i) = C_c + Ap_s * fp_s - A_s * f_s;
    MC(i) = (C_c * (d - a/2) + Ap_s * fp_s * (d - dp)) / 12;
end

plot(MC, PC, 'r', 'LineWidth', 2);

% ------------------------------------------------------------------------
```

COPIA DI REVISIONE

```
% Section 7 - Format and export
% ------------------------------------------------------------------------
lgd = legend('Tension Failure', 'Compression Failure');
set(lgd, 'Color', 'none');
xlim([0, inf]);  ylim([0, inf]);
grid on;
xlabel('Nominal Moment  M_n  [k-ft]', 'FontSize', fss);
ylabel('Nominal Load  P_n  [kips]',   'FontSize', fss);
title('RC Column P-M Interaction Diagram', 'FontSize', fss);
set(gca, 'FontSize', fss, 'Color', 'none');
exportgraphics(gca, 'Interaction-Diagram-Matlab.pdf', 'BackgroundColor', 'none
    ');
```

I.2.14 Metodi variabili; mathematica

Anche se Mathematica può salvare un file come `.tex`, uno script è stato scritto per convertire quel file in un più leggibile che quasi-emulare il notebook sentire.

Questa è la soluzione del problema risolto in §48.6.1.2.

Slocamento virtuale

Definire la funzione v

```
v1[x_]:=a1x^2 + a2x^3
```

Risolvere per a e b in termini di v_2 e v_3

```
solution=Solve[{v1[L/2]==v2,v1[L]==v3},{a1,a2}]
```

$$\left\{\left\{\text{a1}\to -\frac{-8\text{v2}+\text{v3}}{L^2},\text{a2}\to -\frac{2(4\text{v2}-\text{v3})}{L^3}\right\}\right\}$$

Aggiornamento dell'espressione v

```
v=v1[x]/.solution
```

$$\left\{-\frac{(-8\text{v2}+\text{v3})x^2}{L^2}-\frac{2(4\text{v2}-\text{v3})x^3}{L^3}\right\}$$

```
delv=v/.{v2 → delv2,v3 → delv3}
```

$$\left\{-\frac{(-8\text{delv2}+\text{delv3})x^2}{L^2}-\frac{2(4\text{delv2}-\text{delv3})x^3}{L^3}\right\}$$

Seconda derivazione v

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
d2v=D[v,{x,2}]
```

$$\left\{-\frac{2(-8\text{v2}+\text{v3})}{L^2}-\frac{12(4\text{v2}-\text{v3})x}{L^3}\right\}$$

Secondo derivato dello spostamento virtuale

```
d2delv=d2v/.{v2 → delv2,v3 → delv3}
```

$$\left\{-\frac{2(-8\text{delv2}+\text{delv3})}{L^2}-\frac{12(4\text{delv2}-\text{delv3})x}{L^3}\right\}$$

Energia virtuale

```
delU=Integrate[d2vd2delvEI,{x,0,L},Assumptions → L > 0]
```

$$\left\{\frac{256\text{delv2EIv2}}{L^3}-\frac{80\text{delv3EIv2}}{L^3}-\frac{80\text{delv2EIv3}}{L^3}+\frac{28\text{delv3EIv3}}{L^3}\right\}$$

Lavoro esterno virtuale

```
delW=Integrate[q0(1 − x/L)delv,{x,0,L},Assumptions → L > 0]
```

$$\left\{\frac{4\text{delv2}L\text{q0}}{15}+\frac{\text{delv3}L\text{q0}}{60}\right\}$$

Set $\delta U - \delta W = 0$

```
UW=delU − delW
```

$$\left\{-\frac{4}{15}\text{delv2}L\text{q0}-\frac{\text{delv3}L\text{q0}}{60}+\frac{256\text{delv2EIv2}}{L^3}-\frac{80\text{delv3EIv2}}{L^3}-\frac{80\text{delv2EIv3}}{L^3}+\frac{28\text{delv3EIv3}}{L^3}\right\}$$

```
A=Coefficient[UW,delv2]
```

$$\left\{-\frac{4L\text{q0}}{15}+\frac{256\text{EIv2}}{L^3}-\frac{80\text{EIv3}}{L^3}\right\}$$

```
B=Coefficient[UW,delv3]
```

$$\left\{-\frac{L\text{q0}}{60}-\frac{80\text{EIv2}}{L^3}+\frac{28\text{EIv3}}{L^3}\right\}$$

```
solution2=Solve[{A==0,B==0},{v2,v3}]
```

$$\left\{\left\{\text{v2}\to\frac{11L^4\text{q0}}{960\text{EI}},\text{v3}\to\frac{L^4\text{q0}}{30\text{EI}}\right\}\right\}$$

COPIA DI REVISIONE

v2=*N*[v2/.solution2]

$$\left\{\frac{0.0114583L^4\text{q0}}{\text{EI}}\right\}$$

v3=*N*[v3/.solution2]

$$\left\{\frac{0.0333333L^4\text{q0}}{\text{EI}}\right\}$$

Determinare il momento dal campo di spostamento

M=Simplify[d2vEI]

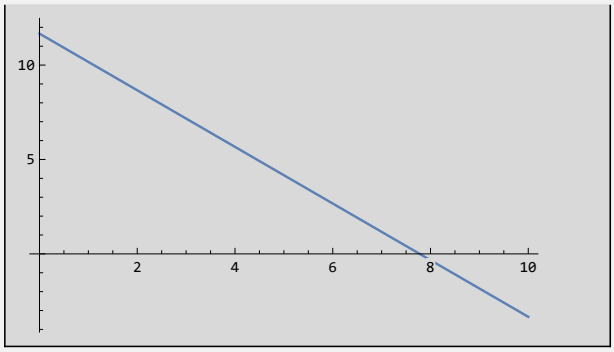
$$\{\{L\text{q0}(0.116667L - 0.15x)\}\}$$

Determinare la tosapa come derivata del momento

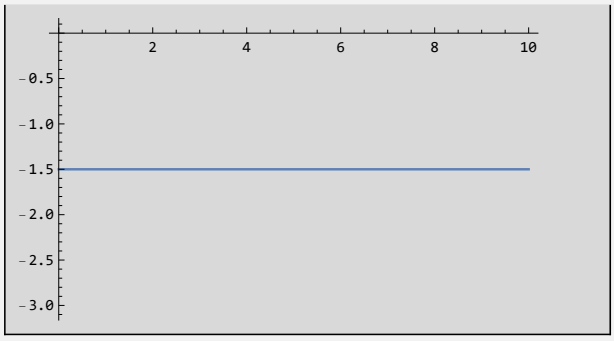
V=*D*[*M*,{*x*,1}]

$$\{\{-0.15L\text{q0}\}\}$$

q0=1; *L*=10; Plot[*M*,{*x*,0,10}]



Plot[*V*,{*x*,0,10}]



Scar e diagrammi di momento esatto

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
Clear[L,q0];
```

```
w[x_]:=q0(1 - x/L)
```

```
Vsup= - Integrate[w[x],{x,0,L}]
```

$$-\frac{Lq0}{2}$$

```
Msup=Integrate[w[x]x,{x,0,L}]
```

$$\frac{L^2q0}{6}$$

```
Vexact=Integrate[w[x],x] + Vsup
```

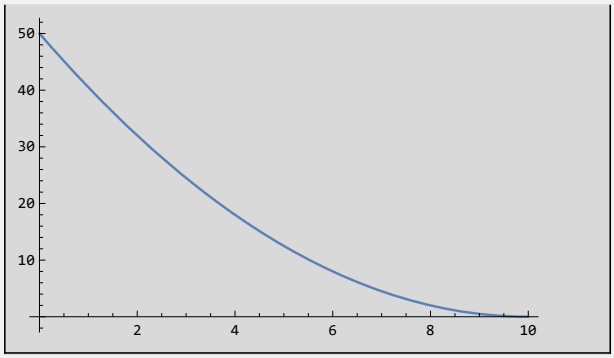
$$-\frac{Lq0}{2} + q0x - \frac{q0x^2}{2L}$$

```
Mexact=Integrate[Vexact,x] + Msup
```

$$\frac{L^2q0}{6} - \frac{Lq0x}{2} + \frac{q0x^2}{2} - \frac{q0x^3}{6L}$$

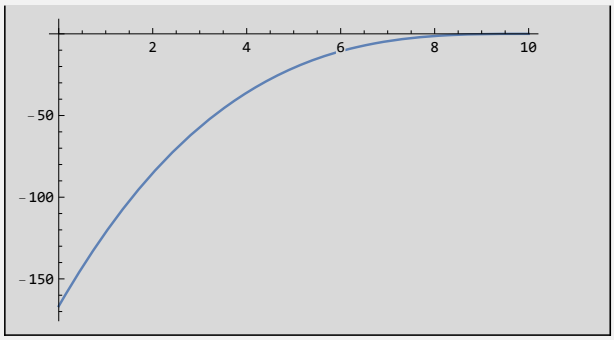
```
q0= - 10; L=10;
```

```
Plot[Vexact,{x,0,L}]
```



COPIA DI REVISIONE

Plot[Mexact,{x,0,L}]



Clear[L,q0,v,V,M,v2,v3,solution,v,delv,del2v,d2v,d2delv,delU,delW,UW,A,B,solution2]

Forza virtuale

Definire il carico distribuito (nota l'incoronazione della direzione di x asse)

q=q0x1/L

$$\frac{\text{q0x1}}{L}$$

Momento dovuto al carico reale

M=Integrate[$q(x$ − x1),{x1,0,x}]

$$\frac{\text{q0}x^3}{6L}$$

Momento dovuto al carico virtuale

delM=x

$$x$$

Energia virtuale interna e lavoro virtuale esterno

delU=Integrate[MdelM/EI,{x,0,L}]

$$\frac{L^4\text{q0}}{30\text{EI}}$$

delW=1v

$$v$$

Risolvere per $\delta U - \delta W = 0$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Solve[delU==delW,v]

$$\left\{\left\{v \to \frac{L^4 \text{q0}}{30\text{EI}}\right\}\right\}$$

Clear[v,q,M,delV,delU,delM]

Energia potenziale

Definire la funzione v e carico q

v1[x_]:=a1x^2 + a2x^3

q=qo(1 − x/L)

$$\text{qo}\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

Risolvere per a e b in termini di v_2 e v_3

solution=Solve[{v1[L/2]==v2,v1[L]==v3},{a1,a2}]

$$\left\{\left\{\text{a1} \to -\frac{-8\text{v2} + \text{v3}}{L^2}, \text{a2} \to -\frac{2(4\text{v2} - \text{v3})}{L^3}\right\}\right\}$$

Aggiornamento dell'espressione v

v=v1[x]/.solution

$$\left\{-\frac{(-8\text{v2} + \text{v3})x^2}{L^2} - \frac{2(4\text{v2} - \text{v3})x^3}{L^3}\right\}$$

Energia da deformazione interna

d2v=Simplify[D[v,{x,2}]]

$$\left\{\frac{2(L(8\text{v2} - \text{v3}) + 6(-4\text{v2} + \text{v3})x)}{L^3}\right\}$$

M=EId2v

$$\left\{\frac{2\text{EI}(L(8\text{v2} - \text{v3}) + 6(-4\text{v2} + \text{v3})x)}{L^3}\right\}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
U=Integrate[M^2/(2EI),{x,0,L}]
```

$$\left\{\frac{128\text{EIv2}^2}{L^3}-\frac{80\text{EIv2v3}}{L^3}+\frac{14\text{EIv3}^2}{L^3}\right\}$$

Potenziale lavoro esterno

```
W=Integrate[qv,{x,0,L},Assumptions → L > 0]
```

$$\left\{\frac{4L\text{qov2}}{15}+\frac{L\text{qov3}}{60}\right\}$$

Energia potenziale

```
PE=Simplify[U − W]
```

$$\left\{-\frac{1}{60}L\text{qo}(16\text{v2}+\text{v3})+\frac{2\text{EI}\left(64\text{v2}^2-40\text{v2v3}+7\text{v3}^2\right)}{L^3}\right\}$$

```
eq1=D[PE,v2]
```

$$\left\{-\frac{4L\text{qo}}{15}+\frac{2\text{EI}(128\text{v2}-40\text{v3})}{L^3}\right\}$$

```
eq2=D[PE,v3]
```

$$\left\{-\frac{L\text{qo}}{60}+\frac{2\text{EI}(-40\text{v2}+14\text{v3})}{L^3}\right\}$$

```
solution=N[Solve[{eq1==0,eq2==0},{v2,v3}]]
```

$$\left\{\left\{\text{v2}\to\frac{0.0114583L^4\text{qo}}{\text{EI}},\text{v3}\to\frac{0.0333333L^4\text{qo}}{\text{EI}}\right\}\right\}$$

```
Clear[solution,eq2,eq1,PE,W,U,M,d2v,v1,v,solution,q]
```

Metodo di Rayleigh Ritz

Definire lo spostamento

```
v=a1x^2 + a2x^3
```

$$\text{a1}x^2+\text{a2}x^3$$

Prendere il secondo derivato, e determinare il momento

```
d2v=D[v,{x,2}]
```

$$2\text{a1}+6\text{a2}x$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

M=Simplify[d2vEI]

$$2\text{EI}(\text{a1} + 3\text{a2}x)$$

Energia, lavoro e energia potenziale

U=1/(2EI)Integrate[**M**^2,{**x**,0,**L**}]

$$\frac{4\text{a1}^2\text{EI}^2L + 12\text{a1a2EI}^2L^2 + 12\text{a2}^2\text{EI}^2L^3}{2\text{EI}}$$

W=Integrate[q0(**1 − x/L**)**v**,{**x**,0,**L**}]

$$\frac{1}{12}\text{a1}L^3\text{q0} + \frac{1}{20}\text{a2}L^4\text{q0}$$

PE=**U − W**

$$\frac{4\text{a1}^2\text{EI}^2L + 12\text{a1a2EI}^2L^2 + 12\text{a2}^2\text{EI}^2L^3}{2\text{EI}} - \frac{1}{12}\text{a1}L^3\text{q0} - \frac{1}{20}\text{a2}L^4\text{q0}$$

Derivato parziale del potenziale energia a_1 e a_2

A=**D**[PE,a1]

$$\frac{8\text{a1EI}^2L + 12\text{a2EI}^2L^2}{2\text{EI}} - \frac{L^3\text{q0}}{12}$$

B=**D**[PE,a2]

$$\frac{12\text{a1EI}^2L^2 + 24\text{a2EI}^2L^3}{2\text{EI}} - \frac{L^4\text{q0}}{20}$$

solution=Solve[{**A**==**0**,**B**==**0**},{a1,a2}]

$$\left\{\left\{\text{a1} \to \frac{7L^2\text{q0}}{120\text{EI}}, \text{a2} \to -\frac{L\text{q0}}{40\text{EI}}\right\}\right\}$$

N[%]

$$\left\{\left\{\text{a1} \to \frac{0.0583333L^2\text{q0}}{\text{EI}}, \text{a2} \to -\frac{0.025L\text{q0}}{\text{EI}}\right\}\right\}$$

v /.solution

$$\left\{\frac{7L^2\text{q0}x^2}{120\text{EI}} - \frac{L\text{q0}x^3}{40\text{EI}}\right\}$$

Slocamento massimo

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

v/.solution/.x → L

$$\left\{\frac{L^4 \text{q0}}{30\text{EI}}\right\}$$

Clear[v,d2v,M,U,W,PE,A,B,solution]

Potenziale energetico complementare

Carico distribuito

q=q0x1/L

$$\frac{\text{q0x1}}{L}$$

Il momento è causato da carico effettivo più carico fittizio P alla fine del cantilever

M=Integrate[q(x − x1),{x1,0,x}] + Px

$$Px + \frac{\text{q0}x^3}{6L}$$

Energia da deformazione interna

U=1/2Integrate[M^2/EI,{x,0,L}]

$$\frac{1}{2}\left(\frac{L^3P^2}{3\text{EI}} + \frac{L^4P\text{q0}}{15\text{EI}} + \frac{L^5\text{q0}^2}{252\text{EI}}\right)$$

Slocamento

solution=DSolve[{v''[x]==M/EI,v'[L]==0,v[L]==0},v[x],x]

$$\left\{\left\{v[x] \to \frac{40L^4P + 4L^5\text{q0} - 60L^3Px - 5L^4\text{q0}x + 20LPx^3 + \text{q0}x^5}{120\text{EI}L}\right\}\right\}$$

vmax=v[x]/.solution/.x → 0

$$\left\{\frac{40L^4P + 4L^5\text{q0}}{120\text{EI}L}\right\}$$

Potenziale di lavoro esterno

q=q0x/L

$$\frac{\text{q0}x}{L}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
W=Pvmax + Integrate[qv[x],{x,0,L}]/.solution
```

$$\left\{\left\{\frac{L^4 Pq0}{30EI}+\frac{L^5 q0^2}{252EI}+\frac{P\left(40L^4P+4L^5q0\right)}{120EIL}\right\}\right\}$$

```
CPE=W - U
```

$$\left\{\left\{\frac{L^4 Pq0}{30EI}+\frac{L^5 q0^2}{252EI}+\frac{P\left(40L^4P+4L^5q0\right)}{120EIL}+\frac{1}{2}\left(-\frac{L^3P^2}{3EI}-\frac{L^4 Pq0}{15EI}-\frac{L^5 q0^2}{252EI}\right)\right\}\right\}$$

```
D[CPE,P]/.P->0
```

$$\left\{\left\{\frac{L^4 q0}{30EI}\right\}\right\}$$

```
Clear[U,W,M,q,CPE,vmax,solution]
```

Castigliano Secondo Teorema

Carico distribuito

```
q=q0x1/L
```

$$\frac{q0x1}{L}$$

Il momento è causato da carico effettivo più un carico di punto fittizio P alla fine del cantilever

```
M=Integrate[q(x - x1),{x1,0,x}] + Px
```

$$Px+\frac{q0x^3}{6L}$$

Energia da deformazione interna

```
U=1/2Integrate[M^2/EI,{x,0,L}]
```

$$\frac{1}{2}\left(\frac{L^3P^2}{3EI}+\frac{L^4 Pq0}{15EI}+\frac{L^5 q0^2}{252EI}\right)$$

Prendere derivati dell'energia della macchia

```
v=D[U,P]/.P → 0
```

$$\frac{L^4 q0}{30EI}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
Clear[U,M,q,v]
```

Il primo teorema di Castigliano

Definire la funzione v e q

```
v1[x_]:=a1x^2 + a2x^3
```

```
q=qo(1 − x/L)
```

$$\text{qo}\left(1-\frac{x}{L}\right)$$

Risolvere per a e b in termini di v_2 e v_3

```
solution=Solve[{v1[L/2]==v2,v1[L]==v3},{a1,a2}]
```

$$\left\{\left\{\text{a1}\to-\frac{-8\text{v2}+\text{v3}}{L^2},\text{a2}\to-\frac{2(4\text{v2}-\text{v3})}{L^3}\right\}\right\}$$

Aggiornamento dell'espressione v

```
v=v1[x]/.solution
```

$$\left\{-\frac{(-8\text{v2}+\text{v3})x^2}{L^2}-\frac{2(4\text{v2}-\text{v3})x^3}{L^3}\right\}$$

```
vmax=v1[L]
```

$$\text{a1}L^2+\text{a2}L^3$$

Energia da deformazione interna

```
d2v=D[v,{x,2}]
```

$$\left\{-\frac{2(-8\text{v2}+\text{v3})}{L^2}-\frac{12(4\text{v2}-\text{v3})x}{L^3}\right\}$$

```
M=EId2v + Pvmax
```

$$\left\{\left(\text{a1}L^2+\text{a2}L^3\right)P+\text{EI}\left(-\frac{2(-8\text{v2}+\text{v3})}{L^2}-\frac{12(4\text{v2}-\text{v3})x}{L^3}\right)\right\}$$

```
U=Integrate[M^2/(2EI),{x,0,L},Assumptions → L > 0]
```

$$\left\{\frac{\text{a1}^2L^5P^2}{2\text{EI}}+\frac{\text{a1a2}L^6P^2}{\text{EI}}+\frac{\text{a2}^2L^7P^2}{2\text{EI}}-8\text{a1}LP\text{v2}-8\text{a2}L^2P\text{v2}+\frac{128\text{EIv2}^2}{L^3}+4\text{a1}LP\text{v3}+4\text{a2}L^2P\text{v3}-\frac{80\text{EIv2v3}}{L^3}+\frac{14\text{EIv3}^2}{L^3}\right\}$$

COPIA DI REVISIONE

Simplify[U]

$$\left\{\frac{a1^2L^8P^2+a2^2L^{10}P^2+8a2EIL^5P(-2v2+v3)+4EI^2\left(64v2^2-40v2v3+7v3^2\right)+2a1L^4P\left(a2L^5P+4EI(-2v2+v3)\right)}{2EIL^3}\right\}$$

D[U,vmax]

$$\partial_{a1L^2+a2L^3}\left\{\frac{a1^2L^5P^2}{2EI}+\frac{a1a2L^6P^2}{EI}+\frac{a2^2L^7P^2}{2EI}-8a1LPv2-8a2L^2Pv2+\frac{128EIv2^2}{L^3}+4a1LPv3+4a2L^2Pv3-\frac{80EIv2v3}{L^3}+\frac{14EIv3}{L^3}\right.$$

I.2.15 Simulazione Monte Carlo della risposta elastica lineare di un edificio al carico laterale

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Elenco per Esempio in §53.2.2.1.

```
% ========================================================================
% MONTE CARLO SIMULATION -- LATERAL DRIFT OF A 4-STORY SHEAR BUILDING
% ========================================================================
% Estimates the probability of exceeding a drift limit for a linear
% elastic shear-frame building under random lateral loads and random
% member stiffnesses.
%
% STRUCTURAL MODEL:
%   A 4-story shear building where each story lateral drift is:
%       delta_i = V_i / k_i = V_i * H^3 / (12 * sum(EI_i))
%   where V_i = cumulative shear at story i (sum of loads above),
%   k_i = 12*EI/H^3 = lateral stiffness (fixed-fixed column formula),
%   and two columns contribute per story.
%
%   Total roof drift = u1 + u2 + u3 + u4.
%
% RANDOM VARIABLES (all independent Gaussian):
%   F1..F4   : lateral floor loads       mean=Fbar,  CoV=40%
%   EI1..EI8 : column bending stiffness  mean=EIbar, CoV=20%
%
% NOTE: Normal distributions can produce negative F and EI values
%   (~0.6% probability at CoV=0.4). For a rigorous study use lognormal.
%
% UNITS: any consistent set (e.g. kN,m or kip,in).
% ========================================================================

clear; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 - Parameters
% ------------------------------------------------------------------------
```

COPIA DI REVISIONE

```
Fbar    = 20;            % mean lateral floor load      [force]
sigmaF  = Fbar * 0.4;    % std dev of load  (CoV=40%)

EIbar   = 10000;         % mean column bending stiffness [force.length^2]
sigmaEI = EIbar * 0.2;   % std dev of EI    (CoV=20%)

H    = 4;      % story height                    [length]
ULIM = 0.1;    % drift limit (failure threshold) [length]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 - Monte Carlo sampling
% ------------------------------------------------------------------------
NSIM = 1000000;   % 1e6 simulations: reliable for PF down to ~1e-4

F1 = Fbar + sigmaF * randn(NSIM, 1);
F2 = Fbar + sigmaF * randn(NSIM, 1);
F3 = Fbar + sigmaF * randn(NSIM, 1);
F4 = Fbar + sigmaF * randn(NSIM, 1);

EI1 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);  % story 1 columns
EI2 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);
EI3 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);  % story 2 columns
EI4 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);
EI5 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);  % story 3 columns
EI6 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);
EI7 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);  % story 4 columns
EI8 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 - Story drifts (vectorised over all simulations)
% ------------------------------------------------------------------------
u4 =  F4                 ./ (EI7 + EI8) / 12 * H^3;
u3 = (F3 + F4)           ./ (EI5 + EI6) / 12 * H^3;
u2 = (F2 + F3 + F4)      ./ (EI3 + EI4) / 12 * H^3;
u1 = (F1 + F2 + F3 + F4) ./ (EI1 + EI2) / 12 * H^3;

u = u1 + u2 + u3 + u4;   % total roof drift

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 - Statistics and failure probability
% ------------------------------------------------------------------------
UM  = mean(u);
US  = std(u);
COV = US / UM;

indic = (u > ULIM);   % 1 = failure (drift exceeds limit), 0 = safe
PF    = mean(indic);  % fraction of simulations in failure = P(u > ULIM)

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 - Report
% ------------------------------------------------------------------------
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
fprintf('=== Monte Carlo Results (%d simulations) ===\n', NSIM);
fprintf('  Mean drift          UM  = %.5f\n', UM);
fprintf('  Std deviation       US  = %.5f\n', US);
fprintf('  Coeff of variation  COV = %.4f  (%.1f%%)\n', COV, COV*100);
fprintf('  Drift limit        ULIM = %.4f\n', ULIM);
fprintf('  Failure probability  PF = %.2e\n', PF);
fprintf('  Std error on PF        = %.2e\n', sqrt(PF*(1-PF)/NSIM));
```

I.2.16 Elementi isoparametrici

La sezione seguente è riprodotta da Hinton e Owen, 1977 Finite Element Programming.

L'implementazione computerizzata di un isoparametrico integrato numericamente elemento è riassunto come segue.

Ma prima, si presume che questa operazione sia eseguita in una funzione chiamato `stiff` e ci vuole come argomenti di input `elcod, young, poiss, type, ndime, ndofn, ngaus`. A sua volta computerà la matrice di rigidità `KELEM` di elemento `ielem`.

1. Recuperare la geometria degli elementi e le proprietà dei materiali per elemento corrente
2. Zero la matrice di rigidità
3. Funzione di chiamata `dmat` per impostare la matrice costitutiva $\mathbf{D}^e$ dell'elemento
4. Inserire (nested) loop coprendo tutti i punti di integrazione
   (a) Guarda la posizione di campionamento del punto corrente (ξ_p, η_q) (`s, t`) e i loro pesi (`weigp`)
   (b) Funzione di forma chiamata `sfr` dato che ξ_p, η_q che tornerà la funzione forma N_i^e (`sfr`) e i derivati $\frac{\partial N_i^e}{\partial \xi}$ e $\frac{\partial N_i^e}{\partial \eta}$ (`deriv`) al punto ξ_p, η_q
   (c) Chiama un'altra subroutine (`jacob`), dato N_i^e, $\frac{\partial N_i^e}{\partial \xi}$ e $\frac{\partial N_i^e}{\partial \eta}$ a punto ξ_p, η_q restituirà derivati della funzione di forma cartesiana $\frac{\partial N_i^e}{\partial x}$ e $\frac{\partial N_i^e}{\partial y}$ (`cartd`), la matrice giacobica $\mathbf{J}^e$ (`jacm`), la sua inverso $\mathbf{J}^{e-1}$ (`jaci`), il suo valore determinante $\mathbf{J}^e$ (`djac`) e x e y coordinate tutte al punto ξ_p, η_q
   (d) Chiamare la matrice di ceppi (`bmatps`) routine, data N_i^e, $\frac{\partial N_i^e}{\partial x}$, $\frac{\partial N_i^e}{\partial y}$, at ξ_p, η_q tornerà la matrice di ceppo $\mathbf{B}_i^e$ (`bmat`)
   (e) Chiamare una routine (`dbmat`) valutare $\mathbf{D}^e\mathbf{B}_i^e$ (`dbmat`)
   (f) Valutare $\mathbf{B}_i^{eT}\mathbf{D}^e\mathbf{B}_j^e \det\mathbf{J}^e \times$ integrazione pesi e assemblarli nella matrice di rigidità dell'elemento $\mathbf{K}_{ij}^e$
   (g) Assemblaggio $\mathbf{D}^e\mathbf{B}^e$ (`smat` in un array di stress per una valutazione successiva stressa dagli spostamenti nodali.
5. Scrivi la matrice di Stiffness

Elenco consigliato delle variabili:

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

`idime, ndime`	Indice, Numero di dimensioni (2 per 2D)
`idofn,ndofn`	Indice, Numero di libertà per nodo
`ielem,nelem`	Indice, numero di elementi
`igaus,jgaus,ngaus`	Indice, Indice e numero di regola Gauss adottata
`inode, nnode`	Indice, numero di nodi per elemento
`kgasp,ngasp`	Kounter, numero di punti Gauss utilizzati
`type`	1 per lo stress aereo; 2 per la tensione dell'aereo
`poiss`	Rapporto di Poisson
`young`	Il modulo di Young
`elcod(ndime,nnode)`	Local array di coordinate nodali cartesian dell'elemento attualmente in considerazione $\begin{bmatrix} x(\xi_1,\eta_1) & \cdots & x(\xi_8,\eta_8) \\ y(\xi_1,\eta_1) & \cdots & y(\xi_8,\eta_8) \end{bmatrix}$
`s`	ξ coordinate del punto di campionamento
`t`	η coordinate del punto di campionamento
`gpcod(ndime,ngasp)`	Locale di coordinate cartesian del Punti di Gauss per elemento attualmente in considerazione $\begin{bmatrix} x(\xi_{G_1},\eta_{G_1} & \cdots & x(\xi_{G_5},\eta_{G_5}) & \cdots \\ y(\xi_{G_1},\eta_{G_1} & \cdots & y(\xi_{G_5},\eta_{G_5}) & \cdots \end{bmatrix}$
`posgp(mgaus)`	ξ coordinate di punto Gauss
`weigp(mgaus)`	Fattore di peso per punto Gauss
`shape(nnode)`	Funzione di forma associata a ogni nodo della corrente elemento a (ξ_p,η_p) $\begin{bmatrix} N_1(\xi_p,\eta_p) \\ \vdots N_8(\xi_p,\eta_p) \end{bmatrix}$
`deriv(ndime,nnode)`	Derivato della funzione di forma al campionamento punto (ξ_p,η_p) all'interno dell'elemento $\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial\xi}(\xi_p,\eta_p) & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial\xi}(\xi_p,\eta_p) \\ \frac{\partial N_1}{\partial\eta}(\xi_p,\eta_p) & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial\eta}(\xi_p,\eta_p) \end{bmatrix}$
`cartd(ndime,nnode)`	Derivati della funzione di forma cartesiana associati con i nodi dell'elemento corrente campionati in qualsiasi punto (ξ_p,η_p) all'interno dell'elemento $\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x}(\xi_p,\eta_p) & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial x}(\xi_p,\eta_p) \\ \frac{\partial N_1}{\partial y}(\xi_p,\eta_p) & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial y}(\xi_p,\eta_p) \end{bmatrix}$
`djacb`	Determinante della matrice giacobiana campione in qualsiasi punto (ξ_p,η_p) all'interno dell'elemento
`jacm(ndime,ndime)`	Matrice giacobiana al punto di campionamento
`jaci(ndime,ndime)`	Inverso della matrice giacobiana al campionamento punto
`bmat(nstre,nevab)`	Matrice di ceppo elemento in qualsiasi punto all'interno elemento $\mathbf{B} = [\ \mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{B}_8\ ]$ dove $\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$
`dbmat(istre,ievab)`	negozi **DB**

```
% ========================================================================
% ISOPARAMETRIC FINITE ELEMENTS -- Q4, Q8, Q9 PLANE ELEMENTS
% ========================================================================
% A library of functions implementing Gaussian quadrature-based stiffness
% matrix assembly for 2D isoparametric elements under plane stress or
% plane strain conditions.
%
% SUPPORTED ELEMENT TYPES:
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
%   Q4  : 4-node bilinear quadrilateral        (nnode = 4)
%   Q8  : 8-node serendipity quadrilateral      (nnode = 8)
%   Q9  : 9-node Lagrangian quadrilateral       (nnode = 9)
%
% ISOPARAMETRIC CONCEPT:
%   The same shape functions N_i(s,t) are used to interpolate both the
%   geometry and the displacement field:
%
%     x(s,t) = sum_i N_i(s,t) * x_i    (geometry mapping)
%     u(s,t) = sum_i N_i(s,t) * u_i    (displacement interpolation)
%
%   where (s,t) are natural coordinates in [-1,1]^2.
%
% STIFFNESS MATRIX:
%   K_e = integral_(-1)^(1) integral_(-1)^(1) B^T * D * B * |J| ds dt
%
%   approximated by Gauss quadrature:
%   K_e approx sum_i sum_j w_i * w_j * B^T(s_i,t_j) * D * B(s_i,t_j) * |J(s_i,
    t_j)|
%
% NATURAL COORDINATE NODE ORDERING (counter-clockwise):
%
%   Q4:           Q8/Q9:
%   4---3         4--7--3
%   |   |         8  9  6
%   1---2         1--5--2
%
%   (s increases right, t increases upward)
%
% STRUCTURE OF THIS FILE:
%   Part 1  -- Script: plot Q8/Q9 shape functions over the reference element
%   Part 2  -- function stiff    : assemble element stiffness matrices
%   Part 3  -- function dmat     : constitutive matrix D (plane stress/strain)
%   Part 4  -- function sfr      : shape functions and derivatives N, dN/ds,
    dN/dt
%   Part 5  -- function jacob    : Jacobian J, J^-1, |J|, Cartesian
    derivatives
%   Part 6  -- function bmatps   : strain-displacement matrix B and D*B
%
% LNODS ARRAY FORMAT (input to stiff):
%   lnods(e, 1)       : element number
%   lnods(e, 2)       : Young's modulus E for element e
%   lnods(e, 3)       : Poisson's ratio nu for element e
%   lnods(e, 4:3+nnode): global node numbers of element e
%
% COORD ARRAY FORMAT:
%   coord(n, 1)       : global node number
%   coord(n, 2:3)     : x, y coordinates of node n
% ========================================================================


```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
% ========================================================================
% PART 1 -- SCRIPT: Plot Q8 and Q9 shape functions
% ========================================================================
% Plots surface and contour views of selected shape functions over the
% reference element [-1,1]^2 for visual verification.
%
% Node 1 (corner) and Node 8 (midside) are shown for both Q8 and Q9
% to illustrate how the bubble function N9 modifies the corner shapes.

xi  = -1 : 1/20 : 1;    % natural coordinate xi  (horizontal)
eta = -1 : 1/20 : 1;    % natural coordinate eta (vertical)

% Column vectors for outer products
XI  = xi';
ETA = eta';

% --- Q8/Q9 intermediate (midside/bubble) shape functions ---
% These are computed first because the corner functions depend on them.
N9 = (1 - ETA.^2) * (1 - xi.^2);             % bubble (centre node, Q9 only)
N8 = 0.5*(1 - ETA.^2) * (1 - xi);            % midside: left edge
N7 = 0.5*(1 - XI.^2)  * (1 + eta);           % midside: top edge
N6 = 0.5*(1 - ETA.^2) * (1 + xi);            % midside: right edge
N5 = 0.5*(1 - XI.^2)  * (1 - eta);           % midside: bottom edge

% --- Q8 corner shape functions (no bubble term) ---
N4_Q8 = 0.25*(1 - XI)*(1 + eta) - 0.5*(N7 + N8);
N3_Q8 = 0.25*(1 + XI)*(1 + eta) - 0.5*(N6 + N7);
N2_Q8 = 0.25*(1 + XI)*(1 - eta) - 0.5*(N5 + N6);
N1_Q8 = 0.25*(1 - XI)*(1 - eta) - 0.5*(N8 + N5);

% Plot Q8 corner node 1
figure('Name', 'Q8 Shape Functions');
subplot(2,2,1);
meshc(xi, eta, N1_Q8);
xlabel('\xi');  ylabel('\eta');  zlabel('N_1');
title('Q8 -- Node 1 (corner): surface');

subplot(2,2,2);
[C, h] = contour(xi, eta, N1_Q8);
clabel(C, h);
xlabel('\xi');  ylabel('\eta');
title('Q8 -- Node 1 (corner): contour');

% Plot Q8 midside node 8
subplot(2,2,3);
meshc(xi, eta, N8);
xlabel('\xi');  ylabel('\eta');  zlabel('N_8');
title('Q8 -- Node 8 (midside): surface');

subplot(2,2,4);
[C, h] = contour(xi, eta, N8);
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
clabel(C, h);
xlabel('\xi');  ylabel('\eta');
title('Q8 -- Node 8 (midside): contour');

% --- Q9 shape functions: subtract bubble contribution from Q8 shapes ---
N1_Q9 = N1_Q8 - 0.25*N9;
N8_Q9 = N8    - 0.50*N9;

figure('Name', 'Q9 Shape Functions');
subplot(2,3,1);
meshc(xi, eta, N1_Q9);
xlabel('\xi');  ylabel('\eta');  zlabel('N_1');
title('Q9 -- Node 1 (corner): surface');

subplot(2,3,2);
[C, h] = contour(xi, eta, N1_Q9);
clabel(C, h);
title('Q9 -- Node 1 (corner): contour');

subplot(2,3,3);
meshc(xi, eta, N8_Q9);
xlabel('\xi');  ylabel('\eta');  zlabel('N_8');
title('Q9 -- Node 8 (midside): surface');

subplot(2,3,4);
[C, h] = contour(xi, eta, N8_Q9);
clabel(C, h);
title('Q9 -- Node 8 (midside): contour');

subplot(2,3,5);
meshc(xi, eta, N9);
xlabel('\xi');  ylabel('\eta');  zlabel('N_9');
title('Q9 -- Node 9 (centre bubble): surface');

subplot(2,3,6);
[C, h] = contour(xi, eta, N9);
clabel(C, h);
title('Q9 -- Node 9 (centre bubble): contour');


% ========================================================================
% PART 2 -- FUNCTION: stiff
% ========================================================================
% Assembles element stiffness matrices for all elements using Gauss
% quadrature.  Returns all element matrices stacked in a single array.
%
% INPUTS:
%   ngaus  : number of Gauss points per direction
%   posgp  : Gauss point positions  (1 x ngaus)
%   weigp  : Gauss point weights    (1 x ngaus)
%   type   : problem type  (1 = plane stress,  2 = plane strain)
```

COPIA DI REVISIONE

```
%   nelem  : number of elements
%   lnods  : connectivity + material array  [nelem x (3+nnode)]
%   coord  : node coordinates  [nnodes x 3]  (col1=node#, col2=x, col3=y)
%   nnode  : nodes per element  (4, 8, or 9)
%
% OUTPUT:
%   KELEM  : stacked element stiffness matrices  [nelem*2*nnode x 2*nnode]
%            Row block ielem: KELEM(2*nnode*(ielem-1)+1 : 2*nnode*ielem, :)

function KELEM = stiff(ngaus, posgp, weigp, type, nelem, lnods, coord, nnode)

fprintf('Assembling element stiffness matrices...\n');
tic;

stifsize  = 2 * nnode;        % DOFs per element (2 per node: u and v)
KELEM     = zeros(stifsize * nelem, stifsize);

for ielem = 1 : nelem

    % --- Extract material properties from lnods ---
    young = lnods(ielem, 2);
    poiss = lnods(ielem, 3);

    % --- Extract element node coordinates ---
    % elcod: 2 x nnode matrix  [x; y] for each node in order
    elcod = zeros(2, nnode);
    for inode = 1 : nnode
        global_node = lnods(ielem, inode+3);
        row         = find(coord(:,1) == global_node);
        elcod(:, inode) = coord(row, 2:3)';
    end

    % --- Constitutive matrix ---
    D = dmat(young, poiss, type);

    % --- Gauss quadrature over the reference element ---
    kelem = zeros(stifsize);
    for igaus = 1 : ngaus
        for jgaus = 1 : ngaus
            s = posgp(igaus);
            t = posgp(jgaus);
            W = weigp(igaus) * weigp(jgaus);

            [shape, deriv]            = sfr(s, t, nnode);
            [cartd, ~, ~, djac, ~]    = jacob(shape, deriv, elcod);
            [bmat, dbmat]             = bmatps(shape, cartd, D);

            % Accumulate:  K += w * B^T * D * B * |J|
            kelem = kelem + W * bmat' * dbmat * djac;
        end
    end
```

COPIA DI REVISIONE

```
210
211     % --- Store in stacked output array ---
212     startrow = stifsize * (ielem-1) + 1;
213     endrow   = stifsize * ielem;
214     KELEM(startrow:endrow, :) = kelem;
215
216 end
217
218 fprintf('Done. Elapsed: %.4f sec\n\n', toc);
219
220 end   % stiff
221
222
223 % ========================================================================
224 % PART 3 -- FUNCTION: dmat
225 % ========================================================================
226 % Returns the 3x3 constitutive matrix D for isotropic linear elasticity
227 % under either plane stress or plane strain assumptions.
228 %
229 % PLANE STRESS (type=1): thin plate, sigma_zz = 0
230 %   D = E/(1-v^2) * [1, v,      0     ]
231 %                   [v, 1,      0     ]
232 %                   [0, 0, (1-v)/2    ]
233 %
234 % PLANE STRAIN (type=2): thick body constrained in z, eps_zz = 0
235 %   D = E/((1+v)(1-2v)) * [1-v,  v,       0    ]
236 %                         [ v,  1-v,      0    ]
237 %                         [ 0,   0,  (1-2v)/2  ]
238 %
239 % Strain vector convention: [eps_xx; eps_yy; gamma_xy]
240
241 function D = dmat(young, poiss, type)
242
243 E = young;
244 v = poiss;
245
246 if type == 1
247     % Plane stress
248     D = E/(1-v^2) * [ 1,    v,       0    ;
249                       v,    1,       0    ;
250                       0,    0,  (1-v)/2   ];
251 else
252     % Plane strain
253     D = E/((1+v)*(1-2*v)) * [ 1-v,   v,       0      ;
254                               v,   1-v,       0      ;
255                               0,    0,   (1-2*v)/2   ];
256 end
257
258 end   % dmat
259
260
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
% ========================================================================
% PART 4 -- FUNCTION: sfr  (Shape Function Routine)
% ========================================================================
% Computes shape functions N_i(s,t) and their natural-coordinate
% derivatives dN_i/ds, dN_i/dt at a single Gauss point (s,t).
%
% The Q8 and Q9 shape functions are built hierarchically:
%   - Midside nodes are constructed from bilinear products
%   - Corner nodes are the bilinear shapes minus contributions of
%     adjacent midside nodes (to enforce partition of unity)
%   - Q9 adds the bubble function N9 and subtracts its contribution
%     from all other nodes
%
% INPUTS:
%   s, t   : natural coordinates of the evaluation point  [-1,1]
%   nnode  : 4 (Q4), 8 (Q8), or 9 (Q9)
%
% OUTPUTS:
%   shape  : nnode x 1 vector of shape function values
%   deriv  : 2 x nnode matrix of derivatives  [dN/ds; dN/dt]

function [shape, deriv] = sfr(s, t, nnode)

if nnode == 9
    % --- Q9: 9-node Lagrangian element ---
    % Node 9 is the interior bubble: N9 = (1-s^2)*(1-t^2)
    N9 = (1-s^2)*(1-t^2);

    % Midside nodes (edges)
    N8 = 0.5*(1-s)*(1-t^2) - 0.5*N9;    % left midside
    N7 = 0.5*(1-s^2)*(1+t) - 0.5*N9;    % top midside
    N6 = 0.5*(1+s)*(1-t^2) - 0.5*N9;    % right midside
    N5 = 0.5*(1-s^2)*(1-t) - 0.5*N9;    % bottom midside

    % Corner nodes
    N4 = 0.25*(1-s)*(1+t) - 0.5*N7 - 0.5*N8 - 0.25*N9;
    N3 = 0.25*(1+s)*(1+t) - 0.5*N6 - 0.5*N7 - 0.25*N9;
    N2 = 0.25*(1+s)*(1-t) - 0.5*N5 - 0.5*N6 - 0.25*N9;
    N1 = 0.25*(1-s)*(1-t) - 0.5*N5 - 0.5*N8 - 0.25*N9;

    shape = [N1; N2; N3; N4; N5; N6; N7; N8; N9];

    % Derivatives of N9
    dN9ds = -2*s*(1-t^2);
    dN9dt = -2*t*(1-s^2);

    % Derivatives of midside nodes
    dN8ds = -0.5*(1-t^2) - 0.5*dN9ds;
    dN8dt = -t*(1-s)     - 0.5*dN9dt;
    dN7ds = -s*(1+t)     - 0.5*dN9ds;
    dN7dt =  0.5*(1-s^2) - 0.5*dN9dt;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
    dN6ds =  0.5*(1-t^2) - 0.5*dN9ds;
    dN6dt = -t*(1+s)     - 0.5*dN9dt;
    dN5ds = -s*(1-t)     - 0.5*dN9ds;
    dN5dt = -0.5*(1-s^2) - 0.5*dN9dt;

    % Derivatives of corner nodes
    dN4ds = -0.25*(1+t) - 0.5*dN7ds - 0.5*dN8ds - 0.25*dN9ds;
    dN4dt =  0.25*(1-s) - 0.5*dN7dt - 0.5*dN8dt - 0.25*dN9dt;
    dN3ds =  0.25*(1+t) - 0.5*dN6ds - 0.5*dN7ds - 0.25*dN9ds;
    dN3dt =  0.25*(1+s) - 0.5*dN6dt - 0.5*dN7dt - 0.25*dN9dt;
    dN2ds =  0.25*(1-t) - 0.5*dN5ds - 0.5*dN6ds - 0.25*dN9ds;
    dN2dt = -0.25*(1+s) - 0.5*dN5dt - 0.5*dN6dt - 0.25*dN9dt;
    dN1ds = -0.25*(1-t) - 0.5*dN5ds - 0.5*dN8ds - 0.25*dN9ds;
    dN1dt = -0.25*(1-s) - 0.5*dN5dt - 0.5*dN8dt - 0.25*dN9dt;

    deriv = [dN1ds, dN2ds, dN3ds, dN4ds, dN5ds, dN6ds, dN7ds, dN8ds, dN9ds ;
             dN1dt, dN2dt, dN3dt, dN4dt, dN5dt, dN6dt, dN7dt, dN8dt, dN9dt ];

elseif nnode == 8
    % --- Q8: 8-node serendipity element (no interior node) ---

    % Midside nodes
    N8 = 0.5*(1-s)*(1-t^2);
    N7 = 0.5*(1-s^2)*(1+t);
    N6 = 0.5*(1+s)*(1-t^2);
    N5 = 0.5*(1-s^2)*(1-t);

    % Corner nodes
    N4 = 0.25*(1-s)*(1+t) - 0.5*N7 - 0.5*N8;
    N3 = 0.25*(1+s)*(1+t) - 0.5*N6 - 0.5*N7;
    N2 = 0.25*(1+s)*(1-t) - 0.5*N5 - 0.5*N6;
    N1 = 0.25*(1-s)*(1-t) - 0.5*N5 - 0.5*N8;

    shape = [N1; N2; N3; N4; N5; N6; N7; N8];

    dN8ds = -0.5*(1-t^2);   dN8dt = -t*(1-s);
    dN7ds = -s*(1+t);        dN7dt =  0.5*(1-s^2);
    dN6ds =  0.5*(1-t^2);   dN6dt = -t*(1+s);
    dN5ds = -s*(1-t);        dN5dt = -0.5*(1-s^2);

    dN4ds = -0.25*(1+t) - 0.5*dN7ds - 0.5*dN8ds;
    dN4dt =  0.25*(1-s) - 0.5*dN7dt - 0.5*dN8dt;
    dN3ds =  0.25*(1+t) - 0.5*dN6ds - 0.5*dN7ds;
    dN3dt =  0.25*(1+s) - 0.5*dN6dt - 0.5*dN7dt;
    dN2ds =  0.25*(1-t) - 0.5*dN5ds - 0.5*dN6ds;
    dN2dt = -0.25*(1+s) - 0.5*dN5dt - 0.5*dN6dt;
    dN1ds = -0.25*(1-t) - 0.5*dN5ds - 0.5*dN8ds;
    dN1dt = -0.25*(1-s) - 0.5*dN5dt - 0.5*dN8dt;

    deriv = [dN1ds, dN2ds, dN3ds, dN4ds, dN5ds, dN6ds, dN7ds, dN8ds ;
             dN1dt, dN2dt, dN3dt, dN4dt, dN5dt, dN6dt, dN7dt, dN8dt ];
```

COPIA DI REVISIONE

```
363
364 else
365     % --- Q4: 4-node bilinear element ---
366     N4 = 0.25*(1-s)*(1+t);
367     N3 = 0.25*(1+s)*(1+t);
368     N2 = 0.25*(1+s)*(1-t);
369     N1 = 0.25*(1-s)*(1-t);
370
371     shape = [N1; N2; N3; N4];
372
373     dN4ds = -0.25*(1+t);  dN4dt =  0.25*(1-s);
374     dN3ds =  0.25*(1+t);  dN3dt =  0.25*(1+s);
375     dN2ds =  0.25*(1-t);  dN2dt = -0.25*(1+s);
376     dN1ds = -0.25*(1-t);  dN1dt = -0.25*(1-s);
377
378     deriv = [dN1ds, dN2ds, dN3ds, dN4ds ;
379              dN1dt, dN2dt, dN3dt, dN4dt ];
380 end
381
382 end   % sfr
383
384
385 % ========================================================================
386 % PART 5 -- FUNCTION: jacob
387 % ========================================================================
388 % Computes the Jacobian matrix and related quantities needed to transform
389 % shape function derivatives from natural to Cartesian coordinates.
390 %
391 % JACOBIAN MATRIX:
392 %   J = deriv * elcod^T    (2x2 matrix)
393 %
394 %   [dX/ds  dY/ds]   [dN/ds] * [x_1 y_1]
395 %   [dX/dt  dY/dt] = [dN/dt]   [x_2 y_2]
396 %                              [  ...   ]
397 %
398 % CARTESIAN DERIVATIVES:
399 %   [dN/dx]        [dN/ds]
400 %   [dN/dy] = J^-1 [dN/dt]
401 %
402 % WARNING: if |J| <= 0 the element is distorted (inverted or collapsed).
403 %   This function does not check for this condition -- the caller should
404 %   verify djac > 0 for all Gauss points.
405 %
406 % INPUTS:
407 %   shape  : nnode x 1 shape function values (used for xy interpolation)
408 %   deriv  : 2 x nnode natural-coordinate derivatives
409 %   elcod  : 2 x nnode element node coordinates  [x; y]
410 %
411 % OUTPUTS:
412 %   cartd  : 2 x nnode Cartesian shape function derivatives
413 %   jacm   : 2x2 Jacobian matrix J
```

COPIA DI REVISIONE

```
%   jaci   : 2x2 Jacobian inverse J^-1
%   djac   : scalar determinant |J|
%   xy     : 2x1 physical coordinates at the Gauss point

function [cartd, jacm, jaci, djac, xy] = jacob(shape, deriv, elcod)

jacm  = deriv * elcod';   % J = dN/ds * [x; y]^T
jaci  = inv(jacm);        % J^-1
djac  = det(jacm);        % |J| (must be > 0 for valid element)
cartd = jaci * deriv;     % Cartesian derivatives: J^-1 * dN/d(s,t)
xy    = elcod * shape;    % Physical coordinates at Gauss point

end   % jacob


% ========================================================================
% PART 6 -- FUNCTION: bmatps  (B matrix for plane stress/strain)
% ========================================================================
% Assembles the strain-displacement matrix B and the product D*B.
%
% For 2D plane problems the strain vector is:
%   eps = [eps_xx; eps_yy; gamma_xy]
%
% The B matrix maps nodal displacements to strains:
%   eps = B * u_e
%
% For node i the 3x2 sub-block of B is:
%   [dN_i/dx,      0    ]
%   [    0,    dN_i/dy  ]
%   [dN_i/dy,  dN_i/dx  ]
%
% These sub-blocks are assembled column-pair by column-pair.
%
% INPUTS:
%   shape  : shape function values (not used directly here but available)
%   cartd  : 2 x nnode Cartesian shape function derivatives
%   D      : 3x3 constitutive matrix
%
% OUTPUTS:
%   bmat   : 3 x 2*nnode strain-displacement matrix B
%   dbmat  : 3 x 2*nnode product D*B

function [bmat, dbmat] = bmatps(shape, cartd, D) %#ok<INUSL>

nnode   = size(cartd, 2);
numcols = 2 * nnode;          % total DOF columns (u and v for each node)
bmat    = zeros(3, numcols);

for inode = 1 : nnode
    col = 2*inode - 1;        % column pair: [col, col+1] for node inode
    bmat(:, col:col+1) = [ cartd(1,inode),       0          ;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
                                    0,          cartd(2,inode)  ;
                               cartd(2,inode),  cartd(1,inode)  ];
end

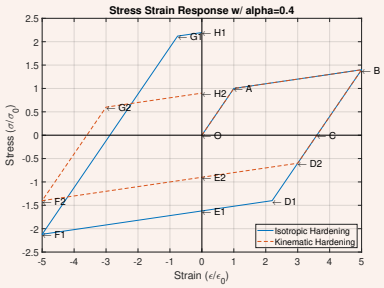
dbmat = D * bmat;

end   % bmatps
```

I.3 Parte III: Modellazione dei materiali e comportamento costitutivo

Questa sezione affronta il comportamento materiale, tra cui plasticità, smorzamento e modelli non lineari costitutivi per diversi tipi di materiali.

I.3.1 Plastica fondamentale



Scritto da Ben Gallagher

```
% ========================================================================
% INCREMENTAL PLASTICITY -- STRESS-STRAIN RESPONSE COMPARISON
% ========================================================================
% Plots the normalised stress-strain response of an elastic-plastic
% material under cyclic loading for two hardening rules:
%
%   1. ISOTROPIC HARDENING:
%      The yield surface expands uniformly in all directions as plastic
%      strain accumulates.  Both tensile and compressive yield stresses
%      increase equally.  This captures strain hardening but not the
%      Bauschinger effect.
%
%   2. KINEMATIC HARDENING (Prager):
%      The yield surface translates in stress space without changing size.
%      After tensile yielding, the compressive yield stress decreases by
%      the same amount as the tensile yield stress increased.  This
%      captures the Bauschinger effect observed in metals.
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
%
% NORMALISATION:
%   All stresses normalised by the initial yield stress sigma_0 (s_not).
%   All strains normalised by the initial yield strain epsilon_0 (e_not).
%
% LOADING PATH (points A through H):
%   O -> A : elastic loading to initial yield
%   A -> B : plastic loading (hardening)
%   B -> C : elastic unloading, zero stress
%   C -> D : continued unloading to reverse yield
%   D -> E : reverse plastic flow, zero strain
%   E -> F : continued reverse plastic loading
%   F -> G : elastic reloading
%   G -> H : plastic reloading, zero strain
%
% HARDENING PARAMETER:
%   alpha (a) controls the plastic modulus relative to elastic modulus.
%   For a = 0: perfectly plastic (no hardening).
%   For a = 0.4: moderate hardening (used here).
%
% The two hardening rules give identical paths O->A->B->C but diverge
% from point D onward, reflecting their different treatment of the
% back-stress and yield surface evolution.
% ========================================================================

close all; clear; clc;

scrsz = get(0, 'ScreenSize');
fs    = 18;
GS    = 'c:/Program Files/gs/gs9.53.3/bin/gswin64.exe';

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Material parameters
% ------------------------------------------------------------------------
s_not = 1;    % initial yield stress    (normalised: sigma_0 = 1)
e_not = 1;    % initial yield strain    (normalised: epsilon_0 = 1)
a     = 0.4;  % hardening parameter     (plastic modulus ratio)

% ========================================================================
% Section 2 -- Isotropic hardening: key points
% ========================================================================
% Under isotropic hardening the current yield stress after loading to
% point B is (1+a)*s_not.  On reverse loading, yielding occurs when
% the stress has decreased by 2*(1+a)*s_not from the peak.
%
% The slope of each loading segment is E (elastic) or E*a/(1+a) (plastic).
% All coordinates are derived analytically from these assumptions.

% Point A: initial yield (start of plastic flow)
sa = s_not;
ea = e_not;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
69
70 % Point B: end of forward plastic loading
71 sb = (1 + a) * s_not;
72 eb = (1 + 10*a) * e_not;
73
74 % Point C: elastic unload to zero stress
75 sc = 0;
76 ec = 9*a * e_not;
77
78 % Point D: reverse yield (isotropic -- yield surface has expanded)
79 sd = -(1 + a) * s_not;
80 ed = (8*a - 1) * e_not;
81
82 % Point E: reverse plastic flow to zero strain
83 se = -9/10 * (1 + 2*a) * s_not;
84 ee = 0;
85
86 % Point F: end of reverse plastic loading
87 sf = -(1 + 14/5*a) * s_not;
88 ef = -(1 + 10*a) * e_not;
89
90 % Point G: re-load to forward yield
91 sg = (1 + 14/5*a) * s_not;
92 eg = (1 - 22/5*a) * e_not;
93
94 % Point H: re-load to zero strain
95 sh = (9/10 + 81/25*a) * s_not;
96 eh = 0;
97
98 % ========================================================================
99 % Section 3 -- Kinematic hardening: key points
100 % ========================================================================
101 % Under kinematic hardening the yield surface translates but does not
102 % grow.  The yield surface half-width remains s_not throughout.
103 % Reverse yielding occurs at a lower stress than under isotropic hardening,
104 % capturing the Bauschinger effect.
105
106 % Points A and B: same as isotropic (first loading)
107 sak = s_not;          eak = e_not;
108 sbk = (1 + a) * s_not; ebk = (1 + 10*a) * e_not;
109
110 % Point C: elastic unload to zero stress
111 sck = 0;
112 eck = 9*a * e_not;
113
114 % Point D: reverse yield (kinematic -- yield surface has only translated)
115 sdk = (a - 1) * s_not;
116 edk = (10*a - 1) * e_not;
117
118 % Point E: reverse plastic flow to zero strain
119 sek = -9/10 * s_not;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
eek = 0;

% Point F: end of reverse plastic loading
sfk = -(a + 1) * s_not;
efk = -(1 + 10*a) * e_not;

% Point G: re-load to forward yield
sgk = (1 - a) * s_not;
egk = (1 - 10*a) * e_not;

% Point H: re-load to zero strain
shk = 9/10 * s_not;
ehk = 0;

% ========================================================================
% Section 4 -- Assemble path vectors (origin + A through H)
% ========================================================================
x_iso  = [0; ea;  eb;  ec;  ed;  ee;  ef;  eg;  eh ];
y_iso  = [0; sa;  sb;  sc;  sd;  se;  sf;  sg;  sh ];

x_kin  = [0; eak; ebk; eck; edk; eek; efk; egk; ehk];
y_kin  = [0; sak; sbk; sck; sdk; sek; sfk; sgk; shk];

% Axes lines
x_axis = [-5, 5];   y_zero = [0,  0];
y_axis = [0,  0];   x_zero = [-2.5, 2.5];

% ========================================================================
% Section 5 -- Plot
% ========================================================================
hf1 = figure('Position', [1, scrsz(4)/4.5, scrsz(3)/2.5, scrsz(4)/2.0]);
set(gca, 'FontSize', fs);

plot(x_iso, y_iso,  'b-',  'LineWidth', 1.5);   hold on;
plot(x_kin, y_kin,  'r--', 'LineWidth', 1.5);
plot(x_axis, y_zero, 'k');
plot(y_axis, x_zero, 'k');

% --- Point labels ---
% Subscript 1 = isotropic,  subscript 2 = kinematic
lbl = @(x,y,s) text(x, y, ['\leftarrow ' s], ...
                    'HorizontalAlignment', 'left', 'FontSize', fs);

lbl(0,   0,    'O');
lbl(ea,  sa,   'A');
lbl(eb,  sb,   'B');
lbl(ec,  sc,   'C');

% Isotropic points (suffix 1)
lbl(ed,  sd,   'D_1');
lbl(ee,  se,   'E_1');
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
lbl(ef,  sf,   'F_1');
lbl(eg,  sg,   'G_1');
lbl(eh,  sh,   'H_1');

% Kinematic points (suffix 2)
lbl(edk, sdk,  'D_2');
lbl(eek, sek,  'E_2');
lbl(efk, sfk,  'F_2');
lbl(egk, sgk,  'G_2');
lbl(ehk, shk,  'H_2');

% --- Formatting ---
title(['Stress-Strain Response  (\alpha = ' num2str(a) ')'], 'FontSize', fs);
xlabel('Strain  (\epsilon / \epsilon_0)',  'FontSize', fs);
ylabel('Stress  (\sigma / \sigma_0)',      'FontSize', fs);
legend('Isotropic Hardening', 'Kinematic Hardening', 'Location', 'southeast');
grid on;
axis on;
set(gca, 'FontSize', fs);

% ========================================================================
% Section 6 -- Export
% ========================================================================
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'auto');
FileName = 'Prob-1.eps';
print(FileName, '-depsc');
eps2pdf(FileName, GS, 0);
```

I.3.2 Modelli costitutivi

Per cinque anni, l'Università del Colorado Boulder faceva parte del consorzio NEES e si concentrava sulla simulazione ibrida in tempo reale (Saouma e Sivaselvan, 2014).

Poiché il sito era chiuso (prematuramente) a causa di una mancanza di interesse della ricerca da parte della comunità in generale (RTHS sono notoriamente impegnativi, molto più che "mundane" test da tavolo shake), l'autore ha deciso di sviluppare il proprio software come OpenSees è stato non particolarmente adatto per tale sforzo.

Il software sviluppato (in seguito chiamato) Mercury (Saouma, Kang e Haussmann, 2012) è stato scritto per la prima volta in Object Oriented MATLAB®by Kang, 2010 e poi riscritto in c++ dal Dr Gary Haussman.

A questo giorno, e al meglio della conoscenza dell'autore (e bias) la simulazione ibrida in tempo reale dei 400+ gradi di libertà in un telaio in cemento armato altamente non lineare (precedentemente testato su una tavola scura) non solo è stato superato, ma è forse uno dei più complessi test strutturali mai eseguiti (Saouma et al., 2013).

Un pilota costitutivo è stato scritto in seguito da Segura, 2011 che ha aggiunto il modello

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Ibarra per plasticità lumped e il modello di taglio a stato limite, che è venuto ad essere chiamato Mercury++.

Si noti che il codice è scritto in Object Oriented Matlab.

Questa sezione elenca così i driver costitutivi disponibili in Mercury++.

Dal dottorato «An Optimized Computational Environment for Real Time Hybrid Simulation» by Kang, 2010 e le tesi di M.S. «Implementation Of Lumped Plasticity Models And Developments In An Object Oriented Nonlinear Finite Element Code» by Segura, 2011.

I.3.3 Modello bilineare

```
%% -----------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
% Program    : Mercury v.2.01
% Email      : kkd0724@hanafos.com
% Revision   : November 16, 2010
% Written by : Dae-Hung Kang
%% -----------------------------------------------------------------
classdef Bilinear < handle

    properties (SetAccess=private)
        % Input variables
        Tag;                    % material tag
        Type;                   % material type
        InitialE;               % initial modulus
        sy0;                    % initial yielding stress
        b;                      % strain-hardening coefficient
        a1;                     % isotropic hardening parameter which reflect
   an increase of the compression yield envelope through a fraction of the
   yield strength after a plastic strain a2*sy0/InitialE
        a2;                     % isotropic hardening parameter with respcect
   to a1
        a3;                     % isotropic hardening parameter which reflect
   an increase of the tension yield envelope through a fraction of the yield
   strength after a plastic strain a4*sy0/InitialE
        a4;                     % isotropic hardening parameter with respcect
   to a3
        rho;                    % density
        % commit variables
        comStress;              % committed Stress from previous step
        comTangentE;            % committed TangentE from previous step
        comStrain;              % committed Strain from previous step
        comStrain_min;          % committed Strain_min from previous step
        comStrain_max;          % committed Strain_max from previous step
        comShift_Pos;           % committed Shift_Pos from previous step
        comShift_Neg;           % committed Shift_Neg from previous step
```

COPIA DI REVISIONE

```
        comflag;                % committed flag from previous step
        % update variables
        Stress;                 % uniaxial stress
        TangentE;               % tangent modulus
        Strain;                 % uniaxial strain
        Strain_min;             % minimum strain in analysis of constitutive
    model
        Strain_max;             % maximum strain in analysis of constitutive
    model
        Shift_Pos;              % positive shift for isotropic hardening
        Shift_Neg;              % negative shift for isotropic hardening
        flag;                   % flag for load status
    end

    properties (SetAccess=public)
        uni_e_s
        uni_tangentE
    end

    methods
        function mat = Bilinear(material)
            mat.Tag      = material.Tag;
            mat.Type     = material.Type;
            mat.InitialE = material.InitialE;
            mat.sy0      = material.sy0;
            mat.b        = material.b;
            mat.a1       = material.a1;
            mat.a2       = material.a2;
            mat.a3       = material.a3;
            mat.a4       = material.a4;
            mat.rho      = material.rho;
        end

        function Initialization(mat)
            mat.Stress     = 0;
            mat.TangentE   = mat.InitialE;
            mat.Strain     = 0;
            mat.Strain_min = 0;
            mat.Strain_max = 0;
            mat.Shift_Pos  = 1;
            mat.Shift_Neg  = 1;
            mat.flag       = 0;
        end

        function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use
    in constitutive model
            mat.comStress     = mat.Stress;
            mat.comTangentE   = mat.TangentE;
            mat.comStrain     = mat.Strain;
            mat.comStrain_min = mat.Strain_min;
            mat.comStrain_max = mat.Strain_max;
```

COPIA DI REVISIONE

```
            mat.comShift_Pos  = mat.Shift_Pos;
            mat.comShift_Neg  = mat.Shift_Neg;
            mat.comflag       = mat.flag;
        end

        function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert all values when failing at current step
            mat.Stress     = mat.comStress;
            mat.TangentE   = mat.comTangentE;
            mat.Strain     = mat.comStrain;
            mat.Strain_min = mat.comStrain_min;
            mat.Strain_max = mat.comStrain_max;
            mat.Shift_Pos  = mat.comShift_Pos;
            mat.Shift_Neg  = mat.comShift_Neg;
            mat.flag       = mat.comflag;
        end

        function getStrain(mat, TrialStrain)
            mat.Strain = TrialStrain;
        end

        function getTangentE(mat)
            mat.Stress     = mat.comStress;
            mat.TangentE   = mat.comTangentE;
            mat.Strain_min = mat.comStrain_min;
            mat.Strain_max = mat.comStrain_max;
            mat.Shift_Pos  = mat.comShift_Pos;
            mat.Shift_Neg  = mat.comShift_Neg;
            mat.flag       = mat.comflag;

            del_eps = mat.Strain - mat.comStrain;

            if ( abs(del_eps) > 2.2204460492503131e-016 )
                Esh  = mat.b * mat.InitialE;
                epsy = mat.sy0/mat.InitialE;
                c1   = Esh * mat.Strain;
                c2   = mat.Shift_Neg * mat.sy0 * ( 1 - mat.b );
                c3   = mat.Shift_Pos * mat.sy0 * ( 1 - mat.b );
                c    = mat.comStress + mat.InitialE * del_eps;
                mat.Stress = max( (c1-c2), min( (c1+c3), c ) );
                if ( abs(mat.Stress - c) < 2.2204460492503131e-016 )
                    mat.TangentE = mat.InitialE;
                else
                    mat.TangentE = Esh;
                end

                if (mat.flag == 0)
                    if (del_eps > 0.0)
                        mat.flag = 1;
                    else
                        mat.flag = -1;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
                    end
                end

                if ( (mat.flag == 1) && (del_eps < 0.0) )
                    % loading reverstal( + -> - )
                    mat.flag = -1;
                    mat.Strain_max = max(mat.comStrain, mat.Strain_max);
                    mat.Shift_Neg  = 1 + mat.a1 * ( (mat.Strain_max - mat.
    Strain_min) / (2.0 * mat.a2 * epsy) )^0.8;
                end

                if ( (mat.flag == -1) && (del_eps > 0.0) )
                    % loading reverstal( - -> + )
                    mat.flag = 1;
                    mat.Strain_min = min(mat.comStrain, mat.Strain_min);
                    mat.Shift_Pos  = 1 + mat.a3 * ( (mat.Strain_max - mat.
    Strain_min) / (2.0 * mat.a4 * epsy) )^0.8;
                end
            end
        end

        function getStress(mat)
            mat.Stress = mat.Stress;
        end

        function allocateMemory(mat,totStep)
            mat.uni_e_s(1:totStep,1:2)    = 0;
        end

        function write2file(mat, fid)
            fprintf(fid,'%f %f \n', mat.Strain, mat.Stress);
        end

         function write2mat(mat, fid)
             uni_e_s = mat.uni_e_s;
             save(fid, 'uni_e_s');
         end

        function getPlot(mat,num)
            figure(num);
            plot(mat.Strain, mat.Stress,'o');
            hold on;grid on;box on;
            xlabel('Strain');
            ylabel('Stress');
        end

        function finalPlot(mat,num)
            figure(num);
            plot(mat.uni_e_s(:,1), mat.uni_e_s(:,2));
            grid on;box on;
            title('Strain-Stress relationship');
```

COPIA DI REVISIONE

```
            xlabel('Strain');
            ylabel('Stress');
        end

    end
end
```

I.3.4 Indurimento

```
%% ---------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
% Program    : Mercury v.2.01
% Email      : kkd0724@hanafos.com
% Revision   : November 16, 2010
% Written by : Dae-Hung Kang
%% ---------------------------------------------------------------
classdef Hardening < handle

    properties (SetAccess=private)
        % Input variables
        Tag;                    % material tag
        Type;                   % material type
        InitialE;               % initial modulus
        sy0;                    % initial yielding stress
        Hiso;                   % isotropic hardening modulus
        Hkin;                   % kinematic hardening modulus
        rho;                    % density
        % commit variables
        comStress;              % committed Stress from previous step
        comTangentE;            % committed TangentE from previous step
        comStrain;              % committed Strain from previous step
        comPlasticStrain;       % committed PlasticStrain from previous step
        comBackStress;          % committed BackStress from previous step
        comsy;                  % committed sy from previous step
        % update variables
        Stress;                 % uniaxial stress
        TangentE;               % tangent modulus
        Strain;                 % uniaxial strain
        PlasticStrain;          % uniaxial plastic strain
        BackStress;             % uniaxial back stress
        sy;                     % yield stress
    end

    properties (SetAccess=public)
        uni_e_s
        uni_tangentE
    end

    methods
        function mat = Hardening(material)
```

COPIA DI REVISIONE

```
            mat.Tag      = material.Tag;
            mat.Type     = material.Type;
            mat.InitialE = material.InitialE;
            mat.sy0      = material.sy0;
            mat.Hiso     = material.Hiso;
            mat.Hkin     = material.Hkin;
            mat.rho      = material.rho;
        end

        function Initialization(mat)
            mat.Stress           = 0;
            mat.TangentE         = mat.InitialE;
            mat.Strain           = 0;
            mat.PlasticStrain    = 0;
            mat.BackStress       = 0;
            mat.sy               = mat.sy0;
            mat.comPlasticStrain = 0;
            mat.comBackStress    = 0;
            mat.comsy            = mat.sy0;
        end

        function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use
    in constitutive model
            mat.comStress        = mat.Stress;
            mat.comTangentE      = mat.TangentE;
            mat.comStrain        = mat.Strain;
            mat.comPlasticStrain = mat.PlasticStrain;
            mat.comBackStress    = mat.BackStress;
            mat.comsy            = mat.sy;
        end

        function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert
    all values when failing at current step
            mat.Stress        = mat.comStress;
            mat.TangentE      = mat.comTangentE;
            mat.Strain        = mat.comStrain;
            mat.PlasticStrain = mat.comPlasticStrain;
            mat.BackStress    = mat.comBackStress;
            mat.sy            = mat.comsy;
        end

        function getStrain(mat, TrialStrain)
            mat.Strain = TrialStrain;
        end

        function getTangentE(mat)
            % Material constitutive law
            eps_p_tr     = mat.comPlasticStrain;   % trial plastic strain
            back_sig_tr  = mat.comBackStress;      % trial back stress
            sy_tr        = mat.comsy;              % trial evoluted yielding
    stress
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
            sig_tr       = mat.InitialE * ( mat.Strain - eps_p_tr);  % trial
    stress
            %
    ------------------------------------------------------------------------
            Mark = sig_tr - back_sig_tr;        % Sign operator
            %
    ------------------------------------------------------------------------
            func = abs(Mark) - sy_tr;           % Yielding function
            %
    ------------------------------------------------------------------------
            if (func <= 0)                      % Elastic
                mat.PlasticStrain = eps_p_tr;       % updated plastic strain
                mat.BackStress    = back_sig_tr;    % updated back stress
                mat.sy            = sy_tr;          % evoluted yielding
    stress
                mat.Stress        = sig_tr;         % updated uniaxial stress
                mat.TangentE      = mat.InitialE;   % updated tangent modulus
            elseif (func > 0)                   % Plastic
                del_gamma  = func / ( mat.InitialE + mat.Hiso + mat.Hkin );
                mat.PlasticStrain = eps_p_tr + del_gamma * sign(Mark);
                mat.BackStress    = back_sig_tr + del_gamma * mat.Hkin * sign(
    Mark);
                mat.sy            = sy_tr + mat.Hiso * del_gamma;
                mat.Stress        = sig_tr - del_gamma * mat.InitialE * sign(
    Mark);
                mat.TangentE      = mat.InitialE * ( mat.Hiso + mat.Hkin ) / (
     mat.InitialE + mat.Hiso + mat.Hkin );
            end
        end

        function getStress(mat)
            mat.Stress = mat.Stress;
        end

        function allocateMemory(mat,totStep)
            mat.uni_e_s(1:totStep,1:2)    = 0;
        end

        function write2file(mat, fid)
            fprintf(fid,'%f %f \n', mat.Strain, mat.Stress);
        end

         function write2mat(mat, fid)
             uni_e_s = mat.uni_e_s;
             save(fid, 'uni_e_s');
         end

        function getPlot(mat,num)
            figure(num);
            plot(mat.Strain, mat.Stress,'o');
            hold on;grid on;box on;
```

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

```
            xlabel('Strain');
            ylabel('Stress');
        end

        function finalPlot(mat,num)
            figure(num);
            plot(mat.uni_e_s(:,1), mat.uni_e_s(:,2));
            grid on;box on;
            title('Strain-Stress relationship');
            xlabel('Strain');
            ylabel('Stress');
        end

    end
end
```

I.3.5 Isteresi

```
%% ---------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
% Program    : Mercury v.2.11
% Email      : christopherlsegura@gmail.com
% Revision   : May 10, 2011
% Written by : Christopher Segura
% Filename   : Hysteresis.m
%% ---------------------------------------------------------------
classdef Hysteresis < handle

    properties (SetAccess=private)
        % Input variables
        Tag;        % material Tag
        Type;       % material Type
        sy_pos0;    % positive yield Stress
        epsy_pos0;  % positive yield Strain
        sy_neg0;    % negative yield Stress
        epsy_neg0;  % negative yield Strain
        cap_pos0;   % positive capping Stress
        ecap_pos0;  % positive capping Strain
        cap_neg0;   % negative capping Stress
        ecap_neg0;  % negative capping Strain
        res_pos;    % positive residual Stress
        eres_pos0;  % positive residual Strain
        res_neg;    % negative residual Stress
        eres_neg0;  % negative residual Strain
        lamda_hys;  % hysteretic disipation constant
        det_rate;   % hysteresis deterioration exponent "c"
        rho;        % density
        %% commit variables
        comStress;     % committed Stress from previous step
        comInitialE;       % committed InitialE from previous step
```

COPIA DI REVISIONE

```
        comStrain;     % committed Strain from previous step
        comsy_pos;     % committed yeild Stress
        comsy_neg;     % committed yeild Stress
        comcap_pos;
        comcap_neg;
        comepsy_pos;   % positive yield Strain
        comepsy_neg;   % negative yield Strain
        comecap_pos;   % positive cap Strain
        comecap_neg;   % negative cap Strain
        comeres_pos;   % positive residual Strain
        comeres_neg;   % negative residual Strain
        comhys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
        coms_ref_pos;  % positive refenerence Stress
        coms_ref_neg;  % negative refenerence Stress
        coms_tar_pos;   % positive target Stress
        comeps_tar_pos; % positive target Strain
        coms_tar_neg;   % negative target Stress
        comeps_tar_neg; % negative target Strain
        comstate_flag;  % loading branch
        comupdate_flag; % update loading branch
        comreversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        comenrgy_step;  % step i energy dissipated
        comenrgy_prvs;  % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        comE_unld;      % unloading stiffness
        comE_hrd_pos;   % positive hardening stiffness
        comE_hrd_neg;   % negative hardening stiffness
        comeps_pt5;     % positive unloading inflection Strain
        comeps_pt10;    % negative unloading inflection Strain
        comBeta;
        comBeta_Unld;
        comnorm_hys;
        comn_exc;
        %% update variables
        Stress;     % uniaxial Stress
        InitialE;       % tangent modulus
        Strain;     % uniaxial Strain
        iniE;       % initial modulus
        E_hrd;      % hardening modulus
        E_sof;      % softening modulus
        sy_pos;     % positive yield Stress
        sy_neg;     % negative yield Stress
        cap_pos;    % positive capping Stress
        cap_neg;    % negative capping Stress
        %
        epsy_pos;   % positive yield Strain
        epsy_neg;   % negative yield Strain
        ecap_pos;   % positive cap Strain
        ecap_neg;   % negative cap Strain
        eres_pos;   % positive residual Strain
        eres_neg;   % negative residual Strain
        hys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
```

COPIA DI REVISIONE

```
        s_ref_pos;  % positive refenerence Stress
        s_ref_neg;  % negative refenerence Stress
        %
        s_tar_pos;   % positive target Stress
        eps_tar_pos; % positive target Strain
        s_tar_neg;   % negative target Stress
        eps_tar_neg; % negative target Strain
        state_flag;  % loading branch
        update_flag; % update loading branch
        reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        enrgy_step;  % step i energy dissipated
        enrgy_prvs;  % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        E_unld;      % unloading stiffness
        E_hrd_pos;   % positive hardening stiffness
        E_hrd_neg;   % negative hardening stiffness
        eps_pt5;     % positive unloading inflection Strain
        eps_pt10;    % negative unloading inflection Strain
        Beta;        % hysteretic dissipation parameter
        Beta_Unld;   % unloading modulus dissipation parameter
        norm_hys;    % normalized hysteretic energy
        n_exc;       % number excursions/cycles

    end % properties (SetAccess=protected,Hidden)

    properties (SetAccess=public)
        uni_e_s
        uni_tangentE
    end

    methods
        function mat = Hysteresis(material)
            mat.Tag         = material.Tag;
            mat.Type        = material.Type;
            mat.sy_pos0     = material.sy_pos0;
            mat.epsy_pos0   = material.epsy_pos0;
            mat.sy_neg0     = material.sy_neg0;
            mat.epsy_neg0   = material.epsy_neg0;
            mat.cap_pos0    = material.cap_pos0;
            mat.ecap_pos0   = material.ecap_pos0;
            mat.cap_neg0    = material.cap_neg0;
            mat.ecap_neg0   = material.ecap_neg0;
            mat.res_pos     = material.res_pos;
            mat.eres_pos0   = material.eres_pos0;
            mat.res_neg     = material.res_neg;
            mat.eres_neg0   = material.eres_neg0;
            mat.lamda_hys   = material.lamda_hys;
            mat.det_rate    = material.det_rate;
            mat.rho         = material.rho;
        end % function Hysteresis

        function Initialization(mat)
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
            mat.Stress     = 0;
            mat.Strain     = 0;
            mat.sy_pos     = mat.sy_pos0;
            mat.epsy_pos   = mat.epsy_pos0;
            mat.iniE       = mat.sy_pos0/mat.epsy_pos0;
            mat.InitialE       = mat.iniE;
            mat.sy_neg     = mat.sy_neg0;
            mat.epsy_neg   = mat.epsy_neg0;
            mat.cap_pos    = mat.cap_pos0;
            mat.ecap_pos   = mat.ecap_pos0;
            mat.E_hrd      = (mat.cap_pos0 - mat.sy_pos0)/(mat.ecap_pos0 - mat
    .epsy_pos0);
            mat.cap_neg    = mat.cap_neg0;
            mat.ecap_neg   = mat.ecap_neg0;
            mat.eres_pos   = mat.eres_pos0;
            mat.eres_neg   = mat.eres_neg0;
            mat.E_sof      = (mat.res_pos - mat.cap_pos0)/(mat.eres_pos0 - mat
    .ecap_pos0);
            mat.hys_dis_cap = mat.lamda_hys*mat.sy_pos*mat.epsy_pos; %
    hysteretic dissipation capacity
            mat.s_ref_pos = mat.cap_pos - (mat.ecap_pos*mat.E_sof);
            mat.s_ref_neg = mat.cap_neg - (mat.ecap_neg*mat.E_sof);
            % initialize variables
            mat.s_tar_pos = mat.sy_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.epsy_pos;
            mat.s_tar_neg = mat.sy_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.epsy_neg;
            mat.state_flag = 1;
            mat.update_flag = mat.state_flag;
            mat.reversal_flag = 1;
            mat.enrgy_step = 0;  % step i energy dissipated
            mat.enrgy_prvs = 0;  % energy dissipated in previous steps 0 to (i
    -1)
            mat.E_unld = mat.iniE;
            mat.E_hrd_pos = mat.E_hrd;
            mat.E_hrd_neg = mat.E_hrd;
            mat.eps_pt5   = 0;
            mat.eps_pt10  = 0;
            mat.norm_hys  = 0;
            mat.n_exc     = 0;

        end % function Initialization

        function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use
    in constitutive model
            mat.comStress      = mat.Stress;
            mat.comInitialE        = mat.InitialE;
            mat.comStrain      = mat.Strain;
            mat.comsy_pos      = mat.sy_pos;
            mat.comsy_neg      = mat.sy_neg;
            mat.comcap_pos     = mat.cap_pos;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
            mat.comcap_neg     = mat.cap_neg;
            mat.comepsy_pos    = mat.epsy_pos;
            mat.comepsy_neg    = mat.epsy_neg;
            mat.comecap_pos    = mat.ecap_pos;
            mat.comecap_neg    = mat.ecap_neg;
            mat.comeres_pos    = mat.eres_pos;
            mat.comeres_neg    = mat.eres_neg;
            mat.comhys_dis_cap = mat.hys_dis_cap;
            mat.coms_ref_pos   = mat.s_ref_pos;
            mat.coms_ref_neg   = mat.s_ref_neg;
            mat.coms_tar_pos   = mat.s_tar_pos;
            mat.comeps_tar_pos = mat.eps_tar_pos;
            mat.coms_tar_neg   = mat.s_tar_neg;
            mat.comeps_tar_neg = mat.eps_tar_neg;
            mat.comstate_flag  = mat.state_flag;
            mat.comupdate_flag = mat.update_flag;
            mat.comreversal_flag = mat.reversal_flag;
            mat.comenrgy_step  = mat.enrgy_step;
            mat.comenrgy_prvs  = mat.enrgy_prvs;
            mat.comE_unld      = mat.E_unld;
            mat.comE_hrd_pos   = mat.E_hrd_pos;
            mat.comE_hrd_neg   = mat.E_hrd_neg;
            mat.comeps_pt5     = mat.eps_pt5;
            mat.comeps_pt10    = mat.eps_pt10;
            mat.comnorm_hys    = mat.norm_hys;
            mat.comn_exc       = mat.n_exc;

        end % function commit

        function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert
    all values when failing at current step
            mat.Stress      = mat.comStress;
            mat.InitialE        = mat.comInitialE;
            mat.Strain      = mat.comStrain;
            mat.sy_pos      = mat.comsy_pos;
            mat.sy_neg      = mat.comsy_neg;
            mat.cap_pos     = mat.comcap_pos;
            mat.cap_neg     = mat.comcap_neg;
            mat.epsy_pos    = mat.comepsy_pos;
            mat.epsy_neg    = mat.comepsy_neg;
            mat.ecap_pos    = mat.comecap_pos;
            mat.ecap_neg    = mat.comecap_neg;
            mat.eres_pos    = mat.comeres_pos;
            mat.eres_neg    = mat.comeres_neg;
            mat.hys_dis_cap = mat.comhys_dis_cap;
            mat.s_ref_pos   = mat.coms_ref_pos;
            mat.s_ref_neg   = mat.coms_ref_neg;
            mat.s_tar_pos   = mat.coms_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.comeps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg   = mat.coms_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.comeps_tar_neg;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
            mat.state_flag  = mat.comstate_flag;
            mat.update_flag = mat.comupdate_flag;
            mat.reversal_flag = mat.comreversal_flag;
            mat.enrgy_step  = mat.comenrgy_step;
            mat.enrgy_prvs  = mat.comenrgy_prvs;
            mat.E_unld      = mat.comE_unld;
            mat.E_hrd_pos   = mat.comE_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg   = mat.comE_hrd_neg;
            mat.eps_pt5     = mat.comeps_pt5;
            mat.eps_pt10    = mat.comeps_pt10;
            mat.norm_hys    = mat.comnorm_hys;
            mat.n_exc       = mat.comn_exc;
        end % function revert

        function getStrain(mat, TrialStrain)
            mat.Strain = TrialStrain;
        end

        function getTangentE(mat)
%             mat.Strain     = mat.comStrain;
            mat.Stress     = mat.comStress;
            mat.InitialE       = mat.comInitialE;
            mat.state_flag = mat.comupdate_flag;
            mat.update_flag = mat.comupdate_flag;
            mat.reversal_flag = mat.comreversal_flag;
            mat.enrgy_step  = mat.comenrgy_step;
            mat.enrgy_prvs  = mat.comenrgy_prvs;
            mat.sy_pos      = mat.comsy_pos;
            mat.sy_neg      = mat.comsy_neg;
            mat.cap_pos     = mat.comcap_pos;
            mat.cap_neg     = mat.comcap_neg;
            mat.epsy_pos    = mat.comepsy_pos;
            mat.epsy_neg    = mat.comepsy_neg;
            mat.ecap_pos    = mat.comecap_pos;
            mat.ecap_neg    = mat.comecap_neg;
            mat.eres_pos    = mat.comeres_pos;
            mat.eres_neg    = mat.comeres_neg;
            mat.s_ref_pos   = mat.coms_ref_pos;
            mat.s_ref_neg   = mat.coms_ref_neg;
            mat.s_tar_pos   = mat.coms_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.comeps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg   = mat.coms_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.comeps_tar_neg;
            mat.E_unld      = mat.comE_unld;
            mat.E_hrd_pos   = mat.comE_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg   = mat.comE_hrd_neg;
            mat.eps_pt5     = mat.comeps_pt5;
            mat.eps_pt10    = mat.comeps_pt10;
            mat.norm_hys    = mat.comnorm_hys;
            mat.n_exc       = mat.comn_exc;
            %-------------------------------------------------------------
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
            del_eps = mat.Strain - mat.comStrain;
            %-----------------------------------------------------------------
        if (del_eps >= 0) && (mat.Stress >= 0) % positive loading
                if (mat.state_flag == 4) % residual
                    ref_Stress = mat.res_pos;
                    ref_Strain = mat.eres_pos;
                    mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = PositiveLoading(mat);
                end
            elseif (del_eps < 0) && (mat.Stress > 0) % positive unloading
                [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = PosUnloading(mat);
            elseif (del_eps <= 0) && (mat.Stress <= 0) % negative loading
                if (mat.state_flag == 9) % residual
                    ref_Stress = mat.res_neg;
                    ref_Strain = mat.eres_neg;
                    mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = NegativeLoading(mat);
                end
            elseif (del_eps > 0) && (mat.Stress < 0) % negative loading
                [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = NegUnloading(mat);
            end

            mat.Stress = ref_Stress + mat.InitialE*(mat.Strain - ref_Strain);

            if (mat.comStress/del_eps < 0) % unloading
                if (mat.comStress/mat.Stress > 0) % unloading
                    step = del_eps*(mat.comStress + 0.5*(mat.Stress - mat.
    comStress));
                else % reloading
                    if (mat.Stress >= 0)
                        mat.enrgy_step = 0;
                        step = 0.5*(mat.Strain - mat.eps_pt10)*mat.Stress;
                        mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
                    else
                        mat.enrgy_step = 0;
                        step = 0.5*(mat.Strain - mat.eps_pt5)*mat.Stress;
                        mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
                    end
                end
            else
                step = del_eps*(mat.comStress + 0.5*(mat.Stress - mat.
    comStress));
            end
            % update energy in excursions
            mat.enrgy_step = mat.enrgy_step + step;
            mat.enrgy_prvs = mat.enrgy_prvs + step;
            % normalized hysteretic energy
            mat.norm_hys = mat.lamda_hys*mat.enrgy_prvs/mat.hys_dis_cap;

```

COPIA DI REVISIONE

```
        end

        function getStress(mat)
            mat.Stress = mat.Stress;
        end

        function [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = PositiveLoading(mat)
            switch mat.state_flag
                case -1
                    if (mat.Strain < 0)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.Strain < mat.epsy_pos)
                        mat.update_flag = 1;
                    elseif (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 1
                    if (mat.Strain < mat.epsy_pos)
                        mat.update_flag = 1;
                    elseif (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 2
                    if (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 3
                    if (mat.Strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 4
                    mat.update_flag = 4;
                case 9
                    mat.update_flag = 9;

                otherwise
                    if (mat.Strain < mat.eps_tar_pos)
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
                        mat.update_flag = 11;
                    else
                        if (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2;
                        elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3;
                        else
                            mat.update_flag = 4;
                        end
                    end
            end


            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_Stress = mat.sy_neg;
                    ref_Strain = mat.epsy_neg;
                    mat.InitialE   = mat.iniE;
                case 1 % elastic
                    ref_Stress = 0;
                    ref_Strain = 0;
                    mat.InitialE   = mat.iniE;
                case 2 % hardening
                    ref_Stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_Strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.InitialE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3 % softening
                    ref_Stress = mat.cap_pos;
                    ref_Strain = mat.ecap_pos;
                    mat.InitialE   = mat.E_sof;
                case 4 % residual
                    ref_Stress = mat.res_pos;
                    ref_Strain = mat.eres_pos;
                    mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                case 9 % residual
                    ref_Stress = mat.res_neg;
                    ref_Strain = mat.eres_neg;
                    mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                case 11
                    ref_Stress = mat.comStress;
                    ref_Strain = mat.comStrain;
                    mat.InitialE   = (mat.s_tar_pos - ref_Stress)/(mat.
    eps_tar_pos - ref_Strain);
            end
        end % function PositiveLoading


        function [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = PosUnloading( mat )

            if (mat.state_flag == 1)
                if (mat.Strain > 0)
```


I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

```
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.Strain > mat.epsy_neg)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
            elseif (mat.state_flag == -1)
                if (mat.Strain > mat.epsy_neg)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
%             elseif (mat.state_flag == 4)
%                 mat.update_flag = 4;
            elseif (mat.state_flag == 9)
                mat.update_flag = 9;
            else
                % update target state
                if (mat.reversal_flag == 1)
                    if (mat.comStrain > mat.eps_tar_pos)
                        mat.eps_tar_pos = mat.comStrain;
                        mat.s_tar_pos   = mat.comStress;
                    end
                end
                % determine Strain at pt 5
                mat.eps_pt5 = mat.comStrain - mat.comStress/mat.E_unld;

                if (mat.Strain > mat.eps_pt5)
                    mat.update_flag = 12; % unloading
                elseif (mat.Strain > mat.eps_tar_neg)
                    mat.update_flag = 13; % reloading to target
                else
                    if (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7; % neg hardening
                    elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8; % neg softening
                    else
                        mat.update_flag = 9; % neg residual
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
```

COPIA DI REVISIONE

```
                case -1
                    ref_Stress = 0;
                    ref_Strain = 0;
                    mat.InitialE   = mat.iniE;
                case 1
                    ref_Stress = mat.sy_pos;
                    ref_Strain = mat.epsy_pos;
                    mat.InitialE   = mat.iniE;
                case 4
                    ref_Stress = mat.res_pos;
                    ref_Strain = mat.eres_pos;
                    mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                case 7
                    ref_Stress = mat.s_tar_neg;
                    ref_Strain = mat.eps_tar_neg;
                    mat.InitialE   = mat.E_hrd_neg;
                case 8
                    ref_Stress = mat.cap_neg;
                    ref_Strain = mat.ecap_neg;
                    mat.InitialE   = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_Stress = mat.res_neg;
                    ref_Strain = mat.eres_neg;
                    mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                case 12
                    ref_Stress = mat.comStress;
                    ref_Strain = mat.comStrain;
                    mat.InitialE   = mat.E_unld;
                case 13
                    ref_Stress = 0;
                    ref_Strain = mat.eps_pt5;
                    mat.InitialE   = (mat.s_tar_neg - ref_Stress)/(mat.
    eps_tar_neg - ref_Strain);
            end

            % update unloading modulus
            if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.
    update_flag ~= 4) && (mat.update_flag ~= 9)
                % estimate energy in step
                Stress_new = ref_Stress + mat.InitialE*(mat.Strain -
    ref_Strain);
                enrgy_step = abs((mat.Strain - mat.comStrain)*(mat.comStress +
     0.5*(Stress_new - mat.comStress)));
                if (mat.comreversal_flag == 1)
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
                end
                % determine Strain at pt 5
                mat.eps_pt5 = mat.comStrain - mat.comStress/mat.E_unld;

                if (mat.Strain > mat.eps_pt5)
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
                    mat.reversal_flag = -1;
                    mat.update_flag = 12; %unloading
                else
                    mat.reversal_flag = 1;
                    % update cyclic parameters on negative side
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_hrd_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_neg;
                    mat.sy_neg      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_neg;
                    mat.epsy_neg    = mat.sy_neg/mat.iniE;
                    mat.s_ref_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_neg;
                    mat.ecap_neg    = min(-1.7172e-26,(mat.s_ref_neg - mat.
    sy_neg + (mat.E_hrd_neg*mat.epsy_neg))/(mat.E_hrd_neg - mat.E_sof));
                    mat.cap_neg     = min(-1.2971e-24, mat.s_ref_neg + mat.
    E_sof*mat.ecap_neg);
                    mat.eps_tar_neg = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_neg;
                    mat.eres_neg    =  min(-1.0922e-24,(mat.res_neg - mat.
    s_ref_neg)/mat.E_sof);
                    Stress_tar_chk  = mat.s_ref_neg + mat.E_sof*mat.
    eps_tar_neg;
                    if (mat.eps_tar_neg > mat.ecap_neg)
                        mat.s_tar_neg = mat.sy_neg + mat.E_hrd_neg*(mat.
    eps_tar_neg - mat.epsy_neg);
                    else
                        mat.s_tar_neg = Stress_tar_chk;
                    end
                    if (mat.s_tar_neg > mat.res_neg)
                        mat.s_tar_neg   = mat.res_neg;
                        mat.eps_tar_neg = mat.eres_neg;
                    end

                    if (mat.Strain > mat.eps_pt5)
                        mat.update_flag = 12; %unloading
                    elseif (mat.Strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13; % reloading to target
                    else
                        if (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7; % neg hardening
                        elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8; % neg softening
                        else
                            mat.update_flag = 9; % neg residual
                        end
                    end

                    if (mat.Strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13; % reloading to target
                    else
                        if (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7; % neg hardening
                        elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8; % neg softening
```

COPIA DI REVISIONE

```
                        else
                            mat.update_flag = 9; % neg residual
                        end
                    end
                end

                switch mat.update_flag
                    case 7
                        ref_Stress = mat.s_tar_neg;
                        ref_Strain = mat.eps_tar_neg;
                        mat.InitialE   = mat.E_hrd_neg;
                    case 8
                        ref_Stress = mat.cap_neg;
                        ref_Strain = mat.ecap_neg;
                        mat.InitialE   = mat.E_sof;
                    case 9
                        ref_Stress = mat.res_neg;
                        ref_Strain = mat.eres_neg;
                        mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                    case 12
                        ref_Stress = mat.comStress;
                        ref_Strain = mat.comStrain;
                        mat.InitialE   = mat.E_unld;
                    case 13
                        ref_Stress = 0;
                        ref_Strain = mat.eps_pt5;
                        mat.InitialE   = (mat.s_tar_neg - ref_Stress)/(mat.
    eps_tar_neg - ref_Strain);
                end
            end
        end % function PosUnloading


        function [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = NegativeLoading( mat )

            switch mat.state_flag
                case 1
                    if (mat.Strain > mat.epsy_neg)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case -1
                    if (mat.Strain > mat.epsy_neg)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
```

COPIA DI REVISIONE

```
                elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
            case 4
                mat.update_flag = 4;
            case 7
                if (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
            case 8
                if (mat.Strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
            case 9
                mat.update_flag = 9;

            otherwise
                if (mat.Strain > mat.eps_tar_neg)
                    mat.update_flag = 13;
                else
                    if (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                end
        end

        switch mat.update_flag
            case -1
                ref_Stress = 0;
                ref_Strain = 0;
                mat.InitialE   = mat.iniE;
            case 4
                ref_Stress = mat.res_pos;
                ref_Strain = mat.eres_pos;
                mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
            case 7
                ref_Stress = mat.s_tar_neg;
                ref_Strain = mat.eps_tar_neg;
                mat.InitialE   = mat.E_hrd_neg;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
                case 8
                    ref_Stress = mat.cap_neg;
                    ref_Strain = mat.ecap_neg;
                    mat.InitialE   = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_Stress = mat.res_neg;
                    ref_Strain = mat.eres_neg;
                    mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                case 13
                    ref_Stress = mat.comStress;
                    ref_Strain = mat.comStrain;
                    mat.InitialE   = (mat.s_tar_neg - ref_Stress)/(mat.
    eps_tar_neg - ref_Strain);
            end
        end % function NegativeLoading


        function [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = NegUnloading( mat )

            if (mat.state_flag == -1)
                if (mat.Strain < 0)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.Strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 1)
                if (mat.Strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 4)
                mat.update_flag = 4;
%             elseif (mat.state_flag == 9)
%                 mat.update_flag = 9;
            else
                % update target state
                if (mat.reversal_flag == 1)
                    if (mat.comStrain < mat.eps_tar_neg)
                        mat.eps_tar_neg = mat.comStrain;
                        mat.s_tar_neg   = mat.comStress;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
                end
            end
            % determine Strain at pt 10
            mat.eps_pt10 = mat.comStrain - mat.comStress/mat.E_unld;

            if (mat.Strain < mat.eps_pt10)
                mat.update_flag = 10; % unloading
            else
                if (mat.Strain < mat.eps_tar_pos)
                    mat.update_flag = 11;
                else
                    if (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                end
            end
        end

        switch mat.update_flag
            case -1
                ref_Stress = mat.sy_neg;
                ref_Strain = mat.epsy_neg;
                mat.InitialE   = mat.iniE;
            case 1
                ref_Stress = 0;
                ref_Strain = 0;
                mat.InitialE   = mat.iniE;
            case 2
                ref_Stress = mat.s_tar_pos;
                ref_Strain = mat.eps_tar_pos;
                mat.InitialE   = mat.E_hrd_pos;
            case 3
                ref_Stress = mat.cap_pos;
                ref_Strain = mat.ecap_pos;
                mat.InitialE   = mat.E_sof;
            case 4
                ref_Stress = mat.res_pos;
                ref_Strain = mat.eres_pos;
                mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
            case 9
                ref_Stress = mat.res_neg;
                ref_Strain = mat.eres_neg;
                mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
            case 10
                ref_Stress = mat.comStress;
                ref_Strain = mat.comStrain;
                mat.InitialE   = mat.E_unld;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
                case 11
                    ref_Stress = 0;
                    ref_Strain = mat.eps_pt10;
                    mat.InitialE   = (mat.s_tar_pos - ref_Stress)/(mat.
eps_tar_pos - ref_Strain);

            end

            % update unloading modulus
            if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.
update_flag ~= 4) && (mat.update_flag ~= 9)
                % estimate energy in step
                Stress_new = ref_Stress + mat.InitialE*(mat.Strain -
ref_Strain);
                enrgy_step = abs((mat.Strain - mat.comStrain)*(mat.comStress +
 0.5*(Stress_new - mat.comStress)));
                if (mat.comreversal_flag == 1)
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
                end
                % determine Strain at pt 10
                mat.eps_pt10 = mat.comStrain - mat.comStress/mat.E_unld;

                if (mat.Strain < mat.eps_pt10)
                    mat.reversal_flag = -1;
                    mat.update_flag = 10; % unloading
                else
                    mat.reversal_flag = 1;
                    % update cyclic parameters on positive side
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_hrd_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_pos;
                    mat.sy_pos      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_pos;
                    mat.epsy_pos    = mat.sy_pos/mat.iniE;
                    mat.s_ref_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_pos;
                    mat.ecap_pos    = max(1.12961e-26,(mat.s_ref_pos - mat.
sy_pos + (mat.E_hrd_pos*mat.epsy_pos))/(mat.E_hrd_pos - mat.E_sof));
                    mat.cap_pos     = max(1.09123e-26, mat.s_ref_pos + mat.
E_sof*mat.ecap_pos);
                    mat.eps_tar_pos = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_pos;
                    mat.eres_pos    = max(1.95315e-24,(mat.res_pos - mat.
s_ref_pos)/mat.E_sof);
                    Stress_tar_chk  = mat.s_ref_pos + mat.E_sof*mat.
eps_tar_pos;
                    if (mat.eps_tar_pos < mat.ecap_pos)
                        mat.s_tar_pos = mat.sy_pos + mat.E_hrd_pos*(mat.
eps_tar_pos - mat.epsy_pos);
                    else
                        mat.s_tar_pos = Stress_tar_chk;
                    end
                    if (mat.s_tar_pos < mat.res_pos)
                        mat.s_tar_pos   = mat.res_pos;
```

COPIA DI REVISIONE

```
                    mat.eps_tar_pos = mat.eres_pos;
                end

                if (mat.Strain < mat.eps_pt10)
                    mat.update_flag = 10; % unloading
                elseif (mat.Strain < mat.eps_tar_pos)
                    mat.update_flag = 11; % reloading to target
                else
                    if (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2; % hardening
                    elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3; % softening
                    else
                        mat.update_flag = 4; % residual
                    end
                end

                if (mat.Strain < mat.eps_tar_pos)
                    mat.update_flag = 11; % reloading to target
                else
                    if (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2; % hardening
                    elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3; % softening
                    else
                        mat.update_flag = 4; % residual
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
                case 2
                    ref_Stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_Strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.InitialE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3
                    ref_Stress = mat.cap_pos;
                    ref_Strain = mat.ecap_pos;
                    mat.InitialE   = mat.E_sof;
                case 4
                    ref_Stress = mat.res_pos;
                    ref_Strain = mat.eres_pos;
                    mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                case 10
                    ref_Stress = mat.comStress;
                    ref_Strain = mat.comStrain;
                    mat.InitialE   = mat.E_unld;
                case 11
                    ref_Stress = 0;
                    ref_Strain = mat.eps_pt10;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
                        mat.InitialE   = (mat.s_tar_pos - ref_Stress)/(mat.
    eps_tar_pos - ref_Strain);
                end
            end
        end % function NegUnloading


        function [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step )

            % Note: for unloading modulus E_t = 2*E_t
            E_t     = mat.hys_dis_cap;
            E_step  = enrgy_step;
            c       = mat.det_rate;
            E_pre   = mat.enrgy_prvs;

            mat.Beta = ((E_step + mat.enrgy_step)/(E_t - E_pre))^c;
            mat.Beta_Unld = ((E_step + mat.enrgy_step)/(2*E_t - E_pre))^c;

            if (mat.Beta > 1)
                mat.Beta = 0.999;
                display('***************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('***************************')
            elseif (mat.Beta < 0)
                mat.Beta = 0.999;
                display('***************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('***************************')
            end
            if (mat.Beta_Unld > 1)
                mat.Beta_Unld = 0.999;
                display('***************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('***************************')
            elseif (mat.Beta_Unld < 0)
                mat.Beta_Unld = 0.999;
                display('***************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('***************************')
            end

        end % function BetaFunc


        function allocateMemory(mat,totStep)
            mat.uni_e_s(1:totStep,1:2)    = 0;
        end

        function write2file(mat, fid)
            fprintf(fid,'%f %f \n', mat.Strain, mat.Stress);
        end
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
920
921         function write2mat(mat, fid)
922              uni_e_s = mat.uni_e_s;
923              save(fid, 'uni_e_s');
924          end
925
926         function getPlot(mat,num)
927             figure(num);
928             plot(mat.Strain, mat.Stress,'o');
929             hold on;grid on;box on;
930             xlabel('Strain');
931             ylabel('Stress');
932         end
933
934         function finalPlot(mat,num)
935             figure(num);
936             plot(mat.uni_e_s(:,1), mat.uni_e_s(:,2));
937             grid on;box on;
938             title('Strain-Stress relationship');
939             xlabel('Strain');
940             ylabel('Stress');
941         end
942
943     end % methods
944
945 end % classdef
```

I.3.6 Modificato giuffre monegotto pinto

```
1  %% ------------------------------------------------------------
2  % Copyright 2010 All rights reserved.
3  % Program    : Mercury v.2.01
4  % Email      : kkd0724@hanafos.com
5  % Revision   : November 16, 2010
6  % Written by : Dae-Hung Kang
7  %% ------------------------------------------------------------
8  classdef ModifiedGiuffreMonegottoPinto < handle
9
10     properties (SetAccess=private)
11         % Input variables
12         Tag;                    % material tag
13         Type;                   % material type
14         InitialE;               % initial moduous
15         sy0;                    % initial yielding stress
16         b;                      % strain-hardening coefficient
17         R0;                     % during first loading, R0 is the value of the
       parameter R which is dependent on the absolute strain
18         cR1;                    % Experimentally determined parameters to be
      defined together with R0
```

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

```
        cR2;                    % Experimentally determined parameters to be
    defined together with R0
        a1;                     % isotropic hardening parameter which reflect
    an increase of the compression yield envelope through a fraction of the
    yield strength after a plastic strain a2*sy0/InitialE
        a2;                     % isotropic hardening parameter with respcect
    to a1
        a3;                     % isotropic hardening parameter which reflect
    an increase of the tension yield envelope through a fraction of the yield
    strength after a plastic strain a4*sy0/InitialE
        a4;                     % isotropic hardening parameter with respcect
    to a3
        rho;                    % density
        % commit variables
        comStress;              % committed Stress from previous step
        comTangentE;            % committed TangentE from previous step
        comStrain;              % committed Strain from previous step
        comStress_r;            % committed Stress_r from previous step
        comStrain_r;            % committed Strain_r from previous step
        comStress_o;            % committed Stress_o from previous step
        comStrain_o;            % committed Strain_o from previous step
        comStrain_max;          % committed Strain_max from previous step
        comStrain_min;          % committed Strain_min from previous step
        comStrain_m;            % committed Strain_p from previous step
        comflag;                % committed flag from previous step
        % update variables
        Stress;                 % uniaxial stress
        TangentE;               % tangent modulus
        Strain;                 % uniaxial strain
        Stress_r;               % stress at the point of strain reversal
        Strain_r;               % strain at the point of strain reversal
        Stress_o;               % stress at the point of intersection of the
    two asymptotes
        Strain_o;               % strain at the point of intersection of the
    two asymptotes
        Strain_max;             % maximum strain in analysis of constitutive
    model
        Strain_min;             % minimum strain in analysis of constitutive
    model
        Strain_m;               % strain at the previous maximum or minimum
    strain reversal point
        flag;                   %
    end

    properties (SetAccess=public)
        uni_e_s
        uni_tangentE
    end

    methods
        function mat = ModifiedGiuffreMonegottoPinto(material)
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
            mat.Tag      = material.Tag;
            mat.Type     = material.Type;
            mat.InitialE = material.InitialE;
            mat.sy0      = material.sy0;
            mat.b        = material.b;
            mat.R0       = material.R0;
            mat.cR1      = material.cR1;
            mat.cR2      = material.cR2;
            mat.a1       = material.a1;
            mat.a2       = material.a2;
            mat.a3       = material.a3;
            mat.a4       = material.a4;
            mat.rho      = material.rho;
        end

        function Initialization(mat)
            mat.Stress     = 0;
            mat.TangentE   = mat.InitialE;
            mat.Strain     = 0;
            mat.Stress_r   = 0;
            mat.Strain_r   = 0;
            mat.Stress_o   = 0;
            mat.Strain_o   = 0;
            mat.Strain_max =  mat.sy0/mat.InitialE;
            mat.Strain_min = -mat.sy0/mat.InitialE;
            mat.Strain_m   = 0;
            mat.flag       = 0;
        end

        function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use
    in constitutive model
            mat.comStress     = mat.Stress;
            mat.comTangentE   = mat.TangentE;
            mat.comStrain     = mat.Strain;
            mat.comStress_r   = mat.Stress_r;
            mat.comStrain_r   = mat.Strain_r;
            mat.comStress_o   = mat.Stress_o;
            mat.comStrain_o   = mat.Strain_o;
            mat.comStrain_max = mat.Strain_max;
            mat.comStrain_min = mat.Strain_min;
            mat.comStrain_m   = mat.Strain_m;
            mat.comflag       = mat.flag;
        end

        function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert
    all values when failing at current step
            mat.Stress     = mat.comStress;
            mat.TangentE   = mat.comTangentE;
            mat.Strain     = mat.comStrain;
            mat.Stress_r   = mat.comStress_r;
            mat.Strain_r   = mat.comStrain_r;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
            mat.Stress_o   = mat.comStress_o;
            mat.Strain_o   = mat.comStrain_o;
            mat.Strain_max = mat.comStrain_max;
            mat.Strain_min = mat.comStrain_min;
            mat.Strain_m   = mat.comStrain_m;
            mat.flag       = mat.comflag;
        end

        function getStrain(mat, TrialStrain)
            mat.Strain = TrialStrain;
        end

        function getTangentE(mat)
            mat.Stress     = mat.comStress;
            mat.TangentE   = mat.comTangentE;
            mat.Stress_r   = mat.comStress_r;
            mat.Strain_r   = mat.comStrain_r;
            mat.Stress_o   = mat.comStress_o;
            mat.Strain_o   = mat.comStrain_o;
            mat.Strain_max = mat.comStrain_max;
            mat.Strain_min = mat.comStrain_min;
            mat.Strain_m   = mat.comStrain_m;
            mat.flag       = mat.comflag;

            Esh   = mat.b * mat.InitialE;
            eps_y = mat.sy0/mat.InitialE;

            del_eps = mat.Strain - mat.comStrain;

            if (mat.flag == 0)
                if ( del_eps == 0 ) mat.flag  = 0;
                elseif ( del_eps > 0 )
                    mat.flag       = 1;
                    mat.Strain_max =  mat.sy0/mat.InitialE;
                    mat.Strain_min = -mat.Strain_max;
                    mat.Strain_o   =  mat.Strain_max;
                    mat.Stress_o   =  mat.sy0;
                    mat.Strain_m   =  mat.Strain_max;
                    mat.common(eps_y);
                elseif ( del_eps < 0 )
                    mat.flag       = -1;
                    mat.Strain_max =  mat.sy0/mat.InitialE;
                    mat.Strain_min = -mat.Strain_max;
                    mat.Strain_o   =  mat.Strain_min;
                    mat.Stress_o   = -mat.sy0;
                    mat.Strain_m   =  mat.Strain_min;
                    mat.common(eps_y);
                end
            elseif (mat.flag == 1)
                if ( del_eps > 0 )
                    mat.flag = 1;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
                    mat.common(eps_y);
                elseif ( del_eps < 0 )
                    % reversal ( + -> - )
                    mat.flag       = -1;
                    mat.Strain_r   = mat.comStrain;
                    mat.Stress_r   = mat.comStress;
                    mat.Strain_max = max(mat.Strain_max, mat.comStrain);
                    shift          = 1 + mat.a1 * ( (mat.Strain_max - mat.
Strain_min)/(2.0*mat.a2*eps_y) )^0.8;
                    mat.Strain_o   = (-mat.sy0 * shift + Esh * eps_y * shift -
 mat.Stress_r + mat.InitialE * mat.Strain_r) / (mat.InitialE - Esh);
                    mat.Stress_o   = -mat.sy0 * shift + Esh * (mat.Strain_o +
eps_y * shift);
                    mat.Strain_m   = mat.Strain_min;
                    mat.common(eps_y);
                end
            elseif (mat.flag == -1)
                if ( del_eps < 0 )
                    mat.flag = -1;
                    mat.common(eps_y);
                elseif ( del_eps > 0 )
                    mat.flag       = 1;
                    mat.Strain_r   = mat.comStrain;
                    mat.Stress_r   = mat.comStress;
                    mat.Strain_min = min(mat.Strain_min, mat.comStrain);
                    shift          = 1 + mat.a3 * ( (mat.Strain_max-mat.
Strain_min)/(2.0*mat.a4*eps_y) )^0.8;
                    mat.Strain_o   = (mat.sy0 * shift - Esh * eps_y * shift -
mat.Stress_r + mat.InitialE * mat.Strain_r) / (mat.InitialE - Esh);
                    mat.Stress_o   = mat.sy0 * shift + Esh * (mat.Strain_o -
eps_y * shift);
                    mat.Strain_m   = mat.Strain_max;
                    mat.common(eps_y);
                 end
            end
        end

        function common(mat,eps_y)
            xi     = abs( (mat.Strain_m - mat.Strain_o)/ eps_y );
            R      = mat.R0 - mat.R0*mat.cR1*xi/(mat.cR2+xi);
            e_rate = (mat.Strain - mat.Strain_r)/(mat.Strain_o - mat.Strain_r)
;
            dummy1 = 1.0 + abs(e_rate)^R;
            dummy2 = dummy1^(1/R);
            mat.Stress   = mat.b * e_rate + (1.0 - mat.b) * e_rate/dummy2;
            mat.Stress   = mat.Stress * (mat.Stress_o - mat.Stress_r) + mat.
Stress_r;
            mat.TangentE = mat.b + (1.0 - mat.b)/(dummy1 * dummy2);
            mat.TangentE = mat.TangentE * (mat.Stress_o - mat.Stress_r)/(mat.
Strain_o - mat.Strain_r);
        end
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
200
201         function getStress(mat)
202             mat.Stress = mat.Stress;
203         end
204
205         function allocateMemory(mat,totStep)
206             mat.uni_e_s(1:totStep,1:2)    = 0;
207         end
208
209         function write2file(mat, fid)
210             fprintf(fid,'%f %f \n', mat.Strain, mat.Stress);
211         end
212
213          function write2mat(mat, fid)
214              uni_e_s = mat.uni_e_s;
215              save(fid, 'uni_e_s');
216          end
217
218         function getPlot(mat,num)
219             figure(num);
220             plot(mat.Strain, mat.Stress,'o');
221             hold on;grid on;box on;
222             xlabel('Strain');
223             ylabel('Stress');
224         end
225
226         function finalPlot(mat,num)
227             figure(num);
228             plot(mat.uni_e_s(:,1), mat.uni_e_s(:,2));
229             grid on;box on;
230             title('Strain-Stress relationship');
231             xlabel('Strain');
232             ylabel('Stress');
233         end
234
235     end
236 end
```

I.3.7 Parco di kent modificato

```
1  %% ---------------------------------------------------------------
2  % Copyright 2010 All rights reserved.
3  % Program    : Mercury v.2.01
4  % Email      : kkd0724@hanafos.com
5  % Revision   : November 16, 2010
6  % Written by : Dae-Hung Kang
7  %% ---------------------------------------------------------------
8  classdef ModifiedKentPark < handle
9
10     properties (SetAccess=private)
```

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

```
        % Input variables
        Tag;                    % material tag
        Type;                   % material type
        sc;                     % maximum compressive concrete stress
        ec;                     % compressive strain when compressive stress
    reaches maximum compressive one
        scu;                    % compressive stress at 20 % of maximum
    compressive one
        ecu;                    % compressive strain with respect to
    compressive stress at 20 % of maximum compressive stress
        lambda;                 % historical factor
        st;                     % maximum tensile concrete stress
        Ets;                    % tensile concrete modulus
        rho;                    % density
        % Computed variable with input variables
        InitialEc;              % Initial compressive concrete modulus
        % commit variables
        comStress;              % committed Stress from previous step
        comTangentE;            % committed TangentE from previous step
        comStrain;              % committed Strain from previous step
        comStrain_min;          % committed Strain_min from previous step
        comdelta_Strain_pt;     % committed delta_Strain_pt from previous step
        % update variables
        Stress;                 % uniaxial stress
        TangentE;               % tangent modulus
        Strain;                 % uniaxial stress
        Strain_min;             % minimum stress in analysis of constitutive
    model
        delta_Strain_pt;        % strain with respect to incremental strain at
     previous step
    end

    properties (SetAccess=public)
        uni_e_s
        uni_tangentE
    end

    methods
        function mat = ModifiedKentPark(material)
            mat.Tag    = material.Tag;
            mat.Type   = material.Type;
            mat.sc     = material.sc;
            mat.ec     = material.ec;
            mat.scu    = material.scu;
            mat.ecu    = material.ecu;
            mat.lambda = material.lambda;
            mat.st     = material.st;
            mat.Ets    = material.Ets;
            mat.rho    = material.rho;
        end

```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
        function Initialization(mat)
            mat.Stress          = 0;
            mat.InitialEc       = 2*mat.sc/mat.ec;
            mat.TangentE        = mat.InitialEc;
            mat.Strain          = 0;
            mat.Strain_min      = 0;
            mat.delta_Strain_pt = 0;
        end

        function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use
    in constitutive model
            mat.comStress          = mat.Stress;
            mat.comTangentE        = mat.TangentE;
            mat.comStrain          = mat.Strain;
            mat.comStrain_min      = mat.Strain_min;
            mat.comdelta_Strain_pt = mat.delta_Strain_pt;
        end

        function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert
    all values when failing at current step
            mat.Stress          = mat.comStress;
            mat.TangentE        = mat.comTangentE;
            mat.Strain          = mat.comStrain;
            mat.Strain_min      = mat.comStrain_min;
            mat.delta_Strain_pt = mat.comdelta_Strain_pt;
        end

        function getStrain(mat, TrialStrain)
            mat.Strain = TrialStrain;
        end

        function getTangentE(mat)
            mat.Stress          = mat.comStress;
            mat.TangentE        = mat.TangentE;
            mat.Strain_min      = mat.comStrain_min;
            mat.delta_Strain_pt = mat.comdelta_Strain_pt;

            del_eps = mat.Strain - mat.comStrain;

            if ( abs(del_eps) > 2.2204460492503131e-016 )
                if (mat.Strain < mat.Strain_min)
                    [mat.Stress,mat.TangentE] = mat.compression(mat.Strain);
                    mat.Strain_min = mat.Strain;
                else
                    eps_R = (mat.scu-mat.lambda*mat.InitialEc*mat.ecu)/(mat.
    InitialEc*(1.0-mat.lambda));
                    sig_R = mat.InitialEc * eps_R;
                    [sig_p_min, dummy] = mat.compression(mat.Strain_min);
                    E_R    = (sig_p_min - sig_R)/(mat.Strain_min - eps_R);
                    eps_pt = mat.Strain_min - sig_p_min/E_R;
                    if (mat.Strain < eps_pt)
```

COPIA DI REVISIONE

```
                        sig_min      = sig_p_min + E_R * (mat.Strain - mat.
    Strain_min);
                        sig_max      = E_R * 0.5 * (mat.Strain - eps_pt);
                        mat.Stress   = mat.comStress + mat.InitialEc * del_eps
    ;
                        mat.TangentE = mat.InitialEc;
                        if (mat.Stress < sig_min)
                            mat.Stress   = sig_min;
                            mat.TangentE = E_R;
                        end
                        if (mat.Stress >= sig_max)
                            mat.Stress = sig_max;
                            mat.TangentE = 0.5*E_R;
                        end
                    else
                        eps_pn = eps_pt + mat.delta_Strain_pt;
                        if (mat.Strain <= eps_pn)
                            [sig_cn, mat.TangentE] = mat.tension(mat.
    delta_Strain_pt);
                            if (mat.delta_Strain_pt ~= 0.0)
                                mat.TangentE = sig_cn/mat.delta_Strain_pt;
                            else
                                mat.TangentE = mat.InitialEc;
                            end
                            mat.Stress = mat.TangentE * (mat.Strain - eps_pt);
                        else
                            del_eps = mat.Strain - eps_pt;
                            [mat.Stress, mat.TangentE] = mat.tension(del_eps);
                            mat.delta_Strain_pt = del_eps;
                        end
                    end
                end
            end
        end

        function [sigma, modulus]=compression(mat, epsilon)
            ratLocal = epsilon/mat.ec;
            if (epsilon >= mat.ec)
                sigma   = mat.sc * ratLocal * (2.0 - ratLocal);
                modulus = mat.InitialEc * (1.0 - ratLocal);
            else
                if (epsilon > mat.ecu)
                    sigma   = (mat.scu - mat.sc) * (epsilon - mat.ec) / (mat.
    ecu - mat.ec) + mat.sc;
                    modulus = (mat.scu - mat.sc) / (mat.ecu - mat.ec);
                else
                    sigma   = mat.scu;
                    modulus = 2.2204460492503131e-016;
                end
            end
        end
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
152
153         function [sigma, modulus]=tension(mat, delta_epsilon)
154             eps0 = mat.st/mat.InitialEc;
155             epsu = mat.st * (1.0/mat.Ets + 1.0/mat.InitialEc);
156             if (delta_epsilon <= eps0)
157                 sigma = delta_epsilon * mat.InitialEc;
158                 modulus = mat.InitialEc;
159             else
160                 if (delta_epsilon<=epsu)
161                     sigma   = mat.st - mat.Ets * (delta_epsilon-eps0);
162                     modulus = -mat.Ets;
163                 else
164                     sigma   = 0.0;
165                     modulus = 2.2204460492503131e-016;
166                 end
167             end
168         end
169
170         function getStress(mat)
171             mat.Stress = mat.Stress;
172         end
173
174         function allocateMemory(mat,totStep)
175             mat.uni_e_s(1:totStep,1:2)    = 0;
176         end
177
178         function write2file(mat, fid)
179             fprintf(fid,'%f %f \n', mat.Strain, mat.Stress);
180         end
181
182          function write2mat(mat, fid)
183              uni_e_s = mat.uni_e_s;
184              save(fid, 'uni_e_s');
185          end
186
187         function getPlot(mat,num)
188             figure(num);
189             plot(mat.Strain, mat.Stress,'o');
190             hold on;grid on;box on;
191             title('Strain-Stress relationship');
192             xlabel('Strain');
193             ylabel('Stress');
194         end
195
196         function finalPlot(mat,num)
197             figure(num);
198             plot(mat.uni_e_s(:,1), mat.uni_e_s(:,2));
199             grid on;box on;
200             title('Strain-Stress relationship');
201             xlabel('Strain');
202             ylabel('Stress');
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
        end

    end
end
```

I.3.8 Ibarra

I.3.8.1 Isteresi

```
%% ---------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
% Program    : Mercury v.2.11
% Email      : christopherlsegura@gmail.com
% Revision   : May 10, 2011
% Written by : Christopher Segura
% Filename   : Hysteresis.m
%% ---------------------------------------------------------------
classdef Hysteresis < handle

    properties (SetAccess=protected,Hidden)
        % Input variables
        tag;        % material tag
        type;       % material type
        sy_pos0;    % positive yield stress
        epsy_pos0;  % positive yield strain
        sy_neg0;    % negative yield stress
        epsy_neg0;  % negative yield strain
        cap_pos0;   % positive capping stress
        ecap_pos0;  % positive capping strain
        cap_neg0;   % negative capping stress
        ecap_neg0;  % negative capping strain
        res_pos;    % positive residual stress
        eres_pos0;  % positive residual strain
        res_neg;    % negative residual stress
        eres_neg0;  % negative residual strain
        lamda_hys;  % hysteretic disipation constant
        det_rate;   % hysteresis deterioration exponent "c"
        rho;        % density

    end % properties (SetAccess=protected,Hidden)

    properties (SetAccess=public,GetAccess=public)
        %% Storage for output
        uni_strain_stress   % Storage of uniaxial strain and stress
    end %  properties (SetAccess=public,GetAccess=public)

    properties (SetAccess=public,GetAccess=public,Hidden)
        %% update variables
        stress;     % uniaxial stress
        tanE;       % tangent modulus
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
        strain;     % uniaxial strain
        iniE;       % initial modulus
        E_hrd;      % hardening modulus
        E_sof;      % softening modulus
        sy_pos;     % positive yield stress
        sy_neg;     % negative yield stress
        cap_pos;    % positive capping stress
        cap_neg;    % negative capping stress
        %
        epsy_pos;   % positive yield strain
        epsy_neg;   % negative yield strain
        ecap_pos;   % positive cap strain
        ecap_neg;   % negative cap strain
        eres_pos;   % positive residual strain
        eres_neg;   % negative residual strain
        hys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
        s_ref_pos;  % positive refenerence stress
        s_ref_neg;  % negative refenerence stress
        %
        s_tar_pos;   % positive target stress
        eps_tar_pos; % positive target strain
        s_tar_neg;   % negative target stress
        eps_tar_neg; % negative target strain
        state_flag;  % loading branch
        update_flag; % update loading branch
        reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        enrgy_step;  % step i energy dissipated
        enrgy_prvs;  % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        E_unld;      % unloading stiffness
        E_hrd_pos;   % positive hardening stiffness
        E_hrd_neg;   % negative hardening stiffness
        eps_pt5;     % positive unloading inflection strain
        eps_pt10;    % negative unloading inflection strain
        Beta;        % hysteretic dissipation parameter
        Beta_Unld;   % unloading modulus dissipation parameter
        norm_hys;    % normalized hysteretic energy
        n_exc;       % number excursions/cycles

        %% commit variables
        com_stress;     % committed stress from previous step
        com_tanE;       % committed tanE from previous step
        com_strain;     % committed strain from previous step
        com_sy_pos;     % committed yeild stress
        com_sy_neg;     % committed yeild stress
        com_cap_pos;
        com_cap_neg;
        com_epsy_pos;   % positive yield strain
        com_epsy_neg;   % negative yield strain
        com_ecap_pos;   % positive cap strain
        com_ecap_neg;   % negative cap strain
        com_eres_pos;   % positive residual strain
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
        com_eres_neg;   % negative residual strain
        com_hys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
        com_s_ref_pos;  % positive refenerence stress
        com_s_ref_neg;  % negative refenerence stress
        com_s_tar_pos;   % positive target stress
        com_eps_tar_pos; % positive target strain
        com_s_tar_neg;   % negative target stress
        com_eps_tar_neg; % negative target strain
        com_state_flag;  % loading branch
        com_update_flag; % update loading branch
        com_reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        com_enrgy_step;  % step i energy dissipated
        com_enrgy_prvs;  % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        com_E_unld;      % unloading stiffness
        com_E_hrd_pos;   % positive hardening stiffness
        com_E_hrd_neg;   % negative hardening stiffness
        com_eps_pt5;     % positive unloading inflection strain
        com_eps_pt10;    % negative unloading inflection strain
        com_Beta;
        com_Beta_Unld;
        com_norm_hys;
        com_n_exc;

    end % properties (SetAccess=public,GetAccess=public,Hidden)

    methods (Access=public)
        function mat = Hysteresis(info)
            mat.tag         = info{1};
            mat.type        = info{2};
            mat.sy_pos0     = info{3};
            mat.epsy_pos0   = info{4};
            mat.sy_neg0     = info{5};
            mat.epsy_neg0   = info{6};
            mat.cap_pos0    = info{7};
            mat.ecap_pos0   = info{8};
            mat.cap_neg0    = info{9};
            mat.ecap_neg0   = info{10};
            mat.res_pos     = info{11};
            mat.eres_pos0   = info{12};
            mat.res_neg     = info{13};
            mat.eres_neg0   = info{14};
            mat.lamda_hys   = info{15};
            mat.det_rate    = info{16};
            mat.rho         = info{17};
            mat.Initialization();

        end % function Hysteresis

        function Initialization(mat)
            mat.stress     = 0;
            mat.strain     = 0;
```

COPIA DI REVISIONE

```
            mat.sy_pos     = mat.sy_pos0;
            mat.epsy_pos   = mat.epsy_pos0;
            mat.iniE       = mat.sy_pos0/mat.epsy_pos0;
            mat.tanE       = mat.iniE;
            mat.sy_neg     = mat.sy_neg0;
            mat.epsy_neg   = mat.epsy_neg0;
            mat.cap_pos    = mat.cap_pos0;
            mat.ecap_pos   = mat.ecap_pos0;
            mat.E_hrd      = (mat.cap_pos0 - mat.sy_pos0)/(mat.ecap_pos0 - mat
    .epsy_pos0);
            mat.cap_neg    = mat.cap_neg0;
            mat.ecap_neg   = mat.ecap_neg0;
            mat.eres_pos   = mat.eres_pos0;
            mat.eres_neg   = mat.eres_neg0;
            mat.E_sof      = (mat.res_pos - mat.cap_pos0)/(mat.eres_pos0 - mat
    .ecap_pos0);
            mat.hys_dis_cap = mat.lamda_hys*mat.sy_pos*mat.epsy_pos; %
    hysteretic dissipation capacity
            mat.s_ref_pos = mat.cap_pos - (mat.ecap_pos*mat.E_sof);
            mat.s_ref_neg = mat.cap_neg - (mat.ecap_neg*mat.E_sof);
            % initialize variables
            mat.s_tar_pos = mat.sy_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.epsy_pos;
            mat.s_tar_neg = mat.sy_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.epsy_neg;
            mat.state_flag = 1;
            mat.update_flag = mat.state_flag;
            mat.reversal_flag = 1;
            mat.enrgy_step = 0;  % step i energy dissipated
            mat.enrgy_prvs = 0;  % energy dissipated in previous steps 0 to (i
    -1)
            mat.E_unld = mat.iniE;
            mat.E_hrd_pos = mat.E_hrd;
            mat.E_hrd_neg = mat.E_hrd;
            mat.eps_pt5   = 0;
            mat.eps_pt10  = 0;
            mat.norm_hys  = 0;
            mat.n_exc     = 0;

        end % function Initialization

        function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use
    in constitutive model
            mat.com_stress      = mat.stress;
            mat.com_tanE        = mat.tanE;
            mat.com_strain      = mat.strain;
            mat.com_sy_pos      = mat.sy_pos;
            mat.com_sy_neg      = mat.sy_neg;
            mat.com_cap_pos     = mat.cap_pos;
            mat.com_cap_neg     = mat.cap_neg;
            mat.com_epsy_pos    = mat.epsy_pos;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
            mat.com_epsy_neg    = mat.epsy_neg;
            mat.com_ecap_pos    = mat.ecap_pos;
            mat.com_ecap_neg    = mat.ecap_neg;
            mat.com_eres_pos    = mat.eres_pos;
            mat.com_eres_neg    = mat.eres_neg;
            mat.com_hys_dis_cap = mat.hys_dis_cap;
            mat.com_s_ref_pos   = mat.s_ref_pos;
            mat.com_s_ref_neg   = mat.s_ref_neg;
            mat.com_s_tar_pos   = mat.s_tar_pos;
            mat.com_eps_tar_pos = mat.eps_tar_pos;
            mat.com_s_tar_neg   = mat.s_tar_neg;
            mat.com_eps_tar_neg = mat.eps_tar_neg;
            mat.com_state_flag  = mat.state_flag;
            mat.com_update_flag = mat.update_flag;
            mat.com_reversal_flag = mat.reversal_flag;
            mat.com_enrgy_step  = mat.enrgy_step;
            mat.com_enrgy_prvs  = mat.enrgy_prvs;
            mat.com_E_unld      = mat.E_unld;
            mat.com_E_hrd_pos   = mat.E_hrd_pos;
            mat.com_E_hrd_neg   = mat.E_hrd_neg;
            mat.com_eps_pt5     = mat.eps_pt5;
            mat.com_eps_pt10    = mat.eps_pt10;
            mat.com_norm_hys    = mat.norm_hys;
            mat.com_n_exc       = mat.n_exc;

        end % function commit

        function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert
    all values when failing at current step
            mat.stress      = mat.com_stress;
            mat.tanE        = mat.com_tanE;
            mat.strain      = mat.com_strain;
            mat.sy_pos      = mat.com_sy_pos;
            mat.sy_neg      = mat.com_sy_neg;
            mat.cap_pos     = mat.com_cap_pos;
            mat.cap_neg     = mat.com_cap_neg;
            mat.epsy_pos    = mat.com_epsy_pos;
            mat.epsy_neg    = mat.com_epsy_neg;
            mat.ecap_pos    = mat.com_ecap_pos;
            mat.ecap_neg    = mat.com_ecap_neg;
            mat.eres_pos    = mat.com_eres_pos;
            mat.eres_neg    = mat.com_eres_neg;
            mat.hys_dis_cap = mat.com_hys_dis_cap;
            mat.s_ref_pos   = mat.com_s_ref_pos;
            mat.s_ref_neg   = mat.com_s_ref_neg;
            mat.s_tar_pos   = mat.com_s_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.com_eps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg   = mat.com_s_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.com_eps_tar_neg;
            mat.state_flag  = mat.com_state_flag;
            mat.update_flag = mat.com_update_flag;
```

COPIA DI REVISIONE

```
            mat.reversal_flag = mat.com_reversal_flag;
            mat.enrgy_step  = mat.com_enrgy_step;
            mat.enrgy_prvs  = mat.com_enrgy_prvs;
            mat.E_unld      = mat.com_E_unld;
            mat.E_hrd_pos   = mat.com_E_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg   = mat.com_E_hrd_neg;
            mat.eps_pt5     = mat.com_eps_pt5;
            mat.eps_pt10    = mat.com_eps_pt10;
            mat.norm_hys    = mat.com_norm_hys;
            mat.n_exc       = mat.com_n_exc;
        end % function revert

        function materialStateDetermination(mat, TrialStrain)
            mat.strain     = TrialStrain;
            mat.stress     = mat.com_stress;
            mat.tanE       = mat.com_tanE;
            mat.state_flag = mat.com_update_flag;
            mat.update_flag = mat.com_update_flag;
            mat.reversal_flag = mat.com_reversal_flag;
            mat.enrgy_step  = mat.com_enrgy_step;
            mat.enrgy_prvs  = mat.com_enrgy_prvs;
            mat.sy_pos      = mat.com_sy_pos;
            mat.sy_neg      = mat.com_sy_neg;
            mat.cap_pos     = mat.com_cap_pos;
            mat.cap_neg     = mat.com_cap_neg;
            mat.epsy_pos    = mat.com_epsy_pos;
            mat.epsy_neg    = mat.com_epsy_neg;
            mat.ecap_pos    = mat.com_ecap_pos;
            mat.ecap_neg    = mat.com_ecap_neg;
            mat.eres_pos    = mat.com_eres_pos;
            mat.eres_neg    = mat.com_eres_neg;
            mat.s_ref_pos   = mat.com_s_ref_pos;
            mat.s_ref_neg   = mat.com_s_ref_neg;
            mat.s_tar_pos   = mat.com_s_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.com_eps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg   = mat.com_s_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.com_eps_tar_neg;
            mat.E_unld      = mat.com_E_unld;
            mat.E_hrd_pos   = mat.com_E_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg   = mat.com_E_hrd_neg;
            mat.eps_pt5     = mat.com_eps_pt5;
            mat.eps_pt10    = mat.com_eps_pt10;
            mat.norm_hys    = mat.com_norm_hys;
            mat.n_exc       = mat.com_n_exc;
            %-----------------------------------------------------------------
            del_eps = mat.strain - mat.com_strain;
            %-----------------------------------------------------------------
            if (del_eps >= 0) && (mat.stress >= 0) % positive loading
                if (mat.state_flag == 4) % residual
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PositiveLoading(mat);
                end
            elseif (del_eps < 0) && (mat.stress > 0) % positive unloading
                [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PosUnloading(mat);
            elseif (del_eps <= 0) && (mat.stress <= 0) % negative loading
                if (mat.state_flag == 9) % residual
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegativeLoading(mat);
                end
            elseif (del_eps > 0) && (mat.stress < 0) % negative loading
                [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegUnloading(mat);
            end

            mat.stress = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain - ref_strain);

            if (mat.com_stress/del_eps < 0) % unloading
                if (mat.com_stress/mat.stress > 0) % unloading
                    step = del_eps*(mat.com_stress + 0.5*(mat.stress - mat.
com_stress));
                else % reloading
                    if (mat.stress >= 0)
                        mat.enrgy_step = 0;
                        step = 0.5*(mat.strain - mat.eps_pt10)*mat.stress;
                        mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
                    else
                        mat.enrgy_step = 0;
                        step = 0.5*(mat.strain - mat.eps_pt5)*mat.stress;
                        mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
                    end
                end
            else
                step = del_eps*(mat.com_stress + 0.5*(mat.stress - mat.
com_stress));
            end
            % update energy in excursions
            mat.enrgy_step = mat.enrgy_step + step;
            mat.enrgy_prvs = mat.enrgy_prvs + step;
            % normalized hysteretic energy
            mat.norm_hys = mat.lamda_hys*mat.enrgy_prvs/mat.hys_dis_cap;

        end % function materialStateDetermination


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PositiveLoading(mat)
            switch mat.state_flag
                case -1
```

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

```
                    if (mat.strain < 0)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain < mat.epsy_pos)
                        mat.update_flag = 1;
                    elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 1
                    if (mat.strain < mat.epsy_pos)
                        mat.update_flag = 1;
                    elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 2
                    if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 3
                    if (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 4
                    mat.update_flag = 4;
                case 9
                    mat.update_flag = 9;

                otherwise
                    if (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11;
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2;
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3;
                        else
                            mat.update_flag = 4;
                        end
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
                    end
            end


            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = mat.sy_neg;
                    ref_strain = mat.epsy_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1 % elastic
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 2 % hardening
                    ref_stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3 % softening
                    ref_stress = mat.cap_pos;
                    ref_strain = mat.ecap_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 4 % residual
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 9 % residual
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 11
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos
    - ref_strain);
            end
        end % function PositiveLoading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PosUnloading( mat )

            if (mat.state_flag == 1)
                if (mat.strain > 0)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain > mat.epsy_neg)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
            end
        elseif (mat.state_flag == -1)
            if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                mat.update_flag = -1;
            elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                mat.update_flag = 7;
            elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                mat.update_flag = 8;
            else
                mat.update_flag = 9;
            end
        elseif (mat.state_flag == 9)
            mat.update_flag = 9;
        else
            % update target state
            if (mat.reversal_flag == 1)
                if (mat.com_strain > mat.eps_tar_pos)
                    mat.eps_tar_pos = mat.com_strain;
                    mat.s_tar_pos   = mat.com_stress;
                end
            end
            % determine strain at pt 5
            mat.eps_pt5 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

            if (mat.strain > mat.eps_pt5)
                mat.update_flag = 12; % unloading
            elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                mat.update_flag = 13; % reloading to target
            else
                if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7; % neg hardening
                elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8; % neg softening
                else
                    mat.update_flag = 9; % neg residual
                end
            end
        end

        switch mat.update_flag
            case -1
                ref_stress = 0;
                ref_strain = 0;
                mat.tanE   = mat.iniE;
            case 1
                ref_stress = mat.sy_pos;
                ref_strain = mat.epsy_pos;
                mat.tanE   = mat.iniE;
            case 4
                ref_stress = mat.res_pos;
                ref_strain = mat.eres_pos;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 7
                    ref_stress = mat.s_tar_neg;
                    ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                case 8
                    ref_stress = mat.cap_neg;
                    ref_strain = mat.ecap_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 12
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = mat.E_unld;
                case 13
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = mat.eps_pt5;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.eps_tar_neg
 - ref_strain);
            end

            % update unloading modulus
            if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.
update_flag ~= 9)

                if (mat.com_reversal_flag == 1)
                    % estimate energy in step
                    stress_new = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain -
ref_strain);
                    enrgy_step = (mat.eps_pt5 - mat.com_strain)*(mat.
com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
                end
                % determine strain at pt 5
                mat.eps_pt5 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain > mat.eps_pt5)
                    mat.reversal_flag = -1;
                    mat.update_flag = 12; %unloading
                else
                    mat.reversal_flag = 1;
                    % update cyclic parameters on negative side
                    enrgy_step = (mat.eps_pt5 - mat.com_strain)*(mat.
com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_hrd_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_neg;
                    mat.sy_neg      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_neg;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
                    mat.epsy_neg    = mat.sy_neg/mat.iniE;
                    mat.s_ref_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_neg;
                    mat.ecap_neg    = min(-1.7172e-26,(mat.s_ref_neg - mat.
    sy_neg + (mat.E_hrd_neg*mat.epsy_neg))/(mat.E_hrd_neg - mat.E_sof));
                    mat.cap_neg     = min(-1.2971e-24, mat.s_ref_neg + mat.
    E_sof*mat.ecap_neg);
                    mat.eps_tar_neg = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_neg;
                    mat.eres_neg    =  min(-1.0922e-24,(mat.res_neg - mat.
    s_ref_neg)/mat.E_sof);
                    stress_tar_chk  = mat.s_ref_neg + mat.E_sof*mat.
    eps_tar_neg;
                    if (mat.eps_tar_neg > mat.ecap_neg)
                        mat.s_tar_neg = mat.sy_neg + mat.E_hrd_neg*(mat.
    eps_tar_neg - mat.epsy_neg);
                    else
                        mat.s_tar_neg = stress_tar_chk;
                    end
                    if (mat.s_tar_neg > mat.res_neg)
                        mat.s_tar_neg   = mat.res_neg;
                        mat.eps_tar_neg = mat.eres_neg;
                    end

                    if (mat.strain > mat.eps_pt5)
                        mat.update_flag = 12; %unloading
                    elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13; % reloading to target
                    else
                        if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7; % neg hardening
                        elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8; % neg softening
                        else
                            mat.update_flag = 9; % neg residual
                        end
                    end

                    if (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13; % reloading to target
                    else
                        if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7; % neg hardening
                        elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8; % neg softening
                        else
                            mat.update_flag = 9; % neg residual
                        end
                    end
                end

                switch mat.update_flag
                    case 7
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
                        ref_stress = mat.s_tar_neg;
                        ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                        mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                    case 8
                        ref_stress = mat.cap_neg;
                        ref_strain = mat.ecap_neg;
                        mat.tanE   = mat.E_sof;
                    case 9
                        ref_stress = mat.res_neg;
                        ref_strain = mat.eres_neg;
                        mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                    case 12
                        ref_stress = mat.com_stress;
                        ref_strain = mat.com_strain;
                        mat.tanE   = mat.E_unld;
                    case 13
                        ref_stress = 0;
                        ref_strain = mat.eps_pt5;
                        mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.
    eps_tar_neg - ref_strain);
                end
            end
        end % function PosUnloading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegativeLoading( mat )

            switch mat.state_flag
                case 1
                    if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case -1
                    if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 4
                    mat.update_flag = 4;
                case 7
```

COPIA DI REVISIONE

```
                    if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 8
                    if (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 9
                    mat.update_flag = 9;

                otherwise
                    if (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13;
                    else
                        if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7;
                        elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8;
                        else
                            mat.update_flag = 9;
                        end
                    end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 7
                    ref_stress = mat.s_tar_neg;
                    ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                case 8
                    ref_stress = mat.cap_neg;
                    ref_strain = mat.ecap_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
                case 13
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.eps_tar_neg
    - ref_strain);
            end
        end % function NegativeLoading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegUnloading( mat )

            if (mat.state_flag == -1)
                if (mat.strain < 0)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 1)
                if (mat.strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 4)
                mat.update_flag = 4;
            else
                % update target state
                if (mat.reversal_flag == 1)
                    if (mat.com_strain < mat.eps_tar_neg)
                        mat.eps_tar_neg = mat.com_strain;
                        mat.s_tar_neg   = mat.com_stress;
                    end
                end
                % determine strain at pt 10
                mat.eps_pt10 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain < mat.eps_pt10)
                    mat.update_flag = 10; % unloading
                else
                    if (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2;
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3;
                        else
                            mat.update_flag = 4;
                        end
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = mat.sy_neg;
                    ref_strain = mat.epsy_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 2
                    ref_stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3
                    ref_stress = mat.cap_pos;
                    ref_strain = mat.ecap_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 10
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = mat.E_unld;
                case 11
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = mat.eps_pt10;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos
    - ref_strain);

            end

            % update unloading modulus
```

COPIA DI REVISIONE

```
            if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.update_flag ~= 4)
                if (mat.com_reversal_flag == 1)
                    % estimate energy in step
                    stress_new = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain - ref_strain);
                    enrgy_step = (mat.eps_pt10 - mat.com_strain)*(mat.com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
                end
                % determine strain at pt 10
                mat.eps_pt10 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain < mat.eps_pt10)
                    mat.reversal_flag = -1;
                    mat.update_flag = 10; % unloading
                else
                    mat.reversal_flag = 1;
                    % update cyclic parameters on positive side
                    enrgy_step = (mat.eps_pt10 - mat.com_strain)*(mat.com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_hrd_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_pos;
                    mat.sy_pos      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_pos;
                    mat.epsy_pos    = mat.sy_pos/mat.iniE;
                    mat.s_ref_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_pos;
                    mat.ecap_pos    = max(1.12961e-26,(mat.s_ref_pos - mat.sy_pos + (mat.E_hrd_pos*mat.epsy_pos))/(mat.E_hrd_pos - mat.E_sof));
                    mat.cap_pos     = max(1.09123e-26, mat.s_ref_pos + mat.E_sof*mat.ecap_pos);
                    mat.eps_tar_pos = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_pos;
                    mat.eres_pos    = max(1.95315e-24,(mat.res_pos - mat.s_ref_pos)/mat.E_sof);
                    stress_tar_chk  = mat.s_ref_pos + mat.E_sof*mat.eps_tar_pos;
                    if (mat.eps_tar_pos < mat.ecap_pos)
                        mat.s_tar_pos = mat.sy_pos + mat.E_hrd_pos*(mat.eps_tar_pos - mat.epsy_pos);
                    else
                        mat.s_tar_pos = stress_tar_chk;
                    end
                    if (mat.s_tar_pos < mat.res_pos)
                        mat.s_tar_pos   = mat.res_pos;
                        mat.eps_tar_pos = mat.eres_pos;
                    end

                    if (mat.strain < mat.eps_pt10)
                        mat.update_flag = 10; % unloading
                    elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11; % reloading to target
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
826                     else
827                         if (mat.strain < mat.ecap_pos)
828                             mat.update_flag = 2; % hardening
829                         elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
830                             mat.update_flag = 3; % softening
831                         else
832                             mat.update_flag = 4; % residual
833                         end
834                     end
835 
836                     if (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
837                         mat.update_flag = 11; % reloading to target
838                     else
839                         if (mat.strain < mat.ecap_pos)
840                             mat.update_flag = 2; % hardening
841                         elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
842                             mat.update_flag = 3; % softening
843                         else
844                             mat.update_flag = 4; % residual
845                         end
846                     end
847                 end
848 
849                 switch mat.update_flag
850                     case 2
851                         ref_stress = mat.s_tar_pos;
852                         ref_strain = mat.eps_tar_pos;
853                         mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
854                     case 3
855                         ref_stress = mat.cap_pos;
856                         ref_strain = mat.ecap_pos;
857                         mat.tanE   = mat.E_sof;
858                     case 4
859                         ref_stress = mat.res_pos;
860                         ref_strain = mat.eres_pos;
861                         mat.tanE   = mat.iniE/100000;
862                     case 10
863                         ref_stress = mat.com_stress;
864                         ref_strain = mat.com_strain;
865                         mat.tanE   = mat.E_unld;
866                     case 11
867                         ref_stress = 0;
868                         ref_strain = mat.eps_pt10;
869                         mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.
    eps_tar_pos - ref_strain);
870                 end
871             end
872         end % function NegUnloading
873 
874 
875         function [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step )
```


I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

```
876
877             % Note: for unloading modulus E_t = 2*E_t
878             E_t     = mat.hys_dis_cap;
879             E_step  = enrgy_step;
880             c       = mat.det_rate;
881             E_pre   = mat.enrgy_prvs;
882
883             mat.Beta = ((E_step + mat.enrgy_step)/(E_t - E_pre))^c;
884             mat.Beta_Unld = ((E_step + mat.enrgy_step)/(2*E_t - E_pre))^c;
885
886             if (mat.Beta > 1)
887                 mat.Beta = 0.999;
888                 display('***************************')
889                 display('Hysteretic Energy Exhausted')
890                 display('***************************')
891             elseif (mat.Beta < 0)
892                 mat.Beta = 0.999;
893                 display('***************************')
894                 display('Hysteretic Energy Exhausted')
895                 display('***************************')
896             end
897             if (mat.Beta_Unld > 1)
898                 mat.Beta_Unld = 0.999;
899                 display('***************************')
900                 display('Hysteretic Energy Exhausted')
901                 display('***************************')
902             elseif (mat.Beta_Unld < 0)
903                 mat.Beta_Unld = 0.999;
904                 display('***************************')
905                 display('Hysteretic Energy Exhausted')
906                 display('***************************')
907             end
908
909         end % function BetaFunc
910
911
912         function allocateMemory(mat,totStep)
913             mat.uni_strain_stress(1:totStep,1:2) = 0;
914         end % function allocateMemory
915
916         function write2storage(mat,istep)
917             mat.uni_strain_stress(istep, 1:2) = [mat.strain, mat.stress];
918         end % function write2storage
919
920         function write2file(mat, fid)
921             fprintf(fid,'%f %f \n', mat.strain, mat.stress);
922         end % function write2file
923
924         function write2mat(mat, fid)
925             uni_strain_stress = mat.uni_strain_stress; %#ok<*NASGU>
926             save(fid, 'uni_strain_stress');
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
        end % function write2mat

        function getPlot(mat, unit, num)
            figure(num);
            plot(mat.strain, mat.stress,'-o');
            hold on;grid on;box on;
            title(['Uniaxial strain-stress of ',mat.type]);
            xlabel(['strain (',unit{1,2},'/',unit{1,2},')']);
            ylabel(['stress (',unit{1,1},'/',unit{1,2},'^2']);
        end % function getPlot

        function finalPlot(mat, unit, num)
            figure(num);
            plot(mat.uni_strain_stress(:,1), mat.uni_strain_stress(:,2));
            grid on;box on;
            title(['Uniaxial strain-stress of ',mat.type]);
            xlabel(['strain (',unit{1,2},'/',unit{1,2},')']);
            ylabel(['stress (',unit{1,1},'/',unit{1,2},'^2']);
        end % function finalPlot

    end % methods

end % classdef
```

I.3.8.2 Pizzico di isteresi

```
%% ---------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
% Program    : Mercury v.2.11
% Email      : christopherlsegura@gmail.com
% Revision   : May 10, 2011
% Written by : Christopher Segura
% Filename   : HysteresisPinch.m
%% ---------------------------------------------------------------
classdef HysteresisPinch < handle

    properties (SetAccess=protected,Hidden)
        % Input variables
        tag;            % material tag
        type;           % material type
        sy_pos0;        % positive yield stress
        epsy_pos0;      % positive yield strain
        sy_neg0;        % negative yield stress
        epsy_neg0;      % negative yield strain
        cap_pos0;       % positive capping stress
        ecap_pos0;      % positive capping strain
        cap_neg0;       % negative capping stress
        ecap_neg0;      % negative capping strain
        res_pos;        % positive residual stress
        eres_pos0;      % positive residual strain
```

COPIA DI REVISIONE

```
        res_neg;        % negative residual stress
        eres_neg0;      % negative residual strain
        lamda_hys;      % hysteretic disipation constant
        det_rate;       % hysteresis deterioration exponent "c"
        kappa_f;        % stress pinching break point factor
        kappa_d;        % strain pinching break point factor
        rho;            % density

    end % properties (SetAccess=protected,Hidden)

    properties (SetAccess=public,GetAccess=public)
        %% Storage for output
        uni_strain_stress   % Storage of uniaxial strain and stress
    end %  properties (SetAccess=public,GetAccess=public)

    properties (SetAccess=public,GetAccess=public,Hidden)
        %% update variables
        stress;         % uniaxial stress
        tanE;           % tangent modulus
        strain;         % uniaxial strain
        iniE;           % initial modulus
        E_hrd;          % hardening modulus
        E_sof;          % softening modulus
        sy_pos;         % positive yield stress
        sy_neg;         % negative yield stress
        cap_pos;        % positive capping stress
        cap_neg;        % negative capping stress
        epsy_pos;       % positive yield strain
        epsy_neg;       % negative yield strain
        ecap_pos;       % positive cap strain
        ecap_neg;       % negative cap strain
        eres_pos;       % positive residual strain
        eres_neg;       % negative residual strain
        hys_dis_cap;    % hysteretic dissipation capacity
        s_ref_pos;      % positive refenerence stress
        s_ref_neg;      % negative refenerence stress
        s_tar_pos;      % positive target stress
        eps_tar_pos;    % positive target strain
        s_tar_neg;      % negative target stress
        eps_tar_neg;    % negative target strain
        state_flag;     % loading branch
        update_flag;    % update loading branch
        reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        enrgy_step;     % step i energy dissipated
        enrgy_prvs;     % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        E_unld;         % unloading stiffness
        E_hrd_pos;      % positive hardening stiffness
        E_hrd_neg;      % negative hardening stiffness
        eps_pt5;        % positive unloading inflection strain
        eps_pt10;       % negative unloading inflection strain
        Beta;           % hysteretic dissipation parameter
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
        Beta_Unld;      % unloading modulus dissipation parameter
        s_bpref_pos;    % positive break point reference stress
        s_bpref_neg;    % negative break point reference stress
        eps_bp_pos;     % positive break point strain
        eps_bp_neg;     % negative break point strain
        s_bp_pos;       % positive break point stress
        s_bp_neg;       % negative break point stress
        norm_hys;       % normalized hysteretic energy
        n_exc;          % number excursions/cycles
        %% commit variables
        % inputs
        com_stress;     % committed stress from previous step
        com_tanE;       % committed tanE from previous step
        com_strain;     % committed strain from previous step
        com_sy_pos;     % committed yeild stress
        com_sy_neg;     % committed yeild stress
        com_cap_pos;
        com_cap_neg;
        com_epsy_pos;   % positive yield strain
        com_epsy_neg;   % negative yield strain
        com_ecap_pos;   % positive cap strain
        com_ecap_neg;   % negative cap strain
        com_eres_pos;   % positive residual strain
        com_eres_neg;   % negative residual strain
        com_hys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
        com_s_ref_pos;  % positive refenerence stress
        com_s_ref_neg;  % negative refenerence stress
        com_s_tar_pos;   % positive target stress
        com_eps_tar_pos; % positive target strain
        com_s_tar_neg;   % negative target stress
        com_eps_tar_neg; % negative target strain
        com_state_flag;  % loading branch
        com_update_flag; % update loading branch
        com_reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        com_enrgy_step;  % step i energy dissipated
        com_enrgy_prvs;  % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        com_E_unld;      % unloading stiffness
        com_E_hrd_pos;   % positive hardening stiffness
        com_E_hrd_neg;   % negative hardening stiffness
        com_eps_pt5;     % positive unloading inflection strain
        com_eps_pt10;    % negative unloading inflection strain
        com_Beta;
        com_Beta_Unld;
        com_s_bpref_pos;
        com_s_bpref_neg;
        com_eps_bp_pos;
        com_eps_bp_neg;
        com_s_bp_pos;
        com_s_bp_neg;
        com_norm_hys;
        com_n_exc;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
    end % properties (SetAccess=public,GetAccess=public,Hidden)

    methods (Access=public)
        function mat = HysteresisPinch(info)
            mat.tag         = info{1};
            mat.type        = info{2};
            mat.sy_pos0     = info{3};
            mat.epsy_pos0   = info{4};
            mat.sy_neg0     = info{5};
            mat.epsy_neg0   = info{6};
            mat.cap_pos0    = info{7};
            mat.ecap_pos0   = info{8};
            mat.cap_neg0    = info{9};
            mat.ecap_neg0   = info{10};
            mat.res_pos     = info{11};
            mat.eres_pos0   = info{12};
            mat.res_neg     = info{13};
            mat.eres_neg0   = info{14};
            mat.lamda_hys   = info{15};
            mat.det_rate    = info{16};
            mat.kappa_f     = info{17};
            mat.kappa_d     = info{18};
            mat.rho         = info{19};
            mat.Initialization();

        end % function HysteresisPinch

        function Initialization(mat)
            mat.stress      = 0;
            mat.strain      = 0;
            mat.sy_pos      = mat.sy_pos0;
            mat.epsy_pos    = mat.epsy_pos0;
            mat.iniE        = mat.sy_pos0/mat.epsy_pos0;
            mat.tanE        = mat.iniE;
            mat.sy_neg      = mat.sy_neg0;
            mat.epsy_neg    = mat.epsy_neg0;
            mat.cap_pos     = mat.cap_pos0;
            mat.ecap_pos    = mat.ecap_pos0;
            mat.E_hrd       = (mat.cap_pos0 - mat.sy_pos0)/(mat.ecap_pos0 -
mat.epsy_pos0);
            mat.cap_neg     = mat.cap_neg0;
            mat.ecap_neg    = mat.ecap_neg0;
            mat.eres_pos    = mat.eres_pos0;
            mat.eres_neg    = mat.eres_neg0;
            mat.E_sof       = (mat.res_pos - mat.cap_pos0)/(mat.eres_pos0 -
mat.ecap_pos0);
            mat.hys_dis_cap = mat.lamda_hys*mat.sy_pos*mat.epsy_pos; %
hysteretic dissipation capacity
            mat.s_ref_pos   = mat.cap_pos - (mat.ecap_pos*mat.E_sof);
            mat.s_ref_neg   = mat.cap_neg - (mat.ecap_neg*mat.E_sof);
            % initialize variables
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
            mat.s_tar_pos       = mat.sy_pos;
            mat.eps_tar_pos     = mat.epsy_pos;
            mat.s_tar_neg       = mat.sy_neg;
            mat.eps_tar_neg     = mat.epsy_neg;
            mat.state_flag      = 1;
            mat.update_flag     = mat.state_flag;
            mat.reversal_flag   = 1;
            mat.enrgy_step      = 0;  % step i energy dissipated
            mat.enrgy_prvs      = 0;  % energy dissipated in previous steps 0
    to (i-1)
            mat.E_unld          = mat.iniE;
            mat.E_hrd_pos       = mat.E_hrd;
            mat.E_hrd_neg       = mat.E_hrd;
            mat.eps_pt5         = 0;
            mat.eps_pt10        = 0;
            mat.s_bpref_pos     = mat.kappa_f*mat.s_tar_pos;
            mat.s_bpref_neg     = mat.kappa_f*mat.s_tar_neg;
            mat.eps_bp_pos      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_pos;
            mat.eps_bp_neg      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_neg;
            mat.s_bp_pos        = ((mat.eps_bp_pos - mat.eps_pt10)/(mat.
    eps_tar_pos - mat.eps_pt10))*mat.s_bpref_pos;
            mat.s_bp_neg        = ((mat.eps_bp_neg - mat.eps_pt5)/(mat.
    eps_tar_neg - mat.eps_pt5))*mat.s_bpref_neg;
            mat.norm_hys        = 0;
            mat.n_exc           = 0;

        end % function Initialization

        function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use
    in constitutive model
            mat.com_stress          = mat.stress;
            mat.com_tanE            = mat.tanE;
            mat.com_strain          = mat.strain;
            mat.com_sy_pos          = mat.sy_pos;
            mat.com_sy_neg          = mat.sy_neg;
            mat.com_cap_pos         = mat.cap_pos;
            mat.com_cap_neg         = mat.cap_neg;
            mat.com_epsy_pos        = mat.epsy_pos;
            mat.com_epsy_neg        = mat.epsy_neg;
            mat.com_ecap_pos        = mat.ecap_pos;
            mat.com_ecap_neg        = mat.ecap_neg;
            mat.com_eres_pos        = mat.eres_pos;
            mat.com_eres_neg        = mat.eres_neg;
            mat.com_hys_dis_cap     = mat.hys_dis_cap;
            mat.com_s_ref_pos       = mat.s_ref_pos;
            mat.com_s_ref_neg       = mat.s_ref_neg;
            mat.com_s_tar_pos       = mat.s_tar_pos;
            mat.com_eps_tar_pos     = mat.eps_tar_pos;
            mat.com_s_tar_neg       = mat.s_tar_neg;
            mat.com_eps_tar_neg     = mat.eps_tar_neg;
            mat.com_state_flag      = mat.state_flag;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
            mat.com_update_flag     = mat.update_flag;
            mat.com_reversal_flag   = mat.reversal_flag;
            mat.com_enrgy_step      = mat.enrgy_step;
            mat.com_enrgy_prvs      = mat.enrgy_prvs;
            mat.com_E_unld          = mat.E_unld;
            mat.com_E_hrd_pos       = mat.E_hrd_pos;
            mat.com_E_hrd_neg       = mat.E_hrd_neg;
            mat.com_eps_pt5         = mat.eps_pt5;
            mat.com_eps_pt10        = mat.eps_pt10;
            mat.com_s_bpref_pos     = mat.s_bpref_pos;
            mat.com_s_bpref_neg     = mat.s_bpref_neg;
            mat.com_eps_bp_pos      = mat.eps_bp_pos;
            mat.com_eps_bp_neg      = mat.eps_bp_neg;
            mat.com_s_bp_pos        = mat.s_bp_pos;
            mat.com_s_bp_neg        = mat.s_bp_neg;
            mat.com_norm_hys    = mat.norm_hys;
            mat.com_n_exc       = mat.n_exc;

        end % function commit

        function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert
    all values when failing at current step
            mat.stress      = mat.com_stress;
            mat.tanE        = mat.com_tanE;
            mat.strain      = mat.com_strain;
            mat.sy_pos      = mat.com_sy_pos;
            mat.sy_neg      = mat.com_sy_neg;
            mat.cap_pos     = mat.com_cap_pos;
            mat.cap_neg     = mat.com_cap_neg;
            mat.epsy_pos    = mat.com_epsy_pos;
            mat.epsy_neg    = mat.com_epsy_neg;
            mat.ecap_pos    = mat.com_ecap_pos;
            mat.ecap_neg    = mat.com_ecap_neg;
            mat.eres_pos    = mat.com_eres_pos;
            mat.eres_neg    = mat.com_eres_neg;
            mat.hys_dis_cap = mat.com_hys_dis_cap;
            mat.s_ref_pos   = mat.com_s_ref_pos;
            mat.s_ref_neg   = mat.com_s_ref_neg;
            mat.s_tar_pos   = mat.com_s_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.com_eps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg   = mat.com_s_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.com_eps_tar_neg;
            mat.state_flag  = mat.com_state_flag;
            mat.update_flag = mat.com_update_flag;
            mat.reversal_flag = mat.com_reversal_flag;
            mat.enrgy_step  = mat.com_enrgy_step;
            mat.enrgy_prvs  = mat.com_enrgy_prvs;
            mat.E_unld      = mat.com_E_unld;
            mat.E_hrd_pos   = mat.com_E_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg   = mat.com_E_hrd_neg;
            mat.eps_pt5     = mat.com_eps_pt5;
```

COPIA DI REVISIONE

```
            mat.eps_pt10    = mat.com_eps_pt10;
            mat.s_bpref_pos   = mat.com_s_bpref_pos;
            mat.s_bpref_neg   = mat.com_s_bpref_neg;
            mat.eps_bp_pos    = mat.com_eps_bp_pos;
            mat.eps_bp_neg    = mat.com_eps_bp_neg;
            mat.s_bp_pos      = mat.com_s_bp_pos;
            mat.s_bp_neg      = mat.com_s_bp_neg;
            mat.norm_hys    = mat.com_norm_hys;
            mat.n_exc       = mat.com_n_exc;

        end % function revert

        function materialStateDetermination(mat, TrialStrain)
            mat.strain          = TrialStrain;
            mat.stress          = mat.com_stress;
            mat.tanE            = mat.com_tanE;
            mat.state_flag      = mat.com_update_flag;
            mat.update_flag     = mat.com_update_flag;
            mat.reversal_flag   = mat.com_reversal_flag;
            mat.enrgy_prvs      = mat.com_enrgy_step;
            mat.E_unld          = mat.com_E_unld;
            mat.sy_pos          = mat.com_sy_pos;
            mat.sy_neg          = mat.com_sy_neg;
            mat.cap_pos         = mat.com_cap_pos;
            mat.cap_neg         = mat.com_cap_neg;
            mat.epsy_pos        = mat.com_epsy_pos;
            mat.epsy_neg        = mat.com_epsy_neg;
            mat.ecap_pos        = mat.com_ecap_pos;
            mat.ecap_neg        = mat.com_ecap_neg;
            mat.eres_pos        = mat.com_eres_pos;
            mat.eres_neg        = mat.com_eres_neg;
            mat.s_ref_pos       = mat.com_s_ref_pos;
            mat.s_ref_neg       = mat.com_s_ref_neg;
            mat.s_tar_pos       = mat.com_s_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos     = mat.com_eps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg       = mat.com_s_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg     = mat.com_eps_tar_neg;
            mat.enrgy_step      = mat.com_enrgy_step;
            mat.E_unld          = mat.com_E_unld;
            mat.E_hrd_pos       = mat.com_E_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg       = mat.com_E_hrd_neg;
            mat.eps_pt5         = mat.com_eps_pt5;
            mat.eps_pt10        = mat.com_eps_pt10;
            mat.s_bpref_pos     = mat.com_s_bpref_pos;
            mat.s_bpref_neg     = mat.com_s_bpref_neg;
            mat.eps_bp_pos      = mat.com_eps_bp_pos;
            mat.eps_bp_neg      = mat.com_eps_bp_neg;
            mat.s_bp_pos        = mat.com_s_bp_pos;
            mat.s_bp_neg        = mat.com_s_bp_neg;
            mat.norm_hys    = mat.com_norm_hys;
            mat.n_exc       = mat.com_n_exc;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
            %-------------------------------------------------------------
            del_eps = mat.strain - mat.com_strain;
            %-------------------------------------------------------------
            if (del_eps >= 0) && (mat.stress >= 0) % positive loading
                if (mat.state_flag == 4)
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PositiveLoading(mat);
                end

            elseif (del_eps < 0) && (mat.stress > 0) % positive unloading
                [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PosUnloading(mat);

            elseif (del_eps <= 0) && (mat.stress <= 0) % negative loading
                if (mat.state_flag == 9)
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegativeLoading(mat);
                end

            elseif (del_eps > 0) && (mat.stress < 0) % negative loading
                [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegUnloading(mat);

            end

            mat.stress = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain - ref_strain);

            if (mat.com_stress/del_eps < 0) % unloading
                if (mat.com_stress/mat.stress > 0) % unloading
                    step = del_eps*(mat.com_stress + 0.5*(mat.stress - mat.
com_stress));
                else % reloading
                    if (mat.stress >= 0)
                        mat.enrgy_step = 0;
                        step = 0.5*(mat.strain - mat.eps_pt10)*mat.stress;
                        mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
                    else
                        mat.enrgy_step = 0;
                        step = 0.5*(mat.strain - mat.eps_pt5)*mat.stress;
                        mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
                    end
                end
            else
                step = del_eps*(mat.com_stress + 0.5*(mat.stress - mat.
com_stress));
            end
            % update energy in excursions
```

COPIA DI REVISIONE

```
            mat.enrgy_step = mat.enrgy_step + step;
            mat.enrgy_prvs = mat.enrgy_prvs + step;
            % normalized hysteretic energy
            mat.norm_hys = mat.lamda_hys*mat.enrgy_prvs/mat.hys_dis_cap;

        end % function materialStateDetermination


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PositiveLoading(mat)

            switch mat.state_flag
                case -1
                    if (mat.strain < 0)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain < mat.epsy_pos)
                        mat.update_flag = 1;
                    elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 1
                    if (mat.strain < mat.epsy_pos)
                        mat.update_flag = 1;
                    elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 2
                    if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 3
                    if (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 4
                    mat.update_flag = 4;
                case 9
                    mat.update_flag = 9;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
423
424                 otherwise
425                     if (mat.strain < mat.eps_bp_pos) && (mat.eps_pt10 < mat.
    eps_bp_pos)
426                         mat.update_flag = 21;
427                     elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
428                         mat.update_flag = 11;
429                     else
430                         if (mat.strain < mat.ecap_pos)
431                             mat.update_flag = 2;
432                         elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
433                             mat.update_flag = 3;
434                         else
435                             mat.update_flag = 4;
436                         end
437                     end
438             end
439
440             switch mat.update_flag
441                 case -1 % elastic
442                     ref_stress = mat.sy_neg;
443                     ref_strain = mat.epsy_neg;
444                     mat.tanE   = mat.iniE;
445                 case 1 % elastic
446                     ref_stress = 0;
447                     ref_strain = 0;
448                     mat.tanE   = mat.iniE;
449                 case 2 % hardening
450                     ref_stress = mat.s_tar_pos;
451                     ref_strain = mat.eps_tar_pos;
452                     mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
453                 case 3 % softening
454                     ref_stress = mat.cap_pos;
455                     ref_strain = mat.ecap_pos;
456                     mat.tanE   = mat.E_sof;
457                 case 4 % residual
458                     ref_stress = mat.res_pos;
459                     ref_strain = mat.eres_pos;
460                     mat.tanE   = mat.iniE/100000;
461                 case 9 % residual
462                     ref_stress = mat.res_neg;
463                     ref_strain = mat.eres_neg;
464                     mat.tanE   = mat.iniE/100000;
465                 case 11 % loading to target state
466                     ref_stress = mat.com_stress;
467                     ref_strain = mat.com_strain;
468                     mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos
    - ref_strain);
469                 case 21 % loading to break point
470                     ref_stress = mat.com_stress;
471                     ref_strain = mat.com_strain;
```

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

```
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_pos - ref_stress)/(mat.eps_bp_pos - ref_strain);
            end
        end % function PositiveLoading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PosUnloading( mat )

            if (mat.state_flag == 1)
                if (mat.strain > 0)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain > mat.epsy_neg)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
            elseif (mat.state_flag == -1)
                if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
            elseif (mat.state_flag == 9)
                mat.update_flag = 9;
            else
                % update target state if reversal
                if (mat.reversal_flag == 1)
                    if (mat.com_strain > mat.eps_tar_pos)
                        mat.eps_tar_pos = mat.com_strain;
                        mat.s_tar_pos   = mat.com_stress;
                    end
                end
                % determine strain at pt 5
                mat.eps_pt5 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain > mat.eps_pt5)
                    mat.update_flag = 12; % unloading
                elseif (mat.strain > mat.eps_bp_neg) && (mat.eps_pt5 > mat.eps_bp_neg)
                    mat.update_flag = 23; % reloading to break point
                elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                    mat.update_flag = 13; % reloading to target
                else
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
                    if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7; % neg hardening
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8; % neg softening
                    else
                        mat.update_flag = 9; % neg residual
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1
                    ref_stress = mat.sy_pos;
                    ref_strain = mat.epsy_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 7
                    ref_stress = mat.s_tar_neg;
                    ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                case 8
                    ref_stress = mat.cap_neg;
                    ref_strain = mat.ecap_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 12
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = mat.E_unld;
                case 13
                    ref_stress = mat.s_bp_neg;
                    ref_strain = mat.eps_bp_neg;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.eps_tar_neg
    - ref_strain);
                case 23
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = mat.eps_pt5;
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_neg - ref_stress)/(mat.eps_bp_neg -
    ref_strain);
            end

```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
570             if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.
    update_flag ~= 9)
571                 if (mat.com_reversal_flag == 1)
572                     % estimate energy in step
573                     stress_new = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain -
    ref_strain);
574                     enrgy_step = (mat.eps_pt5 - mat.com_strain)*(mat.
    com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
575                     % update unloading modulus
576                     [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
577                     mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
578                 end
579                 % determine strain at pt 5
580                 mat.eps_pt5 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;
581 
582                 if (mat.strain > mat.eps_pt5)
583                     % update flag
584                     mat.reversal_flag = -1;
585                     mat.update_flag = 12; %unloading
586                 else
587                     % update reversal flag
588                     mat.reversal_flag = 1;
589                     % update flag to signal initial directional loadin
590                     if (mat.eps_tar_neg == mat.epsy_neg)
591                        targ_flag = 1;
592                     else
593                         targ_flag = 0;
594                     end
595                     % update cyclic parameters on negative side
596                     % Note: values must remain negative although exhaustion
597                     % of hysteretic energy may make them positive
598                     enrgy_step = (mat.eps_pt5 - mat.com_strain)*(mat.
    com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
599                     [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
600                     mat.E_hrd_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_neg;
601                     mat.sy_neg      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_neg;
602                     mat.epsy_neg    = mat.sy_neg/mat.iniE;
603                     mat.s_ref_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_neg;
604                     mat.ecap_neg    = min(-1.8912e-26,(mat.s_ref_neg - mat.
    sy_neg + (mat.E_hrd_neg*mat.epsy_neg))/(mat.E_hrd_neg - mat.E_sof));
605                     mat.cap_neg     = min(-1.1272e-24,mat.s_ref_neg + mat.
    E_sof*mat.ecap_neg);
606                     mat.eps_tar_neg = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_neg;
607                     mat.eres_neg    = min(-1.8912e-24,(mat.res_neg - mat.
    s_ref_neg)/mat.E_sof);
608                     % adjust target values if necessary
609                     stress_tar_chk  = mat.s_ref_neg + mat.E_sof*mat.
    eps_tar_neg;
610                     if (mat.eps_tar_neg > mat.ecap_neg)
611                         mat.s_tar_neg = mat.sy_neg + mat.E_hrd_neg*(mat.
    eps_tar_neg - mat.epsy_neg);
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
                    else
                        mat.s_tar_neg = stress_tar_chk;
                    end
                    if (mat.s_tar_neg > mat.res_neg)
                        mat.s_tar_neg   = mat.res_neg;
                        mat.eps_tar_neg = mat.eres_neg;
                    end
                    % determine break-point
                    mat.eps_bp_neg      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_neg;
                    if (targ_flag == 1)
                        mat.eps_bp_neg      = 0; % initial directional loading
                    end
                    mat.s_bpref_neg     = mat.kappa_f*mat.s_tar_neg;
                    mat.s_bp_neg        = ((mat.eps_bp_neg - mat.eps_pt5)/(mat
    .eps_tar_neg - mat.eps_pt5))*mat.s_bpref_neg;

                    if (mat.strain > mat.eps_bp_neg) && (mat.eps_pt5 > mat.
    eps_bp_neg)
                        mat.update_flag = 23; % reloading to break point
                    elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13; % reloading to target
                    else
                        if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7; % neg hardening
                        elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8; % neg softening
                        else
                            mat.update_flag = 9; % neg residual
                        end
                    end
                end

                switch mat.update_flag
                    case 7
                        ref_stress = mat.s_tar_neg;
                        ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                        mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                    case 8
                        ref_stress = mat.cap_neg;
                        ref_strain = mat.ecap_neg;
                        mat.tanE   = mat.E_sof;
                    case 9
                        ref_stress = mat.res_neg;
                        ref_strain = mat.eres_neg;
                        mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                    case 12
                        ref_stress = mat.com_stress;
                        ref_strain = mat.com_strain;
                        mat.tanE   = mat.E_unld;
                    case 13
                        ref_stress = mat.s_bp_neg;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
                        ref_strain = mat.eps_bp_neg;
                        mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.
    eps_tar_neg - ref_strain);
                    case 23
                        ref_stress = 0;
                        ref_strain = mat.eps_pt5;
                        mat.tanE   = (mat.s_bp_neg - ref_stress)/(mat.
    eps_bp_neg - ref_strain);
                end
            end
        end % function PosUnloading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegativeLoading( mat )

            switch mat.state_flag
                case 1
                    if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case -1
                    if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 4
                    mat.update_flag = 4;
                case 7
                    if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 8
                    if (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
                    end
                case 9
                    mat.update_flag = 9;

                otherwise
                    if (mat.strain > mat.eps_bp_neg) && (mat.eps_pt5 > mat.
    eps_bp_neg)
                        mat.update_flag = 23;
                    elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13;
                    else
                        if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7;
                        elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8;
                        else
                            mat.update_flag = 9;
                        end
                    end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 7
                    ref_stress = mat.s_tar_neg;
                    ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                case 8
                    ref_stress = mat.cap_neg;
                    ref_strain = mat.ecap_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 13
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.eps_tar_neg
     - ref_strain);
                case 23
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_neg - ref_stress)/(mat.eps_bp_neg -
    ref_strain);
            end
        end % function NegativeLoading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegUnloading( mat )

            if (mat.state_flag == -1)
                if (mat.strain < 0)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 1)
                if (mat.strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 4)
                mat.update_flag = 4;
            else
                % update target state
                if (mat.reversal_flag == 1)
                    if (mat.com_strain < mat.eps_tar_neg)
                        mat.eps_tar_neg = mat.com_strain;
                        mat.s_tar_neg   = mat.com_stress;
                    end
                end
                % determine strain at pt 10
                mat.eps_pt10 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain < mat.eps_pt10)
                    mat.update_flag = 10; % unloading
                else
                    if (mat.strain < mat.eps_bp_pos) && (mat.eps_pt10 < mat.
    eps_bp_pos)
                        mat.update_flag = 21;
                    elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11;
```

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

```
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2;
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3;
                        else
                            mat.update_flag = 4;
                        end
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = mat.sy_neg;
                    ref_strain = mat.epsy_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 2
                    ref_stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3
                    ref_stress = mat.cap_pos;
                    ref_strain = mat.ecap_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 10
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = mat.E_unld;
                case 11
                    if (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
                        ref_stress = mat.s_bp_pos;
                        ref_strain = mat.eps_bp_pos;
                    else
                        ref_stress = 0;
                        ref_strain = mat.eps_pt10;
                    end
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos
    - ref_strain);
```

COPIA DI REVISIONE

```
                case 21
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = mat.eps_pt10;
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_pos - ref_stress)/(mat.eps_bp_pos -
 ref_strain);

            end

            if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.
update_flag ~= 4)
                if (mat.com_reversal_flag == 1)
                    % estimate energy in step
                    stress_new = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain -
ref_strain);
                    enrgy_step = (mat.eps_pt10 - mat.com_strain)*(mat.
com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
                    % update unloading modulus
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
                end
                % determine strain at pt 10
                mat.eps_pt10 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain < mat.eps_pt10)
                    mat.reversal_flag = -1;
                    mat.update_flag = 10; % unloading
                else
                    mat.reversal_flag = 1;
                    % set flag to signal initial directional loading for bp
                    if (mat.eps_tar_pos == mat.epsy_pos)
                       targ_flag = 1;
                    else
                        targ_flag = 0;
                    end
                    % update cyclic parameters on positive side
                    % Note: values must remain positive althought they may
                    % become negative as hysteretic energy is exhausted
                    enrgy_step = (mat.eps_pt10 - mat.com_strain)*(mat.
com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_hrd_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_pos;
                    mat.sy_pos      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_pos;
                    mat.epsy_pos    = mat.sy_pos/mat.iniE;
                    mat.s_ref_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_pos;
                    mat.ecap_pos    = max(1.912361e-26,(mat.s_ref_pos - mat.
sy_pos + (mat.E_hrd_pos*mat.epsy_pos))/(mat.E_hrd_pos - mat.E_sof));
                    mat.cap_pos     = max(1.02391e-26,mat.s_ref_pos + mat.
E_sof*mat.ecap_pos);
                    mat.eps_tar_pos = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_pos;
                    mat.eres_pos    = max(1.35915e-24,(mat.res_pos - mat.
s_ref_pos)/mat.E_sof);
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
                    % adjust target values if necessary
                    stress_tar_chk  = mat.s_ref_pos + mat.E_sof*mat.
    eps_tar_pos;
                    if (mat.eps_tar_pos < mat.ecap_pos)
                        mat.s_tar_pos = mat.sy_pos + mat.E_hrd_pos*(mat.
    eps_tar_pos - mat.epsy_pos);
                    else
                        mat.s_tar_pos = stress_tar_chk;
                    end
                    if (mat.s_tar_pos < mat.res_pos)
                        mat.s_tar_pos   = mat.res_pos;
                        mat.eps_tar_pos = mat.eres_pos;
                    end
                    % determine break-point
                    mat.eps_bp_pos      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_pos;
                    if (targ_flag == 1)
                        mat.eps_bp_pos      = 0; % initial directional loading
                    end
                    mat.s_bpref_pos     = mat.kappa_f*mat.s_tar_pos;
                    mat.s_bp_pos        = ((mat.eps_bp_pos - mat.eps_pt10)/(
    mat.eps_tar_pos - mat.eps_pt10))*mat.s_bpref_pos;

                    if (mat.strain < mat.eps_bp_pos) && (mat.eps_pt10 < mat.
    eps_bp_pos)
                        mat.update_flag = 21;
                    elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11; % reloading to target
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2; % hardening
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3; % softening
                        else
                            mat.update_flag = 4; % residual
                        end
                    end
                end

                switch mat.update_flag
                    case 2
                        ref_stress = mat.s_tar_pos;
                        ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                        mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                    case 3
                        ref_stress = mat.cap_pos;
                        ref_strain = mat.ecap_pos;
                        mat.tanE   = mat.E_sof;
                    case 4
                        ref_stress = mat.res_pos;
                        ref_strain = mat.eres_pos;
                        mat.tanE   = mat.iniE/100000;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
                    case 10
                        ref_stress = mat.com_stress;
                        ref_strain = mat.com_strain;
                        mat.tanE   = mat.E_unld;
                    case 11
                        if (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
                            ref_stress = mat.s_bp_pos;
                            ref_strain = mat.eps_bp_pos;
                        else
                            ref_stress = 0;
                            ref_strain = mat.eps_pt10;
                        end
                        mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.
    eps_tar_pos - ref_strain);
                    case 21
                        ref_stress = 0;
                        ref_strain = mat.eps_pt10;
                        mat.tanE   = (mat.s_bp_pos - ref_stress)/(mat.
    eps_bp_pos - ref_strain);
                end
            end
        end % function NegUnloading


        function [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step )

            % Note: for unloading modulus E_t = 2*E_t
            E_t     = mat.hys_dis_cap;
            E_step  = enrgy_step;
            c       = mat.det_rate;
            E_pre   = mat.enrgy_prvs;

            mat.Beta = ((E_step + mat.enrgy_step)/(E_t - E_pre))^c;
            mat.Beta_Unld = ((E_step + mat.enrgy_step)/(2*E_t - E_pre))^c;

            if (mat.Beta > 1)
                mat.Beta = 0.999;
                display('**************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('**************************')
            elseif (mat.Beta < 0)
                mat.Beta = 0.999;
                display('**************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('**************************')
            end
            if (mat.Beta_Unld > 1)
                mat.Beta_Unld = 0.999;
                display('**************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('**************************')
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
            elseif (mat.Beta_Unld < 0)
                mat.Beta_Unld = 0.999;
                display('**************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('**************************')
            end

        end % function BetaFunc


        function allocateMemory(mat,totStep)
            mat.uni_strain_stress(1:totStep,1:2) = 0;
        end % function allocateMemory

        function write2storage(mat,istep)
            mat.uni_strain_stress(istep, 1:2) = [mat.strain, mat.stress];
        end % function write2storage

        function write2file(mat, fid)
            fprintf(fid,'%f %f \n', mat.strain, mat.stress);
        end % function write2file

        function write2mat(mat, fid)
            uni_strain_stress = mat.uni_strain_stress; %#ok<*NASGU>
            save(fid, 'uni_strain_stress');
        end % function write2mat

        function getPlot(mat, unit, num)
            figure(num);
            plot(mat.strain, mat.stress,'-o');
            hold on;grid on;box on;
            title(['Uniaxial strain-stress of ',mat.type]);
            xlabel(['strain (',unit{1,2},'/',unit{1,2},')']);
            ylabel(['stress (',unit{1,1},'/',unit{1,2},'^2']);
        end % function getPlot

        function finalPlot(mat, unit, num)
            figure(num);
            plot(mat.uni_strain_stress(:,1), mat.uni_strain_stress(:,2));
            grid on;box on;
            title(['Uniaxial strain-stress of ',mat.type]);
            xlabel(['strain (',unit{1,2},'/',unit{1,2},')']);
            ylabel(['stress (',unit{1,1},'/',unit{1,2},'^2']);
        end % function finalPlot

    end % methods

end % classdef
```

COPIA DI REVISIONE

I.3.9 Portata di stato limite

```
%% -------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
% Program    : Mercury v.2.11
% Email      : christopherlsegura@gmail.com
% Revision   : May 10, 2011
% Written by : Christopher Segura
% Filename   : HysteresisPinch.m
%% -------------------------------------------------------------
classdef HysteresisPinch < handle

    properties (SetAccess=protected,Hidden)
        % Input variables
        tag;            % material tag
        type;           % material type
        sy_pos0;        % positive yield stress
        epsy_pos0;      % positive yield strain
        sy_neg0;        % negative yield stress
        epsy_neg0;      % negative yield strain
        cap_pos0;       % positive capping stress
        ecap_pos0;      % positive capping strain
        cap_neg0;       % negative capping stress
        ecap_neg0;      % negative capping strain
        res_pos;        % positive residual stress
        eres_pos0;      % positive residual strain
        res_neg;        % negative residual stress
        eres_neg0;      % negative residual strain
        lamda_hys;      % hysteretic disipation constant
        det_rate;       % hysteresis deterioration exponent "c"
        kappa_f;        % stress pinching break point factor
        kappa_d;        % strain pinching break point factor
        rho;            % density

    end % properties (SetAccess=protected,Hidden)

    properties (SetAccess=public,GetAccess=public)
        %% Storage for output
        uni_strain_stress   % Storage of uniaxial strain and stress
    end %  properties (SetAccess=public,GetAccess=public)

    properties (SetAccess=public,GetAccess=public,Hidden)
        %% update variables
        stress;         % uniaxial stress
        tanE;           % tangent modulus
        strain;         % uniaxial strain
        iniE;           % initial modulus
        E_hrd;          % hardening modulus
        E_sof;          % softening modulus
        sy_pos;         % positive yield stress
        sy_neg;         % negative yield stress
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
        cap_pos;         % positive capping stress
        cap_neg;         % negative capping stress
        epsy_pos;        % positive yield strain
        epsy_neg;        % negative yield strain
        ecap_pos;        % positive cap strain
        ecap_neg;        % negative cap strain
        eres_pos;        % positive residual strain
        eres_neg;        % negative residual strain
        hys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
        s_ref_pos;       % positive refenerence stress
        s_ref_neg;       % negative refenerence stress
        s_tar_pos;       % positive target stress
        eps_tar_pos;     % positive target strain
        s_tar_neg;       % negative target stress
        eps_tar_neg;     % negative target strain
        state_flag;      % loading branch
        update_flag;     % update loading branch
        reversal_flag;   % flag for unloading stiffness
        enrgy_step;      % step i energy dissipated
        enrgy_prvs;      % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        E_unld;          % unloading stiffness
        E_hrd_pos;       % positive hardening stiffness
        E_hrd_neg;       % negative hardening stiffness
        eps_pt5;         % positive unloading inflection strain
        eps_pt10;        % negative unloading inflection strain
        Beta;            % hysteretic dissipation parameter
        Beta_Unld;       % unloading modulus dissipation parameter
        s_bpref_pos;     % positive break point reference stress
        s_bpref_neg;     % negative break point reference stress
        eps_bp_pos;      % positive break point strain
        eps_bp_neg;      % negative break point strain
        s_bp_pos;        % positive break point stress
        s_bp_neg;        % negative break point stress
        norm_hys;        % normalized hysteretic energy
        n_exc;           % number excursions/cycles
        %% commit variables
        % inputs
        com_stress;      % committed stress from previous step
        com_tanE;        % committed tanE from previous step
        com_strain;      % committed strain from previous step
        com_sy_pos;      % committed yeild stress
        com_sy_neg;      % committed yeild stress
        com_cap_pos;
        com_cap_neg;
        com_epsy_pos;    % positive yield strain
        com_epsy_neg;    % negative yield strain
        com_ecap_pos;    % positive cap strain
        com_ecap_neg;    % negative cap strain
        com_eres_pos;    % positive residual strain
        com_eres_neg;    % negative residual strain
        com_hys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
        com_s_ref_pos;  % positive refenerence stress
        com_s_ref_neg;  % negative refenerence stress
        com_s_tar_pos;   % positive target stress
        com_eps_tar_pos; % positive target strain
        com_s_tar_neg;   % negative target stress
        com_eps_tar_neg; % negative target strain
        com_state_flag;  % loading branch
        com_update_flag; % update loading branch
        com_reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        com_enrgy_step;  % step i energy dissipated
        com_enrgy_prvs;  % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        com_E_unld;      % unloading stiffness
        com_E_hrd_pos;   % positive hardening stiffness
        com_E_hrd_neg;   % negative hardening stiffness
        com_eps_pt5;     % positive unloading inflection strain
        com_eps_pt10;    % negative unloading inflection strain
        com_Beta;
        com_Beta_Unld;
        com_s_bpref_pos;
        com_s_bpref_neg;
        com_eps_bp_pos;
        com_eps_bp_neg;
        com_s_bp_pos;
        com_s_bp_neg;
        com_norm_hys;
        com_n_exc;
    end % properties (SetAccess=public,GetAccess=public,Hidden)

    methods (Access=public)
        function mat = HysteresisPinch(info)
            mat.tag         = info{1};
            mat.type        = info{2};
            mat.sy_pos0     = info{3};
            mat.epsy_pos0   = info{4};
            mat.sy_neg0     = info{5};
            mat.epsy_neg0   = info{6};
            mat.cap_pos0    = info{7};
            mat.ecap_pos0   = info{8};
            mat.cap_neg0    = info{9};
            mat.ecap_neg0   = info{10};
            mat.res_pos     = info{11};
            mat.eres_pos0   = info{12};
            mat.res_neg     = info{13};
            mat.eres_neg0   = info{14};
            mat.lamda_hys   = info{15};
            mat.det_rate    = info{16};
            mat.kappa_f     = info{17};
            mat.kappa_d     = info{18};
            mat.rho         = info{19};
            mat.Initialization();

```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
152         end % function HysteresisPinch
153 
154         function Initialization(mat)
155             mat.stress      = 0;
156             mat.strain      = 0;
157             mat.sy_pos      = mat.sy_pos0;
158             mat.epsy_pos    = mat.epsy_pos0;
159             mat.iniE        = mat.sy_pos0/mat.epsy_pos0;
160             mat.tanE        = mat.iniE;
161             mat.sy_neg      = mat.sy_neg0;
162             mat.epsy_neg    = mat.epsy_neg0;
163             mat.cap_pos     = mat.cap_pos0;
164             mat.ecap_pos    = mat.ecap_pos0;
165             mat.E_hrd       = (mat.cap_pos0 - mat.sy_pos0)/(mat.ecap_pos0 -
    mat.epsy_pos0);
166             mat.cap_neg     = mat.cap_neg0;
167             mat.ecap_neg    = mat.ecap_neg0;
168             mat.eres_pos    = mat.eres_pos0;
169             mat.eres_neg    = mat.eres_neg0;
170             mat.E_sof       = (mat.res_pos - mat.cap_pos0)/(mat.eres_pos0 -
    mat.ecap_pos0);
171             mat.hys_dis_cap = mat.lamda_hys*mat.sy_pos*mat.epsy_pos; %
    hysteretic dissipation capacity
172             mat.s_ref_pos   = mat.cap_pos - (mat.ecap_pos*mat.E_sof);
173             mat.s_ref_neg   = mat.cap_neg - (mat.ecap_neg*mat.E_sof);
174             % initialize variables
175             mat.s_tar_pos       = mat.sy_pos;
176             mat.eps_tar_pos     = mat.epsy_pos;
177             mat.s_tar_neg       = mat.sy_neg;
178             mat.eps_tar_neg     = mat.epsy_neg;
179             mat.state_flag      = 1;
180             mat.update_flag     = mat.state_flag;
181             mat.reversal_flag   = 1;
182             mat.enrgy_step      = 0;  % step i energy dissipated
183             mat.enrgy_prvs      = 0;  % energy dissipated in previous steps 0
    to (i-1)
184             mat.E_unld          = mat.iniE;
185             mat.E_hrd_pos       = mat.E_hrd;
186             mat.E_hrd_neg       = mat.E_hrd;
187             mat.eps_pt5         = 0;
188             mat.eps_pt10        = 0;
189             mat.s_bpref_pos     = mat.kappa_f*mat.s_tar_pos;
190             mat.s_bpref_neg     = mat.kappa_f*mat.s_tar_neg;
191             mat.eps_bp_pos      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_pos;
192             mat.eps_bp_neg      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_neg;
193             mat.s_bp_pos        = ((mat.eps_bp_pos - mat.eps_pt10)/(mat.
    eps_tar_pos - mat.eps_pt10))*mat.s_bpref_pos;
194             mat.s_bp_neg        = ((mat.eps_bp_neg - mat.eps_pt5)/(mat.
    eps_tar_neg - mat.eps_pt5))*mat.s_bpref_neg;
195             mat.norm_hys        = 0;
196             mat.n_exc           = 0;
```

COPIA DI REVISIONE

```
197
198         end % function Initialization
199
200         function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use
    in constitutive model
201             mat.com_stress          = mat.stress;
202             mat.com_tanE            = mat.tanE;
203             mat.com_strain          = mat.strain;
204             mat.com_sy_pos          = mat.sy_pos;
205             mat.com_sy_neg          = mat.sy_neg;
206             mat.com_cap_pos         = mat.cap_pos;
207             mat.com_cap_neg         = mat.cap_neg;
208             mat.com_epsy_pos        = mat.epsy_pos;
209             mat.com_epsy_neg        = mat.epsy_neg;
210             mat.com_ecap_pos        = mat.ecap_pos;
211             mat.com_ecap_neg        = mat.ecap_neg;
212             mat.com_eres_pos        = mat.eres_pos;
213             mat.com_eres_neg        = mat.eres_neg;
214             mat.com_hys_dis_cap     = mat.hys_dis_cap;
215             mat.com_s_ref_pos       = mat.s_ref_pos;
216             mat.com_s_ref_neg       = mat.s_ref_neg;
217             mat.com_s_tar_pos       = mat.s_tar_pos;
218             mat.com_eps_tar_pos     = mat.eps_tar_pos;
219             mat.com_s_tar_neg       = mat.s_tar_neg;
220             mat.com_eps_tar_neg     = mat.eps_tar_neg;
221             mat.com_state_flag      = mat.state_flag;
222             mat.com_update_flag     = mat.update_flag;
223             mat.com_reversal_flag   = mat.reversal_flag;
224             mat.com_enrgy_step      = mat.enrgy_step;
225             mat.com_enrgy_prvs      = mat.enrgy_prvs;
226             mat.com_E_unld          = mat.E_unld;
227             mat.com_E_hrd_pos       = mat.E_hrd_pos;
228             mat.com_E_hrd_neg       = mat.E_hrd_neg;
229             mat.com_eps_pt5         = mat.eps_pt5;
230             mat.com_eps_pt10        = mat.eps_pt10;
231             mat.com_s_bpref_pos     = mat.s_bpref_pos;
232             mat.com_s_bpref_neg     = mat.s_bpref_neg;
233             mat.com_eps_bp_pos      = mat.eps_bp_pos;
234             mat.com_eps_bp_neg      = mat.eps_bp_neg;
235             mat.com_s_bp_pos        = mat.s_bp_pos;
236             mat.com_s_bp_neg        = mat.s_bp_neg;
237             mat.com_norm_hys    = mat.norm_hys;
238             mat.com_n_exc       = mat.n_exc;
239
240         end % function commit
241
242         function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert
    all values when failing at current step
243             mat.stress      = mat.com_stress;
244             mat.tanE        = mat.com_tanE;
245             mat.strain      = mat.com_strain;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
            mat.sy_pos      = mat.com_sy_pos;
            mat.sy_neg      = mat.com_sy_neg;
            mat.cap_pos     = mat.com_cap_pos;
            mat.cap_neg     = mat.com_cap_neg;
            mat.epsy_pos    = mat.com_epsy_pos;
            mat.epsy_neg    = mat.com_epsy_neg;
            mat.ecap_pos    = mat.com_ecap_pos;
            mat.ecap_neg    = mat.com_ecap_neg;
            mat.eres_pos    = mat.com_eres_pos;
            mat.eres_neg    = mat.com_eres_neg;
            mat.hys_dis_cap = mat.com_hys_dis_cap;
            mat.s_ref_pos   = mat.com_s_ref_pos;
            mat.s_ref_neg   = mat.com_s_ref_neg;
            mat.s_tar_pos   = mat.com_s_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.com_eps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg   = mat.com_s_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.com_eps_tar_neg;
            mat.state_flag  = mat.com_state_flag;
            mat.update_flag = mat.com_update_flag;
            mat.reversal_flag = mat.com_reversal_flag;
            mat.enrgy_step  = mat.com_enrgy_step;
            mat.enrgy_prvs  = mat.com_enrgy_prvs;
            mat.E_unld      = mat.com_E_unld;
            mat.E_hrd_pos   = mat.com_E_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg   = mat.com_E_hrd_neg;
            mat.eps_pt5     = mat.com_eps_pt5;
            mat.eps_pt10    = mat.com_eps_pt10;
            mat.s_bpref_pos   = mat.com_s_bpref_pos;
            mat.s_bpref_neg   = mat.com_s_bpref_neg;
            mat.eps_bp_pos    = mat.com_eps_bp_pos;
            mat.eps_bp_neg    = mat.com_eps_bp_neg;
            mat.s_bp_pos      = mat.com_s_bp_pos;
            mat.s_bp_neg      = mat.com_s_bp_neg;
            mat.norm_hys    = mat.com_norm_hys;
            mat.n_exc       = mat.com_n_exc;

        end % function revert

        function materialStateDetermination(mat, TrialStrain)
            mat.strain          = TrialStrain;
            mat.stress          = mat.com_stress;
            mat.tanE            = mat.com_tanE;
            mat.state_flag      = mat.com_update_flag;
            mat.update_flag     = mat.com_update_flag;
            mat.reversal_flag   = mat.com_reversal_flag;
            mat.enrgy_prvs      = mat.com_enrgy_step;
            mat.E_unld          = mat.com_E_unld;
            mat.sy_pos          = mat.com_sy_pos;
            mat.sy_neg          = mat.com_sy_neg;
            mat.cap_pos         = mat.com_cap_pos;
            mat.cap_neg         = mat.com_cap_neg;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
            mat.epsy_pos        = mat.com_epsy_pos;
            mat.epsy_neg        = mat.com_epsy_neg;
            mat.ecap_pos        = mat.com_ecap_pos;
            mat.ecap_neg        = mat.com_ecap_neg;
            mat.eres_pos        = mat.com_eres_pos;
            mat.eres_neg        = mat.com_eres_neg;
            mat.s_ref_pos       = mat.com_s_ref_pos;
            mat.s_ref_neg       = mat.com_s_ref_neg;
            mat.s_tar_pos       = mat.com_s_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos     = mat.com_eps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg       = mat.com_s_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg     = mat.com_eps_tar_neg;
            mat.enrgy_step      = mat.com_enrgy_step;
            mat.E_unld          = mat.com_E_unld;
            mat.E_hrd_pos       = mat.com_E_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg       = mat.com_E_hrd_neg;
            mat.eps_pt5         = mat.com_eps_pt5;
            mat.eps_pt10        = mat.com_eps_pt10;
            mat.s_bpref_pos     = mat.com_s_bpref_pos;
            mat.s_bpref_neg     = mat.com_s_bpref_neg;
            mat.eps_bp_pos      = mat.com_eps_bp_pos;
            mat.eps_bp_neg      = mat.com_eps_bp_neg;
            mat.s_bp_pos        = mat.com_s_bp_pos;
            mat.s_bp_neg        = mat.com_s_bp_neg;
            mat.norm_hys    = mat.com_norm_hys;
            mat.n_exc       = mat.com_n_exc;
            %-----------------------------------------------------------------
            del_eps = mat.strain - mat.com_strain;
            %-----------------------------------------------------------------
            if (del_eps >= 0) && (mat.stress >= 0) % positive loading
                if (mat.state_flag == 4)
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PositiveLoading(mat);
                end

            elseif (del_eps < 0) && (mat.stress > 0) % positive unloading
                [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PosUnloading(mat);

            elseif (del_eps <= 0) && (mat.stress <= 0) % negative loading
                if (mat.state_flag == 9)
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegativeLoading(mat);
                end

            elseif (del_eps > 0) && (mat.stress < 0) % negative loading
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
348                 [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegUnloading(mat);
349 
350             end
351 
352             mat.stress = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain - ref_strain);
353 
354             if (mat.com_stress/del_eps < 0) % unloading
355                 if (mat.com_stress/mat.stress > 0) % unloading
356                     step = del_eps*(mat.com_stress + 0.5*(mat.stress - mat.
    com_stress));
357                 else % reloading
358                     if (mat.stress >= 0)
359                         mat.enrgy_step = 0;
360                         step = 0.5*(mat.strain - mat.eps_pt10)*mat.stress;
361                         mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
362                     else
363                         mat.enrgy_step = 0;
364                         step = 0.5*(mat.strain - mat.eps_pt5)*mat.stress;
365                         mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
366                     end
367                 end
368             else
369                 step = del_eps*(mat.com_stress + 0.5*(mat.stress - mat.
    com_stress));
370             end
371             % update energy in excursions
372             mat.enrgy_step = mat.enrgy_step + step;
373             mat.enrgy_prvs = mat.enrgy_prvs + step;
374             % normalized hysteretic energy
375             mat.norm_hys = mat.lamda_hys*mat.enrgy_prvs/mat.hys_dis_cap;
376 
377         end % function materialStateDetermination
378 
379 
380         function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PositiveLoading(mat)
381 
382             switch mat.state_flag
383                 case -1
384                     if (mat.strain < 0)
385                         mat.update_flag = -1;
386                     elseif (mat.strain < mat.epsy_pos)
387                         mat.update_flag = 1;
388                     elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
389                         mat.update_flag = 2;
390                     elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
391                         mat.update_flag = 3;
392                     else
393                         mat.update_flag = 4;
394                     end
395                 case 1
396                     if (mat.strain < mat.epsy_pos)
```


I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

```
                        mat.update_flag = 1;
                    elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 2
                    if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 3
                    if (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 4
                    mat.update_flag = 4;
                case 9
                    mat.update_flag = 9;

                otherwise
                    if (mat.strain < mat.eps_bp_pos) && (mat.eps_pt10 < mat.
    eps_bp_pos)
                        mat.update_flag = 21;
                    elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11;
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2;
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3;
                        else
                            mat.update_flag = 4;
                        end
                    end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1 % elastic
                    ref_stress = mat.sy_neg;
                    ref_strain = mat.epsy_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1 % elastic
                    ref_stress = 0;
```

COPIA DI REVISIONE

```
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 2 % hardening
                    ref_stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3 % softening
                    ref_stress = mat.cap_pos;
                    ref_strain = mat.ecap_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 4 % residual
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 9 % residual
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 11 % loading to target state
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos
    - ref_strain);
                case 21 % loading to break point
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_pos - ref_stress)/(mat.eps_bp_pos -
    ref_strain);
            end
        end % function PositiveLoading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PosUnloading( mat )

            if (mat.state_flag == 1)
                if (mat.strain > 0)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain > mat.epsy_neg)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
            elseif (mat.state_flag == -1)
                if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
                elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
            elseif (mat.state_flag == 9)
                mat.update_flag = 9;
            else
                % update target state if reversal
                if (mat.reversal_flag == 1)
                    if (mat.com_strain > mat.eps_tar_pos)
                        mat.eps_tar_pos = mat.com_strain;
                        mat.s_tar_pos   = mat.com_stress;
                    end
                end
                % determine strain at pt 5
                mat.eps_pt5 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain > mat.eps_pt5)
                    mat.update_flag = 12; % unloading
                elseif (mat.strain > mat.eps_bp_neg) && (mat.eps_pt5 > mat.
    eps_bp_neg)
                    mat.update_flag = 23; % reloading to break point
                elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                    mat.update_flag = 13; % reloading to target
                else
                    if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7; % neg hardening
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8; % neg softening
                    else
                        mat.update_flag = 9; % neg residual
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1
                    ref_stress = mat.sy_pos;
                    ref_strain = mat.epsy_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 7
                    ref_stress = mat.s_tar_neg;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
                    ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                case 8
                    ref_stress = mat.cap_neg;
                    ref_strain = mat.ecap_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 12
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = mat.E_unld;
                case 13
                    ref_stress = mat.s_bp_neg;
                    ref_strain = mat.eps_bp_neg;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.eps_tar_neg
    - ref_strain);
                case 23
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = mat.eps_pt5;
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_neg - ref_stress)/(mat.eps_bp_neg -
    ref_strain);
            end

            if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.
   update_flag ~= 9)
                if (mat.com_reversal_flag == 1)
                    % estimate energy in step
                    stress_new = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain -
   ref_strain);
                    enrgy_step = (mat.eps_pt5 - mat.com_strain)*(mat.
   com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
                    % update unloading modulus
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
                end
                % determine strain at pt 5
                mat.eps_pt5 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain > mat.eps_pt5)
                    % update flag
                    mat.reversal_flag = -1;
                    mat.update_flag = 12; %unloading
                else
                    % update reversal flag
                    mat.reversal_flag = 1;
                    % update flag to signal initial directional loadin
                    if (mat.eps_tar_neg == mat.epsy_neg)
                       targ_flag = 1;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
                    else
                        targ_flag = 0;
                    end
                    % update cyclic parameters on negative side
                    % Note: values must remain negative although exhaustion
                    % of hysteretic energy may make them positive
                    enrgy_step = (mat.eps_pt5 - mat.com_strain)*(mat.
com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_hrd_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_neg;
                    mat.sy_neg      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_neg;
                    mat.epsy_neg    = mat.sy_neg/mat.iniE;
                    mat.s_ref_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_neg;
                    mat.ecap_neg    = min(-1.8912e-26,(mat.s_ref_neg - mat.
sy_neg + (mat.E_hrd_neg*mat.epsy_neg))/(mat.E_hrd_neg - mat.E_sof));
                    mat.cap_neg     = min(-1.1272e-24,mat.s_ref_neg + mat.
E_sof*mat.ecap_neg);
                    mat.eps_tar_neg = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_neg;
                    mat.eres_neg    = min(-1.8912e-24,(mat.res_neg - mat.
s_ref_neg)/mat.E_sof);
                    % adjust target values if necessary
                    stress_tar_chk  = mat.s_ref_neg + mat.E_sof*mat.
eps_tar_neg;
                    if (mat.eps_tar_neg > mat.ecap_neg)
                        mat.s_tar_neg = mat.sy_neg + mat.E_hrd_neg*(mat.
eps_tar_neg - mat.epsy_neg);
                    else
                        mat.s_tar_neg = stress_tar_chk;
                    end
                    if (mat.s_tar_neg > mat.res_neg)
                        mat.s_tar_neg   = mat.res_neg;
                        mat.eps_tar_neg = mat.eres_neg;
                    end
                    % determine break-point
                    mat.eps_bp_neg      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_neg;
                    if (targ_flag == 1)
                        mat.eps_bp_neg      = 0; % initial directional loading
                    end
                    mat.s_bpref_neg     = mat.kappa_f*mat.s_tar_neg;
                    mat.s_bp_neg        = ((mat.eps_bp_neg - mat.eps_pt5)/(mat
.eps_tar_neg - mat.eps_pt5))*mat.s_bpref_neg;

                    if (mat.strain > mat.eps_bp_neg) && (mat.eps_pt5 > mat.
eps_bp_neg)
                        mat.update_flag = 23; % reloading to break point
                    elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13; % reloading to target
                    else
                        if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7; % neg hardening
                        elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
                            mat.update_flag = 8; % neg softening
                        else
                            mat.update_flag = 9; % neg residual
                        end
                    end
                end

                switch mat.update_flag
                    case 7
                        ref_stress = mat.s_tar_neg;
                        ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                        mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                    case 8
                        ref_stress = mat.cap_neg;
                        ref_strain = mat.ecap_neg;
                        mat.tanE   = mat.E_sof;
                    case 9
                        ref_stress = mat.res_neg;
                        ref_strain = mat.eres_neg;
                        mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                    case 12
                        ref_stress = mat.com_stress;
                        ref_strain = mat.com_strain;
                        mat.tanE   = mat.E_unld;
                    case 13
                        ref_stress = mat.s_bp_neg;
                        ref_strain = mat.eps_bp_neg;
                        mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.
    eps_tar_neg - ref_strain);
                    case 23
                        ref_stress = 0;
                        ref_strain = mat.eps_pt5;
                        mat.tanE   = (mat.s_bp_neg - ref_stress)/(mat.
    eps_bp_neg - ref_strain);
                end
            end
        end % function PosUnloading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegativeLoading( mat )

            switch mat.state_flag
                case 1
                    if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
                    end
                case -1
                    if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 4
                    mat.update_flag = 4;
                case 7
                    if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 8
                    if (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 9
                    mat.update_flag = 9;

                otherwise
                    if (mat.strain > mat.eps_bp_neg) && (mat.eps_pt5 > mat.
    eps_bp_neg)
                        mat.update_flag = 23;
                    elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13;
                    else
                        if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7;
                        elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8;
                        else
                            mat.update_flag = 9;
                        end
                    end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
```

COPIA DI REVISIONE

```
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 7
                    ref_stress = mat.s_tar_neg;
                    ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                case 8
                    ref_stress = mat.cap_neg;
                    ref_strain = mat.ecap_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 13
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.eps_tar_neg
    - ref_strain);
                case 23
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_neg - ref_stress)/(mat.eps_bp_neg -
    ref_strain);
            end
        end % function NegativeLoading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegUnloading( mat )

            if (mat.state_flag == -1)
                if (mat.strain < 0)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 1)
                if (mat.strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 4)
                mat.update_flag = 4;
            else
                % update target state
                if (mat.reversal_flag == 1)
                    if (mat.com_strain < mat.eps_tar_neg)
                        mat.eps_tar_neg = mat.com_strain;
                        mat.s_tar_neg   = mat.com_stress;
                    end
                end
                % determine strain at pt 10
                mat.eps_pt10 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain < mat.eps_pt10)
                    mat.update_flag = 10; % unloading
                else
                    if (mat.strain < mat.eps_bp_pos) && (mat.eps_pt10 < mat.
    eps_bp_pos)
                        mat.update_flag = 21;
                    elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11;
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2;
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3;
                        else
                            mat.update_flag = 4;
                        end
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = mat.sy_neg;
                    ref_strain = mat.epsy_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 2
                    ref_stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
                    ref_stress = mat.cap_pos;
                    ref_strain = mat.ecap_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 10
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = mat.E_unld;
                case 11
                    if (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
                        ref_stress = mat.s_bp_pos;
                        ref_strain = mat.eps_bp_pos;
                    else
                        ref_stress = 0;
                        ref_strain = mat.eps_pt10;
                    end
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos
 - ref_strain);
                case 21
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = mat.eps_pt10;
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_pos - ref_stress)/(mat.eps_bp_pos -
 ref_strain);

            end

            if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.
update_flag ~= 4)
                if (mat.com_reversal_flag == 1)
                    % estimate energy in step
                    stress_new = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain -
ref_strain);
                    enrgy_step = (mat.eps_pt10 - mat.com_strain)*(mat.
com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
                    % update unloading modulus
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
                end
                % determine strain at pt 10
                mat.eps_pt10 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain < mat.eps_pt10)
                    mat.reversal_flag = -1;
                    mat.update_flag = 10; % unloading
```


I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

```
                else
                    mat.reversal_flag = 1;
                    % set flag to signal initial directional loading for bp
                    if (mat.eps_tar_pos == mat.epsy_pos)
                       targ_flag = 1;
                    else
                        targ_flag = 0;
                    end
                    % update cyclic parameters on positive side
                    % Note: values must remain positive althought they may
                    % become negative as hysteretic energy is exhausted
                    enrgy_step = (mat.eps_pt10 - mat.com_strain)*(mat.
com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_hrd_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_pos;
                    mat.sy_pos      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_pos;
                    mat.epsy_pos    = mat.sy_pos/mat.iniE;
                    mat.s_ref_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_pos;
                    mat.ecap_pos    = max(1.912361e-26,(mat.s_ref_pos - mat.
sy_pos + (mat.E_hrd_pos*mat.epsy_pos))/(mat.E_hrd_pos - mat.E_sof));
                    mat.cap_pos     = max(1.02391e-26,mat.s_ref_pos + mat.
E_sof*mat.ecap_pos);
                    mat.eps_tar_pos = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_pos;
                    mat.eres_pos    = max(1.35915e-24,(mat.res_pos - mat.
s_ref_pos)/mat.E_sof);
                    % adjust target values if necessary
                    stress_tar_chk  = mat.s_ref_pos + mat.E_sof*mat.
eps_tar_pos;
                    if (mat.eps_tar_pos < mat.ecap_pos)
                        mat.s_tar_pos = mat.sy_pos + mat.E_hrd_pos*(mat.
eps_tar_pos - mat.epsy_pos);
                    else
                        mat.s_tar_pos = stress_tar_chk;
                    end
                    if (mat.s_tar_pos < mat.res_pos)
                        mat.s_tar_pos   = mat.res_pos;
                        mat.eps_tar_pos = mat.eres_pos;
                    end
                    % determine break-point
                    mat.eps_bp_pos      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_pos;
                    if (targ_flag == 1)
                        mat.eps_bp_pos      = 0; % initial directional loading
                    end
                    mat.s_bpref_pos     = mat.kappa_f*mat.s_tar_pos;
                    mat.s_bp_pos        = ((mat.eps_bp_pos - mat.eps_pt10)/(
mat.eps_tar_pos - mat.eps_pt10))*mat.s_bpref_pos;

                    if (mat.strain < mat.eps_bp_pos) && (mat.eps_pt10 < mat.
eps_bp_pos)
                        mat.update_flag = 21;
                    elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
                        mat.update_flag = 11; % reloading to target
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2; % hardening
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3; % softening
                        else
                            mat.update_flag = 4; % residual
                        end
                    end
                end

                switch mat.update_flag
                    case 2
                        ref_stress = mat.s_tar_pos;
                        ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                        mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                    case 3
                        ref_stress = mat.cap_pos;
                        ref_strain = mat.ecap_pos;
                        mat.tanE   = mat.E_sof;
                    case 4
                        ref_stress = mat.res_pos;
                        ref_strain = mat.eres_pos;
                        mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                    case 10
                        ref_stress = mat.com_stress;
                        ref_strain = mat.com_strain;
                        mat.tanE   = mat.E_unld;
                    case 11
                        if (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
                            ref_stress = mat.s_bp_pos;
                            ref_strain = mat.eps_bp_pos;
                        else
                            ref_stress = 0;
                            ref_strain = mat.eps_pt10;
                        end
                        mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.
    eps_tar_pos - ref_strain);
                    case 21
                        ref_stress = 0;
                        ref_strain = mat.eps_pt10;
                        mat.tanE   = (mat.s_bp_pos - ref_stress)/(mat.
    eps_bp_pos - ref_strain);
                end
            end
        end % function NegUnloading


        function [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step )

```

COPIA DI REVISIONE

```
            % Note: for unloading modulus E_t = 2*E_t
            E_t     = mat.hys_dis_cap;
            E_step  = enrgy_step;
            c       = mat.det_rate;
            E_pre   = mat.enrgy_prvs;

            mat.Beta = ((E_step + mat.enrgy_step)/(E_t - E_pre))^c;
            mat.Beta_Unld = ((E_step + mat.enrgy_step)/(2*E_t - E_pre))^c;

            if (mat.Beta > 1)
                mat.Beta = 0.999;
                display('**************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('**************************')
            elseif (mat.Beta < 0)
                mat.Beta = 0.999;
                display('**************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('**************************')
            end
            if (mat.Beta_Unld > 1)
                mat.Beta_Unld = 0.999;
                display('**************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('**************************')
            elseif (mat.Beta_Unld < 0)
                mat.Beta_Unld = 0.999;
                display('**************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('**************************')
            end

        end % function BetaFunc


        function allocateMemory(mat,totStep)
            mat.uni_strain_stress(1:totStep,1:2) = 0;
        end % function allocateMemory

        function write2storage(mat,istep)
            mat.uni_strain_stress(istep, 1:2) = [mat.strain, mat.stress];
        end % function write2storage

        function write2file(mat, fid)
            fprintf(fid,'%f %f \n', mat.strain, mat.stress);
        end % function write2file

        function write2mat(mat, fid)
            uni_strain_stress = mat.uni_strain_stress; %#ok<*NASGU>
            save(fid, 'uni_strain_stress');
        end % function write2mat
```

COPIA DI REVISIONE

```
1022
1023        function getPlot(mat, unit, num)
1024            figure(num);
1025            plot(mat.strain, mat.stress,'-o');
1026            hold on;grid on;box on;
1027            title(['Uniaxial strain-stress of ',mat.type]);
1028            xlabel(['strain (',unit{1,2},'/',unit{1,2},')']);
1029            ylabel(['stress (',unit{1,1},'/',unit{1,2},'^2']);
1030        end % function getPlot
1031
1032        function finalPlot(mat, unit, num)
1033            figure(num);
1034            plot(mat.uni_strain_stress(:,1), mat.uni_strain_stress(:,2));
1035            grid on;box on;
1036            title(['Uniaxial strain-stress of ',mat.type]);
1037            xlabel(['strain (',unit{1,2},'/',unit{1,2},')']);
1038            ylabel(['stress (',unit{1,1},'/',unit{1,2},'^2']);
1039        end % function finalPlot
1040
1041    end % methods
1042
1043 end % classdef
```

I.4 Parte IV: Metodi e Identificazione dei parametri Data-Driven

Questa sezione riguarda le tecniche automatizzate di identificazione dei parametri e calibrazione del modello utilizzando MATLABottimizzazione e analisi dei dati.

I.4.1 Programma di identificazione del parametro

Questa appendice elenca il codice sorgente completo MATLAB descritto in §65.6per un programma di identificazione dei parametri non lineari meno-quares che accoppia MATLAB's `lsqnonlin` ottimizzatore con un solvente di elementi finiti esterno (ATENA). Il programma è basato sui dati: tutta la configurazione viene letta da un foglio elettronico Excel (`Log.xlsx`), che consente di modificare il problema dell'ottimizzazione senza modificare il codice. Il programma viene eseguito in ogni valutazione delle funzioni da (1) aggiornamento dei parametri del modello in un file di input temporaneo, (2) lanciare il risolutore esterno, (3) lettura e aggregazione delle previsioni del risolutore, (4) elaborazione residui, e (5) Aggiornare una dashboard in tempo reale. Un registro persistente registra tutte le iterazioni al file Excel.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

I.4.2 Programma principale e Orchestrazione di base

L'orchestrazione inizia al punto di ingresso `Main.m`, che aggiunge semplicemente la cartella funzioni al percorso e le chiamate `ParIdentification()`. La funzione principale `ParIdentification.m` legge la configurazione dal foglio di calcolo, inizializza tutte le strutture dei dati, esegue un'esecuzione diagnostica a secco all'ipotesi iniziale x_0, e poi lancia il `lsqnonlin` ottimizzatore. La funzione nidificata `minfunc` viene chiamata ad ogni valutazione delle funzioni e implementa la catena completa: aggiornamento dei parametri, lancio del risolutore, parsing di output, calcolo residuo e aggiornamento della dashboard. I dati di valutazione del registro dell'helper locale vengono eseguiti in un file CSV e gestiscono una piccola finestra di progresso.

```
clear;close all;clc
addpath(fullfile(fileparts(mfilename('fullpath')), 'functions'));

ParIdentification();
```

Listing I.1: Main.m – Entry point

```
function ParIdentification()
%PARIDENTIFICATION Main function for parameter identification using lsqnonlin.
%
%   Reads control data from Log.xlsx, initializes the optimization,
%   and runs lsqnonlin with ATENA as the external solver.
%   minfunc is a nested function with direct access to all shared variables.

%-------------------------------------------
% Read control data from spreadsheet
%-------------------------------------------
S = readInputSheet('Log.xlsx', 'Input');

%-------------------------------------------------------
% Read initial values, lower and upper bounds
%-------------------------------------------------------
[x0, lb, ub] = extractEvaluateValues(S.inpFile, S.modelPar);
S.lb = lb;
S.ub = ub;

%-------------------------------------------------------
% Create temp file for optimization
%-------------------------------------------------------
inpFileTemp = createTempInputFile(S.inpFile);

%-------------------------------------------------------
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
% Initialize PI sheet in log file (row-wise)
%-------------------------------------------------------------
piSheetName = initPISheet('Log.xlsx', S, x0);

%-------------------------------------------------------------
% Initialize counters and dashboard handles
%-------------------------------------------------------------
nFnEval      = 0;
nIter        = 0;
X            = x0;
hDashboard   = [];
hProgress    = [];
isDryRunCall = false;
lastIterTic  = tic;

%-------------------------------------------------------------
% Keep last successful dry-run results
%-------------------------------------------------------------
predictedLast = [];
resLast       = [];

%-------------------------------------------------------------
% Open persistent CSV log for all evaluations
%-------------------------------------------------------------
logFID = fopen('minfunc_log.csv', 'w');
fprintf(logFID, 'call,%s,residual_norm,status\n', strjoin(S.modelPar,
    ','));

%=============================================================
% PRE-OPTIMIZATION DIAGNOSTICS
%=============================================================
fprintf('\n=== PRE-OPTIMIZATION DIAGNOSTICS ===\n');
fprintf('x0 : '); fprintf('%10.4f ', x0);   fprintf('\n');
fprintf('lb : '); fprintf('%10.4f ', S.lb); fprintf('\n');
fprintf('ub : '); fprintf('%10.4f ', S.ub); fprintf('\n');

inBounds = all(x0 >= S.lb & x0 <= S.ub);
fprintf('x0 within bounds: %s\n', mat2str(inBounds));
if ~inBounds
    fclose(logFID);
    error('ParIdentification:boundsViolation', ...
          'x0 violates bounds - fix extractEvaluateValues before
    continuing.');
end

```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
fprintf('\nCalling minfunc(x0) as dry run...\n');
isDryRunCall = true;
try
    r_test = minfunc(x0);
    fprintf('Residuals : '); fprintf('%12.6f ', r_test); fprintf('\n');
    fprintf('Any NaN   : %d\n', any(isnan(r_test)));
    fprintf('Any Inf   : %d\n', any(isinf(r_test)));
catch ME
    fprintf('minfunc THREW AN ERROR:\n  %s\n', ME.message);
    fclose(logFID);
    rethrow(ME);
end
isDryRunCall = false;
fprintf('=====================================\n\n');

%-------------------------------------------------------------------------
% Keep the existing dashboard windows, but clear the dry-run
% history so it does not count as part of the optimization.
% Then replot the dry run as iteration 0 at Fn eval = 0.
%-------------------------------------------------------------------------
if ~isempty(hDashboard) && isstruct(hDashboard) && ...
   isfield(hDashboard, 'res') && ishghandle(hDashboard.res)

    ud = get(hDashboard.res, 'UserData');
    if isstruct(ud)
        if isfield(ud, 'relErrHist'), ud.relErrHist(:) = nan; end
        if isfield(ud, 'absResHist'), ud.absResHist(:) = nan; end
        if isfield(ud, 'xHist'),      ud.xHist(:)      = nan; end
        if isfield(ud, 'fEvalVec'),   ud.fEvalVec(:)   = nan; end
        ud.nE = 0;
        set(hDashboard.res, 'UserData', ud);
    end
end

% Reset counters so the dry run does not count
nFnEval = 0;
nIter   = 0;
X       = x0;

% Replot dry run as iteration 0 at function evaluation 0
if ~isempty(predictedLast) && ~isempty(resLast)
    hDashboard = updatePlots(hDashboard, S, X, x0, predictedLast, ...
   resLast, ...
                             0, false, true);
end
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
113
114 % Reset again so the actual optimization starts clean
115 nFnEval = 0;
116 nIter   = 0;
117 X       = x0;
118
119 % Start timing from the first true iteration of the real run
120 lastIterTic = tic;
121
122 % Save checkpoint for crash recovery / re-diagnostics
123 save('debug_checkpoint.mat', 'S', 'x0');
124 fprintf('Checkpoint saved to debug_checkpoint.mat\n\n');
125
126 %=========================================================
127 % RUN OPTIMIZATION
128 %=========================================================
129 [x, resnorm, res, exitflag, output] = runLSQnonlin(S, x0, @minfunc);
130
131 %---------------------------------------------------------
132 % Close log and report results
133 %---------------------------------------------------------
134 fclose(logFID);
135
136 fprintf('\n=== Optimization completed ===\n');
137 fprintf('Exit flag : %d\n',   exitflag);
138 fprintf('Iterations: %d\n',   output.iterations);
139 fprintf('Func evals: %d\n',   output.funcCount);
140 fprintf('Norm resid: %.6e\n', resnorm);
141 fprintf('Identified parameters:\n');
142 for k = 1:numel(S.modelPar)
143     fprintf('   %s = %.6g\n', S.modelPar{k}, x(k));
144 end
145
146 % Timestamped save of final result
147 resultFile = sprintf('result_%s.mat', datestr(now, 'yyyymmdd_HHMMSS'));
148 save(resultFile, 'x', 'resnorm', 'res', 'exitflag', 'output', 'S',
    'x0');
149 fprintf('Results saved to %s\n', resultFile);
```

Listing I.2: ParIdentification.m – Main function and nested objective function (part 1 of 2)

```
154 %=========================================================
155 % NESTED OBJECTIVE FUNCTION
156 %=========================================================
157     function res = minfunc(x)
```

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

```
158     %MINFUNC Objective function called by lsqnonlin at every function
    evaluation.
159 
160         nFnEval = nFnEval + 1;
161         nPar    = numel(S.modelPar);
162 
163         %--------------------------------------------------
164         % Determine if this is a true optimization iteration.
165         % Important: the diagnostic dry run must NOT be logged
166         % as a real iteration.
167         %--------------------------------------------------
168         isIteration = ~isDryRunCall && ...
169                       ((mod(nFnEval, nPar + 1) == 0) || (nFnEval ==
    1));
170 
171         %--------------------------------------------------
172         % Update progress window
173         %--------------------------------------------------
174         hProgress = updateProgressWindow(hProgress, nFnEval, nIter, x,
    S.modelPar);
175         fprintf('   Function evaluation #%d\n', nFnEval);
176 
177         %--------------------------------------------------
178         % Write current parameters to temp input file
179         %--------------------------------------------------
180         updateEvaluateValues(inpFileTemp, S.modelPar, x,
    ~isDryRunCall);
181 
182         %--------------------------------------------------
183         % Run ATENA
184         %--------------------------------------------------
185         fprintf('%s  Launching ATENA...\n', datestr(now));
186         [status, cmdout] = runAnalysis(S.exeName, inpFileTemp, ...
187                                        S.AtenaOut, S.AtenaMsg,
    S.AtenaErr);
188 
189         if status ~= 0
190             warning('ATENA failed at evaluation #%d:\n%s', nFnEval,
    cmdout);
191             res = ones(size(S.fieldAggValues));
192             predictedLast = nan(size(S.fieldAggValues));
193             resLast       = res;
194 
195             if ~isDryRunCall
196                 logEval(logFID, nFnEval, x, NaN, 'ATENA_FAIL');
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
            end

            return
        end

        %-------------------------------------------------
        % Preserve a copy of the ATENA output file
        % after each successful true optimization run.
        % The dry run is deliberately skipped to avoid
        % overwriting out-1.out before the real run starts.
        %-------------------------------------------------
        if ~isDryRunCall
            [pth, nam, ext] = fileparts(S.outFile);
            outCopy = fullfile(pth, sprintf('%s-%d%s', nam, nFnEval,
    ext));

            if isfile(S.outFile)
                [copyOK, copyMsg] = copyfile(S.outFile, outCopy);
                if ~copyOK
                    warning('Could not copy ATENA output file at
    evaluation #%d:\n%s', ...
                            nFnEval, copyMsg);
                else
                    fprintf('   Copied ATENA output to %s\n', outCopy);
                end
            else
                warning('Expected ATENA output file not found at
    evaluation #%d:\n%s', ...
                        nFnEval, S.outFile);
            end
        end

        %-------------------------------------------------
        % Read model predictions
        %-------------------------------------------------
        ModelPredValues = readModelPredValues(S.outFile, S.modelPred);

        %-------------------------------------------------
        % Compute aggregated predictions
        %-------------------------------------------------
        predicted = cellfun(@(f) f(ModelPredValues), S.fieldAggFcn);

        %-------------------------------------------------
        % Compute residuals
        %-------------------------------------------------
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
        res      = predicted - S.fieldAggValues;
        norm_res = norm(res);

        predictedLast = predicted;
        resLast       = res;

        %-----------------------------------------------------
        % Guard against NaN/Inf from bad ATENA output
        %-----------------------------------------------------
        if any(~isfinite(res))
            warning('NaN/Inf in residuals at eval #%d - substituting
    1e6', nFnEval);
            res(~isfinite(res)) = 1e6;
            norm_res = norm(res);
            resLast  = res;

            if ~isDryRunCall
                logEval(logFID, nFnEval, x, norm_res, 'NAN_IN_RES');
            end
        else
            if ~isDryRunCall
                logEval(logFID, nFnEval, x, norm_res, 'OK');
            end
        end

        fprintf('   Norm of residual: %.6e\n', norm_res);

        %-----------------------------------------------------
        % Update progress window with norm
        %-----------------------------------------------------
        hProgress = updateProgressWindow(hProgress, nFnEval, nIter, x,
    S.modelPar, norm_res);

        %-----------------------------------------------------
        % Update dashboard
        %-----------------------------------------------------
        hDashboard = updatePlots(hDashboard, S, X, x, predictedLast,
    resLast, ...
                                 nFnEval, isIteration, isDryRunCall);

        %-----------------------------------------------------
        % Log true iterations to Excel and save snapshot
        %-----------------------------------------------------
        if isIteration
            nIter = nIter + 1;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
            fprintf('   === Iteration #%d completed, norm = %.6e ===\n', nIter, norm_res);

            X = [X; x(:)'];

            iterTime_hr = toc(lastIterTic) / 3600;
            lastIterTic = tic;

            predOverTarget = nan(size(predictedLast));
            mask = isfinite(predictedLast) & ...
                   isfinite(S.fieldAggValues) & ...
                   (S.fieldAggValues ~= 0);

            predOverTarget(mask) = predictedLast(mask) ./ S.fieldAggValues(mask);

            logIterationToSheet('Log.xlsx', piSheetName, nIter, x, ...
                                predOverTarget, resLast, iterTime_hr);

            save(sprintf('iter_%03d.mat', nIter), ...
                 'x', 'norm_res', 'res', 'nIter', 'nFnEval', ...
                 'predictedLast', 'predOverTarget', 'iterTime_hr');
        end

    end % minfunc

end % ParIdentification


%=================================================================
% LOCAL HELPER: write one line to the CSV evaluation log
%=================================================================
function logEval(fid, callNum, x, normVal, status)
    if isnan(normVal)
        normStr = 'NaN';
    else
        normStr = sprintf('%.8f', normVal);
    end
    xStr = strjoin(arrayfun(@(v) sprintf('%.6f', v), x(:)', 'UniformOutput', false), ',');
    fprintf(fid, '%d,%s,%s,%s\n', callNum, xStr, normStr, status);
end


%=================================================================
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
% LOCAL FUNCTION: progress window
%=========================================================
function hProgress = updateProgressWindow(hProgress, nFnEval, nIter,
    x, parNames, normRes)
%UPDATEPROGRESSWINDOW Create or update a small progress window.

    if isempty(hProgress) || ~ishandle(hProgress)
        hProgress = figure('Name',        'Optimization Progress', ...
                           'NumberTitle', 'off', ...
                           'MenuBar',     'none', ...
                           'ToolBar',     'none', ...
                           'Resize',      'off', ...
                           'Position',    [20 20 320 400], ...
                           'Color',       [0.95 0.95 0.95]);

        uicontrol(hProgress, 'Style', 'text', 'Tag', 'lblFnEval', ...
            'Units', 'pixels', 'Position', [10 360 300 28], ...
            'FontSize', 11, 'FontWeight', 'bold', ...
            'BackgroundColor', [0.95 0.95 0.95], ...
            'HorizontalAlignment', 'left');

        uicontrol(hProgress, 'Style', 'text', 'Tag', 'lblIter', ...
            'Units', 'pixels', 'Position', [10 330 300 28], ...
            'FontSize', 11, 'FontWeight', 'bold', ...
            'BackgroundColor', [0.95 0.95 0.95], ...
            'HorizontalAlignment', 'left');

        uicontrol(hProgress, 'Style', 'text', 'Tag', 'lblNorm', ...
            'Units', 'pixels', 'Position', [10 300 300 28], ...
            'FontSize', 11, 'FontWeight', 'bold', ...
            'BackgroundColor', [0.95 0.95 0.95], ...
            'HorizontalAlignment', 'left');

        nPar = numel(parNames);
        for k = 1:nPar
            yPos = 270 - (k - 1) * 25;
            uicontrol(hProgress, 'Style', 'text', ...
                'Tag', sprintf('lblPar%d', k), ...
                'Units', 'pixels', ...
                'Position', [10 yPos 300 22], ...
                'FontSize', 9, ...
                'BackgroundColor', [0.95 0.95 0.95], ...
                'HorizontalAlignment', 'left');
        end
    end
```

COPIA DI REVISIONE

```
367
368     setfield_text(hProgress, 'lblFnEval', sprintf('Function
    evaluations: %d', nFnEval));
369     setfield_text(hProgress, 'lblIter',   sprintf('Iterations
    completed: %d', nIter));
370
371     if nargin >= 6 && ~isempty(normRes)
372         setfield_text(hProgress, 'lblNorm', sprintf('Norm of residual:
            %.4e', normRes));
373     else
374         setfield_text(hProgress, 'lblNorm', 'Norm of residual:
    ...');
375     end
376
377     for k = 1:numel(x)
378         setfield_text(hProgress, sprintf('lblPar%d', k), ...
379             sprintf('  %s = %.6g', parNames{k}, x(k)));
380     end
381
382     drawnow;
383 end
384
385
386 function setfield_text(hFig, tag, str)
387     h = findobj(hFig, 'Tag', tag);
388     if ~isempty(h)
389         set(h, 'String', str);
390     end
391 end
```

Listing I.3: ParIdentification.m – Nested objective function and local helpers (part 2 of 2)

I.4.3 Integrazione di dati I/O e Spreadsheet

Questa sottosezione contiene tutte le funzioni responsabili della lettura della configurazione dal foglio di controllo Excel, estraendo i parametri del modello e i limiti dal file di input ATENA e gestendo il registro dell'iterazione. `readInputSheet` la funzione legge tutte le opzioni del risolutore, i nomi dei parametri, i nominativi delle previsioni e le espressioni di aggregazione dal foglio di calcolo utilizzando un modello di ricerca basato su parole chiave. `extractEvaluateValues` e `updateEvaluateValues` funzioni rispettivamente parse e modificare le linee EVALUATE nel file di input. L'output di previsione del modello è parsed da `readModelPredValues`, quali blocchi di dati dal file di output ATENA ed estrae il valore monitorato finale per ogni quantità richiesta. `initPISheet` e `logIterationToSheet` funzioni gestiscono il registro di iterazione

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

senso della riga nel file Excel, registrando numero di iterazione, timestamp, tempo trascorso, valori dei parametri, rapporti predizione-to-target e residui.

```
function S = readInputSheet(filename, sheetName)
%READINPUTSHEET Read optimization input data from Excel sheet.
if nargin < 1 || isempty(filename);  filename  = 'Log.xlsx'; end
if nargin < 2 || isempty(sheetName); sheetName = 'Input';    end
    raw = readcell(filename, 'Sheet', sheetName);
    S.exeName        = readScalarByKey(raw, 'exeName');
    S.inpFile        = readScalarByKey(raw, 'inpFile');
    S.outFile        = readScalarByKey(raw, 'outFile');
    S.modelPar       = readTextVectorByKey(raw, 'modelPar');
    S.modelPred      = readTextVectorByKey(raw, 'modelPred');
    S.fieldAggExpr   = readTextVectorByKey(raw, 'fieldAggExp');
    S.fieldAggValues = readNumericVectorByKey(raw, 'fieldAggValues');
    S.fieldAggFcn    = buildFieldAggFunctions(S.fieldAggExpr,
   S.modelPred);
    S.maxFunEval     = str2double(readScalarByKey(raw, 'maxFunEval'));
    S.maxIter        = str2double(readScalarByKey(raw, 'maxIter'));
    S.tolFun         = str2double(readScalarByKey(raw, 'tolFun'));
    S.tolX = str2double(readScalarByKey(raw, 'StepTol'));
    S.algorithm      = readScalarByKey(raw, 'algorithm');
    S.display        = readScalarByKey(raw, 'display');
    S.fdStepSize     = str2double(readScalarByKey(raw,
   'FiniteDifferenceStepSize'));
    S.fdType         = readScalarByKey(raw, 'FiniteDifferenceType');

    S.AtenaOut=[S.inpFile '.out'];
    S.AtenaErr=[S.inpFile '.err'];
    S.AtenaMsg=[S.inpFile '.msg'];
    S.inpFile=[S.inpFile '.inp'];
end
```

Listing I.4: readInputSheet.m – Read all configuration from Excel

```
function [x, lb, ub] = extractEvaluateValues(filename, names)
%EXTRACTEVALUATEVALUES Extract EVALUATE values and bounds from input
   file.
%
%   Reads each EVALUATE line of the form:
%       EVALUATE "Name = /*# Name */ value"   // Recommended range lb
   - ub
%   and returns the current values, lower bounds, and upper bounds for
   the
%   requested parameter names. Bounds are set to NaN if not present on
   the line.
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
%
%   Inputs:
%       filename - path to the input file (e.g. S.inpFile)
%       names    - cell array of parameter names (e.g. S.modelPar)
%
%   Outputs:
%       x  - current parameter values  [1 x n]
%       lb - lower bounds              [1 x n]
%       ub - upper bounds              [1 x n]
%
%   Example:
%       [x0, lb, ub] = extractEvaluateValues(S.inpFile, S.modelPar);
    if ischar(names) || isstring(names); names = cellstr(names); end
    txt   = fileread(filename);
    lines = regexp(txt, '\r\n|\n|\r', 'split');
    lookupX  = containers.Map('KeyType','char','ValueType','double');
    lookupLB = containers.Map('KeyType','char','ValueType','double');
    lookupUB = containers.Map('KeyType','char','ValueType','double');
    numPat = '([-+]?\d*\.?\d+(?:[eEdD][+-]?\d+)?)';
    for i = 1:numel(lines)
        line = strtrim(lines{i});
        if ~strncmpi(line, 'EVALUATE', 8); continue; end
        tok = regexp(line, ...
    ['EVALUATE\s+"([A-Za-z0-9_]+)\s*=\s*/\*#\s*[A-Za-z0-9_]+\s*\*/\s*'
    numPat], ...
            'tokens', 'once');
        if isempty(tok); continue; end
        varName = strtrim(tok{1});
        varVal  = str2double(tok{2});
        lookupX(varName) = varVal;
        tokBounds = regexp(line, ...
            ['Recommended\s+range\s+' numPat '\s*-\s*' numPat], ...
            'tokens', 'once');
        if ~isempty(tokBounds)
            lookupLB(varName) = str2double(tokBounds{1});
            lookupUB(varName) = str2double(tokBounds{2});
        else
            lookupLB(varName) = NaN;
            lookupUB(varName) = NaN;
        end
    end
    x  = NaN(1, numel(names));
    lb = NaN(1, numel(names));
    ub = NaN(1, numel(names));
```

COPIA DI REVISIONE

```
    for i = 1:numel(names)
        key = char(names{i});
        if isKey(lookupX,  key); x(i)  = lookupX(key);  end
        if isKey(lookupLB, key); lb(i) = lookupLB(key); end
        if isKey(lookupUB, key); ub(i) = lookupUB(key); end
    end
end
```

Listing I.5: extractEvaluateValues.m – Parse EVALUATE lines from input file

```
function inpFileTemp = createTempInputFile(inpFile)
%CREATETEMPINPUTFILE Create a temporary copy of the input file for optimization.
%
%   Creates a working copy of the input file that will be continuously
%   overwritten during the optimization iterations, leaving the original
%   input file untouched.
%
%   Input:
%       inpFile     - path to the original input file (e.g. S.inpFile)
%
%   Output:
%       inpFileTemp - path to the temporary copy (e.g. 'input_temp.dat')
%
%   Example:
%       inpFileTemp = createTempInputFile(S.inpFile);
    [folder, name, ext] = fileparts(inpFile);
    inpFileTemp = fullfile(folder, [name '_temp' ext]);
    [ok, msg]   = copyfile(inpFile, inpFileTemp);
    if ~ok; error('Could not copy %s to %s: %s', inpFile, inpFileTemp, msg); end
end
```

Listing I.6: createTempInputFile.m – Create working copy of input file

```
function updateEvaluateValues(filename, names, Xnew, verbose)
    if nargin < 4
        verbose = true;
    end
%UPDATEEVALUATEVALUES Overwrite EVALUATE values in input file with new values.
%
%   Reopens the input file and replaces the numeric values associated with
```

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

```
%   each parameter name in 'names' with the corresponding new values in
%   Xnew. The file format expected is:
%       EVALUATE "ParName = /*# ParName */ oldvalue"

    if numel(names) ~= numel(Xnew)
        error('names and Xnew must have the same number of elements.');
    end

    txt = fileread(filename);

    for k = 1:numel(names)
        name     = char(names{k});
        valueStr = num2str(Xnew(k), '%.15g');

        pattern = ['(EVALUATE\s+"', regexptranslate('escape', name), ...
                   '\s*=\s*/\*#\s*', regexptranslate('escape', name), ...
    '\s*\*/\s*)([-+]?\d*\.?\d+(?:[eEdD][-+]?\d+)?)(\")'];

        % Check whether the parameter line is found
        tok = regexp(txt, pattern, 'tokens', 'once');

        if isempty(tok)
            warning('Parameter %s not found in file %s.', name, filename);
            continue
        end

        oldValueStr = tok{2};

        repl   = ['$1' valueStr '$3'];
        txtNew = regexprep(txt, pattern, repl, 'once');

        if strcmp(strtrim(oldValueStr), strtrim(valueStr))
            if verbose
                fprintf('Parameter %s matched; value unchanged (%s)\n', name, valueStr);
            end
        else
            if verbose
                fprintf('Parameter %s updated: %s -> %s\n', name, oldValueStr, valueStr);
            end
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
        end

        txt = txtNew;
    end

    fid = fopen(filename, 'w');
    if fid == -1
        error('Could not open %s for writing.', filename);
    end
    cleaner = onCleanup(@() fclose(fid));
    fwrite(fid, txt, 'char');
end
```

Listing I.7: updateEvaluateValues.m – Overwrite parameters in input file

```
function ModelPredValues = readModelPredValues(outFile, modelPred)
%READMODELPREDVALUES  Read the last monitored value for each modelPred string
%                     from an ATENA output file (monitors.csv / output.dat).
%
%  Each block in the file has the structure:
%
%    Output data for request ; MONITOR_SET_2_SAB_86M_X_|108309|_DISPLACEMENTS #100000 ;
%    Data for the monitored output: ...
%    ; Step ; 5 ; Iteration ; 60 ; at Time ; 5 ;
%    ----...---- ;
%    Id ;  Time ;  Step ;  X(1) ;            <- header  (skipped)
%    Units ;  day ;  None ;  m ;             <- units   (skipped)
%    1 ;  0. ;  0. ;  0. ;                   <- data rows
%    ...
%    6 ;  5. ;  5. ;  0.0013112 ;           <- LAST data row -> value kept
%
%  The value of interest is the LAST numeric token on the LAST data row
%  (i.e. the last non-empty field before the trailing ";").  This handles
%  blocks with 1 output column (X(1) only) as well as blocks with 3 columns
%  (X(1), X(2), X(3)), where the relevant displacement has been pre-selected
%  by the monitor definition.
%
%  Matching is case-insensitive: modelPred = 'SAB_86m_X' matches
%  'MONITOR_SET_2_SAB_86M_X_|108309|_DISPLACEMENTS #100000'.
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
%
%  INPUT
%    outFile   - path to the ATENA output file
%    modelPred - char, string, or cell array of strings to look up
%
%  OUTPUT
%    ModelPredValues - 1 x numel(modelPred) double (NaN if not found)

%-- normalise modelPred to a cell array of char ---------------------
if ischar(modelPred) || isstring(modelPred)
    modelPred = cellstr(modelPred);
end
nPred = numel(modelPred);

%-- read file -------------------------------------------------------
txt   = fileread(outFile);
lines = regexp(txt, '\r\n|\n|\r', 'split');

%-- initialise state machine ----------------------------------------
lookup     = containers.Map('KeyType','char','ValueType','double');
currentKey = '';   % modelPred entry currently being accumulated
lastVal    = NaN;  % last valid numeric value seen in current block

%-- pattern for the block-header line -------------------------------
headerPat = 'Output\s+data\s+for\s+request\s*;\s*([^;]+)\s*;';

for i = 1:numel(lines)
    line = strtrim(lines{i});

    %-- detect a new block header -----------------------------------
    tok = regexp(line, headerPat, 'tokens', 'once');
    if ~isempty(tok)
        % save whatever we accumulated for the previous block
        if ~isempty(currentKey)
            lookup(currentKey) = lastVal;
        end

        requestName = upper(strtrim(tok{1}));
        currentKey  = '';
        lastVal     = NaN;
```

COPIA DI REVISIONE

```
65
66          % find which modelPred (if any) this block belongs to
67          for j = 1:nPred
68              candidate = char(modelPred{j});
69              if contains(requestName, upper(candidate))
70                  currentKey = candidate;   % keep original spelling as
    key
71                  break
72              end
73          end
74          continue
75      end
76
77      % ---- only process data lines when inside a matching block --------
78      if isempty(currentKey)
79          continue
80      end
81
82      % skip separator, header, and units lines
83      if isempty(line) ...
84              || startsWith(line, '-') ...
85              || startsWith(line, 'Id') ...
86              || startsWith(line, 'Units') ...
87              || startsWith(line, 'Data') ...
88              || startsWith(line, ';')          % summary line "  ; Step
    ; 5 ..."
89          continue
90      end
91
92      % ---- parse a data row
    ------------------------------------------------
93      % Data rows look like:  "    6 ;         5. ;         5. ;
    0.0013112 ;"
94      % Split on ";", strip whitespace, drop empty tokens.
95      cols = strsplit(line, ';');
96      cols = strtrim(cols);
97      cols = cols(~cellfun(@isempty, cols));   % remove trailing empty
    field
98
99      % A valid data row must start with an integer Id (first field is a
100     % non-negative integer or a number with a trailing dot like "6.").
101     if isempty(cols)
102         continue
103     end
104     firstNum = str2double(cols{1});
```

COPIA DI REVISIONE

```
    if isnan(firstNum) || firstNum < 0 || firstNum ~= floor(firstNum)
        % not a numeric data row (e.g. a stray text line)
        % allow "6." style (floor(6.) == 6)
        if ~(~isnan(firstNum) && firstNum == floor(firstNum))
            continue
        end
    end

    % The value of interest is the LAST numeric token in the row.
    % (For a 3-component block the monitor definition selects one direction,
    %  which happens to be the last populated column.)
    v = NaN;
    for k = numel(cols):-1:1
        candidate_v = str2double(cols{k});
        if ~isnan(candidate_v)
            v = candidate_v;
            break
        end
    end
    if ~isnan(v)
        lastVal = v;   % keep updating; loop ends on the last row
    end
end

% ---- save the final block ----------------------------------------
if ~isempty(currentKey)
    lookup(currentKey) = lastVal;
end

% ---- assemble output vector --------------------------------------
ModelPredValues = NaN(1, nPred);
for i = 1:nPred
    key = char(modelPred{i});
    if isKey(lookup, key)
        ModelPredValues(i) = lookup(key);
    end
end

end
```

Listing I.8: readModelPredValues.m – Extract monitored outputs from ATENA output

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
function piSheetName = initPISheet(logFile, S, x0)
%INITPISHEET Create a new PI #n sheet in row-wise format.
%
%   piSheetName = initPISheet(logFile, S, x0)
%
%   Creates the next available sheet named PI #1, PI #2, ...
%   and writes:
%     - row 1: headers
%     - row 2: iteration 0 (initial guess x0)
%
%   Columns are:
%     Iter | Timestamp | IterTime_hr | <parameters...> |
    <Pred/Target...> | <Residual...>

    %-----------------------------------------------------------------
    % Determine next available PI sheet name
    %-----------------------------------------------------------------
    [~, sheetNames] = xlsfinfo(logFile);
    if isempty(sheetNames)
        sheetNames = {};
    end

    n = 1;
    while any(strcmp(sheetNames, sprintf('PI #%d', n)))
        n = n + 1;
    end
    piSheetName = sprintf('PI #%d', n);

    nPar = numel(S.modelPar);
    nAgg = numel(S.fieldAggExpr);

    %-----------------------------------------------------------------
    % Build header row
    %-----------------------------------------------------------------
    headers = cell(1, 3 + nPar + nAgg + nAgg);
    c = 1;

    headers{c} = 'Iter';          c = c + 1;
    headers{c} = 'Timestamp';     c = c + 1;
    headers{c} = 'IterTime_hr';   c = c + 1;

    for k = 1:nPar
        headers{c} = S.modelPar{k};
        c = c + 1;
    end
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
45
46      for k = 1:nAgg
47          headers{c} = sprintf('PredTarget_%02d', k);
48          c = c + 1;
49      end
50
51      for k = 1:nAgg
52          headers{c} = sprintf('Residual_%02d', k);
53          c = c + 1;
54      end
55
56      %--------------------------------------------------------------
57      % Build iteration-0 row
58      %--------------------------------------------------------------
59      row0 = cell(1, numel(headers));
60      c = 1;
61
62      row0{c} = 0;                                          c = c + 1;
63      row0{c} = datestr(now, 'dd-mmm-yyyy HH:MM:SS'); c = c + 1;
64      row0{c} = 0;                                          c = c + 1;
65
66      for k = 1:nPar
67          row0{c} = x0(k);
68          c = c + 1;
69      end
70
71      % Leave blank for Pred/Target and Residual columns
72      for k = 1:(2*nAgg)
73          row0{c} = [];
74          c = c + 1;
75      end
76
77      %--------------------------------------------------------------
78      % Write to Excel
79      %--------------------------------------------------------------
80      warning('off', 'MATLAB:xlswrite:AddSheet');
81      xlswrite(logFile, headers, piSheetName, 'A1');
82      xlswrite(logFile, row0,    piSheetName, 'A2');
83      warning('on',  'MATLAB:xlswrite:AddSheet');
84  end
```

Listing I.9: initPISheet.m – Create new PI log sheet with headers

```
1  function logIterationToSheet(logFile, sheetName, nIter, x,
       predOverTarget, res, iterTime_hr)
2  %LOGITERATIONTOSHEET Append one iteration as one row to the PI sheet.
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
%
%   logIterationToSheet(logFile, sheetName, nIter, x, predOverTarget, res, iterTime_hr)
%
%   Appends a new row with:
%     Iter | Timestamp | IterTime_hr | <parameters...> | <Pred/Target...> | <Residual...>

    if nargin < 7
        error('logIterationToSheet requires 7 inputs.');
    end

    x = x(:).';
    predOverTarget = predOverTarget(:).';
    res = res(:).';

    [~, ~, raw] = xlsread(logFile, sheetName);

    if isempty(raw)
        nextRow = 1;
    else
        nextRow = size(raw, 1) + 1;
    end

    row = cell(1, 3 + numel(x) + numel(predOverTarget) + numel(res));
    c = 1;

    row{c} = nIter;                                  c = c + 1;
    row{c} = datestr(now, 'dd-mmm-yyyy HH:MM:SS');   c = c + 1;
    row{c} = iterTime_hr;                            c = c + 1;

    for k = 1:numel(x)
        row{c} = x(k);
        c = c + 1;
    end

    for k = 1:numel(predOverTarget)
        if isfinite(predOverTarget(k))
            row{c} = predOverTarget(k);
        elseif isnan(predOverTarget(k))
            row{c} = 'NaN';
        else
            row{c} = 'Inf';
        end
        c = c + 1;
```

COPIA DI REVISIONE

```
    end

    for k = 1:numel(res)
        if isfinite(res(k))
            row{c} = res(k);
        elseif isnan(res(k))
            row{c} = 'NaN';
        else
            row{c} = 'Inf';
        end
        c = c + 1;
    end

    range = sprintf('A%d', nextRow);
    xlswrite(logFile, row, sheetName, range);
end
```

Listing I.10: logIterationToSheet.m – Append iteration row to PI log

I.4.4 Ottimizzazione del flusso di lavoro e funzioni ausiliarie

Questa sottosezione contiene le restanti funzioni pubbliche che implementano il loop di ottimizzazione e la dashboard in tempo reale, insieme a tutte le funzioni di helper privati. `runAnalysis` la funzione lancia il risolutore ATENA esterno come processo di sfondo e cattura l'output della console. `runLSQnonlin` la funzione avvolge il nativo di MATLAB `lsqnonlin` ottimizzatore, applicando le opzioni di risoluzione leggere dal foglio di controllo e calcolando tolleranze adattative in base ai limiti dei parametri. `updatePlots` la funzione mantiene due figure live dashboard: una che mostra residui (predicted vs. target e residuo assoluto su scala di log) e l'altra evoluzione dei parametri di tracciamento in tutte le valutazioni delle funzioni, con distinzione tra le valutazioni della sonda e vere iterations. `functions/private/` cartella forniscono utilità di basso livello per la lettura dei dati di configurazione dal foglio di calcolo, funzioni di aggregazione della costruzione da espressioni definite dall'utente e normalizzazione del testo durante le ricerche.

```
function [status, cmdout] = runAnalysis(exeName, inpFile, outFile,
   msgFile, errFile)
    % Kill any lingering ATENA processes before starting
    [~, exeOnly, ext] = fileparts(exeName);
    system(sprintf('taskkill /F /IM "%s%s" /T 2>nul', exeOnly, ext));
    pause(3); % give OS time to release file locks

    cmd = sprintf('"%s" /O "%s" "%s" "%s" "%s" /num_unused_threads=2',
    ...
        exeName, inpFile, outFile, msgFile, errFile);
    [status, cmdout] = system(cmd, '-echo');
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
end
```

Listing I.11: runAnalysis.m – Launch external ATENA solver

```
function [x, norm, res, exitflag, output] = runLSQnonlin(S, x0,
    minfunc)
%RUNLSQNONLIN Set up and run lsqnonlin using solver options from
    Log.xlsx.
%
%   Tunable options (read from Excel):  Display, MaxFunEvals, MaxIter,
%                                       TolFun, TolX (dimensionless,
%                                       scaled internally by
    mean(lb+ub)/2),
%                                       Algorithm,
    FiniteDifferenceStepSize,
%                                       FiniteDifferenceType
%   Hardwired options:                  TypicalX=mean(lb,ub)
%
%   Example:
%       [x, norm, res, exitflag, output] = runLSQnonlin(S, x0, lb, ub,
    @minfunc);
    lb        = S.lb;
    ub        = S.ub;
    typicalX = (ub - lb) ./ 2;
    TolX      = S.tolX .* mean(typicalX);

    options = optimoptions('lsqnonlin', ...
        'Algorithm',                S.algorithm, ...
        'Display',                  S.display, ...
        'MaxFunctionEvaluations',   S.maxFunEval, ...
        'MaxIterations',            S.maxIter, ...
        'FunctionTolerance',        S.tolFun, ...
        'StepTolerance',            TolX, ...
        'FiniteDifferenceStepSize', S.fdStepSize, ...
        'FiniteDifferenceType',     S.fdType, ...
        'TypicalX',                 typicalX)

    [x, norm, res, exitflag, output] = lsqnonlin(minfunc, x0, lb, ub,
    options);
end
```

Listing I.12: runLSQnonlin.m – Configure and run optimizer

```
function hDashboard = updatePlots(hDashboard, S, X, xCur, predicted,
    res, nFnEval, isIteration, isIterZero)
%UPDATEPLOTS  Real-time dashboard, two separate figures.
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
%
%  Figure 1 "Residuals"  -- 2 rows x nAgg cols
%    Row 1 : predicted / target  (reference line at 1)
%    Row 2 : |residual| on log scale
%
%  Figure 2 "Parameters" -- 2 rows x ceil(nPar/2) cols
%    Row 1 : first  half of modelPar
%    Row 2 : second half of modelPar
%    Both  : grey probe dots (every fnEval), filled blue at true iterations,
%            dashed red lb / green ub lines.
%
%  X-axis everywhere: function-evaluation number.
%  True iterations fall at eval numbers nPar+1, 2*(nPar+1), ...
%
%  hDashboard is a struct with fields .res and .par; pass [] on first call.

    if nargin < 9
        isIterZero = false;
    end

    nAgg   = numel(S.fieldAggExpr);
    nPar   = numel(S.modelPar);
    nHalf  = ceil(nPar / 2);
    nHalf2 = nPar - nHalf;

    % ---------------------------------------------------------------
    % Build compact aggregate labels for titles
    % ---------------------------------------------------------------
    aggLabels = S.fieldAggExpr;
    for k = 1:nAgg
        lbl = aggLabels{k};
        lbl = regexprep(lbl, '^S([A-Z]{2}_)', '$1');
        aggLabels{k} = lbl;
    end

    % ---------------------------------------------------------------
    % Create figures on first call
    % ---------------------------------------------------------------
    needCreate = isempty(hDashboard) || ~isstruct(hDashboard) || ...
                 ~isfield(hDashboard,'res') || ~ishandle(hDashboard.res) || ...
                 ~isfield(hDashboard,'par') || ~ishandle(hDashboard.par);
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
    if ~needCreate
        ud_check = get(hDashboard.res, 'UserData');
        if ~isstruct(ud_check) || ~isfield(ud_check, 'relErrHist') ||
...
           ~isfield(ud_check, 'xHist') || ...
           size(ud_check.relErrHist, 2) ~= nAgg || ...
           size(ud_check.xHist, 2) ~= nPar
            try, close(hDashboard.res); end %#ok<TRYNC>
            try, close(hDashboard.par); end %#ok<TRYNC>
            needCreate = true;
        end
    end

    if needCreate
        scr = get(0, 'ScreenSize');

        % Figure 1: residuals — upper half of screen
        fw1 = min(scr(3) * 0.98, nAgg * 220 + 120);
        fh1 = min(scr(4) * 0.48, 520);
        hDashboard.res = figure( ...
            'Name',        'Optimization — Residuals', ...
            'NumberTitle', 'off', ...
            'Position',    [4, scr(4)*0.48, fw1, fh1]);

        % Figure 2: parameters — lower half of screen
        parCols = max(nHalf, nHalf2);
        fw2 = min(scr(3) * 0.60, parCols * 230 + 100);
        fh2 = min(scr(4) * 0.44, 460);
        hDashboard.par = figure( ...
            'Name',        'Optimization — Parameters', ...
            'NumberTitle', 'off', ...
            'Position',    [4, 30, fw2, fh2]);

        % History stored in Figure 1 UserData
        MAXEVAL = 10000;
        ud.relErrHist = nan(MAXEVAL, nAgg);
        ud.absResHist = nan(MAXEVAL, nAgg);
        ud.xHist      = nan(MAXEVAL, nPar);
        ud.fEvalVec   = nan(1, MAXEVAL);
        ud.nE         = 0;
        set(hDashboard.res, 'UserData', ud);
    end

    % ──────────────────────────────────────────────────────────────
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
    % Append current evaluation to history
    % ---------------------------------------------------------------
    ud     = get(hDashboard.res, 'UserData');
    nE     = ud.nE + 1;
    ud.nE = nE;

    if nE > size(ud.relErrHist, 1)
        growBy = 10000;
        ud.relErrHist(end+growBy, nAgg) = nan;
        ud.absResHist(end+growBy, nAgg) = nan;
        ud.xHist(end+growBy, nPar)      = nan;
        ud.fEvalVec(end+growBy)         = nan;
    end

    ud.fEvalVec(nE) = nFnEval;
    ud.xHist(nE, :) = xCur(:)';

    for k = 1:nAgg
        if S.fieldAggValues(k) == 0
            ud.relErrHist(nE, k) = nan;
        else
            ud.relErrHist(nE, k) = predicted(k) / S.fieldAggValues(k);
        end
        ud.absResHist(nE, k) = abs(res(k));
    end
    set(hDashboard.res, 'UserData', ud);

    ev = ud.fEvalVec(1:nE);

    % True-iteration eval numbers
    nIterSoFar  = size(X, 1);
    iterEvalNos = (nPar + 1) * (1:nIterSoFar);
    iterEvalNos(iterEvalNos > nFnEval) = [];
    nIterPlot   = numel(iterEvalNos);

    % Keep eval 0 visible when present
    xMin = min([0 ev]);
    xMax = max([5 nFnEval + ceil(0.05 * max(nFnEval,1) + 1)]);
    xlimVec = [xMin, xMax];

    % ---------------------------------------------------------------
    % Global y-limits for residual row on log scale
    % ---------------------------------------------------------------
    absRaw   = ud.absResHist(1:nE, :);
    absClean = absRaw(~isnan(absRaw) & isfinite(absRaw) & absRaw > 0);
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
133
134     if isempty(absClean)
135         absMin = 1e-12;
136         absMax = 1;
137     else
138         absMin = min(absClean);
139         absMax = max(absClean);
140
141         if absMin <= 0 || ~isfinite(absMin)
142             absMin = 1e-12;
143         end
144         if absMax <= absMin || ~isfinite(absMax)
145             absMax = 10 * absMin;
146         end
147
148         absMin = 10^(floor(log10(absMin)));
149         absMax = 10^(ceil(log10(absMax)));
150     end
```

Listing I.13: updatePlots.m – Real-time dashboard figures (part 1 of 4)

```
153     % ================================================================
154     % FIGURE 1 — Residuals
155     % ================================================================
156     figure(hDashboard.res);
157
158     for k = 1:nAgg
159
160         % ——— Row 1: relative error ———
161         ax = subplot(2, nAgg, k);
162         cla(ax); hold(ax, 'on');
163         grid(ax, 'on');
164         set(ax, 'GridAlpha', 0.20);
165
166         plot(ax, ev, ud.relErrHist(1:nE, k), '-', ...
167              'Color', [0.72 0.72 0.72], 'LineWidth', 0.7);
168         plot(ax, ev, ud.relErrHist(1:nE, k), 'o', ...
169              'MarkerSize', 3.5, 'Color', [0.30 0.30 0.30], ...
170              'MarkerFaceColor', 'none', 'LineWidth', 0.8);
171         yline(ax, 1, '—r', 'LineWidth', 1.4);
172
173         if isIterZero && nE > 0
174             scatter(ax, ev(nE), ud.relErrHist(nE, k), 44, 's', ...
175                     'MarkerEdgeColor', 'k', 'MarkerFaceColor', 'k');
176         elseif isIteration && nE > 0
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
            scatter(ax, ev(nE), ud.relErrHist(nE, k), 36, 'r',
    'filled');
        end

        title(ax, makeTwoLineTitle(aggLabels{k}), ...
              'Interpreter', 'none', ...
              'FontSize', 8, 'FontWeight', 'normal');

        if k == 1
            ylabel(ax, 'Pred / Target');
        end

        xlabel(ax, 'Fn eval');
        xlim(ax, xlimVec);

        ydata = ud.relErrHist(1:nE, k);
        ydata = ydata(~isnan(ydata) & isfinite(ydata));
        if isempty(ydata)
            ylim(ax, [0, 2]);
        elseif all(ydata >= 0) && all(ydata <= 2)
            ylim(ax, [0, 2]);
        else
            yMin = min(ydata);
            yMax = max(ydata);
            if yMin == yMax
                pad = max(0.1 * max(abs(yMax),1), 0.1);
            else
                pad = 0.10 * (yMax - yMin);
            end
            ylim(ax, [yMin - pad, yMax + pad]);
        end

        applyIntegerXTicks(ax, xlimVec);
        hold(ax, 'off');

        % ---- Row 2: absolute residual on log scale ----
        ax = subplot(2, nAgg, nAgg + k);
        cla(ax); hold(ax, 'on');
        grid(ax, 'on');
        set(ax, 'GridAlpha', 0.20);

        absPlot = ud.absResHist(1:nE, k);
        absPlot(~isfinite(absPlot)) = nan;
        absPlot(absPlot <= 0) = 1e-12;

```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
        plot(ax, ev, absPlot, '-', ...
             'Color', [0.72 0.72 0.72], 'LineWidth', 0.7);
        plot(ax, ev, absPlot, 'o', ...
             'MarkerSize', 3.5, 'Color', [0.15 0.15 0.15], ...
             'MarkerFaceColor', 'none', 'LineWidth', 0.8);

        if isIterZero && nE > 0
            y0 = ud.absResHist(nE, k);
            if ~isfinite(y0) || y0 <= 0
                y0 = 1e-12;
            end
            scatter(ax, ev(nE), y0, 44, 's', ...
                    'MarkerEdgeColor', 'k', 'MarkerFaceColor', 'k');
        elseif isIteration && nE > 0
            y0 = ud.absResHist(nE, k);
            if ~isfinite(y0) || y0 <= 0
                y0 = 1e-12;
            end
            scatter(ax, ev(nE), y0, 36, 'r', 'filled');
        end

        if k == 1
            ylabel(ax, '|Residual|');
        end
        xlabel(ax, 'Fn eval');
        xlim(ax, xlimVec);
        set(ax, 'YScale', 'log');
        ylim(ax, [absMin, absMax]);
        applyIntegerXTicks(ax, xlimVec);
        hold(ax, 'off');
    end
```

Listing I.14: updatePlots.m – Residuals figure (part 2 of 4)

```
    % ================================================================
    % FIGURE 2 — Parameters
    % ================================================================
    figure(hDashboard.par);

    parCols = max(nHalf, nHalf2);

    for row = 1:2
        if row == 1
            idxList = 1:nHalf;
        else
            idxList = nHalf + (1:nHalf2);
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
        end

        for col = 1:numel(idxList)
            k  = idxList(col);
            ax = subplot(2, parCols, (row - 1) * parCols + col);
            cla(ax); hold(ax, 'on');
            grid(ax, 'on');
            set(ax, 'GridAlpha', 0.20);

            % All probes — grey line + open circles
            plot(ax, ev, ud.xHist(1:nE, k), '-', ...
                 'Color', [0.78 0.78 0.78], 'LineWidth', 0.7);
            plot(ax, ev, ud.xHist(1:nE, k), 'o', ...
                 'MarkerSize', 4, 'Color', [0.50 0.50 0.50], ...
                 'MarkerFaceColor', 'none', 'LineWidth', 0.8);

            % True iterations — filled blue
            if nIterPlot > 0
                scatter(ax, iterEvalNos(1:nIterPlot), X(1:nIterPlot,
k)', ...
                        50, [0.12 0.47 0.71], 'filled', ...
                        'MarkerEdgeColor', 'none');
            end

            % Iteration 0 — filled black square
            if isIterZero && nE > 0
                scatter(ax, ev(nE), ud.xHist(nE, k), 48, 's', ...
                        'MarkerEdgeColor', 'k', 'MarkerFaceColor',
'k');
            end

            % Current probe — bold open black circle
            plot(ax, ev(nE), ud.xHist(nE, k), 'o', ...
                 'MarkerSize', 7, 'Color', [0 0 0], ...
                 'MarkerFaceColor', 'none', 'LineWidth', 1.3);

            % Bounds
            yline(ax, S.lb(k), '--r', 'LineWidth', 1.1, ...
                  'Label', 'lb', 'LabelHorizontalAlignment', 'left',
...
                  'FontSize', 8, 'FontWeight', 'bold');
            yline(ax, S.ub(k), '--', 'Color', [0.13 0.55 0.13], ...
                  'LineWidth', 1.1, ...
                  'Label', 'ub', 'LabelHorizontalAlignment', 'left',
...
```

COPIA DI REVISIONE

```
                    'FontSize', 8, 'FontWeight', 'bold');

            title(ax, S.modelPar{k}, 'Interpreter', 'none', ...
                  'FontSize', 9, 'FontWeight', 'bold');
            xlabel(ax, 'Fn eval');
            if col == 1
                ylabel(ax, 'Value');
            end
            xlim(ax, xlimVec);
            applyIntegerXTicks(ax, xlimVec);

            span = S.ub(k) - S.lb(k);
            if span <= 0
                span = max(abs(S.ub(k)), 1);
            end
            margin = 0.12 * span;
            ylim(ax, [S.lb(k) - margin, S.ub(k) + margin]);

            hold(ax, 'off');
        end
    end

    drawnow limitrate;
end
```

Listing I.15: updatePlots.m – Parameters figure (part 3 of 4)

```
% ========================================================================
function out = makeTwoLineTitle(in)
% Try to insert one sensible line break for long aggregate expressions.

    out = strtrim(in);

    if numel(out) <= 16
        return
    end

    % Prefer to break after the last '+' before midpoint
    mid = floor(numel(out) / 2);
    idx = find(out(1:mid) == '+', 1, 'last');

    % If none, break after the first '+' after midpoint
    if isempty(idx)
        idx2 = find(out(mid+1:end) == '+', 1, 'first');
        if ~isempty(idx2)
            idx = mid + idx2;
```

COPIA DI REVISIONE

```
        end
    end

    % If still none, try '/'
    if isempty(idx)
        idx = find(out(1:mid) == '/', 1, 'last');
        if isempty(idx)
            idx2 = find(out(mid+1:end) == '/', 1, 'first');
            if ~isempty(idx2)
                idx = mid + idx2;
            end
        end
    end

    % If still none, try a blank near midpoint
    if isempty(idx)
        leftBlank  = find(out(1:mid) == ' ', 1, 'last');
        rightBlank = find(out(mid+1:end) == ' ', 1, 'first');
        if ~isempty(leftBlank)
            idx = leftBlank;
        elseif ~isempty(rightBlank)
            idx = mid + rightBlank;
        end
    end

    if isempty(idx)
        return
    end

    if idx < numel(out)
        out = [strtrim(out(1:idx)) sprintf('\n')
   strtrim(out(idx+1:end))];
    end
end

% ========================================================================
function applyIntegerXTicks(ax, xlimVec)
% Use integer ticks when the range is small, otherwise use a
   reasonable set.

    x0 = floor(xlimVec(1));
    x1 = ceil(xlimVec(2));
    span = x1 - x0;

    if span <= 10
```

COPIA DI REVISIONE

```
        xticks(ax, x0:x1);
    elseif span <= 20
        xticks(ax, x0:2:x1);
    else
        step = max(5, ceil(span / 6));
        xticks(ax, x0:step:x1);
    end
end
```

Listing I.16: updatePlots.m – Local helper functions (part 4 of 4)

```
function fcns = buildFieldAggFunctions(exprs, predNames)
    fcns = cell(size(exprs));
    for i = 1:numel(exprs)
        expr = exprs{i};
        [~,idx] = sort(cellfun(@length, predNames), 'descend');
        predNamesSorted = predNames(idx);
        for k = 1:numel(predNamesSorted)
            name = predNamesSorted{k};
            j    = find(strcmp(predNames, name), 1, 'first');
            pattern = ['(?<![A-Za-z0-9_])' regexptranslate('escape',
   name) '(?![A-Za-z0-9_])'];
            expr = regexprep(expr, pattern, sprintf('x(%d)', j));
        end
        fcns{i} = str2func(sprintf('@(x) (%s)', expr));
    end
end
```

Listing I.17: Private helpers – buildFieldAggFunctions.m

```
function [r,c] = findKey(raw, key)
    r   = [];
    c   = [];
    key = normalizeText(key);
    for i = 1:size(raw,1)
        x = raw{i,2};
        if isMissingLike(x); continue; end
        if strcmpi(normalizeText(x), key); r = i; c = 2; return; end
    end
end

function tf = isMissingLike(x)
    tf = false;
    if isempty(x);                                  tf = true; return; end
    if iscell(x);                                   tf = true; return; end
    if isnumeric(x) && isscalar(x) && isnan(x); tf = true; return; end
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
    if ischar(x) && isempty(strtrim(x));          tf = true; return; end
    try; if any(ismissing(x)); tf = true; return; end; catch; end
end

function s = normalizeText(x)
    s = toText(x);
    s = strrep(s, char(160), ' ');
    s = strtrim(s);
end
```

Listing I.18: Private helpers – findKey.m, isMissingLike.m, normalizeText.m

```
function val = readScalarByKey(raw, key)
    [r,c] = findKey(raw, key);
    if isempty(r); error('Key "%s" not found in sheet.', key); end
    val = '';
    for j = c+1:size(raw,2)
        x = raw{r,j};
        if ~isMissingLike(x); val = toText(x); return; end
    end
end

function vals = readTextVectorByKey(raw, key)
    [r,c] = findKey(raw, key);
    if isempty(r); error('Key "%s" not found in sheet.', key); end
    vals = {};
    for j = c+1:size(raw,2)
        x = raw{r,j};
        if ~isMissingLike(x); vals{end+1} = toText(x); end %#ok<AGROW>
    end
end

function vals = readNumericVectorByKey(raw, key)
    [r,c] = findKey(raw, key);
    if isempty(r); error('Key "%s" not found in sheet.', key); end
    vals = [];
    for j = c+1:size(raw,2)
        x = raw{r,j};
        if ~isMissingLike(x)
            if isnumeric(x); vals(end+1) = x; %#ok<AGROW>
            else;            vals(end+1) = str2double(toText(x)); end
    %#ok<AGROW>
        end
    end
end
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Listing I.19: Private helpers – read*ByKey functions

```
function s = toText(x)
    if isempty(x); s = ''; return; end
    try; if any(ismissing(x)); s = ''; return; end; catch; end
    if isstring(x);      s = char(x);
    elseif ischar(x);    s = x;
    elseif isnumeric(x); s = num2str(x);
    else;                s = char(x);
    end
    s = strtrim(s);
end

function letter = xlsColLetter(n)
%XLSCOLLETTER Convert column number to Excel column letter (1=A, 2=B,
    ...).
    letter = '';
    while n > 0
        rem    = mod(n-1, 26);
        letter = [char(65+rem) letter];
        n      = floor((n-1) / 26);
    end
end
```

Listing I.20: Private helpers – toText.m, xlsColLetter.m

I.5 Parte V: Fondazioni numeriche e statistiche

Questa sezione riguarda le tecniche numeriche fondazionali e i metodi di campionamento statistico per chap: regione della fiducia quantificazione e stima robusta del modello.

I.5.1 Levenberg-Marquardt

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Questo script supporta l'esempio numerico in 65.6. riproduce la tabella di iterazione. Utilizza lo stesso convenzione residua, matrice di scaling e regola d'umidificazione come derivazione sopra.

```
x = (0:4)';
y = 6 ./ (2 + x);
```

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

```
theta  = [4; 1];
lambda = 1.0e-2;

phi = @(th) 0.5 * sum((th(1) ./ (th(2) + x) - y).^2);
fprintf('%2d  %11s  %12.6f  %12.6f  %14.6e\n', ...
        0, '--', theta(1), theta(2), phi(theta));

accepted = 0;
while accepted < 5
    a = theta(1);
    b = theta(2);

    g = a ./ (b + x);
    r = g - y;
    J = [1 ./ (b + x), -a ./ (b + x).^2];

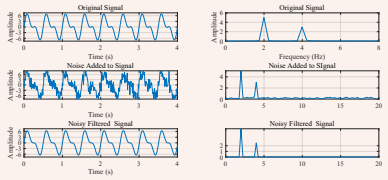
    A = J' * J;
    D = diag(diag(A));
    delta = (A + lambda * D) \ (-J' * r);

    trial = theta + delta;
    phiCurrent = 0.5 * (r' * r);
    phiTrial   = phi(trial);

    if phiTrial < phiCurrent
        theta = trial;
        accepted = accepted + 1;
        fprintf('%2d  %11.1e  %12.6f  %12.6f  %14.6e\n', ...
                accepted, lambda, theta(1), theta(2), phiTrial);
        lambda = lambda / 10;
    else
        lambda = lambda * 10;
    end
end
```

I.5.2 Tecniche numeriche

I.5.3 Filtri FFT e butterworth




```
% ========================================================================
% NUMERICAL TECHNIQUES -- FAST FOURIER TRANSFORM (FFT)
% ========================================================================
```


I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

```
% Demonstrates the DFT/FFT for signal analysis and noise filtering.
%
% THEORY:
%   The Discrete Fourier Transform decomposes a time-domain signal into
%   its constituent frequency components.  For a signal sampled at rate
%   fs = 1/dt over N samples, the DFT output Y = fft(y) gives:
%     Y(k)      : complex amplitude at frequency k/(N*dt)  [Hz]
%     |Y(k)|/N  : one-sided amplitude spectrum (for k = 0..N/2)
%   The second half of Y (k > N/2) are complex conjugates of the first.
%
% FILTERING APPROACH (hard threshold):
%   Fourier coefficients with |Y(k)| < threshold are zeroed out.
%   fix(Y/500)*500 rounds each coefficient down to the nearest multiple
%   of 500, effectively zeroing those with |Y| < 500.
%   This removes broadband noise while preserving dominant frequency peaks.
%   The threshold (500) is chosen empirically -- examine the amplitude
%   spectrum to select an appropriate value for a given signal.
%
% SIGNAL:  y(t) = 3*sin(4*2pi*t) + 5*sin(2*2pi*t)
%   Two sinusoids: 4 Hz (amplitude 3) and 2 Hz (amplitude 5).
%   Both peaks should be clearly visible in the amplitude spectrum.
% ========================================================================

clear; close all; clc;

GS    = 'c:/Program Files/gs/gs9.53.3/bin/gswin64.exe';
scrsz = get(0, 'ScreenSize');
fs    = 14;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Verify FFT round-trip on a random signal
% ------------------------------------------------------------------------
x_rand  = rand(1, 10);
Y_rand  = fft(x_rand);
x_recov = real(ifft(Y_rand));   % imaginary part is ~machine epsilon
fprintf('FFT round-trip error (should be ~0): %.2e\n', norm(x_rand - x_recov))
    ;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Construct the test signal
% ------------------------------------------------------------------------
dt = 1/100;          % sampling interval [s]  (sampling rate = 100 Hz)
et = 4;              % signal duration   [s]
t  = 0 : dt : et;   % time vector
N  = length(t);

y = 3*sin(4*2*pi*t) + 5*sin(2*2*pi*t);   % two-frequency signal

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- FFT of the clean signal
% ------------------------------------------------------------------------
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
Y        = fft(y);
n_half   = floor(N/2);
amp_spec = abs(Y) / n_half;

freq = (0:79) / (2 * n_half * dt);   % frequency axis for first 80 bins [Hz]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Add noise and compute spectrum
% ------------------------------------------------------------------------
noise = randn(1, N);
ey    = y + 2*noise;       % corrupted signal (noise amplitude = 2)
eY    = fft(ey);
e_amp = abs(eY) / n_half;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- Filter: zero Fourier coefficients below threshold
% ------------------------------------------------------------------------
threshold = 500;
fY        = fix(eY / threshold) * threshold;   % zero small coefficients
cy        = real(ifft(fY));                     % filtered time-domain signal
cY        = fft(cy);
c_amp     = abs(cY) / n_half;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 6 -- Plot: 3 rows x 2 columns (time | frequency domain)
% ------------------------------------------------------------------------
hf1 = figure('Position', [1, scrsz(4)/4.5, scrsz(3)/2.5, scrsz(4)/2.0]);

subplot(3,2,1);
plot(t, y, 'b', 'LineWidth', 2);  grid on;
axis([0, et, -7.5, 7.5]);
xlabel('Time [s]');  ylabel('Amplitude');
title('Clean signal -- time domain');
set(gca, 'FontSize', fs);

subplot(3,2,2);
plot(freq, amp_spec(1:80), 'b', 'LineWidth', 2);  grid on;
axis([0, 8, 0, 6]);
xlabel('Frequency [Hz]');  ylabel('Amplitude');
title('Clean signal -- spectrum');
set(gca, 'FontSize', fs);

subplot(3,2,3);
plot(t, ey, 'r', 'LineWidth', 1);  grid on;
axis([0, et, -7.5, 7.5]);
xlabel('Time [s]');  ylabel('Amplitude');
title('Noisy signal -- time domain');
set(gca, 'FontSize', fs);

subplot(3,2,4);
plot(freq, e_amp(1:80), 'r', 'LineWidth', 1);  grid on;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
axis([0, 8, 0, 6]);
xlabel('Frequency [Hz]');  ylabel('Amplitude');
title('Noisy signal -- spectrum');
set(gca, 'FontSize', fs);

subplot(3,2,5);
plot(t, cy, 'g', 'LineWidth', 2);  grid on;
axis([0, et, -7.5, 7.5]);
xlabel('Time [s]');  ylabel('Amplitude');
title('Filtered signal -- time domain');
set(gca, 'FontSize', fs);

subplot(3,2,6);
plot(freq, c_amp(1:80), 'g', 'LineWidth', 2);  grid on;
axis([0, 8, 0, 6]);
xlabel('Frequency [Hz]');  ylabel('Amplitude');
title('Filtered signal -- spectrum');
set(gca, 'FontSize', fs);

set(gcf, 'PaperPositionMode', 'auto');
print('fft-example.eps', '-depsc');
eps2pdf('fft-example.eps', GS, 0);
```

I.5.4 Decomposizione del valore singolare

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

```
% ========================================================================
% NUMERICAL TECHNIQUES -- SVD FOR ILL-CONDITIONED SYSTEMS
% ========================================================================
% Demonstrates the use of Singular Value Decomposition to solve a severely
% ill-conditioned linear system where the standard backslash operator
% gives unreliable results due to near-singularity.
%
% THEORY:
%   Any mxn matrix A decomposes as  A = U * S * V^T
%   where U (mxm) and V (nxn) are orthogonal, and S (mxn) is diagonal
%   with non-negative singular values sigma_1 >= sigma_2 >= ... >= 0.
%
%   The Moore-Penrose pseudo-inverse is:
%       A^+ = V * S^+ * U^T
%   where  S^+(i,i) = 1/sigma_i  if sigma_i > threshold,  else 0.
%
%   Setting near-zero singular values to zero (Tikhonov regularisation)
%   prevents amplification of numerical noise in near-null directions.
%
% ILL-CONDITIONING:
%   The matrix A below has one near-zero singular value (~1e-15).
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
%   Condition number kappa(A) = sigma_max/sigma_min approx 1e15, meaning round-off errors
%   of order epsilon_machine approx 1e-16 are amplified to O(1) in the solution.
%   The SVD solution discards the near-zero singular value and returns
%   the minimum-norm least-squares solution instead.
% ========================================================================

clc; clear;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Define the ill-conditioned system
% ------------------------------------------------------------------------
% Rows of A are nearly identical -> A is nearly singular.
A = [1,  1        ;
     1,  1 + 1e-15];
b = [2;  2 + 1e-15];

fprintf('Condition number of A: %.2e\n', cond(A));

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Direct solution (unreliable for near-singular systems)
% ------------------------------------------------------------------------
direct_solution = A \ b;
fprintf('\nDirect solution (A \\ b):\n');
disp(direct_solution);
fprintf('Residual ||A*x - b||: %.2e\n', norm(A*direct_solution - b));

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- SVD decomposition
% ------------------------------------------------------------------------
[U, S, V] = svd(A);

fprintf('\nSingular values:\n');
disp(diag(S)');

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Regularised pseudo-inverse
% ------------------------------------------------------------------------
% Threshold: singular values below this are treated as zero.
% Choosing threshold = 1e-6 discards the ~1e-15 singular value
% while keeping the O(1) singular value intact.
threshold = 1e-6;

S_plus = zeros(size(S'));       % pseudo-inverse of S (note: transposed size)
for i = 1 : min(size(S))
    if S(i,i) > threshold
        S_plus(i,i) = 1 / S(i,i);
    end
    % values below threshold remain zero (regularised)
end
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
A_plus       = V * S_plus * U';    % Moore-Penrose pseudo-inverse
svd_solution = A_plus * b;

fprintf('SVD regularised solution:\n');
disp(svd_solution);
fprintf('Residual ||A*x - b||: %.2e\n', norm(A*svd_solution - b));
```

I.5.5 Precondizioni

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

```
% ========================================================================
% NUMERICAL TECHNIQUES -- CHOLESKY PRECONDITIONING
% ========================================================================
% Demonstrates how preconditioning reduces the condition number of a
% symmetric positive definite (SPD) linear system, which accelerates
% convergence of iterative solvers such as PCG (preconditioned conjugate
% gradient).
%
% THEORY:
%   For an SPD matrix A, the Cholesky decomposition gives A = L * L^T.
%   Using M = L * L^T (= A) as the preconditioner:
%
%   LEFT preconditioning:   solve  (M^{-1} A) x = M^{-1} b
%   RIGHT preconditioning:  solve  (A M^{-1}) y = b,  then x = M^{-1} y
%
%   When M = A exactly, M^{-1}A = I and the condition number drops to 1.
%   This is pedagogically illustrative but practically useless -- the cost
%   of applying M^{-1} = A^{-1} is the same as solving the original system.
%
%   In practice, an INCOMPLETE Cholesky factorisation (ichol in MATLAB)
%   is used as a cheaper approximation to A, giving a useful preconditioner.
%
% NOTE ON inv():
%   Using inv(M) explicitly is numerically inferior to the backslash
%   operator (M\b).  Here inv() is replaced by M\ for correctness.
%   The original used inv(M)*A -- replaced with M\A throughout.
%
% MATRIX CONSTRUCTION:
%   A = Q * D * Q^T  where D = diag([1, 0.1, 0.01]) and Q is orthogonal.
%   This guarantees A is SPD with eigenvalues {1, 0.1, 0.01} and
%   condition number kappa(A) = 1/0.01 = 100.
% ========================================================================

clear; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Construct a symmetric positive definite matrix
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
% ------------------------------------------------------------------------
D = diag([1, 0.1, 0.01]);    % prescribed eigenvalues -> kappa(A) = 100

rng(1, 'twister');            % fixed seed for reproducibility
[Q, ~] = qr(rand(3));         % random orthogonal matrix via QR
A = Q * D * Q';               % SPD matrix with known eigenstructure
b = ones(3, 1);

fprintf('Matrix A:\n');  disp(A);
fprintf('Eigenvalues of A:    ');  fprintf('%.4f  ', eig(A)');  fprintf('\n');
fprintf('Condition number of A: %.4e\n\n', cond(A));

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Cholesky decomposition
% ------------------------------------------------------------------------
L = chol(A, 'lower');   % A = L * L^T  (lower triangular factor)
M = L * L';             % preconditioning matrix (= A here)

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Left preconditioning:  (M^{-1} A) x = M^{-1} b
% ------------------------------------------------------------------------
A_left = (M\A + (M\A)') / 2;   % enforce symmetry after solve
b_left = M \ b;
x_left = A_left \ b_left;

kappa_left = cond(A_left);
fprintf('Left preconditioning:\n');
fprintf('  Eigenvalues:       ');  fprintf('%.4f  ', eig(A_left)');  fprintf('
   \n');
fprintf('  Condition number:  %.4e\n', kappa_left);
fprintf('  Ratio (orig/precond): %.4e\n\n', cond(A)/kappa_left);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Right preconditioning:  (A M^{-1}) y = b
% ------------------------------------------------------------------------
A_right = (A/M + (A/M)') / 2;
x_right = A_right \ b;

kappa_right = cond(A_right);
fprintf('Right preconditioning:\n');
fprintf('  Eigenvalues:       ');  fprintf('%.4f  ', eig(A_right)');  fprintf(
   '\n');
fprintf('  Condition number:  %.4e\n', kappa_right);
fprintf('  Ratio (orig/precond): %.4e\n\n', cond(A)/kappa_right);

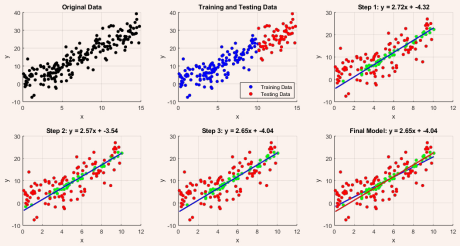
% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- Summary
% ------------------------------------------------------------------------
fprintf('--- Summary ---\n');
fprintf('  Original matrix:            kappa = %.4e\n', cond(A));
fprintf('  Left  preconditioned:       kappa = %.4e\n', kappa_left);
```

COPIA DI REVISIONE

```
fprintf('  Right preconditioned:        kappa = %.4e\n', kappa_right);
fprintf('  (kappa = 1 is expected when M = A exactly)\n');
fprintf('  In practice use ichol() for an approximate, cheaper M.\n');
```

I.5.6 Consenso di campionamento casuale (RANSAC)

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.



Programma per eseguire un consenso di campionamento casuale, §65.3.2.

```
% ======================================================================
% RANDOM SAMPLE CONSENSUS (RANSAC) -- ROBUST LINE FITTING
% ======================================================================
% RANSAC is a robust estimation algorithm that fits a model to data
% containing a large fraction of outliers.  Unlike least squares, which
% minimises the sum of all residuals (making it sensitive to outliers),
% RANSAC iteratively finds the model supported by the most inliers.
%
% ALGORITHM:
%   Repeat n_iterations times:
%     1. Randomly select the minimum number of points needed to define
%        the model (2 points for a line).
%     2. Fit the model to these points.
%     3. Count how many other data points are within distance threshold
%        of the fitted model -> these are the "inliers".
%     4. If this inlier count is the best so far, save this model.
%   Return the model with the most inliers.
%
% DISTANCE METRIC:
%   For a line  y = m*x + c  (or equivalently  m*x - y + c = 0),
%   the perpendicular distance from point (x_i, y_i) to the line is:
%       d_i = |m*x_i - y_i + c| / sqrt(m^2 + 1)
%   A point is an inlier if d_i < threshold.
%
% NUMBER OF ITERATIONS:
%   The theoretical number of iterations needed to find at least one
%   outlier-free sample with probability p is:
%       n_iter = log(1-p) / log(1 - (1-e)^s)
%   where e = outlier ratio, s = sample size (2 for a line), p = 0.99.
%   For e=0.4, s=2: n_iter approx 11.  Using 1000 iterations is very
   conservative.
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
%
% STRUCTURE:
%   The script runs RANSAC 'visualize_steps' independent times on the
%   training set, showing the best model found at each run.  The final
%   panel shows the best model across all runs.
%
% UNITS: dimensionless (synthetic data).
% ========================================================================

clear; close all; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Parameters
% ------------------------------------------------------------------------
n_points       = 200;     % total number of data points
outlier_ratio  = 0.4;     % fraction of points that are outliers
threshold      = 0.5;     % inlier distance threshold (perpendicular)
n_iterations   = 1000;    % RANSAC iterations per run
visualize_steps = 4;      % number of independent RANSAC runs to display

rng('shuffle');            % non-reproducible seed (use rng(42) for
    reproducibility)

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Generate synthetic data
% ------------------------------------------------------------------------
% True model: y = true_slope * x + true_intercept + Gaussian noise
% Outliers are added by shifting a random subset by a large random amount.

x              = sort(rand(1, n_points) * 15);   % x values in [0, 15]
true_slope     = 2.0;
true_intercept = 0.5;

y = true_slope * x + true_intercept + randn(1, n_points) * 3;  % noisy inliers

% Add outliers: shift selected points by up to +/-10 in y
n_outliers      = round(outlier_ratio * n_points);
outlier_indices = randperm(n_points, n_outliers);
y(outlier_indices) = y(outlier_indices) + (rand(1, n_outliers) - 0.5) * 20;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Train / test split
% ------------------------------------------------------------------------
% RANSAC is applied only to the training set.
% The test set is shown for visual reference but not used in fitting.

train_ratio = 0.7;
n_train     = round(train_ratio * n_points);
x_train     = x(1 : n_train);
y_train     = y(1 : n_train);
x_test      = x(n_train+1 : end);
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
y_test      = y(n_train+1 : end);

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Plot original data and train/test split
% -------------------------------------------------------------------------
figure('Position', [100, 100, 1200, 600]);

subplot(2, 3, 1);
scatter(x, y, 30, 'k', 'filled');
title('Original Data  (inliers + outliers)');
xlabel('x');  ylabel('y');
grid on;

subplot(2, 3, 2);
scatter(x_train, y_train, 30, 'b', 'filled');
hold on;
scatter(x_test,  y_test,  30, 'r', 'filled');
title('Train / Test Split');
xlabel('x');  ylabel('y');
legend('Training (70%)', 'Testing (30%)', 'Location', 'best');
grid on;

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- RANSAC: run visualize_steps independent trials
% -------------------------------------------------------------------------
% Each trial runs the full RANSAC loop and finds the best model for that run.
% Results are stored for comparison and final selection.

models         = cell(1, visualize_steps);   % best [slope, intercept] per run
inliers_count  = zeros(1, visualize_steps);  % number of inliers per run

for step = 1 : visualize_steps

    best_inliers = [];
    best_model   = [];

    for iter = 1 : n_iterations

        % --- Sample 2 points at random ---
        idx      = randperm(length(x_train), 2);
        x_samp   = x_train(idx);
        y_samp   = y_train(idx);

        % Skip degenerate case (two identical x values -> vertical line)
        if x_samp(1) == x_samp(2)
            continue;
        end

        % --- Fit line through the 2 sample points ---
        slope     = diff(y_samp) / diff(x_samp);
        intercept = y_samp(1) - slope * x_samp(1);
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
132
133         % --- Compute perpendicular distances from all training points ---
134         % Line equation:  slope*x - y + intercept = 0
135         distances = abs(slope * x_train - y_train + intercept) / sqrt(slope^2
    + 1);
136
137         % --- Count inliers (points within distance threshold) ---
138         inliers = find(distances < threshold);
139
140         % --- Update best model if this has more inliers ---
141         if length(inliers) > length(best_inliers)
142             best_inliers = inliers;
143             best_model   = [slope, intercept];
144         end
145
146     end   % RANSAC iteration loop
147
148     % Store results for this run
149     models{step}        = best_model;
150     inliers_count(step) = length(best_inliers);
151
152     % --- Plot this run ---
153     outlier_idx = setdiff(1:length(x_train), best_inliers);
154
155     subplot(2, 3, step + 2);
156     scatter(x_train, y_train, 30, [0.7 0.7 0.7], 'filled');   % all points (
    grey)
157     hold on;
158     scatter(x_train(best_inliers), y_train(best_inliers), 30, 'g', 'filled');
     % inliers
159     scatter(x_train(outlier_idx),  y_train(outlier_idx),  30, 'r', 'filled');
     % outliers
160
161     plot_x = linspace(min(x_train), max(x_train), 100);
162     plot(plot_x, best_model(1)*plot_x + best_model(2), 'b-', 'LineWidth', 2);
163
164     title(sprintf('Run %d:  y = %.2fx + %.2f  (%d inliers)', ...
165                   step, best_model(1), best_model(2), length(best_inliers)));
166     xlabel('x');  ylabel('y');
167     legend('All', 'Inliers', 'Outliers', 'Model', 'Location', 'best');
168     grid on;
169
170 end   % step loop
171
172 % -------------------------------------------------------------------------
173 % Section 6 -- Final model: best across all runs
174 % -------------------------------------------------------------------------
175 [~, best_step]  = max(inliers_count);
176 final_model     = models{best_step};
177
178 % Re-identify inliers for the final model
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
final_distances = abs(final_model(1)*x_train - y_train + final_model(2)) ...
                  / sqrt(final_model(1)^2 + 1);
final_inliers   = find(final_distances < threshold);
final_outliers  = setdiff(1:length(x_train), final_inliers);

subplot(2, 3, 6);
scatter(x_train, y_train, 30, [0.7 0.7 0.7], 'filled');
hold on;
scatter(x_train(final_inliers), y_train(final_inliers), 30, 'g', 'filled');
scatter(x_train(final_outliers), y_train(final_outliers), 30, 'r', 'filled');

plot_x = linspace(min(x_train), max(x_train), 100);
plot(plot_x, final_model(1)*plot_x + final_model(2), 'r-', 'LineWidth', 2);

title(sprintf('Best Model:  y = %.2fx + %.2f  (%d inliers)', ...
              final_model(1), final_model(2), length(final_inliers)));
xlabel('x');  ylabel('y');
legend('All', 'Inliers', 'Outliers', 'Best Model', 'Location', 'best');
grid on;

fprintf('\n--- RANSAC Results ---\n');
fprintf('True model:  slope = %.2f,  intercept = %.2f\n', true_slope,
   true_intercept);
fprintf('RANSAC best: slope = %.2f,  intercept = %.2f\n', final_model(1),
   final_model(2));
fprintf('Inliers: %d / %d training points\n', length(final_inliers), n_train);
```

I.5.7 Ipercubo latino

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Rivestito in §64.3.3.2.

```
%% Latin Hypercube Sampling (LHS) vs. Monte Carlo Sampling
% Demonstration and comparison of LHS with classical Monte Carlo sampling.
% The code uses only ASCII characters so that it is safe inside lstlisting.
% It also avoids norminv, so no Statistics and Machine Learning Toolbox
% is required.

clearvars; close all; clc;

%% Parameters
N = 100;          % Number of samples used in the main comparison
n_vars = 2;       % Number of input variables
seed = 42;        % Random seed for reproducibility
n_rep = 200;      % Replications used for the convergence comparison

rng(seed, 'twister');

```

COPIA DI REVISIONE

```
%% 1. LATIN HYPERCUBE SAMPLING (LHS)
% ==================================

% Generate an N-by-n_vars Latin hypercube design in [0,1].
lhs_samples = lhs_design(N, n_vars);

% Transform the two columns to the desired marginal distributions.
% Variable 1: Uniform [10,20]
lhs_var1 = 10 + 10 * lhs_samples(:, 1);

% Variable 2: Normal (mu=15, sigma=3)
lhs_var2 = normal_icdf(lhs_samples(:, 2), 15, 3);

lhs_all = [lhs_var1, lhs_var2];

%% 2. MONTE CARLO SAMPLING (MCS)
% ==============================

% Mixed-distribution Monte Carlo sample.
mcs_var1 = 10 + 10 * rand(N, 1);     % Uniform [10,20]
mcs_var2 = 15 + 3 * randn(N, 1);     % Normal (mu=15, sigma=3)

mcs_all = [mcs_var1, mcs_var2];

% A second uniform variable is needed for the uniform-uniform comparison.
mcs_uniform_var2 = 10 + 10 * rand(N, 1);
lhs_uniform_var2 = 10 + 10 * lhs_samples(:, 2);

%% 3. VISUALIZATION: TWO-DIMENSIONAL COMPARISON
% =============================================

figure('Position', [100, 100, 1200, 500]);

% Uniform distributions - Monte Carlo
subplot(2, 2, 1);
scatter(mcs_var1, mcs_uniform_var2, 25, 'b', 'filled');
xlabel('Variable 1: Uniform [10,20]');
ylabel('Variable 2: Uniform [10,20]');
title('Monte Carlo Sampling: Uniform Marginals');
grid on; axis square;
xlim([8, 22]); ylim([8, 22]);

% Uniform distributions - Latin hypercube
subplot(2, 2, 2);
scatter(lhs_var1, lhs_uniform_var2, 25, 'r', 'filled');
xlabel('Variable 1: Uniform [10,20]');
ylabel('Variable 2: Uniform [10,20]');
title('Latin Hypercube Sampling: Uniform Marginals');
grid on; axis square;
xlim([8, 22]); ylim([8, 22]);

```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
% Mixed distributions - Monte Carlo
subplot(2, 2, 3);
scatter(mcs_all(:, 1), mcs_all(:, 2), 25, 'b', 'filled');
xlabel('Variable 1: Uniform [10,20]');
ylabel('Variable 2: Normal (mu=15, sigma=3)');
title('Monte Carlo Sampling: Mixed Marginals');
grid on;
xlim([8, 22]); ylim([6, 24]);

% Mixed distributions - Latin hypercube
subplot(2, 2, 4);
scatter(lhs_all(:, 1), lhs_all(:, 2), 25, 'r', 'filled');
xlabel('Variable 1: Uniform [10,20]');
ylabel('Variable 2: Normal (mu=15, sigma=3)');
title('Latin Hypercube Sampling: Mixed Marginals');
grid on;
xlim([8, 22]); ylim([6, 24]);

sgtitle(sprintf('LHS vs. MCS Comparison (N = %d)', N), ...
'FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');

%% 4. STATISTICAL COMPARISON OF MEAN ESTIMATION
% ================================================

% Model response:
%     Y = X1 + 0.5*X2
%
% The theoretical mean is:
%     E[Y] = E[X1] + 0.5*E[X2] = 15 + 0.5*15 = 22.5

true_mean = 22.5;
sample_sizes = 10:5:N;

mean_lhs_conv = zeros(length(sample_sizes), 1);
mean_mcs_conv = zeros(length(sample_sizes), 1);
rmse_lhs = zeros(length(sample_sizes), 1);
rmse_mcs = zeros(length(sample_sizes), 1);

for i = 1:length(sample_sizes)
n_samp = sample_sizes(i);

lhs_estimates = zeros(n_rep, 1);
mcs_estimates = zeros(n_rep, 1);

for rep = 1:n_rep
% Fresh LHS design of size n_samp.
u_lhs = lhs_design(n_samp, n_vars);
x1_lhs = 10 + 10 * u_lhs(:, 1);
x2_lhs = normal_icdf(u_lhs(:, 2), 15, 3);
y_lhs_rep = x1_lhs + 0.5 * x2_lhs;
lhs_estimates(rep) = mean(y_lhs_rep);
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
119
120   % Fresh classical Monte Carlo sample of the same size.
121   x1_mcs = 10 + 10 * rand(n_samp, 1);
122   x2_mcs = 15 + 3 * randn(n_samp, 1);
123   y_mcs_rep = x1_mcs + 0.5 * x2_mcs;
124   mcs_estimates(rep) = mean(y_mcs_rep);
125   end
126
127   mean_lhs_conv(i) = mean(lhs_estimates);
128   mean_mcs_conv(i) = mean(mcs_estimates);
129
130   rmse_lhs(i) = sqrt(mean((lhs_estimates - true_mean).^2));
131   rmse_mcs(i) = sqrt(mean((mcs_estimates - true_mean).^2));
132   end
133
134   figure('Position', [100, 100, 1000, 400]);
135
136   % Average estimated mean over repeated designs
137   subplot(1, 2, 1);
138   plot(sample_sizes, mean_lhs_conv, 'o-', ...
139   'Color', 'r', 'LineWidth', 2, ...
140   'MarkerSize', 6, 'DisplayName', 'LHS');
141   hold on;
142   plot(sample_sizes, mean_mcs_conv, 's-', ...
143   'Color', 'b', 'LineWidth', 2, ...
144   'MarkerSize', 6, 'DisplayName', 'MCS');
145   plot([min(sample_sizes), max(sample_sizes)], ...
146   [true_mean, true_mean], '--k', ...
147   'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'True Mean');
148   xlabel('Number of Samples');
149   ylabel('Mean of Estimated Means');
150   title(sprintf('Mean Estimate over %d Replications', n_rep));
151   legend('Location', 'best');
152   grid on;
153
154   % Root-mean-square error of the mean estimator
155   subplot(1, 2, 2);
156   semilogy(sample_sizes, rmse_lhs, 'o-', ...
157   'Color', 'r', 'LineWidth', 2, ...
158   'MarkerSize', 6, 'DisplayName', 'LHS');
159   hold on;
160   semilogy(sample_sizes, rmse_mcs, 's-', ...
161   'Color', 'b', 'LineWidth', 2, ...
162   'MarkerSize', 6, 'DisplayName', 'MCS');
163   xlabel('Number of Samples');
164   ylabel('RMSE of Estimated Mean');
165   title('Convergence of Mean-Estimation Error');
166   legend('Location', 'best');
167   grid on;
168
169   sgtitle('Convergence Analysis: LHS vs. MCS', ...
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
  'FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');

%% 5. SUMMARY STATISTICS FOR THE MAIN N-SAMPLE DESIGNS
% ====================================================

y_lhs = lhs_all(:, 1) + 0.5 * lhs_all(:, 2);
y_mcs = mcs_all(:, 1) + 0.5 * mcs_all(:, 2);

lhs_error = abs(mean(y_lhs) - true_mean);
mcs_error = abs(mean(y_mcs) - true_mean);

fprintf('\n========== SUMMARY (N = %d) ==========\n\n', N);
fprintf('TRUE MEAN: %.4f\n\n', true_mean);

fprintf('LHS RESULTS:\n');
fprintf('  Estimated Mean: %.4f\n', mean(y_lhs));
fprintf('  Std. Dev.:      %.4f\n', std(y_lhs));
fprintf('  Absolute Error: %.4f\n\n', lhs_error);

fprintf('MCS RESULTS:\n');
fprintf('  Estimated Mean: %.4f\n', mean(y_mcs));
fprintf('  Std. Dev.:      %.4f\n', std(y_mcs));
fprintf('  Absolute Error: %.4f\n\n', mcs_error);

fprintf('REPLICATED CONVERGENCE RESULTS AT N = %d:\n', N);
fprintf('  LHS RMSE: %.6f\n', rmse_lhs(end));
fprintf('  MCS RMSE: %.6f\n', rmse_mcs(end));

if rmse_mcs(end) > 0
fprintf('  LHS RMSE is %.2f%% of MCS RMSE.\n', ...
100 * rmse_lhs(end) / rmse_mcs(end));
end

%% LOCAL FUNCTIONS
% ================

function samples = lhs_design(n_samples, n_variables)
%LHS_DESIGN Generate an n_samples-by-n_variables LHS design in [0,1].

samples = zeros(n_samples, n_variables);

for j = 1:n_variables
% One random point inside each of the n_samples strata.
within_stratum = rand(n_samples, 1);

% Randomly permute the strata independently for each variable.
ranks = randperm(n_samples)';

samples(:, j) = ...
(ranks - 1 + within_stratum) / n_samples;
end
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
  end

  function x = normal_icdf(u, mu, sigma)
  %NORMAL_ICDF Inverse CDF of a normal distribution without norminv.

  % Guard against exact endpoints before applying erfinv.
  u = min(max(u, eps), 1 - eps);

  x = mu + sigma * sqrt(2) .* erfinv(2 .* u - 1);
  end
```

I.5.8 Regressione baieana con una base quadratica

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Codice per l'esempio in § 65.5.4.

```
%% Bayesian Regression with a Quadratic Basis
% Metropolis--Hastings sampling for
%   y = theta_1*x1^2 + theta_2*x2 + epsilon,
%   epsilon ~ N(0,sigma^2).
%
% The model is quadratic in predictor x1 but linear in the unknown
% parameters theta_1 and theta_2. With Gaussian priors and known sigma,
% the posterior is Gaussian and can be computed analytically. This provides
% an independent audit of the MCMC results.

clear; close all; clc;

%% 1. Generate synthetic data

rng(42,'twister');

n = 50;
x1 = rand(n,1);
x2 = rand(n,1);
theta_true = [2;3];
sigma = 1;

X = [x1.^2, x2];
y = X*theta_true + sigma*randn(n,1);

fprintf('\n=== Synthetic Data Generated ===\n');
fprintf('Number of observations: %d\n',n);
fprintf('True theta_1 (coefficient of x1^2): %.4f\n',theta_true(1));
fprintf('True theta_2 (coefficient of x2):   %.4f\n',theta_true(2));
fprintf('Known noise standard deviation:     %.4f\n',sigma);

%% 2. Define independent Gaussian priors
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
mu_prior = [0;0];
sigma_prior = [10;10];
prior_precision = diag(1./sigma_prior.^2);

fprintf('\n=== Prior Distributions ===\n');
fprintf('theta_j ~ N(0,10^2), j = 1,2\n');

%% 3. Exact posterior for independent verification
% For this linear-Gaussian example,
%   Sigma_post^{-1} = X''X/sigma^2 + Sigma_prior^{-1},
%   mu_post = Sigma_post*(X''y/sigma^2 + Sigma_prior^{-1}*mu_prior).

post_precision = (X.'*X)/sigma^2 + prior_precision;
post_cov_exact = post_precision\eye(2);
post_mean_exact = post_precision\((X.'*y)/sigma^2 + ...
    prior_precision*mu_prior);
post_sd_exact = sqrt(diag(post_cov_exact));

fprintf('\n=== Exact Gaussian Posterior ===\n');
fprintf('Exact posterior mean theta_1: %.6f\n',post_mean_exact(1));
fprintf('Exact posterior mean theta_2: %.6f\n',post_mean_exact(2));
fprintf('Exact posterior SD theta_1:   %.6f\n',post_sd_exact(1));
fprintf('Exact posterior SD theta_2:   %.6f\n',post_sd_exact(2));

%% 4. Metropolis--Hastings MCMC
% A symmetric Gaussian random-walk proposal is used, so proposal-density
% terms cancel from the Metropolis--Hastings acceptance ratio.

fprintf('\n=== Metropolis--Hastings MCMC Sampling ===\n');

n_iterations = 10000;
burn_in = 2000;
proposal_sd = [0.5;0.5];

theta_samples = zeros(n_iterations,2);
theta_current = [0;0];
logposterior_current = compute_logposterior( ...
    y,X,theta_current,sigma,mu_prior,sigma_prior);
n_accepted = 0;

fprintf('Running %d MCMC iterations...\n',n_iterations);
fprintf('Proposal standard deviations: [%.3f, %.3f]\n', ...
    proposal_sd(1),proposal_sd(2));

for iter = 1:n_iterations
    theta_proposal = theta_current + proposal_sd.*randn(2,1);
    logposterior_proposal = compute_logposterior( ...
        y,X,theta_proposal,sigma,mu_prior,sigma_prior);

    log_alpha = logposterior_proposal - logposterior_current;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
84
85      if log(rand) < min(0,log_alpha)
86          theta_current = theta_proposal;
87          logposterior_current = logposterior_proposal;
88          n_accepted = n_accepted + 1;
89      end
90
91      theta_samples(iter,:) = theta_current.';
92
93      if mod(iter,1000) == 0
94          fprintf('Iteration %d/%d (acceptance rate: %.1f%%)\n', ...
95              iter,n_iterations,100*n_accepted/iter);
96      end
97  end
98
99  acceptance_rate = n_accepted/n_iterations;
100 fprintf('\nFinal acceptance rate: %.1f%%\n',100*acceptance_rate);
101
102 %% 5. Remove burn-in and compute posterior summaries
103
104 theta_samples_post = theta_samples(burn_in+1:end,:);
105 n_samples_final = size(theta_samples_post,1);
106
107 theta1_samples = theta_samples_post(:,1);
108 theta2_samples = theta_samples_post(:,2);
109
110 theta_mean = mean(theta_samples_post,1).';
111 theta_sd = std(theta_samples_post,0,1).';
112 theta1_ci = empirical_percentile(theta1_samples,[2.5,97.5]);
113 theta2_ci = empirical_percentile(theta2_samples,[2.5,97.5]);
114
115 C = corrcoef(theta1_samples,theta2_samples);
116 posterior_correlation = C(1,2);
117
118 fprintf('\n=== MCMC Posterior Summary ===\n');
119 fprintf('Post-burn-in samples: %d\n',n_samples_final);
120 fprintf('Burn-in:              %d\n',burn_in);
121
122 fprintf('\nParameter theta_1:\n');
123 fprintf('  True value:          %.6f\n',theta_true(1));
124 fprintf('  MCMC posterior mean: %.6f\n',theta_mean(1));
125 fprintf('  Exact posterior mean:%.6f\n',post_mean_exact(1));
126 fprintf('  MCMC posterior SD:   %.6f\n',theta_sd(1));
127 fprintf('  Exact posterior SD:  %.6f\n',post_sd_exact(1));
128 fprintf('  95%% credible interval:[%.6f, %.6f]\n', ...
129     theta1_ci(1),theta1_ci(2));
130
131 fprintf('\nParameter theta_2:\n');
132 fprintf('  True value:          %.6f\n',theta_true(2));
133 fprintf('  MCMC posterior mean: %.6f\n',theta_mean(2));
134 fprintf('  Exact posterior mean:%.6f\n',post_mean_exact(2));
```

COPIA DI REVISIONE

```
fprintf('  MCMC posterior SD:   %.6f\n',theta_sd(2));
fprintf('  Exact posterior SD:  %.6f\n',post_sd_exact(2));
fprintf('  95%% credible interval:[%.6f, %.6f]\n', ...
    theta2_ci(1),theta2_ci(2));

fprintf('\nPosterior correlation theta_1/theta_2: %.6f\n', ...
    posterior_correlation);

%% 6. Least-squares comparison

theta_ls = X\y;

fprintf('\n=== Least-Squares Comparison ===\n');
fprintf('Least-squares theta_1: %.6f\n',theta_ls(1));
fprintf('Least-squares theta_2: %.6f\n',theta_ls(2));
fprintf('Difference LS - MCMC mean: [%.6f, %.6f]\n', ...
    theta_ls(1)-theta_mean(1),theta_ls(2)-theta_mean(2));

%% 7. Elementary single-chain diagnostics
% This compact example uses one chain. For production analyses, use multiple
% dispersed chains and report R-hat and effective sample size.

max_lag = 50;
acf_theta1 = compute_acf_manual(theta1_samples,max_lag);
acf_theta2 = compute_acf_manual(theta2_samples,max_lag);
acf_bound = 1.96/sqrt(n_samples_final);

thin_factor = 10;
iter_post = (burn_in+1):n_iterations;
iter_thin = iter_post(1:thin_factor:end);
theta1_thin = theta1_samples(1:thin_factor:end);
theta2_thin = theta2_samples(1:thin_factor:end);

%% 8. Posterior-predictive samples
% Future observation noise is included. If the noise term is omitted, the
% band represents uncertainty in the posterior mean response, not the full
% posterior-predictive distribution.

x1_pred = linspace(0,1,20).';
x2_pred = 0.5*ones(size(x1_pred));
X_pred = [x1_pred.^2,x2_pred];

n_samples_pred = 1000;
y_pred_samples = zeros(numel(x1_pred),n_samples_pred);

for i = 1:n_samples_pred
    idx = randi(n_samples_final);
    theta_draw = theta_samples_post(idx,:).';
    y_pred_samples(:,i) = X_pred*theta_draw + ...
        sigma*randn(size(x1_pred));
end
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
y_pred_mean = mean(y_pred_samples,2);
y_pred_lower = row_percentile(y_pred_samples,2.5);
y_pred_upper = row_percentile(y_pred_samples,97.5);

%% 9. Visualization

fig = figure('Position',[100,100,1350,900],'Color','w');

% Panel 1: trace plot theta_1
subplot(3,3,1);
plot(iter_thin,theta1_thin,'b-','LineWidth',0.6);
xlabel('Iteration');
ylabel('\theta_1');
title('Trace plot: \theta_1');
grid on;

% Panel 2: trace plot theta_2
subplot(3,3,2);
plot(iter_thin,theta2_thin,'r-','LineWidth',0.6);
xlabel('Iteration');
ylabel('\theta_2');
title('Trace plot: \theta_2');
grid on;

% Panel 3: observed versus posterior-mean fitted response
y_fitted = X*theta_mean;
lims = [min([y;y_fitted]),max([y;y_fitted])];
subplot(3,3,3);
scatter(y,y_fitted,30,'filled');
hold on;
plot(lims,lims,'k--','LineWidth',1.2);
xlabel('Observed y');
ylabel('Posterior-mean fitted y');
title('Observed versus fitted');
axis equal;
xlim(lims); ylim(lims);
grid on;

% Panel 4: posterior density theta_1
subplot(3,3,4);
histogram(theta1_samples,40,'Normalization','pdf', ...
    'FaceColor','b','EdgeColor','k');
hold on;
ylims = ylim;
plot([theta_true(1),theta_true(1)],ylims,'g--','LineWidth',2);
plot([theta_mean(1),theta_mean(1)],ylims,'r-','LineWidth',2);
xlabel('\theta_1');
ylabel('Posterior density');
title(sprintf('\theta_1: mean=%.3f, SD=%.3f', ...
    theta_mean(1),theta_sd(1)));
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
grid on;

% Panel 5: posterior density theta_2
subplot(3,3,5);
histogram(theta2_samples,40,'Normalization','pdf', ...
    'FaceColor','r','EdgeColor','k');
hold on;
ylims = ylim;
plot([theta_true(2),theta_true(2)],ylims,'g--','LineWidth',2);
plot([theta_mean(2),theta_mean(2)],ylims,'b-','LineWidth',2);
xlabel('\theta_2');
ylabel('Posterior density');
title(sprintf('\theta_2: mean=%.3f, SD=%.3f', ...
    theta_mean(2),theta_sd(2)));
grid on;

% Panel 6: joint posterior
subplot(3,3,6);
scatter(theta1_samples(1:10:end),theta2_samples(1:10:end), ...
    10,'b','filled');
hold on;
plot(theta_true(1),theta_true(2),'go','MarkerSize',10,'LineWidth',2);
plot(theta_mean(1),theta_mean(2),'r*','MarkerSize',12,'LineWidth',2);
xlabel('\theta_1');
ylabel('\theta_2');
title(sprintf('Joint posterior (corr.=%.3f)',posterior_correlation));
grid on;

% Panel 7: ACF theta_1
subplot(3,3,7);
stem(0:max_lag,acf_theta1,'b','Marker','none','LineWidth',1.2);
hold on;
plot([0,max_lag],[acf_bound,acf_bound],'r--','LineWidth',1);
plot([0,max_lag],[-acf_bound,-acf_bound],'r--','LineWidth',1);
xlabel('Lag');
ylabel('Autocorrelation');
title('ACF: \theta_1');
grid on;

% Panel 8: ACF theta_2
subplot(3,3,8);
stem(0:max_lag,acf_theta2,'r','Marker','none','LineWidth',1.2);
hold on;
plot([0,max_lag],[acf_bound,acf_bound],'b--','LineWidth',1);
plot([0,max_lag],[-acf_bound,-acf_bound],'b--','LineWidth',1);
xlabel('Lag');
ylabel('Autocorrelation');
title('ACF: \theta_2');
grid on;

% Panel 9: posterior-predictive distribution
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
subplot(3,3,9);
fill([x1_pred;flipud(x1_pred)], ...
    [y_pred_upper;flipud(y_pred_lower)], ...
    'b','FaceAlpha',0.20,'EdgeColor','none');
hold on;
plot(x1_pred,y_pred_mean,'b-','LineWidth',2);
xlabel('x_1, with x_2=0.5');
ylabel('Future y');
title('Posterior-predictive distribution');
grid on;

sgtitle('Bayesian Regression with a Quadratic Basis: MCMC Results');

fprintf('\n=== Diagnostic Summary ===\n');
fprintf(['Acceptance rate: %.1f%% ', ...
    '(20-50%% is a useful heuristic here)\n'],100*acceptance_rate);
if acceptance_rate < 0.20
    fprintf('Acceptance is low: decrease proposal_sd.\n');
elseif acceptance_rate > 0.50
    fprintf('Acceptance is high: increase proposal_sd.\n');
else
    fprintf('Acceptance rate is in the intended heuristic range.\n');
end
fprintf('Inspect trace plots and ACF decay.\n');
fprintf(['This single-chain example does not compute R-hat; ', ...
    'use multiple chains for production work.\n']);
fprintf(['Credible intervals account for measurement noise and prior ', ...
    'information under the assumed model; they do not automatically ', ...
    'account for model discrepancy.\n']);

fprintf('\n=== ANALYSIS COMPLETE ===\n');

% Optional export:
% exportgraphics(fig,'Bayesian_quadratic_basis_MCMC.pdf', ...
%     'ContentType','vector');

%% Local functions
% Local functions in MATLAB scripts require MATLAB R2016b or later.

function loglik = compute_loglikelihood(y,X,theta,sigma)
    residuals = y-X*theta;
    n = numel(y);
    loglik = -0.5*(residuals.'*residuals)/sigma^2 ...
        - n*log(sigma) - 0.5*n*log(2*pi);
end

function logprior = compute_logprior(theta,mu_prior,sigma_prior)
    z = (theta-mu_prior)./sigma_prior;
    logprior = -0.5*(z.'*z) ...
        - sum(log(sigma_prior)) ...
        - 0.5*numel(theta)*log(2*pi);
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
end

function logposterior = compute_logposterior( ...
        y,X,theta,sigma,mu_prior,sigma_prior)
    logposterior = compute_loglikelihood(y,X,theta,sigma) ...
        + compute_logprior(theta,mu_prior,sigma_prior);
end

function acf = compute_acf_manual(x,max_lag)
    x = x(:)-mean(x);
    denominator = sum(x.^2);
    acf = zeros(max_lag+1,1);
    acf(1) = 1;

    for lag = 1:max_lag
        acf(lag+1) = ...
            sum(x(1:end-lag).*x(1+lag:end))/denominator;
    end
end

function q = empirical_percentile(x,p)
    x = sort(x(:));
    n = numel(x);
    h = 1+(n-1)*(p(:)/100);
    lo = floor(h);
    hi = ceil(h);
    w = h-lo;
    q = ((1-w).*x(lo)+w.*x(hi)).';
end

function q = row_percentile(A,p)
    q = zeros(size(A,1),1);
    for i = 1:size(A,1)
        qi = empirical_percentile(A(i,:),p);
        q(i) = qi(1);
    end
end
```

I.5.9 Markov catena Monte Carlo Simulazione

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Codice per l'esempio indicato in §65.5.4.

```
% Generate synthetic data
n = 50; % Number of data points
x1 = rand(n, 1); % Random values for x1
x2 = rand(n, 1); % Random values for x2
theta_true = [2; 3]; % True parameter values
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
sigma = 1; % Standard deviation of noise
y = theta_true(1) * x1.^2 + theta_true(2) * x2 + sigma * randn(n, 1); % Generate data with noise

% Define prior and likelihood
log_prior = @(theta) -0.5 * sum(theta.^2 / 10^2); % Gaussian prior with mean 0 and variance 10^2
log_likelihood = @(theta) -0.5 * sum((y - theta(1) * x1.^2 - theta(2) * x2).^2 / sigma^2); % Likelihood function

% MCMC sampling parameters
num_samples = 10000; % Number of MCMC samples
theta_samples = zeros(num_samples, 2); % Storage for parameter samples
theta_current = [0; 0]; % Initial guess for parameters

% MCMC sampling loop
for i = 1:num_samples
% Propose new parameters
theta_proposal = theta_current + randn(2, 1) * 0.1; % Gaussian proposal distribution

% Compute log acceptance ratio
log_acceptance_ratio = ...
log_likelihood(theta_proposal) + log_prior(theta_proposal) ...
- log_likelihood(theta_current) - log_prior(theta_current);

% Accept or reject the proposal
if log(rand) < log_acceptance_ratio
theta_current = theta_proposal; % Accept the proposal
end

% Store the current sample
theta_samples(i, :) = theta_current;
end

% Analyze the results
theta_mean = mean(theta_samples, 1); % Posterior mean of parameters
theta_ci = quantile(theta_samples, [0.025, 0.975]); % 95% credible intervals

% Display results
fprintf('Estimated theta: [%f, %f]\n', theta_mean(1), theta_mean(2));
fprintf('95%% CI for theta1: [%f, %f]\n', theta_ci(1, 1), theta_ci(2, 1));
fprintf('95%% CI for theta2: [%f, %f]\n', theta_ci(1, 2), theta_ci(2, 2));

% Plot posterior distributions
figure;
subplot(1, 2, 1);
histogram(theta_samples(:, 1), 30, 'Normalization', 'pdf');
title('\theta_1 Posterior');
xlabel('\theta_1');
ylabel('Density');
```

COPIA DI REVISIONE

```
grid on;

subplot(1, 2, 2);
histogram(theta_samples(:, 2), 30, 'Normalization', 'pdf');
title('\theta_2 Posterior');
xlabel('\theta_2');
ylabel('Density');
grid on;
```

I.6 Parte VI: Ottimizzazione e montaggio del parametro

Questa sezione si rivolge all'ottimizzazione e alla curva non lineari di minimo-quares utilizzando l'algoritmo Levenberg-Marquardt.

I.6.1 Levenberg-Marquardt

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Fare riferimento a §65.4.

I.6.2 Attuazione doganale

```
% ========================================================================
% LEVENBERG-MARQUARDT ALGORITHM -- CUSTOM IMPLEMENTATION
% ========================================================================
% Fits a nonlinear model to noisy data using the Levenberg-Marquardt (LM)
% algorithm, implemented from scratch (not using MATLAB's lsqnonlin).
%
% MODEL:  y(x) = beta_1 * exp(beta_2 * x)
%
% ALGORITHM:
%   LM is a trust-region method that interpolates between two extremes:
%     - Gauss-Newton (lambda -> 0):  fast quadratic convergence near solution
%     - Gradient descent (lambda -> infinity): robust far from solution
%
%   At each iteration, the parameter update solves:
%       (J^T J + lambda * I) * delta = J^T * r
%
%   where:
%     J     : Jacobian matrix  [n x p]  (partial derivatives of residuals)
%     r     : residual vector  [n x 1]  (y_observed - y_model)
%     lambda: damping parameter (controls interpolation between GN and GD)
%     delta : parameter update  [p x 1]
%
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
%   If the update reduces the cost, accept it and decrease lambda (-> GN).
%   If not, reject it and increase lambda (-> GD).
%
% JACOBIAN (analytical, for this model):
%   dr_i/d(beta_1) = -exp(beta_2 * x_i)
%   dr_i/d(beta_2) = -beta_1 * x_i * exp(beta_2 * x_i)
%
%   NOTE: this code uses the Jacobian of the MODEL (not the residuals),
%   so J here has the opposite sign from the Jacobian of the residuals.
%   The normal equations J^T J delta = J^T r remain correct as written.
%
% NOTE ON LAMBDA ADAPTATION:
%   This implementation uses a FIXED lambda throughout all iterations.
%   A proper LM implementation adapts lambda based on whether the update
%   improves the cost (reduce lambda) or worsens it (increase lambda).
%   Fixed lambda works here because the problem is well-conditioned and
%   the initial guess is close to the solution, but it is not general.
%
% EXPECTED RESULT: beta approx [1.0, 1.0]
% ========================================================================

clear; close all; clc;

rng(0);   % fixed seed for reproducibility

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Generate synthetic data
% ------------------------------------------------------------------------
x           = linspace(0, 2, 20);     % 20 equally spaced points in [0, 2]
true_params = [1.0; 1.0];             % true beta_1 and beta_2

y_true = true_params(1) * exp(true_params(2) * x);
y      = y_true + 0.1 * randn(size(y_true));   % add Gaussian noise (std =
    0.1)

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Model and algorithm parameters
% ------------------------------------------------------------------------
model    = @(beta, x) beta(1) * exp(beta(2) * x);

beta     = [0.5; 0.5];   % initial guess (deliberately away from truth)
lambda   = 0.01;          % damping parameter (fixed -- see NOTE above)
tol      = 1e-6;          % convergence threshold on ||delta_beta||
max_iter = 100;           % maximum number of iterations

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Levenberg-Marquardt iteration
% ------------------------------------------------------------------------
fprintf('%-8s  %-12s  %-10s  %-10s  %-12s\n', ...
        'Iter', 'Cost', 'beta_1', 'beta_2', '||delta||');

```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
for iter = 1 : max_iter

    % --- Model predictions at current parameters ---
    f = model(beta, x);

    % --- Residuals: r = y_observed - y_model  (column vector) ---
    r = (y - f)';

    % --- Jacobian of the model output w.r.t. parameters ---
    % J(i,1) = d(model)/d(beta_1) at x_i = exp(beta_2 * x_i)
    % J(i,2) = d(model)/d(beta_2) at x_i = beta_1 * x_i * exp(beta_2 * x_i)
    J = [ exp(beta(2) * x)',  ...
          beta(1) * x' .* exp(beta(2) * x)' ];

    % --- Normal equations with damping: (J^T J + lambda*I) delta = J^T r ---
    JTJ        = J' * J;
    JTr        = J' * r;
    delta_beta = (JTJ + lambda * eye(2)) \ JTr;

    % --- Update parameters ---
    beta = beta + delta_beta;

    % --- Report progress ---
    cost = 0.5 * sum(r.^2);
    fprintf('%-8d  %-12.6f  %-10.6f  %-10.6f  %-12.2e\n', ...
            iter, cost, beta(1), beta(2), norm(delta_beta));

    % --- Check convergence ---
    if norm(delta_beta) < tol
        fprintf('\nConverged after %d iterations.\n', iter);
        break;
    end

    if iter == max_iter
        fprintf('\nWARNING: maximum iterations reached without convergence.\n'
    );
    end

end

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Results
% -------------------------------------------------------------------------
fprintf('\n--- Summary ---\n');
fprintf('True parameters:  beta_1 = %.4f,  beta_2 = %.4f\n', true_params(1),
    true_params(2));
fprintf('Fitted parameters: beta_1 = %.4f,  beta_2 = %.4f\n', beta(1), beta(2)
    );

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- Plot
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
% ------------------------------------------------------------------------
x_fit = linspace(min(x), max(x), 200);
y_fit = model(beta, x_fit);

figure;
scatter(x, y, 60, 'ro', 'filled', 'DisplayName', 'Observed data');
hold on;
plot(x_fit, y_fit,   'b-', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'LM fitted model');
plot(x_fit, true_params(1)*exp(true_params(2)*x_fit), ...
     'k--', 'LineWidth', 1.5, 'DisplayName', 'True model');
hold off;

xlabel('x');
ylabel('y');
title(sprintf('Levenberg-Marquardt:  \\beta_1=%.3f, \\beta_2=%.3f', beta(1),
   beta(2)));
legend('Location', 'northwest');
grid on;
```

I.6.3 Utilizzo della funzione integrata

```
% ========================================================================
% LEVENBERG-MARQUARDT FITTING -- MATLAB BUILT-IN (lsqcurvefit)
% ========================================================================
% Fits the same exponential model as the custom LM implementation using
% MATLAB's lsqcurvefit, which provides a production-quality Levenberg-
% Marquardt solver with adaptive damping, convergence diagnostics, and
% confidence interval estimation.
%
% MODEL:  y(x) = beta_1 * exp(beta_2 * x)
%
% COMPARISON WITH CUSTOM IMPLEMENTATION:
%   The previous script (levenberg_marquardt.m) built LM from scratch
%   with a FIXED damping parameter lambda.  lsqcurvefit uses an ADAPTIVE
%   lambda strategy: lambda decreases when updates improve the cost
%   (accelerating convergence near the solution) and increases when they
%   don't (recovering robustness far from it).  This is the correct
%   implementation of the Levenberg-Marquardt trust-region method.
%
% lsqcurvefit INTERFACE:
%   [beta, resnorm, residual, exitflag, output, lambda, jacobian]
%       = lsqcurvefit(model, beta0, x, y, lb, ub, options)
%
%   model    : function handle @(beta,x) returning model predictions
%   beta0    : initial parameter guess
%   x, y     : observed data
%   lb, ub   : lower/upper bounds ([] = none)
%   resnorm  : sum of squared residuals at the solution
%   jacobian : Jacobian at the solution (used for confidence intervals)
%
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
% CONFIDENCE INTERVALS:
%   nlparci(beta, residual, 'Jacobian', jacobian) returns approximate
%   95% confidence intervals based on the linearised model at the solution.
%
% EXPECTED RESULT: beta approx [1.0, 1.0]
% ========================================================================

clear; close all; clc;

rng(0);   % same seed as custom implementation for direct comparison

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Generate synthetic data  (identical to custom LM script)
% ------------------------------------------------------------------------
x           = linspace(0, 2, 20);
true_params = [1.0, 1.0];

y_true = true_params(1) * exp(true_params(2) * x);
y      = y_true + 0.1 * randn(size(y_true));

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Model and solver setup
% ------------------------------------------------------------------------
model = @(beta, x) beta(1) * exp(beta(2) * x);

beta0 = [0.5, 0.5];   % initial guess (same as custom implementation)

options = optimoptions('lsqcurvefit',                ...
    'Algorithm',    'levenberg-marquardt',           ...  % LM with adaptive lambda
    'Display',      'iter',                          ...  % show iteration history
    'TolFun',       1e-10,                           ...  % function tolerance
    'TolX',         1e-10,                           ...  % parameter tolerance
    'MaxIterations', 400);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Fit the model
% ------------------------------------------------------------------------
[beta_opt, resnorm, residual, exitflag, output, ~, jacobian] = ...
    lsqcurvefit(model, beta0, x, y, [], [], options);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Results and confidence intervals
% ------------------------------------------------------------------------
ci = nlparci(beta_opt, residual, 'Jacobian', full(jacobian));

fprintf('\n--- Results ---\n');
fprintf('True parameters:   beta_1 = %.4f,  beta_2 = %.4f\n', true_params(1), true_params(2));
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
fprintf('Fitted parameters: beta_1 = %.4f,  beta_2 = %.4f\n', beta_opt(1),
    beta_opt(2));
fprintf('Residual norm (sum of squared residuals): %.6e\n', resnorm);
fprintf('\n95%% Confidence Intervals:\n');
fprintf('  beta_1: [%.4f, %.4f]\n', ci(1,1), ci(1,2));
fprintf('  beta_2: [%.4f, %.4f]\n', ci(2,1), ci(2,2));
fprintf('\nSolver exit flag: %d  (%s)\n', exitflag, output.message);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- Plot
% ------------------------------------------------------------------------
x_fit = linspace(min(x), max(x), 200);
y_fit = model(beta_opt, x_fit);

figure;
scatter(x, y, 60, 'ro', 'filled', 'DisplayName', 'Observed data');
hold on;
plot(x_fit, y_fit, 'b-', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'LM fitted model');
plot(x_fit, true_params(1)*exp(true_params(2)*x_fit), ...
     'k--', 'LineWidth', 1.5, 'DisplayName', 'True model');
hold off;

xlabel('x');
ylabel('y');
title(sprintf('lsqcurvefit LM:  \\beta_1=%.3f, \\beta_2=%.3f', ...
              beta_opt(1), beta_opt(2)));
legend('Location', 'northwest');
grid on;
```

I.7 Parte VII: Affidabilità sismica e incertezza

Questa sezione applica i metodi sviluppati sopra all'ingegneria sismica, tra cui l'analisi dei rischi probabilistici e la progettazione basata sulle prestazioni.

I.7.1 Analisi dei rischi sismici

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Codice per §67.13.

```
% ========================================================================
% SEISMIC HAZARD ANALYSIS AND DEAGGREGATION
% ========================================================================
% Demonstrates two core products of Probabilistic Seismic Hazard Analysis
% (PSHA) for a site:
```

COPIA DI REVISIONE

```
%
% PART 1 -- SEISMIC HAZARD CURVE:
%   Plots the annual probability of exceeding a given ground motion
%   intensity level (here: Peak Ground Acceleration, PGA in units of g).
%
%   The hazard curve is the fundamental output of PSHA.  For a given
%   intensity measure IM:
%       lambda(IM > x) = annual rate of exceedance of level x
%
%   A common design target:
%     lambda = 0.002/year (2% probability in 50 years) -> "2/50" level
%     lambda = 0.02/year  (10% probability in 50 years) -> "10/50" level
%
%   Here the hazard curve is modelled by a simple exponential decay:
%       lambda(PGA) = lambda_0 * exp(-decay_rate * PGA)
%   This is synthetic -- a real hazard curve is computed by integrating
%   over all earthquake sources, magnitudes, and distances.
%
% PART 2 -- SEISMIC HAZARD DEAGGREGATION:
%   For a given hazard level (e.g. Sa(T=1s) = 0.8g), deaggregation
%   identifies which (magnitude, distance) scenarios contribute most
%   to the hazard at that level.
%
%   The scatter plot shows:
%     - x-axis: source-to-site distance R [km]
%     - y-axis: earthquake magnitude M
%     - marker size: proportional to fractional contribution to hazard
%     - marker color: same contribution scale
%
%   The dominant scenario (largest marker) defines the "controlling
%   earthquake" used for ground motion selection in structural analysis.
%
% NOTE: Both the hazard curve and deaggregation data here are SYNTHETIC.
%   In practice these are computed using software such as OpenSHA, HAZUS,
%   or the USGS Unified Hazard Tool, integrating over catalogued faults
%   and ground motion prediction equations (GMPEs).
% ========================================================================

clc; clear; close all;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Seismic hazard curve
% ------------------------------------------------------------------------
% PGA levels at which the annual exceedance rate is evaluated
pga_values = linspace(0.05, 0.5, 10);   % PGA in units of g

% Synthetic hazard model: lambda = lambda_0 * exp(-decay_rate * PGA)
lambda_0   = 0.15;   % exceedance rate at PGA = 0 (extrapolated)  [1/year]
decay_rate = 5;      % steepness of the hazard curve               [1/g]

exceedance_probs = lambda_0 * exp(-decay_rate * pga_values);
```

COPIA DI REVISIONE

```

% Reference hazard levels (horizontal lines on the plot)
lambda_2_50  = 1 - (1-0.02)^(1/50);   % 2% in 50 years  approx 0.000404/year
lambda_10_50 = 1 - (1-0.10)^(1/50);   % 10% in 50 years approx 0.002107/year

figure;
semilogy(pga_values, exceedance_probs, 'b-o', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 6)
    ;
hold on;
yline(lambda_2_50,  'r--', '2% in 50 yr', 'LineWidth', 1.5, ...
      'LabelHorizontalAlignment', 'left');
yline(lambda_10_50, 'k--', '10% in 50 yr', 'LineWidth', 1.5, ...
      'LabelHorizontalAlignment', 'left');

xlabel('Peak Ground Acceleration  (g)',           'FontSize', 12);
ylabel('Annual Probability of Exceedance',        'FontSize', 12);
title('Seismic Hazard Curve',                     'FontSize', 13);
grid on;
set(gca, 'YScale', 'log');
set(gca, 'YTick', [1e-3, 5e-3, 1e-2, 5e-2, 1e-1, 5e-1, 1]);
ylim([1e-3, 1]);

saveas(gcf, 'hazard_curve.png');

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Seismic hazard deaggregation
% ------------------------------------------------------------------------
% Each entry represents a (magnitude, distance) scenario and its
% fractional contribution to the hazard at Sa(T=1s) = 0.8g.
% Contributions must sum to 1.0 for a complete deaggregation.

magnitudes    = [6.0,  6.5,  7.0,  7.3,  7.5,  7.8];   % moment magnitude Mw
distances     = [15,   20,   30,   35,   40,   50  ];    % closest distance [
    km]
contributions = [0.10, 0.20, 0.25, 0.30, 0.10, 0.05];   % fractional
    contributions

fprintf('Total contribution (should sum to 1.0): %.2f\n', sum(contributions));

% Identify the controlling (dominant) scenario
[~, ctrl_idx] = max(contributions);
fprintf('Controlling scenario: M=%.1f, R=%d km (contribution=%.0f%%)\n', ...
        magnitudes(ctrl_idx), distances(ctrl_idx), contributions(ctrl_idx)
    *100);

figure;
scatter(distances, magnitudes, 300 * contributions, contributions, 'filled');
hold on;
% Highlight the controlling earthquake
scatter(distances(ctrl_idx), magnitudes(ctrl_idx), ...
        300 * contributions(ctrl_idx), 'k', 'LineWidth', 2);
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
text(distances(ctrl_idx)+1, magnitudes(ctrl_idx), ...
     sprintf('  Controlling\n  M=%.1f, R=%dkm', magnitudes(ctrl_idx),
    distances(ctrl_idx)), ...
     'FontSize', 10);

cb = colorbar;
cb.Label.String = 'Fractional contribution to hazard';
clim([0, 0.5]);

xlabel('Closest Source-to-Site Distance  (km)', 'FontSize', 12);
ylabel('Moment Magnitude  M_w',                 'FontSize', 12);
title('Seismic Hazard Deaggregation  at  S_a(T=1.0 s) = 0.8g', 'FontSize', 13)
    ;
grid on;
set(gca, 'YTick', [6.0, 6.2, 6.5, 6.8, 7.0, 7.2, 7.3, 7.5, 7.8]);
xlim([0, 60]);  ylim([5.5, 8.5]);

saveas(gcf, 'deaggregation_plot.png');
```

I.7.2 Ingegneria basata sulle prestazioni

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Codice corrispondente ad esempio in §72.4.

```
% ========================================================================
% PERFORMANCE-BASED EARTHQUAKE ENGINEERING (PBEE) -- NUMERICAL EXAMPLE
% ========================================================================
% Implements the four-step PBEE framework (PEER methodology) relating
% ground shaking intensity to structural response, damage, and loss.
%
% THE PBEE FRAMEWORK (Pacific Earthquake Engineering Research Center):
%   The total loss lambda(DV) is computed by integrating over all
%   intermediate variables via the triple integral:
%
%   lambda(DV > dv) = int int int  P(DV>dv|DM) |dP(DM|EDP)| |dP(EDP|IM)| |
    dlambda(IM)|
%
%   where:
%     IM  : Intensity Measure      (e.g. spectral acceleration Sa)
%     EDP : Engineering Demand Parameter  (e.g. interstory drift ratio theta)
%     DM  : Damage Measure         (damage state: None/Slight/Moderate/...)
%     DV  : Decision Variable      (repair cost, downtime, casualties)
%
% THE FOUR STEPS IMPLEMENTED HERE:
%
%   Step 1 -- Seismic hazard curve: lambda(Sa)
%     Annual rate of exceeding each Sa level at the site.
%     Synthetic exponential model; in practice from PSHA.
```

COPIA DI REVISIONE

```
%
%   Step 2 -- IDA curve: theta = f(Sa)
%     Maps Sa to peak interstory drift via a power-law fit to
%     Incremental Dynamic Analysis results.
%
%   Step 3 -- Fragility curves: P(DM >= ds | theta)
%     Lognormal cumulative distribution functions giving probability of
%     reaching or exceeding each damage state as a function of drift.
%     Parameters: median theta_m (drift at 50% probability) and dispersion
    beta.
%
%   Step 4 -- Loss analysis: E[DV]
%     (a) Deterministic: E[DV] = sum_i P(DS=i) * consequence_i
%     (b) Monte Carlo: sample damage states and accumulate loss statistics
%
% NOTE ON MONTE CARLO DAMAGE STATE SAMPLING:
%   The cumulative probability vector is used to assign damage states via
%   inverse CDF sampling:  state = find(U < cumsum(P), 1, 'first').
%   The vectorised implementation below replaces the original scalar loop.
% ========================================================================

clc; clear; close all;

% ========================================================================
% STEP 1 -- SEISMIC HAZARD CURVE:  lambda(Sa)
% ========================================================================
% Annual exceedance rate as a function of spectral acceleration.
% Model: lambda(Sa) = A * exp(-B * Sa)   (synthetic exponential decay)

A          = 0.5;   % rate at Sa=0  [exceedances/year]
B          = 2.0;   % decay rate    [1/g]
Sa_values  = linspace(0, 1.5, 100);   % Sa range  [g]

lambda_values = A * exp(-B * Sa_values);

% Reference hazard levels
lambda_2_50  = 1 - (1-0.02)^(1/50);   % 2% in 50 yr  approx 4.0e-4 /yr
lambda_10_50 = 1 - (1-0.10)^(1/50);   % 10% in 50 yr approx 2.1e-3 /yr

figure('Name', 'PBEE Step 1: Hazard Curve');
semilogy(Sa_values, lambda_values, 'b', 'LineWidth', 2);
hold on;
yline(lambda_2_50,  'r--', '2% in 50 yr',  'LabelHorizontalAlignment','left');
yline(lambda_10_50, 'k--', '10% in 50 yr', 'LabelHorizontalAlignment','left');
xlabel('Spectral Acceleration  S_a  (g)');
ylabel('Annual Rate of Exceedance  \lambda');
title('Step 1 -- Seismic Hazard Curve');
grid on;

% ========================================================================
% STEP 2 -- IDA CURVE:  theta = f(Sa)
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
% ========================================================================
% Interstory drift ratio (EDP) as a function of Sa (IM).
% Power-law model fit to Incremental Dynamic Analysis:
%   theta(Sa) = C1 * Sa^C2

C1 = 0.02;   % scaling constant
C2 = 0.9;    % exponent (< 1: slightly concave, typical of ductile systems)

theta_values = C1 * Sa_values.^C2;

figure('Name', 'PBEE Step 2: IDA Curve');
plot(Sa_values, theta_values, 'r', 'LineWidth', 2);
xlabel('Spectral Acceleration  S_a  (g)');
ylabel('Interstory Drift Ratio  \theta');
title('Step 2 -- Incremental Dynamic Analysis (IDA) Curve');
grid on;

% ========================================================================
% STEP 3 -- FRAGILITY CURVES:  P(DS >= ds | theta)
% ========================================================================
% Lognormal fragility functions for four damage states.
% P(DS >= ds | theta) = Phi( [ln(theta) - ln(theta_m)] / beta )
%
% Parameters:
%   theta_m : median drift (50% probability of reaching this DS)
%   beta    : lognormal dispersion (total {chap:trustregion} in capacity)

beta              = 0.4;
fragility_medians = [0.005, 0.010, 0.020, 0.050];   % median drifts [rad]
fragility_labels  = {'Light', 'Moderate', 'Severe', 'Collapse'};
theta_range       = linspace(0.001, 0.1, 200);

figure('Name', 'PBEE Step 3: Fragility Curves');
hold on;
colors = {'b', 'g', 'r', 'k'};
for i = 1 : length(fragility_medians)
    P = normcdf((log(theta_range) - log(fragility_medians(i))) / beta);
    plot(theta_range, P, colors{i}, 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
   fragility_labels{i});
end
xlabel('Interstory Drift Ratio  \theta  (rad)');
ylabel('Probability  P(DS \geq ds | \theta)');
title('Step 3 -- Fragility Curves');
legend('Location', 'east');
grid on;

% ========================================================================
% STEP 4a -- DETERMINISTIC LOSS ANALYSIS:  E[DV]
% ========================================================================
% Expected consequences given probabilities from fragility analysis
% at a specific hazard level.
```

COPIA DI REVISIONE

```
%
% NOTE: probabilities here are P(DS = ds_i) at a given drift level,
% not P(DS >= ds_i).  They should sum to 1.0 for a complete loss model.

ds_probs     = [0.9, 0.6, 0.1, 0.0];   % P(DS = ds_i) -- NOTE: sums to 1.6,
                                       % suggesting these are P(DS>=ds_i)
                                       % not exclusive probabilities.
                                       % Preserved from original.
repair_costs_det = [0.1,  0.5,   2.0,  10.0];   % repair cost  [$M]
downtime_det     = [2,    14,    60,   300 ];    % downtime     [days]
casualties_det   = [0.0,  0.01,  0.1,    5.0];  % casualties   [%]

E_loss       = sum(ds_probs .* repair_costs_det);
E_downtime   = sum(ds_probs .* downtime_det);
E_casualties = sum(ds_probs .* casualties_det);

fprintf('\n--- Step 4a: Deterministic Loss ---\n');
fprintf('Expected repair cost: $%.2f M\n',    E_loss);
fprintf('Expected downtime:    %.1f days\n',  E_downtime);
fprintf('Expected casualties:  %.3f%%\n',     E_casualties);

% ========================================================================
% STEP 4b -- MONTE CARLO LOSS ESTIMATION
% ========================================================================
% Sample damage states using exclusive probabilities (sum to 1.0) and
% accumulate repair cost, downtime, and casualty statistics.
%
% DAMAGE STATES: None, Slight, Moderate, Extensive, Complete
%
% VECTORISED SAMPLING:
%   For each sample U ~ Uniform[0,1], the damage state is the first
%   state for which cumsum(P) > U.  Equivalent to inverse CDF sampling.

num_samples = 100000;

% Exclusive probabilities (sum to 1.0)
ds_probs_mc  = [0.60, 0.25, 0.10, 0.04, 0.01];
cum_probs    = cumsum(ds_probs_mc);

% Consequences per damage state
rc_mc  = [0,    0.03,  0.15,  0.50,  2.00];   % repair cost [M$]
dt_mc  = [0,    1,     7,     21,    60  ];    % downtime    [days]
cas_mc = [0,    0.005, 0.02,  0.10,  0.50];   % casualties  [%]

% Vectorised inverse CDF sampling (replaces scalar loop)
U             = rand(num_samples, 1);
damage_states = sum(U >= cum_probs, 2) + 1;   % state index 1..5

rc_results  = rc_mc(damage_states);
dt_results  = dt_mc(damage_states);
cas_results = cas_mc(damage_states);
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
175
176 % Statistics
177 E_rc   = mean(rc_results);   SD_rc  = std(rc_results);
178 E_dt   = mean(dt_results);   SD_dt  = std(dt_results);
179 E_cas  = mean(cas_results);  SD_cas = std(cas_results);
180
181 fprintf('\n--- Step 4b: Monte Carlo Loss (%d samples) ---\n', num_samples);
182 fprintf('Repair cost: $%.3f M  (SD: $%.3f M,  CV: %.2f)\n', E_rc,  SD_rc,
    SD_rc/E_rc);
183 fprintf('Downtime:    %.2f days (SD: %.2f days, CV: %.2f)\n', E_dt,  SD_dt,
    SD_dt/E_dt);
184 fprintf('Casualties:  %.4f%%  (SD: %.4f%%,   CV: %.2f)\n',   E_cas, SD_cas,
    SD_cas/E_cas);
185
186 % ========================================================================
187 % STEP 4b -- PLOTS: Loss distributions
188 % ========================================================================
189 figure('Name', 'PBEE Step 4b: Loss Distributions');
190
191 subplot(1,3,1);
192 histogram(rc_results,  'Normalization', 'probability', 'FaceColor', 'b');
193 xlabel('Repair Cost  ($M)');  ylabel('Probability');
194 title('Repair Cost Distribution');
195 xline(E_rc, 'r--', sprintf('E=\\$%.2fM', E_rc), 'LineWidth', 1.5);
196 grid on;
197
198 subplot(1,3,2);
199 histogram(dt_results,  'Normalization', 'probability', 'FaceColor', 'r');
200 xlabel('Downtime  (days)');  ylabel('Probability');
201 title('Downtime Distribution');
202 xline(E_dt, 'b--', sprintf('E=%.1f d', E_dt), 'LineWidth', 1.5);
203 grid on;
204
205 subplot(1,3,3);
206 histogram(cas_results, 'Normalization', 'probability', 'FaceColor', 'g');
207 xlabel('Casualties  (%)');  ylabel('Probability');
208 title('Casualty Distribution');
209 xline(E_cas, 'k--', sprintf('E=%.3f%%', E_cas), 'LineWidth', 1.5);
210 grid on;
211
212 sgtitle('Step 4b -- Monte Carlo Loss Distributions');
213
214 saveas(gcf, 'loss_distributions.png');
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

I.8 Parte VIII: Utilità

Funzioni e strumenti vari di utilità.

I.8.1 Identico

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Codice che crea identicons come descritto in chapter H

```
% Book Chapter Identicon Generator with separate filename and title
% ================================================================
% ================================================================================
% BOOK CHAPTER IDENTICON GENERATOR
% ================================================================================
% Generates a unique visual "identicon" -- a small symmetric icon derived
% deterministically from a chapter title -- for use as a chapter header
% or visual identifier in the book.
%
% HOW IT WORKS:
%   1. The chapter title string is hashed into a 32-element integer array
%      using a simple position-weighted ASCII accumulation (simpleHash).
%   2. The hash values are mapped onto a 5x5 grid, with the left half
%      mirrored to the right for left-right symmetry.
%   3. Each non-zero cell is assigned a shape type (1=rounded square,
%      2=triangle-left, 3=triangle-right, 4=circle) and a color drawn
%      from a hue-shifted palette derived from the hash.
%   4. The result is rendered as a pixel image (300x300) alongside a
%      colour-mapped view of the raw pattern matrix.
%
% INPUTS (prompted interactively):
%   filename_input : base name for the output PDF  (e.g. 'C-14')
%   title_input    : chapter title string used to generate the hash
%
% OUTPUT:
%   <filename_input>.pdf  -- figure saved as PDF
%
% NOTE ON HASH QUALITY:
%   simpleHash() is intentionally simple (not cryptographic).  Its purpose
%   is only to produce visually distinct patterns for different chapter
%   titles, not to be collision-resistant.  Titles that differ by only
%   one character will produce clearly different icons in practice.
%
% NOTE ON PERFORMANCE:
%   The shape-drawing loops iterate over individual pixels (up to 60x60
%   per cell).  For cell_size=60 and a 5x5 grid this is 90,000 pixels --
%   fast enough interactively.  Increasing cell_size will slow rendering
%   quadratically.  Vectorised alternatives using meshgrid exist but
%   are left as-is for readability.
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
% ========================================================================

clear; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- User inputs
% ------------------------------------------------------------------------
filename_input = input('Enter filename for PDF (e.g., C-14): ', 's');
if isempty(filename_input)
    filename_input = 'C-14';
end

title_input = input('Enter chapter title (e.g., Performance Based Earthquake
   Engineering): ', 's');
if isempty(title_input)
    title_input = 'Performance Based Earthquake Engineering';
end

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Generate hash from chapter title
% ------------------------------------------------------------------------
hash_values = simpleHash(title_input);
hash_str    = num2str(hash_values);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Build the 5x5 pattern matrix
% ------------------------------------------------------------------------
% Each cell is assigned an integer 0..4:
%   0 = empty (white)
%   1 = rounded square
%   2 = triangle (lower-left fill)
%   3 = triangle (lower-right fill)
%   4 = circle
%
% Only the left half + centre column are computed from the hash;
% the right half is mirrored for symmetry.

grid_size = 5;
pattern   = zeros(grid_size);

for i = 1 : grid_size
    % Left half (columns 1 .. floor(n/2))
    for j = 1 : floor(grid_size/2)
        hash_idx        = mod((i-1)*grid_size + j - 1, length(hash_values)) +
   1;
        pattern(i,j)    = mod(hash_values(hash_idx), 5);
        pattern(i, grid_size-j+1) = pattern(i,j);   % mirror
    end
    % Centre column (for odd grid size)
    if mod(grid_size, 2) == 1
        j        = ceil(grid_size/2);
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
        hash_idx = mod((i-1)*grid_size + j - 1, length(hash_values)) + 1;
        pattern(i,j) = mod(hash_values(hash_idx), 5);
    end
end

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Build colour palette from hash
% ------------------------------------------------------------------------
% Base hue derived from first three hash values; four colours at 90-degree
% hue intervals for variety.

base_hue = mod(sum(hash_values(1:3)), 360) / 360;
colors   = [ hsv2rgb([mod(base_hue,        1), 0.8, 0.9]) ;   % primary
             hsv2rgb([mod(base_hue + 0.25, 1), 0.7, 0.9]) ;   % complementary 1
             hsv2rgb([mod(base_hue + 0.50, 1), 0.8, 0.8]) ;   % complementary 2
             hsv2rgb([mod(base_hue + 0.75, 1), 0.7, 0.85]) ]; % complementary 3

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- Render pixel image
% ------------------------------------------------------------------------
cell_size = 60;                                  % pixels per grid cell
img_size  = grid_size * cell_size;
identicon = ones(img_size, img_size, 3);         % white RGB background

for i = 1 : grid_size
    for j = 1 : grid_size

        value = pattern(i,j);
        if value == 0, continue; end   % empty cell

        % Pixel bounding box for this cell (with padding)
        padding   = ceil(cell_size * 0.05);
        row_start = (i-1)*cell_size + 1 + padding;
        row_end   =  i   *cell_size     - padding;
        col_start = (j-1)*cell_size + 1 + padding;
        col_end   =  j   *cell_size     - padding;

        % Colour selection based on position and value
        color_idx = mod(i*j + value, 4) + 1;
        color     = colors(color_idx, :);

        switch value

            case 1  % Rounded square
                % Pixels near the four corners are masked out to create
                % the rounded effect.
                corner_r = ceil(cell_size * 0.15);
                for r = row_start : row_end
```

COPIA DI REVISIONE

```
                    for c = col_start : col_end
                        tl = (r-row_start)^2 + (c-col_start)^2;
                        tr = (r-row_start)^2 + (c-col_end  )^2;
                        bl = (r-row_end  )^2 + (c-col_start)^2;
                        br = (r-row_end  )^2 + (c-col_end  )^2;
                        in_corner = ...
                            (r < row_start+corner_r && c < col_start+corner_r
    && tl > corner_r^2) || ...
                            (r < row_start+corner_r && c > col_end  -corner_r
    && tr > corner_r^2) || ...
                            (r > row_end  -corner_r && c < col_start+corner_r
    && bl > corner_r^2) || ...
                            (r > row_end  -corner_r && c > col_end  -corner_r
    && br > corner_r^2);
                        if ~in_corner
                            identicon(r, c, :) = color;
                        end
                    end
                end

            case 2  % Triangle: lower-left fill (hypotenuse from top-left to
    bottom-right)
                h = row_end - row_start;
                w = col_end - col_start;
                for r = 0 : h
                    fill_width = ceil((r/h) * w);
                    for c = 0 : fill_width
                        if row_start+r <= img_size && col_start+c <= img_size
                            identicon(row_start+r, col_start+c, :) = color;
                        end
                    end
                end

            case 3  % Triangle: lower-right fill (hypotenuse from top-right to
     bottom-left)
                h = row_end - row_start;
                w = col_end - col_start;
                for r = 0 : h
                    fill_width = ceil((r/h) * w);
                    for c = 0 : fill_width
                        cc = col_end - c;
                        if row_start+r <= img_size && cc > 0 && cc <= img_size
                            identicon(row_start+r, cc, :) = color;
                        end
                    end
                end

            case 4  % Circle: filled disk within the padded cell
                cr     = (row_start + row_end) / 2;
                cc_ctr = (col_start + col_end) / 2;
                radius = (row_end - row_start) / 2 * 0.9;
```

COPIA DI REVISIONE

```
                for r = row_start : row_end
                    for c = col_start : col_end
                        if sqrt((r-cr)^2 + (c-cc_ctr)^2) <= radius
                            identicon(r, c, :) = color;
                        end
                    end
                end

        end   % switch
    end
end

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 6 -- Compose figure
% ------------------------------------------------------------------------
fig = figure('Position', [100, 100, 800, 400], 'Color', 'none');

% Left panel: rendered identicon with grid lines
subplot('Position', [0.05, 0.12, 0.45, 0.75]);
imshow(identicon);
hold on;
for k = 1 : grid_size-1
    line([0, img_size], [k*cell_size, k*cell_size], 'Color', [0.6,0.6,0.6], '
   LineWidth', 1);
    line([k*cell_size, k*cell_size], [0, img_size], 'Color', [0.6,0.6,0.6], '
   LineWidth', 1);
end
hold off;

% Right panel: colour-mapped pattern matrix with value labels
subplot('Position', [0.52, 0.12, 0.45, 0.75]);
imagesc(pattern);
colormap(hsv(5));
axis square;  grid on;
set(gca, 'Color', 'none');
for i = 1 : grid_size
    for j = 1 : grid_size
        text(j, i, num2str(pattern(i,j)), ...
             'HorizontalAlignment', 'center', ...
             'Color', 'w', 'FontWeight', 'bold', 'FontSize', 14, ...
             'EdgeColor', 'k', 'Margin', 1);
    end
end

% Top annotation: chapter title + first 16 hash digits
title_text = [title_input, '  |  Hash: ', hash_str(1:min(16,length(hash_str)))
   , '...'];
annotation('textbox', [0.1, 0.91, 0.8, 0.07], ...
           'String', title_text, 'EdgeColor', 'none', ...
           'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 14, ...
           'FontWeight', 'bold', 'Color', [0.2, 0.2, 0.2]);
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
230
231 % ------------------------------------------------------------------------
232 % Section 7 -- Export
233 % ------------------------------------------------------------------------
234 output_filename = [filename_input, '.pdf'];
235 print(fig, '-dpdf', output_filename);
236 fprintf('Saved to: %s\n', output_filename);
237
238
239 % ========================================================================
240 % LOCAL FUNCTION: simpleHash
241 % ========================================================================
242 % Produces a 32-element integer array from a string by accumulating
243 % position-weighted ASCII values modulo 256.
244 %
245 % This is NOT a cryptographic hash -- it is designed only to produce
246 % visually distinct patterns for different chapter titles.
247 %
248 % For each character str(i) and each output slot j:
249 %   hash(position_factor) += char_code(i) * i   (mod 256)
250 %
251 % where position_factor = mod(i*j, 32) + 1 distributes contributions
252 % across all 32 output slots.
253
254 function hash_values = simpleHash(str)
255
256 hash_values = zeros(1, 32);
257
258 for i = 1 : length(str)
259     char_code = double(str(i));
260     for j = 1 : min(32, length(str))
261         slot             = mod(i*j, 32) + 1;
262         hash_values(slot) = mod(hash_values(slot) + char_code * i, 256);
263     end
264 end
265
266 end   % simpleHash
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Appendice J

Esempi di MathCad

Le pagine seguenti contengono compiti di lavoro a domicilio elaborati dal mio corso Introduzione all'analisi strutturale (3525), molti di questi problemi sono presentati anche come esempi lavorati nel libro; Tuttavia, non è stato possibile creare collegamenti ipertestuali tra le soluzioni di textbook e le relative soluzioni che seguono.

Queste soluzioni, sebbene non necessariamente perfette o ottimali, sono state preparate dal signor Christopher Segura.

Tutti i problemi sono stati risolti utilizzando Mathcad, che mi aspettavo gli studenti da utilizzare per tutti gli incarichi, in quanto è semplice imparare e facile iniziare con.

Mathcad è usato qui come aiuto computazionale piuttosto che come sostituto per ragionamento analitico. Le equazioni sono inserite nella notazione matematica naturale e valutate come scritte; le unità vengono gestite esplicitamente e coerentemente; e le modifiche si propagano automaticamente in tutto il foglio di lavoro, consentendo ipotesi, calcoli e risultati coesistono in un unico documento. Allo stesso tempo, la sua limitata astrazione simbolica e il controllo algoritmico significa che dovrebbe integrare - non sostituire - le derivazioni della mano e la comprensione concettuale. Ironicamente, le sottomissioni di Mathcad hanno reso più facile identificare la cattiva condotta accademica, come soluzioni copiate tendevano a riprodurre strutture identiche, notazioni ed errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Structural Analysis Example Problems

Victor E. Saouma

Prepared by Christopher Segura
Summer 2011

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

List of Examples

2.1 Stress Vectors
2.2 Stress Vectors 2
2.3 Principal Stresses
2.4 Stress Tensor Operations
2.5 Stress Transformation
2.6 Stress Transformation 2
2.7 Strain Invariants & Principal Strains
2.8 Equilibrium Equation
2.9 Stress-Strain
2.10 Stress-Strain 2
3.1 Displacement by Double Integration
4.1 Live Load Reduction
4.2 Wind Load
4.3 Earthquake Load on a Frame
4.4 Earthquake Load on a Tall Building
4.5 Hysdrostatic Load
4.6 Thermal Expansion/Stress
5.1 Statically Indeterminate Cable Structure
5.2 Simply Supported Beam
5.3 Parabolic Load
5.4 Three Span Beam
5.5 Three Hinged Gable Frame
5.6 Inclined Supports
7.1 Truss, Method of Joints
7.2 3D Truss
7.3 Truss I, Matrix Method
7.4 Truss II, Matrix Method
7.5 Truss, Method of Sections
8.1 Funicular Cable Structure
8.2 Design of Suspension Bridge
10.1 Simple Shear and Moment Diagram
10.2 Frame Shear and Moment Diagram
10.3 Frame Shear and Moment Diagram: Hydrostatic Load
10.4 Shear and Moment Diagrams for Frame
10.5 Shear and Moment Diagrams for Inclined Frame
10.6 3D Frame
11.1 Three Hinged Arch, Point Loads
11.2 Semi-Circular Arch
11.3 Statically Indeterminate Arch
11.4 Semi-circular Box Girder
11.5 Internal Forces in an Helicoidal Cantilevered Girder, Point Load
11.6 Internal Forces in an Helicoidal Cantilevered Girder, Uniform Load
12.1 Moment Area, Cantilevered Beam
12.2 Moment Area, Simply Supported Beam
12.3 Maximum Deflection
12.4 Frame Deflection
12.5 Frame Subjected to Temperature Loading
12.6 Conjugate Beam
12.7 Conjugate Beam 2
13.1 Deflection of a Cantilever Beam

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.2 Beam Deflection
13.3 Deflection of a Frame
13.4 Rotation of a Frame

13.5 Truss Deflection
13.6 Torsional and Flexural Deformation
13.7 Flexural and Shear Deformation in a Beam
13.8 Thermal Effects in a Beam
13.9 Deflection of a Truss
13.10 Thermal Deflection of a Truss: I
13.11 Thermal Deflection of a Truss: II
13.12 Truss with Initial Camber
13.13 Prestressed Concrete Beam with Continuously Variable I
14.1 Steel Building Frame Analysis
14.2 Analysis of Irregular Building Frame
14.3 Redundant Truss Analysis
14.4 Truss with Two Redundants
14.5 Analysis of Nonprismatic Members
14.6 Fixed End Moments for Nonprismatic Beams
14.7 Rectangular Frame, External Load
14.8 Frame with Temperature and Support Displacements
14.9 Braced Bent with Loads and Temperature Change
15.1 Approximate Analysis of a Frame Subjected to Vertical and Horizontal Loads
16.1 Propped Cantilever Beam
16.2 Two-Span Beam, Slope Deflection
16.3 Two-Span Beam, Slope Deflection, Initial Deflection
16.4 Frames, Slope Deflection
16.5 Box Culvert, Slope Deflection
16.6 Continuous Beam
16.7 Continuous Beam, Simplified Method
16.8 Continuous Beam, Inintial Settlement
16.9 Frame
16.10 Frame with Side Load
17.1 Beam
17.2 Frame

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

2.1 Stress Vectors

For the following stress tensor at point P

$$\sigma := \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} := \sigma = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determine the traction (or stress vector) **t** passing through P and parallel to the plane ABC where A(4,0,0), B(0,2,0) and C(0,0,6)

Solution:

The vector normal to the plane can be found by taking the cross products of vectors AB and AC

$$\mathbf{N} = AB \times AC = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -4 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 12\,e_1 + 24\,e_2 + 8\,e_3$$

The unit normal of N is given by

$$\mathbf{n} = \frac{3}{7}e_1 + \frac{6}{7}e_2 + \frac{2}{7}e_3$$

$$n := \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Hence the stress vector traction will be

$$t := n \cdot \sigma = \begin{pmatrix} -\frac{9}{7} & \frac{5}{7} & \frac{10}{7} \end{pmatrix}$$

and thus

$$\mathbf{t} = -\frac{9}{7}e_1 + \frac{5}{7}e_2 + \frac{10}{7}e_3$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

2.2 Stress Vectors 2

The state of stress through a continuum is given with respect to the cartesian axes by

$$\sigma(x) := \begin{bmatrix} 3\,x_1\,x_2 & 5\,(x_2)^2 & 0 \\ 5\,(x_2)^2 & 0 & 2\,x_3 \\ 0 & 2\,x_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \text{MPa}$$

Determine the stress vector at $P(1, 1, \sqrt{3})$ of the plane that is normal to the tangent to the cylindrical surface $(x_2)^2 + (x_3)^2 = 4$ at P

Solution:

Vector Equation

$$v(x) := (x_2)^2 + (x_3)^2 - 4$$

Gradient

$$\text{Vect1}(x) := \nabla_x v(x) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot x_2 \\ 2 \cdot x_3 \end{pmatrix}$$

For $x_2 := 1$

$x_1 = 0$

$x_2 = 1$

$$x_3 := \sqrt{4 - (x_2)^2} = 1.732$$

Normalized Vector

$$n := \frac{x}{|x|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.866 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(x) \cdot n = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 1.732 \end{pmatrix} \cdot \text{MPa}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

2.3 Principal Stresses

The stress tensor is given at a point by point P

$$\sigma := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Determine the principal stress values and the corresponding directions

Solution:

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 0-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Simplifying the determinant

$$\left|\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 0-\lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \text{ simplify } \rightarrow -(\lambda-1)\cdot(\lambda+2)\cdot(\lambda-4) = 0$$

thus the roots are

$$\lambda := -(\lambda-1)\cdot(\lambda+2)\cdot(\lambda-4) = 0 \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Note that those are the three eigenvalues of the stress vector. If we let the x_1 axis be the one corresponding to the direction of λ_2 and n_i^2 be the direction cosines of this axis, then we have

$$(3-\lambda_2)n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 0 \rightarrow 5\cdot n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 0$$

$$n_1^2 + (0-\lambda_2)\cdot n_2^2 + 2n_3^2 = 0 \rightarrow n_1^2 + 2\cdot n_2^2 + 2\cdot n_3^2 = 0 \qquad n_1^2 = 0 \qquad n_2^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad n_3^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$n_1^2 + 2\cdot n_2^2 + (0-\lambda_2)n_3^2 = 0 \rightarrow n_1^2 + 2\cdot n_2^2 + 2\cdot n_3^2 = 0$$

Similarly, if we let x_2 be the one corresponding to the direction of λ_1 and n_i^1 be the direction cosines of this axis,

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\left(3-\lambda_1\right)n_1^{\,2}+n_2^{\,2}+n_3^{\,2}=0\rightarrow 2\cdot n_1^{\,2}+n_2^{\,2}+n_3^{\,2}=0$$

$$n_1^{\,2}+\left(0-\lambda_1\right)\cdot n_2^{\,2}+2n_3^{\,2}=0\rightarrow n_1^{\,2}-n_2^{\,2}+2\cdot n_3^{\,2}=0 \qquad n_1^{\,1}=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad n_2^{\,1}=-\frac{1}{\sqrt{3}} \quad n_3^{\,1}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$n_1^{\,2}+2\cdot n_2^{\,2}+\left(0-\lambda_1\right)n_3^{\,2}=0\rightarrow n_1^{\,2}+2\cdot n_2^{\,2}-n_3^{\,2}=0$$

Finally, if we let x_3 be the one corresponding to the direction of λ_3 and n_i^3 be the direction cosines of this axis,

$$\left(3-\lambda_3\right)n_1^{\,2}+n_2^{\,2}+n_3^{\,2}=0\rightarrow -n_1^{\,2}+n_2^{\,2}+n_3^{\,2}=0$$

$$n_1^{\,2}+\left(0-\lambda_3\right)\cdot n_2^{\,2}+2n_3^{\,2}=0\rightarrow n_1^{\,2}-4\cdot n_2^{\,2}+2\cdot n_3^{\,2}=0 \qquad n_1^{\,3}=-\frac{2}{\sqrt{6}} \quad n_2^{\,3}=-\frac{1}{\sqrt{6}} \quad n_3^{\,3}=-\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$n_1^{\,2}+2\cdot n_2^{\,2}+\left(0-\lambda_3\right)n_3^{\,2}=0\rightarrow n_1^{\,2}+2\cdot n_2^{\,2}-4\cdot n_3^{\,2}=0$$

$$n_{pd}:=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale ©© 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

2.4 Stress Tensor Operations

For the following stress tensor

$$\sigma := \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

a) Determine directly the three Invariants I_σ, II_σ and III_σ
b) Determine the principal stresses and principal stress directions
c) Show that the transformation tensor of direction cosines transforms the original stress tensor into the diaganol axes stress tensor
d) Recompute the three invariants from the principal stresses
e) Split the stress tensor into its spherical and deviator parts
f) Show that the first invariant of the deviator is zero

Solution:

a) $I_\sigma := \sigma_{1,1} + \sigma_{2,2} + \sigma_{3,3} = 20$

$II_\sigma := \sigma_{1,1}\cdot\sigma_{2,2} + \sigma_{2,2}\cdot\sigma_{3,3} + \sigma_{3,3}\cdot\sigma_{1,1} - \sigma_{1,2}\cdot\sigma_{2,1} = 123$

$III_\sigma := |\sigma| = 216$

b) $\sigma_p := \text{eigenvals}(\sigma) = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

$n_p := \text{eigenvecs}(\sigma) = \begin{pmatrix} -0.707 & 0 & -0.707 \\ -0.707 & 0 & 0.707 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $n_p^{\,T}\cdot\sigma\cdot n_p = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

d) $I_{\sigma pd} := \sigma_{p_1} + \sigma_{p_2} + \sigma_{p_3} = 20$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$II_{\sigma pd} := \sigma_{p_1}\cdot\sigma_{p_2} + \sigma_{p_2}\cdot\sigma_{p_3} + \sigma_{p_3}\cdot\sigma_{p_1} = 123$$

$$III_{\sigma pd} := \sigma_{p_1}\cdot\sigma_{p_2}\cdot\sigma_{p_3} = 216$$

e) $\sigma_{mean} := \frac{I_{\sigma pd}}{3} = 6.667$

$$\sigma_{sperical} := \begin{pmatrix} \sigma_{mean} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{mean} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{mean} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.667 & 0 & 0 \\ 0 & 6.667 & 0 \\ 0 & 0 & 6.667 \end{pmatrix}$$

f) $$\sigma_{deviator} := \sigma - \sigma_{sperical} = \begin{pmatrix} -0.667 & -3 & 0 \\ -3 & -0.667 & 0 \\ 0 & 0 & 1.333 \end{pmatrix}$$

2.5 Stress Transformation

Show that the transformation tensor of direction cosines for the stress tensor

$$\sigma := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

transforms the original stress tensor into the diaganol principal axes stress tensor

Solution:

$$n_{pd} := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\sigma} := n_{pd}\cdot\sigma\cdot n_{pd}^{T} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

2.6 Stress Transformation 2

The octahedral plane is the plane which makes equal angles with the principal stress directions. Show that the shear stress on this plane, the so-called octahedral shear stress, is given by

$$\sigma_{oct}(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) := \frac{1}{3}\cdot\sqrt{(\sigma_I-\sigma_{II})^2+(\sigma_{II}-\sigma_{III})^2+(\sigma_{III}-\sigma_I)^2}$$

Solution:

$$v := \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$n := \left(\frac{v}{|v|}\right)^T = (0.577 \quad 0.577 \quad 0.577)$$

$$\sigma(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) := \begin{pmatrix}\sigma_I & 0 & 0\\ 0 & \sigma_{II} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{III}\end{pmatrix}$$

$$t(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) := n\cdot\sigma(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) \rightarrow (0.577\cdot\sigma_I \quad 0.577\cdot\sigma_{II} \quad 0.577\cdot\sigma_{III})$$

$$tn(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) := n\cdot t(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III})^T \rightarrow 0.333\cdot\sigma_I + 0.333\cdot\sigma_{II} + 0.333\cdot\sigma_{III}$$

$$t_{shear}(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) := \sqrt{t(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III})\cdot t(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III})^T - tn(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III})\cdot tn(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III})}$$

$$t_{shear}(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) \text{ simplify } \rightarrow \sqrt{0.222\cdot\sigma_I^2 - 0.222\cdot\sigma_I\cdot\sigma_{II} - 0.222\cdot\sigma_I\cdot\sigma_{III} + 0.222\cdot\sigma_{II}^2 - 0.222\cdot\sigma_{II}\cdot\sigma_{III} + 0.222\cdot\sigma_{III}^2}$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$t_{shear}(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) - \sigma_{oct}(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) = 0$$

2.7 Strain Invariants & Principal Strains

Determine the planes of principal strains for the following strain tensor

$$E := \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution:

The strain invariants are given by

$$I_E = E_{ii} = 2$$

$$II_E = \frac{1}{2}\cdot\left(E_{ij}\cdot E_{ij} - E_{ii}\cdot E_{jj}\right) = -1 + 3 = 2$$

$$III_E = \left|E_{ij}\right| = -3$$

The principal strains by

$$E_{ij} - \lambda\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\cdot\left(\lambda - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\cdot\left(\lambda - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$$

$$E_1 = \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} = 2.3$$

$$E_2 = \lambda_2 = 1$$

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$E_3 = \lambda_3 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} = -1.3$$

The eigenvectors for $E_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ give the principal directions n^1

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{1+\sqrt{13}}{2} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0-\frac{1+\sqrt{13}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_{1,1} \\ n_{2,1} \\ n_{3,1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -n_{1,1}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{3}\cdot n_{2,1} \\ -n_{2,1}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{3}\cdot n_{1,1} \\ -n_{3,1}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -n_{1,1}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{3}\cdot n_{2,1} \\ -n_{2,1}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{3}\cdot n_{1,1} \\ -n_{3,1}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n_{1,1} = \frac{1+\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}\cdot n_{2,1}$$

$$n_{3,1} = 0$$

$$n^1 \cdot n^1 = 1$$

$$\left(\frac{1+2\sqrt{13}+13}{12}+1\right)\cdot\left(n_{2,1}\right)^2 = 1$$

$$n_{2,1} = 0.6$$

$$n_{1,1} = \frac{1+\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}\cdot n_{2,1} = \frac{1+\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}\cdot 0.6 = 0.8$$

$$n^1 = (0.8 \quad 0.6 \quad 0)$$

For the second eigenvector λ_2=1

$$\begin{pmatrix} 1-1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_{1,2} \\ n_{2,2} \\ n_{3,2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{3}\cdot n_{2,2} \\ -\left(n_{2,2}\right)+\sqrt{3}\cdot n_{1,2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}\cdot n_{2,2} \\ -(n_{2,2}) + \sqrt{3}\cdot n_{1,2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n^2 = (0 \quad 0 \quad 1)$$

Finally, the third eigenvector can be obtained by the same manner, but more easily from

$$n^3 = n^1 \times n^2 = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.6e_1 - 0.8e_2$$

Therefore

$$a_i^j = \begin{pmatrix} n^1 \\ n^2 \\ n^3 \end{pmatrix} \qquad a := \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.6 & -0.8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a\cdot E\cdot a^T = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.6 & -0.8 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.6 \\ 0.6 & 0 & -0.8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1.3 \end{pmatrix}$$

2.8 Equilibrium Equations

In the absence of body forces, does the following stress distribution

$$T(x,\nu) = \begin{bmatrix} (x_2)^2 + \nu\left[(x_1)^2 - (x_2)^2\right] & -2\cdot\nu\cdot x_1\cdot x_2 & 0 \\ -2\nu\cdot x_1\cdot x_2 & (x_1)^2 + \nu\left[(x_2)^2 - (x_1)^2\right] & 0 \\ 0 & 0 & \nu\left[(x_1)^2 + (x_2)^2\right] \end{bmatrix}$$

where v is a constant, satisfy equilibrium?

Solution:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}T_{1j} = \frac{\partial}{\partial x_1}T_{11} + \frac{\partial}{\partial x_2}T_{12} + \frac{\partial}{\partial x_3}T_{13} = 2\cdot\nu\cdot x_1 - 2\cdot\nu\cdot x_1 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}T_{2j} = \frac{\partial}{\partial x_1}T_{21} + \frac{\partial}{\partial x_2}T_{22} + \frac{\partial}{\partial x_3}T_{23} = -2\cdot\nu\cdot x_2 + 2\cdot\nu\cdot x_2 = 0$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\frac{\partial}{\partial x_j} T_{3j} = \frac{\partial}{\partial x_1} T_{31} + \frac{\partial}{\partial x_2} T_{32} + \frac{\partial}{\partial x_3} T_{33} = 0$$

Therefore, equilibrium is satisfied.

2.9 Stress-Strain

Determine the stress tensor at a point where the Lagrangian strain tensor is given by

$$E := \begin{pmatrix} 30 & 50 & 20 \\ 50 & 40 & 0 \\ 20 & 0 & 30 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6}$$

and the material is steel with $\lambda := 119.2\text{GPa}$ and $\mu := 79.2\text{GPa}$

Solution:

$$C := \begin{pmatrix} \lambda + 2\cdot\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\cdot\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\cdot\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\cdot\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\cdot\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\cdot\mu \end{pmatrix} \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} 277.6\cdot\text{GPa} & 119.2\cdot\text{GPa} & 119.2\cdot\text{GPa} & 0 & 0 & 0 \\ 119.2\cdot\text{GPa} & 277.6\cdot\text{GPa} & 119.2\cdot\text{GPa} & 0 & 0 & 0 \\ 119.2\cdot\text{GPa} & 119.2\cdot\text{GPa} & 277.6\cdot\text{GPa} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 158.4\cdot\text{GPa} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 158.4\cdot\text{GPa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 158.4\cdot\text{GPa} \end{pmatrix}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\gamma := \begin{pmatrix} E_{1,1} \\ E_{2,2} \\ E_{3,3} \\ E_{1,2} \\ E_{1,3} \\ E_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 10^{-5} \\ 4 \times 10^{-5} \\ 3 \times 10^{-5} \\ 5 \times 10^{-5} \\ 2 \times 10^{-5} \\ 0 \times 10^{0} \end{pmatrix}$$

$$\sigma := C \cdot \gamma = \begin{pmatrix} 0.01667 \\ 0.01826 \\ 0.01667 \\ 0.00792 \\ 0.00317 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{GPa}$$

2.10 Stress-Strain

Determine the stress tensor at a point where the Cauchy stress tensor is given by

$$\sigma := \begin{pmatrix} 100 & 42 & 6 \\ 42 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 15 \end{pmatrix} \cdot \text{MPa}$$

with $E := 207\text{GPa}$, $\mu := 79.2\text{GPa}$, and $\nu := 0.3$

Solution:

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$S := \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{207 \cdot GPa} & -\frac{0.001}{GPa} & -\frac{0.001}{GPa} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{0.001}{GPa} & \frac{1}{207 \cdot GPa} & -\frac{0.001}{GPa} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{0.001}{GPa} & -\frac{0.001}{GPa} & \frac{1}{207 \cdot GPa} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{0.013}{GPa} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{0.013}{GPa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{0.013}{GPa} \end{pmatrix}$$

$$s := \begin{pmatrix} \sigma_{1,1} \\ \sigma_{2,2} \\ \sigma_{3,3} \\ \sigma_{1,2} \\ \sigma_{1,3} \\ \sigma_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ -2 \\ 15 \\ 42 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot MPa$$

$$\gamma := S \cdot s = \begin{pmatrix} 4.643 \times 10^{-4} \\ -1.763 \times 10^{-4} \\ -6.957 \times 10^{-5} \\ 5.303 \times 10^{-4} \\ 7.576 \times 10^{-5} \\ 0 \times 10^{0} \end{pmatrix}$$

$$E := \begin{pmatrix} \gamma_1 & \frac{\gamma_4}{2} & \frac{\gamma_5}{2} \\ \frac{\gamma_4}{2} & \gamma_2 & \frac{\gamma_6}{2} \\ \frac{\gamma_5}{2} & \frac{\gamma_6}{2} & \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.643 \times 10^{-4} & 2.652 \times 10^{-4} & 3.788 \times 10^{-5} \\ 2.652 \times 10^{-4} & -1.763 \times 10^{-4} & 0 \times 10^{0} \\ 3.788 \times 10^{-5} & 0 \times 10^{0} & -6.957 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

3.1 Displacement by Double Integration

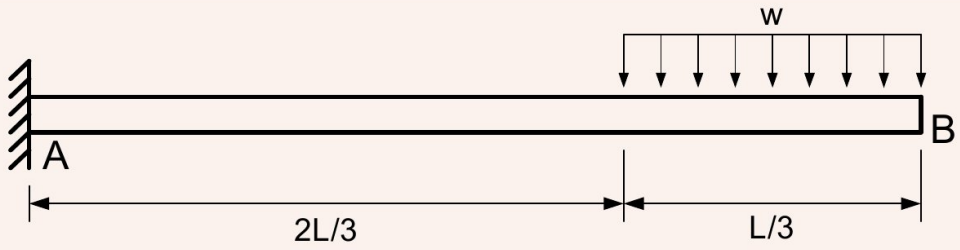
Determine the deflection at B for the following cantilevered beam.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

At $0 \le x \le \frac{2L}{3}$

1. Moment Equation

$$E\cdot I\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}y = M_x = \frac{w\cdot L}{3}\cdot x - \frac{5}{18}\cdot w\cdot L^2$$

2. Integrate Once

$$E\cdot I\cdot\frac{\partial}{\partial x}y = \frac{w\cdot L}{6}\cdot x^2 - \frac{5}{18}\cdot w\cdot L^2\cdot x + C_1$$

However we have at x=0, dy/dx=0, C_1=0

3. Integrate Twice

$$E\cdot I\cdot y = \frac{w\cdot L}{18}\cdot x^3 - \frac{5\cdot w\cdot L^2}{36}\cdot x^2 + C_2$$

Again we have at x=0, y=0, C_2=0

At $\frac{2L}{3} \le x \le L$

1. Moment Equation

$$E\cdot I\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}y = M_x = \frac{w\cdot L}{3}\cdot x - \frac{5}{18}\cdot w\cdot L^2 - w\cdot\left(x - \frac{2L}{3}\right)\cdot\left(\frac{x - \frac{2L}{3}}{2}\right)$$

2. Integrate Once

$$E\cdot I\cdot\frac{\partial}{\partial x}y = \frac{w\cdot L}{6}\cdot x^2 - \frac{5}{18}\cdot w\cdot L^2\cdot x - \frac{w}{6}\cdot\left(x - \frac{2L}{3}\right)^3 + C_3$$

Applying the boundary condition at $x = \frac{2L}{3}$, we must have $\frac{dy}{dx}$ equal to the value coming frmo the left C_3=0

3. Integrate Twice

$$E\cdot I\cdot y = \frac{w\cdot L}{18}\cdot x^3 - \frac{5\cdot w\cdot L^2}{36}\cdot x^2 - \frac{w}{24}\cdot\left(x - \frac{2L}{3}\right)^4 + C_4$$

Again following the same argument as above, C_4=0

Substituting for x=L we obtain

$$y = \frac{163}{1944}\cdot\frac{wL^4}{E\cdot I}$$

4.1 Live Load Reduction

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

A four storey office building has interior columns spaced 30ft apart in the two directions. If the flat roof loading is 50 lb/ft^2, determine the reduced live load supported by a typical interior column located on the ground level

Solution:

$L_0 := 50psf$

$A_T := 30ft \cdot 30ft = 900 \cdot ft^2$

$K_{LL} := 4$

$L_{floor}(L_0, A_T, K_{LL}) := L_0 \cdot \left(0.25 + \frac{15}{\sqrt{K_{LL} \cdot A_T}}\right) \cdot psf$

$L_{floor} := L_{floor}\left(\frac{L_0}{psf}, \frac{A_T}{ft^2}, K_{LL}\right) = 25 \cdot psf$

$Reduction := \frac{L_{floor}}{L_0} = 50 \cdot \%$

$L_{roof} := 0.6 \cdot L_0 = 30 \cdot psf$

$F_1 := \left(3 \cdot L_{floor} \cdot A_T + L_{roof} \cdot A_T\right) = 94.5 \cdot kip$

Note that without reduction the total load woul dhave been

$F_2 := 4 \cdot L_0 \cdot A_T = 180 \cdot kip$

COPIA DI REVISIONE

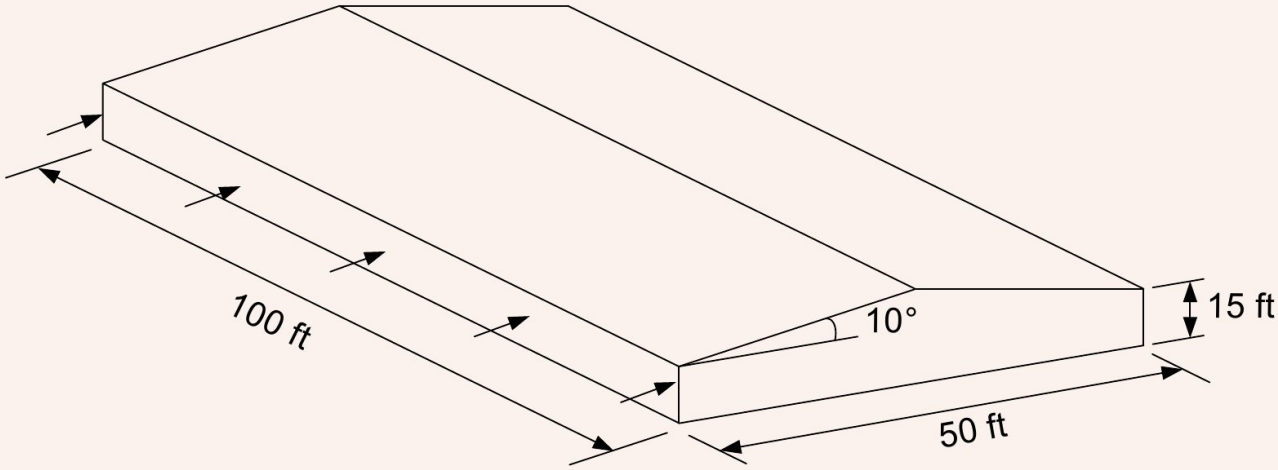
I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

4.2 Wind Load

Wind blows on the side of the fully enclosed agricultural building located on open flat terrain in Oklahoma. Determine the external pressure acting on the roof. Also, what is the internal pressure in the building which acts on the roof? Use linear interpolation to determine q_h and C_p.



Solution:

$$q_z\left(K_z, K_{Zt}, K_d, V, I\right) := 0.00256 \cdot K_z \cdot K_{Zt} \cdot K_d \cdot V^2 \cdot I \cdot psf$$

$K_{Zt} := 1$

$K_d := 1$

$V := 90mph$

$I := 0.87$

$$q_z\left(K_z, K_{Zt}, K_d, \frac{V}{mph}, I\right) \rightarrow 18.04 \cdot K_z \cdot psf$$

$K_{z15} := 0.85$

$$q_{z15} := q_z\left(K_{z15}, K_{Zt}, K_d, \frac{V}{mph}, I\right) = 15.334 \cdot psf$$

$K_{z20} := 0.9$

$$q_{z20} := q_z\left(K_{z20}, K_{Zt}, K_d, \frac{V}{mph}, I\right) = 16.236 \cdot psf$$

$$h := 15ft + \frac{1}{2} \cdot 25ft \cdot \tan(10deg) = 17.204 \cdot ft$$

$$\frac{q_h - q_{z15}}{h - 15ft} = \frac{q_{z20} - q_{z15}}{20ft - 15ft}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$q_h := \left(\frac{q_{z20} - q_{z15}}{20ft - 15ft}\right)\cdot(h - 15ft) + q_{z15}$$

$$q_h = 15.732\cdot psf$$

External pressure on windward side of roof

$$p(q_h, G, C_p) := q_h\cdot G\cdot C_p\cdot psf$$

$$G := 0.85$$

$$L := 50ft$$

$$\frac{h}{L} = 0.344$$

$$\frac{-0.9 - -0.7}{0.5 - 0.25} = \frac{-0.9 - C_p}{0.5 - \frac{h}{L}}$$

$$C_p := -0.9 - \frac{-0.9 - -0.7}{0.5 - 0.25}\cdot\left(0.5 - \frac{h}{L}\right)$$

$$C_p = -0.775$$

$$p_{Windward} := p\left(\frac{q_h}{psf}, G, C_p\right) = -10.367\cdot psf$$

External pressure on leeward side of roof

$$\frac{-0.5 - -0.3}{0.5 - 0.25} = \frac{-0.5 - C_p}{0.5 - \frac{h}{L}}$$

$$C_p := -0.5 - \frac{-0.5 - -0.3}{0.5 - 0.25}\cdot\left(0.5 - \frac{h}{L}\right)$$

$$C_p = -0.375$$

$$p_{Leeward} := p\left(\frac{q_h}{psf}, G, C_p\right) = -5.018\cdot psf$$

Internal pressure

$$p_{int}(q_h, G, C_{pi}) := -q_h\cdot G\cdot C_{pi}$$

$$C_{pi1} := 0.18$$

$$C_{pi2} := -0.18$$

$$p_{int1} := p_{int}(q_h, G, C_{pi1}) = -2.407\cdot psf$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

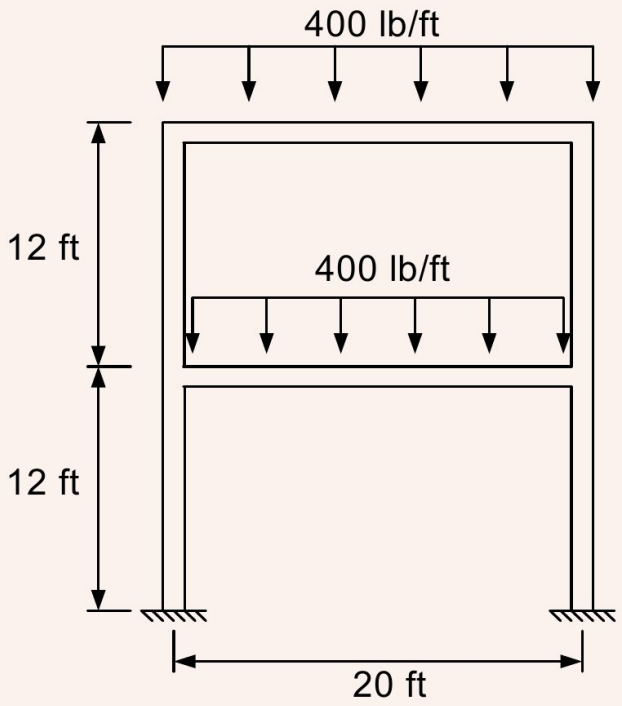
COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$p_{int2} := p_{int}(q_h, G, C_{pi2}) = 2.407 \cdot psf$

4.3 Earthquake Load on a Frame

Determine the approximate earthquake forces for the ductile hospital frame structure shown below. The dead load for each floor is $DL := 200 \frac{lbf}{ft}$ and the live load is $LL := 400 \frac{lbf}{ft}$. The structure is built on soft clay. Use DL+0.5LL as the weight of each floor. The building is in seismic zone 3.



Solution:

1. The fundamental period of vibration is

$T(C_t, h_n) := C_t \cdot h_n^{\frac{3}{4}} \cdot sec$

$C_t := 0.03$

$h := 24ft$

$T := T\left(C_t, \frac{h}{ft}\right) = 0.325\ s$

2. The C coefficient is

$$C(S,T) := \frac{1.25 \cdot S}{T^{\frac{2}{3}}}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$S := 2.0$

$C := C\left(S, \frac{T}{sec}\right) = 5.286 > 2.75$

Use $C := 2.75$

3. The other coefficients are $Z := 0.3,\ I := 1.25,\ R_W := 12$

4. Check

$$\frac{C}{R_W} = \frac{2.75}{12} = 0.23 > 0.075 \quad \text{OK!}$$

5. The total vertical load is

$L := 20ft$ frame width

$W := 2\cdot(DL + 0.5\cdot LL)\cdot L = 16000\cdot lbf$

6. The total seismic base shear is

$$V := \frac{Z\cdot I\cdot C}{R_W}\cdot W = 1375\cdot lbf$$

7. Since T < 0.7sec, there is no whiplash
8. The toal load on each floor is given by

$h_1 := 12ft$

$h_2 := 24ft$

$$F_2 := \frac{V\cdot h_2}{h_1 + h_2} = 916.7\cdot lbf$$

$$F_1 := \frac{V\cdot h_1}{h_1 + h_2} = 458.3\cdot lbf$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

4.4 Earthquake Load on a Tall Building

Determine the approximate critical lateral loading for a 25 storey, ductile, rigid space frame concrete structure in the short direction. The rigid frames are spaced 25 ft apart in the cross section and 20 ft in the longitudinal direction. The plan dimension of the building is 175x100 ft, and the structure is 25(12ft)=300 ft high. This office building is located in an urban environment with a wind velocity of $V := 70\text{mph}$ and in seismic zone 4. For this investigation, an average building total dead load of $DL := 192\text{psf}$ is used. Soil conditions are unknown.

Solution:

1. The total building weight is

$L := 100\text{ft}$

$B := 175\text{ft}$

$W := DL \cdot L \cdot B \cdot 25 = 84000 \cdot \text{kip}$

2. The fundamental period of vibration for a rigid frame is

$$T(C_t, h_n) := C_t \cdot h_n^{\frac{3}{4}} \cdot \text{sec}$$

$C_t := 0.03$

$h := 25 \cdot 12\text{ft} = 300 \cdot \text{ft}$

$T := T\left(C_t, \frac{h}{\text{ft}}\right) = 2.16\,\text{s}$ > 0.7s OK!

3. The C coefficient is

$$C(S, T) := \frac{1.25 \cdot S}{T^{\frac{2}{3}}}$$

$S := 1.5$

$C := C\left(S, \frac{T}{\text{sec}}\right) = 1.12$ < 2.75

4. The other coefficients are $Z := 0.4$, $I := 1$, $R_W := 12$

5. Check

$$\frac{C}{R_W} = \frac{1.12}{12} = 0.093 > 0.075 \text{ OK!}$$

6. The total seismic base shear along the critical short direction is

$$V := \frac{Z \cdot I \cdot C}{R_W} \cdot W = 3139 \cdot \text{kip}$$

7. Since T > 0.7sec, the whiplash effect must be considered

$$F_t := 0.07 \cdot \frac{T}{\text{sec}} \cdot V = 475 \cdot \text{kip}$$

Hence the total triangular load is

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$F_{tot} := V - F_t = 2664 \cdot kip$

8. Let us check if wind load governs. From table xx we conservatively assume a uniform wind pressure of 29 psf resulting in a total lateral force of

$p := 29psf$

$P_w := p \cdot h \cdot B = 1522.5 \cdot kip$ < 3108 kip

The magnitude of the total seismic load is clearly larger than the totoal wind force

4.5 Hydrostatic Load

The basement of a building is 12 ft below grade. Ground water is located 9 ft below grade. What thickness concrete slab is required to exactly balance the hydrostatic uplift?

Solution:

The hydrostatic pressure must be countered by the pressure caused by the weight of the concrete. Since p=γh we equate the two pressures and solve for h, the height of the concrete slab.

$h := 12ft$

$h_{water} := 9ft$

$d := h - h_{water} = 3 \cdot ft$

$\gamma_{water} := 62.4 \frac{lbf}{ft^2}$

$\gamma_{concrete} := 150 \frac{lbf}{ft^2}$

$\gamma_{water} \cdot d = \gamma_{concrete} \cdot h$

$h := \frac{\gamma_{water} \cdot d}{\gamma_{concrete}} = 15 \cdot in$

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

4.6 Thermal Expansion/Stress

A low-rise building is enclosed along one side by a 100 ft-long clay masonry ($\alpha := 3.6\cdot10^{-6}\frac{in}{in\cdot\Delta°F}$, $E := 2400000psi$)bearing wall.

The structure was built at a temperature of $T := 60\Delta°F$ and is located in the northern part of the United States where the temperature range is between $T_{low} := -20\cdot\Delta°F$ and $T_{high} := 120\cdot\Delta°F$.

Solution:

1. Assume that the wall can move freely with no restraint from cross-walls and foundations. The wall expansion and contraction (summer and winter) are given by

$$\Delta L = \alpha\cdot\Delta T\cdot L$$

$$\Delta L_{Summer} := \alpha\cdot\left(T_{high} - T\right)\cdot 100ft = 0.26\cdot in$$

$$\Delta L_{Winter} := \alpha\cdot\left(T_{low} - T\right)\cdot 100ft = -0.35\cdot in$$

2. We now assume (conservatively) that the free movement cannot occur (ΔL=0) hence the resulting stress would be equal to

$$\sigma = E\cdot\varepsilon = E\cdot\frac{\Delta L}{L} = E\cdot\frac{\alpha\cdot\Delta T\cdot L}{L} = E\cdot\alpha\cdot\Delta T$$

$$\sigma = E\cdot\alpha\cdot\Delta T$$

$$\sigma_{Summer} := E\cdot\alpha\cdot\left(T_{high} - T\right) = 518\cdot psi$$

$$\sigma_{Winter} := E\cdot\alpha\cdot\left(T_{low} - T\right) = -691\cdot psi$$

Note the tensile stress being beyond the masonry capacity. Cracking will occur.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

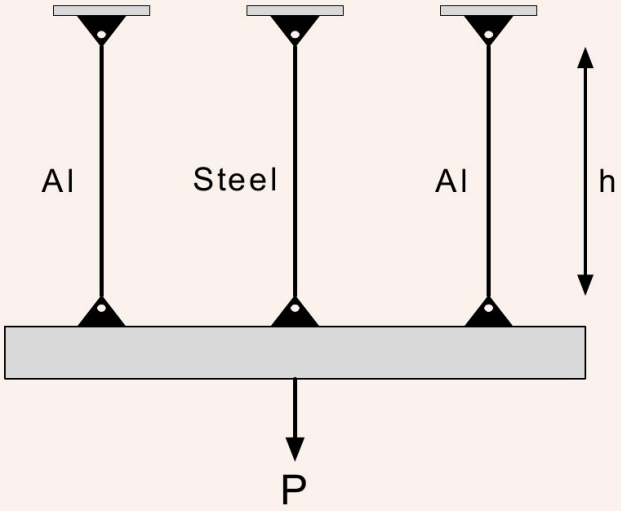
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

5.1 Statically Indeterminate Cable Structures

A rigid plate is supported by two aluminum cables and a steel one. Determine the force in each cable.



If the rigid plate supports a load P, determine the stress in each of the three cables.

Solution:

1. We have three unknowns and only two independent equations of equilibrium. Hence the problem is statically indeterminate to the first degree.

$$\sum M_z = 0 \quad P_{Al}^{left} = P_{Al}^{right}$$

$$\sum F_y = 0 \quad 2P_{Al} + P_{St} = P$$

Thus we effectively have two unknowns and one equation

2. We need to have a third equation to solve for the three unknowns. This will be derived from the compatability of the displacements in all three cables i.e. all three displacements must be equal:

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

displacements in all three cables for all three displacements must be equal.

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Combine to obtain

$$\Delta L = \frac{PL}{AE}$$

$$\frac{P_{Al}\cdot L}{E_{Al}\cdot A_{Al}} = \frac{P_{St}\cdot L}{E_{St}\cdot A_{St}} \quad \frac{P_{Al}}{P_{St}} = \frac{(EA)_{Al}}{(EA)_{St}}$$

or $-(EA)_{St}\cdot P_{Al} + (EA)_{Al}\cdot P_{St} = 0$

3. Solution of this system of two equations with two unknowns yield:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -(EA)_{St} & (EA)_{Al} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{Al} \\ P_{St} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P_{Al} \\ P_{St} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -(EA)_{St} & (EA)_{Al} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\cdot(EA)_{Al} + (EA)_{St}} \cdot \begin{bmatrix} (EA)_{Al} & -1 \\ (EA)_{St} & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}$$

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

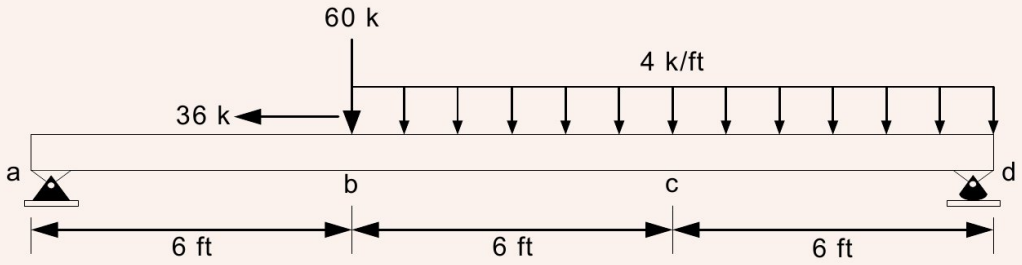
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

5.2 Simply Supported Beam

Determine the reactions of the simply supported beam shown below.



The beam has 3 reactions. We have 3 equations of static equilibrium. Hence it is statically determinate.

Solution:

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\sum F_x = 0 \quad R_{ax} - 36\text{kip} = 0$

$\sum F_y = 0 \quad R_{ay} + R_{dy} - 60\text{kip} - 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft} = 0$

$\sum M_z^{\,c} = 0 \quad 12\cdot R_{ay} - 6\cdot R_{dy} - 60\text{kip}\cdot 6\text{ft} = 0$

or

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} R_{ax} \\ R_{ay} \\ R_{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36\text{kip} \\ 108\text{kip} \\ 360\text{kip} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{ax} \\ R_{ay} \\ R_{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36\text{kip} \\ 56\text{kip} \\ 52\text{kip} \end{pmatrix}$$

Alternatively we could have used another set of equations:

$\sum M_z^{\,a} = 0 \quad 60\text{kip}\cdot 6\text{ft} + 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft}\cdot 12\text{ft} - R_{dy}\cdot 18\text{ft} = 0 \quad R_{dy} = 52\text{kip}$

$\sum M_z^{\,d} = 0 \quad R_{ay}\cdot 18\text{ft} - 60\text{kip}\cdot 12\text{ft} - 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft}\cdot 12\text{ft} = 0 \quad R_{ay} = 56\text{kip}$

Check:

$\sum F_y = 0 \quad 56\text{kip} + 52\text{kip} - 60\text{kip} - 48\text{kip} = -0\cdot\text{kip}$

5.3 Parabolic Load

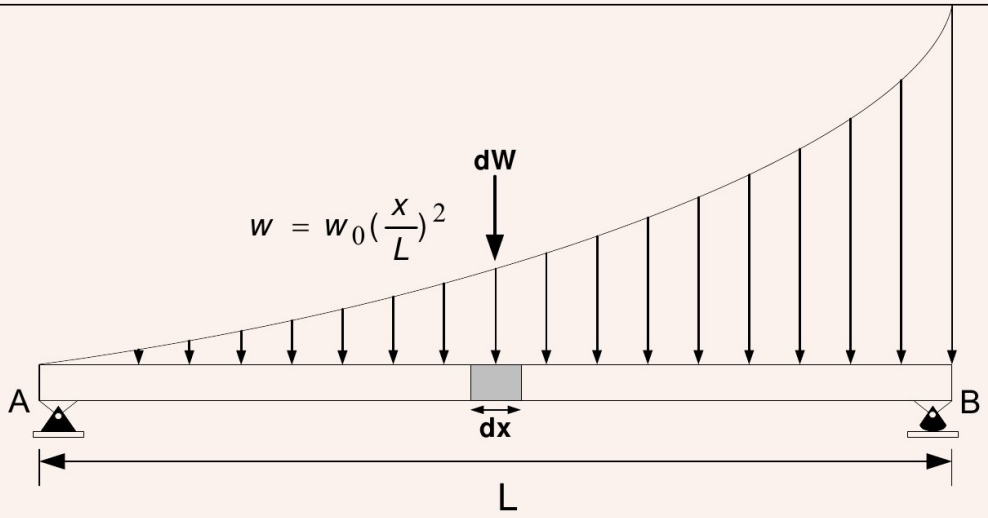
Determine the reactions of the simply supported beam of length L subjected to a parabolic load $w = w_0\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^2$

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

Since there are no axial forces, there are two unknowns and two equations of equilibrium. We have two equations of equilibrium ($\sum F_y$ and $\sum M$), we judiciously start with the second one, as it would directly give us the reaction at B. Considering an infinitesimal element of length dx, weight dW, an moment dM:

$$\sum M_z{}^A = 0 \qquad \int_{x=0}^{x=L} w_0 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx \times x - R_B \cdot L = 0$$

$$R_B = \frac{1}{L} \cdot w_0 \cdot \left(\frac{L^4}{4L^2}\right) = \frac{1}{4} \cdot w_0 \cdot L$$

With R_B determined, we solve for R_A from

$$\sum F_y = 0$$

$$R_A + \frac{1}{4} \cdot w_0 \cdot L - \int_{x=0}^{x=L} w_0 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx = 0$$

$$R_A = \frac{w_0}{L^2} \cdot \frac{L^3}{3} - \frac{1}{4} \cdot w_0 \cdot L = \frac{1}{12} \cdot w_0 \cdot L$$

5.4 Three Span Beam

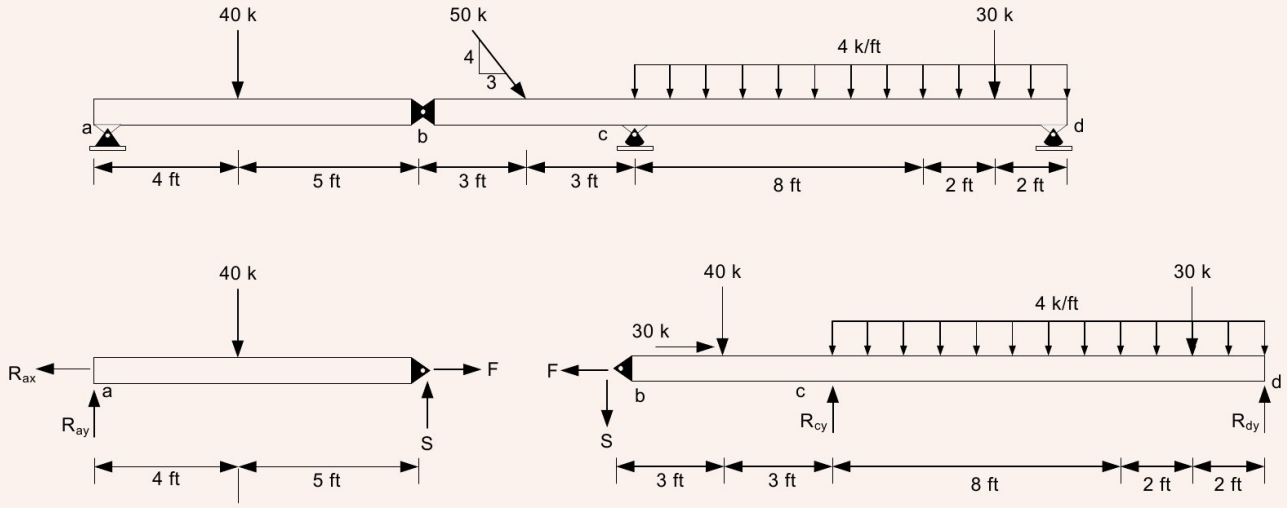
Determine the reactions of the following three span beam

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

We have 4 unknowns (R_{ax},R_{ay},R_{cy}, and R_{dy}), three equations of equilibrium and one equation of condition ($\sum M_b = 0$), thus the structure is statically determinate. Though there are many approaches to solve for those four unknowns (all of them correct), a few are simpler to pursue. In this case, it is easiest to "break" the structure into substructures and examine the free body diagram of each one of them separately.

1. Isolating ab:

$$\sum M_z^{\,b} = 0 \qquad 9\text{ft}\cdot R_{ay} - 40\text{kip}\cdot 5\text{ft} = 0 \qquad R_{ay} := \frac{40\text{kip}\cdot 5\text{ft}}{9\text{ft}} = 22.2\cdot\text{kip}$$

$$\sum M_z^{\,a} = 0 \qquad 40\text{kip}\cdot 4\text{ft} - S\cdot 9\text{ft} = 0 \qquad S := \frac{40\text{kip}\cdot 4\text{ft}}{9\text{ft}} = 17.8\cdot\text{kip}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad R_{ax} := 30\text{kip}$$

2. Isolating bd:

$$\sum M_z^{\,d} = 0 \qquad -S\cdot 18\text{ft} - 40\text{kip}\cdot 15\text{ft} - 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft}\cdot 6\text{ft} - 30\text{kip}\cdot 2\text{ft} + R_{cy}\cdot 12\text{ft} = 0$$

$$R_{cy} := \frac{S\cdot 18\text{ft} + 40\text{kip}\cdot 15\text{ft} + 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft}\cdot 6\text{ft} + 30\text{kip}\cdot 2\text{ft}}{12\text{ft}} = 105.7\cdot\text{kip}$$

$$\sum M_z^{\,c} = 0 \qquad -S\cdot 6\text{ft} - 40\text{kip}\cdot 3\text{ft} + 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft}\cdot 6\text{ft} + 30\text{kip}\cdot 10\text{ft} - R_{dy}\cdot 12\text{ft} = 0$$

$$R_{dy} := \frac{-S\cdot 6\text{ft} - 40\text{kip}\cdot 3\text{ft} + 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft}\cdot 6\text{ft} + 30\text{kip}\cdot 10\text{ft}}{12\text{ft}} = 30.1\cdot\text{kip}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

3. Check

$$\sum F_y = 0 \qquad R_{ay} - 40\text{kip} - 40\text{kip} + R_{cy} - 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft} - 30\text{kip} + R_{dy} = -0\cdot\text{kip} \qquad \text{OK!}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

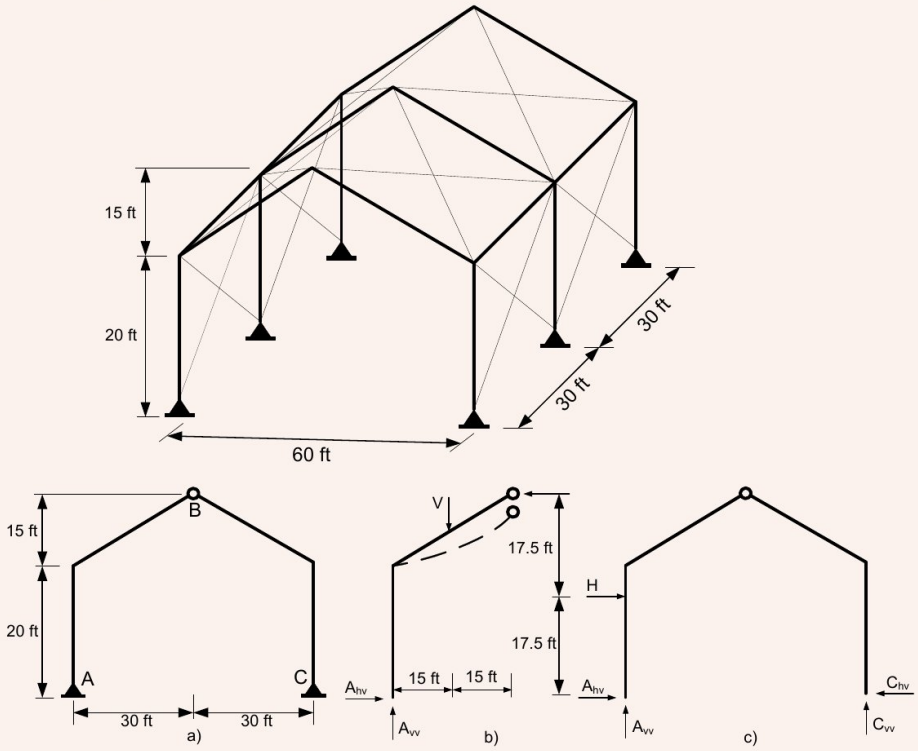
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

5.5 Three Hinged Gable Frame

The three-hinged gable frames are spaced at 30 ft on center. Determine the reactions components on the frame due to: 1) Roof dead load of 20 psf of roof area; 2) Snow load of 30 psf of horizontal projection; 3) Wind load of 15 psf of vertical projection. Determine the critical design values for the horizontal and vertical reactions.



Solution:

1. Due to smmetry, there is no vertical force transmitted by the hinge for snow and dead load, and thus we can consider only the left (or right) side of the frame.
2. Point equivalent loads:
   a) Roof dead load per one side of frame is

$$DL := 20psf \cdot 30ft \cdot \sqrt{(30ft)^2 + (15ft)^2} = 20.12 \cdot kip$$

   b) Snow load per one side of frame is

$$SL := 30psf \cdot 30ft \cdot 30ft = 27 \cdot kip$$

   c) Wind load per per frame (ignoring the suction) is

$$WL := 15psf \cdot 30ft \cdot 35ft = 15.75 \cdot kip$$

3. There are 4 reactions, 3 equations of equilibrium and one equation of condition; therefore, statically determinate. Alternatively, by symmetry there is no shear at the hinge, and we would have for the substructure two reactions at the support and one (horizontal) at the hinge.
4. The relationship between the horizontal and vertical reactions at A due to a centered vertical load, A_{hv} and A_{vv} respectively is determined by taking the moment with respect to the hinge (b):

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\sum M_z^B = 0 \qquad 15\cdot V - 30\cdot A_{vv} + 35\cdot A_{hv} = 0$

$\sum F_y = 0 \qquad A_{vv} - V = 0$

$A_{hv} = \frac{15A_{vv}}{35}$

Substituting for roof dead and snow load we obtain:

$A_{vvDL} := DL = 20.12\cdot kip \qquad B_{vvDL} := A_{vvDL} = 20.12\cdot kip$

$A_{hvDL} := \frac{15A_{vvDL}}{35} = 8.62\cdot kip \qquad B_{hvDL} := A_{hvDL} = 8.62\cdot kip$

$A_{vvSL} := SL = 27\cdot kip \qquad B_{vvSL} := A_{vvSL} = 27\cdot kip$

$A_{hvSL} := \frac{15A_{vvSL}}{35} = 11.57\cdot kip \qquad B_{hvSL} := A_{hvSL} = 11.57\cdot kip$

5. The reactions due to wind load (blowing from left) are determined as follows:
   a) Vertical reaction at A is determined by considering the entire structure and taking the moment with respect to C (c)

$\sum M_z^C = 0 \qquad 15.75kip\cdot\left(\frac{20ft + 15ft}{2}\right) - 60ft\cdot A_{vh} = 0$

$A_{vh} := \frac{WL\cdot\left(\frac{20ft + 15ft}{2}\right)}{60ft} = 4.59\cdot kip$

A_{vh} is the vertical reaction at A due to the horizontal load, and from equilibrium of forces in the y-direction, we have

$C_{vh} := -A_{vh} = -4.59\cdot kip$

(note that wind load does not have any vertical component)

   b) The horizontal reaction at B is determined by considering the right substructure and taking the moment with respect to the internal hinge at B

$\sum M_z^B = 0 \qquad 35ft\cdot C_{hh} - C_{vh}\cdot 30ft = 0$

$C_{hh} := \frac{C_{vh}\cdot 30ft}{35ft} = -3.94\cdot kip$

   c) Horizontal reactino at A is taken by considering the entire structure and summing forces in the x-direction

$\sum F_x = 0 \qquad WL + C_{hh} - A_{hh} = 0$

$A_{hh} := WL + C_{hh} = 11.81\cdot kip$

   and note that A carries most of the horizontal load.

6. Finally, the supports should be designed for the most critical (plausible) combination of reactions

$H := A_{hvDL} + A_{hvSL} + A_{hh} = 32.01\cdot kip$

$V := A_{vvDL} + A_{vvSL} + A_{vh} = 51.72\cdot kip$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

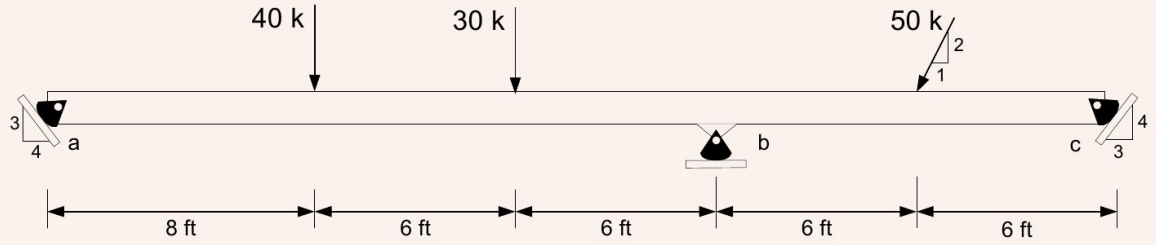
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

5.6 Inclined Supports

Determine the reactions of the following two span beam resting on inclined supports.



Solution:

A priori we would identify 5 reactions; however, we do have 2 equations of condition (one at each inclined support), thus with three equations of equilibrium, we have a statically determinate system.

$$\sum M_z^{\,b} = 0 \qquad R_{ay}\cdot 20\text{ft} - 40\text{kip}\cdot 12\text{ft} - 30\text{kip}\cdot 6\text{ft} + 50\text{kip}\cdot\sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right)\cdot 6\text{ft} - R_{cy}\cdot 12\text{ft} = 0$$

$$R_{ay}\cdot 20\text{ft} - R_{cy}\cdot 12\text{ft} = 40\text{kip}\cdot 12\text{ft} + 30\text{kip}\cdot 6\text{ft} - 50\text{kip}\cdot\sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right)\cdot 6\text{ft}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad \frac{3}{4}R_{ay} - 50\text{kip}\cdot\cos\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right) - \frac{4}{3}\cdot R_{cy} = 0$$

$$R_{cy} = \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}R_{ay} - 50\text{kip}\cdot\cos\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right)\right) = \frac{9}{16}\cdot R_{ay} - 16.77\text{kip}$$

$$\frac{9}{16}\cdot R_{ay} - R_{cy} = 16.77\text{kip}$$

Solving for those two equations:

$$\begin{pmatrix} 20 & -12 \\ \frac{9}{16} & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} R_{ay} \\ R_{cy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 391.672\ \text{kip} \\ 16.77\text{kip} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{ay} \\ R_{cy} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 14.37\text{kip} \\ -8.69\text{kip} \end{pmatrix}$$

The horizontal components of the reactions at a and c are

$$R_{ax} := \frac{3}{4}\cdot R_{ay} = 10.78\cdot\text{kip}$$

$$R_{cx} := -\frac{4}{3}\cdot R_{cy} = 11.59\cdot\text{kip}$$

Finally, we solve for R...

Victor E. Saouma

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Finally, we solve for R_{by}

$$\sum M_z^a = 0 \qquad 40\text{kip}\cdot 8\text{ft} + 30\text{kip}\cdot 14\text{ft} - R_{by}\cdot 20\text{ft} + 50\text{kip}\cdot\sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right)\cdot 26\text{ft} - R_{cy}\cdot 32\text{ft} = 0$$

$$R_{by} := \frac{40\text{kip}\cdot 8\text{ft} + 30\text{kip}\cdot 14\text{ft} + 50\text{kip}\cdot\sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right)\cdot 26\text{ft} - R_{cy}\cdot 32\text{ft}}{20\text{ft}} = 109.04\cdot\text{kip}$$

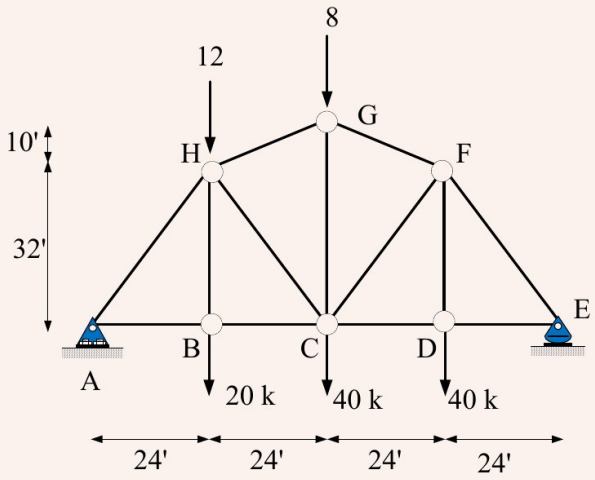
We check our results

$$\sum F_y = 0 \qquad R_{ay} - 40\text{kip} - 30\text{kip} - 50\text{kip}\cdot\sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right) + R_{by} + R_{cy} = 0\cdot\text{kip} \qquad \text{OK!}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad R_{ax} - 50\text{kip}\cdot\cos\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right) + R_{cx} = 0\cdot\text{kip} \qquad \text{OK!}$$

7.1 Truss Method of Joints

Using the method of joints, analyze the following truss



Solution:

1. R=3, m=13, 2j=16, and m+R=2j
2. We compute the reactions

$$\sum M_z^E = 0 \qquad (20\text{kip} + 12\text{kip})\cdot 72\text{ft} + (40\text{kip} + 8\text{kip})\cdot 48\text{ft} + 40\text{kip}\cdot 24\text{ft} - R_{Ay}\cdot 96\text{ft} = 0$$

$$R_{Ay} := \frac{(20\text{kip} + 12\text{kip})\cdot 72\text{ft} + (40\text{kip} + 8\text{kip})\cdot 48\text{ft} + 40\text{kip}\cdot 24\text{ft}}{96\text{ft}}$$

$$\boxed{R_{Ay} = 58\cdot\text{kip}}$$

$$\sum F_y = 0 \qquad 20\text{kip} + 12\text{kip} + 40\text{kip} + 8\text{kip} + 40\text{kip} - R_{Ay} - R_{Ey} = 0$$

$$R_{Ey} := 20\text{kip} + 12\text{kip} + 40\text{kip} + 8\text{kip} + 40\text{kip} - R_{Ay}$$

$$\boxed{R_{Ey} = 62\cdot\text{kip}}$$

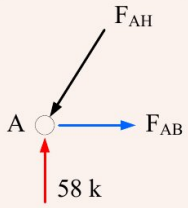
3. Consider each joint separately:
   Node A: Clearly AH is under compression and AB is under tension

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



$\sum F_y = 0$ $\quad -F_{AHy} + R_{Ay} = 0$

$F_{AHy} := -R_{Ay} = -58 \cdot kip$

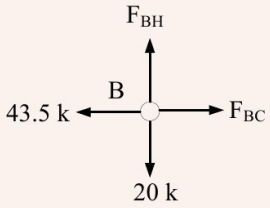
$L_y := 32ft \qquad L_x := 24ft \qquad L := \sqrt{L_y^2 + L_x^2} = 40 \cdot ft$

$F_{AH} := \frac{L}{L_y} \cdot F_{AHy} = -72.5 \cdot kip$ Compression

$\sum F_x = 0$ $\quad -F_{AHx} + F_{AB} = 0$

$F_{AB} := \frac{L_x}{L_y} \cdot R_{Ay} = 43.5 \cdot kip$ Tension

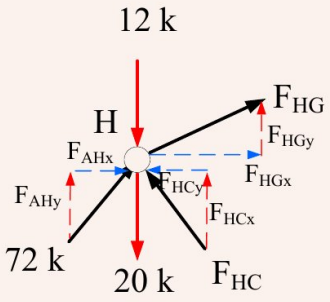
Node B:



$\sum F_x = 0$ $\quad \boxed{F_{BC} := 43.5kip}$ Tension

$\sum F_y = 0$ $\quad \boxed{F_{BH} := 20kip}$ Tension

Node H:



I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale ©© 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\sum F_x = 0$ $\quad F_{AHx} - F_{HCx} - F_{HGx} = 0$

$$43.5\text{kip} - \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} \cdot F_{HC} - \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} \cdot F_{HG} = 0$$

$\sum F_y = 0$ $\quad F_{AHy} + F_{HCy} - 12\text{kip} - F_{HGy} - 20\text{kip} = 0$:

$$58\text{kip} + \frac{32\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} \cdot F_{HC} - \frac{10\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} \cdot F_{HG} - 12\text{kip} - 20\text{kip} = 0$$

This can be most conveniently written as

$$\begin{bmatrix} \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} & \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} \\ -\frac{32\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} & \frac{10\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{HC} \\ F_{HG} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43.5\text{kip} \\ 26\text{kip} \end{pmatrix}$$

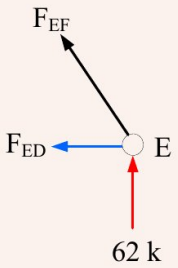
Solving we obtain

$$\begin{pmatrix} F_{HC} \\ F_{HG} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} & \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} \\ -\frac{32\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} & \frac{10\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 43.5\text{kip} \\ 26\text{kip} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7.5 \\ 52 \end{pmatrix} \cdot \text{kip}$$

$\boxed{F_{HC} = -7.5 \cdot \text{kip}}$ Compression

$\boxed{F_{HG} = 52 \cdot \text{kip}}$ Tension

Node E:



$\sum F_y = 0$ $\quad F_{EFy} := 62\text{kip}$

$$\boxed{F_{EF} := \frac{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}}{32\text{ft}} \cdot 62\text{kip} = 77.5 \cdot \text{kip}} \text{ Compression}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

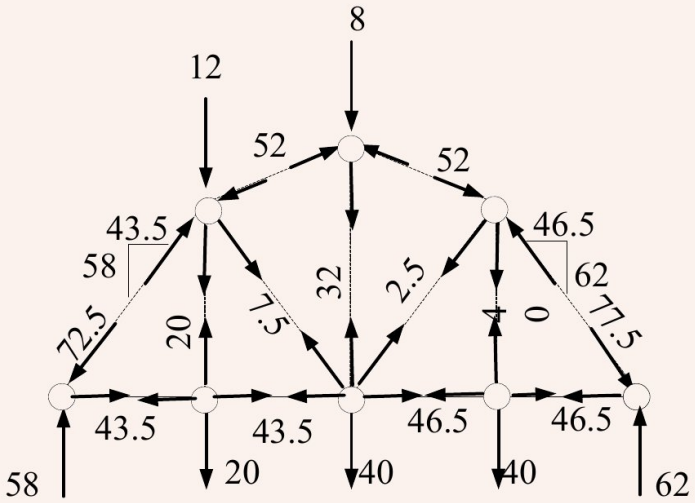
COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\sum F_x = 0$ $F_{ED} = F_{EFx}$:

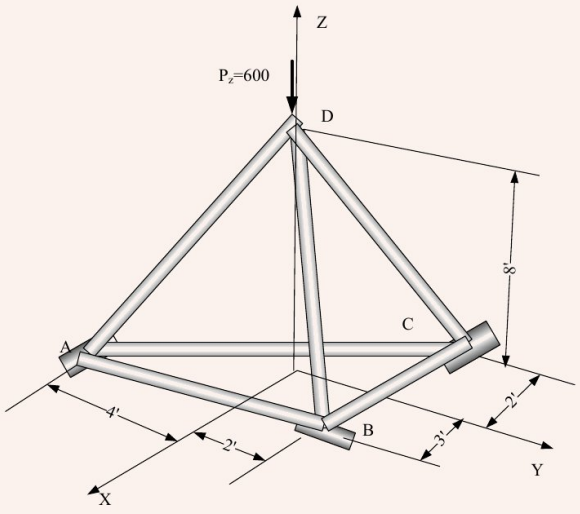
$$F_{ED} := 24\frac{ft}{32ft}\cdot 62kip = 46.5\cdot kip$$ Tension

The results of the analysis are summarized below



4. We would check our calculations by verifying equilibrium of forces at a node not previously used, such as *D*.

7.2 3D Truss



Solution:

1. Consider the free body diagram of the entire truss

$\sum M_{AB} = 0$ $C_z\cdot 5ft - 600\cdot 3ft = 0$ $C_z := \frac{600\cdot 3ft}{5ft}$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$C_z = 360$

$\sum M_{CB} = 0$ $\quad 600 \cdot 2\text{ft} - A_z \cdot 6\text{ft} = 0$ $\quad A_z := \frac{600 \cdot 2\text{ft}}{6\text{ft}}$

$A_z = 200$

$\sum F_z = 0$ $\quad B_z + 200 + 360 - 600 = 0$ $\quad B_z := 600 - 200 - 360$

$B_z = 40$

$\sum F_x = 0$ $\quad B_x := 0$

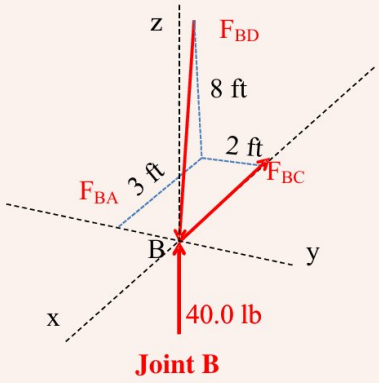
$\sum F_y = 0$ $\quad A_y - C_y = 0$

$\sum M_z = 0$ $\quad A_y \cdot 3\text{ft} + C_y \cdot 2\text{ft} = 0$ $\quad A_y = C_y = 0$

$A_y := 0$

$C_y := 0$

2. Consider the free body diagram of joint B



Joint B

$L_{BD} := \sqrt{(2\text{ft})^2 + (3\text{ft})^2 + (8\text{ft})^2} = 8.775 \cdot \text{ft}$

$\sum F_z = 0$ $\quad \frac{-8\text{ft}}{L_{BD}} \cdot F_{BD} + 40 = 0$

$F_{BD} := 40 \cdot \frac{-L_{BD}}{8\text{ft}} = -43.875$ Compression

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

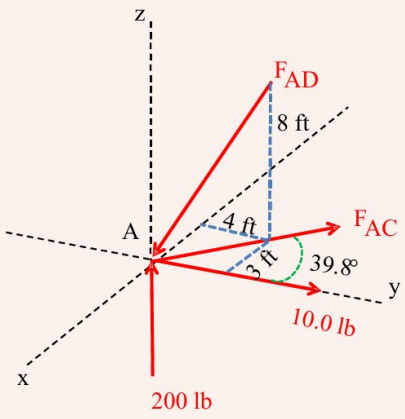
$\sum F_x = 0$ $\quad F_{BDx} - F_{BC} = 0$

$$F_{BDx} := \frac{-3\,ft}{L_{BD}} \cdot F_{BD} = 15$$ Tension

$\sum F_y = 0$ $\quad F_{BDy} - F_{BA} = 0$

$$F_{BDy} := \frac{-2\,ft}{L_{BD}} \cdot F_{BD} = 10$$ Tension

3. FBD of joint A



$$L_{AD} := \sqrt{(8\,ft)^2 + (3\,ft)^2 + (4\,ft)^2} = 9.434\,ft$$

$\sum F_z = 0$ $\quad \frac{-8\,ft}{L_{AD}} \cdot F_{AD} + 200 = 0$

$$F_{AD} := 200 \cdot \frac{-L_{AD}}{8\,ft} = -235.85$$ Compression

$\sum F_x = 0$ $\quad F_{ADx} - F_{ACx} = 0$

$$\tan(\alpha) = \frac{5\,ft}{6\,ft} \qquad \alpha := \operatorname{atan}\left(\frac{5}{6}\right) = 39.8\,deg$$

$$\frac{3\,ft}{L_{AD}} \cdot F_{AD} - F_{AC} \cdot \sin(\alpha) = 0$$

$$F_{AC} := \frac{\frac{3\,ft}{L_{AD}} \cdot -F_{AD}}{\sin(39.8\,deg)} = 117.2$$ Tension

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

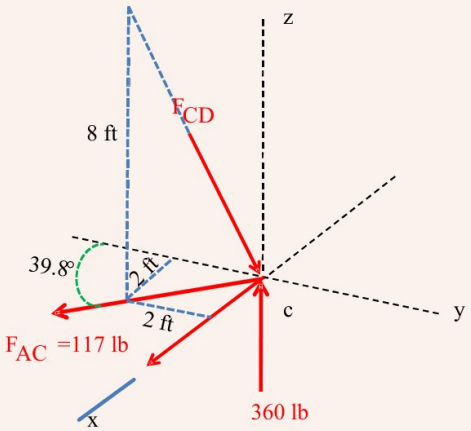
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\sum F_y = 0 \qquad F_{BDy} - F_{BA} = 0$

$\tan(\alpha) = \frac{5\,ft}{6\,ft} \qquad \alpha := \operatorname{atan}\left(\frac{5}{6}\right) = 39.8 \cdot deg$

$F_{BA} := \frac{-2\,ft}{L_{BD}} \cdot F_{BD} = 10$ Tension

5. Joint C



$L_{CD} := \sqrt{(8\,ft)^2 + (2\,ft)^2 + (2\,ft)^2} = 8.485 \cdot ft$

$\sum F_z = 0 \qquad F_{CDz} + 360 = 0 \qquad \frac{-8\,ft}{L_{CD}} \cdot F_{CD} + 360 = 0$

$F_{CD} := -360 \cdot \frac{-L_{CD}}{-8\,ft} = -381.8$ Compression

7.3 Truss I, Matrix Method

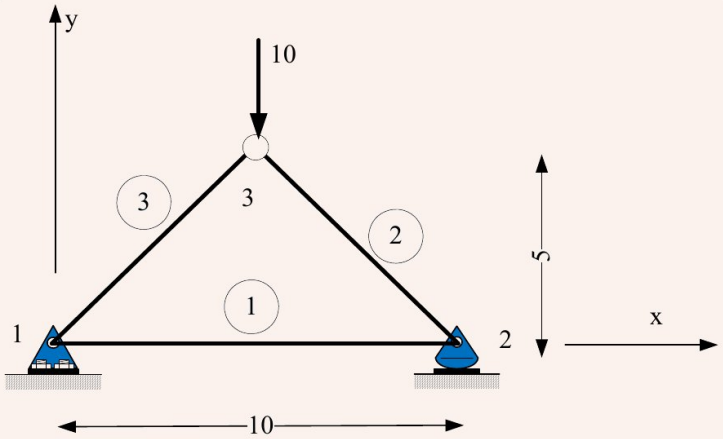
Determine all member forces for the following truss

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

1. We first determine the direction cosines

Member 1 (Nodes 1-2)

Node1: $\alpha_{11} := 1$ $\beta_{11} := 0$ Node2: $\alpha_{21} := -1$ $\beta_{21} := 0$

Member 2 (Nodes 2-3)

Node2: $\alpha_{22} := \frac{-\sqrt{2}}{2} = -0.707$ $\beta_{22} := \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$ Node3: $\alpha_{32} := \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$ $\beta_{32} := \frac{-\sqrt{2}}{2} = -0.707$

Member 3 (Nodes 3-1)

Node2: $\alpha_{33} := \frac{-\sqrt{2}}{2} = -0.707$ $\beta_{33} := \frac{-\sqrt{2}}{2} = -0.707$ Node3: $\alpha_{31} := \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$ $\beta_{31} := \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$

2. Next we write the equations of equilibrium

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{31} & 1 & 0 & 0 \\ \beta_{11} & 0 & \beta_{31} & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{32} & \beta_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2y} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{31} & 1 & 0 & 0 \\ \beta_{11} & 0 & \beta_{31} & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{32} & \beta_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7.071 \\ -7.071 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

7.4 Truss II, Matrix Method

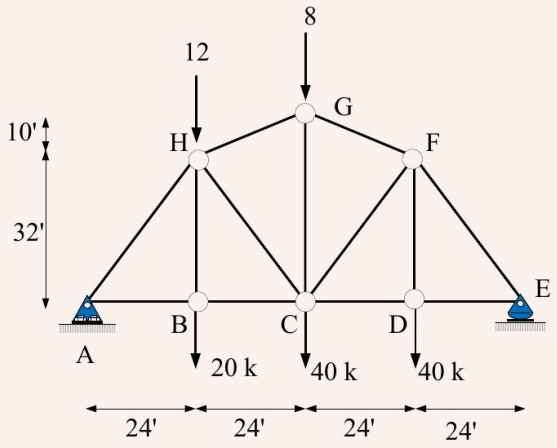
I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

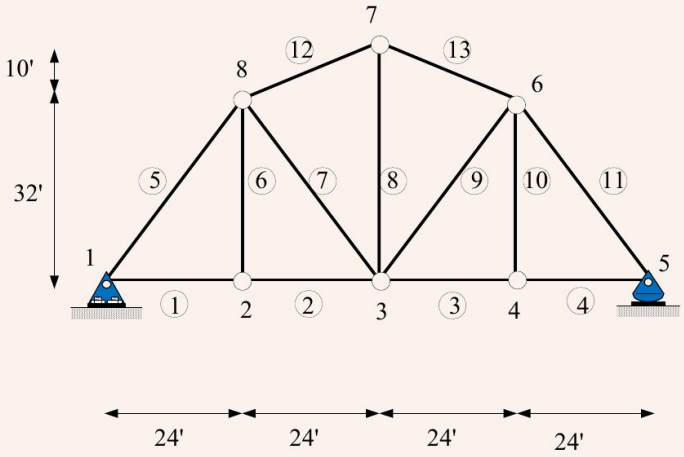
COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Set up the statics matrix for the truss shown below



Solution:



I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

1. We first determine the direction cosines

$$\frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2+(32\text{ft})^2}}=0.6$$

$$\frac{32\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2+(32\text{ft})^2}}=0.8$$

$$\frac{10\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2+(10\text{ft})^2}}=0.385$$

$$\frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2+(10\text{ft})^2}}=0.923$$

2. Next we write the equations of equilibrium

2. Next we write the equations of equilibrium

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.6 & 0 & -0.923 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & -1 & -0.8 & 0 & 0.385 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.923 & 0.923 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -0.385 & -0.385 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.923 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & -1 & -0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.385 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}
F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\\ F_5\\ F_6\\ F_7\\ F_8\\ F_9\\ F_{10}\\ F_{11}\\ F_{12}\\ F_{13}\\ R_{1x}\\ R_{1y}\\ R_{5y}
\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}
0\\0\\0\\-20\\0\\-40\\0\\-40\\0\\0\\0\\0\\0\\-8\\0\\-12
\end{pmatrix}=0$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale ©© 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

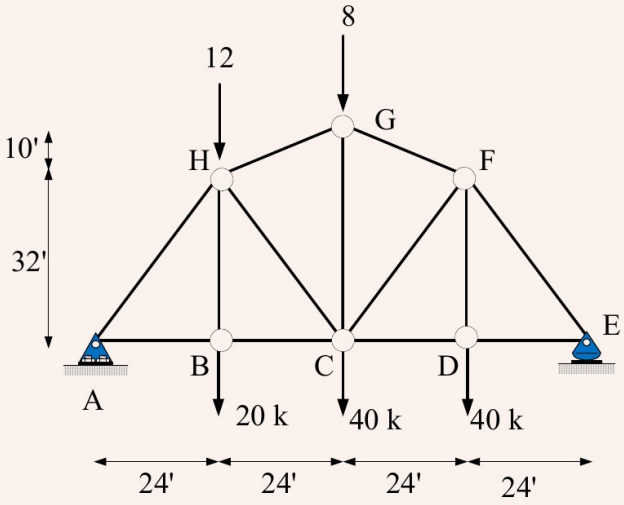
COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{5y} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.6 & 0 & -0.923 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & -1 & -0.8 & 0 & 0.385 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.923 & 0.923 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -0.385 & -0.385 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.923 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & -1 & -0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.385 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ -40 \\ 0 \\ -40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{array}{|c|r|} \hline & 1 \\ \hline 1 & 43.5 \\ 2 & 43.5 \\ 3 & 46.5 \\ 4 & 46.5 \\ 5 & -72.5 \\ 6 & 20 \\ 7 & 7.479 \\ 8 & 32.033 \\ 9 & 2.479 \\ 10 & 40 \\ 11 & -77.5 \\ 12 & -51.991 \\ 13 & -51.991 \\ 14 & 0 \\ 15 & 58 \\ 16 & 62 \\ \hline \end{array}$$

7.5 Truss, Method of Sections

Determine F_{BC} and F_{HG} in the truss below



Solution:

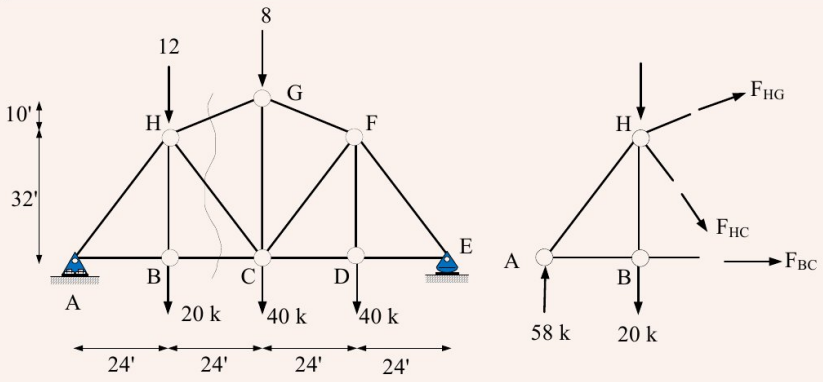
Cutting through members HG, HC, and BC, we first take the summation of forces with respect to H:

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



$\sum M_z^H = 0$ $\quad R_{Ay} \cdot 24ft - F_{BC} \cdot 32ft = 0$

$R_{Ay} := 58kip$ (From previous example)

$F_{BC} := \frac{24ft}{32ft} \cdot R_{Ay} = 43.5 \cdot kip$ Tension

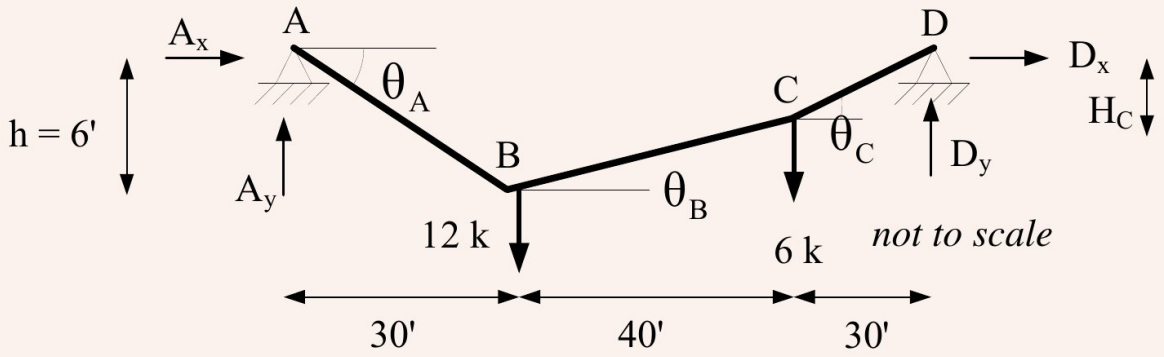
$\sum M_z^C = 0$ $\quad 58kip \cdot 48ft - (20kip + 12kip) \cdot 24ft - F_{HGx} \cdot 32ft - F_{HGy} \cdot 24ft = 0$

$$58kip \cdot 48ft - (20kip + 12kip) \cdot 24ft - 32ft \cdot F_{HG} \cdot \frac{24ft}{\sqrt{(24ft)^2 + (10ft)^2}} - 24ft \cdot F_{HG} \cdot \frac{10ft}{\sqrt{(24ft)^2 + (10ft)^2}} = 0$$

$F_{HG} := 52kip$ Compression

8.1 Funicular Cable Structures

Determine the reactions and the tensions for the cable structure shown below



Solution:

We have 4 external reactions, however the horizontal ones are equal and we can use any one of a number of equations of conditions in additiona to the three equations of equilibrium. First, we solve for the vertical reactions A_y, D_y and then for the horizontal ones (which are equal and opposite ($|H| = A_x = -D_x$). For this problem we could use the following 3 equations of static equilibrium $\Sigma F_x = \Sigma F_y = \Sigma M = 0$, however since we do not have any force in the x direction, the first equation is of no avail. Instead, we will consider the following set $\Sigma F_{\perp} = \Sigma M_A = \Sigma M_B = 0$. Alternatively, we can consider the problem as one with 8

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

unknowns (A_x, A_y, D_x, D_y, θ_A, θ_B, θ_C, and h_C), to be solved through the 2 equations of equilibrium expressed at each of the four points of interesect.

1. Solve for D_y

$$\sum M_z^{A} = 0 \qquad 12\text{kip}\cdot 30\text{ft} + 6\text{kip}\cdot 70\text{ft} - D_y\cdot 100\text{ft} = 0$$

$$D_y := \frac{12\text{kip}\cdot 30\text{ft} + 6\text{kip}\cdot 70\text{ft}}{100\text{ft}} = 7.8\cdot\text{kip}$$

2. Solve for A_y

$$\sum F_y = 0 \qquad A_y - 12\text{kip} - 6\text{kip} + D_y = 0$$

$$A_y := 12\text{kip} + 6\text{kip} - D_y = 10.2\cdot\text{kip}$$

3. Solve for the horizontal force by isolating the free body diagram AB

$$\sum M_z^{B} = 0 \qquad A_y\cdot 30\text{ft} - H\cdot 6\text{ft} = 0$$

$$H := \frac{A_y\cdot 30\text{ft}}{6\text{ft}} = 51\cdot\text{kip}$$

4. Solve for the sag at point C by isolating the free body diagram CD

$$\sum M_z^{C} = 0 \qquad -D_y\cdot 30\text{ft} + H\cdot h_c = 0$$

$$h_c := \frac{30\text{ft}\,D_y}{H} = 4.6\cdot\text{ft}$$

5. Solve for the cable internal forces or tractions in this case

$$\tan(\theta_A) = \frac{6\text{ft}}{30\text{ft}} \qquad \theta_A := \operatorname{atan}\left(\frac{6\text{ft}}{30\text{ft}}\right) = 11.31\cdot\text{deg}$$

$$T_{AB} := \frac{H}{\cos(\theta_A)} = 52.01\cdot\text{kip}$$

$$\tan(\theta_B) = \frac{6\text{ft} - h_c}{40\text{ft}} \qquad \theta_B := \operatorname{atan}\left(\frac{6\text{ft} - h_c}{40\text{ft}}\right) = 2.02\cdot\text{deg}$$

$$T_{BC} := \frac{H}{\cos(\theta_B)} = 51.03\cdot\text{kip}$$

$$\tan(\theta_C) = \frac{h_c}{30\text{ft}} \qquad \theta_C := \operatorname{atan}\left(\frac{h_c}{30\text{ft}}\right) = 8.7\cdot\text{deg}$$

$$T_{CD} := \frac{H}{\cos(\theta_C)} = 51.59\cdot\text{kip}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

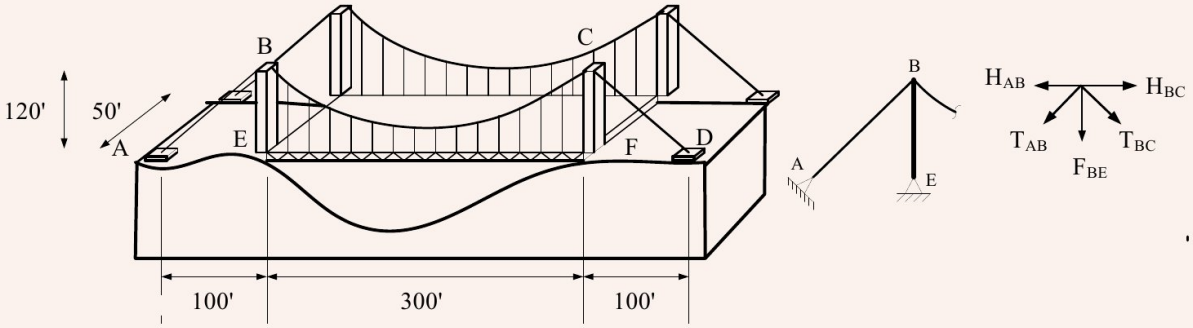
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

8.2 Design of Suspension Bridge

Design the following 4 lane suspension bridge by selecting the cable diameters assuming an allowable cable strength of $\sigma_{all} := 190ksi.$. The bases of the tower are hinged in order to avoid large bending moments. The total dead load is estimated at 200 psf. Assume a sag to span ratio of 1/5.



Solution:

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

1. The dead load is carried by each cable with one half the total deal load or $p_1 := \frac{1}{2}\cdot 200\text{psf}\cdot 50\text{ft} = 5\cdot\frac{\text{kip}}{\text{ft}}$
2. Using the HS 20 truck (or its distributed equivalent load of 0.64kip/ft per lane), the uniform additional load per cable is

   $p_2 := 2\cdot 0.64\,\frac{\text{kip}}{\text{ft}} = 1.28\cdot\frac{\text{kip}}{\text{ft}}$

   Thus the total design load is

   $p := p_1 + p_2 = 6.28\cdot\frac{\text{kip}}{\text{ft}}$
3. The thrust H is determined by

   $L := 300\text{ft}$

   $h := 60\text{ft}$

   $H := \frac{p\cdot L^2}{8\cdot h} = 1177.5\cdot\text{kip}$
4. The maximum tension is

   $r := \frac{1}{5}$ sag to span ratio

   $T_{max} := H\cdot\sqrt{1 + 16r^2} = 1508\cdot\text{kip}$
5. Note that if we used the approximate formula we woul dhave obtained

   $T_{maxApp} := H\cdot\left(1 + 8\cdot r^2\right) = 1554.3\cdot\text{kip}$
6. The required cross sectional area of the cable along the main span should be equal to

   $A := \frac{T_{max}}{\sigma_{all}} = 7.94\cdot\text{in}^2$

   which corresponds to a diameter

   $d := \sqrt{\frac{4\cdot A}{\pi}} = 3.18\cdot\text{in}$
7. We seek to determine the cable force in AB. Since the pylon cannot take any horizontal force, we should have the horizontal component of T_{max} equal and opposite to the horizontal component of T_{AB} or

   $T_{AB} := H\cdot\frac{\sqrt{(100\text{ft})^2 + (120\text{ft})^2}}{100\text{ft}} = 1839\cdot\text{kip}$

   The cable area should be

   $A := \frac{T_{AB}}{\sigma_{all}} = 9.68\cdot\text{in}^2$

   which corresponds to a diameter

   $d := \sqrt{\frac{4\cdot A}{\pi}} = 3.51\cdot\text{in}$
8. To determine the vertical load acting on the pylon, we must add the vertical components of T_{max} and T_{AB} (V_{BC} and V_{AB} respectively). We can determine V_{BC} from H and T_{max}, thus

   $P := \frac{120\text{ft}}{100\text{ft}}\cdot H + \sqrt{T_{max}^2 - H^2} = 2355\cdot\text{kip}$

   Using A36 steel with an allowable stress of $\sigma_{A36} := 21\text{ksi}$, the cross sectional area of the tower should be

   $A := \frac{P}{\sigma_{A36}} = 112\cdot\text{in}^2$

   Note that buckling of such a tower might govern the final dimensions

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

9. If the cables were to be anchored to a concrete block, the volume of the block shoul dbe at least equal to

$$V := \frac{\frac{120\,ft}{100\,ft}\cdot H}{150\,\frac{lbf}{ft^3}} = 9420\cdot ft^3$$

10.1 Simple Shear and Moment Diagram

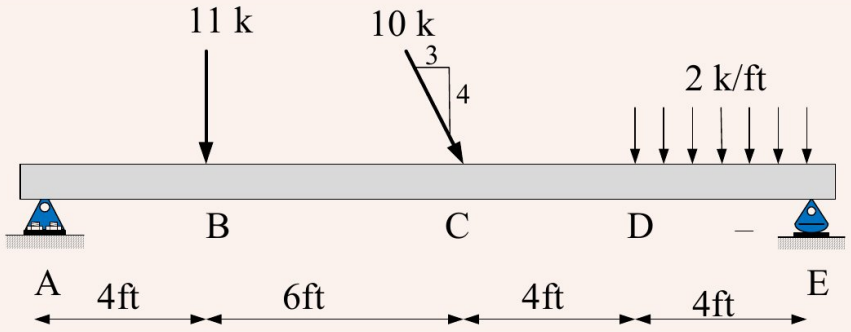
Draw the shear and moment diagram for the beam shown below.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

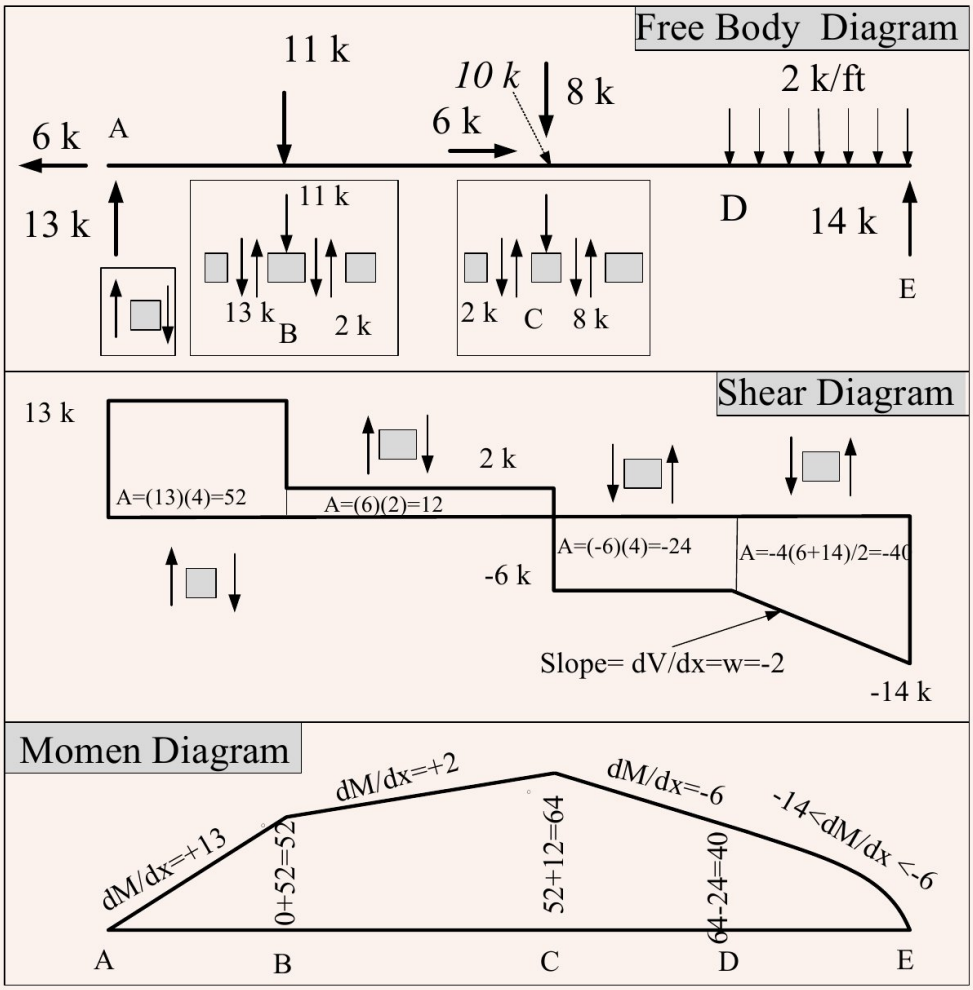
COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

The free body diagram is drawn below



 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Reactions are determined from the equilibrium equations

$\sum F_x = 0 \qquad -A_x + 6kip = 0 \qquad A_x := 6kip$

$\sum M_A = 0 \qquad 11kip\cdot 4ft + 10kip\cdot\frac{3}{5}\cdot 10ft + 2\frac{kip}{ft}\cdot 4ft\cdot 16ft - E_y\cdot 18ft = 0$

$$E_y := \frac{11kip\cdot 4ft + 10kip\cdot\frac{4}{5}\cdot 10ft + 2\frac{kip}{ft}\cdot 4ft\cdot 16ft}{18ft} = 14\cdot kip$$

$\sum F_y = 0 \qquad A_y - 11kip - 10kip\cdot\frac{4}{5} - 2\frac{kip}{ft}\cdot 4ft + E_y = 0$

$$A_y := 11kip + 8kip + 2\frac{kip}{ft}\cdot 4ft - E_y = 13\cdot kip$$

Shear are determined next

1. At A the shear is equal to the reaction and is positive.
2. At B the shear drops (negative load) by 11 k to 2 k
3. At C it drops again by 8 k to -6 k
4. It stays constant up to D and then it decreases (constant negative slope since the load is uniform and negative) by 2 k per linear foot up to -14 k
5. As a check, -14 k is also the reaction previously determined at E.

Moment is determined last

1. The moment at A is zero (hinge support)
2. The change in moment between A and B is equal to the area under the corresponding shear diagram, or
   $\Delta M_{BA} := 13kip\cdot 4ft = 52\cdot kip\cdot ft$
3. Changes between other points are determined the same by taking the area under the shear diagram

COPIA DI REVISIONE

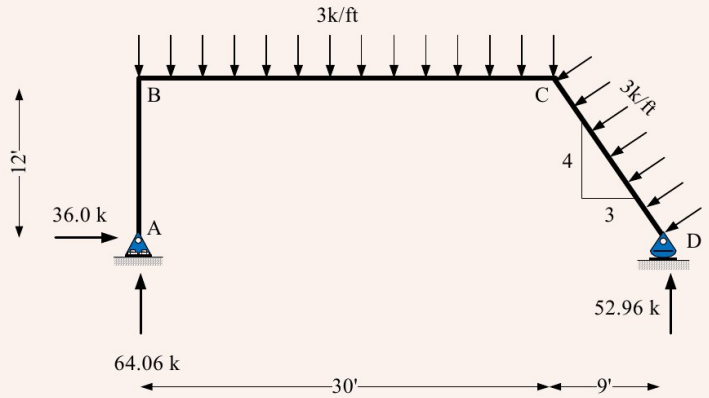
I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

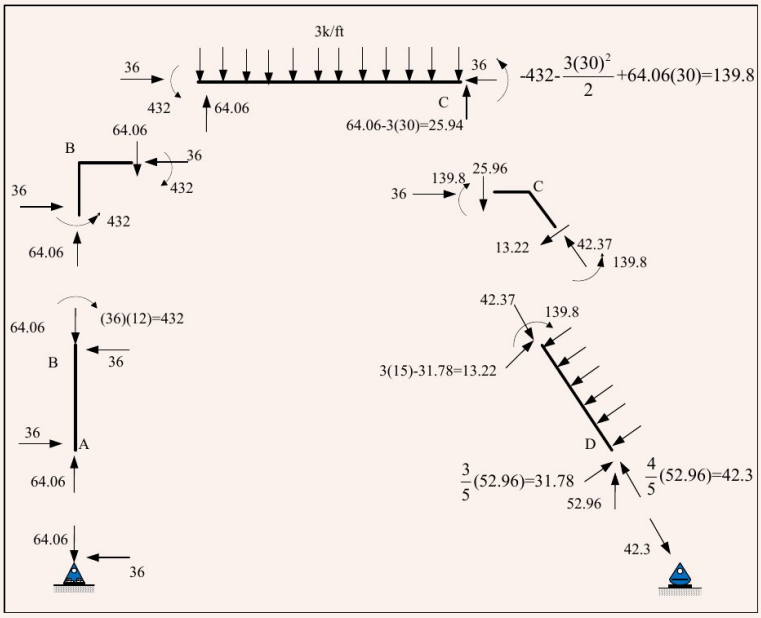
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

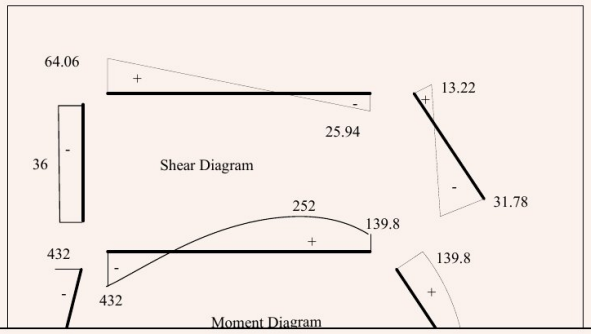
10.2 Frame Shear and Moment Diagram

Draw the shear and moment diagram of the following frame



Solution:



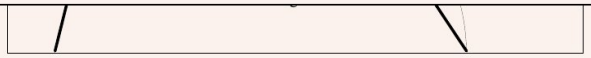


I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Reactions are determined first

$\sum F_x = 0 \qquad R_{Ax} - \frac{4}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft = 0 \qquad \boxed{R_{Ax} := \frac{4}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft = 36\cdot kip}$

$\sum M_A = 0 \qquad 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 30ft\cdot 15ft + \frac{3}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft\cdot 34.5ft - \frac{4}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft\cdot 6ft - R_{Dy}\cdot 39ft = 0$

$$\boxed{R_{Dy} := \frac{3\,\frac{kip}{ft}\cdot 30ft\cdot 15ft + \frac{3}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft\cdot 34.5ft - \frac{4}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft\cdot 6ft}{39ft} = 52.96\cdot kip}$$

$\sum F_y = 0 \qquad R_{Ay} - 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 30ft - \frac{3}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft + R_{Dy} = 0$

$$\boxed{R_{Ay} := 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 30ft + \frac{3}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft - R_{Dy} = 64.04\cdot kip}$$

We isolate each member and draw its free body diagram for each force component.

Shear

1. For A-B the shear is constant, equal to the horizontal reaction at A and negative according to our previously defined sign convention, $V_A := -36kip$
2. For member B-C at B, the shear must be equal to the vertical force which was transmitted along A-B, and which is equal to the vertical reaction at A, $V_B := R_{Ay} = 64.04\cdot kip$
3. Since B-C is subjected to a uniform load, the shear along B-C will have a slope equal to -3 and in terms of x (measured from B to C) is equal to
   $V_{BC}(x) := R_{Ay} - 3x$
4. The shear along C-D is obtained by decomposing the vertical reaction at D into axial and shear components. Thus, at D the shear is equal to $\frac{3}{5}\cdot R_{Dy} = 31.78\cdot kip$ and is negative. Based on our sign convention for the load, the slope of the shear must be equal to -3 along C-D. Thus the shear at point C is such that $V_c - \frac{5}{3}\cdot 9ft\cdot 3\,\frac{kip}{ft} = -\frac{3}{5}\cdot R_{Dy}$ or
   $V_c := \frac{5}{3}\cdot 9ft\cdot 3\,\frac{kip}{ft} - \frac{3}{5}\cdot R_{Dy} = 13.22\cdot kip$. The equation for shear is given by (for x going from C to D)
   $V_{CD}(x) := V_c - 3x$

Moment

1. Along A-B, the moment is zero at A (since we have a hinge) and its slope is equal to the shear, thus at B the moment is equal to $-36kip\cdot 12ft = -432\cdot kip\cdot ft$
2. Along B-C, the moment is equal todx

$$M_{BC} = M_B + \int_0^x V_{BC}(x)\,dx = -432kip\cdot ft + \int_0^x \left(R_{Ay} - 3x\right)dx = -432kip\cdot ft + R_{Ay}\cdot x - \frac{3x^2}{2}$$

which is a parabola. Substituting for x=30, we obtain at node C:

$$\boxed{M_C := -432kip\cdot ft + R_{Ay}\cdot 30ft - \frac{3\,\frac{kip}{ft}\cdot (30ft)^2}{2} = 139.2\cdot kip\cdot ft}$$

dM_{BC}

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

3. If we need to determine the maximum moment along B-C, we know that $\frac{dV_{BC}}{dx} = 0$ at the point where where V_{BC}=0,

that is $V_{BC}(x) = R_{Ay} - 3x = 0, x_{max} := \frac{R_{Ay}}{3\frac{kip}{ft}} = 21.3 \cdot ft.$ In other words, the maximum moment occurs where the shear is

zero. Thus

$$M_{BCmax} := -432kip \cdot ft + R_{Ay} \cdot x_{max} - \frac{3\frac{kip}{ft} \cdot (x_{max})^2}{2} = 251.5 \cdot kip \cdot ft$$

4. Finally, along C-D the moment varies quadratically (since we had a linear shear), the moment first increases (positive shear), and then decreases (negative shear). The moment along C-D is given by

$M_{CD} = M_C + \int_0^x V_{CD}(x)\,dx = M_C + \int_0^x (V_c - 3x)\,dx = M_C + V_c \cdot x - \frac{3x^2}{2}$ which is a parabola. Substituting for x =15ft, we obtain at node D

$$M_D := M_C + V_c \cdot 15ft - 3\frac{\frac{kip}{ft} \cdot (15ft)^2}{2} = -0 \cdot kip \cdot ft \quad \text{OK!}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

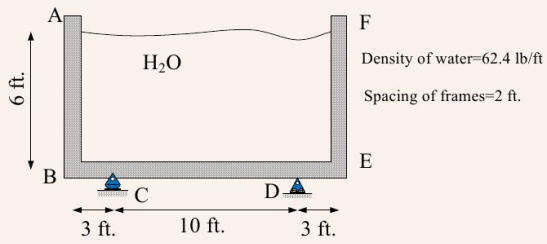
COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

10.3 Frame Shear and Moment Diagram: Hydrostatic Load

The frame shown below is the structural support of a flume. Assuming that the frames are spaced 2 ft apart along the length of the flume,

1. Determine all internal member end actions
2. Draw the shear and moment diagrams
3. Locate and compute maximum internal bending moments
4. If this is a reinforced concrete frame, show the location of reinforcement

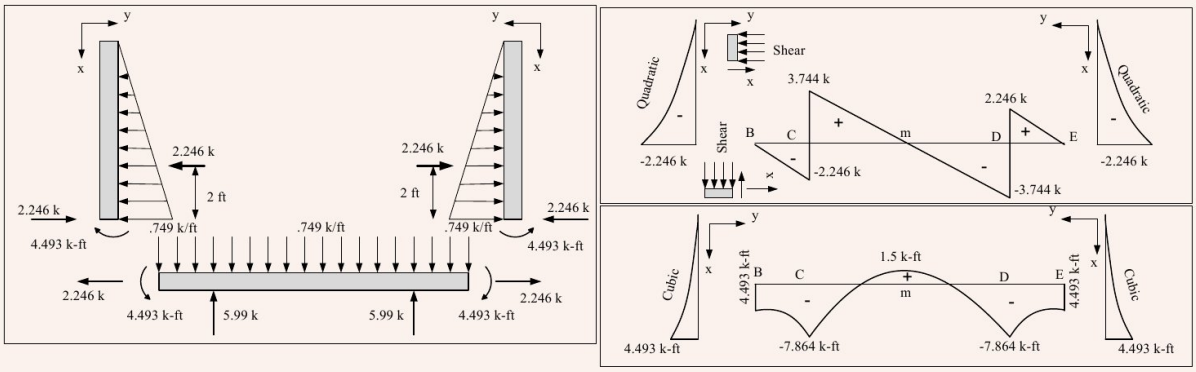


Solution:

The hydrostatic pressure causes lateral forces on the vertical members which can be treated as cantilevers fixed at the lower end. The pressure is linear and is given by $p(\gamma, h) := \gamma \cdot h$. Since each frame supports a 2 ft wide section of the flume, the equation for *w* (pounds/ft) is

$$w(h) := 2\text{ft} \cdot 62.4 \frac{\text{lbf}}{\text{ft}^3} \cdot h \rightarrow \frac{124.8 \cdot h \cdot \text{lbf}}{\text{ft}^2}$$

At the base $w_{base} := w(6\text{ft}) = 0.749 \cdot \frac{\text{kip}}{\text{ft}}$. Note that this is both the lateral pressure on the end walls as well as the uniform load on the horizontal members.



I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

End Actions

1. Base force at B is $F_{Bx} := \frac{1}{2} w_{base} \cdot 6ft = 2.246 \cdot kip$
2. Base moment at B is $M_B := \frac{1}{3} F_{Bx} \cdot 6ft = 4.493 \cdot kip \cdot ft$
3. End forces at B for member B-E are equal and opposite
4. Reaction at C is $R_{Cy} := \frac{1}{2} w_{base} \cdot 16ft = 5.99 \cdot kip$

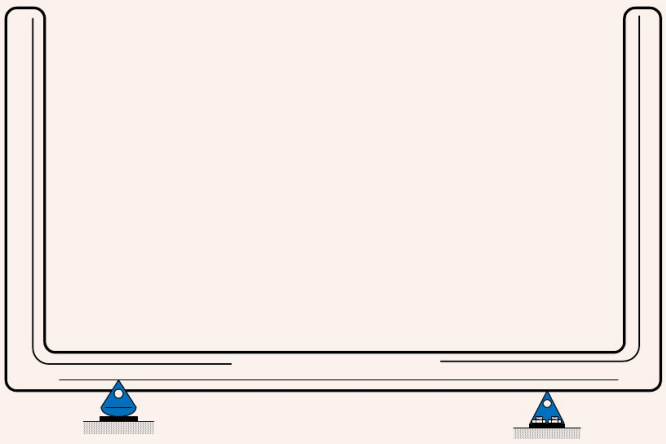
Shear forces

1. Base at B the shear force was determined eariler and was equal to $F_{Bx} = 2.246 \cdot kip$. Based on the orientation of the x-y axis, this is a negative shear.
2. The vertical shear at B is zero (neglecting the weight of A-B)
3. The shear to the left of C is $V_{Cleft} := 0 - w_{base} \cdot 3ft = -2.246 \cdot kip$
4. The shear to the right of C is $V_{Cright} := V_{Cleft} + R_{Cy} = 3.744 \cdot kip$

Moment diagrams

1. At the base: B $M_B = 4.493 \cdot kip \cdot ft$
2. At the support C, $M_C := -M_B - w_{base} \cdot 3ft \cdot \frac{3ft}{2} = -7.862 \cdot kip \cdot ft$
3. The maximum moment is equal to $M_{max} := M_C + w_{base} \cdot 5ft \cdot \frac{5ft}{2} = 1.498 \cdot kip \cdot ft$

Design: Reinforcement should be placed along the fibers which are under tension, that is on the side of the negative moment. The figure below schematically illustrates the location of the flexural reinforcement.



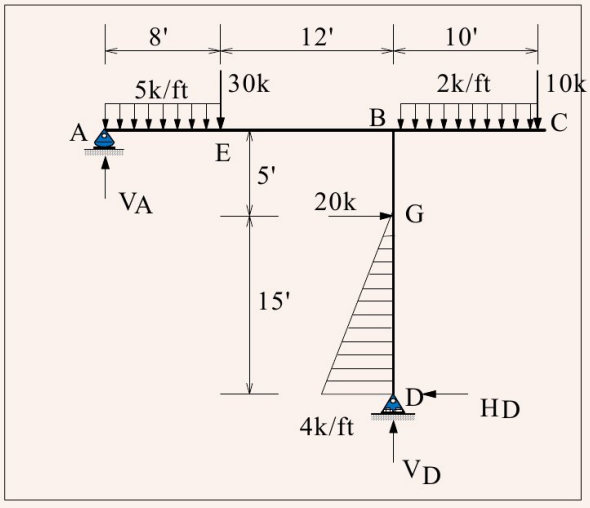
© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

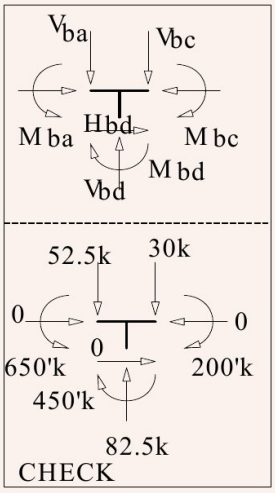
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

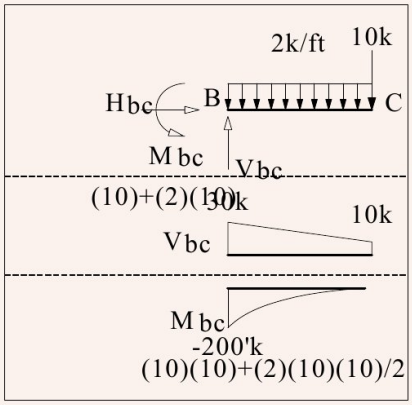
COPIA DI REVISIONE

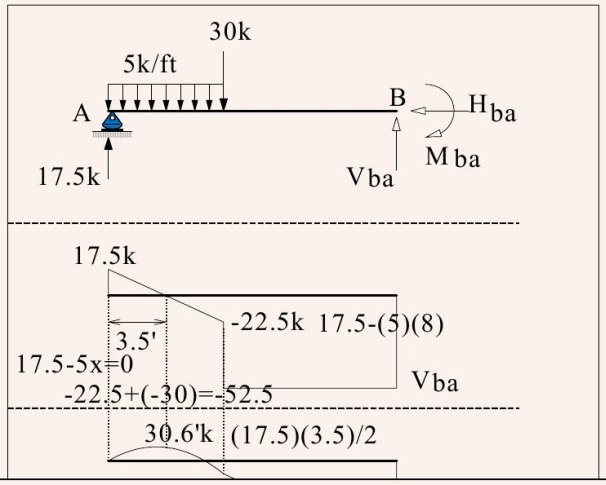
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

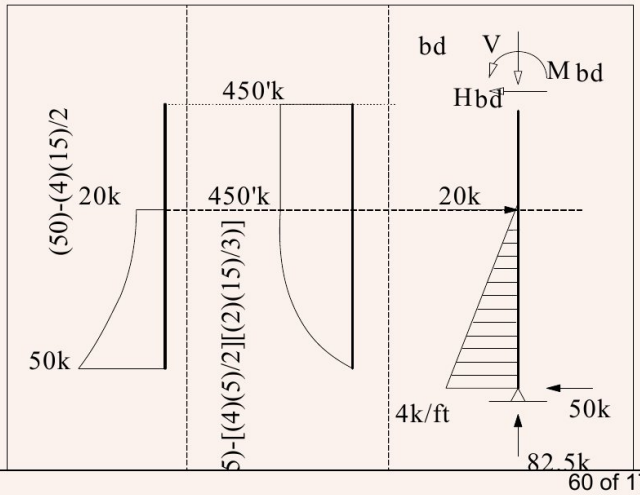
10.4 Shear Moment Diagrams for Frame









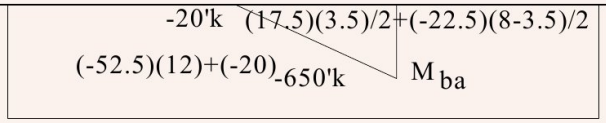


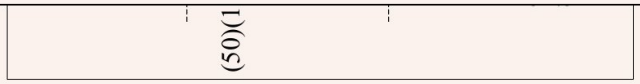
I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

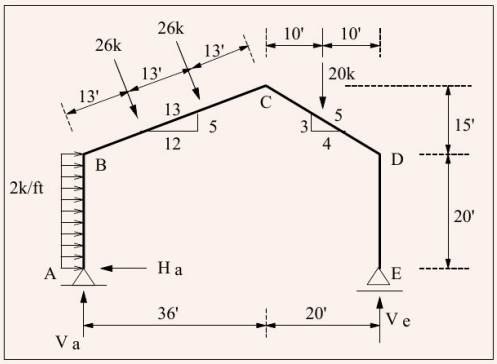
COPIA DI REVISIONE

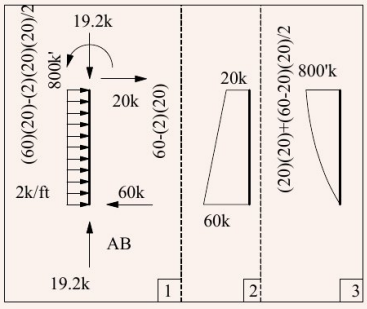
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

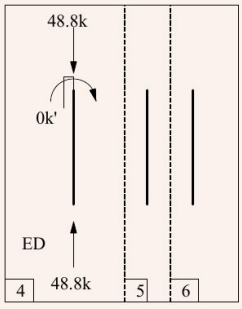


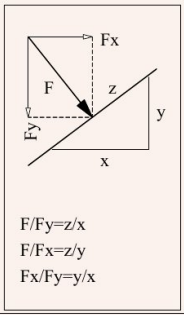


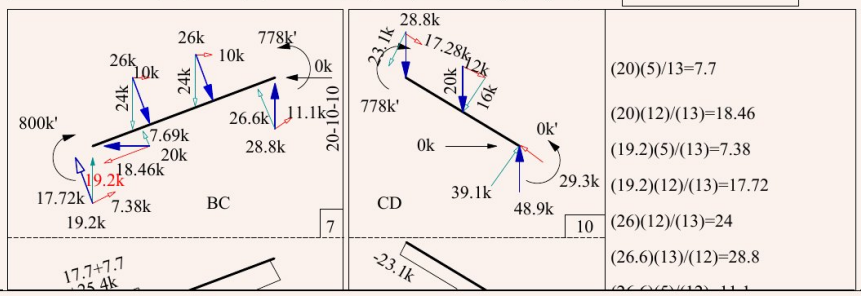
10.5 Shear Moment Diagrams for Inclined Frame









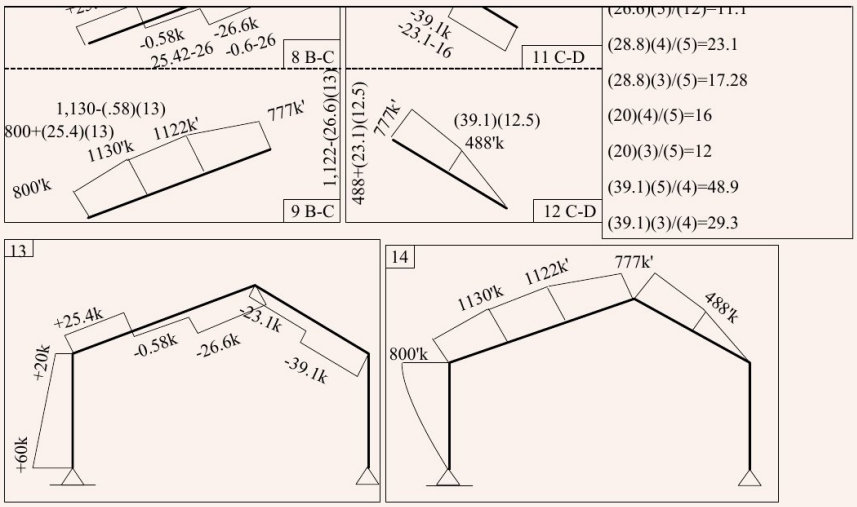


I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

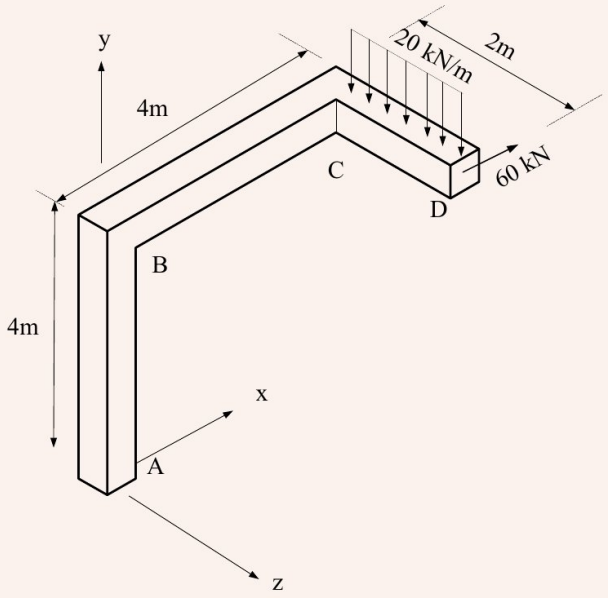
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



10.6 3D Frame



1. The frame has a total of 6 reactions (3 forces and 3 moments) at the support, and we have a total of 6 equations of equilibrium, thus it is statically determinate.
2. Each member has the following internal forces (defined in terms of the local coordinate system of each member x' - y'- z' such that x is along the member)

Member	Internal Forces					
Member	Axial	Shear		Moment		Torsion
	$N_{x'}$	$V_{y'}$	$V_{z'}$	$M_{y'}$	$M_{z'}$	$T_{x'}$
C - D		✓	✓	✓	✓	
B - C	✓		✓	✓	✓	✓
A - B	✓	✓		✓	✓	✓

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Member	Internal Forces					
Member	Axial	Shear		Moment		Torsion
	$N_{x'}$	$V_{y'}$	$V_{z'}$	$M_{y'}$	$M_{z'}$	$T_{x'}$
C - D		✓	✓	✓	✓	
B - C	✓		✓	✓	✓	✓
A - B	✓	✓		✓	✓	✓

3. The numerical calculations for the analysis of the three dimensional frame are quite simple, however the main complexity stems from the difficulty in visualizing the inter-relations between internal forces of adjacent members.
4. In this particular problem, rather than starting by determining the reactions, it is easier to determined the internal forces at the end of each member starting with member C-D. Note that temporarily we adopt a sign convention which is compatible with the local coordinate systems.

C-D

$$\sum F_{y'} = 0 \qquad V_{y'C} := 20\frac{kN}{m}\cdot 2m = 40\cdot kN$$

$$\sum F_{z'} = 0 \qquad V_{z'C} := 60kN$$

$$\sum M_{y'} = 0 \qquad M_{y'C} := -60kN\cdot 2m = -120\cdot kN\cdot m$$

$$\sum M_{z'} = 0 \qquad M_{z'C} := 20\frac{kN}{m}\cdot 2m\cdot\frac{2m}{2} = 40\cdot kN\cdot m$$

B-C

$$\sum F_{x'} = 0 \qquad N_{x'B} := V_{z'C} = 60\cdot kN$$

$$\sum F_{y'} = 0 \qquad V_{y'B} := V_{y'C} = 40\cdot kN$$

$$\sum M_{y'} = 0 \qquad M_{y'B} := M_{y'C} = -120\cdot kN\cdot m$$

$$\sum M_{z'} = 0 \qquad M_{z'B} := V_{y'C}\cdot 4m = 160\cdot kN\cdot m$$

$$\sum T_{x'} = 0 \qquad T_{x'B} := -M_{z'C} = -40\cdot kN\cdot m$$

A-B

$$\sum F_{x'} = 0 \qquad N_{x'A} := V_{y'B} = 40\cdot kN$$

$$\sum F_{y'} = 0 \qquad V_{y'A} := N_{x'B} = 60\cdot kN$$

$$\sum M_{y'} = 0 \qquad M_{y'A} := -T_{x'B} = 40\cdot kN\cdot m$$

$$\sum M_{z'} = 0 \qquad M_{z'A} := M_{z'B} + N_{x'B}\cdot 4m = 400\cdot kN\cdot m$$

$$\sum T_{x'} = 0 \qquad T_{x'A} := M_{y'B} = -120\cdot kN\cdot m$$

The interaction between axial forces N and shear V as well as between moments M and torsion T is clearly highlighted by this

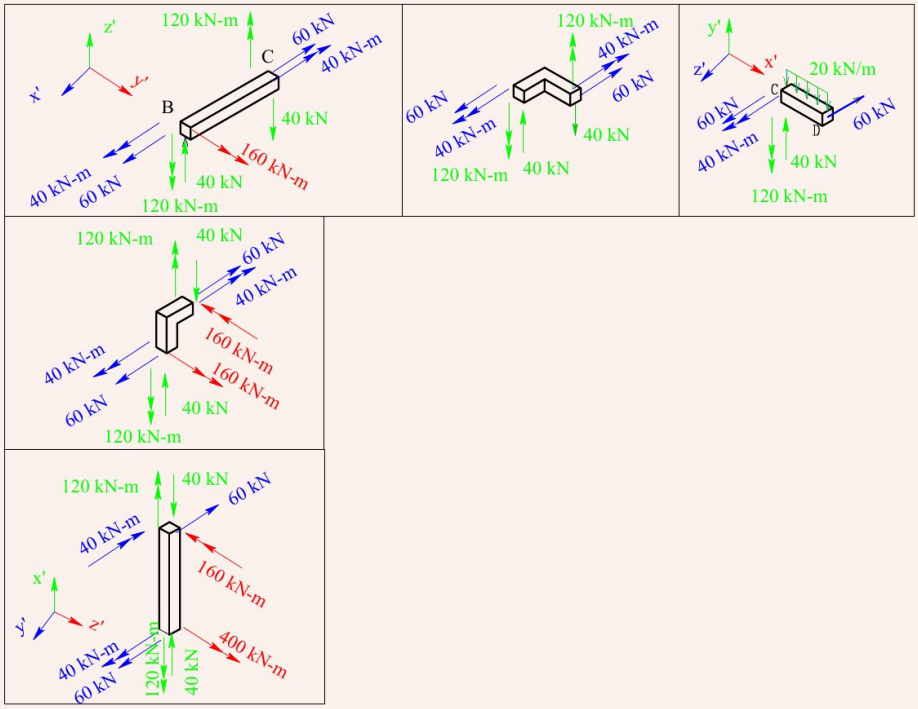
I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

example.

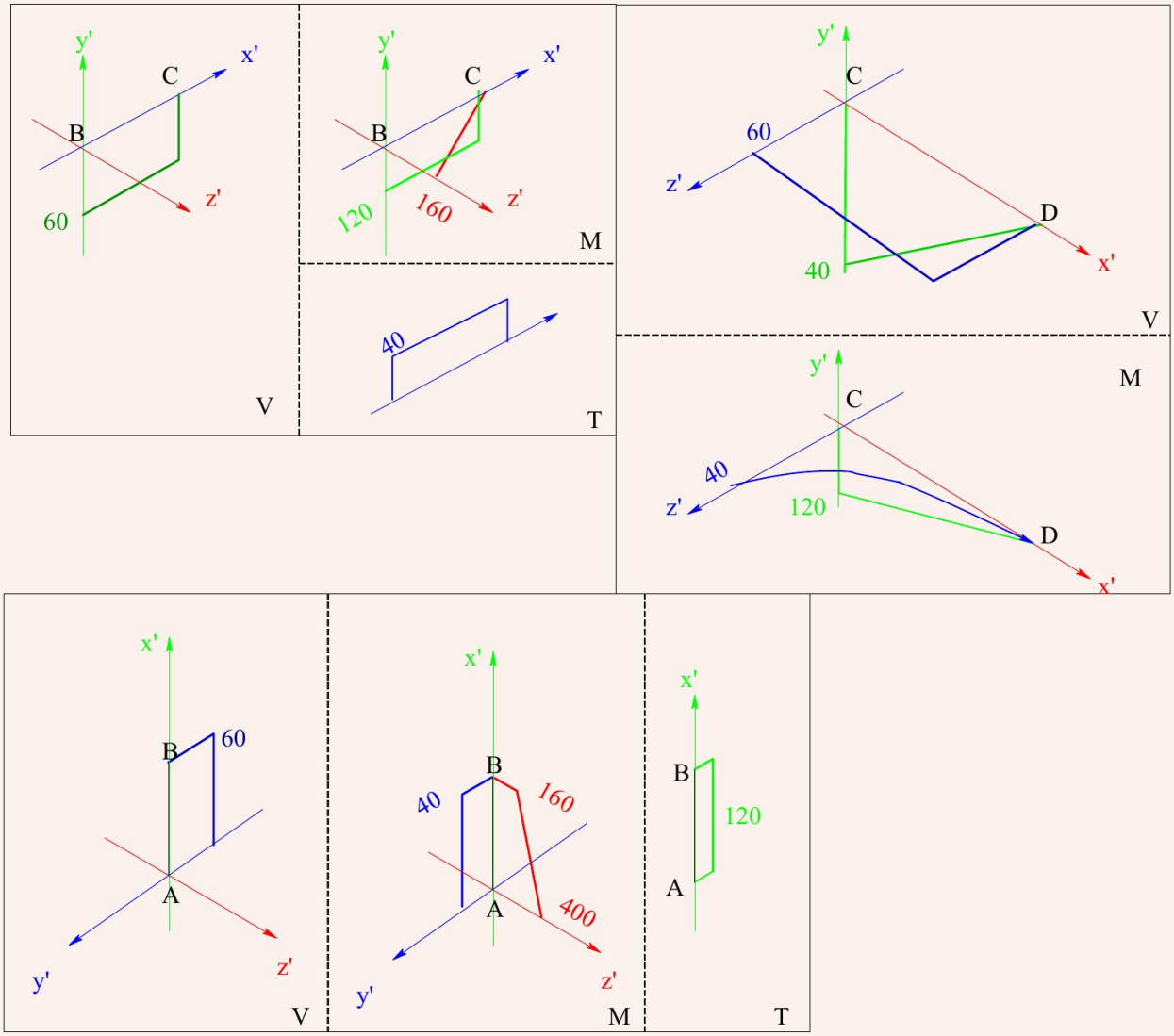


I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

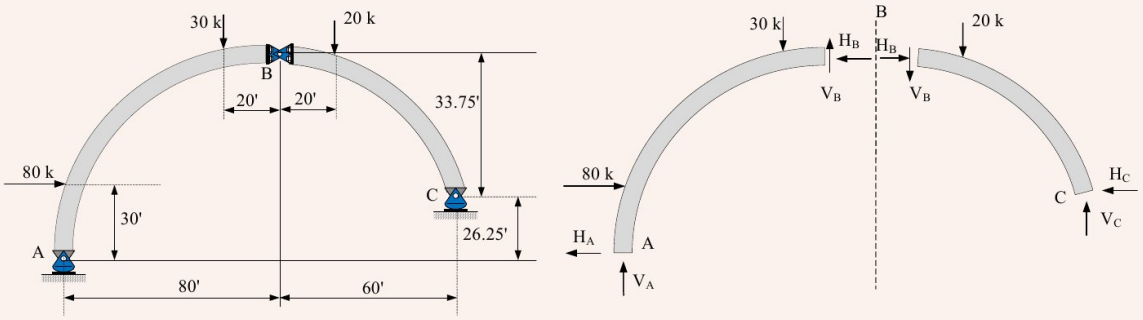
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

11.1 Three Hinged Arch, Point Loads

Determine the reactions of the three-hinged arch shown below



Solution:

Four unknowns, three equations of equilibrium, one equation of condition - staticall determinate

$$\sum M_z^C = 0$$

$$R_{Ay}\cdot 140\,ft + 80\,kip\cdot(30\,ft - 26.25\,ft) - 30\,kip\cdot(60\,ft + 20\,ft) - 20\,kip\cdot(60\,ft - 20\,ft) + R_{Ax}\cdot 26.25\,ft = 0$$

$$R_{Ay}\cdot 140\,ft + R_{Ax}\cdot 26.25\,ft = 30\,kip\cdot 80\,ft + 20\,kip\cdot 40\,ft - 80\,kip\cdot 3.75\,ft$$

$$\boxed{R_{Ay}\cdot 140\,ft + R_{Ax}\cdot 26.25\,ft = 2900\,kip\cdot ft}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad 80\,kip - R_{Ax} - R_{Cx} = 0$$

$$\boxed{R_{Ax} + R_{Cx} = 80\,kip}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad R_{Ay} + R_{Cy} - 30\,kip - 20\,kip = 0$$

$$\boxed{R_{Ay} + R_{Cy} = 50\,kip}$$

$$\sum M_z^B = 0 \qquad R_{Ax}\cdot 60\,ft - 80\,kip\cdot 30\,ft - 30\,kip\cdot 20\,ft + R_{Ay}\cdot 80\,ft = 0$$

$$R_{Ay}\cdot 80\,ft + R_{Ax}\cdot 60\,ft = 80\,kip\cdot 30\,ft + 30\,kip\cdot 20\,ft$$

$$\boxed{R_{Ay}\cdot 80\,ft + R_{Ax}\cdot 60\,ft = 3000\,kip\cdot ft}$$

Solving those four equations simultaneously we have:

$$\begin{pmatrix} 140 & 26.25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 80 & 60 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_{Ay} \\ R_{Ax} \\ R_{Cy} \\ R_{Cx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2900 \\ 80 \\ 50 \\ 3000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Ay \\ Ax \\ Cy \\ Cx \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 140 & 26.25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 80 & 60 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2900 \\ 80 \\ 50 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.1 \\ 29.8 \\ 34.9 \\ 50.2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{Ay} \\ R_{Ax} \\ R_{Cy} \\ R_{Cx} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} Ay \\ Ax \\ Cy \\ Cx \end{pmatrix} \cdot kip = \begin{pmatrix} 15.1 \\ 29.8 \\ 34.9 \\ 50.2 \end{pmatrix} \cdot kip$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

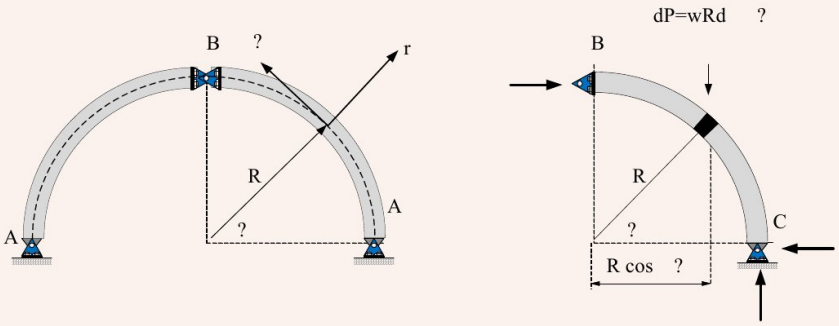
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

We can check our results by considering the summation with respect to B from the right:

$$\sum M_z^{B} = 0 \qquad -20\text{kip}\cdot 20\text{ft} - R_{Cx}\cdot 33.75\text{ft} + R_{Cy}\cdot 60\text{ft} = -0\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$$

11.2 Semi-Circular Arch

Determine the reactions of the three-hinged staticall determinate semi-circular arch under its own dead weight *w* (per unit arc length s, where ds=rdθ



Solution:

Reactions The reactions can be determined by **integrating** the load over the entire structure

1. **Vertical Reaction** is determined first

$$\sum M_A = 0 \qquad -C_y\cdot 2R + \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} wR\,d\theta\cdot R(1+\cos(\theta)) = 0$$

$$C_y = \frac{wR}{2}\cdot\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}(1+\cos(\theta))\,d\theta = \frac{\pi\,wR}{2}$$

2. **Horizontal Reactions are** determined next

$$\sum M_B = 0 \qquad -C_x\cdot R + C_y\cdot R - \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} wR\,d\theta\cdot R\cos(\theta) = 0$$

$$C_z = \frac{\pi\,wR}{2} - \frac{wR}{2}\cdot\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\cos(\theta)\,d\theta = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot wR$$

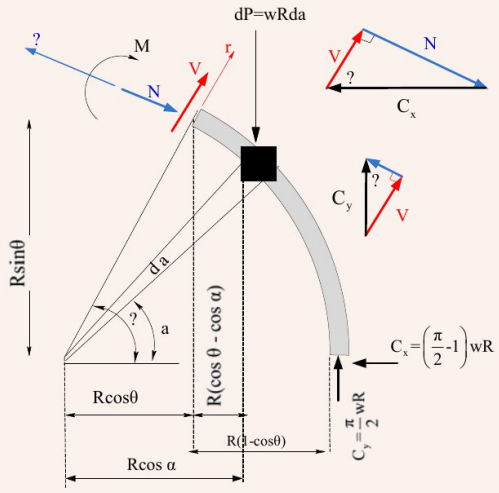
Internal Forces can now be determined

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



1. Shear Forces: Considering the free body diagram of the arch, and summing the forces in the radial direction ($\Sigma F_R=0$)

$$-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot wR\cos(\theta)+\frac{\pi}{2}\cdot wR\sin(\theta)-\int_{\alpha=0}^{\theta} wR\,d\alpha\cdot\sin(\theta)+V=0$$

$$V=wR\cdot\left[\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot\cos(\theta)+\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin(\theta)\right]$$

2. Axial Forces: Similarly, if we consider the summation of forces in the axial direction ($\Sigma F_\theta=0$)

$$\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot wR\sin(\theta)+\frac{\pi}{2}\cdot wR\cos(\theta)-\int_{\alpha=0}^{\theta} wR\,d\alpha\cdot\cos(\theta)+N=0$$

$$N=wR\cdot\left[\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\theta)-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot\sin(\theta)\right]$$

2. Moment: Now we can consider the third equation of equilibrium ($\Sigma M_z=0$)

$$\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot wR\cdot R\sin(\theta)+\frac{\pi}{2}\cdot wR\cdot R\cdot(1-\cos(\theta))+\int_{\alpha=0}^{\theta} wR\,d\alpha\cdot R(\cos(\alpha)-\cos(\theta))+M=0$$

$$M=wR^2\cdot\left[\frac{\pi}{2}\cdot(1-\sin(\theta))+\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\theta)\right]$$

Deflection are determined last

1. The real curvature ϕ is obtained by dividing the moment by EI

$$\phi=\frac{M}{EI}=\frac{wR^2}{EI}\cdot\left[\frac{\pi}{2}\cdot(1-\sin(\theta))+\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\theta)\right]$$

2. The virtual force $\delta\cdot\bar{P}$ will be a unit vertical point load in the direction of the desired deflection, causing a virtual internal moment

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

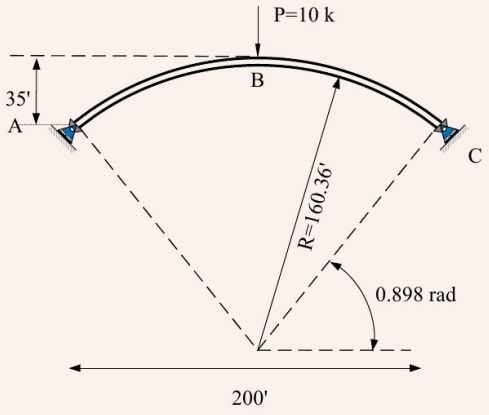
$$\delta\cdot\overline{M} = \frac{R}{2}\cdot(1 - \cos(\theta) - \sin(\theta)) \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

3. Hence, application of the virtual work equation yields:

$$1\cdot\Delta = 2\cdot\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{wR^2}{EI}\cdot\left[\frac{\pi}{2}\cdot(1 - \sin(\theta)) + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\theta)\right]\cdot\left[\frac{R}{2}\cdot(1 - \cos(\theta) - \sin(\theta))\right]\cdot R\, d\theta = \frac{wR^4}{16EI}\cdot\left(7\cdot\pi^2 - 18\cdot\pi - 12\right)$$

11.3 Statically Indeterminate Arch

Determine the value of the horizontal reaction component of the indicated two-hinged solid rib arch, as caused by a concentrated vertical load of 10 k at the center line of the span. Consider shearing, axial, and flexural strains. Assume the rib is a W24x130 with a total area of 38.21 in^2, that it has a web area of 13.70 in^2, a moment of inertia equal to 4,000 in^4, E of 30,000 k/in^2, and a shearinf modulus of 13,000 k/in^2.



Solution:

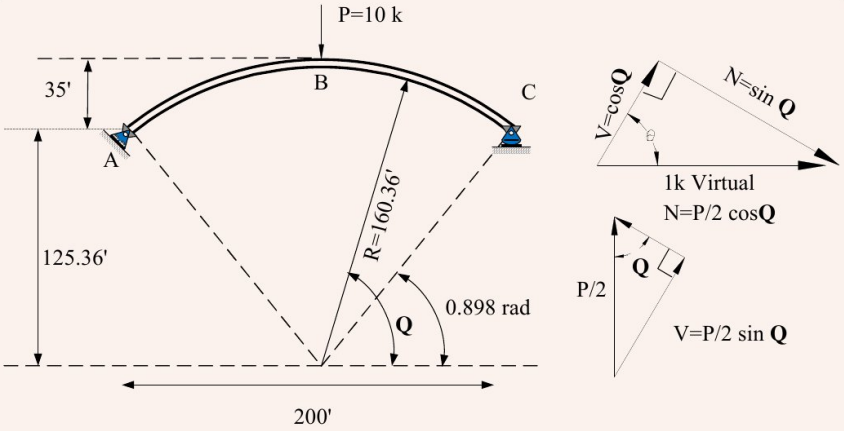
1. Consider that end C is placed on rollers, as shown below.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



A unit ficticious horizontal force is applied at C. The axial and shearinf components of this ficticious force and of the vertical reaction at C, acting on any section θ in the right half of the rib, are shown at the right end of the rib in the figure above.

2. The expression for the horizontal displacement of C is

$$1\cdot\Delta_{Ch} = 2\cdot\int_C^B \delta\cdot\overline{M}\cdot\frac{M}{EI}\,ds + 2\cdot\int_C^B \delta\cdot\overline{V}\cdot\frac{V}{A_W\cdot G}\,ds + 2\cdot\int_C^B \delta\cdot\overline{N}\cdot\frac{N}{AE}\,ds$$

3. From the figure above, for the rib from C to B

$$M = \frac{P}{2}\cdot(100 - R\cdot\cos\theta)$$

$$\delta\cdot\overline{M} = 1\cdot(R\cdot\sin\theta - 125.36\,ft)$$

$$V = \frac{P}{2}\cdot\sin\theta$$

$$\delta\cdot\overline{V} = \cos\theta$$

$$N = \frac{P}{2}\cdot\cos\theta$$

$$\delta\cdot\overline{N} = -\sin\theta$$

$$ds = R\,d\theta$$

4. If the above values are substituted in the equation for the horizontal displacement of C and integrated between the limits of 0.898 and π/2, the result will be

$$\Delta_{Ch} = 22.55\,in + 0.023\,in - 0.003\,in$$

$$\Delta_{Ch} := 22.57\,in$$

5. The load P is now assumed to be removed fro mthe rib, and a real horizontal force of 1 k is assumed to act toward the right at C in conjunction with the ficticious force of 1 k acting to the right at the same point. The horizontal displacement of C will be given by

$$\delta_{ChCh} = 2\cdot\int_C^B \delta\cdot\overline{M}\cdot\frac{\overline{M}}{EI}\,ds + 2\cdot\int_C^B \delta\cdot\overline{V}\cdot\frac{\overline{V}}{A_W\cdot G}\,ds + 2\cdot\int_C^B \delta\cdot\overline{N}\cdot\frac{\overline{N}}{AE}\,ds = 2.309\,in + 0.002\,in + 0.002\,in$$

$\delta_{\sim\sim} := 2.313\,in$

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\delta_{ChCh} := 2.309\,in$

6. The value of the horizontal reaction component will be

$$H_C := \frac{\Delta_{Ch}}{\delta_{ChCh}} \cdot kip = 9.76 \cdot kip$$

7. If only flexural strains are considered, the result would be

$$H_{C_{flex}} := \frac{22.55\,in}{2.309\,in} \cdot kip = 9.77 \cdot kip$$

Comments

1. For the given rib and the single concentrated load at the center of the span it is obvious that the effects of shearing and axial strains are insignificant and can be disregarded.
2. Eroneous conclusions as to the relative importance of shearing and axial strains in the usual solid rib may be drawn, however, from the values in the equation for Δ_{Ch}. These indicated that the effects of the shearing strains are much more significant thatn those of the axial strains. This is actually the case for the single concentrated load chosen for the demonstration, but only because the rib does not approximate the funicular polygon for the single load. As a result, the shearing components on most sections of the rib are more important than would otherwise be the case.
3. The usual arch encountered in practice, however, is subjected to a series of loads, and the axis of the rib will approximate the funicular polygon for these loads. In other words, the line of pressure is nearly perpindicular to the right section at all points along the rib. Consequently, the shearing components are so small that the shearing strains are insignificant and are neglected
4. Axial strains, resulting in rib shortening, become increasingly important as the rise-to-span ratio of the arch decreases. It is advisable to determine the effects of the rib by considering flexural strains only, and then to check for effects or rib shortening.

11.4 Semi-Circular Box Girder

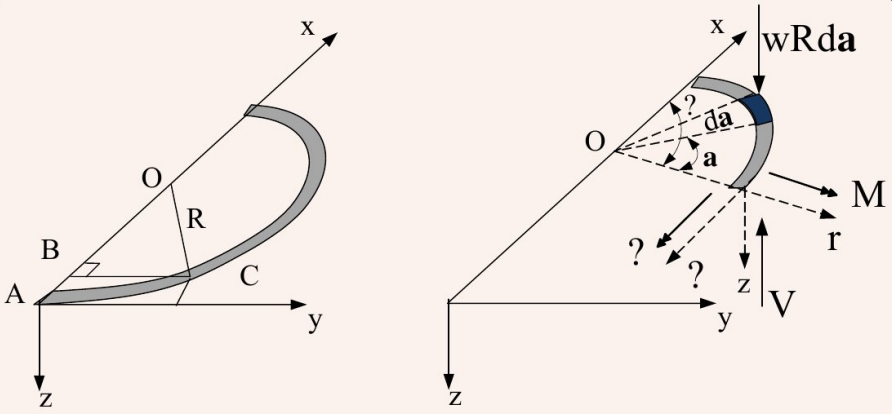
Determine the reactions of the semi-circular cantilevered box girder subjected to its own weight w.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

Reactions are again determined first

From geometry we have OA=R, OB=Rcosθ, CD = BA = OA - OB = R - Rcosθ, EB = R(1+cosθ) and BC = Rsinθ. The moment arms for the moments with respect to the x and y axis are BC and EB respectively. Applying three equations of equilibrium we obtain

$$F_z^A - \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} wR\,d\theta = 0 \qquad \boxed{F_z^A = wR\pi}$$

$$M_z^A - \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} wR\,d\theta \cdot R \cdot \sin\theta = 0 \qquad \boxed{M_z^A = 2 \cdot w \cdot R^2}$$

$$M_y^A - \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} wR\,d\theta \cdot R \cdot (1 + \cos\theta) = 0 \qquad \boxed{M_y^A = -w \cdot R^2 \cdot \pi}$$

Internal Forces are determined next

1. Shear Force:

$$\sum F_z = 0 \qquad V - \int_0^{\theta} wR\,d\alpha = 0$$

$$\boxed{V = wR\theta}$$

2. Bending Moment:

$$\sum M_R = 0 \qquad M - \int_0^{\theta} wR\,d\alpha \cdot R \cdot \sin\alpha = 0$$

$$\boxed{M = wR^2 \cdot (1 - \cos\theta)}$$

3. Torsion:

$$\sum M_\theta = 0 \qquad T + \int_0^{\theta} wR\,d\alpha \cdot R \cdot (1 - \cos\alpha) = 0$$

$$\boxed{T = -wR^2 \cdot (\theta - \sin\theta)}$$

Deflection are determined last

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

We assume a rectangular cross-section of width b and heigh d=2b and a Poisson's ratio of $\nu := 0.3$

1. Noting that the member will be subjected to both flexural and torsional deformations, we seek to determine the two stiffnesses.

2. The flexural stiffness EI is given by $EI = E\cdot\frac{b\cdot d^3}{12} = \frac{2Eb^4}{3}$

3. The torsional stiffness of solid rectangular sections $J = kb^3\cdot d$ where b is the shorter side of the section, d is the longer,

   and k is a factor equal to 0.229 for d/b=2. Hence $G = \frac{E}{2\cdot(1+\nu)} = \frac{E}{2.6}$, and $GJ = \frac{E}{2.6}\cdot 0.229\cdot b^4 = 0.176E\cdot b^4$.

4. Considering both flexural and torsional deformations, and replacing dx by rdθ:

$$\delta\cdot\overline{M}\cdot\Delta = \int_0^{\pi}\delta\cdot\overline{M}\cdot\frac{M}{EI_z}\cdot R\,d\theta + \int_0^{\pi}\delta\cdot\overline{T}\cdot\frac{T}{GJ}\cdot R\,d\theta$$

   where the real moments were given above.

5. Assuming a virtual downward force $\delta\cdot\overline{P} = 1$, we have

$$\delta\cdot\overline{M} = R\cdot\sin\theta$$

$$\delta\cdot\overline{T} = -R\cdot(1-\cos\theta)$$

6. Substituting these expressions into the equation for displacement (in 4)

$$1\cdot\Delta = \frac{w\cdot R^2}{EI}\cdot\int_0^{\pi}(R\cdot\sin\theta)\cdot(1-\cos\theta)\cdot R\,d\theta + \frac{w\cdot R^2}{GJ}\cdot\int_0^{\pi}(\theta-\sin\theta)\cdot R\cdot(1-\cos\theta)\cdot R\,d\theta$$

$$1\cdot\Delta = \frac{w\cdot R^4}{EI}\cdot\int_0^{\pi}\left[(\sin\theta-\sin\theta\cdot\cos\theta) + \frac{1}{0.265}\cdot(\theta-\theta\cdot\cos\theta-\sin\theta+\sin\theta\cdot\cos\theta)\right]\,d\theta$$

$$\boxed{\Delta = 20.56\cdot\frac{w\cdot R^4}{EI}}$$

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

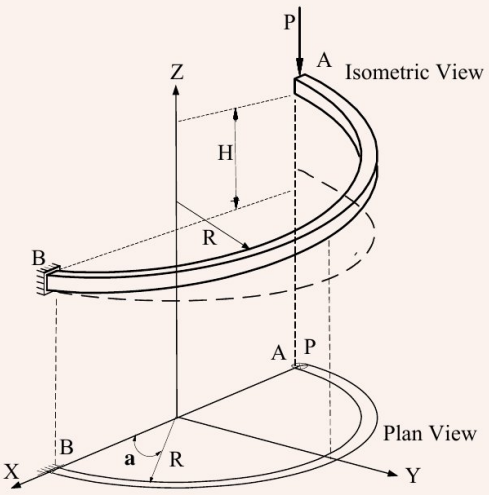
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

11.5 Internal Forces in an Helicoidal Cantilevered Girder, Point Load

Determine the internal forces N, V_s, and V_w and the internal moments T, M, and M_w along the helicoidal cantilevered girder.



Solution:

1. We first determine the geometry in terms of the angle θ

$$x(R,\theta) := R\cdot\cos(\theta) \qquad y(R,\theta) := R\cdot\sin(\theta) \qquad z(H,\theta) := \frac{H}{\pi}\cdot\theta$$

2. To determine the unit vector **n** at any point we need the derivatives

$$dx(R,\theta) := \frac{\partial}{\partial\theta}x(R,\theta) \rightarrow -R\cdot\sin(\theta) \qquad dy(R,\theta) := \frac{\partial}{\partial\theta}y(R,\theta) \rightarrow R\cdot\cos(\theta) \qquad dz(H,\theta) := \frac{\partial}{\partial\theta}z(H,\theta) \rightarrow \frac{H}{\pi}$$

and then determine the unit vector

$$\mathbf{n} = \frac{-R\cdot\sin(\theta)\mathbf{i} + R\cdot\cos(\theta)\cdot\mathbf{j} + \frac{H}{\pi}\cdot\mathbf{k}}{\left[R^2\cdot(\sin\theta)^2 + R^2\cdot(\cos\theta)^2 + \left(\frac{H}{\pi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{H}{\pi\cdot R}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\cdot\left[-\sin\theta\cdot\mathbf{i} + \cos\theta\cdot\mathbf{j} + \left(\frac{H}{\pi\cdot R}\right)\cdot\mathbf{k}\right]$$

Since the denominator depends only on the geometry, it will be designated K.

3. The strong bending axis lies in a horizontal plane, and its unit vector can thus be determined

$$\mathbf{n}\times\mathbf{k} = \frac{1}{K}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -\sin\theta & \cos\theta & \frac{H}{\pi\cdot R}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{K}\cdot\left(\cos\theta\cdot\mathbf{i} + \sin\theta\cdot\mathbf{j}\right)$$

and the absolute magnitude of this vector $\left|\mathbf{n}\times\mathbf{k}\right| = \frac{1}{K}$, and thus

$$\mathbf{s} = \cos\theta\cdot\mathbf{i} + \sin\theta\cdot\mathbf{i}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

4. The unit vector along the weak axis is determined

$$\mathbf{w} = \mathbf{s} \times \mathbf{n} = \frac{1}{K} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & \frac{H}{\pi \cdot R} \end{pmatrix} = \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{H}{\pi \cdot R} \cdot \sin\theta \cdot \mathbf{i} - \frac{H}{\pi \cdot R} \cdot \cos\theta \cdot \mathbf{j} + \mathbf{k} \right)$$

5. With the geometry definition completed, we now examine the equilibrium equations.

$$\sum F = 0 \qquad \mathbf{F} = -\mathbf{P}$$

$$\sum M_b = 0 \qquad \mathbf{M} = -\mathbf{L} \times \mathbf{P}$$

where

$$\mathbf{L} = (R - R \cdot \cos\theta) \cdot \mathbf{i} + (0 - R \cdot \sin\theta) \cdot \mathbf{j} + \left(0 - \frac{\theta}{\pi} \cdot H\right) \cdot \mathbf{k}$$

and

$$\mathbf{M} = \mathbf{L} \times \mathbf{P} = R \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 - \cos\theta & -\sin\theta & \frac{-\theta}{\pi} \cdot \frac{H}{R} \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} = PR \cdot \left[-\sin\theta \cdot \mathbf{i} - (1 - \cos\theta) \cdot \mathbf{j} \right]$$

and

$$\mathbf{M} = PR \cdot \left[\sin\theta \cdot \mathbf{i} + (1 - \cos\theta) \cdot \mathbf{j} \right]$$

6. Finally, the components of the force $\mathbf{F} = -Pk$ and the moment $\mathbf{M}$ are obtained by appropriate dot products with the unit vectors

$$N = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{K} \cdot P \cdot \frac{H}{\pi \cdot R}$$

$$V_s = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = 0$$

$$V_w = \mathbf{F} \cdot \mathbf{w} = -\frac{1}{K} \cdot P$$

$$T = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = -\frac{PR}{K} \cdot (1 - \cos\theta)$$

$$M_s = \mathbf{M} \cdot \mathbf{s} = PR \cdot \sin\theta$$

$$M_w = \mathbf{M} \cdot \mathbf{w} = -\frac{PH}{\pi \cdot K} \cdot (1 - \cos\theta)$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

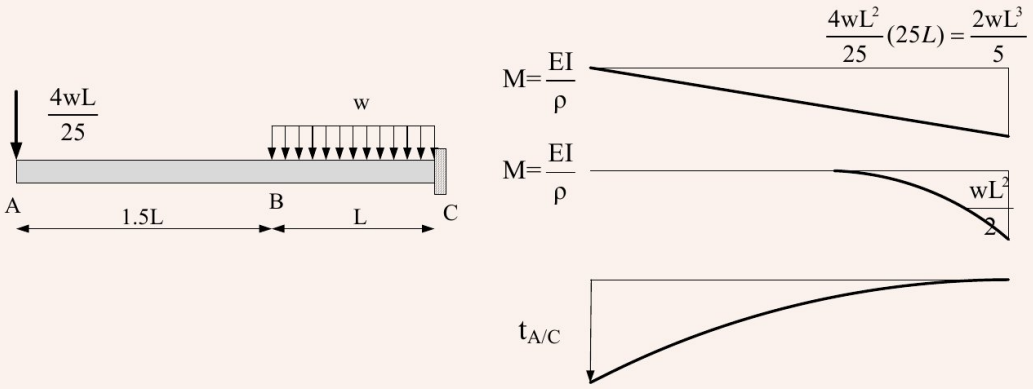
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

12.1 Moment Area, Cantilevered Beam

Determine the deflection at Point A



Solution:

$$EIt_{AC} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-2w\cdot L^2}{5}\right)\cdot\left(\frac{5L}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5L}{2}\right) + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{-w\cdot L^2}{2}\right)\cdot L\cdot\left(\frac{9L}{4}\right) = \frac{-29w\cdot L^4}{24}$$

Thus,

$$\Delta_A = \frac{-29w\cdot L^4}{24\cdot E\cdot I}$$

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

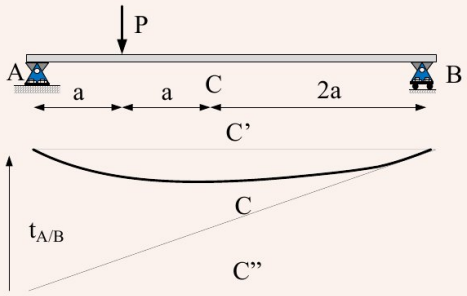
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

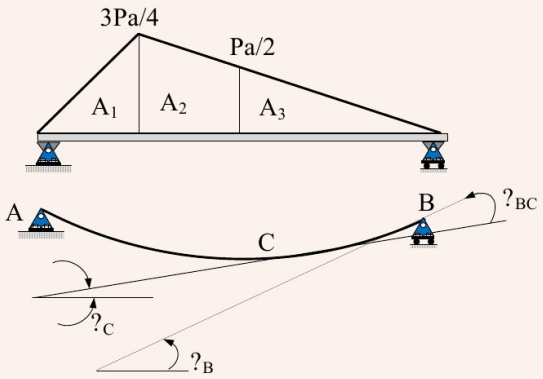
COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

12.2 Moment Area, Simply Supported Beam

Determine Δ_C and θ_C for the following example





Solution:

Deflection Δ_C is determined from $\Delta_C = c'\cdot c = c'\cdot c'' - c''\cdot c,\ c''\cdot c = t_{CB}$, and $c'\cdot c'' = \frac{t_{AB}}{2}$

$$t_{AB} = \frac{1}{EI}\cdot\left[\left(\frac{3P\cdot a}{4}\right)\cdot\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\left(\frac{2a}{3}\right) + \left(\frac{3P\cdot a}{4}\right)\cdot\left(\frac{3a}{2}\right)\cdot\left(a + \frac{3a}{3}\right)\right] = \frac{5P\cdot a^3}{2\cdot E\cdot I}$$

This is positive, thus above tangent from B

$$t_{CB} = \frac{1}{E\cdot I}\cdot\left(\frac{P\cdot a}{2}\right)\cdot\left(\frac{2a}{2}\right)\cdot\left(\frac{2a}{3}\right) = \frac{P\cdot a^3}{3\cdot E\cdot I}$$

Positive, thus above tangent from B. Finally,

$$\boxed{\Delta_C = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5P\cdot a^3}{2\cdot E\cdot I}\right) - \frac{P\cdot a^3}{3\cdot E\cdot I} = \frac{11}{12}\cdot\frac{P\cdot a^3}{E\cdot I}}$$

Rotationa θ_C is

$$\theta_{BC} = \theta_B - \theta_C \Rightarrow \theta_C = \theta_B - \theta_{BC}$$

$$\theta_{BC} = A_3$$

$$\theta_B = \frac{t_{AB}}{L}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

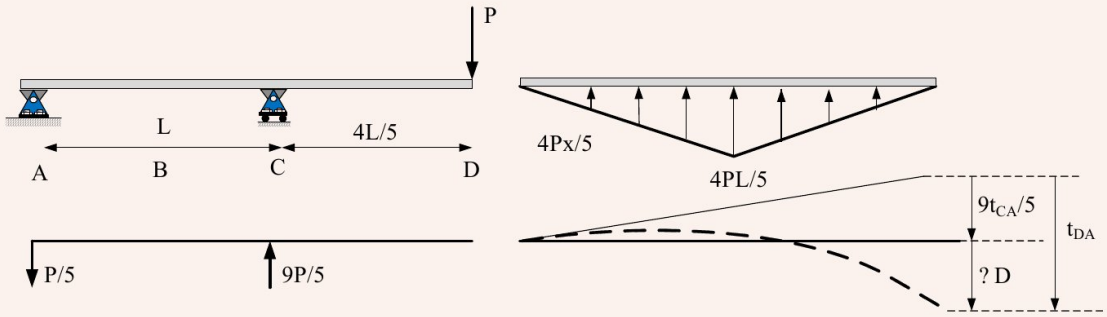
COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\theta_C = \frac{5P\cdot a^3}{2\cdot E\cdot I}\cdot\frac{1}{4a} - \left(\frac{P\cdot a}{2}\right)\cdot\left(\frac{2a}{2}\right) = \frac{P\cdot a^2}{8E\cdot I}$$

12.3 Maximum Deflection

Determine the deflection at D and the maximum deflection at B



Solution:

Deflection at D:

$$\Delta_D = t_{DA} - \frac{9}{5}\cdot t_{CA}$$

$$EIt_{CA} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-4P\cdot L}{5}\right)\cdot L\cdot\left(\frac{L}{3}\right) = \frac{-2P\cdot L^3}{15}$$

$$t_{CA} = \frac{-2P\cdot L^3}{15E\cdot I}$$

$$EIt_{DA} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-4P\cdot L}{5}\right)\cdot L\cdot\left(\frac{17L}{15}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-4P\cdot L}{5}\right)\cdot\left(\frac{4L}{5}\right)\cdot\left(\frac{8L}{15}\right) = \frac{-234P\cdot L^3}{375}$$

$$t_{DA} = \frac{-234P\cdot L^3}{375E\cdot I}$$

Substituting we obtain

$$\Delta_D = \frac{-48}{125}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Maximum Deflection at B:

$$t_{CA} = \frac{-2P\cdot L^3}{15E\cdot I}$$

$$\theta_A = \frac{t_{CA}}{L} = \frac{-2P\cdot L^2}{15E\cdot I}$$

$$\theta_{AB} = \frac{1}{E\cdot I}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4P\cdot x}{5}\right)\cdot x\right] = \frac{-2}{5}\cdot\frac{P\cdot x^2}{E\cdot I}$$

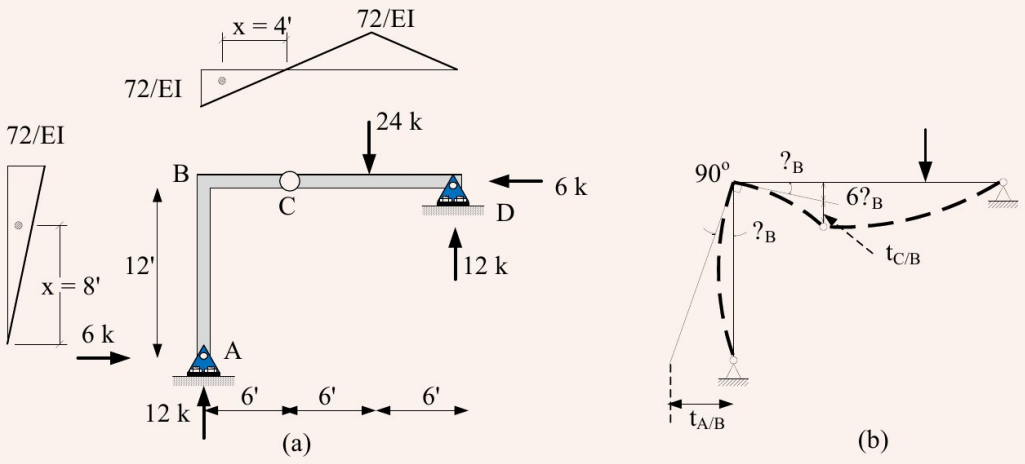
$$\theta_A = \theta_{AB} \Rightarrow \frac{-2P\cdot L^2}{15E\cdot I} = \frac{-2}{5}\cdot\frac{P\cdot x^2}{E\cdot I} \qquad x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$\Delta_{max} = \left(\frac{4P\cdot x}{5\cdot E\cdot I}\right)\cdot\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\frac{2x}{3}\right) \text{ at } x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\Delta_{max} = \frac{4\cdot P\cdot L^3}{45\cdot\sqrt{3}\cdot E\cdot I}}$$

12.4 Frame Deflection

Complete the following example problem

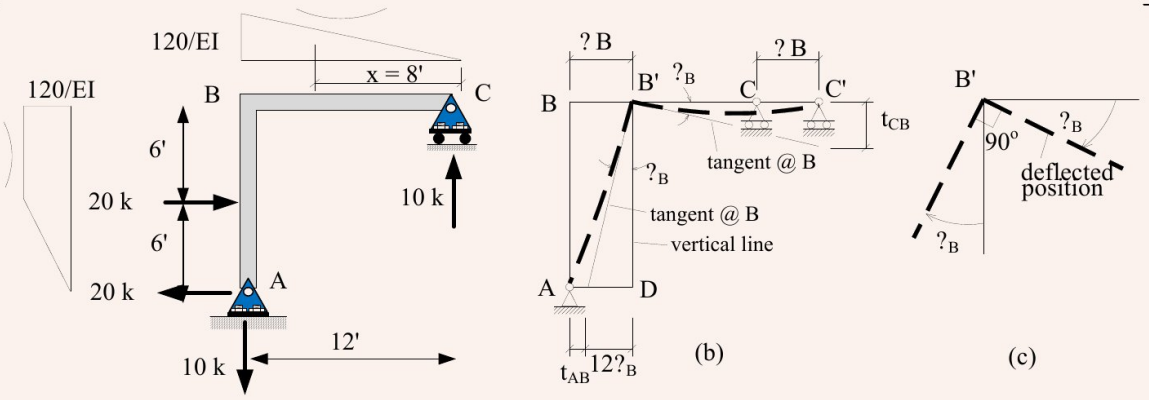


I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

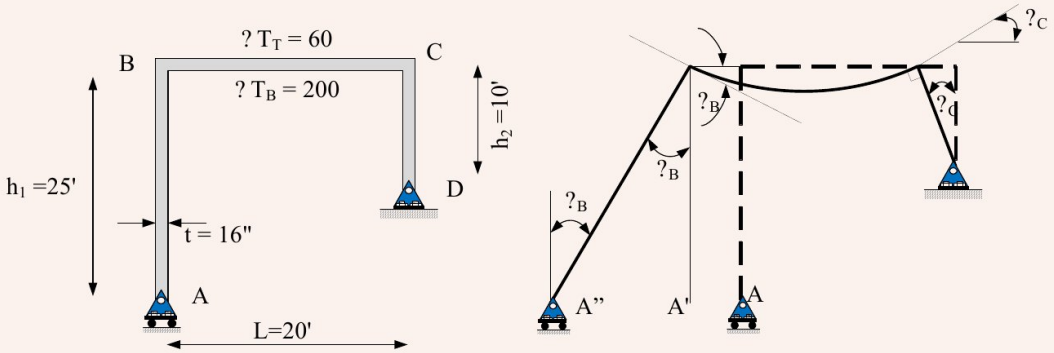
COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



12.5 Frame Subjected to Temperature Loading

Neglecting axial deformation, compute displacement at A for the following frame



Solution:

1. First let us sketch the deformed shape

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

2. BC flexes => $\theta_B = \theta_C \neq 0$
3. Rigid hinges at B and C with no load on AB and CD
4. Deflection at A

$$\Delta_A = A\cdot A'' = A\cdot A' + A'\cdot A''$$

$$A\cdot A' = \Delta_B = \Delta_C = \left|\theta_C\right|\cdot h_2$$

$$A'\cdot A'' = \left|\theta_B\right|\cdot h_1$$

5. We need to compute θ_B and θ_C

$$\theta_B = \frac{t_{CB}}{L}$$

$$\theta_C = \theta_{CB} + \theta_B \text{ OR } \theta_C = \frac{t_{BC}}{L}$$

6. In order to apply the curvature area theorem, we need a curvature (or moment diagram)

$$\frac{1}{\rho} = \alpha\cdot\left(\frac{T_B - T_T}{h}\right) = \frac{M}{E\cdot I}$$

7.

$$t_{CB} = A\cdot\frac{L}{2} \Rightarrow \left|\theta_B\right| = A\cdot\left(\frac{L}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{L}\right) = \frac{A}{2} \text{ OR } \theta_B = \frac{-A}{2}$$

8.

$$\theta_{CB} = A$$

$$\theta_C = \theta_{CB} + \theta_B$$

$$\theta_C = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2}$$

9. From above

$$\Delta_A = \left|\theta_C\right|\cdot h_2 + \left|\theta_B\right|\cdot h_1 = \frac{A}{2}\cdot h_2 + \frac{A}{2}\cdot h_1 = \frac{A}{2}\left(h_1 + h_2\right)$$

$$A = \alpha\cdot\left(\frac{T_B - T_T}{h}\right)\cdot L$$

$$\Delta_A = \alpha\cdot\left(\frac{T_B - T_T}{h}\right)\cdot L\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(h_1 + h_2\right)$$

10. Substitute

$$\Delta_A := \left(6.5\cdot 10^{-6}\right)\cdot(200 - 60)\cdot\frac{20\text{ft}}{16\text{in}}\cdot\frac{1}{2}\cdot 35\text{ft}$$

$$\boxed{\Delta_A = 2.867\cdot\text{in}}$$

11. Other numerical values

$$\theta_B = \theta_C = \frac{A}{2}$$

$$\theta_B := \frac{1}{2}\left(6.5\cdot 10^{-6}\right)\cdot\left(\frac{200 - 60}{16\text{in}}\right)\cdot 20\text{ft} = 0.006825\cdot\text{rad}$$

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\theta_C := \theta_B = 0.006825$

$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho} = \alpha \cdot \left(\frac{T_B - T_T}{h} \right)$$

$$\rho := \frac{1}{\left[\left(6.5 \cdot 10^{-6} \right) \cdot \left(\frac{200 - 60}{16\text{in}} \right) \right]} = 1465.2 \cdot \text{ft}$$

12. In order to get M, we need E and I. Note the difference with other statically determinate structures; the stiffer the beam, the higher the moment; the higher the moment, the higher the stress? NO!!

13. $$\sigma = \frac{M \cdot y}{I} = \frac{E \cdot I}{\rho} \cdot \frac{y}{I} = \frac{E \cdot y}{\rho}$$

14. ρ is constant => BC is on arc of circle M is constant and $\frac{M}{EI} = \frac{d^2 \cdot y}{dx^2}$ => $\frac{d^2 \cdot y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = c$ => $y = \frac{cx^2}{2} + dx + e$

15. The slope is a parabola

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{\frac{d^2 \cdot y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

Let us get curvature from the parabola slope and compare it with ρ

$$y = \frac{cx^2}{2} + dx + e$$

$$\frac{dy}{dx} = cx + d$$

$$\frac{d^2 \cdot y}{dx^2} = c$$

at x=0, y=o, thus e=0

at x=0, $\frac{dy}{dx} = \theta_B = -0.006825\text{rad}$, thus $d = -0.006825\text{rad}$

at x=20 ft, $\frac{dy}{dx} = \theta_C = 0.006825\text{rad}$, thus $c(20\text{ft}) - 0.006825 = 0.006825$, thus $c = 6.825 \cdot 10^{-4}$

$$y = 6.825 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - 10x \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 6.825 \cdot 10^{-4} \cdot (x - 10)$$

$$\frac{d^2 \cdot y}{dx^2} = 6.825 \cdot 10^{-4}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\phi := 6.825 \cdot 10^{-4}$$

$$\rho := \frac{1}{\phi} \cdot ft = 1465.2 \cdot ft \quad \text{as expected!}$$

If we were to use the exact curvature formula $\dfrac{\dfrac{d^2 \cdot y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$

$$\phi := \frac{6.825 \cdot 10^{-4}}{\left[1 + (0.006825)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = 0.000682$$

$$\rho := \frac{1}{\phi} \cdot ft = 1465.3 \cdot ft$$

12.6 Conjugate Beam

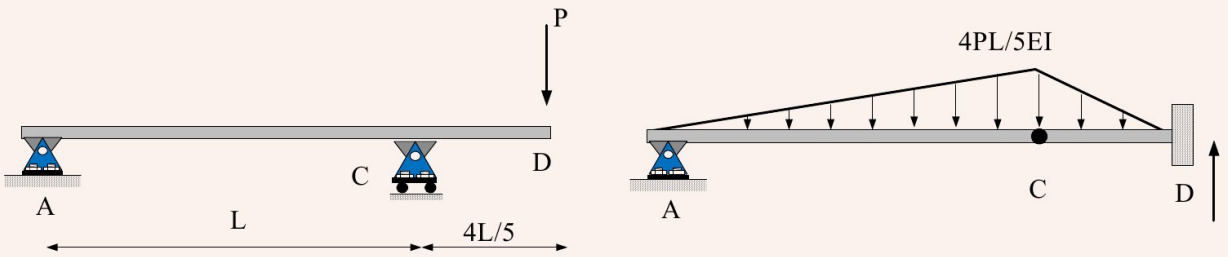
I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Analyze the following beam



Solution:

3 equations of equilibrium and 1 equation of condition = 4 = number of reactions. Deflection at D = Shear at D of the corresponding conjugate beam (Reaction at D) Take AC and ΣM with respect to C

$$R_A \cdot (L) - \left(\frac{4P \cdot L}{5E \cdot I}\right) \cdot \left(\frac{L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{3}\right) = 0$$

$$R_A = \frac{2 \cdot P \cdot L^3}{15E \cdot I}$$

(Slope in real beam at A) As computed before. Let us dram the moment diagram for the conjugate beam

$$M = \frac{P}{EI} \cdot \left(\frac{2}{15} \cdot L^2 \cdot x - \frac{2}{15} \cdot x^3\right) = \frac{2 \cdot P}{15 \cdot E \cdot I} \cdot \left(L^2 \cdot x - x^3\right)$$

Point of maximum moment (Δ_{max}) occurs when $\frac{dM}{dx} = 0$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{2 \cdot P}{15 \cdot E \cdot I} \cdot \left(L^2 - 3x^2\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

as previously determined

$$x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$M = \frac{2 \cdot P}{15 \cdot E \cdot I} \cdot \left[L^2 \cdot \left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^3\right]$$

$$M = \frac{4P \cdot L^3}{45 \cdot \sqrt{3} \cdot E \cdot I}$$ as before

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

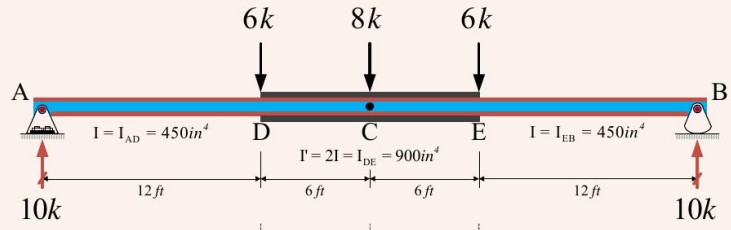
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

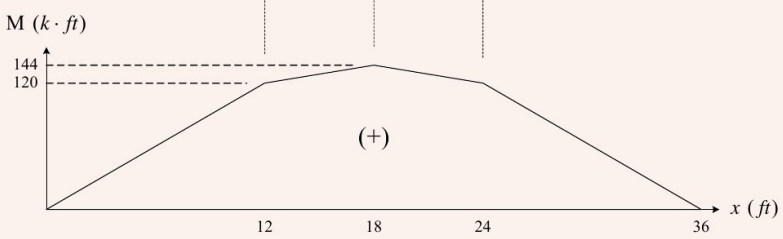
COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

12.7 Conjugate Beam

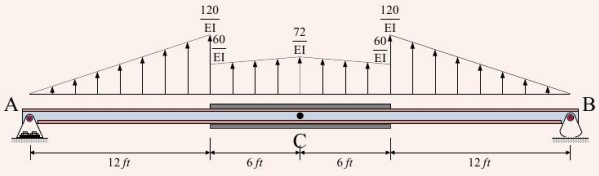
Analyze the following beam

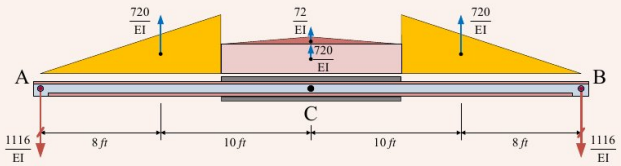


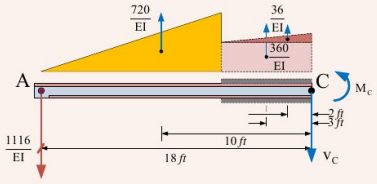


Solution:

From simple observation, the reactions at A and B are equal to 10 k. The elastic load on the conjugate beam is then shown below.







We next seek to determine the internal moment at C' in the conjugate beam. It is obtained from equilibrium:

$$\sum M_z^B = 0 \qquad \frac{1116\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 18ft - \frac{720\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 10ft - \frac{360\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 3ft - \frac{36\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 2ft + M_{C'} = 0$$

$E := 29\cdot 10^3 ksi$

$I := 450in^4$

$\Delta_C = M_{C'}$

$$\Delta_{C'} := \frac{720\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 10ft + \frac{360\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 3ft + \frac{36\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 2ft - \frac{1116\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 18ft = -1.554\cdot in$$

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

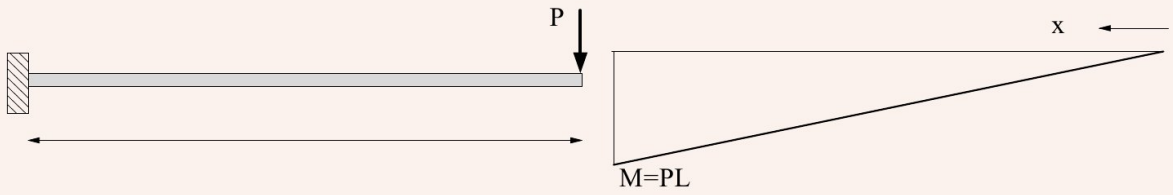
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.1 Deflection of a Cantilever Beam

Determine the deflection of the cantilever beam with span L under a point load P at its free end. Assume constant EI.



Solution:

$$W_e = \frac{1}{2}\cdot P\cdot \Delta_f$$

$$U = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2\cdot E\cdot I}\,dx$$

$$M = -P\cdot x$$

$$U(P, L, EI) := \frac{P^2}{2\cdot EI}\cdot \int_0^L x^2\,dx \rightarrow \frac{L^3\cdot P^2}{6\cdot EI}$$

$$\frac{1}{2}\cdot P\cdot \Delta_f = \frac{L^3\cdot P^2}{6\cdot EI}$$

$$\boxed{\Delta_f = \frac{P\cdot L^3}{3\cdot EI}}$$

Note that the solution of this problem was facilitated by the fact that Δ_f is co-alligned with P.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

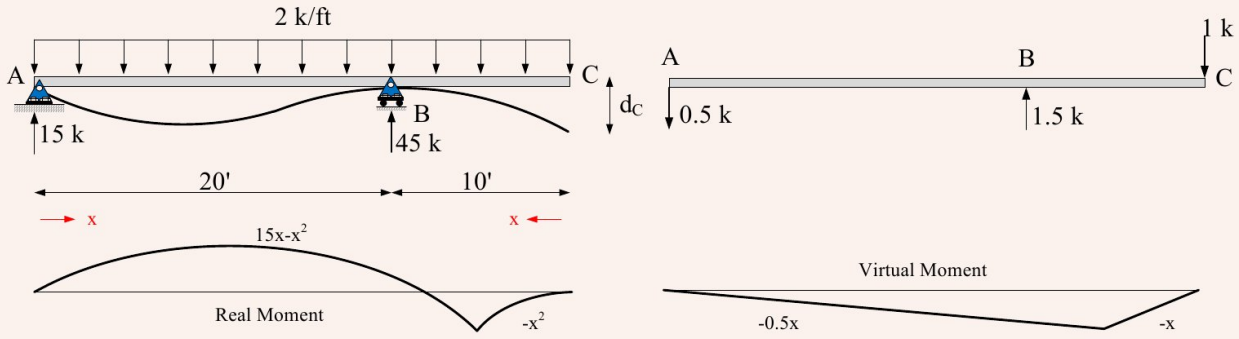
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.2 Beam Deflection

Determine the deflection at point C. $E := 29000ksi$, $I := 100in^4$



Solution:

For the virtual force method, we need to have two expressions for the moment, one due to the real load, and the other to the (unit) virtual one.

Element	x = 0	M	δM
AB	A	$15x - x^2$	- 0.5x
BC	C	$- x^2$	- x

For the virtual force method, we need to have two expressions for the moment, one due to the real load, and the other to the (unit) virtual one.

$$\Delta_C \cdot \bar{\delta} \cdot \bar{P} = \int_0^L \bar{\delta} \cdot \bar{M} \cdot \frac{M(x)}{EI_z}\, dx$$

$$1 \cdot \Delta_C = \int_0^{20} (-0.5x) \cdot \left(\frac{15x - x^2}{EI} \right) dx + \int_0^{10} (-x) \cdot \left(\frac{-x^2}{EI} \right) dx$$

$$\Delta_C(EI) := \int_0^{20} (-0.5x) \cdot \left(\frac{15x - x^2}{EI} \right) dx + \int_0^{10} (-x) \cdot \left(\frac{-x^2}{EI} \right) dx \rightarrow \frac{2500}{EI}$$

$$\Delta_C := \frac{2500kip \cdot ft^3}{E \cdot I} = 1.49 \cdot in$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

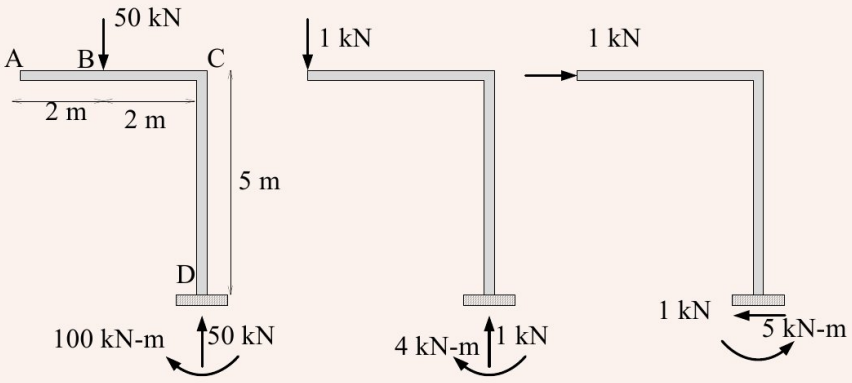
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

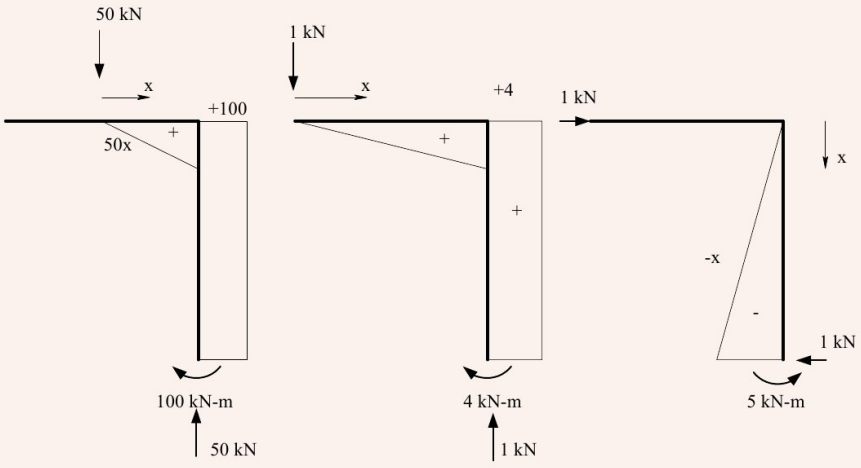
13.3 Deflection of a Frame

Determine both the vertical and horizontal deflection at A for the frame shown. $E := 200 \cdot 10^6 \frac{kN}{m^2}$, $I := 200 \cdot 10^6 mm^4$



Solution:

To analyze the frame we must determine analytical expressions for the moments along each member for the real load and the two virtual ones. One virtual load is a unit horizontal load at A, and the other a unit vertical one at A



Element	x = 0	M	δM_v	δM_h
AB	A	0	- x	0
BC	B	- 50x	- 2 - x	0
CD	C	100	4	- x

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Note that moments are considered positive when they produce compression on the inside of the frame. Substitution yields:

$$\Delta_v \cdot \delta \cdot \bar{P} = \int_0^L \delta \cdot \overline{M}(x) \cdot \frac{M(x)}{EI_z}\, dx$$

$$1\Delta_v = \int_0^2 -x \cdot \frac{(0)}{EI}\, dx + \int_0^2 (-2 - x) \cdot \frac{(-50x)}{EI}\, dx + \int_0^5 4 \cdot \frac{100}{EI}\, dx$$

$$\Delta_v(EI) := \int_0^2 -x \cdot \frac{(0)}{EI}\, dx + \int_0^2 (-2 - x) \cdot \frac{(-50x)}{EI}\, dx + \int_0^5 4 \cdot \frac{100}{EI}\, dx \rightarrow \frac{7000}{3 \cdot EI}$$

$$\Delta_v := \frac{7000 kN \cdot m^3}{3 \cdot E \cdot I} = 5.833 \cdot cm$$

Similarly for the horizontal displacement

$$\Delta_h \cdot \delta \cdot \bar{P} = \int_0^L \delta \cdot \overline{M}(x) \cdot \frac{M(x)}{EI_z}\, dx$$

$$1\Delta_h = \int_0^2 0 \cdot \frac{(0)}{EI}\, dx + \int_0^2 (0) \cdot \frac{(-50x)}{EI}\, dx + \int_0^5 -x \cdot \frac{100}{EI}\, dx$$

$$\Delta_h(EI) := \int_0^2 0 \cdot \frac{(0)}{EI}\, dx + \int_0^2 (0) \cdot \frac{(-50x)}{EI}\, dx + \int_0^5 -x \cdot \frac{100}{EI}\, dx \rightarrow -\frac{1250}{EI}$$

$$\Delta_h := \frac{-1250 kN \cdot m^3}{E \cdot I} = -3.125 \cdot cm$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

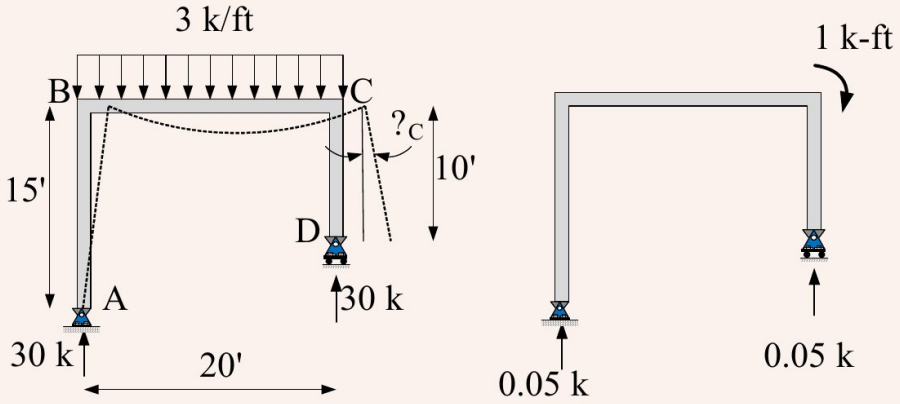
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.4 Rotation of a Frame

Determine the rotation of joint C for the frame shown. $E := 29000\text{ksi}$, $I := 240\text{in}^4$



Solution:

In this problem the virtual force is a unit moment applied at joint C, $\delta\cdot\overline{M_e}$. It will cause an internal moment $\delta\cdot\overline{M_i}$.

Element	x = 0	M	δM
AB	A	0	0
BC	B	$30x - 1.5x^2$	- 0.05x
CD	D	0	0

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Note that moments are considered positive when they produce compression on the outside of the frame. Substitution yields:

$$\theta_C \cdot \delta \cdot \overline{M_e} = \int_0^L \delta \cdot \overline{M} \cdot \frac{M(x)}{EI_z}\, dx$$

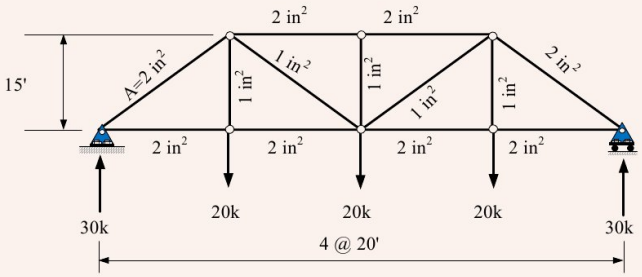
$$1 \cdot \theta_C = \int_0^{20} (-0.05x) \cdot \left(\frac{30x - 1.5x^2}{EI} \right) dx$$

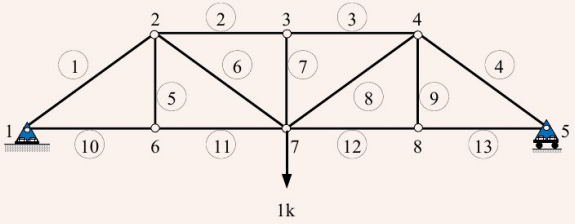
$$\theta_C(EI) := \int_0^{20} (-0.05x) \cdot \left(\frac{30x - 1.5x^2}{EI} \right) dx \rightarrow -\frac{1000}{EI}$$

$$\theta_C := \frac{-1000\,kip \cdot ft^2}{E \cdot I} = -0.021 \cdot rad$$

13.5 Truss Deflection

Determine the vertical deflection of joint 7 in the truss shown $E := 30000ksi$





Solution:

Two analyses are required. One with the real load, and the other using a unit vertical load at joint 7. Results for those analyses are summarized below. Note that advantage was taken of the symmetric load and structure.

Member	A in^2	L ft	P^e kip	δP kip	δPPL/A $k\text{-}ft/in^2$	n	nδPPL/A $k\text{-}ft/in^2$
1 & 4	2	25	-50	-0.083	518.75	2	1037.5
10 & 13	2	20	40	0.67	268	2	536
11 & 12	2	20	40	0.67	268	2	536
5 & 9	1	15	20	0	0	2	0
6 & 8	1	25	16.7	0.83	346.5	2	693
2 & 3	2	20	-53.3	1.33	708.9	2	1417.8

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Member	A in^2	L ft	P^e kip	δP kip	δPPL/A $k\text{-}ft/in^2$	n	nδPPL/A $k\text{-}ft/in^2$
1 & 4	2	25	-50	-0.083	518.75	2	1037.5
10 & 13	2	20	40	0.67	268	2	536
11 & 12	2	20	40	0.67	268	2	536
5 & 9	1	15	20	0	0	2	0
6 & 8	1	25	16.7	0.83	346.5	2	693
2 & 3	2	20	-53.3	-1.33	708.9	2	1417.8
7	1	15	0	0	0	1	0
Total							4220.3

$$\Delta\cdot\delta\cdot\bar{P} = \int_0^L \delta\cdot\bar{P}\cdot\frac{P}{A\cdot E}\,dx$$

$$1\cdot\Delta = \Sigma\delta\cdot\bar{P}_e\cdot\frac{P_e\cdot L}{A\cdot E}$$

$$\Delta := \frac{4220.3\,\frac{kip\cdot ft}{in^2}}{E} = 1.688\cdot in$$

13.6 Torsional and Flexural Deformation

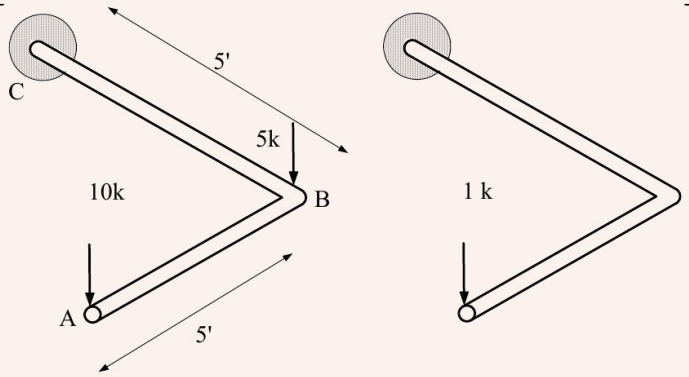
Determine the vertical deflection at A in the structure shown. $E := 30000ksi$, $I := 144in^4$, $G := 12000ksi$, $J := 288in^4$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

1. In this problem we have both flexural and torsional deformation. Hence we should determine the internal moment and torsion distribution for both the real and the unit virtual load.
2. Then we will use the following relation

$$\bar{\delta}\cdot\bar{P}\cdot\Delta_A = \int \bar{\delta}\cdot\bar{M}\cdot\frac{M}{EI}\,dx + \int \bar{\delta}\cdot\bar{T}\cdot\frac{T}{GJ}\,dx$$

3. The moment and torsion expressions are given by

Element	x = 0	M	δM	T	δT
AB	A	10x	x	0	0
BC	B	15x	x	50	5

4. Substituting

$$\bar{\delta}\cdot\bar{P}\cdot\Delta_A = \int \bar{\delta}\cdot\bar{M}\cdot\frac{M}{EI}\,dx + \int \bar{\delta}\cdot\bar{T}\cdot\frac{T}{GJ}\,dx$$

$$1\cdot\Delta_A = \int_0^5 x\cdot\frac{10x}{EI}\,dx + \int_0^5 x\cdot\frac{15x}{EI}\,dx + \int_0^5 5\cdot\frac{50}{GJ}\,dx$$

$$\Delta_A(E,I,G,J) := \int_0^5 x\cdot\frac{10x}{E\cdot I}\,dx + \int_0^5 x\cdot\frac{15x}{E\cdot I}\,dx + \int_0^5 5\cdot\frac{50}{G\cdot J}\,dx \rightarrow \frac{3125}{3\cdot E\cdot I} + \frac{1250}{G\cdot J}$$

$$\Delta_A := \frac{3125\,kip\cdot ft^3}{3\cdot E\cdot I} + \frac{1250\,kip\cdot ft^3}{G\cdot J} = 1.042\cdot in$$

13.7 Flexural and Shear Deformations in a Beam

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Determine the deflection of a cantilevered beam, of length L, subjected to an end force P due to both flexural and shear deformations. Assumed G=0.4E and a square solid beam cross section.

Solution:

1. The virtual work equation is

$$\bar{\delta}\cdot\bar{P}\cdot\Delta = \int_0^L \bar{\delta}\cdot\bar{M}\cdot(x)\cdot d\phi(x)\,dx + \int_0^L \bar{\delta}\cdot\bar{V}\cdot(x)\cdot\gamma_{xy}(x)\,dx = \int_0^L \bar{\delta}\cdot\bar{M}(x)\cdot\frac{M(x)}{EI}\,dx + \int_0^L \bar{\delta}\cdot\bar{V}(x)\cdot\lambda\cdot\frac{V(x)}{GA}\,dx$$

2. The first integral yields for M=Px, and $\bar{\delta}\cdot M = 1\cdot x$

$$\int_0^L \bar{\delta}\cdot\bar{M}(x)\cdot\frac{M(x)}{EI}\,dx = \frac{P}{EI}\cdot\int_0^L x^2\,dx$$

$$\frac{P}{EI}\cdot\int_0^L x^2\,dx \rightarrow \frac{94280057135446.5\cdot N\cdot ft^3}{EI}$$

3. The second integral represents the contribution of the shearing action to the total internal virtual work and hence to the total displacement.

4. Both the real shear V and the virtual shear $\bar{\delta}\cdot\bar{V}$ are constant along the length of the member, hence

$$\int_0^L \bar{\delta}\cdot\bar{V}(x)\cdot\lambda\cdot\frac{V(x)}{GA}\,dx = \frac{\lambda}{GA}\cdot\int_0^L 1\cdot(P)\,dx$$

$$\frac{\lambda}{GA}\cdot\int_0^L 1\cdot(P)\,dx \rightarrow \frac{374606093684.841\cdot N\cdot GPa\cdot ft}{GA}$$

5. Since $\lambda := 1.2$ for a square beam; hence

$$I = \frac{h^4}{12} \quad \text{and} \quad A = h^2$$

then

$$\Delta = \frac{P\cdot L}{3\cdot E}\cdot\left(\frac{12L^2}{h^4} + \frac{9}{h^2}\right) = \frac{3P\cdot L}{E\cdot h^2}\cdot\left(\frac{1.33L^2}{h^2} + 1\right)$$

6. Choosing $L := 20ft$ and $h := 1.5ft$ (L/h=13.3)

$$\Delta = \frac{3P\cdot L}{E\cdot h^2}\cdot\left[1.33\cdot\left(\frac{20ft}{1.5ft}\right)^2 + 1\right] = \frac{3P\cdot L}{E\cdot h^2}\cdot(237 + 1)$$

Thus the flexural deformation is 237 times the shear displacement. This comparison reveals why we normally neglect shearing deformation in beams. As the beam get shorter or deeper, or as L/h decreases, the flexural deformation decreases relative to the shear displacement. At L/h=5, the flexural deformation has reduced to $1.33\cdot 5^2 = 33.25$ times the shear displacement.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

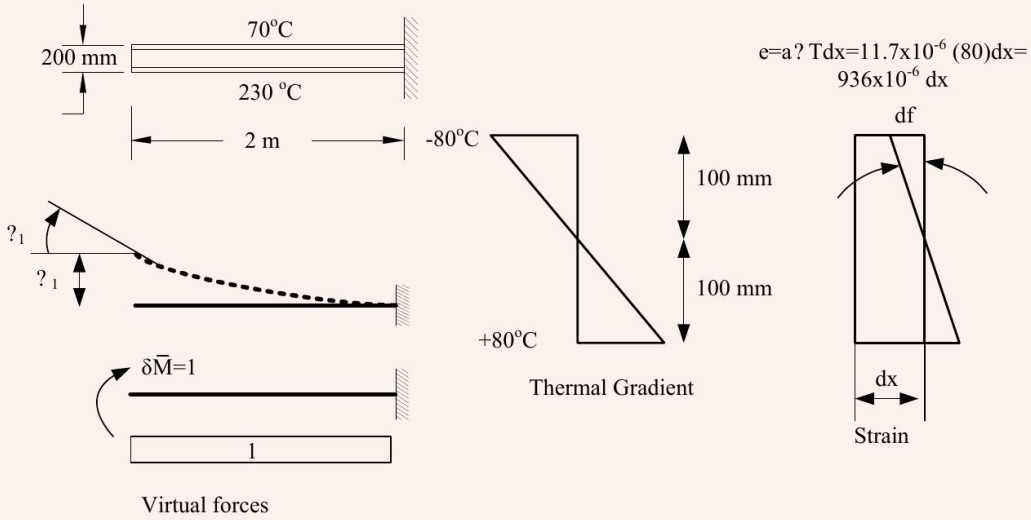
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.8 Thermal Effects in a Beam

Consider the cantilever beam shown. If the beam is a steel, wide flange section, 2 m long and 200 mm deep, what is the angle of rotation, θ_1, at the end of the beam caused by the temperature effect? The original uniform temperature of the beam was 40C.



Solution:

1. The external vurtual force conforming to the desired real displacement θ_1 is a moment $\delta\cdot\overline{M} = 1$ at the tip of the cantilever, producing an external work term of moment times rotation. The internal virtual force system for this cantilever beam is a uniform moment $\delta\cdot\overline{M_{int}} = 1$.
2. The real internal deformation results from (a) the average beam temperature of 150C, which is 110C above that of the original temperature, and (b) the temperature gradient of 160C across the depth of the beam.
3. The first part of the thermal effect produces only a lengthening of the beam and does not enter into the work equation since the virtual loading produces no axial force corresponding to an axial chnge in length of the beam.
4. The second effect (thermal gradient) produces rotation $d\phi$, and an internal virtual work term of $\int_0^L \delta\cdot\overline{M}\cdot\phi\, dx$
5. We determine the value of $d\phi$ by considering an extreme fiber thermal strain as shown above. The angular rotation in the length dx is the extreme fiber thermal strain divided by half the beam depth.

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2\cdot y}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{\varepsilon}{y} = \phi$$

$$1\cdot\theta_1 = \int_0^L \delta\cdot\overline{M}\cdot\phi\, dx$$

$$\theta_1 = \int_0^L 1\cdot\frac{\alpha\cdot\left(T_B - T_T\right)}{h}\, dx$$

$$\theta_1 := \frac{11.7\cdot10^{-6}\,\frac{m}{m}\cdot(230 - 70)\cdot 2m}{0.2m} = 0.01872\cdot rad$$

6. This example raises the following points
   a) The value of θ_1 would be the same for any shape of 200 mm deep steel beam that has its neutal axis of bending at middepth

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

b) Curvature is produced only by thermal gradient and is independent of absolute temperature values.
c) The calculation of rotations by the method of virtual forces is simple and straightforward; the applied virtual force is a moment acting at a point where rotation is to be calculated.
d) Internal angular deformation $d\phi$ has been calculated for an effect other than load-induced stresses. This extension of the method of virtual forces to treat inelastic displacements is obvious - all we need to know is a method for determining the inelastic internal deformations.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

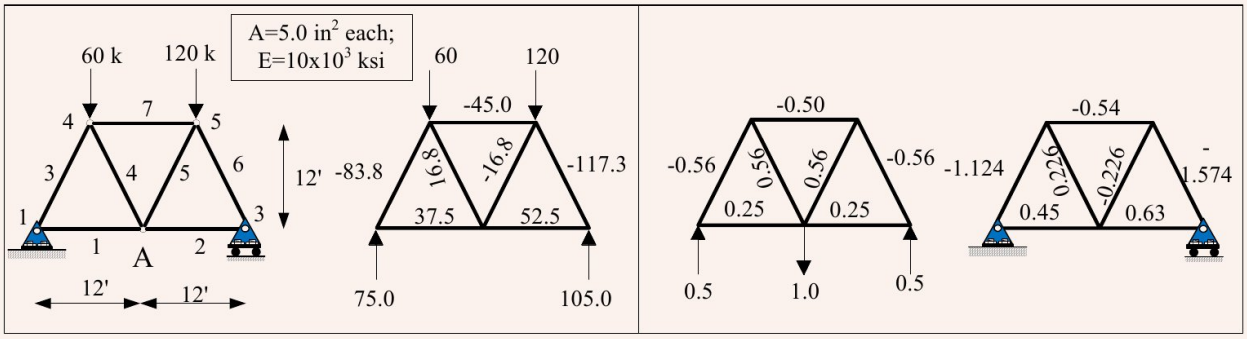
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.9 Deflection of a Truss

Determine the deflection at node 2 for the truss shown



Solution:

Member	δP kip	P^e kip	L ft	A in^2	E ksi	δPPL/AE
1	0.25	37.5	12	5	10×10^3	22.5×10^{-4}
2	0.25	52.5	12	5	10×10^3	31.5×10^{-4}
3	-0.56	-83.8	13.42	5	10×10^3	125.9×10^{-4}
4	0.56	16.8	13.42	5	10×10^3	25.3×10^{-4}
5	0.56	-16.8	13.42	5	10×10^3	-25.3×10^{-4}
6	-0.56	-117.3	13.42	5	10×10^3	176.6×10^{-4}
7	-0.5	-45	12	5	10×10^3	54×10^{-4}
Total						410.5×10^{-4}

The deflection is thus given by

$$\delta \cdot \bar{P} \cdot \Delta = \sum_{n=1}^{7} \left(\delta \cdot \bar{P}_e \cdot \frac{PL}{AE} \right)$$

$$\Delta := 410.5 \cdot 10^{-4} \cdot ft = 0.493 \cdot in$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

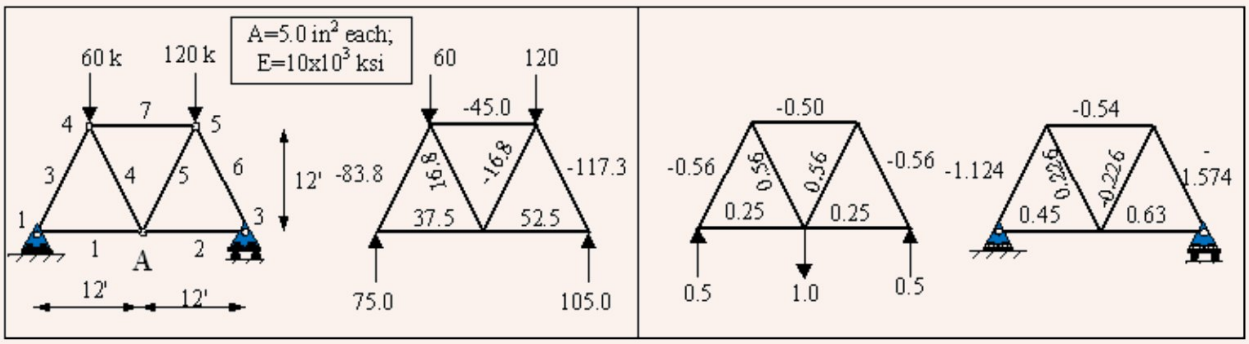
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.10 Thermal Deflection of a Truss; I

The truss shown is built such that the lower chords are shielded from the rays of the sun. On a summer day the lower chords are 30F cooler than the rest of the truss members. What is the magnitude of the vertical displacement at joint 2 as a result of this temperature difference?



Solution:

1. The virtual force system remains identical to that of the previous example because the desired displacement component is the same.
2. The real internal displacements are made up of the shortening of those members of the truss that are shielded from the sun.
3. Both the bottom chord members 1 and 2 thus shorten by

$$\Delta L = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

$$\Delta L := \left(0.0000128 \frac{\text{in}}{\text{in} \cdot \Delta°\text{F}}\right)(30 \cdot \Delta°\text{F}) \cdot 12\text{ft} = 0.0553 \cdot \text{in}$$

4. Then,

$$1 \cdot \Delta = \sum \bar{\delta} \cdot \bar{P} \cdot \Delta L$$

$$\Delta := 0.25(-\Delta L) + 0.25(-\Delta L)$$

$$\Delta = -0.0276 \cdot \text{in}$$

5. The negative sign n the displacement indicates that it is in opposite sense of the displacement; the assumed direction is always identical to the direction of the applied virtual force.
6. Note that the same result would be obtained if we had considered the internal displacements to be made up of lengthening of all truss members above the bottom chord.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

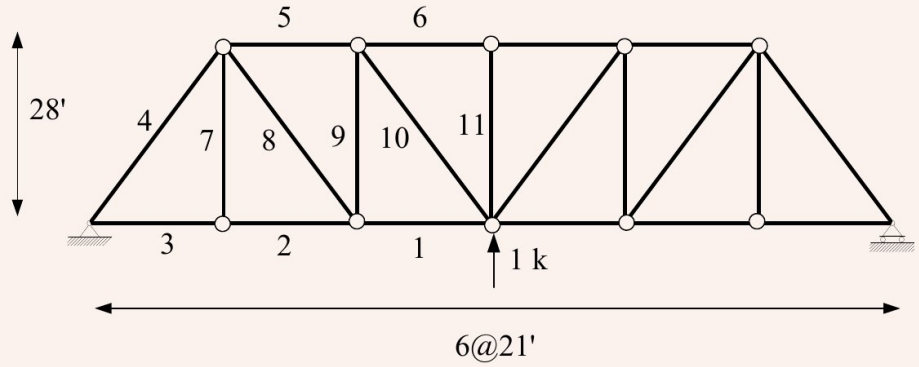
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.11 Thermal Deflection of a Truss; II

A six panel highway bridge is constructed with sidewalks outside the trusses so that the bottom chords are shaded. What will be the vertical deflection component of the bottom chord at the center of the bridge when the temperature of the bottom chord is 40F (ΔT) below that of the top chord, endposts, and webs? (coefficient of steel thermal expansion is $\alpha := 0.0000065 \cdot \frac{1}{\Delta°F}$



Solution:

1. The deflection is given by

$$\Delta \cdot \bar{\delta} \cdot \bar{P} = \int_0^L \delta \cdot \bar{P} \cdot \frac{P}{AE}\, dx = \sum \delta \cdot \bar{P}_i \cdot \frac{P_i \cdot L_i}{AE} = \sum \delta \cdot \bar{P}_i \cdot \Delta L_i = \sum \delta \cdot \bar{P}_i \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

where ΔL is the temperature change in length of each member, and $\delta \cdot \bar{P}$ are the member virtual internal forces

2. Taking advantage of symmetry (Note that we ignor members 1-3 because we assumed that they had the reference temperature, and all other members are subjected to a relative temperature increase of 40F)

Member	L ft	αΔTL	δP kip	δPΔL
4	35	0.0091	0.625	0.00568
5	21	0.00546	0.75	0.00409
6	21	0.00546	1.13	0.00616
7	0	0	0	0
8	35	0.0091	-0.625	-0.00568
9	28	0.00728	0.5	0.00364
10	35	0.0091	-0.625	-0.00568
11	0	0	0	0
Total				0.00821

3. Hence the total deflection is

$$\Delta := 2 \cdot 0.00821\,ft = 0.197 \cdot in$$

4. A more efficient solution would have consisted in considering members 1, 2, and 3 only and applying ΔT=-40F, we would obtain

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

the same displacement.

5. Note that the forces in members 1, 2, and 3 (-0.75, -0.375, and -0.375 respectively) were not included in the table because the corresponding ΔT=0.

6. A simple solution would have $\Delta T := -40 \cdot \Delta°F$ in members 1, 2,and 3 thus

Member	L ft	αΔTL	δP kip	δPΔL
1	21	-0.00546	-0.75	0.004095
2	21	-0.00546	-0.375	0.0020475
3	21	-0.00546	-0.375	0.0020475
Total				0.00819

$\Delta := 2 \cdot 0.00819 ft = 0.197 \cdot in$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

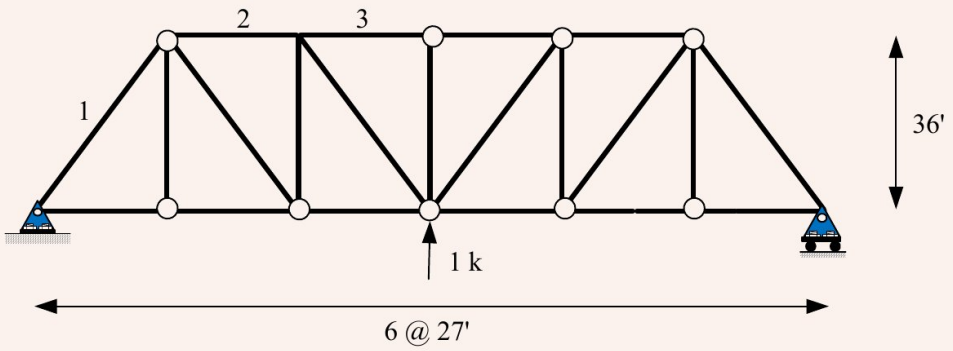
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.12 Truss with Initial Camber

It is desired to provide 3 in. of camber at the center of the truss shown below by fabricating the endposts and top chord members additionally long. How much should the length of each endpost and each panel of the top chord be increased?



Solution:

1. Assume that eachtop chord is increased 0.1 in.

Member	δP_{int} kip	ΔL in	$\delta P \Delta L$
1	0.625	0.1	0.0625
2	0.75	0.1	0.075
3	1.125	0.1	0.1125
Total			0.25

Thus,

$$2 \cdot 0.25\text{in} = 0.5 \cdot \text{in}$$

2. Since the structure is linear and elastic, the required increase of length for each section will be

$$\frac{3\text{in}}{0.5\text{in}} \cdot 0.1\text{in} = 0.6 \cdot \text{in}$$

3. If we use the practical value of 0.625in

$$\boxed{\frac{0.625\text{in} \cdot 0.5\text{in}}{0.1\text{in}} = 3.125 \cdot \text{in}}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

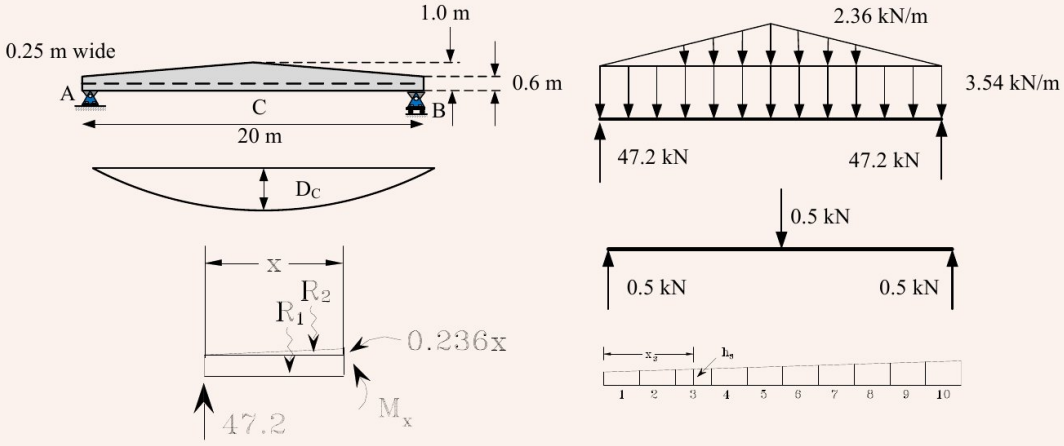
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.13 Prestressed Conrete Beam with Continuously Variable I

A prestressed concrete beam is made of variable depth for proper location of the straight pretensioning tendon. Determine the midspan displacement (point c) produced by the dead weight of the girder. The concrete weighs $w := 23.6\frac{kN}{m^3}$ and has $E := 25000MPa$. The beam is 0.25m wide.



Solution:

1. We seek an expression for the real moment M. This is accomplished by first determining the reactions and then considering the free body diagram.
2. We have the intermediary resultant forces

$$R_1(x) := 0.25m \cdot x \cdot 0.6m \cdot w \rightarrow \frac{3.54 \cdot kN \cdot x}{m}$$

$$R_2(x) := \frac{1}{2} \cdot 0.25m \cdot x \cdot \frac{0.4m}{10m} \cdot x \cdot w \rightarrow \frac{0.118 \cdot kN \cdot x^2}{m^2}$$

Hence,

$$M(x) := 47.2x - 3.54x \cdot \left(\frac{x}{2}\right) - 0.118x^2 \cdot \left(\frac{x}{3}\right) \rightarrow 47.2 \cdot x + -0.039 \cdot x^3 + -1.77 \cdot x^2$$

3. The moment of inertia of the rectangular beam varies continuously and is given, for the left half of the beam, by

$$I(x) = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$I(x) := \frac{1}{12}\cdot(0.25)\cdot(0.6 + 0.04x)^3 \rightarrow 0.021\cdot(0.04\cdot x + 0.6)^3$$

4. Thus, the real angle changes produced by the dead load bending are

$$d\phi = \frac{M}{EI}\cdot dx = \frac{47.2\cdot x + -0.039\cdot x^3 + -1.77\cdot x^2}{E\cdot\left(\frac{1}{48}\right)\cdot(0.6 + 0.04x)^3}$$

5. The virtual force system corresponding to the desired displacement is shown above with $\delta\cdot\overline{M} = \frac{1}{2}\cdot x$ for the left half of the span.

Since the beam is symmetrical, the virtual work equations can be evaluated for only one half of the beam and the final answer is then obtained by multiplying the half-beam result by two.

6. The direct evaluation of the integral $\int \delta\cdot\overline{M}\, d\phi$ is difficult beause of the expression for dϕ. Hence we shall use a numerical procedure, replacing the $\int \delta\cdot\overline{M}\cdot\left(\frac{M}{EI}\right) dx$ with the $\sum \delta\cdot\overline{M}\left(\frac{M}{EI}\right)\Delta x$, where each quantity in the summation is evaluated at the center of the interval Δx and held constant over the interval length. As Δx becomes very short, the solution approaches the exact answer.

7. An interval length of 1 meter, giving 10 elements in the half length of the beam, is chosen to establish an accurate result.

8. The internal virtual work quantity is then

$$\int_0^{\frac{L}{2}} \delta\cdot\overline{M}(x)\cdot\frac{M(x)}{EI}\, dx \sim \sum\left[\delta\cdot\overline{M}(x)\cdot\frac{M(x)}{EI}\cdot\Delta x\right] = \sum \delta\cdot\overline{M}(x)\cdot\frac{M(x)}{E\left(\frac{0.25}{12}\right)\cdot h^3}\cdot\Delta x = \frac{48}{E}\cdot\sum\left[\delta\cdot\overline{M}(x)\cdot\frac{M(x)}{h^3}\cdot\Delta x\right]$$

9. The summation for the 10 elements in the left half of the beam gives

Segment	x	h	h^3	M	δM	$M\delta M/h^3$
1	0.5	0.62	0.238	23.2	0.25	24
2	1.5	0.66	0.288	66.7	0.75	174
3	2.5	0.7	0.343	106.4	1.25	388
4	3.5	0.74	0.405	150	1.75	648
5	4.5	0.78	0.475	173	2.25	820
6	5.5	0.82	0.551	200	2.75	998
7	6.5	0.86	0.636	222	3.25	1134
8	7.5	0.9	0.729	238	3.75	1224
9	8.5	0.94	0.831	250	4.25	1279
10	9.5	0.98	0.941	256	4.75	1292
Total						7981

10. The SI units should be checked for consistency. Letting the virtual force carry the units of kN, the virtual moment has the

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

units of m-kN, and the units of the equation

$$\frac{1}{kN}\cdot\frac{(m\cdot kN)\cdot(m\cdot kN)}{\frac{MN}{m^2}\cdot m^4}\cdot m = \frac{m}{1000} = mm$$

11. Then

$$\int_0^L \frac{\bar{\delta}\cdot\bar{M}\cdot M}{EI}\,dx$$

$$2\cdot\left(\frac{48}{25000}\right)\cdot 7981\cdot 1\cdot mm = 30.65\cdot mm$$

and the deflection at midspan is

$$\Delta_c := 30.65\ mm$$

12. Acceptably accurate results may be obtained with considerably fewer elements (longer intervals Δx). Using four elements with centers at 2, 5, 8, and 10, the $\sum \bar{\delta}\cdot\bar{M}\left(\frac{M}{EI}\right)\Delta x$ is

$$3(174) + 3\cdot(820) + 3\cdot(1224) + 1\cdot(1292) = 7946$$

which is only 0.4% lower than the 10 element solution. If we go to two elements, 3 and 8, we obtain a summation of $5\cdot 388 + 5\cdot 1224 = 8060$ which is 1% high. A one element solution, with x=5m and h=0.8m, gives a summation of 9136 which is 14.4% high and much less accurate than the 2 element solution.

13. Finally, it should be noted that the calculations involved in this example are essentially identical to those necessary in the moment area method.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.1 Steel Building Frame Analysis

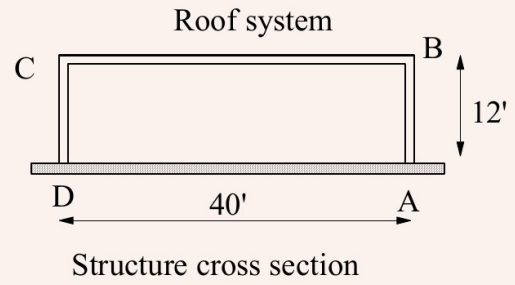
A small, mass-produced industrial building is to be framed in structural steel with a typical cross as shown below. The engineer is considering three different designs for the frame: (a) for poor or unknown soil conditions, the foundation for the frame may not be able to develop any dependable horizontal forces at its bases. In this case the idealized base conditions are a hinge at one of the bases and a roller at the other; (b) for excellent soil conditions with properly designed foundations, the base of the frame legs will have no tendency to move horizontally, and the idealized base condition is that of hinges at both points A and D; and (c) a design intermediate to the above cases, with a steel tie member capable of carrying only tension running between points A and D in the floor of the building. The foundations would not be expected to provide any horizontal restraint for this latter case, and the hinge-roller details at points A and D would apply. Critical design loads for a frame of this type are usually the gravity loads (deal load + snow load) and the combination of dead load and wind load. We will restrict our attention to the first condition, and will use a snow load of $S := 30\text{psf}$ and an estimated total dead load of $D := 20\text{psf}$. With frames spaced at $\text{spacing} := 15\text{ft}$ on centers along the length of the building, the design load is $w_{\text{total}} := \text{spacing}\cdot(S + D) = 750\cdot\frac{\text{lbf}}{\text{ft}}$. If the frame is made of steel beam sections 21 in. deep and weight 62 lb/ft of length (W 21x62), and the member for design (c) is tentatively chosen as a 2 in^2 bar, determine the bending moment digrams for the three designs and discuss the alternate solutions

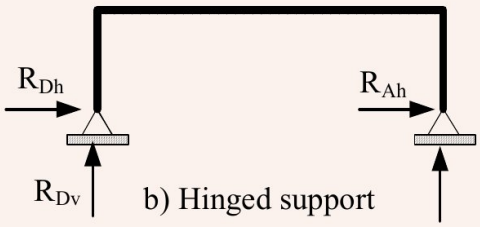
I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

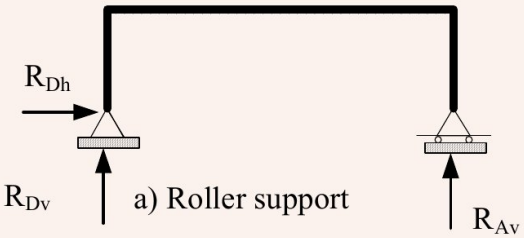
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

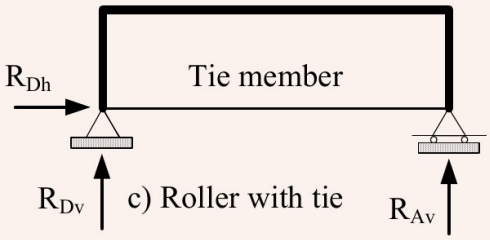
COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



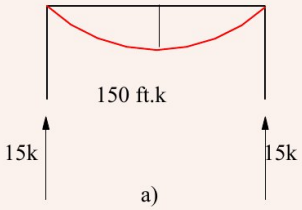


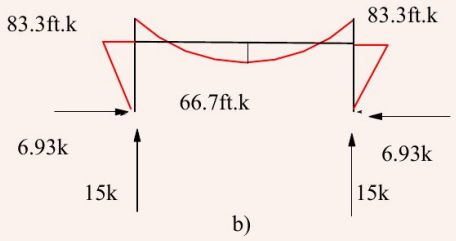


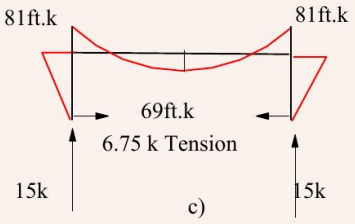


Solution:

Structure a This frame is statically determinate since it has three possible unknown external forces acting on it. Final bending moments are shown below.







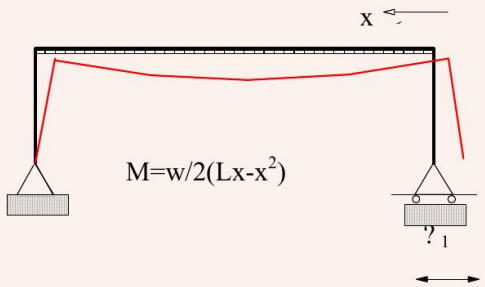
Structure b Hinging both legs of the frame results in another unknown force, making the structure statically indeterminate to the first degree (one redundant).
1. A lateral release at point A is chosen, with the redundant shearing force R1. The displacement Δ_1 in the primary structure, as a result of the real loading, shown in the figure below, is computed by virtual work.
2. The virtual force system produces virtual bending moment $\delta \cdot \overline{M}$, which is uniform across the top member of the frame.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

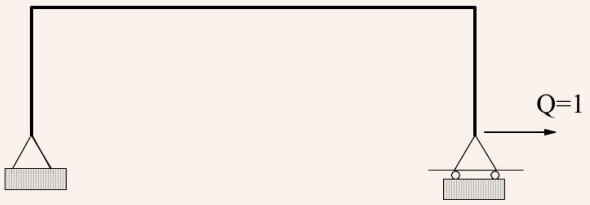
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

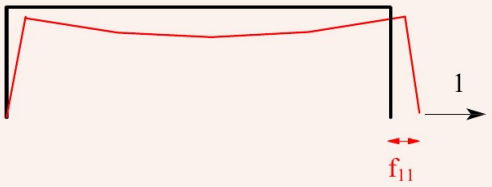
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



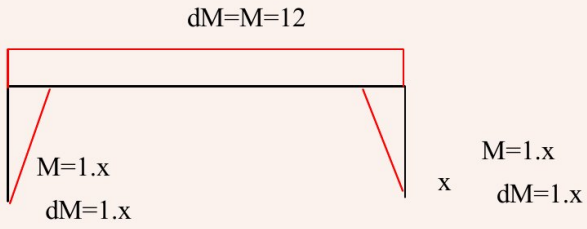
a) Moment caused by actual load on primary structure



b) Virtual forces



c) Real load for determining f_{11}



d) Moments produced by virtual forces and unit redundant

The virtual moment acting through the real angle changes given the internal work term

$$1\cdot\Delta_1 = \int_0^{40} \delta\cdot\overline{M}\cdot\frac{M}{EI}\,dx$$

3. Equating this to the external virtual work of $1\cdot\Delta_1$, we have

$$1\cdot\Delta_1 = \int_0^{40} 12\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot 0.75\left(40x - x^2\right)}{EI}\,dx\cdot kip\cdot ft^3$$

$$\Delta_1(EI) := \int_0^{40} 12\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot 0.75\left(40x - x^2\right)}{EI}\,dx\cdot kip\cdot ft^3 \rightarrow \frac{48000\cdot ft^3\cdot kip}{EI}$$

4. The equation of consistent displacement is $\Delta_1 + f_{11}\cdot R_1 = 0$. The flexibility coefficient f_{11} is computed by applying a unit horizontal force at the release and determining the displacement at the same point.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

5. It is seen that the real loading and the virtual loading are identical for the calculations, and

$$1 \cdot f_{11} = 2\left(\int_0^{12} x \cdot \frac{x}{EI}\,dx + \int_0^{20} 12 \cdot \frac{12}{EI}\,dx\right)$$

or

$$f_{11}(EI) := 2\left(\int_0^{12} x \cdot \frac{x}{EI}\,dx + \int_0^{20} 12 \cdot \frac{12}{EI}\,dx\right) \cdot kip \cdot ft^3 \rightarrow \frac{6912 \cdot ft^3 \cdot kip}{EI}$$

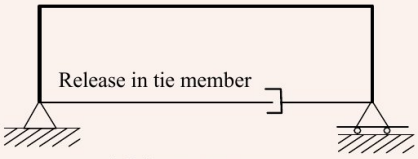
6. solving for R1

$$\frac{1}{EI} \cdot \left(48000 + 6912 R_1\right) = 0$$

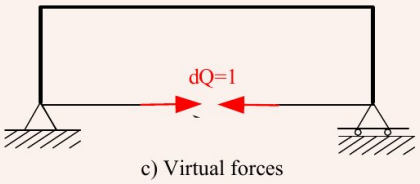
or

$$R_1 := \frac{48000}{6912} \cdot kip = 6.944 \cdot kip$$

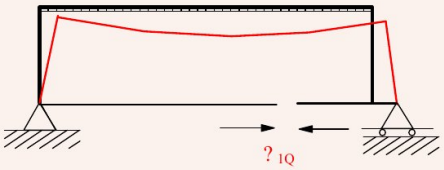
Structure c The frame with the horizontal tie between the points A and D has three unknown external forces. However, the structure is statically indeterminate to the first degree since the tie member provides one degree of internal redundancy.
1. The logical release to choose is a longintudinal release in the tie member, with the associated longitudinal displacement and axial force.
2. The primary structure is the frame with the tie member released.



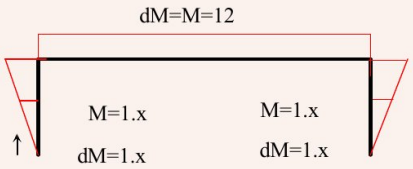
a) Primary structure



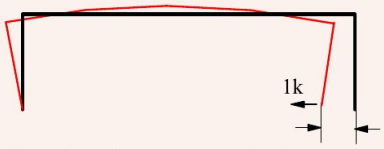
c) Virtual forces



b) Actual loading on primary structure



e) Moments produced by virtual forces and unit redundants



d) Real loading for computing f_{11} f_{11}

The compatability equation is based on the fact that the displacement at the release must be zero; that is, relative displacement of the two sections of the tie at the point of release must be zero, or

$$\Delta_1 + f_{11} \cdot R_1 = 0$$

where

Δ_1 displacement at release 1 in the primary structure, produced by the loading

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Δ_1 = displacement at release 1 in the primary structure, produced by the loading

f_{11} = relative displacement at release 1 for a unit axial force in the member

R_1 = force in the tie member in the original structure

3. Virtual work is used to determine both displacement terms.
4. The value of Δ_1 is identical to the displacement for structure (b) because the tie member has no forces (and consequently no deformation) in the primary structure. Thus,

$$\Delta_1 := \frac{48000\text{kip}\cdot\text{ft}^3}{30000\text{ksi}\cdot 1327\text{in}^4} = 2.083\cdot\text{in}$$

5. The flexibility coefficient f_{11} is composed of two separate effects: a flexural displacement due to the flexibility of the frame, and the axial displacement of the stressed tie member. The virtual and real loadins for this calculation are shown in the previous figure.

$$1\cdot f_{11} = 2\left(\int_0^{12} x\cdot\frac{x}{EI}\,dx + \int_0^{20} 12\cdot\frac{12}{EI}\,dx\right) + \delta\cdot P\cdot\frac{PL}{EA}$$

$$1f_{11} = \frac{6912}{EI} + \frac{1\cdot 1\cdot 40}{EA}$$

$$f_{11} := \left(\frac{6912\text{kip}\cdot\text{ft}^3}{30000\text{ksi}\cdot 1327\text{in}^4} + \frac{40\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}}{30000\text{ksi}\cdot 2\text{in}^2}\right)\cdot\frac{1}{\text{kip}} = 0.308\cdot\frac{\text{in}}{\text{kip}}$$

6. The equation of consistent deformation is

$$\Delta_1 + f_{11}\cdot R_1 = 0$$

or

$$R_1 := \frac{-\Delta_1}{f_{11}} = -6.764\cdot\text{kip}$$

7. The two displacement terms in the equation must carry opposite signs to account for their differences in direction.

Comments The bending moment in the frame differes only slightly from that of structure (b). In other words, the tie member has such high axial stiffness that it provides nearly as much restraint as the foundation of structure (b). Frames with tie members are used widely in industrial buildings. A lesson to be learned here is that it is easy to provide high stiffness through an axially loaded member.
The maximum moment in frames (b) and (c) is about 55% of the maximum moment in frame (a). This effect of continuity and redundancy is typical - the positive bending moments in the members are lowered while the joint moments are increased and a more economical design can be realized. Finally, we should notice that the vertical reactions at the bases of the columns do not change with the degree of horizontal restraint at the bases.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

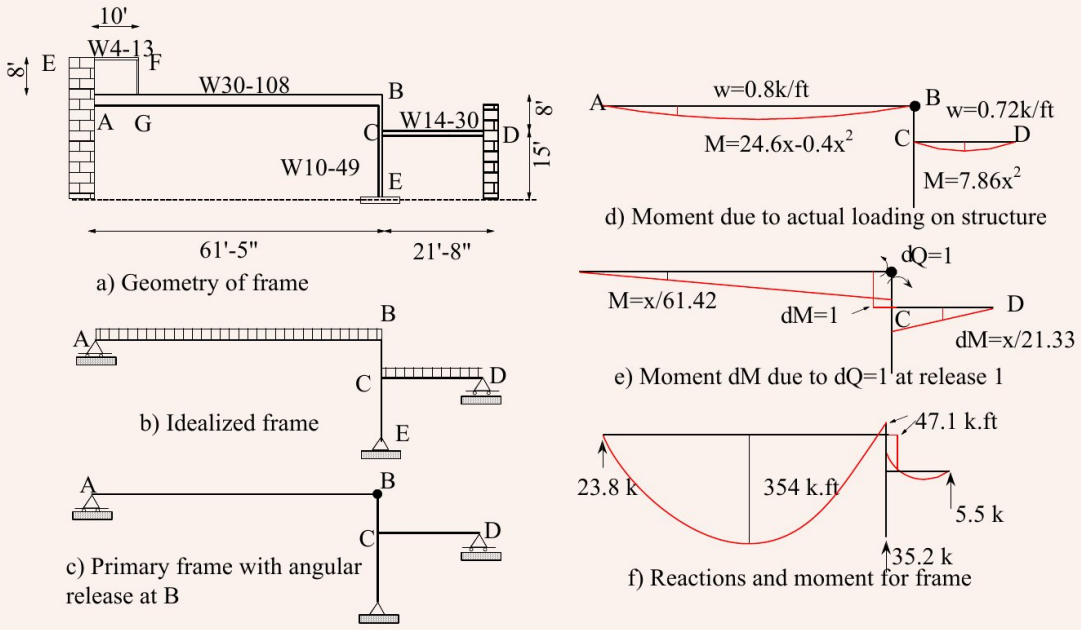
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.2 Analysis of Irregular Building Frame

The structural steel frame for the Church of the Holy Spirit, Penfield, New York is shown below. In this example we will discuss the idealization of the structure and then determine the forces and bending moments acting on the frame.



Solution:

1. The two main horizontal members of the frame are supported at points A and D by masonry walls.
2. The connection used at these points is not intended to transmit axial forces from the frame to the wall; accordingly, the axial forces in the horizontal members are assumed to be zero and the joints at A and D are idealized as rollers that transmit vertical forces only.
3. The base joint E is designed to resist both horizontal and vertical loads, but not moment, and is assumed to be a hinge.
4. Finally, joints B and C are designed to provide continuity and will be taken as rigid; that is, the angles of intersection of the members at the joint do not change with applied loading.
5. The frame is simplified for analysis by removing the small 4 in. wide flange members EF and FG and replacing their load effect by applying the roof load with acts on EF directly to the segment AG.
6. the idealized frame is shown above.
7. The dead load on the higher portion of the frame is $p_{AB} := 25\text{psf}$ times the frame spacing of $\text{spacing} := 13.33\text{ft}$, or $w_{AB} := p_{AB} \cdot \text{spacing} = 333 \cdot \frac{\text{lbf}}{\text{ft}}$ along the frame.
8. The dead load on CD is less beacuse the weight of the frame member is substantially smaller, and the dead load is about $p_{CD} := 19\text{psf}$, or $w_{CD} := p_{CD} \cdot \text{spacing} = 253 \cdot \frac{\text{lbf}}{\text{ft}}$.
9. Snow load is $S := 35\text{psf}$ over both areas, or $w_{Snow} := S \cdot \text{spacing} = 467 \cdot \frac{\text{lbf}}{\text{ft}}$.
10. The total loads are then

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Member AB: $w_{totAB} := w_{AB} + w_{Snow} = 0.8 \cdot \frac{kip}{ft}$

Member CD: $w_{totCd} := w_{CD} + w_{Snow} = 0.72 \cdot \frac{kip}{ft}$

11. the frame has four unknown reaction components and therefore has one redundant. Although several different releases are possible, we choose an angular (bending) release at point B.
12. The resulting primary structure is shown as (c) in the figure above, where the redundant quantitity R1 is the bending moment at point B.
13. The equation of compatability is

$$\theta_1 + f_{11} \cdot M_1 = 0$$

where θ_1 is the relative angular rotation corresponding to release 1 as produced by the actual loading, and f_{11} is the flexibility coefficient for a unit moment acting at the release.

14. From virtual work we have

$$1 \cdot \theta_1 = \int \delta\overline{M} \cdot \frac{M}{EI}\, dx$$

and

$$1 \cdot f_{11} = \int \delta\overline{M} \cdot \frac{M}{EI}\, dx$$

where $\delta\overline{M}$ and M are defined in (e) in the figure above.

15. Then

$$\theta_1(EI_{AB}, EI_{CD}) := \left[\frac{1}{EI_{AB}} \cdot \int_0^{61.42} \frac{x}{61.42} \cdot \left(24.6x - 0.4x^2\right) dx + \frac{1}{EI_{CD}} \cdot \int_0^{21.33} \frac{x}{21.33} \cdot \left(7.68x - 0.36x^2\right) dx \right]$$

$$\theta_1(EI_{AB}, EI_{CD}) \rightarrow \frac{291.31658667}{EI_{CD}} + \frac{7763.6329512000000002}{EI_{AB}}$$

16. With $I_{AB} := 4470in^4$ and $I_{CD} := 290in^4$

$$\theta_1(E) := \left(\frac{291}{E \cdot I_{CD}} + \frac{7764}{E \cdot I_{AB}}\right) \cdot in^4 \rightarrow \frac{118411}{43210 \cdot E}$$

17. Similarly

$$f_{11}(EI_{AB}, EI_{CD}, EI_{BC}) := \frac{1}{EI_{AB}} \cdot \int_0^{61.42} \left(\frac{x}{61.42}\right)^2 dx + \frac{1}{EI_{CD}} \cdot \int_0^{21.33} \left(\frac{x}{21.33}\right)^2 dx + \frac{1}{EI_{BC}} \cdot \int_0^{8} (1)^2 dx$$

$$f_{11}(EI_{AB}, EI_{CD}, EI_{BC}) \rightarrow \frac{8}{EI_{BC}} + \frac{20.473}{EI_{AB}} + \frac{7.11}{EI_{CD}}$$

18. With $I_{BC} := 273in^4$

$$f_{11}(E) := \left(\frac{8}{E \cdot I_{BC}} + \frac{20.473}{E \cdot I_{AB}} + \frac{7.11}{E \cdot I_{CD}}\right) \cdot in^4 \text{ simplify } \rightarrow \frac{0.058}{E}$$

Note that the numerators of θ_1 and f_{11} have units of $kip \cdot ft^2$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Note that the numerators of θ_1 and f_{11} have units of $\frac{}{in^4}$

19. Applying the compatability equation,

$$\frac{118411}{43210\cdot E}+\frac{0.058}{E}\cdot M_1 = 0$$

and the bending moment at point B is

$$M_1 := \frac{-\frac{118411}{43210\cdot E}}{\frac{0.058}{E}}\cdot kip\cdot ft = -47.248\cdot kip\cdot ft$$

The reactions and moments in the structure are given in (f) in the figure above.

20. Once we have M_1, the structure is by now statically determinate and from statics we can complete the shear and moment diagrams.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

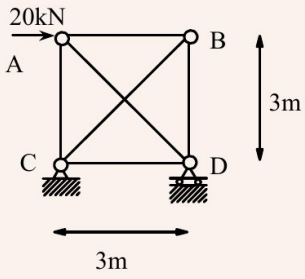
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.3 Redundant Truss Analysis

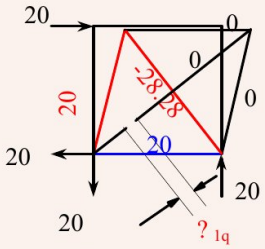
Determine the bar forces in the steel truss shown below using the flexibility method. The truss is part of a supporting tower for a tank, and the 20 kN horizontal load is produced by wind loading on the tank.



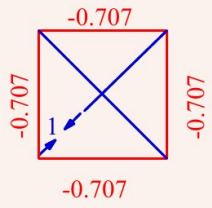
a) Original Structure



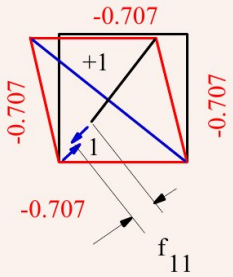
b) Primary structure



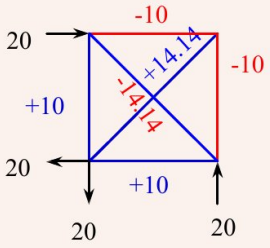
c) Primary structure subjected to real load



d) Virtual load on primary structure



e) Action of unit force corresponding to redundant R_1



f) Final results

Solution:

1. Applying the criteria for indeterminancy $2 \cdot 4 = 8$ equations, 6 members + 3 reactions => one degree of indeterminancy. A logitudnial release in any of the six bars may be chosen.
2. Because the truss members carry only axial load, the longitudinal release is identical to actually cutting the member and removing its axial force capability from the truss.
3. In analyzing the trusses with double diaganols it is both convenient and customary to select the release in one of the diganol members because the resulting primary structure will be the conventional truss to which we are accustomed.
4. Choosing the diagonal member BC for the release, we cut it and remove its axial stiffness from the structure. The primary structure is shown in (b) in the figure above.
5. The analysis problem reduces to applying an equation of compatability to the changes in length of the release member. The relative displacement Δ_1 of the two cut ends of member BC, as producued by the real loading, is shown in (d) in the figure above.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

6. The displacement is always measured along the length of the redundant member, and since the redundant is unstressed at this stage of the analysis, the displacement Δ_1 is equal to the relative displacement of joint B with respect to joint C.
7. This displacement must be eliminated by the relative displacements of the cut ends of member BC when the redundant force is acting on the member. The latter displacement is written in terms of the axial flexibility coefficient f_{11}, and the desired equation of consistent deformation is

$$\Delta_1 + f_{11} \cdot R_1 = 0$$

8. The quantity Δ_1 is given by

$$1 \cdot \Delta_1 = \sum \bar{\delta \cdot P} \left(\frac{PL}{AE} \right)$$

where $\bar{\delta \cdot P}$ and P are given in (d) and (e) in the figure above, respectively

9. Similarly,

$$f_{11} = \sum \bar{\delta \cdot P} \left(\frac{\bar{P} \cdot L}{AE} \right)$$

10. Evaluating these summations in tabular form:

Member	P kN	δP kN	L m	δPPL	δPPL
AB	0	-0.707	3	0	1.5
BD	0	-0.707	3	0	1.5
CD	20	-0.707	3	-42.42	1.5
AC	20	-0.707	3	-42.42	1.5
AD	-28.28	1	4.242	-119.96	4.242
BC	0	1	4.242	0	4.242
Total				-204.8	14.484

11. Since A = constant for each member

$$\Delta_1 = \sum \bar{\delta \cdot P} \left(\frac{PL}{AE} \right) = \frac{-204.8}{AE} \cdot kN^2 \cdot m \quad \text{and} \quad f_{11} = \frac{14.484}{AE} \cdot kN^2 \cdot m$$

then

$$\frac{1}{AE} \cdot \left(-204.8 + 14.484 \cdot R_1 \right) = 0$$

12. the solution for the redundant force value is $R_1 := \frac{204.8}{14.484} \cdot kN = 14.14 \cdot kN$
13. The final values for forces in each of the truss members are given by superimposing the forces due to the redundant and the forces due to the real loading.
14. The real loading forces are shown in (c) in the figure above, while the redundant force effect is computed by multiplying the member forces in (d) in the figure above by 2.83, the value of the redundant.

Member	δP kN	R_1δP kN	P kN	P_{total} kN
AB	-0.707	-10	0	-10
BD	-0.707	-10	0	-10
CD	-0.707	-10	20	10
AC	-0.707	-10	20	10
AD	1	14.14	-28.28	-14.14

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

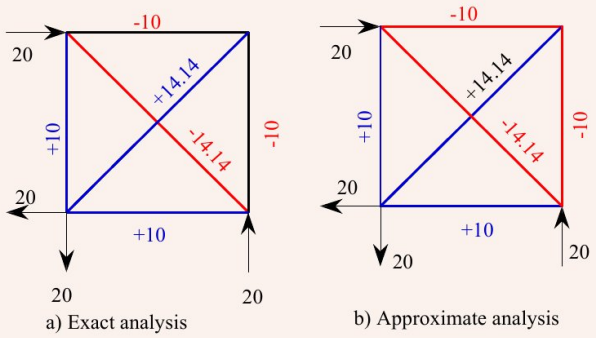
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Member	δP kN	R_1δP kN	P kN	P_{total} kN
AB	-0.707	-10	0	-10
BD	-0.707	-10	0	-10
CD	-0.707	-10	20	10
AC	-0.707	-10	20	10
AD	1	14.14	-28.28	-14.14
BC	1	14.14	0	14.14

15. It is informative to compare the member forces from this solution to the approximate analysis obtained by assuming that the double diagonals each carry half the total shear in the panel. The comparison is given in the figure below



a) Exact analysis b) Approximate analysis

It reveals that the approximate analysis is the same as the exact analysis for this particular truss. The reason for this is that the stiffness provided by each of the diagonal members (against "shear" deformation of the rectangular panel) is the same, and therefore they each carry an equal portion of the total shear accross the panel.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.4 Truss with Two Redundants

Another panel with a second redundant member is added to the truss of the preceeding example

Solution:

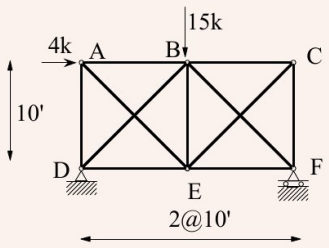
1. The twice redundant truss is converted to a determinate primary structure by releasing two members of the truss; we choose two diagonals (DB and BF).
2. Releasing both diagonals in a single panel, such as members AE and DB, is inadmissible since it leads to an unstable truss form.
3. The member forces and required displacements for the real loading and for the two redundant forces in members DB and BF are given in the figure below.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

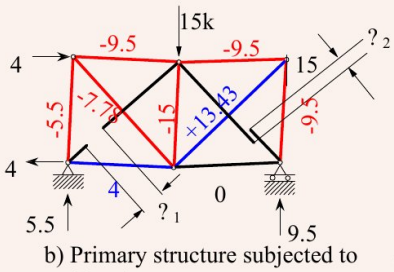
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

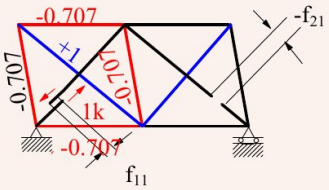
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



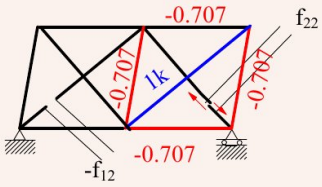
a) Original structure; all A=4 in^2



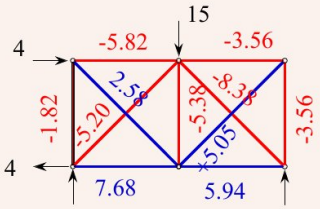
b) Primary structure subjected to real load



c) Action to unit force R_1=1



d) Action of unit force R2=1



e) Final results

4. Although the rela loading ordinarily stresses all members of the entire truss, we see that the unit forces corresponding to the redundant stress only those members in the panel that contain the redundant; all other bar forces are zero.
5. Recognizing this fact enables us to solve the double diagonal truss problem more rapidly than a frame with multiple redundants.
6. The virtual work equations for computing the six required displacements (two due to load and four flexibilities) are

$$1\cdot\Delta_1 = \sum \delta\cdot\overline{P}_1\left(\frac{PL}{AE}\right)$$

$$1\cdot\Delta_2 = \sum \delta\cdot\overline{P}_2\left(\frac{PL}{AE}\right)$$

$$1\cdot f_{11} = \sum \delta\cdot\overline{P}_1\left(\frac{\overline{P}_1\cdot L}{AE}\right)$$

$$1\cdot f_{21} = \sum \delta\cdot\overline{P}_2\left(\frac{\overline{P}_1\cdot L}{AE}\right)$$

$f_{12} = f_{21}$ by reciporocal theorem

$$1\cdot f_{22} = \sum \delta\cdot\overline{P}_2\left(\frac{\overline{P}_2\cdot L}{AE}\right)$$

7. If we assume tension in a truss member as positive, use tensile unit loads when computing the flexibility coeeficients corresponding to the redundants, and let all displacement terms carry their own signs, then in the for the redundants a positive value of force indicates tension while a negative value menas the member is in compression.
8. The calculation of f_{22} involves only the six members in the left panel of the truss; f_{21} invloves only member BE.
9. The simple used for performing the displacement analyses, as summarized in tabular form, leads one quickly to the compatability equations which state that the cut ends of both redundant members must match (there can be no gaps or overlaps of members in the actual structure).

Member	P	P_1	P_2	Δ_1	Δ_1	f_{11}	f_{21}	f_{22}
				$\delta P_1 PL$	$\delta P_2 PL$	$\delta P_1 P_1 L$	$\delta P_2 P_1 L$	$\delta P_2 P_2 L$
AB	-9.5	-0.707	0	806	0	60	0	0
BC	-9.5	0	-0.707	0	806	0	0	60

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Member	P	P_1	P_2	Δ_1	Δ_1	f_{11}	f_{21}	f_{22}
				$\delta P_1 PL$	$\delta P_2 PL$	$\delta P_1 P_1 L$	$\delta P_2 P_1 L$	$\delta P_2 P_2 L$
AB	-9.5	-0.707	0	806	0	60	0	0
BC	-9.5	0	-0.707	0	806	0	0	60
CF	-9.5	0	-0.707	0	806	0	0	60
EF	0	0	-0.707	0	0	0	0	60
DE	4	-0.707	0	-340	0	60	0	0
AD	-5.5	-0.707	0	466	0	60	0	0
AE	7.78	1	0	1322	0	170	0	0
BE	-15	-0.707	-0.707	1272	1272	60	60	60
CE	13.43	0	1	0	2280	0	0	170
BD	0	1	0	0	0	170	0	0
BF	0	0	1	0	0	0	0	170
Total				3528	5164	580	60	580

10. The equations are

$$\Delta_1 + f_{11}\cdot R_1 + f_{12}\cdot R_2 = 0$$

$$\Delta_2 + f_{21}\cdot R_1 + f_{22}\cdot R_2 = 0$$

or

$$\frac{1}{AE}\cdot\begin{pmatrix}580 & 60\\ 60 & 580\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}R_1\\ R_2\end{pmatrix} = \frac{-1.}{AE}\cdot\begin{pmatrix}3528\\ 5164\end{pmatrix}$$

11. The final set of forces in the truss is obtained by adding up, for each member, the three separate effects. In terms of the forces shown in the figure above, the force in any member is given by $F = P + R_1\cdot\overline{P_1} + R_2\cdot\overline{P_2}$

Member	P	P_1	P_2	R_1P_1	R_2P_2	P_{total}
AB	-9.5	-0.707	0	3.676	0	-5.82
BC	-9.5	0	-0.707	0	5.925	-3.56
CF	-9.5	0	-0.707	0	5.925	-3.56
EF	0	0	-0.707	0	5.925	5.94
DE	4	-0.707	0	3.676	0	7.68
AD	-5.5	-0.707	0	3.676	0	-1.82
AE	7.78	1	0	-5.2	0	2.58
BE	-15	-0.707	-0.707	3.676	5.925	-5.38
CE	13.43	0	1	0	-8.38	5.05
BD	0	1	0	-5.2	0	-5.2
BF	0	0	1	0	-8.38	-8.38

14.5 Analysis of Nonprismatic Members

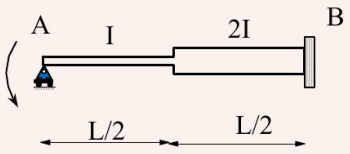
The nonprismatic beam is loaded with an end moment M_A at its hinged end A. Determine the moment induced at the fixed end B by this loading.

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

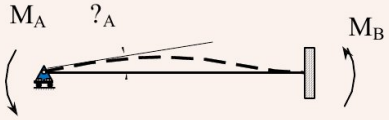
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

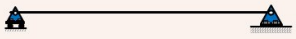
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



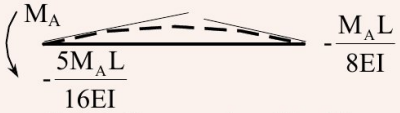
a) Beam with end B fixed



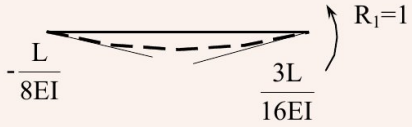
b) Elastic curve



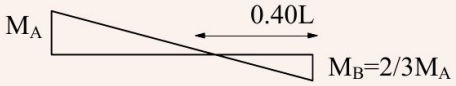
c) Primary structure



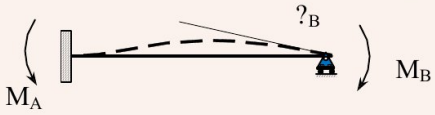
d) Rotations produced by M_A



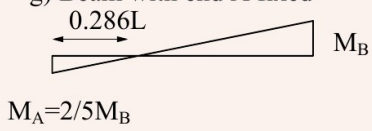
e) Rotations produced by a unit value of redundant R_1



f) Moment diagram for A hinged, B fixed



g) Beam with end A fixed



h) Moment diagram for A fixed, B hinged

Solution:

1. The beam has one redundant force; we select M_B as the redundant R_1, and obtain the primary structure shown in the figure above. It can be shown that the flexibility coefficients for unit moments applied at each end are those in (d) and (e) in the figure above, with a sing convention of counterclockwise as positive.
2. The equation of consistent displacement at B is

$$\frac{-M_A \cdot L}{8E \cdot I} + \frac{3}{16} \cdot \frac{L}{E \cdot I} \cdot R_1 = 0$$

and the value of M_B is

$$M_B = R_1 = \frac{2}{3} \cdot M_A$$

3. The resulting moment diagram is given in (f). We note that the inflection point is 0.4L from the fixed end. If the beam had a uniform value of I across its span, the inflection point would be L/3 from the fixed end. Thus the inflection point shifts toward the section of reduced stiffness.
4. The end rotation θ_A is given by

$$\theta_A = \frac{5}{16} \cdot \frac{M_A \cdot L}{E \cdot I} - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot M_A \right) \cdot \frac{L}{E \cdot I} = \frac{11}{48} \cdot \frac{M_A \cdot L}{E \cdot I}$$

5. The ratio of the applied end moment to rotation $\frac{M_A}{\theta_A}$ is called the rotational stiffness and is

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\frac{M_A}{\theta_A} = \frac{48}{11}\cdot\frac{E\cdot I}{L}$$

6. If we now reverse the boundary conditions, making A fixed and B hinged, and repeat the analysis for an applied moment M_B, the resulting moment diagram will be as given in (h) in the above figure. The moment induced at end A is only 40% of the applied end moment M_B. The inflection point is 0.286L from the fixed end A. The corresponding end rotation θ_B in (g) in the figure above is

$$\theta_B = \frac{11}{80}\cdot\frac{M_B\cdot L}{E\cdot I}$$

7. The rotational stiffness $\frac{M_B}{\theta_B}$ is

$$\frac{M_A}{\theta_A} = \frac{80}{11}\cdot\frac{E\cdot I}{L}$$

8. A careful comparison of the rotational stiffnesses, and of the moment diagrams in (f) and (h) in the figure above, illustrate the fact that flexural sections of increased stiffness attract more moment, and that inflection points always shift in the direction of decreased stiffness.
9. The approach illustrated here may be used to determine moments and end rotations in any type of non-prismatic member. The end rotations need in the force analysis may be calculated by either virtual work or moment area (or by other methods). Complex variations in EI are handles by numerical integration of the virtual work equation or by approximating the resultant M/EI area and their locations in the moment area method.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.6 Fixed End Moments for Nonprismatic Members

The beam of the previous example

Solution:

1. The beam has two redundant forces and we select M_A and M_B. Releasing these redundants, R_1 and R_2, we obtain the primary sturcture.
2. The equations of consistent deformations are

$$\Delta_1 + f_{11}\cdot R_1 + f_{12}\cdot R_2 = 0$$

$$\Delta_2 + f_{21}\cdot R_1 + f_{22}\cdot R_2 = 0$$

where R_1 is M_A and R_2 is M_B.

3. The values of Δ_1 and Δ_2, the end rotations produced by the real loading on the primary structure, can be computed by the virtual work method.
4. The flexibility coefficients are also separately derived (not yet in these notes)
5. We define counterclockwise end moments and rotations as positive and obtain

$$\frac{L}{E\cdot I}\cdot\begin{pmatrix}\frac{5}{16} & \frac{-1}{8}\\ \frac{-1}{8} & \frac{3}{16}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}R_1\\ R_1\end{pmatrix} = \frac{w\cdot L^3}{E\cdot I}\cdot\begin{pmatrix}-0.352\\ 0.0273\end{pmatrix}$$

from which

$$\boxed{R_1 = M_A = 0.0742 w\cdot L^2}$$

$$\boxed{R_2 = M_B = -0.0961 w\cdot L^2}$$

6. The stiffer end of the beam attracts 30% more than the flexible end.
7. For a prismatic beam with constant I, the fixed end moments are equal in magnitude ($M_A = -M_B = \frac{w\cdot L^2}{12}$) and intermediate in value between the two end moments determiend above.
8. Fixed end moments are an essential part of indeterminate analysis based on the displacement (stiffness) method and will be used exclusively in the Moment Distribution method.

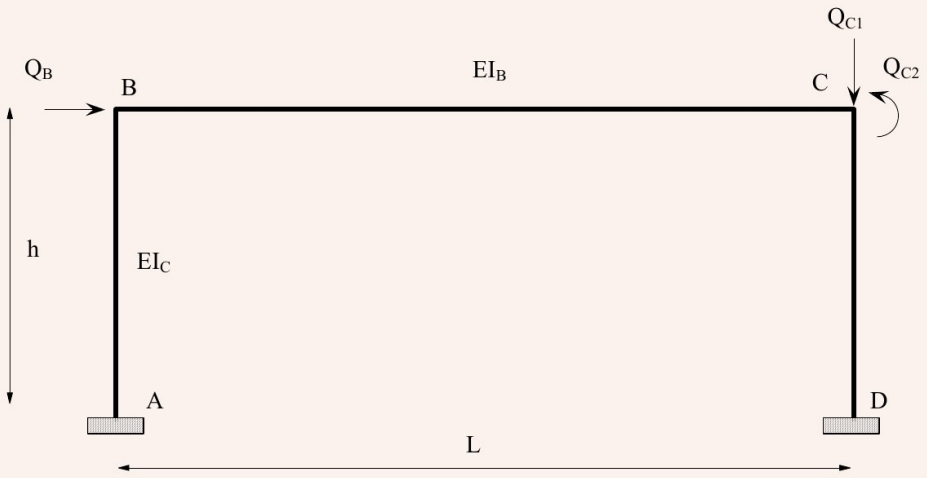
© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

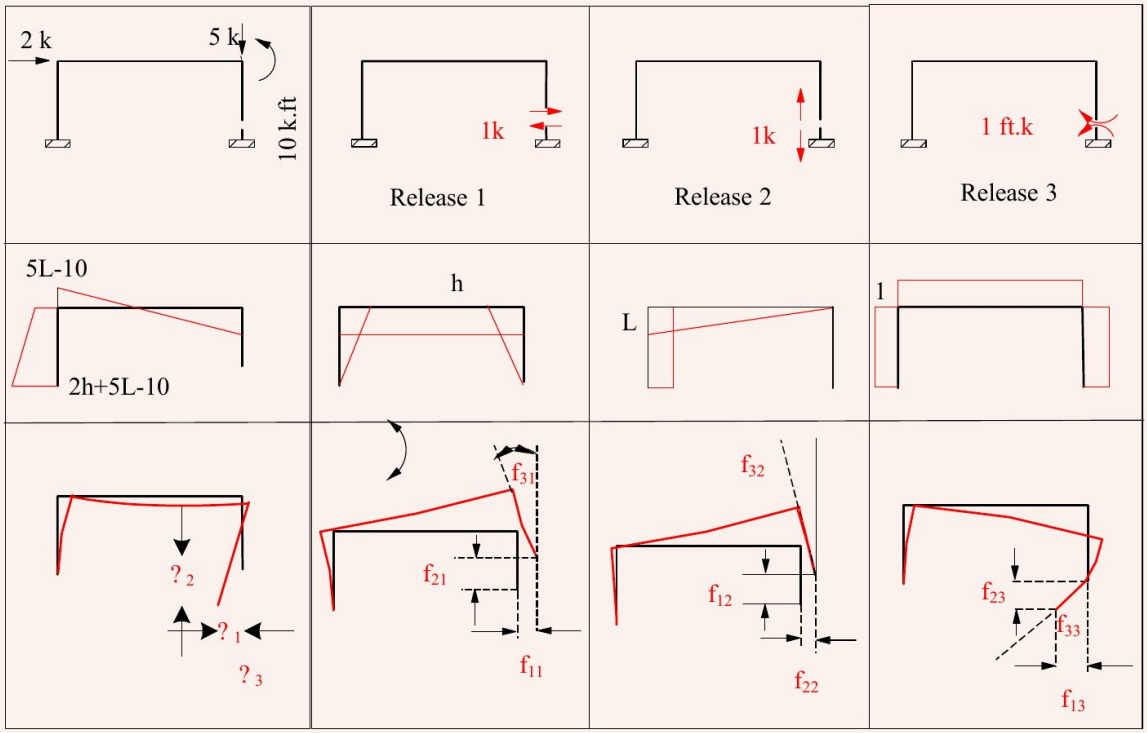
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.7 Rectangular Frame; External Load



Solution:

1. The structure is statically indeterminate to the third degree, and the displacements (flexibility terms) are shown in the figure above.
2. In order to evaluate the 9 flexibility terms, we refer tot he table.



I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

3. Substituting $h := 10ft$, $L := 20ft$, and $EI_B = EI_C = EI$, the flexibility matrix then becomes

$$f = \frac{1}{EI} \cdot \begin{pmatrix} 2667 & 3000 & -300 \\ 3000 & 6667 & -400 \\ -300 & -400 & 40 \end{pmatrix}$$

and the vector of displacements for the primary structure is

$$\Delta = \frac{1}{EI} \cdot \begin{pmatrix} -12833 \\ -31333 \\ 1800 \end{pmatrix}$$

where the units are kips and feet.

4. The inverse of the flexibility matrix is

$$f^{-1} = 10^{-3} \cdot EI \cdot \begin{pmatrix} 2.4 & 0 & 18 \\ 0 & 0.375 & 3.75 \\ 18 & 3.75 & 197.5 \end{pmatrix}$$

5. Hence the reactions are determined from

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} := 10^{-3} \cdot EI \cdot \begin{pmatrix} 2.4 & 0 & 18 \\ 0 & 0.375 & 3.75 \\ 18 & 3.75 & 197.5 \end{pmatrix} \cdot \left[\frac{1}{EI} \cdot \begin{pmatrix} -12833 \\ -31333 \\ 1800 \end{pmatrix} \right] \rightarrow \begin{pmatrix} 1.601 \\ -5 \\ 7.007 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}}$$

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.8 Frame with Temperature and Support Displacements

The single bay frame, of the previous example, has a height $h := 10\text{ft}$ and span $L := 20\text{ft}$ and its two supportsrigidly connected and is constructed of reinforced concrete. It supports a roof and wall partitions in such a manner that linear temperature variation occurs across the depth of the frame members when inside and outside temperatures differ. Assume the member depth is constant at 1 ft, and that the structure was built with fixed bases A and D at a temperature of 85F. The temperature is now 70F inside and 20F outside. We wish to determine the reactions at D under these conditions. Assume that the coefficient of linear expansion of reinforced concrete is $\alpha := 0.0000055 \cdot \frac{1}{\Delta°F}$.

Solution:

1. Our analysis proceeds as before, with the [D] vector interpreted appropriately. The three releases shown in the previous example, will be used.
2. The first stage in the analysis is the computation of the relative displacements $\Delta_{1\Delta}$, $\Delta_{2\Delta}$, $\Delta_{3\Delta}$, of the primary structure caused by temperature effects. These diaplcements are caused by two effects: axial shortening of the members because of the drop in average temperature (a middepth of the members), and curvature of the members because of the temperature gradient.
3. In the following discussion the contributions to the displacements due to the axial strain are denoted with a single prime (') and those due to curvature by a double prime (").
4. Consider the axial strain first. A unit length of frame member shortens as a result of the temperature decrease from 85F to 45F at the midepth of the member. the strain is therefore

$$\alpha\Delta T := \alpha \cdot 40 \cdot \Delta°F = 0.00022$$

5. The effect of axial strain on the relative displacements needs little analysis. The horizontal member shortens by an amount $\alpha\Delta T \cdot 20\text{ft} = 0.0044 \cdot \text{ft}$. The shortening of the vertical members results in no relative displacement in the vertical direction. No rotation occurs.
6. We therefore have $\Delta'_{1\Delta} := -\alpha\Delta T \cdot 20\text{ft} = -0.0044 \cdot \text{ft}$, $\Delta'_{2\Delta} := 0\text{ft}$, and $\Delta'_{3\Delta} := 0\text{rad}$
7. The effect of curvature must also be considered. A frame element of length dx undergoes an angular strain as a result of the temperature gradient. The change in length at an extreme fiber is

$$\varepsilon(dx) := \alpha \cdot 25 \cdot \Delta°F \cdot dx \rightarrow 0.0001375 \cdot dx$$

8. With the resulting real rotation of the cross section

$$d\phi(dx) := \frac{\varepsilon(dx)}{0.5} \cdot \text{rad} \rightarrow 0.000275 \cdot dx \cdot \text{rad}$$

9. The relative displacements of the primary structure at D are found by the virtual force method.
10. A virtual force $\delta \cdot \overline{Q}$ is applied in the direction of the desired displacement and the resulting moment diagram $\delta \cdot \overline{M}$ determined.
11. The virtual work equation

$$\delta \cdot \overline{Q} \cdot \Delta = \int \delta \cdot \overline{M}\, d\phi$$

is used to obtain each of the desired displacements at D.
12. The results, which you should verify, are

$$\Delta''_1 := 0.0828\text{ft}$$

$$\Delta''_2 := 0.1104\text{ft}$$

$$\Delta''_3 := -0.01104\text{rad}$$

13. Combining the effects of axial and rotational strain, we have

$$\Delta_1 := \Delta'_{1\Delta} + \Delta''_1 = 0.0784 \cdot \text{ft}$$

$$\Delta_2 := \Delta'_{2\Delta} + \Delta''_2 = 0.1104 \cdot \text{ft}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\Delta_3 := \Delta'_{3\Delta} + \Delta''_3 = -0.01104 \cdot \text{rad}$$

14. We now compute the reduntants caused by temperature effects

$$R = f^{-1} \cdot (-\Delta)$$

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = 10^{-3} \cdot EI \cdot \begin{pmatrix} 18 & 3.75 & 197.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.0784 \\ -0.1104 \\ 0.01104 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0106 \\ 0.355 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} \cdot EI$$

where the units are kips and feet.

15. You should construct the moment diagram for the structure using the values of the redundant found in the analysis.
16. Notice the stiffness term EI does not cancel out in this case. Internal forces and reactions in a statically indeterminate subject to effects other than loads (such as temperature) are dependent on the actual stiffnesses of the structure.
17. The effects of axial strain caused by forces in the members have been neglected in this analsis. This is usual for low frames where bending strain dominates behavior. To illustrate the significance of this assumption, consider member BC. We have found $R_1 = 10.6 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{EI}{EA}$. The tension in BC has this same value, resulting in a strain for the member of $10.6 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{EI}{EA}$ .For a rectangular member, $\frac{I}{A} = \frac{b \cdot d^3}{12 \cdot bd} = \frac{d^2}{12}$. In our case d=1ft, therefore the axial strain is $10.6 \cdot 10^{-6} \cdot (0.0833) = 8.83 \times 10^{-7}$, which is several orders of magnitude smaller than the temperature strain computed for the same member. We may therefore rest assured that neglecting axial strain caused by forces does not affect the values of the redundants in a significant manner for this structure.
18. Now considert the effects of foundation movement on the same structure. The intermediate frame behavior depends on a structure that we did not design: the earth. The earth is an essential part of nearly all structures, and we must understand the effects of foundation behavior on structural behavior. for the purposes of this example, assume that a foundation has revealed the possibility of a clockwise rotation of the support at D of 0.001 radians and a downward movement of the support at D of 0.12 ft. We wish to evaluate the redundants R_1, R_2, and R_3 caused by this foundation movement.
19. No analysis is needed to determine the values of $\Delta_{1\Delta}$, $\Delta_{2\Delta}$, and $\Delta_{3\Delta}$ for the solution of the redundants. These displacements are found directly from the support movements, with proper consideration, of the originally chosen sign convention which defined the positive direction of the relative displacements. From the given support displacements, we find $\Delta_{1\Delta} := 0$, $\Delta_{2\Delta} := 0.12\text{ft}$, and $\Delta_{3\Delta} := 0.001\text{rad}$. Can you evaluate these quantities for a casr in which the displacements occured at A instead of D?
20. The values of the redundants is given by

$$R = f^{-1} \cdot (-\Delta)$$

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = 10^{-3} \cdot EI \cdot \begin{pmatrix} 18 & 3.75 & 197.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.12 \\ 0.001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -252.5 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} \cdot EI$$

with units in kips and feet.

21. A moment diagram may now be constructed, and other internal force quantities computed from the now known values of the redundants. The redundants have been evaluated separately for effects of temperature and foundation settlement. These effects may be combined with those due to loading using the principle of superposition.

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

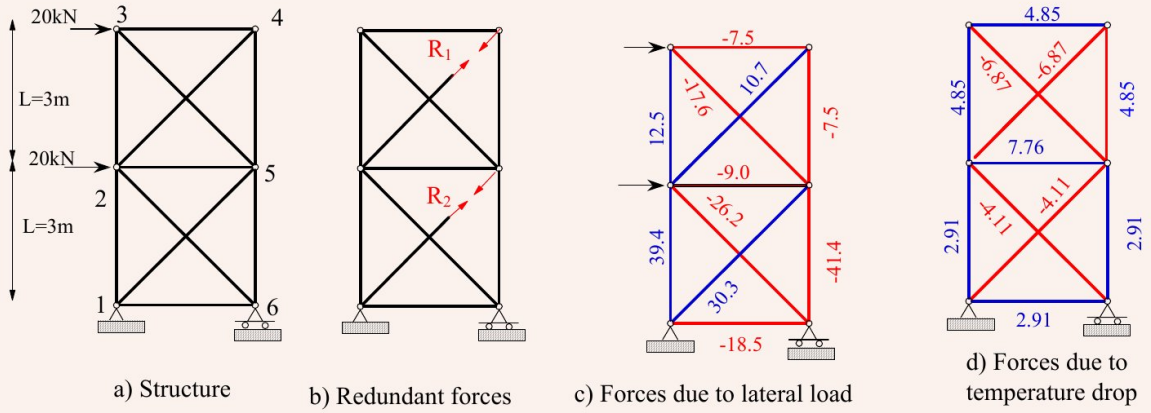
14.9 Braced Bent with Loads and Temperature Change

The struss shown below represents an internal braced bent in an enclosed shed, with lateral loads of 20 kN at the panel points. A temperature drop of 30C may occur on the other members (members 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, and 5-6). We wish to analyze the truss for loading and for temperature effects.

Solution:

1. The first step in the analysis is the definition of the two redundants. The choice of forces in diagonals 2-4 and 1-5 as redundants facilitates the computations because some of the load effects are easy to analyze.
2. The computations are organized in tabular form in Table ??. The first column gives the force in each bar caused by a unit load (1 kN) corresponding to release 1. These are denoted p_i and also represent the bar force $\frac{\overline{q_1}}{\delta\cdot\overline{Q_1}}$ caused by a virtual force $\delta\cdot\overline{Q_1}$ applied at the same location. Column 3 lists the same quantitiy for a unit load and for a virutal force $\delta\cdot\overline{Q_2}$ applied at release 2. These three columns constitute a record of the truss analysis needed for this problem.

Verticals: 500 mm^2 ; Webs: 250 mm^2; E=200,000 N/mm^2; a=1.0x10^{-5}/ °C



a) Structure b) Redundant forces c) Forces due to lateral load d) Forces due to temperature drop

3. Column 4 gives the value of L/EA for each bar in terms of L_c/EA_c of the vertical members. This is useful because the term L/EA cancels out in some of the calculations.
4. The method of virtual work is applied directly to compute the displacements Δ_{1p} and Δ_{2p} corresponding to the releases and

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

4. The method of virtual work is applied directly to compute the displacements Δ_{1Q} and Δ_{2Q} corresponding to the releases and caused by the actual loads. Apply a virtual force $\delta\cdot\overline{Q_1}$ at release 1. The internal virtual forces $\overline{q_1}$ are found in column 2. The internal virtual work $\overline{q_1}\cdot\Delta l$ is found in column 5 as the product of columns 1, 2 and 4. The summation of column 5 is $\Delta_{1q} = -122.42\cdot\frac{L_c}{EA_c}$. Similarly, column 6 is the product of columns 1, 3, and 4, giving $\Delta_{2q} = -273.12\cdot\frac{L_c}{EA_c}$.

5. The same method is used to compute the flexibilities. In this case, the real loading is a unit load corresponding to release 1 leading to f_{11} and f_{21}, and then to release 2 leading to f_{12} and f_{22}. Column 7 shows the computation for f_{11}. It is the product of column 2, representing force due to the real unit load with column 2 representing force due to a virtual force $\delta\cdot\overline{Q_1}$ at the same location (release 1) multiplied by column 4 to include the L_c/EA_c term. Column 8 derives from columns 2, 3, and 4 and leads to f_{21}. Columns 9 and 10 are the computations for the remaining flexibilities.

6. We have assumed that a temperature drop of 30C occurs in the outer members. The corresponding length changes are found in column 11. Again using the virtual work method, column 12 tabulates the internal virtual work of th virtual forces through displacements Δl where for each bar, $\Delta l = \alpha l \Delta T$. Column 12 is therefore the product of columsn 2 and 11. The summation of the elements of column 12 is the displacement Δl corresponding to release 1. Column 13 repeats this process for Δ_2 corresponding to release 2.

7. The tabulated information provides the necessary terms for a matrix solution of the problem. We have

$$f = \begin{pmatrix} 8.66 & 1 \\ 1 & 8.66 \end{pmatrix}\cdot\frac{L_c}{EA_c}$$

$$\Delta q = \begin{pmatrix} -122.42 \\ -273.12 \end{pmatrix}\cdot\frac{L_c}{EA_c}$$

$$\Delta_\Delta = \begin{pmatrix} 6.36 \\ 4.24 \end{pmatrix}\cdot 10^{-4}\cdot L_c$$

therefore

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 0.117 & -0.0134 \\ -0.0134 & 0.117 \end{pmatrix}\cdot\frac{EA_c}{L_c}$$

8. The redundant forces due to the applied load are

$$R = f^{-1}\cdot\left(-\Delta_Q\right)$$

$$R = \begin{pmatrix} -0.0134 & 0.117 \end{pmatrix}\cdot\frac{EA_c}{L_c}\cdot\begin{pmatrix} 122.42 \\ 273.12 \end{pmatrix}\cdot\frac{L_c}{EA_c} = \begin{pmatrix} 10.66 \\ 30.32 \end{pmatrix}$$

9. Thus $R_1 = 10.66\text{kN},\ R_2 = 30.32\text{kN}$

10. The redundant forces due to the temperature drop are $R = f^{-1}\cdot\left(-\Delta_\Delta\right)$

$$R = \begin{pmatrix} -0.0134 & 0.117 \end{pmatrix}\cdot\frac{EA_c}{L_c}\cdot\begin{pmatrix} -6.36 \\ -4.24 \end{pmatrix}\cdot 10^{-4}\cdot L_c = \begin{pmatrix} -6.87 \\ -4.11 \end{pmatrix}\cdot 10^{-5}\cdot EA_c$$

11. Thus with $E := 200\frac{kN}{mm^2},\ A_c := 500mm^2$

$$R_1 := -6.87\cdot 10^{-5}\cdot E\cdot A_c = -6.87\cdot kN$$

$$R_2 := -4.11\cdot 10^{-5}\cdot E\cdot A_c = -4.11\cdot kN$$

12. Using the redundant forces from each of these analyses, the remainder of the bar forces are computed by simple equilibrium.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

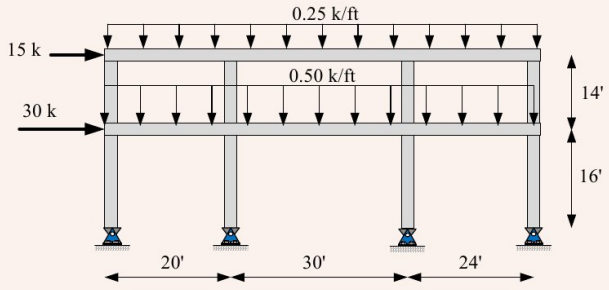
COPIA DI REVISIONE

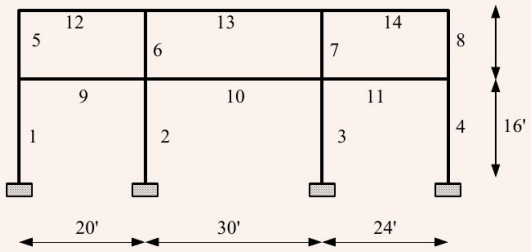
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Table ?? contains such computations. The bar forces in any bar is the force in column 1 added to that in column 2 multiplied by R_1 plus that is column 3 multiplied by R_2. This follows from the fact that columns 2 and 3 are bar forces caused by a force of unitiy corresponding to each of the redundants. The results of the calcultations are shown for the applied loading and for the temperature drop. The forces caused by the temperature drop are similar in magnitude to those caused by wind load in this example. Temperature differences, shrinkage, support settlement, or tolerance errors can cause important effects in statically indeterminate structures.

15.1 Approximate Analysis of a Frame Subjected to Vertical and Horizontal Loads

Draw the shear and moment diagrams for the following frame.





Solution:

The analysis should be conducted in conjunction with the free body diagram shown below.

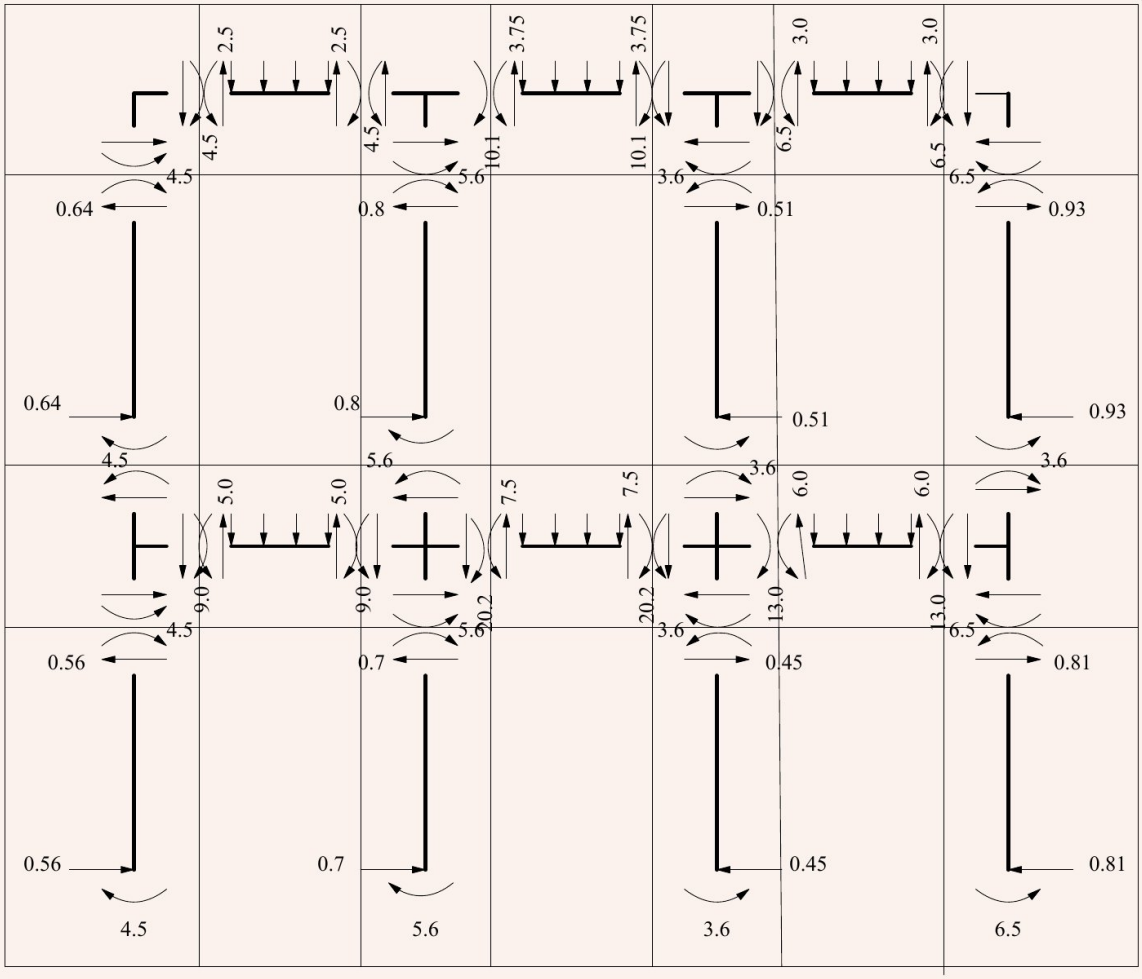
Vertical Loads

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Gravity Loads

$w_{12} := 0.25 \frac{kip}{ft}$ $w_{13} := w_{12} = 0.25 \cdot \frac{kip}{ft}$ $w_{14} := w_{12} = 0.25 \cdot \frac{kip}{ft}$

$w_9 := 0.5 \frac{kip}{ft}$ $w_{10} := w_9 = 0.5 \cdot \frac{kip}{ft}$ $w_{11} := w_9 = 0.5 \cdot \frac{kip}{ft}$

Approximate Equations

$M_{left}(w, L) := -0.045 \cdot w \cdot L^2$ Maximum negative moment at girder end

$M_{cent}(w, L) := 0.08 \cdot w \cdot L^2$ Maximum positive moment

1. Top Girder Moments

$M_{12lft} := M_{left}(w_{12}, 20ft) = -4.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{12cnt} := M_{cent}(w_{12}, 20ft) = 8 \cdot kip \cdot ft$

$M_{12rgt} := M_{12lft} = -4.5 \cdot kip \cdot ft$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$M_{13lft} := M_{left}(w_{13}, 30ft) = -10.125 \cdot kip \cdot ft$

$M_{13cnt} := M_{cent}(w_{13}, 30ft) = 18 \cdot kip \cdot ft$

$M_{13rgt} := M_{13lft} = -10.125 \cdot kip \cdot ft$

$M_{14lft} := M_{left}(w_{14}, 24ft) = -6.48 \cdot kip \cdot ft$

$M_{14cnt} := M_{cent}(w_{14}, 24ft) = 11.52 \cdot kip \cdot ft$

$M_{14rgt} := M_{14lft} = -6.48 \cdot kip \cdot ft$

2. Bottom Girder Moments

$M_{9lft} := M_{left}(w_9, 20ft) = -9 \cdot kip \cdot ft$

$M_{9cnt} := M_{cent}(w_9, 20ft) = 16 \cdot kip \cdot ft$

$M_{9rgt} := M_{9lft} = -9 \cdot kip \cdot ft$

$M_{10lft} := M_{left}(w_{10}, 30ft) = -20.25 \cdot kip \cdot ft$

$M_{10cnt} := M_{cent}(w_{10}, 30ft) = 36 \cdot kip \cdot ft$

$M_{10rgt} := M_{10lft} = -20.25 \cdot kip \cdot ft$

$M_{11lft} := M_{left}(w_{11}, 24ft) = -12.96 \cdot kip \cdot ft$

$M_{11cnt} := M_{cent}(w_{11}, 24ft) = 23.04 \cdot kip \cdot ft$

$M_{11rgt} := M_{11lft} = -12.96 \cdot kip \cdot ft$

3. Top Column Moments

$M_{5top} := M_{12lft} = -4.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{5bot} := -M_{5top} = 4.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{6top} := -M_{12rgt} + M_{13lft} = -5.625 \cdot kip \cdot ft$

$M_{6bot} := -M_{6top} = 5.625 \cdot kip \cdot ft$

$M_{7top} := -M_{13rgt} + M_{14lft} = 3.645 \cdot kip \cdot ft$

$M_{7bot} := -M_{7top} = -3.645 \cdot kip \cdot ft$

$M_{8top} := -M_{14rgt} = 6.48 \cdot kip \cdot ft$

$M_{8bot} := -M_{8top} = -6.48 \cdot kip \cdot ft$

4. Bottom Column Moments

$M_{1top} := M_{5bot} + M_{9lft} = -4.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{1bot} := -M_{1top} = 4.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{2top} := M_{6bot} - M_{9rgt} + M_{10lft} = -5.625 \cdot kip \cdot ft$

$M_{2bot} := -M_{2top} = 5.625 \cdot kip \cdot ft$

$M_{3top} := M_{7bot} - M_{10rgt} + M_{11lft} = 3.645 \cdot kip \cdot ft$

$M_{3bot} := -M_{3top} = -3.645 \cdot kip \cdot ft$

$M_{4top} := M_{8bot} - M_{11rgt} = 6.48 \cdot kip \cdot ft$

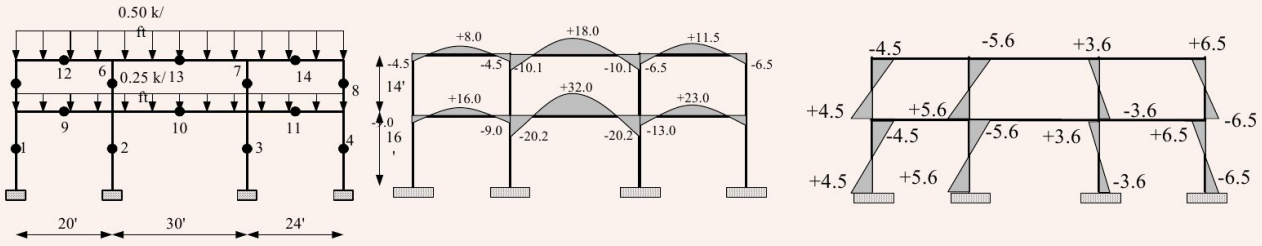
$M_{4bot} := -M_{4top} = -6.48 \cdot kip \cdot ft$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



5. Top Girder Shear

$$V_{12lft} := \frac{w_{12} \cdot 20ft}{2} = 2.5 \cdot kip$$

$$V_{12rgt} := -V_{12lft} = -2.5 \cdot kip$$

$$V_{13lft} := \frac{w_{13} \cdot 30ft}{2} = 3.75 \cdot kip$$

$$V_{13rgt} := -V_{13lft} = -3.75 \cdot kip$$

$$V_{14lft} := \frac{w_{14} \cdot 24ft}{2} = 3 \cdot kip$$

$$V_{14rgt} := -V_{14lft} = -3 \cdot kip$$

6. Bottom Girder Shear

$$V_{9lft} := \frac{w_9 \cdot 20ft}{2} = 5 \cdot kip$$

$$V_{9rgt} := -V_{9lft} = -5 \cdot kip$$

$$V_{10lft} := \frac{w_{10} \cdot 30ft}{2} = 7.5 \cdot kip$$

$$V_{10rgt} := -V_{10lft} = -7.5 \cdot kip$$

$$V_{11lft} := \frac{w_{11} \cdot 24ft}{2} = 6 \cdot kip$$

$$V_{11rgt} := -V_{11lft} = -6 \cdot kip$$

7. Column Shears

$h_5 := 14ft$ $h_6 := h_5 = 14 \cdot ft$ $h_7 := h_5 = 14 \cdot ft$ $h_8 := h_5 = 14 \cdot ft$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$h_1 := 16ft$ $h_2 := h_1 = 16 \cdot ft$ $h_3 := h_1 = 16 \cdot ft$ $h_4 := h_1 = 16 \cdot ft$

$$V_5 := \frac{M_{5top}}{\frac{h_5}{2}} = -0.643 \cdot kip$$

$$V_6 := \frac{M_{6top}}{\frac{h_6}{2}} = -0.804 \cdot kip$$

$$V_7 := \frac{M_{7top}}{\frac{h_7}{2}} = 0.521 \cdot kip$$

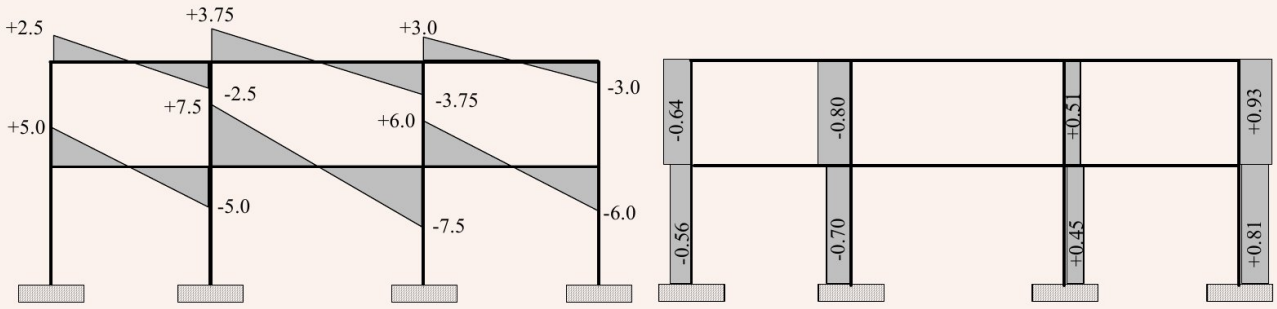
$$V_8 := \frac{M_{8top}}{\frac{h_8}{2}} = 0.926 \cdot kip$$

$$V_1 := \frac{M_{1top}}{\frac{h_1}{2}} = -0.563 \cdot kip$$

$$V_2 := \frac{M_{2top}}{\frac{h_2}{2}} = -0.703 \cdot kip$$

$$V_3 := \frac{M_{3top}}{\frac{h_3}{2}} = 0.456 \cdot kip$$

$$V_4 := \frac{M_{4top}}{\frac{h_4}{2}} = 0.81 \cdot kip$$



I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

8. Top Column Axial Forces

$P_5 := V_{12lft} = 2.5 \cdot kip$

$P_6 := -V_{12rgt} + V_{13lft} = 6.25 \cdot kip$

$P_7 := -V_{13rgt} + V_{14lft} = 6.75 \cdot kip$

$P_8 := -V_{14rgt} = 3 \cdot kip$

9. Bottom Chord Axial Forces

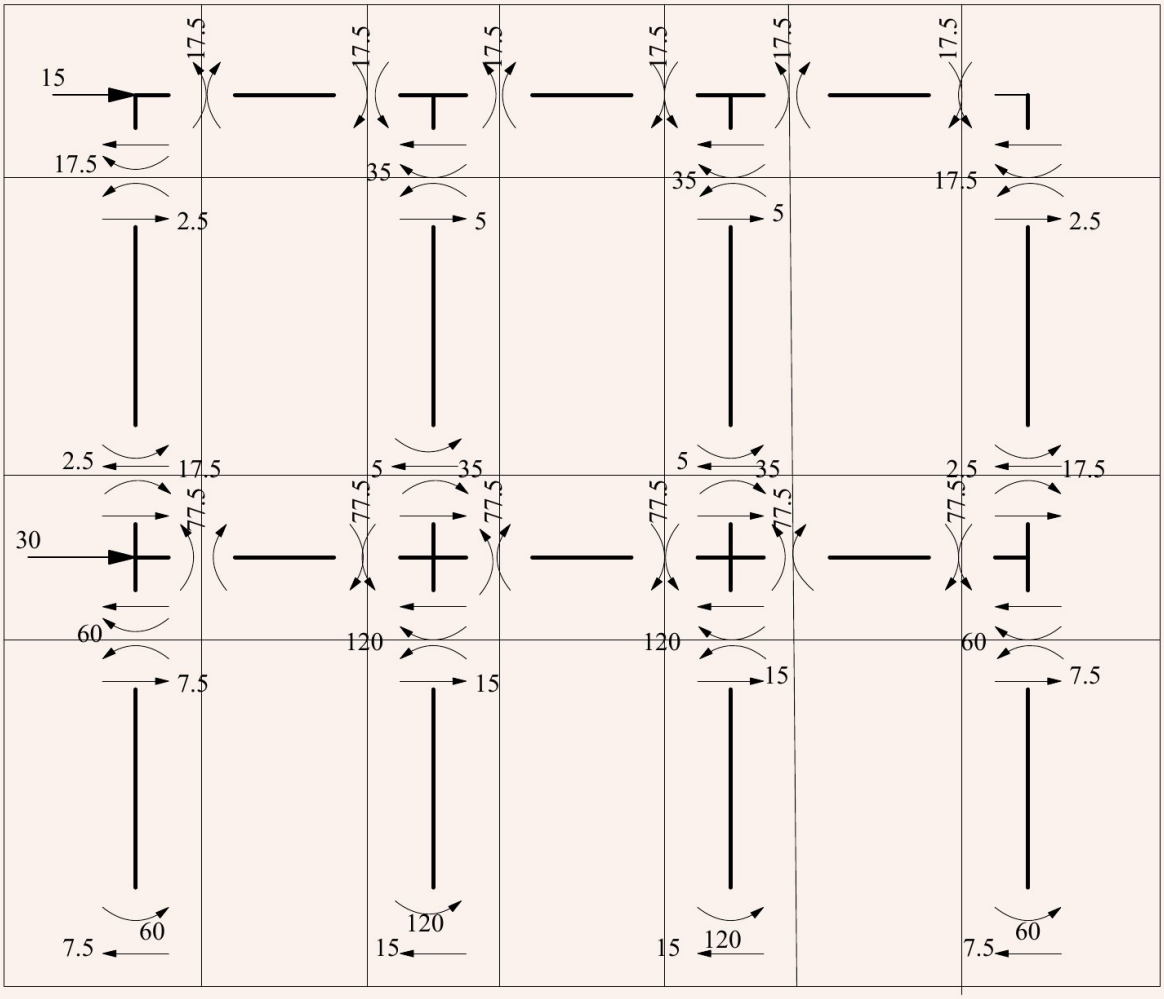
$P_1 := P_5 + V_{9lft} = 7.5 \cdot kip$

$P_2 := P_6 - V_{10rgt} + V_{9lft} = 18.75 \cdot kip$

$P_3 := P_7 - V_{11rgt} + V_{10lft} = 20.25 \cdot kip$

$P_4 := P_8 - V_{11rgt} = 9 \cdot kip$

Horizontal Loads



 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Horizontal Loads

$F_5 := 15kip$

$F_1 := 30kip$

Approximate Equations

$$V_{ext}(F,n) := \frac{F}{2 \cdot n}$$

$n_{bays} := 3$

1. Column Shears

$V_5 := V_{ext}(F_5, n_{bays}) = 2.5 \cdot kip$

$V_6 := 2 \cdot V_5 = 5 \cdot kip$

$V_7 := 2 \cdot V_5 = 5 \cdot kip$

$V_8 := V_5 = 2.5 \cdot kip$

$V_1 := V_{ext}(F_1 + F_5, n_{bays}) = 7.5 \cdot kip$

$V_2 := 2 \cdot V_1 = 15 \cdot kip$

$V_3 := 2 \cdot V_1 = 15 \cdot kip$

$V_4 := V_1 = 7.5 \cdot kip$

2. Top Column Moments

$$M_{5top} := \frac{V_5 \cdot h_5}{2} = 17.5 \cdot kip \cdot ft$$

$M_{5bot} := -M_{5top} = -17.5 \cdot kip \cdot ft$

$$M_{6top} := \frac{V_6 \cdot h_6}{2} = 35 \cdot kip \cdot ft$$

$M_{6bot} := -M_{6top} = -35 \cdot kip \cdot ft$

$$M_{7top} := \frac{V_7 \cdot h_7}{2} = 35 \cdot kip \cdot ft$$

$M_{7bot} := -M_{7top} = -35 \cdot kip \cdot ft$

$$M_{8top} := \frac{V_8 \cdot h_8}{2} = 17.5 \cdot kip \cdot ft$$

$M_{8bot} := -M_{8top} = -17.5 \cdot kip \cdot ft$

3. Bottom Column Moments

$$M_{1top} := \frac{V_1 \cdot h_1}{2} = 60 \cdot kip \cdot ft$$

$M_{1bot} := -M_{1top} = -60 \cdot kip \cdot ft$

$$M_{2top} := \frac{V_2 \cdot h_2}{2} = 120 \cdot kip \cdot ft$$

$M_{2bot} := -M_{2top} = -120 \cdot kip \cdot ft$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$M_{2bot} := -M_{2top} = -120 \cdot kip \cdot ft$

$M_{3top} := \frac{V_3 \cdot h_3}{2} = 120 \cdot kip \cdot ft$

$M_{3bot} := -M_{3top} = -120 \cdot kip \cdot ft$

$M_{4top} := \frac{V_4 \cdot h_4}{2} = 60 \cdot kip \cdot ft$

$M_{4bot} := -M_{4top} = -60 \cdot kip \cdot ft$

4. Top Girder Moments

$M_{12lft} := M_{5top} = 17.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{12rgt} := -M_{12lft} = -17.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{13lft} := M_{12rgt} + M_{6top} = 17.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{13rgt} := -M_{13lft} = -17.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{14lft} := M_{13rgt} + M_{7top} = 17.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{14rgt} := -M_{14lft} = -17.5 \cdot kip \cdot ft$

5. Bottom Girder Moments

$M_{9lft} := M_{1top} - M_{5bot} = 77.5 \cdot kip \cdot ft$

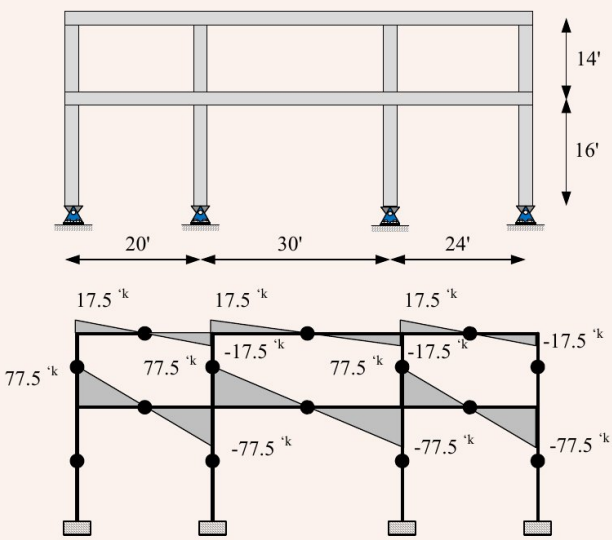
$M_{9rgt} := -M_{9lft} = -77.5 \cdot kip \cdot ft$

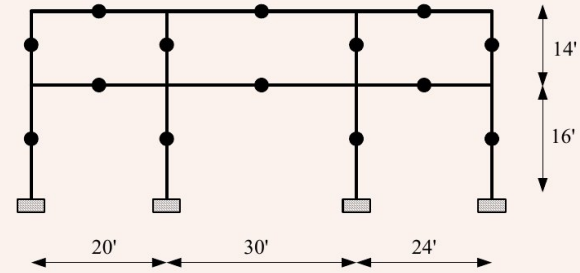
$M_{10lft} := M_{9rgt} + M_{2top} - M_{6bot} = 77.5 \cdot kip \cdot ft$

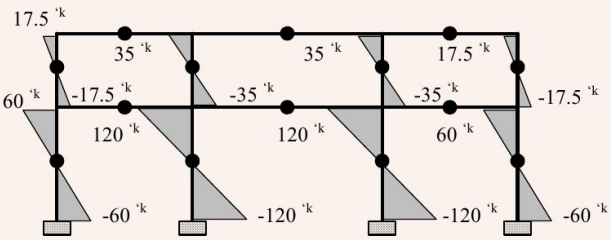
$M_{10rgt} := -M_{10lft} = -77.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{11lft} := M_{10rgt} + M_{3top} - M_{7bot} = 77.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{11rgt} := -M_{11lft} = -77.5 \cdot kip \cdot ft$







I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

6. Top Girder Shear

$V_{12lft} := \frac{-2 \cdot M_{12lft}}{20ft} = -1.75 \cdot kip$

$V_{12rgt} := V_{12lft} = -1.75 \cdot kip$

$V_{13lft} := \frac{-2 \cdot M_{13lft}}{30ft} = -1.167 \cdot kip$

$V_{13rgt} := V_{13lft} = -1.167 \cdot kip$

$V_{14lft} := \frac{-2 \cdot M_{14lft}}{24ft} = -1.458 \cdot kip$

$V_{14rgt} := V_{14lft} = -1.458 \cdot kip$

7. Bottom Girder Shear

$V_{9lft} := \frac{-2 \cdot M_{9lft}}{20ft} = -7.75 \cdot kip$

$V_{9rgt} := V_{9lft} = -7.75 \cdot kip$

$V_{10lft} := \frac{-2 \cdot M_{10lft}}{30ft} = -5.167 \cdot kip$

$V_{10rgt} := V_{10lft} = -5.167 \cdot kip$

$V_{11lft} := \frac{-2 \cdot M_{11lft}}{24ft} = -6.458 \cdot kip$

$V_{11rgt} := V_{11lft} = -6.458 \cdot kip$

8. Top Column Axial Forces (+ve tension, -ve compression)

$P_5 := -V_{12lft} = 1.75 \cdot kip$

$P_6 := V_{12rgt} - V_{13lft} = -0.583 \cdot kip$

$P_7 := V_{13rgt} - V_{14lft} = 0.292 \cdot kip$

$P_8 := V_{14rgt} = -1.458 \cdot kip$

8. Bottom Column Axial Forces (+ve tension, -ve compression)

$P_1 := P_5 - V_{9lft} = 9.5 \cdot kip$

$P_2 := P_6 - V_{10rgt} + V_{9lft} = -3.167 \cdot kip$

$P_3 := P_7 - V_{11rgt} + V_{10lft} = 1.583 \cdot kip$

$P_4 := P_8 + V_{11rgt} = -7.917 \cdot kip$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

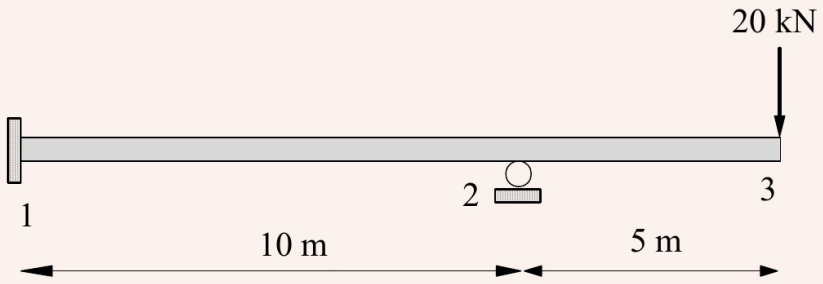
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.1 Propped Cantilever Beam

Find the end moments for the beam



Solution:

1. The beam is kinematicall indeterminate to the third degreee (θ_2, Δ_3, θ_3), however by replacing the overhang by a fixed end moment equal to 100 kN-m at support 2, we reduce the degreee of kinematic indeterminancy to one (θ_2).
2. The equilibrium relation is

$$M_{21} - 100\text{kN}\cdot\text{m} = 0$$

3. The member end moments in terms of the rotations are

$$M_{12} = 2\cdot E\cdot K_{12}\cdot\left(2\cdot\theta_1 + \theta_2\right) = \frac{2}{10}\cdot E\cdot I\cdot\theta_2$$

$$M_{21} = 2\cdot E\cdot K_{12}\cdot\left(\theta_1 + 2\cdot\theta_2\right) = \frac{4}{10}\cdot E\cdot I\cdot\theta_2$$

4. Substituting into the equilibrium equations

$$\theta_2 = \frac{10}{4E\cdot I}\cdot M_{21} = \frac{250}{EI}$$

or

$$\boxed{M_{12} = \frac{2}{10}\cdot EI\cdot\theta_2 = \frac{2\cdot EI}{10}\cdot\frac{250}{EI} = 50\text{kN}\cdot\text{m}}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

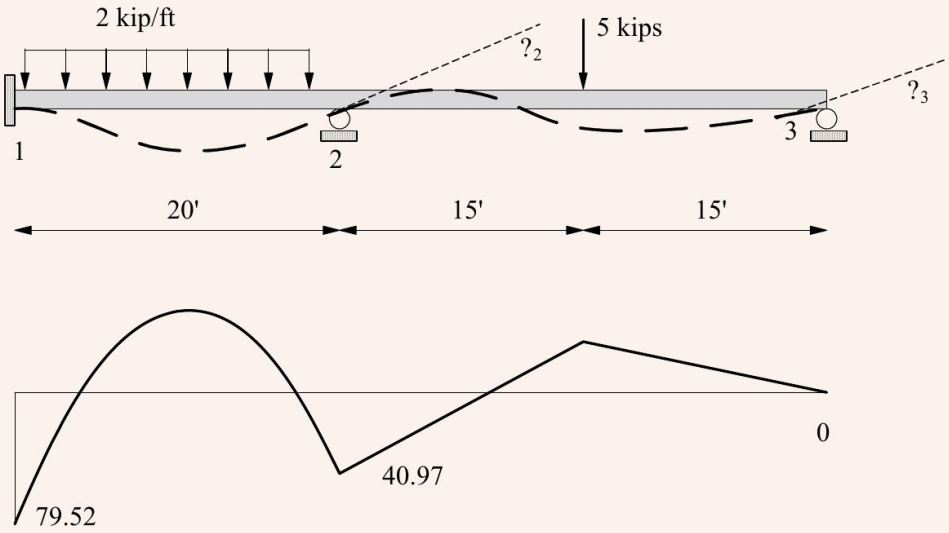
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.2 Two-Span Beam, Slope Deflection

Draw the moment diagram for the two span beam



Solution:

1. The unknows are θ_2 and θ_3
2. The equilibrium relations are

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$M_{21} + M_{23} = 0$

$M_{32} = 0$

3. The fixed end moments are given by

$$M_{12F} = -M_{21F} = \frac{-w \cdot L^2}{12} \qquad M_{12F} := \frac{-\left(-2\,\frac{kip}{ft}\right)\cdot(20ft)^2}{12} = 66.667 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{23F} = -M_{32F} = \frac{-PL}{8} \qquad M_{23F} := \frac{-(-5kip)(30ft)}{8} = 18.75 \cdot kip \cdot ft$$

4. The member end moments in terms of the rotations are

$$M_{12} = 2 \cdot E \cdot K_{12} \cdot \theta_2 + M_{12F} = \frac{2EI}{L_1} \cdot \theta_2 + M_{12F} = \frac{EI}{10} \cdot \theta_2 + M_{12F}$$

$$M_{21} = 2 \cdot E \cdot K_{12} \cdot (2\theta_2) + M_{21F} = \frac{4EI}{L_1} \cdot \theta_2 + M_{21F} = \frac{EI}{5} \cdot \theta_2 + M_{21F}$$

$$M_{23} = 2 \cdot E \cdot K_{23} \cdot (2\theta_2 + \theta_3) + M_{23F} = \frac{2EI}{L_2} \cdot (2\theta_2 + \theta_3) + M_{23F} = \frac{EI}{7.5} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{15} \cdot \theta_3 + M_{23F}$$

$$M_{32} = 2 \cdot E \cdot K_{23} \cdot (\theta_2 + 2\theta_3) + M_{32F} = \frac{2EI}{L_2} \cdot (\theta_2 + 2\theta_3) + M_{32F} = \frac{EI}{15} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{7.5} \cdot \theta_3 + M_{32F}$$

5. Substituting in the equilibrium equations

$$\frac{EI}{5} \cdot \theta_2 + M_{21F} + \frac{EI}{7.5} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{15} \cdot \theta_3 + M_{23F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{EI}{5} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{7.5} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{15} \cdot \theta_3 = 47.917\ kip \cdot ft$$

$$\frac{EI}{15} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{7.5} \cdot \theta_3 + M_{32F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{EI}{15} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{7.5} \cdot \theta_3 = 18.75\ kip \cdot ft$$

or

$$EI \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 718.755 \\ 281.25 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} EI\theta_2 \\ EI\theta_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 718.755 \\ 281.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 128.473 \\ 76.388 \end{pmatrix}$$

6. Substituting for the moments

$$M_{12} := \frac{EI\theta_2 \cdot kip \cdot ft}{10} + M_{12F} = 79.514 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{21} := \frac{EI\theta_2 \cdot kip \cdot ft}{5} - M_{12F} = -40.972 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{23} := \frac{EI\theta_2 \cdot kip \cdot ft}{7.5} + \frac{EI\theta_3 \cdot kip \cdot ft}{15} + M_{23F} = 40.972 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{32} := \frac{EI\theta_2 \cdot kip \cdot ft}{15} + \frac{EI\theta_3 \cdot kip \cdot ft}{7.5} - M_{23F} = -0 \cdot kip \cdot ft$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.3 Two-Span Beam, Slope Deflection, Initial Deflection

Determine the end moments for the previous problem if the middle support settles by 6 in.

Solution:

1. Since we are performing a linear elastic analysis, we can separately analyze the beam for support settlement, and then add the moments to those due to the applied loads.
2. The unknowns are θ_2 and θ_3
3. The equilibrium relations are

$$M_{21} + M_{23} = 0$$

$$M_{32} = 0$$

4. The member end moments in terms of the rotations are

$$M_{12} = 2\cdot E\cdot K_{12}\cdot\left(\theta_2 - 3\frac{\Delta}{L_{12}}\right) = \frac{2EI}{20}\cdot\left(\theta_2 + 3\cdot\frac{0.5}{20}\right) = \frac{EI}{10}\cdot\theta_2 + \frac{3EI}{400}$$

$$M_{21} = 2\cdot E\cdot K_{12}\cdot\left(2\theta_2 - 3\frac{\Delta}{L_{12}}\right) = \frac{2EI}{20}\cdot\left(2\theta_2 + 3\cdot\frac{0.5}{20}\right) = \frac{EI}{5}\cdot\theta_2 + \frac{3EI}{400}$$

$$M_{23} = 2\cdot E\cdot K_{23}\cdot\left(2\theta_2 + \theta_3 - 3\frac{\Delta}{L_{23}}\right) = \frac{2EI}{30}\cdot\left(2\theta_2 + \theta_3 + 3\cdot\frac{0.5}{30}\right) = \frac{EI}{7.5}\cdot\theta_2 + \frac{EI}{15}\cdot\theta_3 + \frac{EI}{300}$$

$$M_{32} = 2\cdot E\cdot K_{23}\cdot\left(\theta_2 + 2\theta_3 - 3\frac{\Delta}{L_{23}}\right) = \frac{2EI}{30}\cdot\left(\theta_2 + 2\theta_3 + 3\cdot\frac{0.5}{30}\right) = \frac{EI}{15}\cdot\theta_2 + \frac{EI}{7.5}\cdot\theta_3 + \frac{EI}{300}$$

5. Substituting into the equilibrium equations

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\frac{EI}{5}\cdot\theta_2+\frac{3EI}{400}+\frac{EI}{7.5}\cdot\theta_2+\frac{EI}{15}\cdot\theta_3+\frac{EI}{300}=0 \qquad \frac{EI}{3}\cdot\theta_2+\frac{EI}{15}\cdot\theta_3=\frac{-13EI}{1200}$$

$$\frac{EI}{15}\cdot\theta_2+\frac{EI}{7.5}\cdot\theta_3+\frac{EI}{300}=0 \qquad \frac{EI}{15}\cdot\theta_2+\frac{EI}{7.5}\cdot\theta_3=\frac{-EI}{300}$$

or

$$EI\cdot\begin{pmatrix}100 & 20\\ 20 & 40\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\theta_2\\ \theta_3\end{pmatrix}=EI\cdot\begin{pmatrix}\frac{-13}{4}\\ -1\end{pmatrix}$$

which will give

$$\begin{pmatrix}\theta_2\\ \theta_3\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}100 & 20\\ 20 & 40\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\frac{-13}{4}\\ -1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-\frac{11}{360}\\ -\frac{7}{720}\end{pmatrix}$$

6. Thus the additional moments due to the settlement are

$$M_{12}(EI):=\frac{EI}{10}\cdot\theta_2+\frac{3EI}{400}\ \text{simplify}\ \rightarrow\frac{EI}{225}$$

$$M_{21}(EI):=\frac{EI}{5}\cdot\theta_2+\frac{3EI}{400}\ \text{simplify}\ \rightarrow\frac{EI}{720}$$

$$M_{23}(EI):=\frac{EI}{7.5}\cdot\theta_2+\frac{EI}{15}\cdot\theta_3+\frac{EI}{300}\ \text{simplify}\ \rightarrow -0.0013888888888888888889\cdot EI$$

$$M_{32}(EI):=\frac{EI}{15}\cdot\theta_2+\frac{EI}{7.5}\cdot\theta_3+\frac{EI}{300}\ \text{simplify}\ \rightarrow -3.7037037037037037e\text{-}24\cdot EI$$

16.4 Frame, Slope Deflection

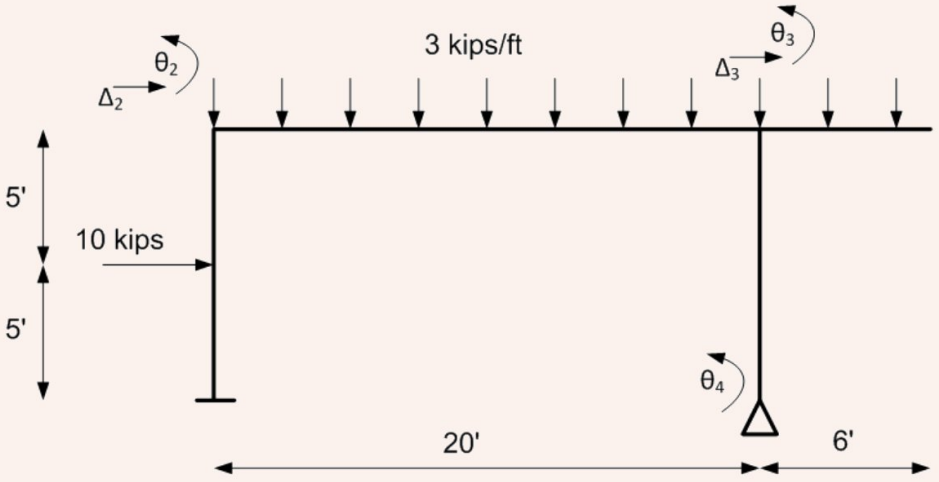
Determine the end moments for the frame

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

1. The effect of the 35 cantilever can be included by replacing it with its end moment.

$$M_3 = -w \cdot L \cdot \frac{L}{2} \qquad M_3 := 3\frac{kip}{ft} \cdot 6ft \cdot 6\frac{ft}{2} = 54 \cdot kip \cdot ft$$

2. The unknown displacements and rotations are

   Δ_2 and θ_2 at joint 2

   θ_3 and θ_4 at joints 3 and 4

   We observe that due to the lack of symmetry, there will be a lateral displacement in the frame, and neglecting axial deformations, $\Delta_2 = \Delta_3$

3. The equilibrium relations are

$$M_{23} + M_{32} = 0$$

$$M_{32} + M_{34} = -54kip \cdot ft$$

$$M_{43} = 0$$

$$V_{12} + V_{43} - 10kip = 0$$

   Thus we have four unknown displacements and four equations. However, the last two equations are in terms of of the shear forces, and we need to have them in terms of the end moments. This can be achieved through the following equilibrium relations

$$V_{12} = \frac{M_{12} + M_{21} + 50}{L_{12}}$$

$$V_{43} = \frac{M_{34} + M_{43}}{L_{34}}$$

   Hence, all four equations are now in terms of the moments.

4. The fixed end moments for member 23 are

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

4. The fixed end moments for member 23 are

$$M_{21F} = \frac{-PL}{8} \qquad M_{21F} := \frac{-10\text{kip}\cdot 10\text{ft}}{8} = -12.5\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$$

$$M_{23F} = \frac{-w\cdot L^2}{12} \qquad M_{21F} := \frac{-3\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot(20\text{ft})^2}{12} = -100\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$$

5. The member end moments in terms of the rotations are

$$M_{12} = 2\cdot E\cdot K_{12}\cdot\left(\theta_2 - 3\frac{\Delta_2}{L_{12}}\right) + M_{12F} = 0.2EI\cdot\left(\theta_2 - 0.3\Delta_2\right) + 12.5$$

$$M_{21} = 2\cdot E\cdot K_{12}\cdot\left(2\theta_2 - 3\frac{\Delta_2}{L_{12}}\right) + M_{21F} = 0.2EI\cdot\left(2\theta_2 - 0.3\Delta_2\right) - 12.5$$

$$M_{23} = 2\cdot E\cdot K_{23}\cdot\left(2\theta_2 + \theta_3\right) + M_{23F} = 0.1EI\cdot\left(2\theta_2 + \theta_3\right) + 100$$

$$M_{32} = 2\cdot E\cdot K_{32}\cdot\left(\theta_2 + 2\theta_3\right) + M_{32F} = 0.1EI\cdot\left(\theta_2 + 2\theta_3\right) - 100$$

$$M_{34} = 2\cdot E\cdot K_{34}\cdot\left(2\theta_3 + \theta_4 - 3\frac{\Delta_2}{L_{34}}\right) = 0.2EI\cdot\left(2\theta_3 + \theta_4 - 0.3\Delta_2\right) + 100$$

$$M_{43} = 2\cdot E\cdot K_{34}\cdot\left(\theta_3 + 2\theta_4 - 3\frac{\Delta_2}{L_{34}}\right) = 0.2EI\cdot\left(\theta_3 + 2\theta_4 - 0.3\Delta_2\right) + 100$$

6. Substituting into the equilibrium equations and dividing by EI

$$6\theta_2 + \theta_3 - 0.6\Delta_2 = \frac{-875}{EI}$$

$$\theta_2 + 6\theta_3 + 2\theta_4 - 0.6\Delta_2 = \frac{460}{EI}$$

$$\theta_3 + 2\theta_4 - 0.3\Delta_2 = 0$$

and the last equilibrium equation is obtained by substituting V_{12} and V_{43} and multiplying by 10/EI

$$\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - 0.4\Delta_2 = \frac{-83.3}{EI}$$

or

$$EI\cdot\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & -0.6 \\ 1 & 6 & 2 & -0.6 \\ 0 & 1 & 2 & -0.3 \\ 1 & 1 & 1 & -0.4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \Delta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{EI}\cdot\begin{pmatrix} -875 \\ 460 \\ 0 \\ -83.3 \end{pmatrix}$$

which will give

$$\begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \Delta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{EI}\cdot\begin{pmatrix} -294.8 \\ 68.4 \\ -240.6 \\ -1375.7 \end{pmatrix}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

7. Substituting into the slope deflection equations gives the end moments

$$\begin{pmatrix} M_{12} \\ M_{21} \\ M_{23} \\ M_{32} \\ M_{34} \\ M_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ -47.88 \\ 47.88 \\ -115.8 \\ 61.78 \\ 0 \end{pmatrix}$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

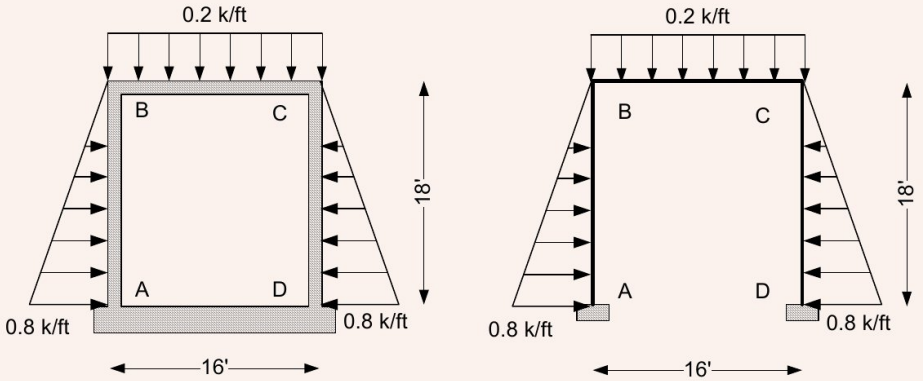
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.5 Box Culvert Slope Deflection

Draw the shear and moment diagram for the following box girder



Solution:

1. From symmetry $\theta_B = -\theta_C$, and at the base $\theta_A = \theta_D = 0$.
2. The fixed end moments are given by

$$FEM_{BC} = \frac{w \cdot L^2}{12} \qquad FEM_{BC} := \frac{0.2\frac{kip}{ft} \cdot (16ft)^2}{12} = 4.267 \cdot kip \cdot ft$$

$$FEM_{CB} = \frac{-w \cdot L^2}{12} \qquad FEM_{CB} := -\frac{0.2\frac{kip}{ft} \cdot (16ft)^2}{12} = -4.267 \cdot kip \cdot ft$$

$$FEM_{AB} = \frac{w \cdot L^2}{20} \qquad FEM_{AB} := \frac{0.8\frac{kip}{ft} \cdot (18ft)^2}{20} = 12.96 \cdot kip \cdot ft$$

$$FEM_{BA} = \frac{-\left(w \cdot L^2\right)}{30} \qquad FEM_{BA} := -\frac{0.8\frac{kip}{ft} \cdot (18ft)^2}{30} = -8.64 \cdot kip \cdot ft$$

3. The moments are given by

$$M_{BC} = \frac{2EI}{16} \cdot \left(2\theta_B + \theta_C\right) + FEM_{BC} = \frac{EI}{8} \cdot \theta_B + 4.267$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{18} \cdot \left(2\theta_B + 0\right) + FEM_{BA} = \frac{2EI}{9} \cdot \theta_B - 8.64$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{18} \cdot \left(2\theta_B\right) + FEM_{AB} = \frac{EI}{9} \cdot \theta_B + 12.96$$

4. Equilibrium at joint B

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

$$\frac{2EI}{9}\cdot\theta_B - 8.64 + \frac{EI}{8}\cdot\theta_B + 4.267 = 0$$

$$\theta_B(EI) := \frac{8.64 - 4.267}{\frac{2EI}{9} + \frac{EI}{8}} \rightarrow \frac{12.594}{EI}$$

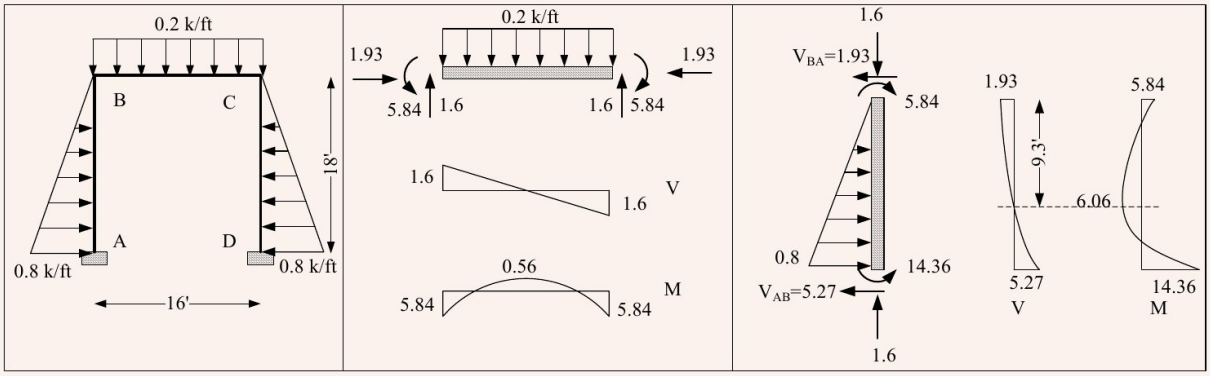
5. Substitute θ_B to get the moments

$$M_{BC} := \left[\frac{EI}{8}\cdot\left(\frac{12.594}{EI}\right) + 4.267\right]\cdot kip\cdot ft \rightarrow 5.841\cdot ft\cdot kip$$

$$M_{AB} := \left[\frac{EI}{9}\cdot\left(\frac{12.594}{EI}\right) + 12.96\right]\cdot kip\cdot ft \rightarrow 14.359\cdot ft\cdot kip$$

$$M_{BA} := \left[\frac{2EI}{9}\cdot\left(\frac{12.594}{EI}\right) - 8.64\right]\cdot kip\cdot ft \rightarrow -5.841\cdot ft\cdot kip$$

6. Member forces are determined from statics. Careful, the moment diagram is now based on the so-called "design" sign convention.



I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

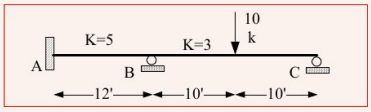
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

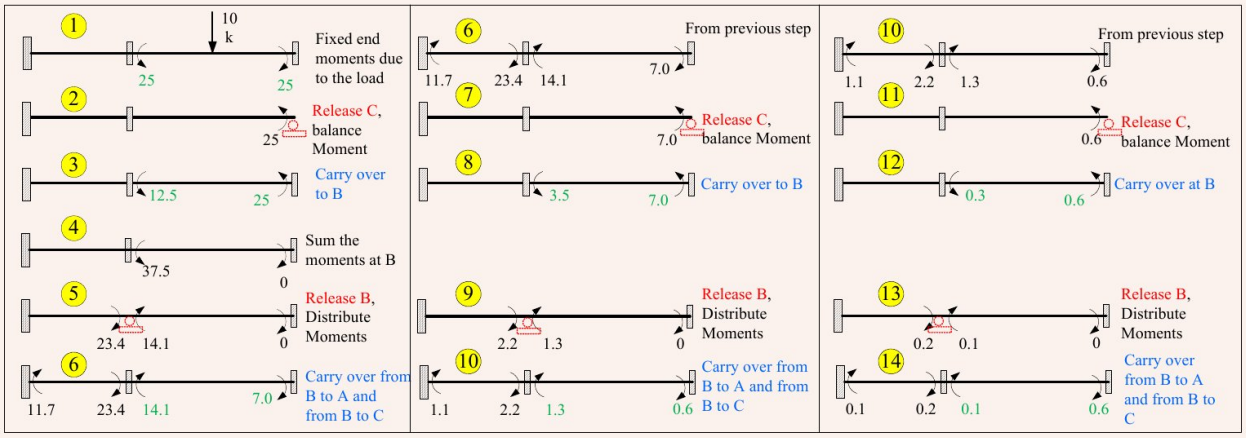
COPIA DI REVISIONE

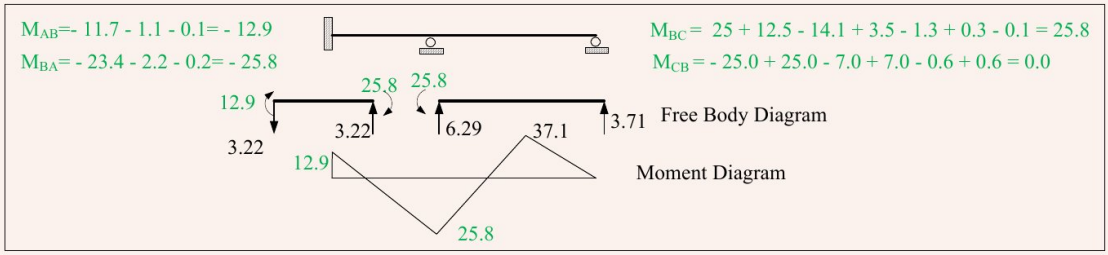
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.6 Continuous Beam

Solve for the moments at A and B by moment distribution, using (a) the ordinary method, and (b) the simplified method.







Solution:

For this example the fixed-end moments are computed as follows:

$$M_{BCF} = \frac{PL}{8} \qquad M_{BCF} := \frac{10\text{kip}\cdot 20\text{ft}}{8} = 25\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$M_{CBF} := -M_{BCF} = -25 \cdot kip \cdot ft$

2. Since the relative stiffness is given in each span, the distribution factors are

$$DF_{AB} = \frac{K_{AB}}{\Sigma K} = \frac{5}{\infty + 5} = 0$$

$$DF_{BA} = \frac{K_{BA}}{\Sigma K} = \frac{5}{5 + 3} = 0.625$$

$$DF_{BC} = \frac{K_{BC}}{\Sigma K} = \frac{3}{5 + 3} = 0.375$$

$$DF_{CB} = \frac{K_{CB}}{\Sigma K} = \frac{3}{3} = 1$$

3. The balancing computations are shown below.

Joint	A	B		C
Member	AB	BA	BC	CB
K	5	5	3	3
DF	0	0.625	0.375	1
FEM			25	-25
			12.5	25
	-11.7	-23.4	-14.1	-7
			3.5	7
	-1.1	-2.2	-1.3	-0.6
			0.3	0.6
	-0.1	-0.2	-0.1	
Total	-12.9	-25.8	25.8	0

4. The above solution is that referred to as the ordinary method, so named to designate the manner of handling the balancing at the simple support at C. It is known, of course, that the final moment must be zero at this support because it is simple
5. Consequently, the first step is to balance the fixed-end moment at C to zero. The carry-over is then amde immediately to B. When B is balanced, however, a carry-over must be made back to C simply because the relative stiffness of BC is based on end C of this span being fixed. It is apparent, however, that the moment carried back to C (in this case -7.0) cannot exist at this joint. Accordingly, it is immediately balanced out, and a carry-over is again made to B, this carry-over being considerably smaller than the first. Now B is again balanced, and the process continues until the numbers involved become too small to have any practical value.
6. Alternatively, we can use the simplified method. It was previously shown that if the support at C is simple and a moment is applied at B, then the resistance of the span BC to this moment is reduced to three-fourths the value it would have had wit C fixed. Consequently, the relative stiffness of span BC is reduced to three-fourths of the value given, it will not be necessary to carry over to C.

Joint	A	B		C
Member	AB	BA	BC	CB
K	5	5	2.25	3
DF	0	0.69	0.31	1
FEM			25	-25
			12.5	25
	-12.9	-25.8	-11.7	
Total	-12.9	-25.8	25.8	0

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Joint	A	B		C
Member	AB	BA	BC	CB
K	5	5	2.25	3
DF	0	0.69	0.31	1
FEM			25	-25
			12.5	25
	-12.9	-25.8	-11.7	
Total	-12.9	-25.8	25.8	0

7. From the standpoint of work involved, the advantage of the simplified method is obvious. It should always be used when the external (terminal) end of a member rests on a simple support, but it does not apply when a structure is continuous at a simple support. Attention is called to the fact that when the opposite end of the member is simply supported, the reduction factor for the stiffness is always 3/4 for a prismatic member but a variable quantity for a nonprismatic member.
8. One valuable feature of the tabular arrangement is that of dropping down one line for each balancing operation and making the carry-over on the same line. The practice clearly indicates the order of balancing the joints, which in turn makes it possible to check back in the event of an error. Moreover, the placing of the carry-over on the same line with the balancing moments definitely decreases the chances of omitting a carry-over.
9. The correctness of the answers may ina sense be checked by verifying $\Sigma M = 0$ at each joint. However, even though the final answers satisfy this equation at every join, this is in no way a check on the inital fixed end moments. These fixed end moments, therefore, should be checked with great care before beginning the balancing operation. Moreover, it occasionally happens that conpensating errors are made in the balancing, and these errors will not be apparent when cheking $\Sigma M = 0$ at each joint.

10. To draw the final shear and moment diagram, we start by drawing the free body diagram of each beam segment with the computed moments, and then solve from statics for the reactions

$12.9\text{kip}\cdot\text{ft} + 25.8\text{kip}\cdot\text{ft} - 12\text{ft}\,V_A = 0$ $\quad V_A := \dfrac{12.9\text{kip}\cdot\text{ft} + 25.8\text{kip}\cdot\text{ft}}{12\text{ft}} = 3.225\cdot\text{kip}$

$V_A + V_{BL} = 0$ $\quad V_{BL} := -V_A = -3.225\cdot\text{kip}$

$25.8\text{kip}\cdot\text{ft} + 10\text{kip}\cdot 10\text{ft} - 20\text{ft}\cdot V_{BR} = 0$ $\quad V_{BR} := \dfrac{25.8\text{kip}\cdot\text{ft} + 10\text{kip}\cdot 10\text{ft}}{20\text{ft}} = 6.29\cdot\text{kip}$

$6.29\text{kip} + V_C - 10\text{kip} = 0$ $\quad V_C := 10\text{kip} - 6.29\text{kip} = 3.71\cdot\text{kip}$

$-V_{BL} - V_{BR} + R_B = 0$ $\quad R_B := V_{BL} + V_{BR} = 3.065\cdot\text{kip}$

Check: $R_A + R_B + R_C - 10\text{kip} = 0$ $\quad V_A + R_B + V_C - 10\text{kip} = 0\cdot\text{kip}$

$M_{BC} := V_C\cdot 10\text{ft} = 37.1\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

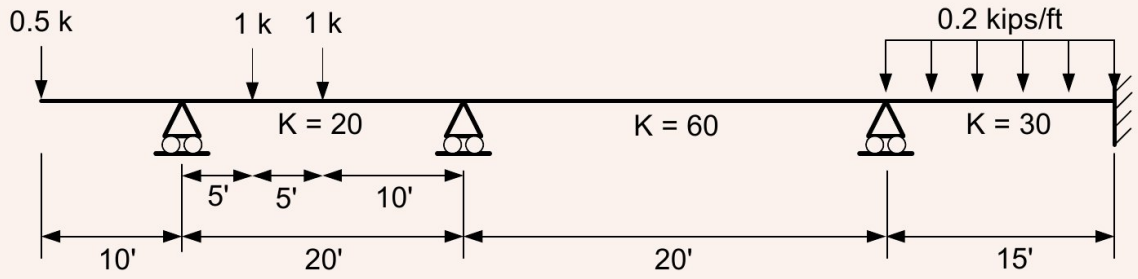
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.7 Continuous Beam

Using the simplified method of moment distribution, find the moments in the following continuous beam. The values of I as indicated by the various values of K, are different for the various spans. Determine the values of the reactions, draw the shear and bending moment diagrams, and sketch the deflected structure.



Solution:

1. Fixed-end moments

$$M_{AOF} := -0.5kip \cdot 10ft = -5 \cdot kip \cdot ft$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

For the 1 kip load:

$$M_{ABF} = \frac{P \cdot a \cdot b^2}{L^2} \qquad M_{ABF1} := \frac{1\text{kip} \cdot 5\text{ft} \cdot (15\text{ft})^2}{(20\text{ft})^2} = 2.812 \cdot \text{kip} \cdot \text{ft}$$

$$M_{BAF} = \frac{P \cdot a^2 \cdot b}{L^2} \qquad M_{BAF1} := \frac{1\text{kip} \cdot (5\text{ft})^2 \cdot 15\text{ft}}{(20\text{ft})^2} = 0.938 \cdot \text{kip} \cdot \text{ft}$$

For the 4 kip load:

$$M_{ABF} = \frac{P \cdot L}{8} \qquad M_{ABF4} := \frac{4\text{kip} \cdot 20\text{ft}}{8} = 10 \cdot \text{kip} \cdot \text{ft}$$

$$M_{BAF4} := -M_{ABF4} = -10 \cdot \text{kip} \cdot \text{ft}$$

For the uniform load:

$$M_{CDF} = \frac{w \cdot L^2}{12} \qquad M_{CDF} := \frac{0.2\frac{\text{kip}}{\text{ft}} \cdot (15\text{ft})^2}{12} = 3.75 \cdot \text{kip} \cdot \text{ft}$$

$$M_{DCF} := -M_{CDF} = -3.75 \cdot \text{kip} \cdot \text{ft}$$

2. The balancing operation is shown below

Joint	A		B		C		D
Member	AO	AB	BA	BC	CB	CD	DC
K	0	20	15	60	60	40	40
DF	0	1	0.2	0.8	0.6	0.4	0
FEM	-5	12.8	-10.9			3.8	-3.8
		-7.8	-3.9				
			2.9	11.9	5.9		
				-2.9	-5.8	-3.9	-1.9
			0.6	2.3	1.1		
				-0.3	-0.7	-0.4	-0.2
			0.1	0.2			
Total	-5	5	-11.2	11.2	0.5	-0.5	-5.9

3. The only new point in this example is the method of handling the overhanging end. It is obvious that the final internal moment at A must be 5 kip-ft and, accordingly, the first step is to balance out 7.8 kip-ft of the fixed end moment at AB, leaving the required 5

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

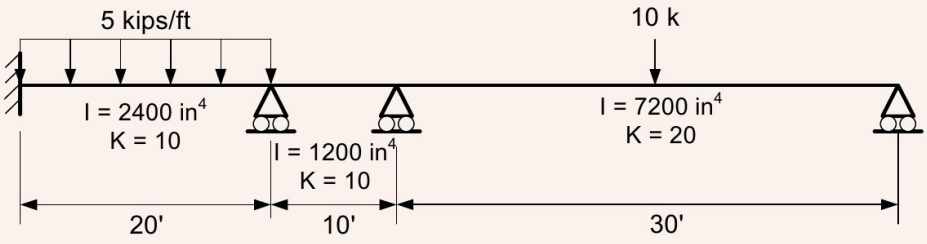
COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

kip-ft for the internal moment at AB. Since the relative stiffness of BA has been reduced to three-fourths of its original value, to permit considering the support at A as simple in balancing, no carry-over from B to A is required.
4. The easiest way to determine the reactions is to consider each span as a free body. End shears are first determined as caused by the loads alone on each span and, following this, the end shears caused by the end moments are computed. These two shears are added algebraically to obtain the net end shear for each span. An algebraic summation of the end shears at any support will give the total reaction.

16.8 Continuous Beam, Initial Settlement

For the following beam find the moments at A, B, and C by moment distribution. The support at C settles by 0.1 in. Use $E := 30000ksi$



Solution:

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

1. Fixed-end moments

Uniform load:

$$M_{ABF} = \frac{w \cdot L^2}{12} \qquad M_{ABF} := \frac{5\,\frac{kip}{ft} \cdot (20ft)^2}{12} = 166.667 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{BAF} := -M_{ABF} = -166.667 \cdot kip \cdot ft$$

Concentrated load:

$$M_{CDF} = \frac{P \cdot L}{8} \qquad M_{CDF} := \frac{10kip \cdot 30ft}{8} = 37.5 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{DCF} := -M_{CDF} = -37.5 \cdot kip \cdot ft$$

Moments caused by deflection:

$$M_{BCF} = \frac{6EI \cdot \Delta}{L^2} \qquad M_{BCF} := \frac{6 \cdot E \cdot 1200in^4 \cdot 0.1in}{(10ft)^2} = 125 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{CBF} := M_{BCF} = 125 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{CDF} = -\frac{6EI \cdot \Delta}{L^2} \qquad M_{CDF} := -\frac{6 \cdot E \cdot 7200in^4 \cdot 0.1in}{(30ft)^2} = -83.333 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{DCF} := M_{CDF} = -83.333 \cdot kip \cdot ft$$

2. Moment distribution

Joint	A	B		C		D
Member	AB	BA	BC	CB	CD	DC
K	10	10	10	10	15	20
DF	0	0.5	0.5	0.4	0.6	1
	167	-167			38	-38
			125	125	-83	-83
					60	121
FEM			-28	-56	-84	
	17	35	35	17		
			-3	-7	-10	
	1	2	1			
Total	185	-130	130	79	-79	0

The fixed-end moments caused by a settlement of supports have the same sign at both ends of each span adjacent to the settling support. The above computations have been carried to the nearest kip-ft, which for the moments of the magnitudes involved, would be significantly close for purposes of design.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.9 Frame

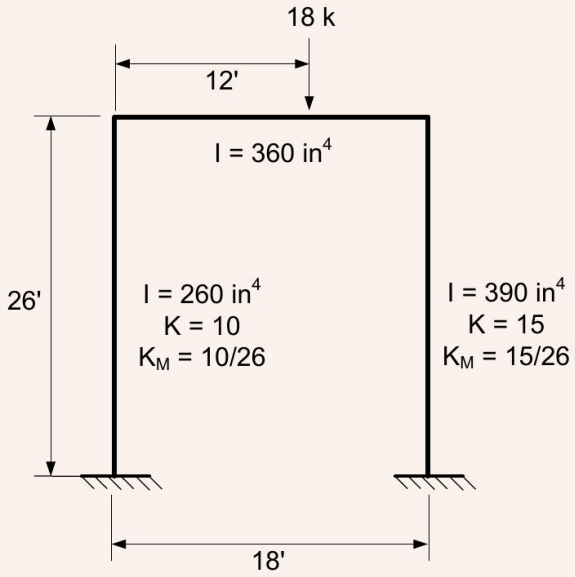
Find all moments by moment distribution for the following frame. Draw the bending moment diagram and the deflected structure.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

1. The first step is to perform the usual moment distribution. The reader should fully understand that this balancing operation adjusts the internal moments at the ends of the members by a series of corrections as the joints are considered to rotate, until $\Sigma M = 0$ at each joint. The reader should also realize that during this balancing operation no translation of any joint is permitted.
2. The fixed-end moments are

$$M_{BCF} := \frac{18\text{kip}\cdot 12\text{ft}\cdot(6\text{ft})^2}{(18\text{ft})^2} = 24\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$$

$$M_{CBF} := -\frac{18\text{kip}\cdot 6\text{ft}\cdot(12\text{ft})^2}{(18\text{ft})^2} = -48\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$$

3. Moment distribution

Joint	A	B		C		D
Member	AB	BA	BC	CB	CD	DC
K	10	10	20	20	15	15
DF	0	0.333	0.667	0.571	0.429	0
FEM			24	-48		
			13.7	27.4	20.6	10.3
	-6.3	-12.6	-25.1	-12.5		
			3.6	7.1	5.4	2.7
	-0.6	-1.2	-2.4	-1.2		
			0.3	0.7	0.5	0.2
		-0.1	-0.2			
Total	-6.9	-13.9	13.9	-26.5	26.5	13.2

4. The final moments listed in the table are correct only if there is no translation of any joint. It is therefore necessary to determine

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

whether or not, with the above moments existing, there is any tendency for side lurch of the top of the frame.
5. If the frame is divided into three free bodies, the result will be as shown below.

Inspection of this sketch indicates that if the moments of the first balance exist in the frame, there is a net force of $1.53\text{kip} - 0.8\text{kip} = 0.73\cdot\text{kip}$ tending to sway the frame to the left. In order to prevent side-sway, and thus allow these moments to exist (temporarily for the purpose of the analysis), it is necessary that an imaginary horizontal force ce considered to act to the right at B or C. This force is designated as the artificial joint restraint (abbreviated as AJR) and is shown below.

6. This illustration shows the complete load system which would have to act on the structure if the final moments of the first balance are to be correct. The AJR, however, cannot be permitted to remain, and thus its effect must be cancelled. This may be accomplished by finding the moments in the frame resulting from a force equal but opposite to the AJR and applied at the top.
7. Although it is not possible to make a direct solution for the moments resulting from this force, they may be determined inddirectly. Assume some unknown force P acts on the frame, as shown below, and causes it to deflect laterally to the left, without joint rotation, through some distance Δ. Now, regardless of the value of P and the value of the resulting Δ, the fixed-end moments induced in the ends of the columns must be proprtional to the respective values of K_M.

Recalling that the fixed end moment is $M_F = 6EI\cdot\frac{\Delta}{L^2} = 6EK_M\cdot\Delta$, where $K_M = \frac{1}{L^2} = \frac{K}{L}$ we can write

$$\Delta = \frac{M_{ABF}}{6E\cdot K_M} = \frac{M_{DCF}}{6E\cdot K_M}$$

$$\frac{M_{ABF}}{M_{DCF}} = \frac{K_{MAB}}{K_{MDC}} = \frac{10}{15}$$

These fixed-end moments could, for example, have values of -10 and -15 kip-ft, or -20 and -30, or -30 and -45, or any other combination so long as the above ratio is maintained. The proper procedure is to choose values for the fixed-end moments of approximately the same order of magnitude as the original fixed-end moments due to the real loads. This will result in the same accuracy for the results of the balance for the side-sway correction that was realized in the first balance for the real loads. Accordingly, it will be assumed that P, and the resulting Δ, are of such magnitude as to result in fixed-end moments shown below.
8. Obviously $\Sigma M = 0$ is not satisfied for joints B and C in this deflected frame. Therefore, these joints must rotate until equilibrium is reached. The effect of this rotation is determined in the distribution below.

Joint	A	B		C		D
Member	AB	BA	BC	CB	CD	DC
K	10	10	20	20	15	15
DF	0	0.333	0.667	0.571	0.429	0
FEM	-30	-30			-45	-45
			12.9	25.8	19.2	9.6
	2.8	5.7	11.4	5.7		
			-1.6	-3.3	-2.4	-1.2
	0.2	0.5	1.1	0.5		
				-0.3	-0.2	-0.1
Total	-27	-23.8	23.8	28.4	-28.4	-36.7

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

9. During the rotation of joints B and C, as represented by the above distribution, the value of Δ has remained constant, with P varying in magnitude as required to maintain Δ.
10. It is now possible to determine the final value of P simply by adding the shears in the columns. The shear in any member, without external loads applied along its length, is obtained by adding the end moments algebraically and dividing by the length of the member. The final value of P is the force necessary to maintain the deflection of the frame after the joints have rotated. In other words, it is the force which will be consistent with the displacement and internal moments of the structure as determined by the second balancing operation. Hence this final value of P will be called the consistent joint force (abbreviated as CJF).
11. The consistent joint force is given by

$$CJF := \frac{27kip\cdot ft + 23.8kip\cdot ft}{26ft} + \frac{28.4kip\cdot ft + 36.7kip\cdot ft}{26ft} = 4.458\cdot kip$$

and inspection clearly indicates that the CJF must act to the left.
12. Obviously, then, the results of the last balance above are moments which will exist in the frame when a force of 4.45 kip acts to the left at the top level. It is necessary, however, to determine the moments resulting from a force of 0.73 kip acting to the left at the top level, and some as yet unknown factor "z" times 4.45 kip will be used to represent this force acting to the left.
13. The free body diagram for the member BC is shown above. $\Sigma H = 0$ must be satisfied for this figure, and if forces to the left are considered as positive, the result is $4.45z - 0.73 = 0$, and

$$z := \frac{0.73}{4.45} = 0.164$$

If this factor is applied to the moments obtained from the second balance, the result will be the moments caused by a force of 0.73 kip acting to the left at the top level. If these moments are then added to the moments obtained from the first balance, the result will be the final moments for the frame, the effect of the AJR having been cancelled. The combintaion of moments is shown below.

Joint	A	B		C		D
Member	AB	BA	BC	CB	CD	DC
M from 1st balance	-6.9	-13.9	13.9	-26.5	26.5	13.2
z x M from 2nd balance	-4.4	-3.9	3.9	4.7	-4.7	-6
Final Moments	-11.3	-17.8	17.8	-21.8	21.8	7.2

14. If the moments are correct, the shears in the two columns of the frame shoul dbe equal and opposite to satisfy $\Sigma H = 0$ for the entire frame. This check is expressed

$$\frac{11.3kip\cdot ft + 17.8kip\cdot ft}{26ft} + \frac{-21.8kip\cdot ft + -7.2kip\cdot ft}{26ft} = 0\cdot kip$$

and

$$1.12kip - 1.11kip = 0.01\cdot kip \text{ (nearly)}$$

The signs of all moments taken from the previous table have been reversed to give the correct signs for the end moments external to the columns. It will be remembered that the moments considered in moment distribution are always internal for each member. However, the above check actually considers each column as a free body and so external moments must be used.
15. The moment under the 18 kip load is obtained by treating BC as a free body:

$$M_{18} := 5.77kip\cdot 12ft - 17.8kip\cdot ft = 51.44\cdot kip\cdot ft$$

16. The direction of side lurch may be determined from the obvious fact that the frame will always lurch in a direction opposite to the AJR. If required, the magnitude of this side lurch may be found. The procedure which follows will apply.

A force P of sufficient magnitude to result in the indicated column moments and the lurch Δ was applied to the frame. During the second balance this value of Δ was held constant as the joints B and C rotated, and the value of P was considered to vary as necessary. The final value of P was found to be 4.45 kip. Since Δ was held constant, however, its magnitude may be determined from the equation $M = 6EI\cdot\frac{\Delta}{L^2}$, where M is the fixed-end moment for either column, I is the moment of inertia for that column, and L is the length. This Δ will be the lurch for 4.45 kip acting at the top level. For any other force acting horizontally, Δ would vary proportially and thus the final lurch of the frame would be the factor z multiplied by Δ determined above.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

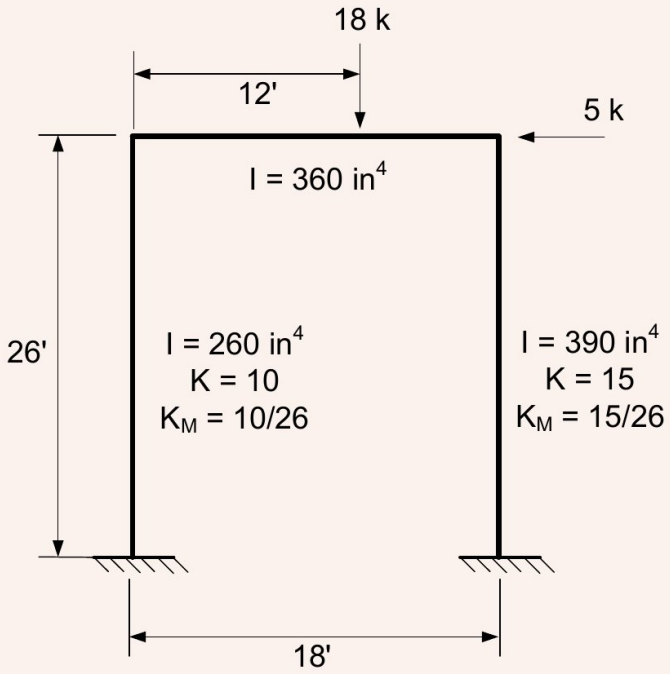
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.10 Frame with Side Load

Find by moment distribution the moments in the following frame



Solution:

The first balance will give the results shown

AB	BA	BC	CB	CD	DC
-7.2	-14.6	14.6	-22.5	22.5	0

A check of the member BC as a free body for $\Sigma H = 0$ will indicate that an AJR is necessary as follows:

$$AJR + 0.84kip - 0.87kip - 5kip = 0$$

from which

$$AJR := 5kip + 0.87kip - 0.84kip = 5.03 \cdot kip$$ in the direction assumed

The values of K_M for the two columns are shown, with K_M for column CD being K/2L because of the pin at the bottom. The horizontal displacement Δ of the top of the frame is assumed to cause the fixed-end moments shown there. These moments are proportional to the values of K_M and of approximately the same order of magnitude as the original fixed-end moments due to the real loads. The results of balancing out these moments are

AB	BA	BC	CB	CD	DC
-34.4	-28.4	28.4	23.6	-23.6	0

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$CJF := \frac{34.4kip\cdot ft + 28.4kip\cdot ft + 23.6kip\cdot ft}{26ft} = 3.323\cdot kip$$

and

$$5.03 - 3.32z = 0$$

from which

$$z := \frac{5.03kip}{CJF} = 1.514$$

The final results are

	AB	BA	BC	CB	CD	DC
M from 1st balance	-7.2	-14.6	14.6	-22.5	22.5	0
z x M 2nd balance	-52.1	-43	43	35.8	-35.8	0
Final moments	-59.3	-57.6	57.6	13.3	-13.3	0

If these final moments are correct, the sum of the column shears will be 5 kip

$$\Sigma V := \frac{59.3\cdot kip\cdot ft + 57.6kip\cdot ft + 13.3kip\cdot ft}{26ft} = 5.01\cdot kip$$

The 5 kip horizontal load acting at C enters into the problem only in connection withthe determination of the AJR. If this load had been applied to the column CD between the ends, it would have resulted in intial fixed-end moments in CD and these would be computed in the usual way. In addition, such a load would have enetered into the determination of the AJR, since the horizontal reaction of CD against the right end of BC would have been computed by treating CD as a free body.

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

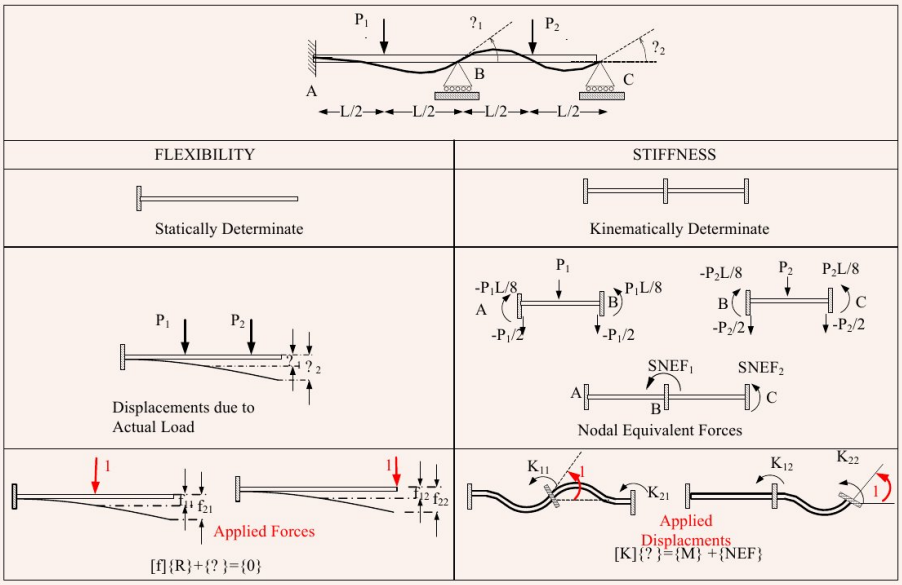
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

17.1 Beam

Considering the figure, let $P_1 = 2P$, $M = PL$, $P_2 = P$, and $P_2 = P$. Solve for the displacements.



Solution:

1. Using the previously defined sign convention (counterclockwise positive)

$$\Sigma NEF_1 = \frac{P_1 \cdot L}{8} - \frac{P_2 \cdot L}{8} = \frac{2P \cdot L}{8} - \frac{P \cdot L}{8} = \frac{P \cdot L}{8}$$

$$\Sigma NEF_2 = \frac{P \cdot L}{8}$$

2. If it takes 4EI/L (k_{44AB}) to rotate AB and 4EI/L (k_{22BC}) to rotate BC, it will take a total force of 8EI/L to simultaneously rotate AB and BC (Note that a rigid joint is assumed)

3. Hence, K_{11} which is the sum of the rotational stiffnesses at global d.o.f. 1, will be equal to $K_{11} = \frac{8EI}{L}$; similarly, $K_{21} = \frac{2EI}{L}$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

(k_{42BC})

4. If we rotate dof 2 by a unit angle, then we will have $K_{22} = \frac{4EI}{L}$ and $K_{12} = \frac{2EI}{L}$

5. The equilibrium relation can be written as

$$\begin{pmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PL \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{PL}{8} \\ \frac{PL}{8} \end{pmatrix}$$

or

$$\begin{pmatrix} PL + \frac{PL}{8} \\ \frac{PL}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

We note that the matrix corresponds to the structure's stiffness matrix, and not the augmented one.

6. The two by two matrix is next inverted

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} PL + \frac{PL}{8} \\ \frac{PL}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{112} \cdot \frac{P \cdot L^2}{EI} \\ \frac{-5}{112} \cdot \frac{P \cdot L^2}{EI} \end{pmatrix}$$

7. Next we need to determine both the reactions and the internal forces.
8. Recall that for each element $\mathbf{p} = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta}$, and in this case $\mathbf{p} = \mathbf{P}$ and $\boldsymbol{\delta} = \Delta$ for element AB. The element stiffness matrix has been previously derived, and in the case of the global and local d.o.f. are the same.
9. hence, the equilibrium equation for element AB, at the element level, can be written as

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{17}{112} \cdot \frac{P \cdot L^2}{EI} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2P}{2} \\ \frac{2PL}{8} \\ \frac{2P}{2} \\ \frac{-2PL}{8} \end{pmatrix}$$

Solving

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{107}{56} \cdot P & \frac{31}{56} \cdot PL & \frac{5}{56} \cdot P & \frac{5}{14} \cdot PL \end{pmatrix}$$

10. Similarly, for element BC:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{17}{112} \cdot \frac{P \cdot L^2}{EI} \\ 0 \\ \frac{-5}{} \cdot \frac{P \cdot L^2}{} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \\ \frac{P}{2} \\ \end{pmatrix}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\begin{pmatrix} \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 112 & EI \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-PL}{8} \end{pmatrix}$$

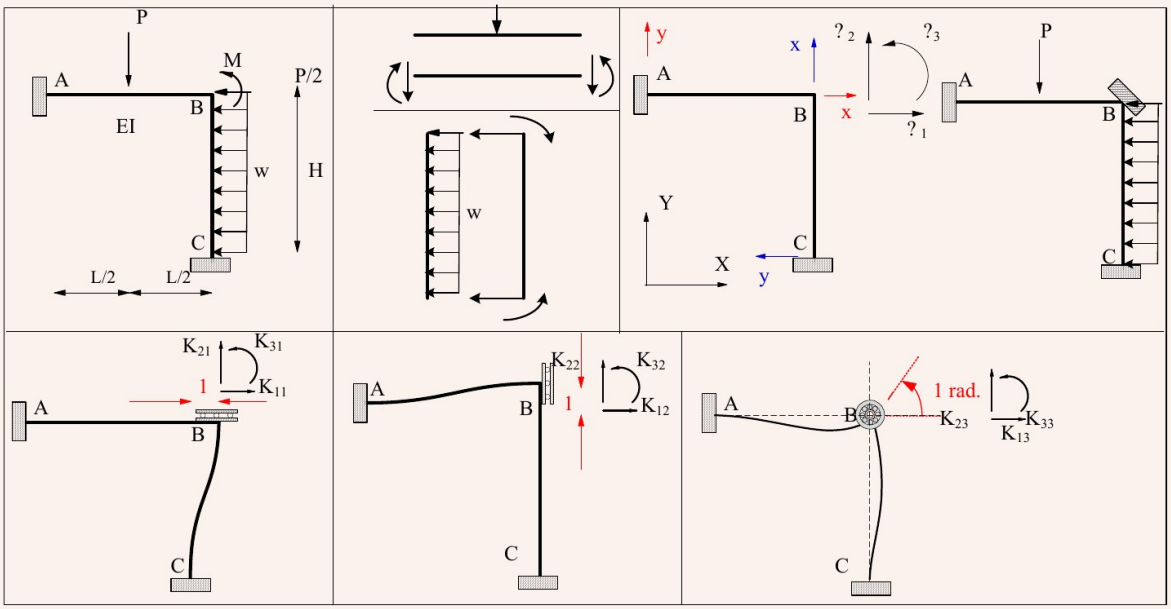
or

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{8}\cdot P & \frac{9}{14}\cdot PL & \frac{-1}{7}\cdot P & 0 \end{pmatrix}$$

11. This simple example calls for the following observations:
    a) Node A has contributions from element AB only, while node B has contributions from both AB and BC
    b) We observe that $p_{3AB} \neq p_{1BC}$ even though they both correspond to a shear force at node B, the difference between them is equal to the reaction at B. Similarly, $p_{4AB} \neq p_{2BC}$ due to the externally applied moment at B
    c) From this analysis, we can draw the complete free body diagram and then the shear and moment diagrams which is what the engineer is most interested in for design purposes.

17.2 Frame

Whereas in the first example all local coordinate systems were identical to the global one, in this example we consider the orthogonal frame shown below.



Solution:

1. Assuming axial deformations, we do have three global degress of freedom Δ_1, Δ_2, and θ_3.
2. Constrain all degrees of freedom, and thus make the structure kineamatically determinate.
3. Determine the nodal equivalent forces for each element in its own local coordinate system (the first three values are associated with the first node, and the last three with the second node):

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

with the first node, and the last three with the second node):

$$\begin{pmatrix} p_1 & v_1 & m_1 & p_2 & v_2 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-P}{2} & \frac{-PL}{8} & 0 & \frac{-P}{2} & \frac{PL}{8} \end{pmatrix} \quad \text{Member AB}$$

$$\begin{pmatrix} p_1 & v_1 & m_1 & p_2 & v_2 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-wH}{2} & \frac{-w\cdot H^2}{12} & 0 & \frac{-wH}{2} & \frac{w\cdot H^2}{12} \end{pmatrix} \quad \text{Member BC}$$

4. Summing the nodal equivalent forces at node B in global coordinates we have

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-wH}{2} & \frac{-P}{2} & \frac{PL}{8} - \frac{w\cdot H^2}{12} \end{pmatrix}$$

5. Next, we apply a unit displacement in each of the three global degrees of freedom, and we seek to determine the structure global stiffness matrix. Each entry K_{ij} of the global stiffness matrix will correspond to the internal force in degreee of freedome i, due to a unit displacement in degree of freedom j.

6. Recalling the force displacement relations derived earlier, we can assemble the global stiffness matrix in terms of contributions from both AB and BC.

		K_{i1} Δ_1	K_{i2} Δ_2	K_{i3} Δ_3
K_{1j}	AB	EA/L	0	0
	BC	$12EI/H^3$	0	$6EI/H^2$
K_{2j}	AB	0	$12EI/L^3$	$-6EI/L^2$
	BC	0	EA/H	0
K_{3j}	AB	0	$-6EI/L^2$	4EI/L
	BC	$6EI/H^2$	0	4EI/H

7. Summing up, the structure global stiffness matrix [**K**] is

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{H^3} & 0 & \frac{6EI}{H^2} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{H} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{H^2} & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{H} \end{pmatrix}$$

8. The global equation of equilibrium can now be written

$$\begin{pmatrix} \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{H^3} & 0 & \frac{6EI}{H^2} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{H} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{H^2} & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{H} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-P}{2} \\ 0 \\ M \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{wH}{2} \\ \frac{P}{2} \\ \frac{-PL}{2} + \frac{w\cdot H^2}{2} \end{pmatrix}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\begin{pmatrix} H^2 & L^2 & L & H \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 8 & 12 \end{pmatrix}$$

9. Solve for the displacements

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{H^3} & 0 & \frac{6EI}{H^2} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{H} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{H^2} & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{H} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-P}{2} - \frac{wH}{2} \\ \frac{-P}{2} \\ M + \frac{PL}{8} - \frac{w \cdot H^2}{12} \end{pmatrix}$$

10. To obtain the element internal forces, we will multiply each element stiffness matrix by the local displacements. For element AB, the local and global coordinates match, thus

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \\ 0 \\ \frac{P}{2} \\ \frac{-PL}{8} \end{pmatrix}$$

11. For element BC, the local and global coordinates do not match, hence we will need to transform the dispalcements from their global to their local components. But since vector (displacement and load) and matrix transformation have not yet been covered, we not by inspection that the relationship between global and local coordinates for element BC is

Local	δ_1	δ_2	θ_3	δ_4	δ_5	θ_6
Global	0	0	0	Δ_2	$-\Delta_1$	θ_3

and we observe that there are no local or global displacements associated with dof 1-3; Hence, the internal forces for element BC are given by:

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta_2 \\ -\Delta_1 \\ \theta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{wH}{2} \\ -\frac{w \cdot H^2}{12} \\ 0 \\ -\frac{wH}{2} \\ \frac{w \cdot H^2}{12} \end{pmatrix}$$

Note that the element is defined as going from C to B hence x,y,z correspond to Y, -X, Z.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

Appendice K

Filtro a record sismico (Fast Fourrier Transforms)

Abstract

Questa appendice spiega il filtraggio dei record di accelerazione sismica utilizzando i metodi Fast Fourier Transform (FFT) e Butterworth filter. La teoria sposta la rappresentazione del segnale dal dominio di tempo al dominio della frequenza, decompondo il segnale nelle funzioni sine e cosene dei componenti delle diverse frequenze. Manipolando il contenuto di frequenza, i rumori indesiderati e componenti ad alta frequenza possono essere rimossi mantenendo le porzioni fisicamente significative del record. L'appendice copre le basi matematiche della serie Fourier e trasforma, algoritmi di filtraggio pratici e applicazioni a record sismici di forte movimento comunemente utilizzati nella progettazione strutturale e nell'analisi.

K.1 Come Preparare il Tuo Nome 3049

1 Può essere necessario filtrare le alte frequenze da un record sismico (specialmente per i dischi di forte movimento).

2 Siamo abituati a considerare un segnale nel dominio del tempo, cioè $f(t)$. Tuttavia, ci sono vantaggi per considerarli nel dominio di frequenza.

3 La serie Fourier fornisce un modo alternativo di rappresentare i dati: invece di rappresentare l'ampiezza del segnale in funzione del tempo, rappresentiamo il segnale da quanto informazioni sono contenute a frequenze diverse. K.1 mostra segnali armonici con rumore aggiunto nei domini di tempo e frequenza.

4 Le trasformazioni di Fourier ci permettono di trasferire un segnale dal dominio del tempo

COPIA DI REVISIONE

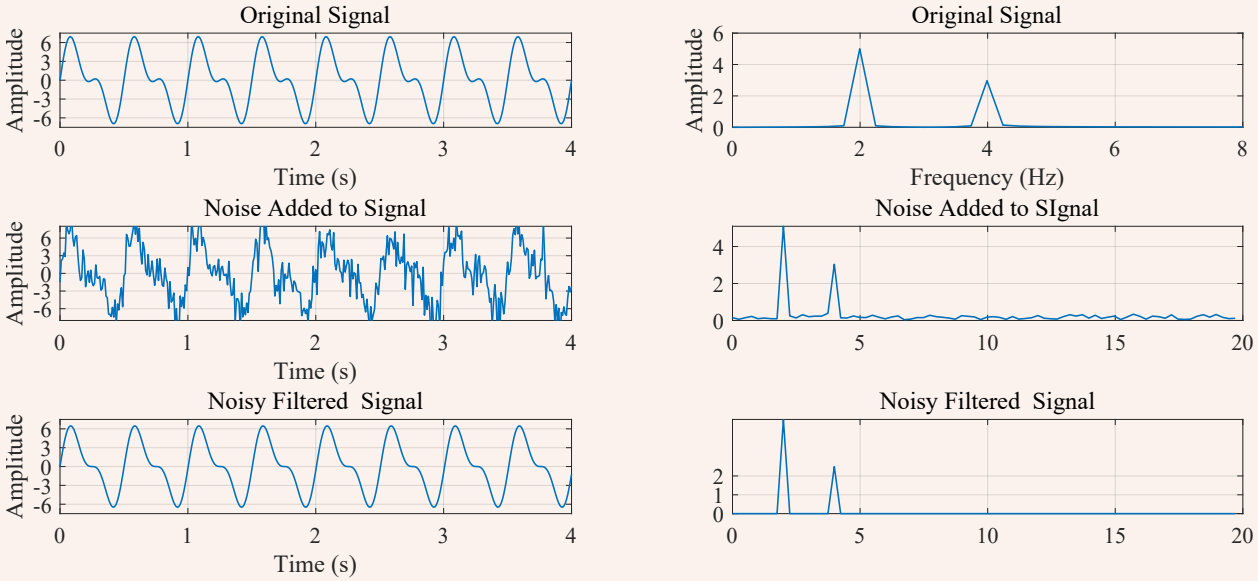


Figura K.1: Esempi di segnali filtrati butterworth

al dominio della frequenza decompondolo in una somma di sines e coseni di frequenze diverse,

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2i\pi\omega t} \mathrm{d}t$$

$$x(t) \xrightarrow{\text{FFT}} X(\omega)$$

mentre il FFT inverso ci riporta dal dominio di frequenza al dominio del tempo attraverso:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{2i\pi\omega t} \mathrm{d}\omega$$

$$X(\omega) \xrightarrow{\text{FFT}^{-1}} x(t)$$

Una volta che siamo nel dominio di frequenza, filtri speciali (soprattutto i cosiddetti

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Butterworth Filters), possono essere utilizzati prima di tornare al dominio del tempo (con dati filtrati). K.2:

$$|H(j\omega)|^2 = \begin{cases} \text{Low pass} & \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_L}\right)^{2n}} \\ \text{High pass} & \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_U}{\omega}\right)^{2n}} \\ \text{Band pass} & \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_L}\right)^{2n}} \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_U}{\omega}\right)^{2n}} \\ \text{Band stop} & \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_L}{\omega}\right)^{2n}} \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_U}\right)^{2n}} \end{cases}$$

dove ω, ω_L, ω_Ue n sono la frequenza, le frequenze filtro inferiori e superiori, e l'ordine del filtro, rispettivamente.

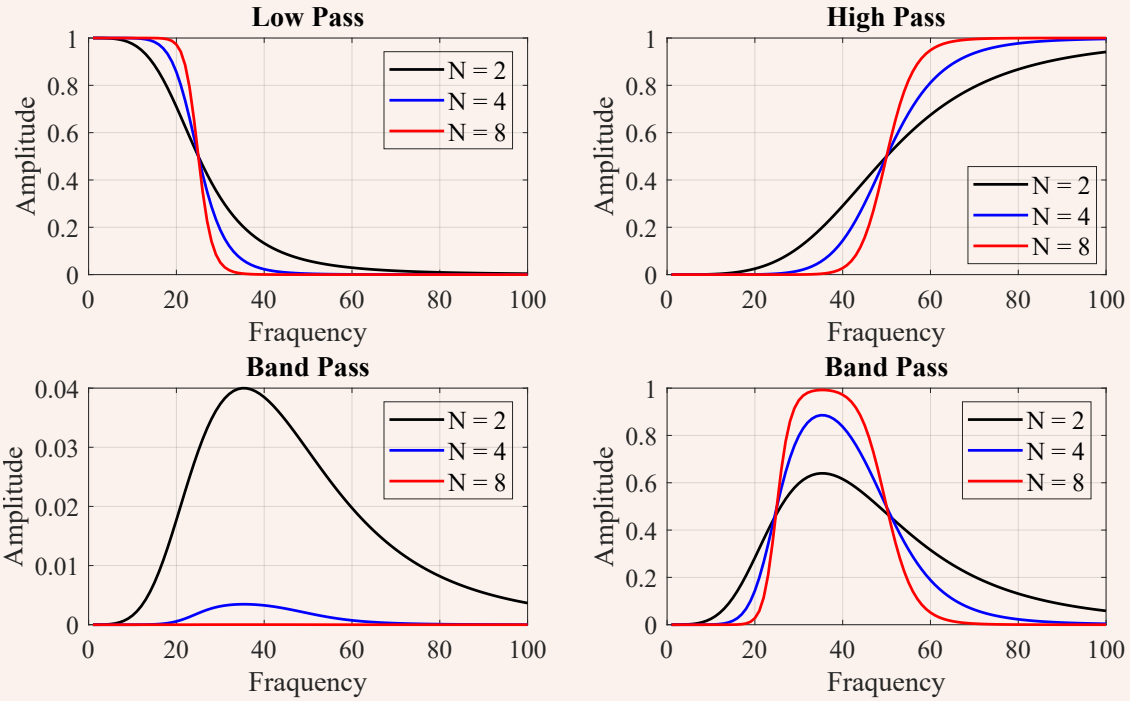


Figura K.2: Confronto dei filtri butterworth per vari n

K.1 Come Preparare il Tuo Nome

In pratica, si presentano due situazioni distinte:

(a) La trasformazione di una funzione continua $x(t)$ è richiesto.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

(b) È richiesta la trasformazione di un insieme finito di dati registrati (il caso usuale in ingegneria sismica).

(a) Trasformazione di Fourier in una funzione continua

Per una funzione continua $x(t)$ definito $(-\infty, \infty)$, la trasformazione di Fourier è definita

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

La procedura è:

1. Definire la funzione $x(t)$ analiticamente.
2. Sostituiscilo nell'integrale.
3. Valutare l'integrale (analiticamente, se possibile).

Per esempio, considerare la funzione armonica

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t).$$

Usando l'identità di Euler,

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right),$$

la trasformazione produce impulsi $\omega = \pm\omega_0$, dimostrando che una pura armonica contiene energia ad un'unica frequenza.

In molte applicazioni strutturali, in particolare l'analisi delle vibrazioni, le trasformazioni a forma chiusa sono utilizzate per comprendere il contenuto di frequenza, la risonanza e il comportamento della stabilità.

(b) Trasformazione di Fourier in un set dati finito (DFT e FFT)

In ingegneria sismica non ci occupiamo di funzioni continue, ma con dati campionati:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$$

campionato a intervalli di tempo uniformi Δt.

La durata totale è

$$T = N\Delta t,$$

e la frequenza di campionamento è

$$f_s = \frac{1}{\Delta t}.$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

La discreta trasformata di Fourier (DFT) è definita come

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi kn/N}, \qquad k = 0, \ldots, N-1.$$

La trasformazione inversa è

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i2\pi kn/N}.$$

Il Fast Fourier Transform (FFT) è semplicemente un efficiente algoritmo numerico per calcolare il DFT in $O(N \log N)$ operazioni invece di $O(N^2)$.

Risoluzione di frequenza e frequenza del Nyquist

Due importanti quantità seguono direttamente dalla teoria del campionamento:

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta t}, \tag{K.1}$$

$$f_{\text{Nyquist}} = \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2\Delta t}. \tag{K.2}$$

- Δf determina la risoluzione di frequenza.
- f_{Nyquist} è la frequenza più alta che può essere rappresentata senza alias.

Così, per i registri sismici:

- Tasso di campionamento elevato → frequenza di Nyquist più grande.
- Durata → risoluzione di frequenza migliore.

Procedura pratica per le registrazioni sismiche

Data un record di accelerazione sismica:

1. Rimuovere la media (correzione base).
2. Applicare facoltativamente la finestra (Hanning, Hamming).
3. Computo FFT.
4. Multiply per funzione di filtro scelta $H(\omega)$.
5. Computo FFT inverso.
6. Fai parte reale del risultato.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Questo produce la storia del tempo filtrato.

7 La procedura è illustrata in un MATLAB®codice in §I.5.3.

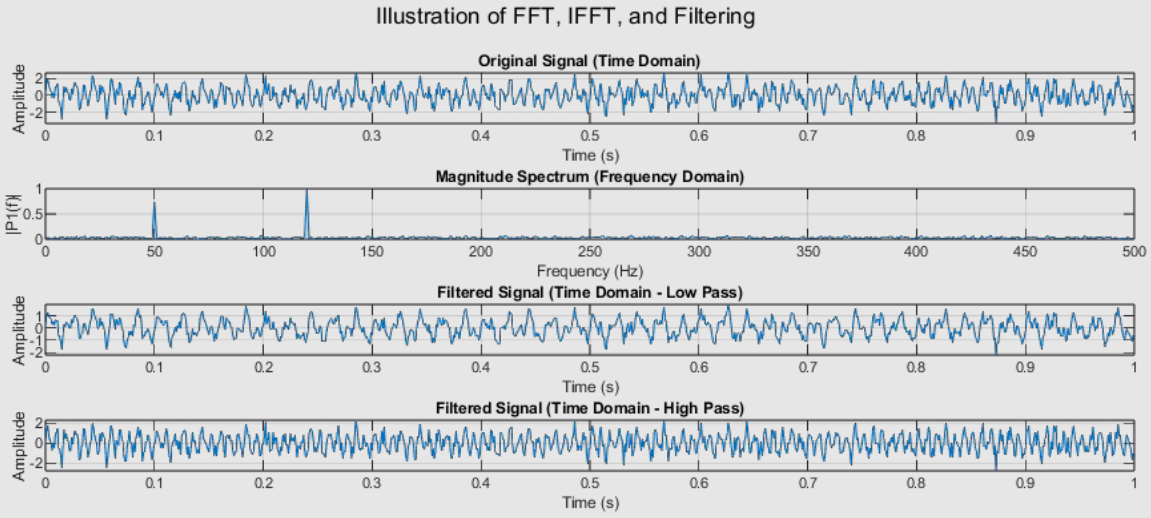
Ex K.1: FF

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Un segnale composito è creato combinando due componenti sinusoidali con frequenze $f_1 = 50$ Hz e $f_2 = 120$ Hz. Il rumore casuale viene aggiunto al segnale per simulare uno scenario più realistico.

Il FFT viene applicato per trasformare il segnale nel dominio di frequenza, rivelando i componenti spettrali e le loro magnitudine.

L'IFFFT ricostruisce il segnale originale dalla sua rappresentazione di dominio di frequenza, dimostrando la natura reversibile della trasformazione.



- **Segnale originale:** Il segnale del dominio temporale mostra l'effetto combinato dei componenti sinusoidali e il rumore aggiunto.
- **Spettro di frequenza:** Il FFT rivela i componenti di frequenza dominanti (50 Hz e 120 Hz) nel segnale.
- **Segnale filtrato a basso passi:** Il filtro passa-basso rimuove il rumore ad alta frequenza, mantenendo i componenti sotto la frequenza di cutoff (100 Hz).
- **Segnale filtrato ad alto passo:** Il filtro passa-alto rimuove componenti a bassa frequenza, mantenendo quelli sopra la frequenza di taglio (100 Hz).
- **Segnale ricostruito:** L'IFFFT ricostruisce con precisione sia i segnali filtrati che originali, dimostrando la reversibilità della trasformazione.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Appendice L

Recensione di Algebra lineare

Abstract

Poiché la discorsizzazione di una struttura in un numero finito di nodi, la soluzione sarà basata sulla matrice. Ad un certo punto, una matrice dovrà essere "invertita" per risolvere i spostamenti.

Quindi, questo capitolo fornirà al lettore una breve revisione dell'algebra lineare e anche se ci basiamo su funzioni costruite per inversione di matrice (come ad esempio `inv` *in MATLAB® or* `linalg.inv(a)` *in Python), gli algoritmi dietro le varie opzioni dovrebbero essere compresi a volte.*

L.1 Su matrici . . . 3054
L.1.1 Definizioni . . . 3054
L.1.2 Operazioni di matrice elementare . . . 3055
L.1.3 Determinanti . . . 3056
L.1.4 Inversione . . . 3057
L.2 Soluzioni di equazioni lineari . . . 3058
L.2.1 Strategie . . . 3058
L.2.2 Decomposizione . . . 3059
L.2.3 Metodi indiretti . . . 3065
L.3 Caratteristiche della matrice e miglioramenti computazionali . . . 3066
L.3.1 Singolarità e rango . . . 3066
L.3.2 Valori e autovettori . . . 3067
L.3.3 Numero di condizioni . . . 3068
L.3.4 Pre condizionamento . . . 3068
L.4 Esempi . . . 3071
L.4.1 Ex L.1: Eliminazione di Gauss 3072
L.4.2 Ex L.2: Espulsione di Gauss-jordan . . . 3072
L.4.3 Ex L.3: **lu** Decomposizione . 3073
L.4.4 Ex L.4: La decomposizione di Cholesky . . . 3074
L.4.5 Ex L.5: Gauss-seidel . . . 3075
L.4.6 Ex L.6: Gauss-Seidel . . . 3076
L.4.7 Ex L.7: Decomposizione del valore singolare . . . 3077
L.4.8 Ex L.8: Precondizioni . . . 3078

COPIA DI REVISIONE

L.1 Su matrici

L.1.1 Definizioni

Matrix:

$$[A] = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Indicheremmo la dimensione della matrice come $\mathbf{A}_{m\times n}$, and refer to an individual term of the matrix as A_{ij}. Nota che le matrici e i vettori sono solitamente in grassetto quando si tratta di tipi o con una marea quando scritto a mano $\tilde{A}$.

Vettori: sono una colonna matrici:

$$\{X\} = \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{Bmatrix}$$

Un vettore di fila sarebbe

$$\mathbf{C}^T = \lfloor C \rfloor = \lfloor \; B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_i \quad \dots \quad B_m \; \rfloor$$

Si noti che scalari, vettori e matrici sono tensori di ordine 0, 1, e 2 rispettivamente.

Matrice quadrata: sono matrici con numero uguale di righe e colonne. $\mathbf{A}_{m\times m}$

Simmetria: $A_{ij} = A_{ji}$

Matrice di identità: è una matrice quadrata con tutte le sue voci pari a zero eccetto i termini diagonali che sono uguali a uno. as **I**e

$$I_{ij} = \begin{cases} 0, & if\, i \neq j \\ 1, & if\, i = j \end{cases}$$

Matrice diagonale: è una matrice quadrata con tutte le sue voci pari a zero tranne i termini diagonali che sono diversi da zero. denota come **D**e

$$D_{ij} = \begin{cases} 0, & if\, i \neq j \\ \neq 0, & if\, i = j \end{cases}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Matrice triangolare superiore: è una matrice quadrata con tutte le sue voci pari a zero, tranne quelli lungo e sopra la diagonale. denota come **U**e

$$U_{ij} = \begin{cases} 0, & if\ i > j \\ \neq 0, & if\ i \leq j \end{cases}$$

Matrice triangolare inferiore: è una matrice quadrata con tutte le sue voci pari a zero, tranne quelli lungo e sotto la diagonale. denota come **L**e

$$L_{ij} = \begin{cases} 0, & if\ i < j \\ \neq 0, & if\ i \geq j \end{cases}$$

Matrici ortogonali: $\mathbf{A}_{m\times n}$ e $\mathbf{B}_{m\times n}$ sono ha detto di essere ortogonale se $\mathbf{A}^T\mathbf{B} = \mathbf{B}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$

Una matrice quadrata $\mathbf{C}_{m\times m}$ è ortogonal if $\mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{C}^T = \mathbf{I}$

Traccia di una matrice: $tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$

Submatrices: sono matrici all'interno di una matrice, per esempio

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ \hline 10 & 3 & 4 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \\
\mathbf{B} &= \left[\begin{array}{cc} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ \hline 3 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_2 \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 37 \\ 16 & 44 \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_2 &= [4]\,[3\ \ 2] = [12\ \ 8] \\
\mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} 14 & 34 \\ 22 & 48 \\ 28 & 70 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Operare su submatrice come se fossimo operativi su matrice individuale elementi.

L.1.2 Operazioni di matrice elementare

1 **Trasporre:** di una matrice $\mathbf{A}_{m\times n}$ è un'altra matrice $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T_{n\times m}$ tale $B_{ij} = A_{ji}$ Nota:

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Addizione (sottotrazione): $\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{C}_{m\times n}$; $A_{ij} = B_{ij} + C_{ij}$

Multiplicazione Scalar:$\mathbf{B} = k \cdot \mathbf{A}$; $B_{ij} = kA_{ij}$

Matrix Multiplication: di due matrici è possibile se il numero colonne del primo è uguale al numero di righe del secondo.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{m\times n} &= \mathbf{B}_{m\times p} \cdot \mathbf{C}_{p\times n} \\ A_{ij} &= \underbrace{\lfloor \mathbf{B}_i \rfloor_{1\times p} \cdot \left\{\mathbf{C}_j\right\}_{p\times 1}}_{1\times 1} \\ &= \sum_{r=1}^{p} B_{ir} C_{rj}\end{aligned}$$

Alcune proprietà importanti dei prodotti di matrice includono:

Associativo: $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$

Distributivo: $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

Non-Commutativity: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

L.1.3 Determinanti

Il Determinante di una matrice $\mathbf{A}_{n\times n}$, denotato come det $\mathbf{A}$ or $|\mathbf{A}|$, è ricurvamente definito

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, a_{1j} \det \mathbf{A}_{1j}$$

Dove? $\mathbf{A}_{1j}$ è il $(n-1)$x$(n-1)$ matrice ottenuta eliminando la riga ith e la colonna jth di matrice $\mathbf{A}$.

Per un 2×2 matrice

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a21$$

Per un 3×3 matrice

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) \\ &\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} \\ &\quad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}\end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

7 Può essere difficile scrivere un programma per computer per calcolare il determinante di un $n \times n$ Matrix.

8 Si nota che un $n \times n$ matrice avrebbe un determinante che contiene $n!$ termini ciascuno di essi n moltiplicazioni. Quindi se $n = 10$ ci sarebbe $10! = 3,628,800$ termini, ciascuno che coinvolge 9 sione di moltiplicazione per oltre 30 milioni di operazioni galleggianti eseguito per valutare il determinante. Per questo motivo è impraticabile usare la regola di Cramer per risolvere un sistema di equazioni lineari.

9 Alcune proprietà importanti di deteminanti:

1. Il determinante del trasporre di una matrice è uguale a determinante della matrice
$$| \mathbf{A} | = | \mathbf{A}^T |$$
2. Se almeno una riga o una colonna è una combinazione lineare altre righe o colonne, quindi il determinante è zero. L'inverso è anche vero, se il determinante è uguale a zero, allora almeno una riga o una colonna è una combinazione lineare di altre righe o colonne.
3. Se c'è dipendenza lineare tra le righe, allora c'è anche uno tra colonne e *Vittime*.
4. Il determinante di una matrice triangolare superiore o inferiore è uguale a il prodotto dei principali termini diagonali.
5. Il determinante del prodotto di due matrici quadrate è uguale a il prodotto dei singoli determinanti
$$| \mathbf{AB} | = | \mathbf{A} || \mathbf{B} |$$

10 Singularità e rango sono discussi in §45.1.1 in combinazione con matrici di rigidità.

L.1.4 Inversione

11 L'inverso di una matrice quadrata (non singolare) $\mathbf{A}$ è denotato da $\mathbf{A}^{-1}$ e tale
$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

12 Alcune osservazioni

1. L'inverso del trasporre di una matrice è uguale al trasposto del inverso
$$\mathbf{A}^{T^{-1}} = \mathbf{A}^{-1^T}$$
2. L'inverso di un prodotto a matrice è il prodotto inversa del inversa
$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

3. L'inverso di una matrice simmetrica è anche simmetrica
4. L'inverso di una matrice diagonale è un altro diagonale con voci pari all'inverso delle entrate della matrice originale.
5. L'inverso di una matrice triangolare è una matrix trianulare.
6. È computazionalmente più efficiente per decomporre una matrice ($\mathbf{A} = \mathbf{LDU}$) usando la decomposizione superiore e inferiore o l'eliminazione di Gauss) che invertire una matrice.

L.2 Soluzioni di equazioni lineari

L.2.1 Strategie

13 Come discusso in §45.2.1, la decomposizione è un passo critico per determinare $\mathbf{K}^{-1}$.

14 Cerchiamo di risolvere per $\mathbf{x}$ in un sistema di equazioni lineari

$$\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Simbolicamente questa operazione è rappresentata da:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

15 In generale, ci sono tre approcci per questa operazione:

Inversione diretta usando la regola di Cramer dove $\mathbf{A}^{-1} = \frac{[adj\mathbf{A}]}{\mathbf{A}}$. Tuttavia, questo approccio è computazionalmente molto inefficiente per $n \geq 3$ come richiede la valutazione n determinanti di ordine elevato. Non viene mai usato (oltre che inversione manuale di una 2×2 matrice).

Decomposizione: dove nel caso più generale cerchiamo di decomporre

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{LDU}$$

Questo metodo ha un numero limitato di operazioni necessarie per ottenere la resa della decomposizione risultati esatti.

Metodi indiretti: o tecnica di decomposizione iterativa, senza *a-priori* conoscenza del numero di operazioni richieste, fornendo una soluzione approssimativa con livello definito dall'utente.

16 I principali metodi di soluzione sono mostrati nella tabella L.1.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella L.1: Metodi di soluzione per equazioni lineari

Metodo	**b**	Direttore diretto	$\mathbf{A}^{-1}$
Gamma	Sì.	Sì.	No
Gauss-Jordan	Sì.	Sì.	No
L-U	No	Sì.	Sì.
Cholesky	No	Sì.	Sì.
Seidel di Gauss	Sì.	No	No

L.2.2 Decomposizione

17 In questa classe di soluzione, sfruttaremo tre operazioni elementari che possono essere utilizzate su una matrice:

1. Sbattere le posizioni di due delle righe.
2. Moltiplica una delle righe di un nonzero scalar.
3. Aggiungi o sottrae il multiplo scalare di una riga ad un'altra riga.

L.2.2.1 Eliminazione di Gauss

18 Trasformeremo le equazioni in *echelon di fila* forma e risuona le variabili sconosciute per sostituzione posteriore.

$$\mathbf{A}\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{b}\} \rightarrow \mathbf{U}\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{y}\}$$

19 Il modulo di echelon riga è una matrice diagonale dove tutte le voci sotto un coefficiente principale sono zero.

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1n} \\ 0 & U_{22} & \dots & U_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & U_{mm} \end{bmatrix}$$

20 Nota che questo metodo semplicemente fornirà una soluzione **x** e non per $\mathbf{A}^{-1}$.

L.2.2.2 Gauss-Jordan eliminazione

21 Il metodo è un'estensione dell'eliminazione Gauss, piuttosto che trasformare la **A** in **U**, trasforma equazioni che contengono le variabili sconosciute in *modulo di echelon a riga ridotta* (una che ha tutte le voci nella diagonale principale pari a 1, e tutte le altre voci hanno un valore di 0, cioè. **I**)

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}] \rightarrow [\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}]$$

Quindi non è necessaria alcuna sostituzione posteriore e la matrice inversa può essere ottenuta esplicitamente.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

22 Si noti che Gauss-Jordan produce sia la soluzione delle equazioni, sia l'inverso della matrice originale.n^3) più operazioni di decomposizione di Gauss o LU ($\frac{n^3}{3}$).

23 Procedura

- Sbattere le righe in modo che tutte le righe con tutti gli zero voci siano sul fondo
- Sbattere le righe in modo che la riga con il più grande, voce nonzero sinistra è sulla parte superiore.
- Moltiplicare la riga superiore da uno scalar in modo che l'entrata principale della prima fila diventi 1.
- Aggiungi/sottotraccia multipli della riga superiore alle altre righe in modo che tutte le altre voci nella colonna contenente l'entrata principale della riga di punta siano tutte zero.
- Ripetere i passaggi 2-4 per la successiva voce non zero sinistra fino a quando tutte le voci principali sono 1.
- Sbattere le righe in modo che l'ingresso principale di ogni riga non zero sia a destra dell'entrata principale della riga sopra.

L.2.2.3 LU Decomposizione

24 eliminazione gaussiana e Gauss-Jordan eliminazione entrambi utilizzare la matrice aumentata $[A|b]$, so **b** deve essere conosciuto. Al contrario, LU-decomposizione utilizza solo matrice **A**, così una volta che la factorizzazione è completa, può essere applicato a qualsiasi vettore **b**.

25 In alcune applicazioni, infatti, può essere auspicabile decomporre la matrice senza aver completato il RHS. Ad esempio, nel metodo di rigidità diretta potremmo avere più casi di carico ancora vorremmo invertire solo una volta che la matricità della rigidezza. Questo sarà realizzato attraverso la seguente decomposizione:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{LU}$$

26 La soluzione consiste in:

Decomposizione: della matrice indipendentemente dal vettore lato destro

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{L} \underbrace{\mathbf{Ux}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b}$$

Indietrosostituzione: per ogni vettore laterale destra

1. Risolvere per $\{\mathbf{y}\}$ da $\mathbf{L}\{\mathbf{y}\} = \{\mathbf{b}\}$ a partire dall'inizio
2. Risolvere per $\{\mathbf{x}\}$ da $\mathbf{U}\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{y}\}$ a partire dal fondo

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

27 Il vettore **y** è la stessa di quella a cui **b** è stato ridotto a nel Gauss Elimination.

28 Aritmeticamente:

1. Data:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

2. risolvere:

$$\begin{array}{lll} a_{11} = u_{11} & a_{12} = u_{12} \cdots & a_{1n} = u_{1n} \\ a_{21} = l_{21}u_{11} & a_{22} = l_{21}u_{12} + u_{22} & a_{2n} = l_{21}u_{1n} + u_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} = l_{n1}u_{11} & a_{n2} = l_{n1}u_{12} + l_{n2}u_{22} & a_{nn} = \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}u_{kn} + u_{nn} \end{array}$$

3. Lascia:

$$\mathbf{A}^F = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

4. Prendere riga per riga o colonna per colonna

$$\begin{array}{ll} l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}}{u_{jj}} & i > j \\ u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} & i \leq j \\ l_{ii} = 1 & \end{array}$$

Elementi calcolati l_{ij} or u_{ij} può sempre sovrascrivere l'elemento corrispondente a_{ij}

29 Passo dopo passo:

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & A_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_{11} & L_{11}U_{12} & L_{11}U_{13} \\ L_{21} & L_{21}U_{12} + L_{22} & L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23} \\ L_{31} & L_{31}U_{12} + L_{32} & L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

30 Sostituire, colonna per colonna

$$\begin{aligned}
\lfloor\ L_{11}^{\checkmark} \quad L_{21}^{\checkmark} \quad L_{31}^{\checkmark}\ \rfloor &= \lfloor\ A_{11} \quad A_{21} \quad A_{31}\ \rfloor && \text{Column 1}\\
\lfloor\ L_{11}U_{12} \quad L_{21}U_{12}+L_{22} \quad L_{31}U_{12}+L_{32}\ \rfloor &= \lfloor\ A_{12} \quad A_{22} \quad A_{32}\ \rfloor \Rightarrow \lfloor\ U_{12}^{\checkmark} \quad L_{22}^{\checkmark} \quad L_{32}^{\checkmark}\ \rfloor && \text{Column 2}\\
\lfloor\ L_{11}U_{13} \quad L_{21}U_{13}+L_{22}U_{23} \quad L_{31}U_{13}+L_{32}U_{23}+L_{33}\ \rfloor &= \lfloor\ A_{13} \quad A_{23} \quad A_{33}\ \rfloor \Rightarrow \lfloor\ U_{13}^{\checkmark} \quad U_{23}^{\checkmark} \quad L_{33}^{\checkmark}\ \rfloor && \text{Column 3}
\end{aligned}$$

e ad ogni passo risolvi per n - Ignoti.

31 Anche se $\mathbf{A}$ è simmetrico $\mathbf{L}^T \neq \mathbf{U}$.

32 In MATLAB® `x = A\b` è preferito sopra `x = inv(A)*b` se si è solo alla ricerca `x` e no $\mathbf{A}^{-1}$. `inv` a turno, usa una LU o una decomposizione LDL.

33 Per le matrici simmetriche, la decomposizione LU riduce a:

$$\begin{aligned}
u_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} \quad i \leq j\\
l_{ii} &= 1\\
l_{ij} &= \frac{u_{ji}}{u_{jj}}
\end{aligned}$$

L.2.2.4 La decomposizione di Cholesky

34 If $\mathbf{A}$ è simmetrico $\mathbf{A}^F$ non è. Ad esempio:

$$\begin{bmatrix} 16 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & -4 \\ 8 & -4 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ .25 & 1 & \\ .5 & -1.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 4 & 8 \\ & 4 & -6 \\ & & 9 \end{bmatrix}$$

35 Mentre, possiamo sempre decomporre $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{L}^*\mathbf{D}\mathbf{U}^{*^T}$$

e per matrici simmetriche, questo ridurrebbe a

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{L}^*\mathbf{D}\mathbf{L}^{*^T}$$

36 Inoltre, la matrice diagonale $\mathbf{D}$ può essere considerato come il prodotto di due matrici: $\mathbf{D} = \mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}$ Così:

$$\mathbf{A} \rightarrow \underbrace{[\mathbf{L}^*]\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}[\mathbf{L}^*]^T}_{\mathbf{L}^T}$$

37 Passo dopo passo

$$\begin{aligned}
[A] &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & A_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} L_{11}^2 & L_{11}L_{21} & L_{11}L_{31} \\ L_{11}L_{21} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} \\ L_{11}L_{31} & L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

38 Possiamo quindi correre lungo le colonne e ottenere

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sqrt{A_{11}} & \frac{A_{12}}{L_{11}} & \frac{A_{13}}{L_{11}} \end{bmatrix} && \text{Column 1} \\
\begin{bmatrix} L_{22} & L_{32} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sqrt{A_{22} - L_{21}^2} & \frac{A_{32} - L_{21}L_{31}}{L_{22}} \end{bmatrix} && \text{Column 2} \\
L_{33} &= \sqrt{A_{33} - L_{31}^2 - L_{32}^2} && \text{Column 3}
\end{aligned}$$

39 I termini chiaramente diagonali devono essere positivi.

40 Questo algoritmo può essere riassunto come:

$$\begin{aligned}
l_{ii} &= \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} \\
l_{ij} &= \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1}}{l_{jj}} \qquad i > j
\end{aligned}$$

L.2.2.5 Decomposizione del valore singolare

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

41 La decomposizione del valore singolare (SVD) è uno strumento matematico versatile che decompone qualsiasi $m \times n$ matrice A in tre matrici più semplici e ben definite, che si esprime come:

$$A = U\Sigma V^T$$

Dove:

- U $(m \times m)$ è una matrice ortogonale le cui colonne sono **vettori singolari sinistro** of A.
- Σ $(m \times n)$ è una matrice diagonale contenente **valori singolari** $(\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq 0)$ of A.
- V^T $(n \times n)$ è una matrice ortogonale le cui file sono **vettori singoli destro** of A.

42 Valori singolari (σ_i) riflettono l'importanza dei vettori singolari corrispondenti, quantificare quanto ciascuno contribuisce alla struttura complessiva della matrice.

43 Le colonne di U e V forma basi ortonormali per gli spazi di riga e colonna A, rispettivamente.

44 SVD trasforma A in una forma più semplice, rivelando proprietà intrinseche come grado, gamma e spazio nullo.

45 SVD ha più applicazioni, una di esse risolve i Sistemi Lineari, in particolare per le matrici ill-condizionate o singolari dove i metodi tradizionali non riescono.

46 La procedura è la seguente:

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

1. Eseguire SVD
   - Decomposizione A in U, Σe V^T.
   - Utilizzare strumenti computazionali come:
     - Matlab: `[U, S, V] = svd(A)`
     - Python (NumPy): `U, S, Vt = np.linalg.svd(A)`
2. Analizzare i valori di tipo singolare
   - Ispezionare gli elementi diagonali Σ (i valori singolari).
   - Valori singolari piccoli o zero indicano che A può essere ill-condizionato, richiedendo regolarizzazione o filtraggio per garantire calcoli stabili.
3. Ricostruire la Matrice
   - Convalidare la decomposizione ricostruendo A:
$$A = U\Sigma V^T$$
4. Sistemi lineari di Solvente Per $Ax = b$:
   - Esprimere la soluzione utilizzando SVD:
$$x = V\Sigma^+ U^T b$$
     Dove? Σ^+ è lo pseudo-inverso di Σ, ottenuto invertendo valori non zero e singolari e trasposizione Σ.
   - Per matrici ill-condizionate:
     - Regolare scartando i valori singolari sotto una soglia per stabilizzare i calcoli.
     - Questo approccio è particolarmente efficace per le matrici con valori singolari molto piccoli.
5. Approssimativo della Matrice
   - Per la riduzione della dimensionalità o il filtraggio del rumore, troncate Σ mantenendo solo la parte superiore k valori singolari (configurare gli altri a zero).
   - Ricostruire il grado...k ravvicinamento delle legislazioni A:
$$A_k = U_k \Sigma_k V_k^T$$

47 Per esempio, dato:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix},$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

1. SVD Compute:
   - U = Base ortonormale A- Lo spazio della colonna.
   - $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$ (valori singolari).
   - V^T = Base ortonormale A- Lo spazio di fila.
2. Risoluzioni $Ax = b$ con SVD:
$$x = V\Sigma^+ U^T b$$
3. Regolare i piccoli valori singolari per garantire la stabilità se A è ill-condizionato.

48 SVD è infatti particolarmente efficace per le matrici che sono difficili da decomporre a causa di una quasi singolarità o mal condizionata, fornendo un quadro robusto per risolvere equazioni, stabilizzare i calcoli e analizzare le proprietà della matrice.

L.2.2.6 Decomposizione QR

49 La decomposizione QR è una tecnica di fattorizzazione della matrice fondamentale nell'algebra lineare, dove una data matrice **A** si esprime come il prodotto di due matrici: **Q**, una matrice ortogonale (o unitaria) e **R**, una matrice triangolare superiore. Matematicamente, questa è rappresentata come:
$$\mathbf{A} = \mathbf{QR}.$$

50 Ecco, **Q** soddisfa $\mathbf{Q}^\top\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ (or $\mathbf{Q}^*\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ nel caso complesso), il che significa che le sue colonne formano una base ortonormale.

51 La matrice **R** è triangolare superiore, dove tutte le voci sotto la diagonale sono zero. La decomposizione QR viene tipicamente applicata a matrici rettangolari di dimensioni $m \times n$dove $m \geq n$.

L.2.3 Metodi indiretti

52 I metodi iterativi sono più adatti per i sistemi di equazione molto "large', o quando possiamo avere un "guess' iniziale della soluzione

53 Il metodo più popolare è il Gauss Seidel.

L.2.3.1 Seidel di Gauss

54 A partire dal nostro sistema di equazioni lineari

$$\begin{aligned} c_{11}x &+ c_{12}y &+ c_{13}z &= r_1 \\ c_{21}x &+ c_{22}y &+ c_{23}z &= r_2 \\ c_{31}x &+ c_{32}y &+ c_{33}z &= r_3 \end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

risolvere 1^{st} equazione per x_1 utilizzando l'iniziale "guess" per y, z $(y0, z_0)$

$$x_1 = \frac{r_1 - c_{12}y_0 - c_{13}z_0}{c_{11}}$$
$$y_1 = \frac{r_2 - c_{21}x_1 - c_{23}z_0}{c_{22}}$$
$$z_1 = \frac{r_3 - c_{31}x_1 - c_{32}y_1}{c_{33}}$$

così & così $\cdots$

Nota:

1. Il processo iterativo può essere considerato convergente se:

$$|\frac{\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}}{\mathbf{x}^{lk}}| \leq \varepsilon$$

2. La convergenza può essere accelerata dal rilassamento

$$x_i^k = \lambda x_i^k + (1 - \lambda)x_i^{k-1}$$

dove λ è un fattore di peso tra 0. e 2. Per i valori inferiori a 1 abbiamo *sottorilassazione*, e per valori più grande di 1 abbiamo *sovrarilassamento*. Il primo è utilizzato per i sistemi non convergenti, mentre il secondo viene usato accelerare la convergenza di quelli convergenti. ottimale λ per l'analisi del telaio è di circa 1,8.

L.3 Caratteristiche della matrice e miglioramenti computazionali

L.3.1 Singolarità e rango

55 Se il determinante di una matrice $\mathbf{A}_{n\times n}$ è zero, che la matrice si dice singolare.

56 Come abbiamo visto in precedenza, questo significa che c'è almeno una riga o una colonna che è una combinazione lineare degli altri.

57 I concetti di singolarità e grado di un sistema di equazioni lineari sono intimamente correlati agli autovalori della matrice del coefficiente associato.

58 Data una matrice quadrata $\mathbf{A}$ di dimensioni $n \times n$, la singolarità della matrice è determinata dal suo determinante; una matrice si presenta singolare se e solo se il suo determinante è zero, che implica che manca di rango pieno.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

59 Questa condizione si lega direttamente agli autovalori di A: il determinante è il prodotto dei valori di autovalore, $\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$dove λ_i sono i valori di $\mathbf{A}$. Se un valore di autovalore $\lambda_i = 0$, il determinante diventa zero e la matrice è singolare.

60 Il grado di una matrice rappresenta il numero massimo di righe o colonne lineari indipendenti in $\mathbf{A}$, e corrisponde al numero di eigenvalori non zero della matrice quando si considera le loro molteplicità algebriche. $n \times n$ ha tutto n eigenvalues non-zero. Al contrario, se il grado della matrice è $r < n$, allora esattamente $n - r$ i valori di autovalori sono zero.

61 Da una prospettiva numerica, gli autovalori influenzano anche il condizionamento del sistema. Una matrice con autovalori vicino allo zero, anche se non singolare, può portare all'instabilità numerica, evidenziando l'importanza degli eigenvalues sia nelle analisi teoriche che pratiche dei sistemi lineari.

62 If n è la dimensione della matrice di rigidità globale di una struttura in cui condizioni di confine non sono state contabilizzate ($n =$ è uguale a numero totale di nodi volte il numero totale dei gradi di libertà per nodo) avrebbe un rango r pari a n meno il numero di possibile corpo rigido moti (3 e 6 in due e tridimensionali rispettivamente).

63 Per esempio in Eq. 44.1, la matrice di rigidità aumentata $\mathbf{K}$ ha un rango r più piccolo di n, considerando che la Commissione ha adottato una decisione relativa alla conclusione di un accordo tra la Comunità e i paesi terzi. $\mathbf{K}_{tt}$ ha $r = n$.

L.3.2 Valori e autovettori

64 Una forma speciale del sistema di equazione lineare

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{Bmatrix}$$

è uno in cui la destra lato è un multiplo della soluzione:

$$\mathbf{A}\{\mathbf{x}\} = \lambda\{\mathbf{x}\}$$

che può essere riscritto come

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\{\mathbf{x}\} = \mathbf{0}$$

65 Una soluzione non banale a questo sistema di equazioni è possibile se e solo if $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ è singolare o

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

or

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

66 Quando il determinante è espanso, otteniamo un n^{th} polinomio di ordine in termini di λ che è conosciuta come l'equazione caratteristica **A**. n soluzioni (che possono essere reali o complesse) sono gli autovalori **A**e ciascuno di loro λ_i soddisfa

$$\mathbf{A}\{\mathbf{x}_i\} = \lambda_i \{\mathbf{x}_i\}$$

dove $\{\mathbf{x}_i\}$ è un eigenvector corrispondente.

Si può dimostrare che:

1. Il n eigenvalori di matrici simmetriche reali di rango n sono tutti reali.
2. Gli autovettori sono ortogonali e formano una base ortogonale E_n.

I valori e gli autovettori sono utilizzati nell'analisi della stabilità (indurimento), dinamica analisi, e per valutare l'esecuzione delle formulazioni degli elementi finiti.

L.3.3 Numero di condizioni

67 Il numero di condizione di una matrice è una misura della sensibilità della soluzione di un sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ a modifiche dei dati di input o errori di arrotondamento durante il calcolo. $\mathbf{x}$) cambierà per una data perturbazione nell'ingresso $\mathbf{b}$.

68 Per una matrice quadrata **A**, if **A** è diagonalizzabile o simmetrico positivo definito, il numero di condizione nel 2-norm (norma spettro) è definito come:

$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

dove λ_{max} e λ_{min} sono i più grandi e piccoli autovalori (in valore assoluto) di **A** rispettivamente.

69 Questa definizione implica:

- $\kappa(\mathbf{A}) \geq 1$Da allora $\lambda_{max} \geq \lambda_{min} > 0$ di matrici definite positive.
- Un piccolo $\kappa(\mathbf{A})$ (vicino a 1) significa che una matrice è ben condizionata, mentre un grande valore indica una matrix ill-condizionata.

L.3.4 Pre condizionamento

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

COPIA DI REVISIONE

70 Precondizionamento è una tecnica utilizzata per trasformare una matrice $\mathbf{A}$ in modo che migliora le sue proprietà numeriche prima di applicare metodi diretti per la risoluzione di un sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. L'obiettivo è quello di rendere il problema più facile da risolvere, sia riducendo il numero di condizione di $\mathbf{A}$ o semplificando la decomposizione della matrice.

71 Il sistema originale $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ si trasforma con un *matrice precondizionata* $\mathbf{M}$ in una forma equivalente:

72 La matrice $\mathbf{M}$ è scelto tale che:

- $\mathbf{M}$ caimmagini $\mathbf{A}$ ma è più facile da invertire.
- $\mathbf{M}$ è non singolare.

73 Discutiamo di due tipi di precondizionamento, sinistra e destra, Tabella L.2.

Tabella L.2: precondizionamento; confronto tra sinistra e destra

Aspetti	Precondizione a sinistra	Precondizione destra
Matrice precondizionata	$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{AM}^{-1}$
Lato destro-mana	Trasformato come $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$	Rimane invariato ($\mathbf{b}$)
Azione del Precondizionatore	Atti su entrambi $\mathbf{A}$ e $\mathbf{b}$	Atti in merito $\mathbf{A}$ e gli sconosciuti via $\mathbf{x} = \mathbf{My}$
Quando applicata	Prima di risolvere, modifica il sistema interamente	Durante il processo di risoluzione, modifica solo gli sconosciuti

L.3.4.1 Precondizionamento a sinistra

74 Nel precondizionamento sinistro, trasformiamo il sistema lineare originale $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ in una forma che migliora la stabilità e l'efficienza numerica pre-multiplying sia la matrice del coefficiente $\mathbf{A}$ e il vettore laterale destro $\mathbf{b}$ dall'inverso di una matrice precondizionata $\mathbf{M}$. Il sistema precondizionato è scritto come:

$$\underbrace{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}}_{\mathbf{A}'}\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{b}'}.$$

75 Procedura:

1. Matrice precondizionata ($\mathbf{A}'$):
$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}.$$
Questa è la matrice del coefficiente trasformato. Il precondizionatore $\mathbf{M}$ è scelto tale che:

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

- **M** caimmagini **A**, ma è più facile invertire,
- **M** migliora il condizionamento di **A**′, rendendo i risolutori numerici più stabili.

2. Precondizionato lato destro (**b**′):

$$\mathbf{b}' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}.$$

   Il lato destro si trasforma anche in coerenza con la matrice precondizionata.
3. Risolvere il Sistema Precondizionato:Il nuovo sistema è:

$$\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'.$$

   Dal momento che il precondizionamento modifica entrambi **A** e **b**, risolviamo direttamente per **x** utilizzando tecniche standard (ad esempio, decomposizione LU).

76 I passaggi sono:

1. Computo $\mathbf{b}' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$.
2. Formare la matrice precondizionata $\mathbf{A}' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$.
3. Risoluzioni $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ per **x** usando un risolutore diretto.

L.3.4.2 Precondizione giusta

77 Iniziamo con:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

1. Introdurre una sostituzione:

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{y},$$

   dove **M** è la matrice precondizionatare, e **y** è il nuovo vettore di sconosciuti. Questa sostituzione significa che la soluzione originale **x** può essere recuperato utilizzando:

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{y}.$$

2. Sostituto $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{y}$ nell'equazione originale:

$$\mathbf{A}(\mathbf{M}\mathbf{y}) = \mathbf{b}. \implies (\mathbf{A}\mathbf{M})\mathbf{y} = \mathbf{b}.$$

3. Ora il problema è risolvere:

$$(\mathbf{A}\mathbf{M})\mathbf{y} = \mathbf{b}.$$

4. Decomposizione **AM** in:

$$\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{U},$$

   dove:

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella L.3: Confronto di precondizionamento matrice e decomposizione del valore singolare (SVD)

Aspetti	Matrix Precondizionabile	Decomposizione del valore sessuale (SVD)
Oggetto	Accelera i risolutori iterativi per grandi sistemi.	Analizza la struttura della matrice e risolve in modo robusto.
Dimensione della matrice	Grandi matrici.	Matrici di piccole e medie dimensioni.
Ill-Condizione	Migliora il condizionamento per i risolutori iterativi.	Maneggia ill-condizionamento direttamente.
Efficienza	Computazionalmente efficiente per i metodi iterativi.	Computazionalmente costoso ma preciso.
Applicazioni	Risolutori iterativi per PDE, simulazioni di grandi dimensioni.	PCA, compressione dei dati, filtraggio del rumore, soluzioni robuste.
Scenari	Problemi ripetuti o su larga scala.	Alta precisione, analizzando la struttura della matrice.

- **L** è una matrice triangolare inferiore,
- **U** è una matrice triangolare superiore.

5. Per risolvere **LUy** = **b**, procedere in due fasi:
   (a) Risoluzioni **Lz** = **b** per **z** utilizzando sostituzione in avanti.
   (b) Risoluzioni **Uy** = **z** per **y** utilizzando la sostituzione arretrata.
6. Dopo aver risolto per **y**, recuperare il vettore sconosciuto originale **x** utilizzando:

$$\mathbf{x} = \mathbf{My}.$$

78 Tabella L.3 confronta la singolare decomposizione del valore con il precondizionamento matrice.

L.4 Esempi

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

L.4.1 Ex L.1: Eliminazione di Gauss

In questo primo esempio cerchiamo semplicemente di risolvere per il vettore sconosciuto $\{\mathbf{x}\}$ dato:

$$\begin{cases} +10x_1 & +x_2 & -5x_3 & = 1. \\ -20x_1 & +3x_2 & +20x_3 & = 2. \\ +5x_1 & +3x_2 & +5x_3 & = 6. \end{cases}$$

1. Aggiungi $\frac{20}{10}$ volte la prima equazione al secondo uno elliminerà il x_1 coefficiente della seconda equazione.
2. Substract $\frac{5}{10}$ volte la prima equazione dalla terza uno elliminerà il x_1 coefficiente della terza equazione.

$$\begin{cases} 10.x_1 & +x_2 & -5.x_3 & = 1. \\ & +5.x_2 & +10.x_3 & = 4. \\ & +2.5x_2 & +7.5x_3 & = 5.5 \end{cases}$$

3. Substract $\frac{2.5}{5}$ volte la seconda equazione da il terzo eliminerà x_2 coefficiente dell'ultima equazione

$$\begin{cases} 10.x_1 & +x_2 & -5.x_3 & = 1. \\ & +5.x_2 & +10x_3 & = 4. \\ & & +2.5x_3 & = 3.5 \end{cases}$$

4. Ora possiamo backsubstitute e risolvere dal basso in su:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{3.5}{2.5} = 1.4 \\ x_2 &= \frac{4. - 10.x_3}{5.} = -2. \\ x_1 &= \frac{1. - x_2 + 5.x_3}{10.} = 1. \end{aligned}$$

L.4.2 Ex L.2: Espulsione di Gauss-jordan

In questo secondo esempio, determineremo entrambi $\{\mathbf{x}\}$ e la matrice inversa $\mathbf{A}^{-1}$.

L'operazione è identica al primo, tuttavia abbiamo aumentato la matrice $\mathbf{A}$ by $\mathbf{I}$: $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$, e operare simultaneamente sui due - Sottomatrice.

1. Matrice iniziale

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -20 & 3 & 20 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 6 \end{array}\right\}$$

2. Eliminazione della prima colonna:

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

(a) riga 1=0.1(row 1)
(b) riga 2=(row2)+20 (nuova riga 1)
(c) riga 3=(row 3) -5 (nuova fila 1)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0.1 & -0.5 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2.5 & 7.5 & -0.5 & 0 & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} 0.1 \\ 4 \\ 5.5 \end{array}\right\}$$

3. Eliminazione della seconda colonna

(a) fila 2=0.2(row 2)
(b) riga 1=(row 1)-0.1 (nuova fila 2)
(c) riga 3=(row 3) -2.5 (nuova fila 2)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -0.7 & 0.06 & -0.02 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0.4 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 & -1.5 & -0.5 & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} 0.02 \\ 0.8 \\ 3.5 \end{array}\right\}$$

4. Eliminazione della terza colonna

(a) riga 3=0.4(row 3)
(b) riga 1=(row 1)+0.7 (nuova fila 3)
(c) riga 2=(row 2)-2 (nuova fila 3)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0.36 & -0.16 & 0.28 \\ 0 & 1 & 0 & 1.6 & 0.6 & -0.8 \\ 0 & 0 & 1 & -0.6 & -0.2 & 0.4 \end{array}\right] \underbrace{\left\{\begin{array}{c} 1 \\ -2 \\ 1.4 \end{array}\right\}}_{\{x\}}$$

Questa ultima equazione è $[\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}]$

L.4.3 Ex L.3: lu Decomposizione

Data:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc} 7 & 9 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & -7 \\ 1 & 6 & -3 & -4 \\ 3 & -2 & -1 & -5 \end{array}\right]$$

In seguito alla procedura di cui sopra, può essere decomposto in:

Titolo 1: $u_{11} = a_{11} = 7$; $u_{12} = a_{12} = 9$; $u_{13} = a_{13} = -1$; $u_{14} = a_{14} = 2$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Voce 2:

$$\begin{aligned} l_{21} &= \tfrac{a_{21}}{u_{11}} && = \tfrac{4}{7} \\ u_{22} &= a_{22} - l_{21}u_{12} && = -5 - 4\tfrac{9}{7} && = -10.1429 \\ u_{23} &= a_{23} - l_{21}u_{13} && = 2 + 4\tfrac{1}{7} && = 2.5714 \\ u_{24} &= a_{24} - l_{21}u_{14} && = -7 - 4\tfrac{2}{7} && = -10.1429 \end{aligned}$$

- Stagione 3:

$$\begin{aligned} l_{31} &= \tfrac{a_{31}}{u_{11}} && = \tfrac{1}{7} \\ l_{32} &= \tfrac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} && = \tfrac{6-(0.1429)(9)}{-10.1429} && = -0.4647 \\ u_{33} &= a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} && = -3 - (0.1429)(-1) - (-0.4647)(2.5714) && = -1.6622 \\ u_{34} &= a_{34} - l_{31}u_{14} - l_{32}u_{24} && = -4 - (0.1429)(2) - (-0.4647)(-8.1429) && = -8.0698 \end{aligned}$$

Voce 4:

$$\begin{aligned} l_{41} &= \tfrac{a_{41}}{u_{11}} && = \tfrac{3}{7} \\ l_{42} &= \tfrac{a_{42} - l_{41}u_{12}}{u_{22}} && = \tfrac{-2-(0.4286)(9)}{-10.1429} = -0.5775 \\ l_{43} &= \tfrac{a_{43} - l_{41}u_{13} - l_{42}u_{23}}{u_{33}} && = \tfrac{-1-(0.4286)(-1)-(0.5775)(2.5714)}{-1.6622} = 1.2371 \\ u_{44} &= a_{44} - l_{41}u_{14} - l_{42}u_{24} - l_{43}u_{34} && = -5 - (0.4286)(2) - (0.5775)(-8.1429) - (1.2371)(-8.0698) \\ & && = 8.8285 \end{aligned}$$

or

$$\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ .5714 & 1 & 0 & 0 \\ .1429 & -.4647 & 1 & 0 \\ .4286 & .5775 & 1.2371 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & 9 & -1 & 2 \\ 0 & -10.1429 & 2.571 & -8.143 \\ 0 & 0 & -1.662 & -8.069 \\ 0 & 0 & 0 & 8.8285 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}}_{\mathbf{A}}$$

L.4.4 Ex L.4: La decomposizione di Cholesky

Data:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 10 & 4 \\ 6 & 13 & 13 & 6 \\ 10 & 13 & 27 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 72 \end{bmatrix}$$

Colonna 1:

$$\begin{aligned} l_{11} &= \sqrt{a_{11}} && = \sqrt{4} && = 2 \\ l_{21} &= \tfrac{a_{21}}{l_{11}} && = \tfrac{6}{2} && = 3 \\ l_{31} &= \tfrac{a_{31}}{l_{11}} && = \tfrac{10}{2} && = 5 \\ l_{41} &= \tfrac{a_{41}}{l_{11}} && = \tfrac{4}{2} && = 2 \end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Colonna 2:

$$\begin{aligned} l_{22} &= \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} &&= \sqrt{13 - 3^2} &&= 2 \\ l_{32} &= \frac{a_{32} - l_{31} l_{21}}{l_{22}} &&= \frac{13-(5)(3)}{2} &&= -1 \\ l_{42} &= \frac{a_{42} - l_{41} l_{21}}{l_{22}} &&= \frac{6-(2)(3)}{2} &&= 0 \end{aligned}$$

Colonna 3:

$$\begin{aligned} l_{33} &= \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} &&= \sqrt{27 - 5^2 - (-1)^2} &&= 1 \\ l_{43} &= \frac{a_{43} - l_{41} l_{31} - l_{42} l_{32}}{l_{33}} &&= \frac{2-(2)(5)-(0)(-1)}{1} &&= -8 \end{aligned}$$

Colonna 4:

$$l_{44} = \sqrt{a_{44} - l_{41}^2 - l_{42}^2 - l_{43}^2} = \sqrt{72 - (2)^2 - (0)^2 - (-8)^2} = 2$$

or

$$\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -8 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}}_{\mathbf{A}}$$

L.4.5 Ex L.5: Gauss-seidel

$$\begin{cases} 4x & +2y & +3z & = 8. \\ 3x & -5y & +2z & = -14. \\ -2x & +3y & +8z & = 27. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (8 - 2y_n - 3z_n)/4 \\ y_{n+1} &= (-14 - 3x_{n+1} - 2z_n)/(-5) \\ z_{n+1} &= (27 + 2x_{n+1} - 3y_{n+1})/(8) \end{aligned}$$

Assumere $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, la prima iterazione darà

$$\begin{aligned} x_1 &= (8 - 2 \times 0 - 3 \times 0)/4 &&= 2 \\ y_1 &= (-14 - 3 \times 2 - 2 \times 0)/(-5) &&= 4 \\ z_1 &= (27 + 2 \times 2 - 3 \times 4)/(8) &&= 2.375 \end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

La seconda iterazione

$$\begin{aligned} x_2 &= (8 - 2\times 4 - 3\times 2.375)/4 &&= -1.781 \\ y_2 &= (-14 - 3\times(-1.781) - 2\times 2.375)/(-5) &&= 2.6814 \\ z_2 &= (27 + 2\times(-1.781) - 3\times 2.681)/8 &&= 1.924 \end{aligned}$$

Terza iterazione

$$\begin{aligned} x_3 &= (8 - 2\times 2.681 - 3\times 1.924)/4 &&= -0.784 \\ y_3 &= (-14 - 3\times(-0.784) - 2\times 1.924)/(-5) &&= 3.099 \\ z_3 &= (27 + 2\times 2\times(-0.784) - 3\times 3.099)/8 &&= 2.017 \end{aligned}$$

- Va bene.	x	y	z
1	2.000	4.000	2.375
2	-1.781	2.681	1.924
3	-0.784	3.099	2.017
4	-1.062	2.969	1.996
5	-0.982	3.009	2.001
6	-1.006	2.997	2.000
7	-0.998	3.001	2.000
8	-1.001	3.000	2.000
9	-1.000	3.000	2.000
10	-1.000	3.000	2.000

L.4.6 Ex L.6: Gauss-Seidel

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \Rightarrow y = -3 - x; \rightarrow y = 8 - 2x \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$$

Risolvere iterativamente:

Iterazione	x	y	$N = x^2 + y^2$	$\frac{N_i - N_{i-1}}{N_i}$
1	0	3	9	
2	2.5	0.5	6.5	38.00%
3	3.75	-0.75	14.625	55.56%
4	4.375	-1.375	21.03125	30.46%
5	4.6875	-1.6875	24.82031	15.27%
6	4.84375	-1.84375	26.86133	7.60%
7	4.921875	-1.92188	27.91846	3.79%
8	4.960938	-1.96094	28.45618	1.89%
9	4.980469	-1.98047	28.72733	0.94%
10	4.990234	-1.99023	28.86347	0.47%
11	4.995117	-1.99512	28.93169	0.24%
12	4.997559	-1.99756	28.96583	0.12%

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

L.4.7 Ex L.7: Decomposizione del valore singolare

Cerchiamo di risolvere $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{b}$dove $\mathbf{A}$ is una matrice gravemente mal condizionata, con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+1e-15 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2+1e-15 \end{bmatrix}$$

1. Risolvere con soluzione diretta
$$\mathbf{y} \begin{bmatrix} 1.2000 \\ 0.8000 \end{bmatrix}$$

2. Eseguire la decomposizione del valore sessualmente (SVD) (utilizzando MATLAB®comando `[U, S, V] = svd(A)`
$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2.0000 & 0 \\ 0 & 0.0000 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

3. Costruisci lo pseudo-inverso di $\mathbf{S}$ con regolarizzazione e la soglia di regolarizzazione è 1e-6, ma prima inizializziamo
$$\mathbf{S}_{plus} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Cerca tutte le voci di $\mathbf{S}$, e quelli più grandi della soglia sono sostituiti dal loro inverso
$$\mathbf{S}_{plus} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Computo dello pseudo-inverso $\mathbf{A}$ utilizzando SVD
$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{plus} &= \mathbf{V}\mathbf{S}_{plus}U' \\ &= \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.2500 & 0.2500 \\ 0.2500 & 0.2500 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

6. Risolvere usando lo pseudo-inverso
$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{SVD} &= \mathbf{A}_{plus}\mathbf{b} \\ \begin{bmatrix} 0.2500 & 0.2500 \\ 0.2500 & 0.2500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2+1e-15 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A MATLAB®codice per SVD è dato in §I.5.4.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

L.4.8 Ex L.8: Precondizioni

Matrice A e le sue proprietà

1. considerando che la matrice ill-condizionata **A** è di solito dato, in questo caso stiamo andando a costruire sinteticamente uno utilizzando la relazione

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^\top$$

dove **D** è una matrice diagonale con gli autovalori preselezionati, e **Q** è qualsiasi matrice ortogonale (anche se controlla l'orientamento degli autovettori).

2. Noi prendiamo **D** per essere composto dagli autovalori $\{1, 0.1, 0.01\}$.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0100 \end{bmatrix}$$

3. Per generare **Q** abbiamo bisogno di una matrice di numero casuale

$$\mathbf{Random} = \begin{bmatrix} 0.4170 & 0.3023 & 0.1863 \\ 0.7203 & 0.1468 & 0.3456 \\ 0.0001 & 0.0923 & 0.3968 \end{bmatrix}$$

4. **Q** sarà una matrice ortogonale ottenuta da **Random** attraverso la sua decomposizione QR, cedendo

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0.5010 & 0.7769 & -0.3813 \\ -0.8654 & -0.4499 & 0.2206 \\ -0.0001 & 0.4405 & 0.8978 \end{bmatrix}$$

5. Poi noi decidiamo $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^\top$, sostituire:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.3128 & 0.3978 & 0.0309 \\ 0.3978 & 0.7697 & -0.0177 \\ 0.0309 & -0.0177 & 0.0275 \end{bmatrix}$$

6. I valori di autovalori **A** sono:

$$\lambda(\mathbf{A}) = \{1.000, 0.100, 0.010\}$$

(Come previsto, come **A** è stato costruito da **D**).

7. Il numero di condizione del **A** is:

$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} = \frac{1.0}{0.01} = 100.00$$

Precondiziona Matrix M La matrice precondizionata **M** sarà derivato dalla decomposizione di Cholesky $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$Dove:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0.5593 & 0 & 0 \\ 0.7112 & 0.5136 & 0 \\ 0.0552 & -0.1109 & 0.1101 \end{bmatrix}$$

e:

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top = \begin{bmatrix} 0.3128 & 0.3978 & 0.0309 \\ 0.3978 & 0.7697 & -0.0177 \\ 0.0309 & -0.0177 & 0.0275 \end{bmatrix}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Precondizionamento a sinistra

1. Il sistema precondizionato a sinistra è definito come:

$$\mathbf{A}_{\text{left-precond}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}, \quad \mathbf{b}_{\text{left-precond}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$$

2. Sostituire

$$\mathbf{A}_{\text{left-precond}} = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}$$

3. Gli autovalori della matrice precondizionata a sinistra sono:

$$\lambda(\mathbf{A}_{\text{left-precond}}) = \{1.000, 1.000, 1.000\}$$

4. Il numero di condizione è:

$$\kappa(\mathbf{A}_{\text{left-precond}}) = 1.00$$

5. Il rapporto tra i numeri di condizione è:

$$\frac{\kappa(\mathbf{A})}{\kappa(\mathbf{A}_{\text{left-precond}})} = 100.00$$

Precondizionamento a destra

1. Il sistema giusto precondizionato è definito come:

$$\mathbf{A}_{\text{right-precond}} = \mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}$$

2. Se dovessimo risolvere per $\mathbf{y}$, faremo una decomposizione LU. In questo caso

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

   e $\mathbf{U} = \mathbf{L}^t$ (nota che questo è un caso particolare dove $\mathbf{L}$ e $\mathbf{U}$ sono diagonali.)
3. Risolvere il sistema, in due fasi, avanti e poi sostituzione all'indietro
4. La matrice precondizionata è:

$$\mathbf{A}_{\text{right-precond}} = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}$$

5. Gli autovalori della matrice precondizionata sono:

$$\lambda(\mathbf{A}_{\text{right-precond}}) = \{1.000, 1.000, 1.000\}$$

6. Il numero di condizione è:

$$\kappa(\mathbf{A}_{\text{right-precond}}) = 1.00$$

7. Il rapporto tra i numeri di condizione è:

$$\frac{\kappa(\mathbf{A})}{\kappa(\mathbf{A}_{\text{right-precond}})} = 100.00$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Sintesi dei risultati

- Numero di condizione della matrice originale $\mathbf{A}$: $\kappa(\mathbf{A}) = 100.00$
- Numero di condizione dopo il precondizionamento lato sinistro: $\kappa(\mathbf{A}_{\text{left-precond}}) = 1.00$
- Numero di condizione dopo il precondizionamento a destra: $\kappa(A_{\text{right-precond}}) = 1.00$
- Rapporto di numeri di condizione per il precondizionamento lato sinistro: 100.00
- Rapporto di numeri di condizione per il precondizionamento a destra: 100.00

Il corrispondente MATLAB®il codice è in §I.5.5.

Alternare A

Nota che nel MATLAB®codice, il lettore potrebbe voler utilizzare direttamente

$$A = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.99 & 0.98 \\ 0.99 & 1.00 & 0.99 \\ 0.98 & 0.99 & 1.00 \end{bmatrix}$$

che si tradurrà

- Numero di condizione della matrice originale: 4.465028e+02
- Numero di condizione dopo il precondizionamento lato sinistro: 1.000000e+00
- Numero di condizione dopo il precondizionamento a destra: 1.000000e+00
- Rapporto di numeri di stato (originale / a sinistra precondizionato): 4.465028e+02
- Rapporto di numeri di stato (originale / diritto precondizionato): 4.465028e+02

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Appendice M

Probabilità e Statistica

Abstract

Questo capitolo introduce i concetti fondamentali di probabilità e statistica, un'area cruciale dello studio. Molti argomenti avanzati e la maggior parte degli esempi applicati sono basati su simulazioni probabilistiche. Il capitolo inizia spiegando le distinzioni tra variabili casuali discrete e continue, esplorando poi le proprietà di diverse distribuzioni di probabilità ampiamente utilizzate. Infine, introduce il concetto di distribuzioni multivariate e funzioni congiunte di probabilità, sottolineando il loro significato nella modellazione e nell'analisi.

M.1 Introduzione alla probabilità e alle statistiche . . . 3081
M.2 Concetti fondamentali di probabilità 3082
M.2.1 Determinazione *vs.* probabilità . . . 3082
M.2.2 Definizione . . . 3083
M.2.3 Probabilità condizionale . . . 3083
M.2.4 Tipi di variabili casuali . . . 3084
M.3 Strumenti statistici per l'analisi delle probabilità . . . 3085
M.3.1 Funzione di distribuzione cumulativa . . . 3086
M.3.2 Intervallo di fiducia . . . 3086
M.4 Misure statistiche . . . 3087
M.4.1 Momenti e misure di tendenza centrale . . . 3087
M.4.2 Rapporti tra variabili . . . 3090
M.5 Distribuzioni . . . 3091
M.5.1 Distribuzioni Univariate . . . 3091
M.5.2 Distribuzioni di bivariato . . . 3095

M.1 Introduzione alla probabilità e alle statistiche

Probabilità e statistiche costituiscono la base della comprensione chap: regione della fiducia e variabilità in diversi campi della scienza e dell'ingegneria, questo capitolo costruisce i concetti necessari per modellare la casualità ed analizzare efficacemente i dati. Le seguenti sezioni esplorano principi fondamentali, distribuzioni chiave e misure statistiche.

COPIA DI REVISIONE

M.2 Concetti fondamentali di probabilità

M.2.1 Determinazione *vs.* probabilità

Tradizionalmente, le valutazioni dell'adeguatezza strutturale sono state espresse da fattori di sicurezza $SF = \frac{C}{D}$ dove C è la capacità (cioè, forza) e D Anche se questa valutazione è abbastanza semplice da capire, soffre di molte limitazioni: 1) tratta tutti i carichi egualmente; 2) non differenzia tra le rispettive incertezze della capacità e della domanda; 3) è limitato ai carichi di servizio; e ultimo ma non meno 4) non consente il confronto dell'affidabilità relativa tra diverse strutture per modalità di prestazione differenti. Un'altra grande carenza è che tutti i parametri sono assegnati un unico valore in un'analisi, che viene poi deterministica.

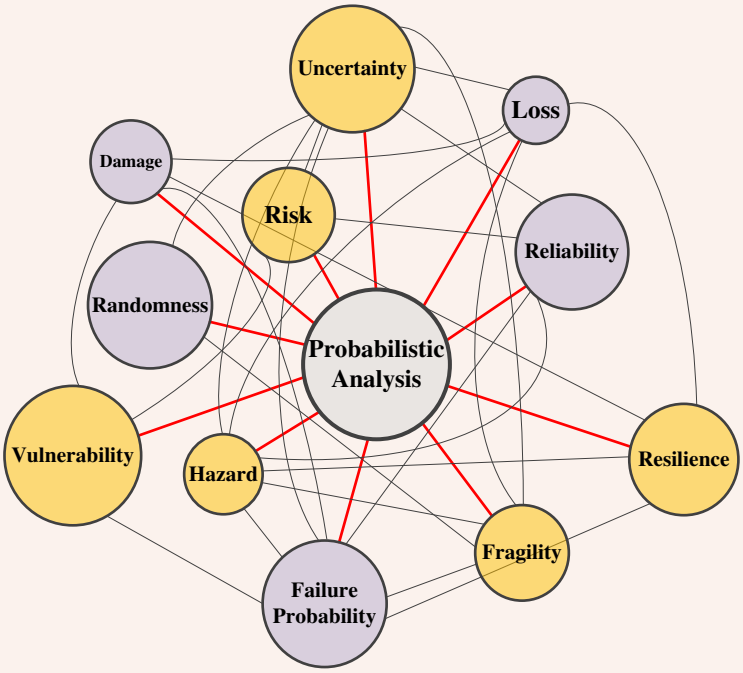


Figura M.1: Interconnessione dei concetti incorporati nell'analisi probabilistica (Saouma e Hariri-Ardebili, 2021)

D'altra parte, il cosiddetto approccio probabilistico è infatti un prolungamento di quello deterministico che rappresenta le incertezze. Essi includono, ma non sono limitati alle incertezze nella domanda, capacità, tipo di analisi, interpretazione dei risultati, ecc. I concetti diversi svolgono un ruolo in un'analisi probabilistica a seconda dell'obiettivo del progetto e dei risultati previsti. Questi parametri, schematicamente mostrati in Figura M.1, sarà spiegato più tardi.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

M.2.2 Definizione

La probabilità di un evento, A, è una frazione tra 0 e 1.

$$0 \leq P\{A\} \leq 1$$

Uno è la probabilità di un evento che è sicuro di accadere. Zero è la probabilita' di un avvenimento che non puo' succedere.

Una variabile casuale (RV) è il risultato di un processo naturale che non può essere predetto con certezza. L'insieme dei possibili risultati per una RV viene chiamato lo "spazio del campione", Ω.

$$P\{\Omega\} = 1$$

Una variabile casuale è "qualitativa" o "quantitativa" a seconda del tipo di valore nello spazio campione. I RV qualitativi esprimono valori come il genere e la razza.

Più volte si ripete una prova, più probabilmente è che la frequenza relativa di qualsiasi evento particolare sarà vicina alla probabilità di quell'evento. Ad esempio, se giriamo una moneta molte volte, più volte la giriamo, più è probabile che il numero di "testa" diviso per il numero totale di tosse sarà vicino a $1/2$.

Per ogni sequenza A_1, A_2, ... di eventi reciprocamente smussati, Figura M.2:

$$P\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{A_i\}$$

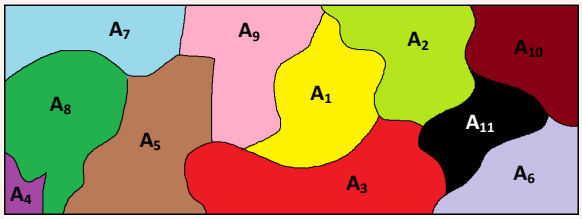


Figura M.2: Il concetto di spazio campione e vicende reciprocamente smussate (Saouma e Hariri-Ardebili, 2021)

M.2.3 Probabilità condizionale

La probabilità condizionale di A, dato B, scritto come $P\{A|B\}$, è definito

$$P\{A|B\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

$P\{A \cap B\}$ è interpretato come probabilità/probabilità che A si verifica data la conoscenza che B si è verificato.

Due eventi A e B sono "indipendenti" di uno degli altri se

$$P\{A|B\} = P\{A\}$$

or,

$$P\{A \cap B\} = P\{A\}.P\{B\}$$

Significa conoscenza di BIl verificarsi non ha effetto sulla probabilità che A si verificherà.

M.2.4 Tipi di variabili casuali

If X è un RV (cioè una funzione definita sugli elementi di uno spazio campione) con un numero finito di valori possibili $x_i \in R_X$ con $i = 1,2,...$, dove R_X è la gamma di valori del RV, quindi è una variabile casuale "discrete'.

La probabilità di X con un valore specifico x_i, $p(x_i) = P(X = x_i)$ è un numero tale che

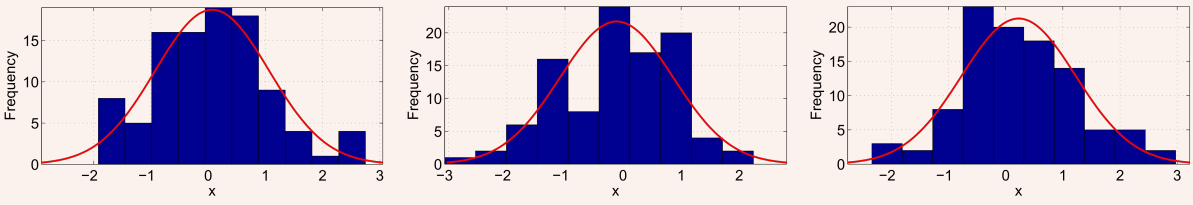
$$p(x_i) \geq 0$$

per ogni $i = 1,2,...$ e

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

La collezione di coppie $(x_i; p(x_i))$, $i = 1,2,...$ è chiamata la "distribuzione della probabilità" di X, in cui $p(x_i)$ è la funzione di massa "probabilità" di X.

Per un numero limitato di campioni, i risultati non possono riflettere esattamente il vero modello di distribuzione. M.3 sono generati con solo 100 campioni casuali. Si possono vedere le differenze chiare tra di loro.

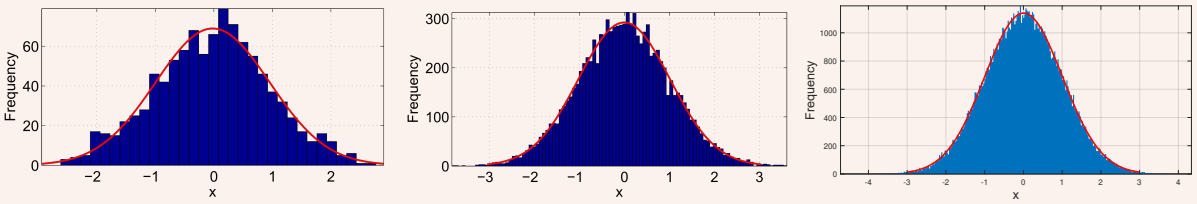


(a) 100 campioni, prima prova (b) 100 campioni, secondo tentativo (c) 100 campioni, terzo tentativo

Figura M.3: Confronto degli istogrammi a causa di 100 campioni per tre volte

Aumentare il numero di campioni aiuterà. I grafici in Figura M.4 sono basati su 1.000, 10.000 e 100.000 campioni, rispettivamente.

COPIA DI REVISIONE



(a) 1.000 campioni (b) 10.000 campioni (c) 100.000 campioni

Figura M.4: Confronto degli istogrammi a causa di 1.000-100.000 campioni

M.3 Strumenti statistici per l'analisi delle probabilità

If R_X è un intervallo piuttosto che un set discreto allora X è una "continuous random variabile" La probabilità che $X \in [a, b]$ is

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

dove $f(x)$ è la funzione di densità della probabilità (PDF) X. Sempre.

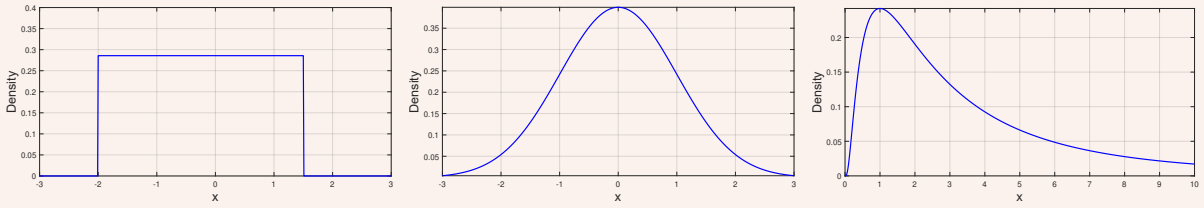
$$f(x) \geq 0$$

e,

$$\int_{R_X} f(x)dx = 1$$

e, se $x \notin R_X$ Allora $f(x) = 0$.

Figura M.5 mostra tre campioni di PDF per tre diversi tipi di funzioni continue, che verranno spiegate in seguito nel dettaglio.



(a) Distribuzione uniforme (b) Distribuzione normale (c) Distribuzione lognormale

Figura M.5: Esempi di tre funzioni distributive continue

COPIA DI REVISIONE

M.3.1 Funzione di distribuzione cumulativa

La probabilità che $X \leq x$, $P(X \leq x) = F(x)$ è la funzione di distribuzione cumulativa (CDF) ed è deformata come segue:

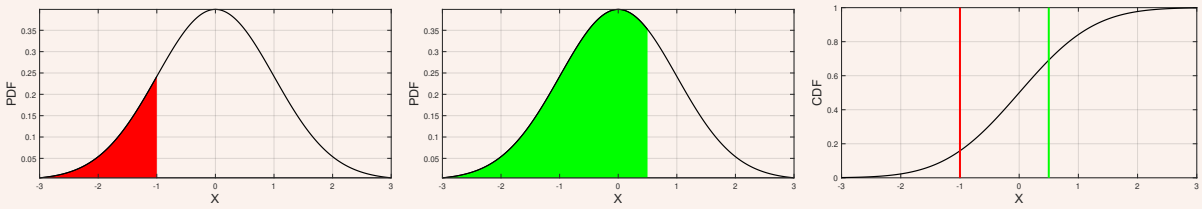
- Per discrete $X \leq x_n$:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)$$

- Per continuo $X \leq x$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\tau) d\tau$$

Figura M.6 mostra la relazione tra il PDF e il CDF per una distribuzione normale.



(a) PDF; bassa probabilità (b) PDF; elevata probabilità (c) CDF corresponsabile

Figura M.6: Relazione tra PDF e CDF

Alcune caratteristiche chiave del CDF possono essere riassunte come segue:

- If $a < b$Allora $F(a) < F(b)$
- $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$

Figura M.7 mostra il rapporto tra un PDF legato e la relativa CDF.

M.3.2 Intervallo di fiducia

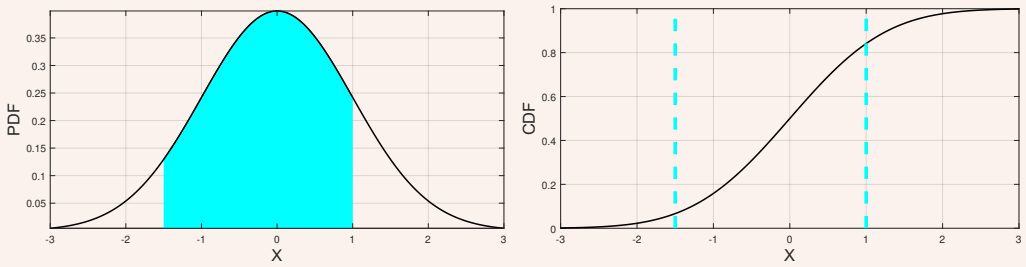
L'intervallo di fiducia è una gamma di valori che probabilmente contiene il vero parametro della popolazione (ad esempio, media, proporzione) con un livello di fiducia specificato. chap: regione della fiducia di una stima derivata da un campione, Fig. M.8.

Per una popolazione significa μ, l'intervallo di fiducia è calcolato come:

$$\text{CI} = \bar{x} \pm z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Distribuzione uniforme (b) Distribuzione normale

Figura M.7: Relazione tra PDF e CDF

dove: $\bar{x}$: Mezzo di campionamento, z: Valore critico (dalla distribuzione normale standard) corrispondente al livello di fiducia (ad es. $z = 1.96$ per 95% fiducia), σ: Scarto standard demografico, n: Dimensione del campione.

Se la popolazione è una deviazione standard σ è sconosciuto, la deviazione standard del campione s viene utilizzato, e t-il contributo è applicato:

$$\text{CI} = \bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

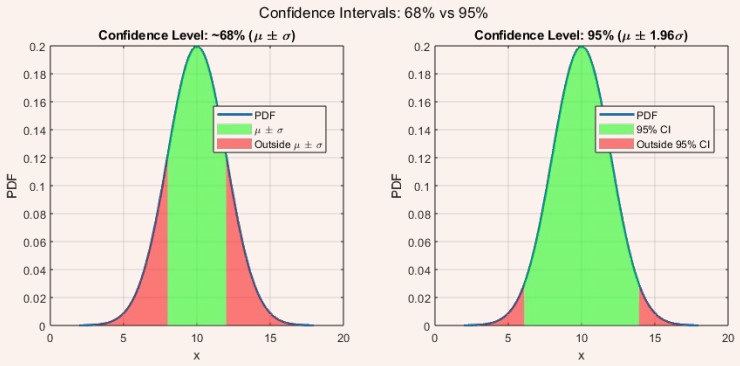


Figura M.8: Illustrazione dell'intervallo di fiducia

M.4 Misure statistiche

M.4.1 Momenti e misure di tendenza centrale

I momenti sono misure quantitative che descrivono la forma e le caratteristiche di una distribuzione delle probabilità, ogni momento cattura aspetti specifici dei dati, come ad

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

esempio tendenza centrale, variabilità, asimmetria e piccozza. Di seguito sono descritti i momenti più comunemente utilizzati e le relative misure:

Primo momento: Mean La media è la media aritmetica dei dati, che rappresenta la tendenza centrale della distribuzione:

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Il mezzo indica dove i cluster di dati e viene comunemente usato come misura della posizione, Fig. M.9.

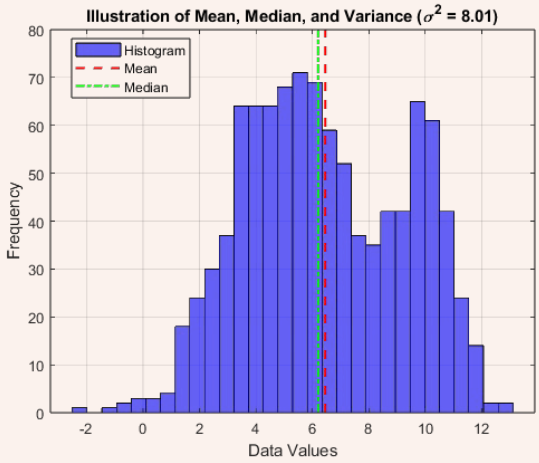


Figura M.9: Illustrazione di Mean e Median

Median La mediana è il valore che separa la metà superiore e la metà inferiore di un set di dati.

Secondo momento: Varianza Varianza quantifica la diffusione o la dispersione dei dati intorno al mezzo:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2$$

Fornisce informazioni sulla variabilità dei dati. Le variazioni più ampie indicano punti di dati dispersi.

Deviazione standard La deviazione standard è la radice quadrata della variazione, espressa nelle stesse unità dei dati, Fig. M.10:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

La deviazione standard è spesso usata perché è più facile da interpretare rispetto alla variazione.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

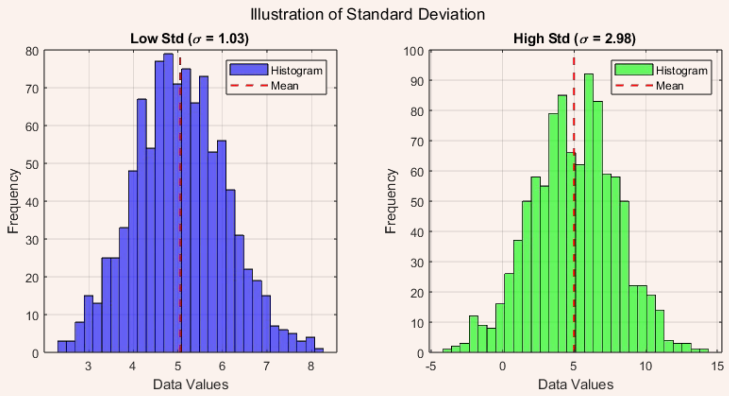


Figura M.10: Illustrazione della Deviazione Standard

Coefficiente di Variazione Il coefficiente di variazione (COV) è il rapporto tra la deviazione standard e quella media, fornendo una misura normalizzata di variabilità:

$$\text{COV} = \frac{\sigma}{\mu}$$

COV è particolarmente utile per confrontare la variabilità tra dataset con unità o scale diverse.

Terzo momento: Skewness Skewness misura l'asimmetria della distribuzione dei dati intorno al mezzo:

$$\text{Skewness} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^3$$

Una scheggia positiva indica una distribuzione con coda più lunga sulla destra, mentre uno schewness negativo indica una coda più lungo a sinistra, Fig. M.11.

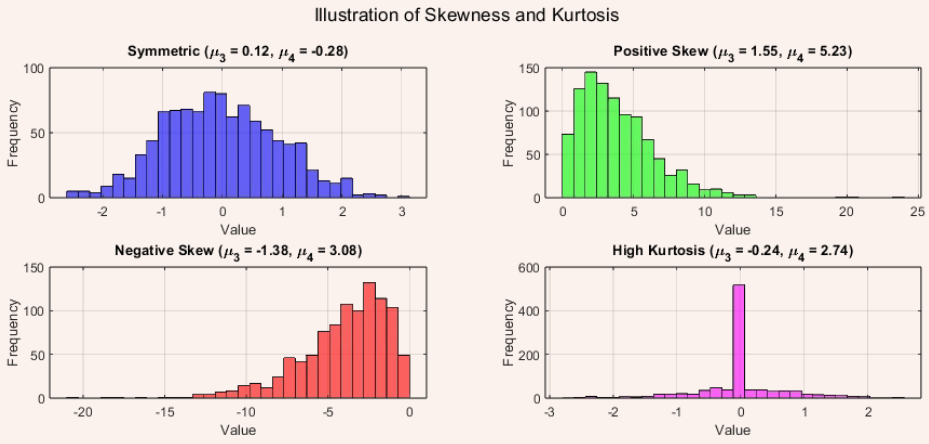


Figura M.11: Illustrazione di Skewness e kurtosis

COPIA DI REVISIONE

Quarto momento: Kurtosis Kurtosis descrive la "pecchezza" o "flatness" di una distribuzione relativa ad una normale distribuzione:

$$\text{Kurtosis} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^4 - 3$$

Una kurtosi positiva indica un picco tagliente e delle code pesanti, mentre una kurtisi negativa indica una distribuzione piatta.

M.4.2 Rapporti tra variabili

Covarianza La covarianza misura il grado in cui due variabili variano insieme:

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)$$

Una covarianza positiva indica che le variabili tendono ad aumentare o diminuire insieme, mentre una covariance negativa indica un rapporto inverso.

Coefficiente di correlazione: ρ_{xy} è una misura non dimensionale del grado di correlazione

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Un coefficiente di correlazione 1.0 or −1.0 indica una correlazione lineare perfetta, Fig. M.12. Un valore positivo indica che le variabili tendono ad aumentare o diminuire insieme, mentre un valore negativo indica che si tende a crescere come l'altro diminuisce. non implica in generale l'indipendenza.

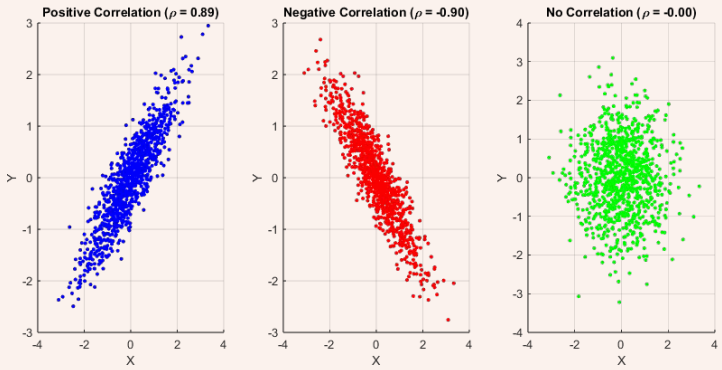


Figura M.12: Illustrazione dei coefficienti di correlazione

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

M.5 Distribuzioni

M.5.1 Distribuzioni Univariate

In un'analisi probabilistica, ciascuno dei parametri incerti può essere rappresentato da una variabile casuale e dal suo PDF associato sotto forma di $X \sim f_X(x)$Questa sezione mostra alcuni dei modelli di distribuzione univariati comunemente utilizzati in ingegneria civile e le loro caratteristiche principali.

- Distribuzione uniforme
- Distribuzione gaussiana/norme
- Distribuzione lognormale
- Distribuzione di Weibull
- Distribuzione di valori estremi (Gumbel)

Distribuzione uniforme

Le distribuzioni uniformi sono solitamente utilizzate per rappresentare variabili casuali con momenti sconosciuti e supporto conosciuto.

- Notazione: $X \sim \mathcal{U}(a, b)$
- PDF:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- CDF:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

- Statistiche:

$$\begin{cases} \mu_X = \frac{a+b}{2} \\ \sigma_X = \frac{b-a}{\sqrt{12}} \end{cases}$$

Distribuzione normale

Le distribuzioni normali sono ampiamente utilizzate in molti campi applicati della scienza e dell'ingegneria per rappresentare errore di misura, termine del rumore, ecc.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

- Notazione: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$
- PDF:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- CDF:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\tau-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\tau$$

- Statistiche:

$$\begin{cases} \mu_X = \mu \\ \sigma_X = \sigma \end{cases}$$

Distribuzione lognormale

Le distribuzioni Lognormal sono ampiamente utilizzate in molti campi applicati di scienza e ingegneria per rappresentare errore di misura, termine rumore, ecc.

- Notazione: $X \sim \mathcal{LN}(\lambda, \zeta)$
- PDF:

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\zeta^2}} \exp(-\frac{(\ln x - \lambda)^2}{2\zeta^2})$$

- CDF:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{erf}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\sqrt{2}\zeta}\right) = \Phi\left(\frac{\ln x - \lambda}{\zeta}\right)$$

  dove erf è chiamata funzione di errore e Φ è la funzione di distribuzione cumulativa della distribuzione normale standard.
- Statistiche:

$$\begin{cases} \mu_X = e^{\lambda+\zeta^2/2} \\ \sigma_X = e^{\lambda+\zeta^2/2}\sqrt{e^{\zeta^2} - 1} \end{cases}$$

dove λ e ζ sono la deviazione media e standard del logaritmo naturale della variabile.

Distribuzione di Weibull

Questo modello è solitamente utilizzato per caratterizzare variabili di tipo time-to-failure, che possono essere utilizzate per la resistenza del materiale e i parametri della vita per materiali fragili,

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

- Notazione: $X \sim \mathcal{W}(\alpha, \beta)$
- PDF:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp -\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta} & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

- CDF:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp -\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta} & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

- Statistiche:

$$\begin{cases} \mu_X = \alpha\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \\ \sigma_X = \alpha\sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^2} \end{cases}$$

Distribuzione di Gumbel

La distribuzione Gumbel (o Generalized Extreme Value Distribution Type-I) è utilizzata per modellare la distribuzione del massimo (o il minimo) di un certo numero di campioni di varie distribuzioni.

- Notazione: $X \sim \mathcal{G}(\mu, \beta)$
- PDF:

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x-\mu}{\beta} - e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}}$$

- CDF:

$$F(x) = e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}}$$

- Statistiche:

$$\begin{cases} \mu_X = \mu + \beta\gamma_e \\ \sigma_X = \frac{\pi\beta}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

dove $\gamma_e = 0.577216...$ è la costante Euler.

M.5.1.1 Confronto

Fig. M.13 illustra le varie distribuzioni con le seguenti caratteristiche:

Qui, descriviamo le caratteristiche delle distribuzioni utilizzate nell'analisi comparativa, comprese le loro funzioni di densità probabili (PDF), Funzioni di distribuzione cumulative (CDFs) e i valori numerici adottati per ciascuno.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Distribuzione uniforme

- **PDF:** Una curva piana tra a e b, indicando pari probabilità per tutti i valori all'interno della gamma.
$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad \text{for } a \leq x \leq b$$
- **CDF:** Un aumento lineare da a to b, a partire da 0 e terminando a 1.
- **Parametri chiave:**
  - $a = 0$: Inferiore.
  - $b = 1$: Rilegato superiore.
- **Caratteristiche:** Simmetrico e piatto senza scheggiature o kurtosi.

Distribuzione normale

- **PDF:** Una curva a campana, simmetrica sulla media μ:
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$
- **CDF:** Una curva a forma di S, che inizia a 0 e si avvicina asintoticamente 1.
- **Parametri chiave:**
  - $\mu = 0$: Menta (posizione del picco).
  - $\sigma = 1$: Deviazione standard (controlli dispersi).
- **Caratteristiche:** Simmetrico e unimodale, senza scheggiature e zero kurtosi (meso-kurtic).

Distribuzione lognormale

- **PDF:** Una curva positiva oscillata a partire da 0:
$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \text{for } x > 0$$
- **CDF:** Una curva a forma di S, che inizia a 0 e si avvicina asintoticamente 1.
- **Parametri chiave:**
  - $\mu = 0$: Menzo del logaritmo della variabile.
  - $\sigma = 0.25$: Deviazione standard del logaritmo della variabile.
- **Caratteristiche:** Skewed a destra con kurtosis dipendente σ.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Distribuzione di Weibull

- **PDF:** Varie con il parametro forma k:

$$f(x) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k}, \quad \text{for } x \geq 0$$

- **CDF:** Una curva a forma di S per $k > 1$, a partire da 0 e asintoticamente avvicinandosi 1.
- **Parametri chiave:**
  - $k = 1.5$: Parametro di forma.
  - $\lambda = 1$: Parametro scala.
- **Caratteristiche:** Versatile, modellando i tassi di guasto crescenti, decrescenti o costanti.

Distribuzione di Gumbel

- **PDF:** A destra con una modalità vicino μ:

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x-\mu}{\beta}} e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}}$$

- **CDF:** Una curva a forma di S asimmetrica, che inizia a 0 e si avvicina asintoticamente 1.
- **Parametri chiave:**
  - $\mu = 0$: Parametro di posizione (posizione del mantello).
  - $\beta = 1$: Parametro scala (controlli dispersi).
- **Caratteristiche:** Skewed a destra, usato per modellare valori estremi (ad esempio, precipitazioni massime).

Questa descrizione dettagliata fornisce una panoramica completa delle distribuzioni e dei valori numerici adottati per i loro parametri nell'analisi.

M.5.2 Distribuzioni di bivariato

Una distribuzione bivariata descrive il comportamento congiunto di due variabili casuali, X e Y. Stimola le probabilità associate a tutte le possibili coppie di risultati (x, y). Tali distribuzioni sono utilizzate per comprendere le relazioni, dipendenze e correlazioni tra due variabili.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

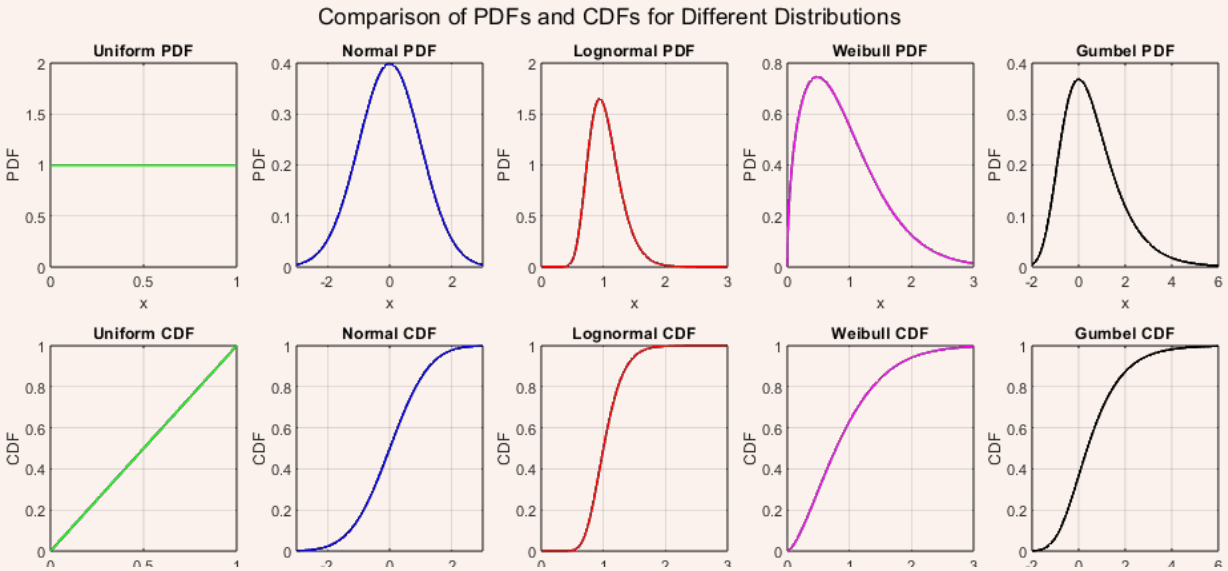


Figura M.13: confronto di varie funzioni di distribuzione (e cumulative) probabilità

Data le due variabili casuali continue, X e Y, la funzione di distribuzione cumulativa del bivariato congiunto è:

$$F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}\left(X \leq x, Y \leq y\right)$$

La densità articolare è definita come

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

or,

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Di conseguenza, la probabilità che $(X,Y) \in A$ is:

$$\mathbb{P}(A) = \int_{A} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Distribuzione normale di Bivariate

Nella custodia bidimensionale ($k = 2$), la funzione di densità della probabilità congiunta della distribuzione normale bivariata è definita come:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\exp$$
$$\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]\right)$$

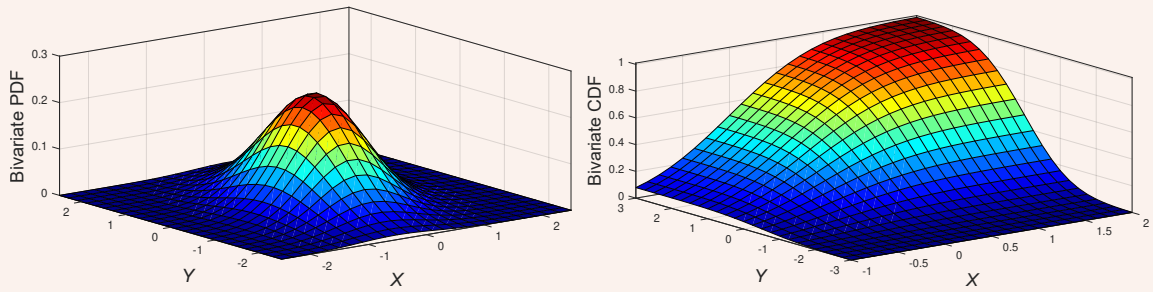
COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove:

- μ_X e μ_Y sono i mezzi di X e Y, rispettivamente, indicando la posizione centrale di ogni variabile.
- $\sigma_X > 0$ e $\sigma_Y > 0$ sono le deviazioni standard X e Y, rispettivamente, che rappresentano la diffusione o la dispersione dei dati per ogni variabile.
- ρ è il coefficiente di correlazione tra X e Y, che misura la forza e la direzione del rapporto lineare tra le due variabili; $-1 \leq \rho \leq 1$.

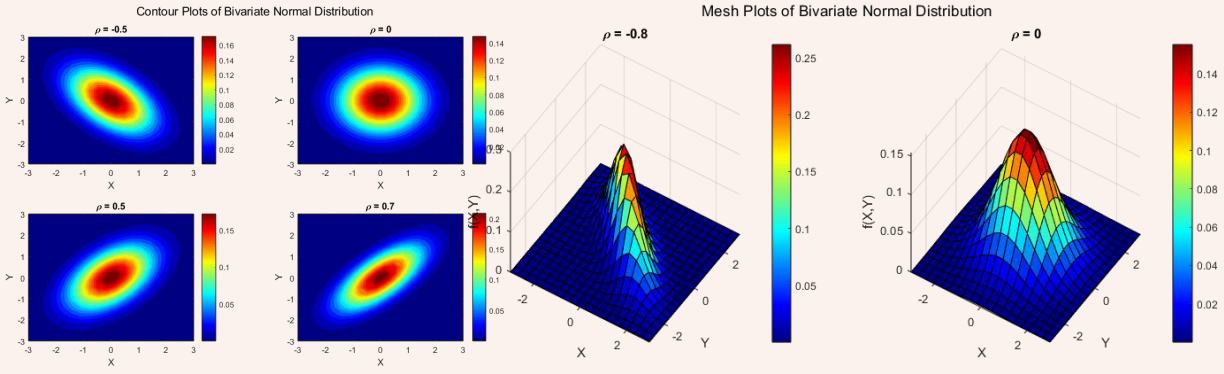
Figura M.14 mostra un campione PDF e CDF di distribuzione normale bivariata in cui $\mu_X = \mu_Y = 0.0$, $\sigma_X = 0.707$ e $\sigma_Y = 1.000$.



(a) PDF (b) CDF di Bivariate

Figura M.14: Distribuzione normale di Bivariate

Figura M.15 mostra l'impatto della correlazione ρ sulla distribuzione normale bivariata.



(a) (b)

Figura M.15: Impatto di correlazione ρ sulla distribuzione normale bivariata

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Appendice N

Indice di affidabilità

Abstract

Questa appendice introduce l'indice di affidabilità come misura quantitativa della sicurezza strutturale e probabilità di fallimento. Trattare sia la capacità strutturale che la domanda come variabili casuali (distribuzioni tipiche o normali di log), l'indice di affidabilità quantfica il margine di sicurezza come differenza tra capacità media e domanda media, normalizzata dal combinato La somministrazione si sviluppa sia aritmetica che logaritmica per calcolare l'indice di affidabilità, la collega alle probabilità di fallimento e la collega ai fattori di progettazione della sicurezza. Il framework supporta le decisioni di progettazione probabilistiche e le valutazioni informatiche dei rischi utilizzate nell'ingegneria basata sulle prestazioni, dove il mantenimento dei livelli prescritti di affidabilità strutturale in diversi stati limite è centrale per il processo di progettazione.

Parte 5: Teoria avanzata e ottimizzazione

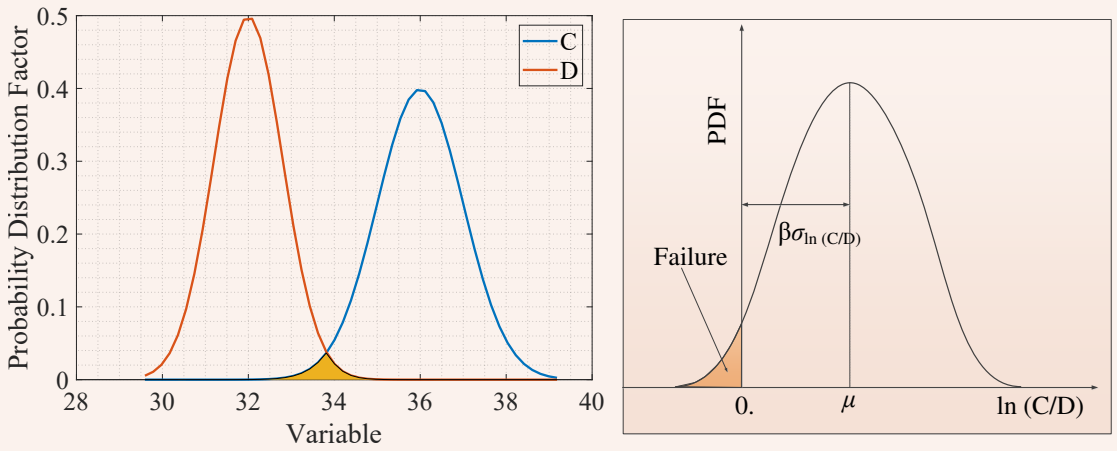
1 L'indice di affidabilità è una misura quantitativa della sicurezza o dell'affidabilità di una struttura, un sistema o un componente. Viene tipicamente utilizzato per valutare la probabilità di fallimento o collasso di una struttura o un sistema in carichi diversi o condizioni ambientali.

2 L'indice di affidabilità è calcolato sulla base della probabilità di fallimento o collasso e del margine di sicurezza o fattore di sicurezza della struttura o del sistema. Si esprime come valore numerico, con un valore più alto che indica una probabilità inferiore di fallimento o collasso e un valore minore indicando una maggiore probabilità di guasto o crollo.

3 È determinato dalla differenza tra capacità (C) e la domanda (D) entrambe si presume siano variabili casuali (solitamente considerate normali, anche se un log-normal può essere preferibile in alcuni casi). $[-\infty - \infty]$, ci sarà sempre una probabilità di fallimento, Fig. N.1a.

4 Ci sono due approcci per determinare β a seconda di come è calcolato il margine di sicurezza.

COPIA DI REVISIONE



(a) Distribuzioni probabili di domanda e capacità (b) Definizione dell'indice di affidabilità

Figura N.1: Definizioni dell'indice di affidabilità

Aritmetica

$$
\begin{aligned}
M &= C - D \\
\mu_M &= \mu_C - \mu_D \\
\sigma_M &= \sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_D^2} \\
\beta &= \frac{\mu_M}{\sigma_M} \\
&= \frac{\mu_C - \mu_D}{\sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_D^2}}
\end{aligned}
$$

Logaritmica

$$
\begin{aligned}
M &= \ln C - \ln D \\
\mu_M &= \mu_C - \mu_D \quad \text{First order} \\
\sigma_M &= \sqrt{\frac{\sigma_C^2}{\mu_C^2} + \frac{\sigma_D^2}{\mu_D^2}} = \sqrt{V_C^2 + V_D^2} \\
\beta &= \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{\ln \mu_C - \ln \mu_D}{\sqrt{V_C^2 + V_D^2}} \\
&= \frac{\ln \mu_C / \mu_D}{\sqrt{V_C^2 + V_D^2}}
\end{aligned}
$$

5 L'indice di affidabilità β è geometricamente definita in Fig. N.1b.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

COPIA DI REVISIONE

6 Il corrispondente *probabilità di fallimento* P_f è uguale al rapporto della zona ombreggiata, Fig. N.1b alla superficie totale sotto la curva ed è data da $\Phi(-\beta)$ dove Φ è la normale funzione di probabilità cumulativa standard

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2}\left[1 + erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right] \tag{N.1}$$

7 Il rapporto tra l'indice di affidabilità e la probabilità di fallimento è mostrato in Fig. N.2.

8 β è selezionato per riflettere le conseguenze di guasto, Tabella N.1.

Tabella N.1: Valori selezionati per strutture in acciaio e cemento

Tipo di carico/membro	β
AISC	
DL + LL; Membri	3.0
DL + LL; Collegamenti	4.5
DL + LL + WL; Membri	3.5
DL + LL +EL; Membri	1.75
ACI	
Insufficienza duttile	3-3.5
Brevi fallimenti	3.5-4

9 Gli indici di affidabilità per un certo numero di componenti, o una serie di modalità di prestazione, possono essere utilizzati per stimare l'affidabilità complessiva di una struttura/sistema.

Sistema di serie: Tale sistema si esibisce in modo negativo se un componente svolge insoddisfacente. n componenti in serie, la probabilità di prestazioni non soddisfacenti delle $i$il componente è p_i e la sua affidabilità $R_i = 1 - p_i$. Quindi l'affidabilità del sistema, o la probabilità che tutti i componenti eseguiranno in modo soddisfacente è

$$R = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n \ = (1 - p_1)(1 - p_2) \cdots (1 - p_n)$$

Sistemi paralleli: Tale sistema si esibisce insoddisfacente solo se tutti i componenti svolgono insaziabile.

$$R = 1 - p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n \tag{N.2}$$

10 Gli indici di affidabilità sono una misura relativa della condizione attuale e forniscono una stima qualitativa delle prestazioni strutturali. Se il valore è troppo basso, la struttura può essere classificata come pericolosa. β sono mostrati nella tabella N.2. Questo è ulteriormente illustrato dalla Figura N.2

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella N.2: Affidabilità delle strutture in acciaio e cemento

Prestazioni previste	β	Probabilità del fallimento
Alto	5	3/10 milioni di euro
Bene.	4	3/100,000
Sopra la media	3	1/1,000
Sotto la media	2.5	6/1,000
Povero	2.0	2.3/100
Insoddisfacente	1.5	7/100
Hazard	1.0	16/100

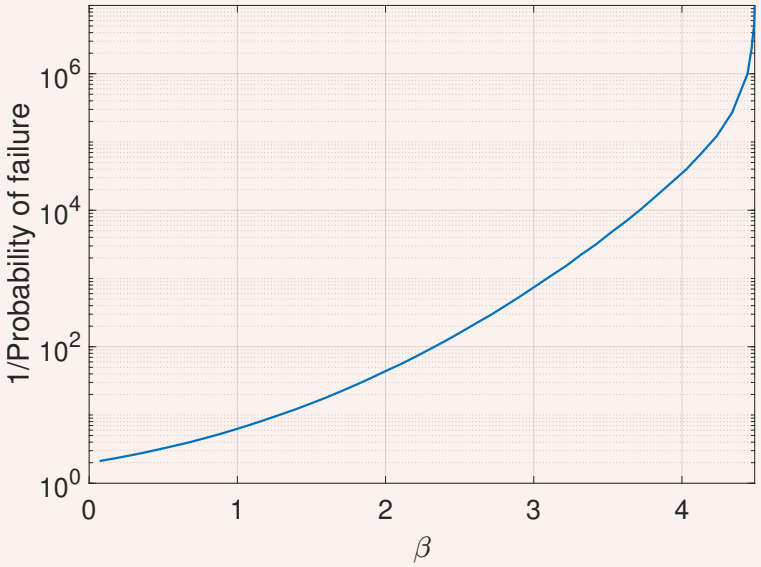


Figura N.2: Probabilità del fallimento in termini di indice affidabilità β

Ex N.1: Indice di affidabilità

Per un raggio semplicemente supportato (panna L = 480 in., sezione modulo S = 150 in^3, stress da resa: μ_{f_y} = 36 ksi e σ_{f_y} = 1 ksi), sottoposto a carico di un punto μ_P = 40 kips, e σ_P = 1 kips.

1. Determinare l'indice di affidabilità con i due metodi
2. Ripeti lo studio attraverso una simulazione Monte Carlo

```
clear;clc; close all;
fs=16;font='Times New Roman';opengl software;
%
% Span of the beam(in)
L = 480;
```

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

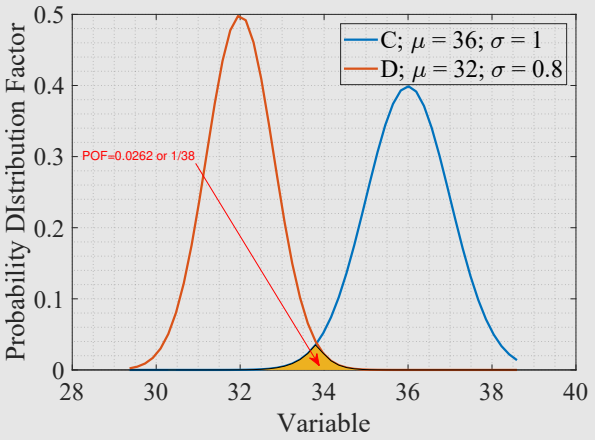
```
% section modulus (in^3)
S = 150;
% Mean and Standard Deviation (SD) of Capacity,fy, (C) and Load (P)
Mu_C = 36;
SD_C = 1;
Mu_D = 40; % different units than C
SD_D = 1;
%Calculation of mean and SD of Demand (D)
Mu_D = Mu_D*L/4/S;
SD_D = SD_D*L/4/S;
sd=SD_D;md=Mu_D;sc=SD_C;mc=Mu_C;
%=========================================
% POF returns the Probability of Failure
%=========================================
% Approach (I): safety margin (M) = C - D, and C and D are normally
    distributed.
RI_I = (Mu_C-Mu_D)/sqrt(SD_C^2+SD_D^2);
POF_I = 0.5*(1 + erf(-RI_I/sqrt(2)));
% Approach (II): safety margin (M) = lnC - lnD, and C and D are normally
    distributed.
V_C = (SD_C/Mu_C);
V_D = (SD_D/Mu_D);
RI_II = log(Mu_C/Mu_D)/sqrt(V_C^2+V_D^2);
POF_II = 0.5*(1 + erf(-RI_II/sqrt(2)));
%
fprintf('Approach    beta   1/POF \n');
fprintf('I           %5.2f  %4.0f \n',RI_I,1/POF_I);
fprintf('II          %5.2f  %4.0f \n\n',RI_II,1/POF_II);
%=========================================
% Monte Carlo simulation to determine the probability of failure of the
    beam
% Approach: random numbers between 0 and 1 are created
% and the corresponding values of C and D are calculated
% using the inverse cumulative distribution function (icdf)
pd_C = makedist('Normal','mu',Mu_C,'sigma',SD_C);
pd_D = makedist('Normal','mu',Mu_D,'sigma',SD_D);
for p = 2:7
  subplot(2,3,p-1)
  SampleSize = 10^p;
  x(p-1)=SampleSize;
  CC = icdf(pd_C,rand(SampleSize,1));
  DD = icdf(pd_D,rand(SampleSize,1));
  N = sum(DD>CC);
  POF_MonteCarlo (p-1) = N/SampleSize;
  % Plot histograms
  bin=(30 : 0.1 : 42);
  plot(bin,hist(CC,bin)/SampleSize,bin,hist(DD,bin)/SampleSize,'LineWidth
    ',2);
  xlim([30 42]);
```

COPIA DI REVISIONE

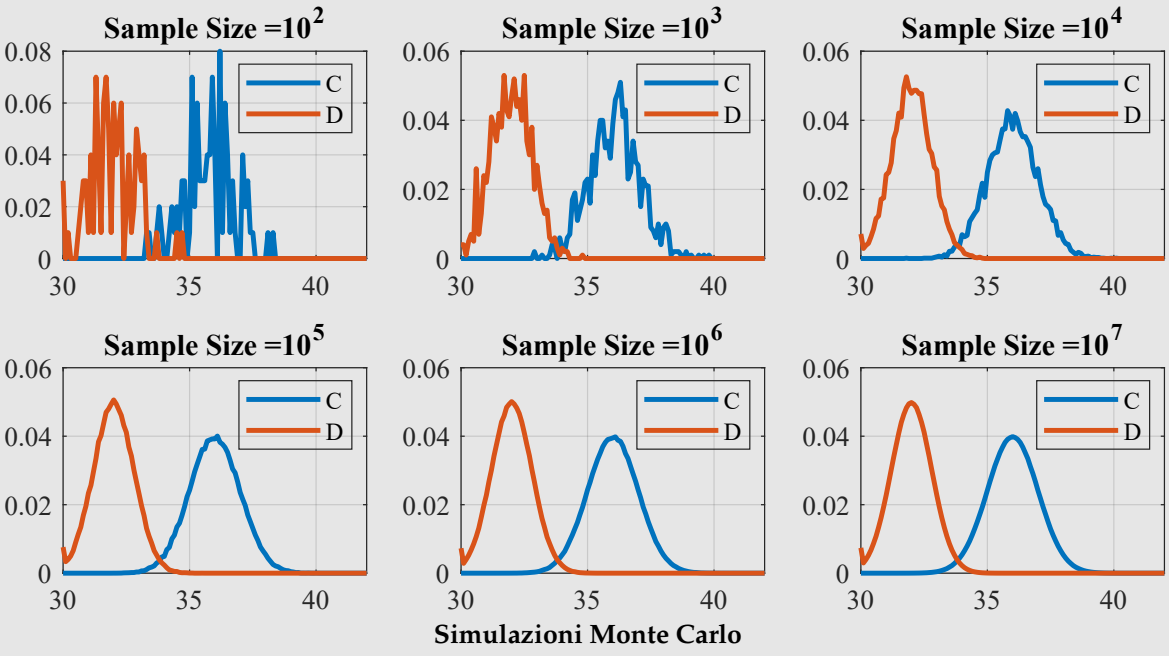
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

```
   grid
   lgnd=legend('C','D');
   set(lgnd, 'Color','none')
   label=['Sample Size =10^' int2str(p)];
   title(label);
   set(gca,'FontName', font,'color', 'none','fontsize',fs/2);
   l=sprintf('%3.0f  %5.2e',p,POF_MonteCarlo (p-1));
   disp(l);
end
```



Approccio	β	1/POF
I	3.12	1,119
II	3.15	1,232



COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Appendice O

Meccanica di corpi deformabili, un Primer

Abstract

La Meccanica è dove tutto inizia. Radiata in matematica, fornisce un solido sottopinning per i capitoli successivi sui metodi Variazionali e sulle derivazioni corrispondenti.[1]*, e come tale può essere di interesse limitato alla maggior parte dei lettori di questo libro.*

Tuttavia, credo fortemente che un prerequisito per la padronanza dell'ingegneria strutturale sia una solida conoscenza della Meccanica degli Organismi Deformabili (meccanici solidi di a.k.a.), come un buon architetto dovrebbe avere anche un buon comando dell'ingegnere strutturale.

O.1 Introduzione . . . 3105
O.1.1 Notazione . . . 3105
O.1.2 Tenori . . . 3107
O.1.3 Interpretazione fisica degli invarianti dello stress . . . 3112
O.2 Campi vettoriali; meccanica di corpi deformabili . . . 3114
O.2.1 Forze . . . 3114
O.2.2 Tensore di stress del Cauchy 3114
O.2.3 Kinematics . . . 3117
O.3 Le leggi fondamentali della meccanica continuum . . . 3120
O.3.1 Le leggi sulla conservazione 3121
O.3.2 Flussi . . . 3121
O.3.3 Conservazione della massa; equazione di continuità . . . 3122
O.3.4 Conservazione del moto; equazione del movimento . . 3123
O.3.5 Conservazione dell'energia; primo principio della termodinamica . . . 3125
O.4 Equazioni costitutive . . . 3127
O.4.1 3D generale . . . 3128
O.4.2 caso isotropica trasversale . . 3129
O.4.3 Casi 2D speciali . . . 3129
O.5 Osservazioni fenomenologiche . . . 3130
O.5.1 Test di carico, spostamento e controllo delle tensioni . . . 3131
O.5.2 Pre/post-peak risposta materiale di acciaio e cemento . . 3132
O.6 Localizzazione della deformazione . 3133
O.6.1 Prove sperimentali . . . 3133
O.7 Condizioni di bovino . . . 3137
O.8 Schema Tonti . . . 3137
O.9 Concetto di forza interna . . . 3139

[1] È così che questo capitolo è stato scritto in precedenza per un'altra pubblicazione (Saouma e Hariri-Ardebili, 2021), e alla fine ho deciso di tenerlo nella sua integralità con solo piccoli cambiamenti.

COPIA DI REVISIONE

O.1 Introduzione

1 La copertura dell'analisi strutturale avanzata delle infrastrutture richiede una solida base nei fondamenti della meccanica e dell'elemento finito.

2 L'approccio preso è quello di procedere a un rigoroso *meccanica continuum* paradigma che utilizza la notazione tensoriale prima, e poi espandersi nel sistema di coordinate cartesiane più tradizionalmente utilizzato.

O.1.1 Notazione

3 Presumendo che il concetto di tenore (definito sotto) sia inteso, la notazione in ingegneria/meccanica può assumere una forma diversa. O.1.

Tabella O.1: Notifiche

	$[A]$	A_{ij}	$\mathbf{A}$	
Matrice	✓	X	✓	$\lfloor x \rfloor [A] \{x\}$ **x.A.x**
Tenore	X	✓	✓	$x_i A_{ij} x_j$ **x.A.x**

Ingegneria/Voigt (Timoshenko) I tensori simmetrici di secondo ordine sono spesso scritti come matrici a colonna, questa conversione e quella degli altri tensor di ordine superiore nelle matrici della colonna, è chiamata notazione Voigt . La regola Voigt dipende dal fatto che il tenore sia una quantità cinetica (come lo stress) o una cinematica (come la tensione).

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \{\boldsymbol{\sigma}\}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \{\boldsymbol{\varepsilon}\}$$

Matrix: Elemento finito, $[A]$, $[\sigma]$, $\{F\}$ Questi possono essere facilmente collegati a array in calcoli.

Tensori: Carico meccanico, F_x, σ_{ij}, C_{ijkl} e $\mathbf{F}$, $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{C}$. In notazione tensore gli indici non sono mostrati. Mentre le equazioni indiciali cartesian si applicano solo alle coordinate cartacee, le espressioni nella notazione tensore sono indipendenti dal sistema di

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

coordinate e si applicano ad altri sistemi di coordinate come cilindrici, curvilineari, ecc. In notazione indigena, si indicano tensori di ordine uno o più in lettere audace. Si raccomanda solitamente di usare lettere minuscole per i tenore di ordine una e superiore lettere caso per i tensors di ordine 2 e superiori. Distinguono tra notazione tensore e notazione matrice utilizzando punti e punti tra termini, come in $\mathbf{a}.\mathbf{b} \equiv a_i b_i$ (il '.' indica una contrazione di un paio di indici ripetuti che appaiono nello stesso ordine), e $\mathbf{A} : \mathbf{B} \equiv A_{ij}B_{ij}$. or $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ è equivalente a $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$.

[4] Nelle sezioni seguenti, spiegherò brevemente l'ultimo (Tensore/individuale) Mentre la notazione di Ingegneria può essere il più semplice e intuitivo, spesso porta a equazioni lunghe e ripetitive. In alternativa, il tenore porterà a forme più corte e compatte.

[5] Mentre lavorava alla relatività generale, Einstein si è stancato di scrivere il simbolo della somma con la sua gamma di sommazioni sotto e sopra (come $\sum_{i=1}^{n=3} a_{ij}b_i$) e ha osservato che la maggior parte delle volte il range superiore (n) era uguale alla dimensione dello spazio (3 per noi, 4 per lui), e che quando la sommazione ha coinvolto un prodotto di due termini, la somma è stata sopra un indice ripetuto (i per questo, ha deciso che non c'è bisogno di includere il segno di sintesi $\sum$ se ci sono stati indici ripetuti (i), e quindi qualsiasi indice ripetuto è un indice fittizio e viene riassunto sopra la gamma 1 a 3. Un indice che non si ripete è chiamato un indice libero e ha assunto un valore da 1 a 3. Quindi, questa cosiddetta notazione indigena è anche riferito alla notazione di Einstein . Le seguenti regole definiscono la notazione indisciplinare:

1. Se c'è un indice di lettera, l'indice va da i to n (arancio del tenore). Per esempio:

$$a_i = a^i = \lfloor\ a_1 \quad a_2 \quad a_3\ \rfloor \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right\} \qquad i = 1, 2, 3$$

   che si suppone $n = 3$.
2. Un indice ripetuto (a.k.a. dummy) assumerà tutti i valori della sua gamma, e i tensori risultanti riassunti.

$$a_{1i}x_i = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$

3. Ordine del Tensore:
   - Il tenore di primo ordine (come la forza) ha un solo indice libero:

$$a_i = a^i = \lfloor\ a_1 \quad a_2 \quad a_3\ \rfloor$$

     altri tensori di primo ordine sono $a_{ij}b_j$, F_{ikk}, $\varepsilon_{ijk}u_j v_k$.
   - Il tenore di secondo ordine (a.k.a. dyadic) avrà due indici liberi.

$$D_{ij} = \left[\begin{array}{ccc} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{array} \right]$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

altri esempi A_{ijip}, $\delta_{ij}u_k v_k$.

- Un quarto tenore di ordine (come le costanti elastiche) avrà quattro indici liberi.

4. Derivati di tenore rispetto a x_i è scritto come $,i$. Ad esempio:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \Phi_{,i}; \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = v_{i,i}; \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_{i,j}; \quad \frac{\partial T_{i,j}}{\partial x_k} = T_{i,j,k};$$

6 L'utilità della notazione indigena è nel presentare sistemi di equazioni in forma compatta, ad esempio:

$$x_i = c_{ij} z_j \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + c_{13}z_3 \\ x_2 & = & c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + c_{23}z_3 \\ x_3 & = & c_{31}z_1 + c_{32}z_2 + c_{33}z_3 \end{array} \right.$$

Analogamente:

$$A_{ij} = B_{ip} C_{jq} D_{pq}$$

$$\begin{array}{rcl} A_{11} & = & B_{11}C_{11}D_{11} + B_{11}C_{12}D_{12} + B_{12}C_{11}D_{21} + B_{12}C_{12}D_{22} \\ A_{12} & = & B_{11}C_{21}D_{11} + B_{11}C_{22}D_{12} + B_{12}C_{21}D_{21} + B_{12}C_{22}D_{22} \\ A_{21} & = & B_{21}C_{11}D_{11} + B_{21}C_{12}D_{12} + B_{22}C_{11}D_{21} + B_{22}C_{12}D_{22} \\ A_{22} & = & B_{21}C_{21}D_{11} + B_{21}C_{22}D_{12} + B_{22}C_{21}D_{21} + B_{22}C_{22}D_{22} \end{array}$$

7 Utilizzando la notazione indisciplinare, possiamo riscrivere la definizione della prodotto di dot

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_i b_i = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\cdot(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

O.1.2 Tenori

8 Generalizziamo il concetto di vettore introducendo il tenore (**T**), che essenzialmente *esiste per operare su vettori* **v** *produrre altri vettori* (o su tensor per produrre altri tensori!). **T**·**v** o semplicemente **Tv**.

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{u} & = & \mathbf{T}\cdot\mathbf{v} \text{ or } u_i = T_{ij} v_j \\ \mathbf{u} & = & \mathbf{v}\cdot\mathbf{S} \text{ where } \mathbf{S} = \mathbf{T}^T \end{array}$$

Mentre un tenore è essenzialmente operatore di vettori (o altri tensori), esso è anche una quantità fisica indipendente da qualsiasi particolare sistema di coordinate ma precisato più comodamente facendo riferimento ad un adeguato sistema di coordinazioni.

9 I tensori spesso si presentano come entità fisiche i cui componenti sono i coefficienti di una relazione lineare tra vettori. Un tenore di ordine zero è specificato in qualsiasi sistema di coordinate da una sola coordinata ed è scalare.Un tenore d'ordine uno ha tre componenti di coordinate nello spazio, quindi è un vettore. In generale 3D, lo spazio il

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

numero di componenti di un tensore è 3^n dove n è l'ordine del tenore. Forza e stress sono rispettivamente tensori dell'ordine 1 e 2.

10 Detentori dell'ordine due sono anche chiamati *Dyadic* e sono molto comuni nella meccanica (ad esempio stress, ceppo, inerzia).

O.1.2.1 Operazioni

11 La somma di due tensori (deve essere dello stesso ordine) è semplicemente definita come:

$$\mathbf{S}_{ij} = \mathbf{T}_{ij} + \mathbf{U}_{ij}$$

La moltiplicazione scalare di un tenore (secondo ordine) è definita da:

$$\mathbf{S}_{ij} = \lambda \mathbf{T}_{ij}$$

12 Il prodotto esterno di due tensori è il tenore i cui componenti sono formati moltiplicando ogni componente di uno dei tensori per ogni componente dell'altro, producendo un tenore con un ordine pari alla somma degli ordini dei tensor del fattore.

$$\begin{aligned} a_i b_j &= T_{ij} \quad \text{or} \left\{ \quad \right\}_{n\times 1} \lfloor \quad \rfloor_{1\times m} = \left[\quad \right]_{n\times m} \\ v_i F_{jk} &= b_{ijk} \\ D_{ij} T_{km} &= \phi_{ijkm} \end{aligned}$$

13 Il prodotto interno di due tensori: contrazione di un indice da ogni tenore

$$\begin{aligned} & a_i b_i \\ & a_i E_{ik} = f_k \quad \text{or} \lfloor \quad \rfloor_{1\times m} \left[\quad \right]_{mxn} = \lfloor \quad \rfloor_{1xn} \\ & E_{ij} F_{jm} = G_{im} \quad \text{or} \left[\quad \right]_{n\times p} \left[\quad \right]_{p\times m} = \left[\quad \right]_{n\times m} \end{aligned}$$

14 Il prodotto trasversale può essere definito

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \varepsilon_{pqr} a_q b_r \mathbf{e}_p = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}$$

Nella seconda equazione, c'è un indice libero p così ci sono tre equazioni, ci sono due indici ripetuti (famiglia) q e r, così ogni equazione ha nove termini. ε_{pqr} è chiamato il simbolo di permutazione e viene definito come

$$\varepsilon_{pqr} = \begin{cases} 1 & \text{If the value of } i,j,k \text{ are an even permutation of 1,2,3} \\ & \text{(i.e. if they appear as 1 2 3 1 2)} \\ -1 & \text{If the value of } i,j,k \text{ are an odd permutation of 1,2,3} \\ & \text{(i.e. if they appear as 3 2 1 3 2)} \\ 0 & \text{If the value of } i,j,k \text{ are not a permutation of 1,2,3} \\ & \text{(i.e. if two or more indices have the same value)} \end{cases}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Il prodotto scalare di due tensori è definito come

$$\mathbf{T} : \mathbf{U} = T_{ij} U_{ij}$$

in qualsiasi sistema rettangolare. Il seguente prodotto interno gli assioms sono soddisfatti:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \mathbf{U} &= \mathbf{U} : \mathbf{T} \\ \mathbf{T} : (\mathbf{U} + \mathbf{V}) &= \mathbf{T} : \mathbf{U} + \mathbf{T} : \mathbf{V} \\ \alpha(\mathbf{T} : \mathbf{U}) &= (\alpha\mathbf{T}) : \mathbf{U} = \mathbf{T} : (\alpha\mathbf{U}) \\ \mathbf{T} : \mathbf{T} &> 0 \text{ unless } \mathbf{T} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

O.1.2.2 Rotazione degli assi

15 Considera due diversi set di sistemi di coordinate ortogonali della Caritesia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e $\{\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3\}$, qualsiasi vettore $\mathbf{v}$ può essere espresso in un sistema o nell'altro

$$\mathbf{v} = v_j \mathbf{e}_j = \overline{v}_j \overline{\mathbf{e}}_j$$

Per determinare il rapporto tra i due gruppi di componenti, consideriamo il prodotto punto del $\mathbf{v}$ con uno (qualsiasi) dei vettori di base

$$\overline{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{v} = \overline{v}_i = v_j (\overline{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j)$$

Possiamo così definire i nove valori scalari

$$a_i^j \equiv \overline{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j = \cos(\overline{x}_i, x_j)$$

che sono la direzione di coseni tra le nove coppie di vettori base. Una trasformazione covariante trasformerà un tenore da una base all'altra:

$$\overline{v}_j = a_j^p v_p$$

Notare che l'indice libero nelle prime e seconda equazioni appaiono rispettivamente sull'indice superiore e inferiore.

16 Considerare la trasformazione di un vettore $\mathbf{V}$ da $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ coordinare il sistema a $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, Figura O.1a. Dall'Equazione O.1

$$V_j = a_j^p \overline{V}_p \text{ or } \left\{ \begin{array}{rcl} V_1 &=& a_1^1 \overline{V}_1 + a_1^2 \overline{V}_2 + a_1^3 \overline{V}_3 \\ V_2 &=& a_2^1 \overline{V}_2 + a_1^2 \overline{V}_2 + a_2^3 \overline{V}_3 \\ V_3 &=& a_3^1 \overline{V}_3 + a_1^2 \overline{V}_2 + a_3^3 \overline{V}_3 \end{array} \right.$$

or,

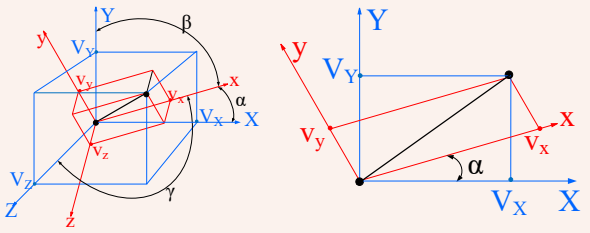
$$\left\{ \begin{array}{c} V_x \\ V_y \\ V_z \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} a_x^X & a_x^Y & a_x^Z \\ a_y^X & a_y^Y & a_y^Z \\ a_z^X & a_z^Y & a_z^Z \end{array} \right]}_{a_j^k} \left\{ \begin{array}{c} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{array} \right\} \tag{O.1}$$

dove a_i^j è la direzione del cosne dell'asse i rispetto all'asse j

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

- $a_x^j = (a_x^X, a_x^Y, a_x^Z)$ direzione di coseni **x** con rispetto a **X**, **Y** e **Z**
- $a_y^j = (a_y^X, a_y^Y, a_y^Z)$ direzione di coseni **y** con rispetto a **X**, **Y** e **Z**
- $a_z^j = (a_z^X, a_z^Y, a_z^Z)$ direzione di coseni **z** con rispetto a **X**, **Y** e **Z**



(a) 3D (b) 2D

Figura O.1: Trasformazione vettoriale

17 Per il caso 2D, Figura O.1b, la matrice di trasformazione è scritta come

$$T = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\gamma & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

ma da $\gamma = \frac{\pi}{2} + \alpha$ e $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$Allora $\cos\gamma = -\sin\alpha$ e $\cos\beta = \sin\alpha$, così la matrice di trasformazione diventa

$$T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{O.2}$$

O.1.2.3 Trasformazione dei tensori

18 Rotazione di un secondo tenore d'ordine T_{jq}:

$$\begin{aligned} \overline{u}_j &= T_{jq}\overline{v}_q \\ \overline{u}_i &= a_i^j u_j \\ &= a_i^j T_{jq} v_q \\ &= a_i^j T_{jq} a_p^q \overline{v}_p \end{aligned}$$

Ma abbiamo anche $\overline{u}_i = \overline{T}_{ip}\overline{v}_p$ nel sistema di sbarramento, equando queste due espressioni otteniamo

$$\overline{T}_{ip} = a_i^j a_p^q T_{jq}$$

da qui,

$$\begin{aligned} \overline{T}_{ip} &= a_i^j a_p^q T_{jq} \text{ in Matrix Form } [\overline{T}] = [A]^T[T][A] \\ T_{jq} &= a_i^j a_p^q \overline{T}_{ip} \text{ in Matrix Form } [T] = [A][\overline{T}][A]^T \end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

19 Se consideriamo il caso 2D, da Equation O.2

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ T &= \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & 0 \\ T_{xy} & T_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \overline{T} &= \begin{bmatrix} \overline{T}_{xx} & \overline{T}_{xy} & 0 \\ \overline{T}_{xy} & \overline{T}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A^T T A \end{aligned}$$

Sostituire e semplificare ($\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ e $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$)

$$\begin{Bmatrix} \overline{T}_{xx} \\ \overline{T}_{yy} \\ \overline{T}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{xy} \end{Bmatrix}$$

O.1.2.4 Valori principali dei tensori simmetrici del secondo ordine

20 Due tensori fondamentali nella meccanica continuum sono secondo ordine e simmetrico (stress e ceppo); esaminiamo alcune proprietà importanti di questi tensori. T_{ij} definito ad un certo punto nello spazio, vi è associato a ogni direzione (specificata per unità normale n_j), Figura O.2, a quel punto un vettore dato dal prodotto interno

$$v_i = T_{ij} n_j$$

Se la direzione è una per cui v_i è parallelo a n_i, il prodotto interno è

$$T_{ij} n_j = \lambda n_i$$

e la direzione n_i è chiamata direzione principale di T_{ij}. Da allora $n_i = \delta_{ij} n_j$, questo può essere riscritto come

$$(T_{ij} - \lambda\delta_{ij}) n_j = 0$$

che rappresenta un sistema di tre equazioni per i quattro sconosciuti n_i e λ.

$$\begin{aligned} (T_{11} - \lambda) n_1 + T_{12} n_2 + T_{13} n_3 &= 0 \\ T_{21} n_1 + (T_{22} - \lambda) n_2 + T_{23} n_3 &= 0 \\ T_{31} n_1 + T_{32} n_2 + (T_{33} - \lambda) n_3 &= 0 \end{aligned}$$

21 Avere una soluzione non banale ($n_i \neq 0$), il determinante dei coefficienti deve essere zero:

$$\left| T_{ij} - \lambda\delta_{ij} \right| = 0$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

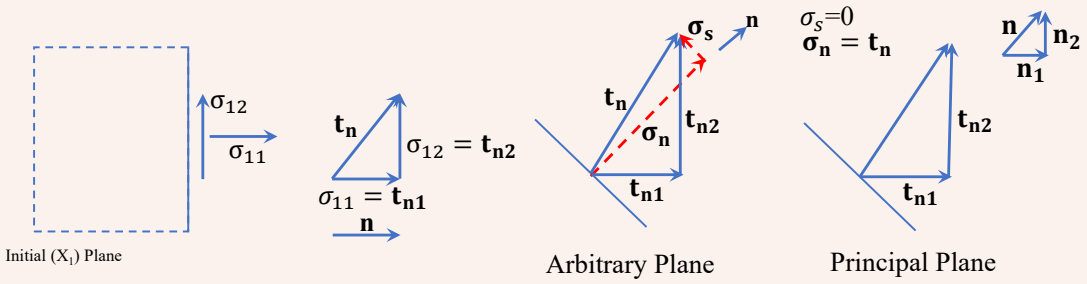


Figura O.2: Principali direzioni di tenore dell'ordine due

22 L'espansione di questo determinante porta alla seguente equazione caratteristica

$$\lambda^3 - I_T\lambda^2 + II_T\lambda - III_T = 0$$

dove le radici sono chiamate i valori principali di T_{ij} e

$$\begin{aligned} I_T &= T_{ii} = \text{tr}\, T_{ij} \\ II_T &= \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ij}) \\ III_T &= |T_{ij}| = \det T_{ij} \end{aligned}$$

sono chiamati il primo, il secondo e il terzo invariante rispettivamente di T_{ij}. È consuetudine ordinare quelle radici come $\lambda_{(1)} > \lambda_{(2)} > \lambda_{(3)}$. In termini di stress principali, questi invarianti possono essere semplificati

$$\begin{aligned} I_T &= T_{(1)} + T_{(2)} + T_{(3)} \\ II_T &= -(T_{(1)}T_{(2)} + T_{(2)}T_{(3)} + T_{(3)}T_{(1)}) \\ III_T &= T_{(1)}T_{(2)}T_{(3)} \end{aligned}$$

23 Per un tenore simmetrico con componenti reali, i valori principali sono anche reali; se questi valori sono distinti, le tre direzioni principali sono reciprocamente ortogonali.

O.1.3 Interpretazione fisica degli invarianti dello stress

24 Un piano ottaedrico è uno che rende gli angoli uguali rispetto a ciascuna delle direzioni principali-stress, Figura O.3; il normale a questo aereo è dato da

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

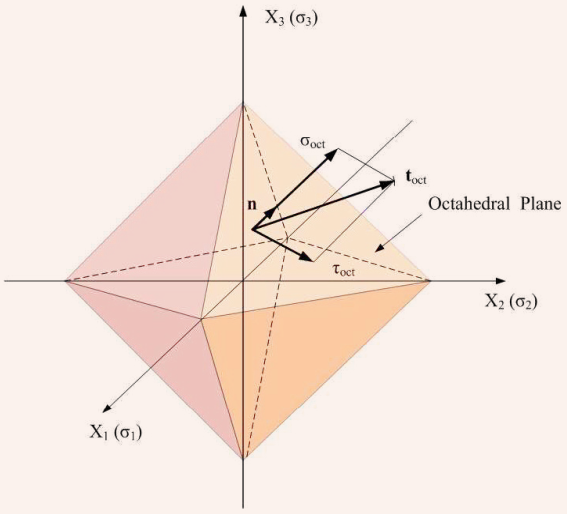


Figura O.3: aereo di Octahedral

25 Il vettore di trazione su questo aereo è

$$\mathbf{t}_{oct} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix}$$

e la componente normale dello stress sul piano ottaedrico è data da

$$\sigma_{oct} = \mathbf{t}_{oct} \cdot \mathbf{n} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{1}{3}\mathbf{I}_1 = \sigma_{hyd}$$

26 Lo stress ottaedrico della canapa è ottenuto da

$$\tau_{oct}^2 = |\mathbf{t}_{oct}|^2 - \sigma_{oct}^2 = \frac{\sigma_1^2}{3} + \frac{\sigma_2^2}{3} + \frac{\sigma_3^2}{3} - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{9}$$

27 Dopo la manipolazione algebrica, si può dimostrare che

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2}$$

e infine, la direzione dello stress ottaedrico della canapa è data da

$$\cos 3\theta = \sqrt{2} \frac{J_3}{\tau_{oct}^3}$$

28 L'energia elastica (totale) per volume unitario può essere decomposta in due parti: $U = U_1 + U_2$dove

$$\begin{aligned} U_1 &= \tfrac{1-2\nu}{E} I_1^2 && \text{Dilational energy} \\ U_2 &= \tfrac{1+\nu}{E} J_2 && \text{Distortional energy} \end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

O.2 Campi vettoriali; meccanica di corpi deformabili

O.2.1 Forze

29 Ci sono due tipi di forze nella meccanica continuum

Forze corporee: agire sugli elementi di volume o massa all'interno del corpo, ad esempio la gravità, i campi elettromagnetici. $d\mathbf{F} = \rho \mathbf{b} dVol$.

Forze di superficie: (or trazione) sono forze di contatto che agiscono sul corpo libero alla sua superficie di confine, quelle saranno definite in termini di forza per area unitaria, Figura O.4, Equazione O.3.

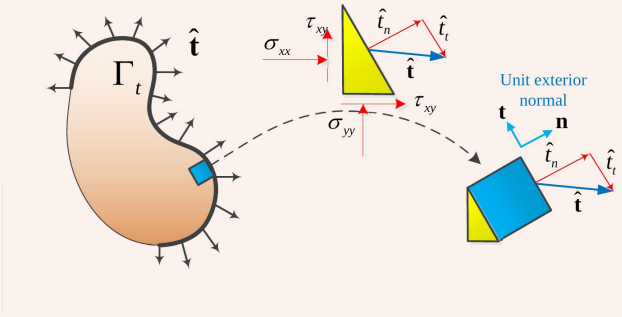


Figura O.4: Forze di superficie

$$\int_\Gamma \mathbf{t} d\Gamma = \mathbf{i} \int_\Gamma t_x d\Gamma + \mathbf{j} \int_\Gamma t_y d\Gamma + \mathbf{k} \int_\Gamma t_z d\Gamma \tag{O.3}$$

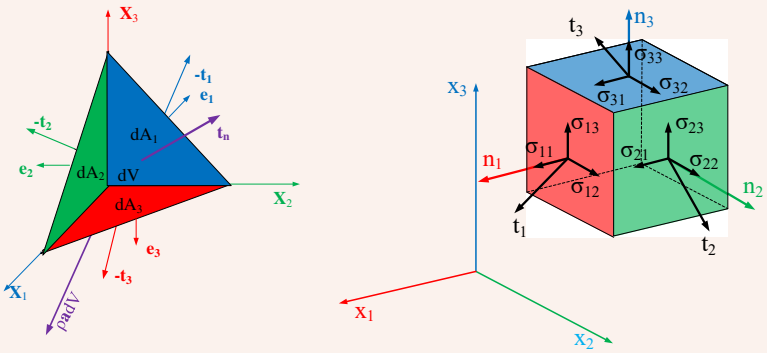
30 Di solito limitiamo la trazione di termine ad una superficie di confine reale di un corpo e usiamo il vettore di stress del termine per una superficie interna immaginaria. I vettori di trazione su piani perpendicolari agli assi coordinati sono particolarmente utili. Quando i vettori che agiscono in un punto su tre piani tali reciprocamente perpendicolari è dato, il vettore di stress a quel punto su qualsiasi altro piano arbitrariamente inclinato può essere espresso in termini del primo insieme di trazioni.

O.2.2 Tensore di stress del Cauchy

31 Il concetto di forza era in un primo momento astratto, la fisica aristotelica si riferiva all'impeto Galileo e Newton (1687) lo formalizzarono, non si capiva fino al 1822 quando Cauchy presentò l'idea di vettore di trazione che contiene sia i componenti normali che tangenziali. $\mathbf{t} = t_n \mathbf{e}_n + t_t \mathbf{e}_t$. Il suo 'genio' era quello di considerare ciò che divenne noto come il tetraedro del Cauchy , Figura O.5a, e applicato la seconda legge di Newton (o più precisamente la sua estensione alle particelle da parte di Euler: prima legge del movimento di Euer).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



(a) Tetrahedron (b) Stresses

Figura O.5: Cauchy: tetraedro allo stress

32 Equilibrio dei rendimenti del tetraedro caucasico

$$\mathbf{t}dA - \mathbf{t}_1 dA_1 - \mathbf{t}_2 dA_2 - \mathbf{t}_3 dA_3 = \rho dV \mathbf{a}$$

dove **a** è l'accelerazione e ρ la densità di massa. Le aree dei volti sono date da

$$\begin{aligned} dA_1 &= \mathbf{n}.\mathbf{e}_1 dA = n_1 dA \\ dA_2 &= \mathbf{n}.\mathbf{e}_1 dA = n_2 dA \\ dA_3 &= \mathbf{n}.\mathbf{e}_1 dA = n_3 dA \end{aligned}$$

Sostituire nell'equazione di equilibrio, e considerando il caso limite dove $dV \to 0$

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 n_1 + \mathbf{t}_2 n_2 + \mathbf{t}_3 n_3 \tag{O.4}$$

I vettori di trazione deve avere componenti

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= \sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{12}\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}_2 &= \sigma_{21}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2 + \sigma_{23}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}_3 &= \sigma_{31}\mathbf{e}_1 + \sigma_{32}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

33 Va notato che storicamente e tradizionalmente nella meccanica continuum lo stress viene denotato da **T**. Questo è stato sostituito da σ. Sostituire in Equazione O.4

$$\begin{aligned} \mathbf{t} =& n_1(\sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{12}\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}\mathbf{e}_3) + n_2(\sigma_{21}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2 + \sigma_{23}\mathbf{e}_3) \\ &+ n_3(\sigma_{31}\mathbf{e}_1 + \sigma_{32}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3) \\ =& (n_1\sigma_{11} + n_2\sigma_{21} + n_3\sigma_{31})\mathbf{e}_1 + (n_1\sigma_{12} + n_2\sigma_{22} + n_3\sigma_{32})\mathbf{e}_2 \\ &+ (n_1\sigma_{13} + n_2\sigma_{23} + n_3\sigma_{33})\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

o semplicemente

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{O.5}$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

34 C'è un secondo tenore di ordine chiamato Tensore dello stress del Cauchy dove il primo sottoscritto (i) si riferisce alla direzione di verso l'esterno che affronta la normalità, e al secondo (j) alla direzione della forza componente, Figura O.5b.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}}$$

Le equazioni precedenti hanno avuto un ruolo importante nella fondazione della meccanica Continuum .

35 Infine, Voigt Notation (comunemente usato in ingegneria) è un modo per rappresentare il tenore simmetrico riducendo il suo ordine.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zz} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} & \sigma_{yz} \end{bmatrix}$$

36 Nota: non abbiamo ancora introdotto l'equazione dell'equilibrio (equazioni di movimento).

O.2.2.1 Tensori di stress idrostatico e deviatori

37 Lasciamo perdere. σ denotare lo stress normale medio p:

$$\sigma = -p = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}\text{tr } \boldsymbol{\sigma}$$

38 Poi il tenore di stress può essere scritto come somma di due tensori:

Stress idrostatico in cui ogni normale stress è uguale $-p$ e le sollecitazioni della cinghia sono zero. Lo stress idrostatico produce il cambiamento di volume senza cambiare forma in un mezzo isotropico.

$$\sigma_{hyd} = -p\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

Deviatoric Stress: che provoca il cambiamento nella forma.

$$\sigma_{dev} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - p & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - p & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - p \end{bmatrix}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

O.2.2.2 Rappresentanza geometrica degli stati di stress

39 Utilizzo dei tre principali stress σ_1, σ_2e σ_3, come le coordinate, può essere costruito uno spazio di stress tridimensionale, Figura O.6Questa rappresentazione dello stress è conosciuta come lo spazio di stress Haigh-Westergaard.

OP = **ON** + **NP**. Il primo è lungo la direzione del vettore unità $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ e **NP**$\perp$**ON**.

ON è la componente idrostatica dello stato di stress, asse $O\xi$ è chiamato l'asse idrostatico ξ, e ogni punto su questo asse ha $\sigma_{(1)} = \sigma_{(2)} = \sigma_{(3)} = p$, or $\xi = \sqrt{3}p$. **NP** rappresenta la componente deviatoria dello stato di stress (s_1, s_2, s_3) ed è perpendicolare al ξ asse. Qualsiasi piano perpendicolare all'asse idrostatico è chiamato il piano deviatorico ed è espresso come $\frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_{(1)} + \sigma_{(2)} + \sigma_{(3)}) = \xi$. Un aereo che passa attraverso l'origine è chiamato il π aereo ed è rappresentato da $\xi = 0$. Qualsiasi aereo contenente l'asse idrostatico è chiamato un piano meridiano. Il vettore **NP** si trova in un aereo meridiano e ha $\rho = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} = \sqrt{2J_2}$.

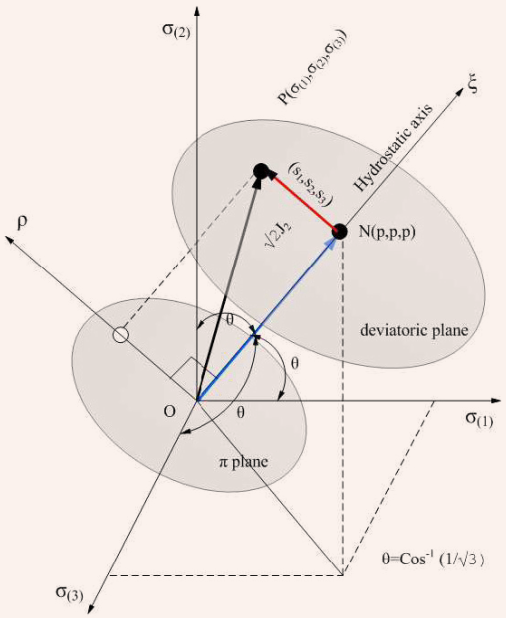


Figura O.6: Rappresentanza geometrica dello stress

O.2.3 Kinematics

O.2.3.1 Posizione e spostamento

40 Nel considerare la deformazione di un solido, possiamo avere, Figura O.7 due sistemi di coordinate distinti:

COPIA DI REVISIONE

Coordinate materiali (X_1, X_2, X_3) definito nel sistema di coordinate originale non deformato che dà origine al sistema di coordinamento Lagrangian.

Coordinate spaziali (x_1, x_2, x_3) definito nel sistema di coordinate deformate, che dà origine al sistema di coordinamento Euleriano.

Più specificamente, nella configurazione iniziale, P_0 ha la posizione vettoriale

$$\mathbf{X} = X_1\mathbf{I}_1 + X_2\mathbf{I}_2 + X_3\mathbf{I}_3$$

che è qui espresso in termini di coordinate materiali (X_1, X_2, X_3). Nella configurazione deformata, la particella P_0 si è ora spostato nella nuova posizione P e ha la seguente posizione vettoriale

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3$$

che si esprime in termini di coordinate spaziali. Il vettore di spostamento **u** collegamento P_0 e P è il vettore di spostamento che può essere espresso sia nelle coordinate materiali che spaziali

$$\begin{aligned}\mathbf{U} &= U_K\mathbf{I}_K\\ \mathbf{u} &= u_k\mathbf{i}_k\end{aligned}$$

O.2.3.2 Strains

41 Se entrambi i gradienti di spostamento e gli spostamenti stessi sono piccoli, allora $\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \approx \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, e così i tensori di ceppo infinitasimale e lagrangiano possono essere presi come uguali; $E_{ij} = E^*_{ij}$.

42 Sull'altro si possono introdurre rappresentazioni di varietà alternative, Tabella O.2.

Tabella O.2: Rappresentanze di strane

		Dislocazione gradiente	
		Piccolo	Grande
Slocamento	Piccolo	Piccole varietà lagrangiana (Cauchy)	Lagrangian grande varietà (Green-Lagrange)
	Grande	Eulerian piccolo ceppo	Eulerian ceppo finito (Eulerian-Almansi)

43 In questo libro ci limiteremo alla rappresentazione della varietà lagrangiana.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

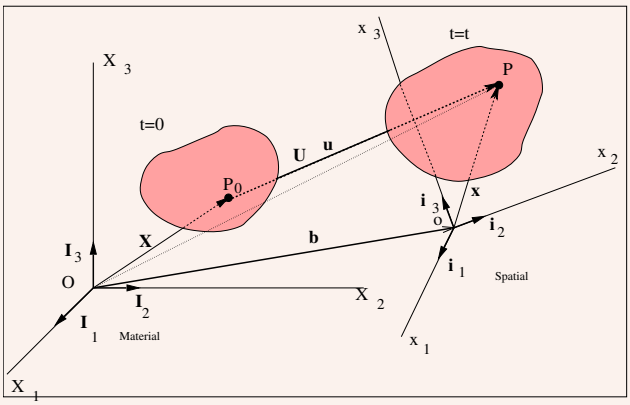


Figura O.7: Vettori di posizione e spostamento

44 Se la deformazione è considerata grande (come in buckling), le ceppi finiti euleri nel sistema di coordinate cartesian sono:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] \\
\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\
\varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
\varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right)
\end{aligned}
\tag{O.6}
$$

or

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}\right)$$

45 Nota che la ceppo di taglio (comunemente utilizzato) è definito come

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} \quad (i \neq j)$$

46 Nella maggior parte dei casi le deformazioni sono abbastanza piccole per i termini quadratici da eliminare, le equazioni risultanti si riducono a

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; & \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \end{aligned}$$

or

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,k} + u_{k,i}\right)$$

che è chiamato il ceppo Cauchy . Nell'elemento finito, la tensione viene spesso espressa attraverso l'operatore lineare $\mathbf{L}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$$

or

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}} \tag{O.7}$$

O.3 Le leggi fondamentali della meccanica continuum

47 In questa sezione, si ricavano equazioni differenziali che regolano il modo in cui lo stress e la deformazione variano a un punto e con il tempo. Si applicheranno ad ogni mezzo continuo, ma non avremo abbastanza equazione per determinare campo tensore sconosciuto. Per questo dobbiamo aspettare la prossima sezione in cui verranno introdotte leggi costitutive relative allo stress e alla tensione.

48 Solo con equazioni costitutive, condizioni di confine e di partenza potremo ottenere un problema matematico ben definito da risolvere per la distribuzione dello stress e della deformazione o i campi di spostamento o velocità.

49 Riassumiamo le equazioni differenziali che esprimono localmente la conservazione della massa, del moto ed dell'energia. Queste equazioni differenziali di equilibrio saranno derivate da forme integrali dell'equazione dell'equilibrio che esprime i postulati fondamentali della meccanica continuum.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

O.3.1 Le leggi sulla conservazione

50 Le leggi sulla conservazione costituiscono una componente fondamentale della fisica classica, che stabilisce un equilibrio tra quantità scalari o tensoriali in termini di V delimitato da una superficie S. Nella sua forma più generale, tale legge può essere espressa come

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathcal{A}\mathrm{d}V}_{\text{Rate of variation}} + \underbrace{\int_S \boldsymbol{\alpha}\mathrm{d}S}_{\text{Exchange by Diffusion}} = \underbrace{\int_V \mathbf{A}\mathrm{d}V}_{\text{Source}}$$

dove $\mathcal{A}$ è la densità volumetrica della quantità di interesse **a** (massa, moto lineare, energia, ...), **A** è il tasso di densità volumetrica di ciò che viene fornito dall'esterno, e $\boldsymbol{\alpha}$ è il tasso di densità superficiale di ciò che si perde attraverso la superficie S of V e sarà una funzione del normale alla superficie **n**.

51 Quindi, abbiamo letto l'equazione precedente come: La quantità di input (fornito dal lato destro) è uguale a quello che si perde attraverso il confine e modificare $\mathcal{A}$ che è la quantità di interesse. Le dimensioni delle varie quantità sono date da

$$\begin{aligned}\dim(\mathbf{a}) &= \dim(\mathcal{A}L^{-3})\\ \dim(\boldsymbol{\alpha}) &= \dim(\mathcal{A}L^{-2}t^{-1})\\ \dim(\mathbf{A}) &= \dim(\mathcal{A}L^{-3}t^{-1})\end{aligned}$$

52 Quindi questa sezione applicherà la precedente legge di conservazione alla massa, slancio ed energia. Le equazioni differenziali che ne derivano forniranno ulteriori interessanti relazioni per quanto riguarda l'incompressione dei solidi (importante nelle teorie dell'idrodinamica classica e della plasticità), l'equilibrio e la simmetria del tenore di stress, e L'enunciazione delle precedenti tre leggi di conservazione più la seconda legge della termodinamica costituiscono quella che è comunemente nota come le leggi fondamentali della meccanica continuum.

O.3.2 Flussi

53 Prima dell'enunciazione della prima legge di conservazione, dobbiamo definire il concetto di flusso su una superficie di confine. Il flusso attraverso una superficie può essere definito graficamente mediante la considerazione di una superficie immaginaria fissata nello spazio con un continuo "medium" che scorre attraverso di essa. **n** in senso positivo, poi il volume di "material" che scorre attraverso l'area superficiale infinitesimale dS nel tempo dt è uguale al volume del cilindro con base dS e altezza inclinata vdt parallelo al vettore velocità **v**, Figura O.8.

(If **v**·**n** è negativo, quindi il flusso è nella direzione negativa). Quindi, definiamo il volume flux come

$$\text{Volume Flux} = \int_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S = \int_S v_j n_j \mathrm{d}S$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

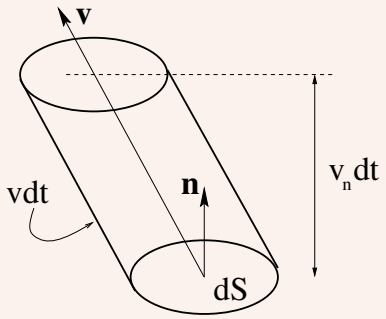


Figura O.8: Flusso attraverso la zona dS

dove l'ultima forma è per i componenti cartesiani rettangolari, possiamo generalizzare questa definizione e definire i seguenti flussi per area unitaria attraverso dS:

$$\begin{aligned}\text{Mass Flux} &= \int_S \rho \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \int_S \rho v_j n_j \mathrm{d}S \\ \text{Momentum Flux} &= \int_S \rho \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}S = \int_S \rho v_k v_j n_j \mathrm{d}S \\ \text{Heat flux} &= \int_S \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \int_S q_j n_j \mathrm{d}S\end{aligned}$$

O.3.3 Conservazione della massa; equazione di continuità

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \text{ or } \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$$

54 La forma vettoriale è indipendente da qualsiasi scelta di coordinate, e questa equazione mostra che la divergenza del campo vettoriale velocità equivale a $(-1/\rho)(d\rho/dt)$ e misura il tasso di flusso del materiale lontano dalla particella ed è uguale al tasso unitario di diminuzione della densità ρ nel quartiere della particella.

55 Se il materiale è incompressibile, così che la densità nel quartiere di ogni particella materiale rimanga costante mentre si muove, l'equazione della continuità assume la forma più semplice

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \text{ or } \nabla\cdot\mathbf{v} = 0$$

56 Questa è la condizione di incompressione .

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

O.3.4 Conservazione del moto; equazione del movimento

57 Il tasso di tempo di cambiamento del moto totale di un dato insieme di particelle equivale alla somma vettoriale di tutte le forze esterne che agiscono sulle particelle dell'insieme, purché si applichi la Terza Legge di Newton.[2] di meccanica continua. A partire da

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \underbrace{\rho\mathbf{v}}_{\mathcal{A}}\,\mathrm{d}V - \int_S \underbrace{\mathbf{t}}_{\alpha}\,\mathrm{d}S = \int_V \underbrace{\rho\mathbf{b}}_{\mathbf{A}}\,\mathrm{d}V$$

e notando che

$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{A}) &= \rho\mathbf{v} = \tfrac{m}{L^2 t}\\ \dim(\alpha) &= \mathbf{t} = \tfrac{ma}{L^2} = \tfrac{m}{Lt^2}\\ \dim(\mathbf{A}) &= = \rho\mathbf{b} = \tfrac{m}{L^3}\tfrac{L}{t^2} = \tfrac{m}{L^2t^2}\end{aligned}$$

richiamare Teorema divergenza (Eq. R.4)

$$\int_V v_{i,i}dV = \int_S \underbrace{v_i n_i}_{\text{flux}}\,dS$$

58 Il flusso di una funzione vettoriale attraverso alcune superfici chiuse equivale all'integrale della divergenza di tale funzione sul volume racchiuso dalla superficie. $t_i = T_{ij}n_j$ e applicare il teorema divergenza (Eq. R.4) ottenere

$$\begin{aligned}\int_V \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i\right)\mathrm{d}V &= \int_V \rho\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V\\ \int_V \left[\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i - \rho\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}V &= 0\end{aligned}$$

o per un volume arbitrario

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}$$

che è l'equazione (prima) del movimento di Cauchy, o il principio della quantità di moto lineare, o più semplicemente l'Equazione dell'equilibrio.

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} + \rho b_1 &= 0\\ \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} + \rho b_2 &= 0\\ \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} + \rho b_3 &= 0\end{aligned} \tag{O.8}$$

[2] postulato: una dichiarazione, nota anche come assioma, che è presa per essere vera senza prova.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

or

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{23} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{T}} + \rho \underbrace{\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{b}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{O.9}$$

59 Equazione (O.8) rappresenta le equazioni di movimento del Cauchy. Per un fluido newtoniano (inviso) il tenore di stress si riduce a una stress,

$$T_{ij} = \sigma\, \delta_{ij},$$

dove σ denota lo stress (dinamico) normale e δ_{ij} è il Di conseguenza,

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = \sigma, \qquad T_{12} = T_{13} = T_{23} = 0.$$

60 Sostituire queste relazioni in Eq. (O.8) rendimenti

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} + \rho b_1 = \rho a_1, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} + \rho b_2 = \rho a_2, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial x_3} + \rho b_3 = \rho a_3,$$

dove a_i sono i componenti dell'accelerazione delle particelle.

61 Introduzione delle sostituzioni di particelle fluide

$$a_1 = \ddot{\xi}, \qquad a_2 = \ddot{\eta}, \qquad a_3 = \ddot{\zeta},$$

e notando che, nella formulazione idrodinamica, la gravità è rappresentata in il campo idrostatico statico (in modo che $b_i = 0$ per il problema incrementale), il equazioni ridurre a

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} = \rho \ddot{\xi}, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} = \rho \ddot{\eta}, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial x_3} = \rho \ddot{\zeta}.$$

62 Infine, utilizzando $w = \rho g$, noi otteniamo

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} = \frac{w}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} = \frac{w}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

che sono le relazioni impiegate nell'analisi idrodinamica.

63 Si nota che queste equazioni potrebbero anche essere derivate dal diagramma corpo libero con l'assunzione di equilibrio (via la seconda legge di Newton) considerando un elemento infinitesimale delle dimensioni $\mathrm{d}x_1 \times \mathrm{d}x_2 \times \mathrm{d}x_3$, Figura O.9.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

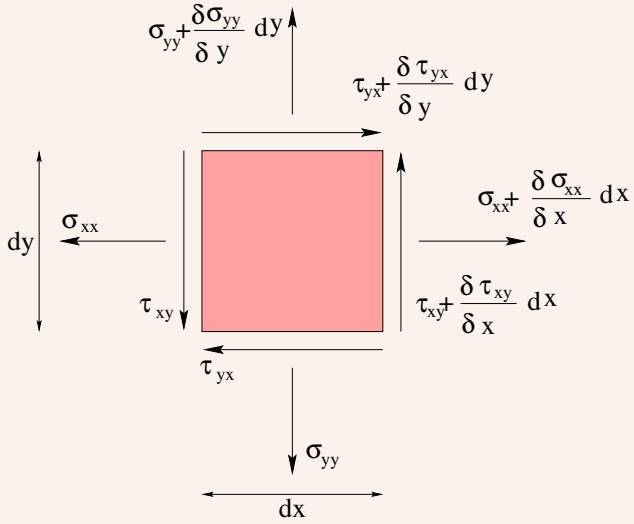


Figura O.9: Equilibrio di stress, coordinate cartesian

O.3.5 Conservazione dell'energia; primo principio della termodinamica

64 Il primo principio della termodinamica riguarda il lavoro svolto su un sistema (chiuso) e il trasferimento di calore nel sistema al cambiamento dell'energia del sistema. Supponiamo che gli unici trasferimenti di energia al sistema siano operati meccanicamente sul sistema mediante trazione superficiale e forze del corpo, e tramite trasferimento termico attraverso il confine.

65 Se vengono considerati solo quantitativi meccanici, il principio di conservazione dell'energia per il continuum può essere derivato direttamente dall'equazione del movimento data dall'Equation O.8. Questo si realizza prendendo l'integrale sul volume V del prodotto scalare tra Equation O.8 e la velocità v_i.

$$\int_V \rho v_i \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V = \int_V v_i T_{ji,j}\mathrm{d}V + \int_V \rho b_i v_i \mathrm{d}V$$

Considerare il lato sinistro

$$\int_V \rho v_i \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V = \frac{d}{\mathrm{d}t}\int_V \frac{1}{2}\rho v_i v_i \mathrm{d}V = \frac{d}{\mathrm{d}t}\int_V \frac{1}{2}\rho v^2 \mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}$$

che rappresenta il tasso di tempo del cambiamento dell'energia cinetica K nel continuum.

66 Se consideriamo i processi termici, il tasso di aumento del calore totale nel continuum è dato da

$$Q = -\int_S q_i n_i \mathrm{d}S + \int_V \rho r \mathrm{d}V$$

Q ha la dimensione[3] di potere, cioè ML^2T^{-3}, e l'unità SI è il Watt (W). **q** è il flusso di calore per area unitaria per conduzione, la sua dimensione è MT^{-3} e l'unità SI corrispondente è

[3] Lavoro $FL = ML^2T^{-2}$; Power=Work/time

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

Wm^{-2}. Infine, r è la costante di calore radiante per massa unitaria, la sua dimensione è $MT^{-3}L^{-4}$ e l'unità SI corrispondente è Wm^{-6}. Abbiamo così

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} + \int_V D_{ij}T_{ij}\mathrm{d}V = \int_V (v_i T_{ji})_{,j}\mathrm{d}V + \int_V \rho v_i b_i \mathrm{d}V + Q$$

67 Successivamente convertiamo il primo integrale sul lato destro a una superficie integrale dal teorema divergente (Eq. R.4) e dal $t_i = T_{ij}n_j$ noi otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} + \int_V D_{ij}T_{ij}\mathrm{d}V &= \int_S v_i t_i \mathrm{d}S + \int_V \rho v_i b_i \mathrm{d}V + Q \\ \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} + Q \end{aligned}$$

68 Questa equazione riguarda il tasso di tempo del cambiamento dell'energia meccanica totale del continuum sul lato sinistro al ritmo del lavoro svolto dalla superficie e dalle forze corporee sul lato destro.

69 Se si considerano sia le energie meccaniche che quelle non meccaniche, il primo principio afferma che *il tasso di cambio del cinetico più l'energia interna è pari alla somma della velocità di lavoro, oltre a tutte le altre energie fornite o rimosse dal continuum per unità tempo (calore, chimico, elettromagnetico, ecc.)*. Per un continuum termomeccanico, è consuetudine esprimere il tasso di tempo del cambiamento dell'energia interna dall'espressione integrale

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{d}{\mathrm{d}t}\int_V \rho u \mathrm{d}V$$

dove u è l'energia interna per massa unitaria o specifica energia interna. U appare solo come un differenziale nel primo principio, quindi se abbiamo veramente bisogno di valutare questa quantità, dobbiamo avere un valore di riferimento per il quale U sarà nullo.

70 La dimensione U è uno di energia: dim $U = ML^2T^{-2}$, e l'unità SI è la Joule. Allo stesso modo dim $u = L^2T^{-2}$ con l'unità SI di Joule/Kg.

71 In termini di integrazioni energetiche, il primo principio può essere riscritto come

$$\overbrace{\underbrace{\frac{d}{\mathrm{d}t}\int_V \frac{1}{2}\rho v_i v_i \mathrm{d}V}_{\frac{dK}{dt}=\dot{K}} + \underbrace{\frac{d}{\mathrm{d}t}\int_V \rho u \mathrm{d}V}_{\frac{dU}{dt}=\dot{U}}}^{\text{Rate of increase}} = \overbrace{\underbrace{\int_S t_i v_i \mathrm{d}S + \int_V \rho v_i b_i \mathrm{d}V}_{\frac{dW}{dt}(\mathcal{P}_{ext})}}^{\text{Exchange}\quad\text{Source}}$$

$$+ \underbrace{\overbrace{\int_V \rho r \mathrm{d}V}^{\text{Source}} - \overbrace{\int_S q_i n_i \mathrm{d}S}^{\text{Exchange}}}_{Q(\mathcal{P}_{cal})}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

or

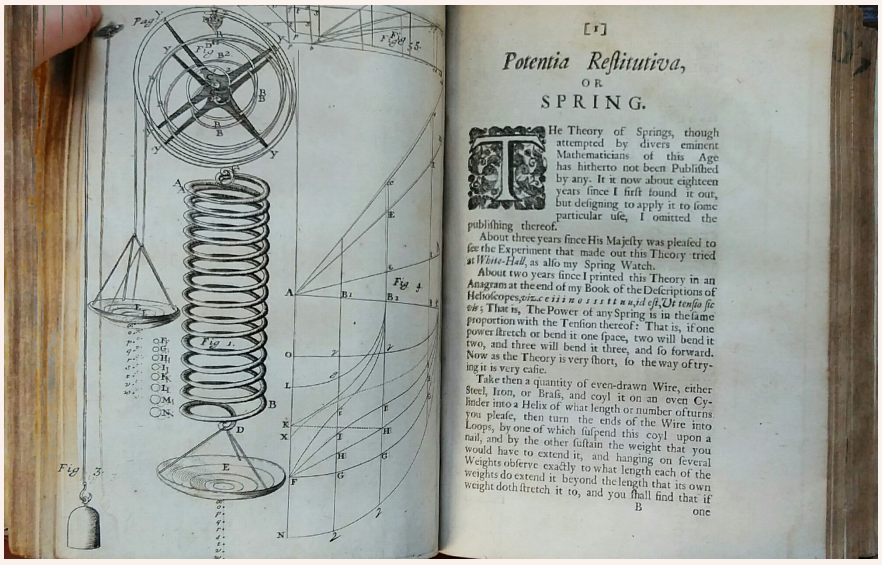
$$\frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{dW}{dt} + Q \tag{O.10}$$

72 In elasticità ideale, il trasferimento di calore è considerato insignificante e tutto il lavoro di input viene assunto convertito in energia interna sotto forma di recupero immagazzinato di energia elastica della tensione che può essere recuperata come lavoro quando il corpo viene scaricato.

73 In generale, tuttavia, la parte principale del lavoro di input in un materiale deformante non è recuperabilmente memorizzato ma dissipato dal processo di deformazione causando un aumento della temperatura del corpo e alla fine essere condotto via come calore.

O.4 Equazioni costitutive

74 Gancio[4] pubblicato nel 1676 un anagramma *c.e.i.i,n.o.s.t.u.u*. Solo nel 1678 pubblicò la chiave (in latino) *ut tension, sic vis*, che significa "come estensione, così la forza". *La Potenza di qualsiasi Primavera è nella stessa proporzione con la Tensione: cioè, se uno allungamento o curva di potenza è uno spazio, due si piegano due e tre lo piegheranno tre, e così avanti*, Figura O.10. In effetti, si diceva che Hooke era troppo poco e troppo tardi conosciuto.'



[1]

Potentia Reſtitutiva,

OR

SPRING.

He Theory of Springs, though attempted by divers eminent Mathematicians of this Age has hitherto not been Publiſhed by any. It is now about eighteen years ſince I firſt found it out, but deſigning to apply it to ſome particular uſe, I omitted the publiſhing thereof.

About three years ſince His Majeſty was pleaſed to ſee the Experiment that made out this Theory tried at *White-Hall*, as alſo my Spring Watch.

About two years ſince I printed this Theory in an Anagram at the end of my Book of the Deſcriptions of Helioſcopes, *viz. c e i i i n o s s t t t u u, id eſt, Ut tenſio ſic vis*; That is, The Power of any Spring is in the ſame proportion with the Tenſion thereof: That is, if one power ſtretch or bend it one ſpace, two will bend it two, and three will bend it three, and ſo forward. Now as the Theory is very ſhort, ſo the way of trying it is very eaſie.

Take then a quantity of even-drawn Wire, either Steel, Iron, or Braſs, and coyl it on an oven Cylinder into a Helix of what length or number of turns you pleaſe, then turn the ends of the Wire into Loops, by one of which ſuſpend this coyl upon a nail, and by the other ſuſtain the weight that you would have to extend it, and hanging on ſeveral Weights obſerve exactly to what length each of the weights do extend it beyond the length that its own weight doth ſtretch it to, and you ſhall find that if

B one

Figura O.10: Piatto dalla lezione di hooke su molle

75 Da lì in poi, Hooke divenne il padre indiscusso dell'elasticità.

[4]Hooke, un contemporaneo di Newton, era molto secretivo, amaro e geloso (non diverso da Salieri e Mozart) come egli riteneva che fosse stato negato il credito per molte scoperte.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

O.4.1 3D generale

76 La legge di Hooke generalizzata può essere scritta come:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl} \qquad i,j,k,l = 1,2,3 \tag{O.11}$$

77 Il (quarto ordine) tenore di costanti elastiche D_{ijkl} ha 81 (3^4) componenti; però, a causa della simmetria di entrambi $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$, ci sono al massimo 36 $\left(\frac{9(9-1)}{2}\right)$ termini elastici distinti.

78 Per la scrittura della Legge di Hooke, il sistema a doppio indice viene spesso sostituito da un semplice sistema indicizzato con una gamma di sei:

$$\sigma_k = \overbrace{D_{km}}^{6^2=36}\varepsilon_m \qquad k,m = 1,2,3,4,5,6$$

79 In termini di costanti di Lame, la legge di Hooke per un corpo isotropico è scritto come

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \lambda\delta_{ij}E_{kk} + 2\mu E_{ij} && \text{or } \mathbf{T} = \lambda\mathbf{I}_E + 2\mu\mathbf{E} \\ E_{ij} &= \frac{1}{2\mu}\left(T_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\delta_{ij}T_{kk}\right) && \text{or } \mathbf{E} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\mathbf{I}_T + \frac{1}{2\mu}\mathbf{T} \end{aligned}$$

80 In termini di costanti ingegneristiche:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} &= \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}; \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \\ \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned}$$

81 Analogamente nel caso della pura cesoia nella x_1x_3 e x_2x_3 aerei, abbiamo

$$\begin{aligned} \sigma_{21} = \sigma_{12} &= \tau \quad \text{all other } \sigma_{ij} = 0 \\ 2\varepsilon_{12} &= \frac{\tau}{G} \end{aligned}$$

e μ è uguale al modulo di taglio G. La legge di Hooke per il materiale isotropico in termini di costanti ingegneristiche diventa

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}\right) \text{ or } \boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu}\left(\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu}\mathbf{I}_\varepsilon\right) \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk} \text{ or } \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E}\mathbf{I}_\sigma \end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

82 Quando l'equazione della tensione viene espansa nelle coordinate 3D Cartesian, si produce:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy}(2\varepsilon_{xy}) \\ \gamma_{yz}(2\varepsilon_{yz}) \\ \gamma_{zx}(2\varepsilon_{zx}) \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

83 Se invertiamo questa equazione, otteniamo

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & G \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy}(2\varepsilon_{xy}) \\ \gamma_{yz}(2\varepsilon_{yz}) \\ \gamma_{zx}(2\varepsilon_{zx}) \end{Bmatrix} \tag{O.12}$$

O.4.2 caso isotropica trasversale

84 Per isotropici trasversalmente, possiamo esprimere il rapporto di stress-strain in termini di

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz} \\ \varepsilon_{yy} &= a_{12}\sigma_{xx} + a_{11}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz} \\ \varepsilon_{zz} &= a_{13}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + a_{33}\sigma_{zz} \\ \gamma_{xy} &= 2(a_{11} - a_{12})\tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= a_{44}\tau_{xy} \\ \gamma_{xz} &= a_{44}\tau_{xz} \end{aligned}$$

e

$$a_{11} = \frac{1}{E}; \quad a_{12} = -\frac{\nu}{E}; \quad a_{13} = -\frac{\nu'}{E'}; \quad a_{33} = -\frac{1}{E'}; \quad a_{44} = -\frac{1}{\mu'}$$

dove E è il modulo del giovane nell'aereo dell'isotropia e E' quello nell'aereo normale ad esso. ν corrisponde alla contrazione trasversale nel piano dell'isotropia quando la tensione viene applicata nell'aereo; ν' corrisponde alla contrazione trasversale nel piano dell'isotropia quando la tensione viene applicata normale al piano; μ' corrisponde alla shear moduli per il piano di isotropia e qualsiasi aereo normale ad esso, e μ è shear moduli per il piano di isotropia.

O.4.3 Casi 2D speciali

85 Spesso si possono fare ipotesi semplificanti per ridurre un problema 3D in uno 2D.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Strain di aeroplano Per problemi che coinvolgono un corpo lungo nel z direzione senza variazione di carico o geometria, quindi $\varepsilon_{zz} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Così, sostituendo in Equazione O.12 noi otteniamo

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\begin{array}{ccc} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ \nu & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\}$$

Assemblea Nei solidi della rivoluzione, possiamo usare un sistema di coordinate polari e

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u}{r} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \end{aligned}$$

La relazione costitutiva è di nuovo analoga a quella del trifolo 3D/plano

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_{rz} \end{array} \right\} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\begin{array}{cccc} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \end{array} \right\}$$

Aereo Stress Se la dimensione longitudinale in z direzione è molto più piccolo che nel x e y indicazioni, poi $\tau_{yz} = \tau_{xz} = \sigma_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ per tutto lo spessore. Ancora una volta, sostituendo in Equazione O.12 otteniamo:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} &= \frac{1}{1-\nu^2} \left[\begin{array}{ccc} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{1}{1-\nu} \nu (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \end{aligned}$$

O.5 Osservazioni fenomenologiche

[86] Si parla brevemente di alcuni aspetti fenomenologici generali associato a test di frattura e risposta del cemento.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

O.5.1 Test di carico, spostamento e controllo delle tensioni

87 Prima di procedere con la copertura della meccanica lineare e non lineare delle fratture di cemento, è essenziale che il lettore comprenda la differenza risposta materiale e strutturale quando un campione è sottoposto ad uniforme carico di trazione, spostamento o controllo della tensione durante il test. Le moderne apparecchiature di prova possono essere programmate per applicare un tasso predeterminato di carico (come misurato da una cella di carico), di spostamento (come indicato da un interno trasduttore di spostamento), o di ceppo (misurato da una tensione/clip gage o altro strumenti), Fig. O.11

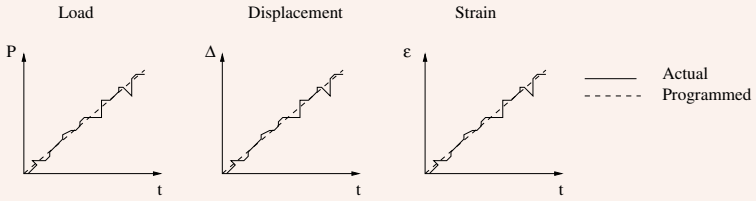


Figura O.11: Controlli di prova

Controllo carico: la testa trasversale applica un carico crescente indipendentemente dalla deformazione o risposta del campione. Per tutti materiali, quando la resistenza alla trazione è raggiunta, c'è un improvviso e brusco Insufficienza fragile. L'energia di tensione accumulata nel campione è improvvisamente rilasciato una volta raggiunto il carico finale del campione, quindi l'improvviso fallimento può essere esplosivo.

Controllo di spostamento/spostaggio: la testa trasversale si applica un crescente spostamento al campione. Per materiale addolcitore ci sarà una risposta post-peak con un graduale calo dello stress in questo caso, vi è un graduale aumento della sostituzione. rilascio di energia da deformazione che viene poi trasferita all'energia superficiale durante formazione crepa.

Controllo del profilo: è analogo al controllo di spostamento, tranne che il feedback è fornito da ('strategicamente posizionato') deformazione di campioni arbitraria o di una gradatura a clip o di un campione (non necessariamente corrispondente alla direzione di carico). Per raggiungere questo test una gradatura di clip o un estensivo deve fornire il feedback segnale alle apparecchiature di prova per regolare il colpo.

88 La maggior parte dei test di frattura del calcestruzzo sono condotti sotto controllo della tensione con un gage situato alla bocca della crepa fornendo l'esemplare risposta.

89 Sia i test di corsa che quelli controllati richiedono un installazione sperimentale a ciclo chiuso, che di solito è costoso e non era ampiamente disponibile fino a molto recentemente.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

O.5.2 Pre/post-peak risposta materiale di acciaio e cemento

90 Come introduzione alla frattura del cemento, confrontiamo il pre- e risposta post-peak di metalli e cemento, come illustrato in Fig.O.12, entrambi ottenuti in un test controllato da ceppo di un campione non graffiato o non annodato.

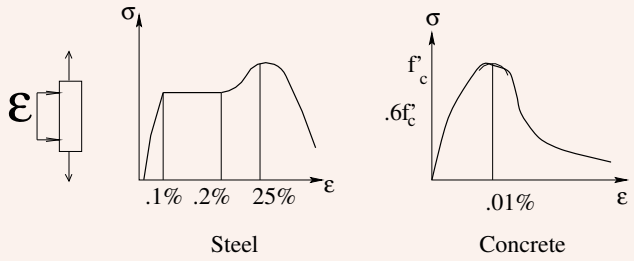


Figura O.12: Curve di metallo e cemento

1. **Pre-peak**:
   (a) Metal presenta una risposta elastica lineare fino allo stress di resa σ_{yld}, e una varietà approssimativa di 0.1%. Successivamente, a causa di deformazione interna in plastica dislocazione con fino a raggiungere 25% può risultare da essere seguito da indurimento di tensione.
   (b) Concrete presenta una risposta lineare fino a circa $0.6f_t'$. Successivamente, microcracking interno induce una risposta non lineare fino a raggiungere uno stress di punta f_t' e una corrispondente varietà di circa 0.01%.

   Sotto il controllo del carico si può misurare solo la risposta pre-peak.
2. **Post-peak**:
   (a) La risposta dei metalli nella zona post-peak non è ancora ben compresa. Non solo non è di utilità pratica, ma anche è in gran parte oscurato con la nuca.
   (b) La risposta concreta nella zona post-peak è più interessante, come può esporre ulteriori ceppi. Il ramo discendente della risposta concreta in Fig. O.12 è un'idealizzazione della risposta media del materiale. Una descrizione più accurata dovrebbe spiegare la localizzazione delle crepe indotte. Così lontano dalla fessura localizzata c'è un scarico elastico, e alla crepa, poiché una tensione non può essere correttamente definito, uno spostamento di apertura a pressione è un modello più appropriato. Questo sarà discusso nella sezione successiva.

   Le risposte post-peak possono essere ottenute solo sotto spostamento o test controllati da ceppo.

91 In entrambi i casi, la zona sotto lo stress-strain la curva rappresenta l'energia che può

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

essere assorbita da un'unità superficie di frattura e quindi il cemento mostrerà una risposta più fragile dei metalli.

92 Avendo osservato sperimentalmente che *macroscopico* risposta di cemento mostra una risposta ammorbidimento, e avendo attribuito la risposta duttile dei metalli all'interno dislocazione, mettiamo la domanda successiva, Perché è l'ammorbidimento del cemento?

O.6 Localizzazione della deformazione

O.6.1 Prove sperimentali

93 Se consideriamo un campione concreto, caricato in modo non assiale da un carico di trazione F, possiamo registrare l'allungamento da un LVDT (trasduttore di spostamento variabile in linea) montati come in configurazione 1, 2 o 3, Fig. O.13.

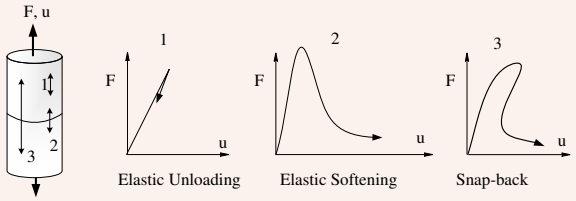


Figura O.13: Catturare la localizzazione sperimentale in esemplari di calcestruzzo non carichi con precisione

94 Una volta raggiunto il carico di picco e si avvia la crepa, il trasduttore 1 registrerà scarico elastico, 2 ammorbidenti e 3 snap-back.

95 Se fossimo per omogeneizzare prendendo $\sigma = F/A$e $\varepsilon = u/L$, è chiaro che non possiamo fornire una definizione unica della varietà attraverso la crepa. In questa posizione, la varietà non può più a lungo essere definito, e invece dovremmo caratterizzare la crepa dalla sua crepa apertura spostamento COD che sarà poi tracciato lungo con lo stress (σ-COD).

96 Questa capacità di trasmettere stress attraverso una crepa sotto controllo lo spostamento è una caratteristica dei materiali di ammorbidimento.

O.6.1.1 σ- diagramma di cod, modello di Hillerborg

97 Dalla discussione precedente, è chiaro che il cemento ammorbidimento è caratterizzato da una curva di larghezza di apertura-calda (e non stress-strain). L'esatta carbonizzazione della la risposta ad ammorbidimento dovrebbe essere ottenuta idealmente da un test non

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

assiale di un esemplare non graffiato. Tuttavia, è stato trovato (Li e Liang, 1986; Hordijk, Reinhardt e Cornelissen, 1989) che non solo sono quei test estremamente risultati sensibili, ma drasticamente diversi possono essere ottenuti da diverse geometrie, dimensioni e macchine di prova. la curva di ammorbidimento è spesso indirettamente determinata dal test notched esemplari.

98 In quello che è probabilmente il lavoro più citato nel non lineare frattura della letteratura concreta, Hillerborg (Hillerborg, Modéer e Petersson, 1976) presentato nel 1976 un modello molto semplice ed elegante, che è stato precedentemente descritto qualitativamente. In questo modello, la fessura è composta da due parti, Fig. O.14:

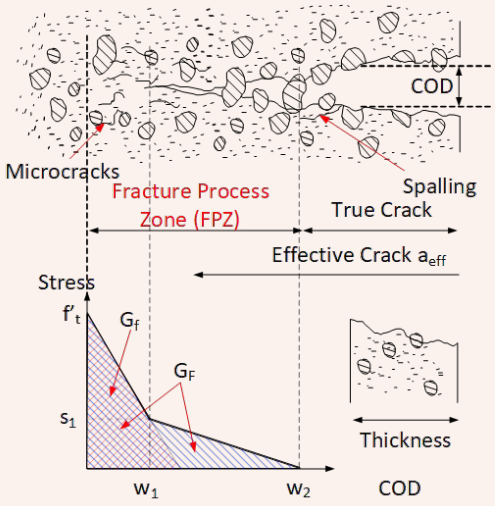


Figura O.14: Il modello fessurioso di Hillerborg

1. Vera o fesura fisica attraverso cui nessuna sollecitazione può essere trasmesso. Lungo questa zona abbiamo sia lo spostamento che lo stress discontinuità.
2. Zona di processo fittizio, o Frattura (FPZ) davanti a quella precedente, caratterizzata da:

   (a) picco di stress alla sua punta pari alla resistenza della trazione cemento
   (b) diminuzione della distribuzione dello stress f_t' alla punta della fittizia crepa a zero alla punta della fessura fisica

   Va notato che lungo il FPZ, abbiamo dislocamento discontinuità e continuità di stress.

99 Questo modello è tra i più utilizzati nella meccanica della frattura non lineare analisi degli elementi finiti, tuttavia a causa della complessità computazionale, pochi Sono state analizzate le strutture di "ingegneria". Inoltre,

1. C'è un punto di inflessione nel ramo discendente.

COPIA DI REVISIONE

(a) La prima parte è stata associata con microcracking (non collegato) davanti alla fessura senza stress

(b) La seconda parte con il bridging della crepa da aggregati

2. L'area sotto la curva, ha definito l'energia di frattura G_F (non essere confuso con G_c o rilascio di energia critica tasso), è una misura dell'energia che deve essere spesa per generare una superficie di unità di crack.
3. Analizzando numerosi dati di prova, Baže la mia vita (Bažant, 1984) ha trovato G_F può essere predetto (con un coefficiente di variazione di circa 16%) dalla seguente equazione empirica:

$$G_F = 0.0214(f_t' + 127) f_t'^2 \frac{d_a}{E_c} \tag{O.13}$$

dove E_c e f_t' sono in sterline per centimetro quadrato, d_a è il dimensione aggregata in pollici.

4. G_F: o energia frattura. Per dighe gravitazionali, un valore 1.35×10^{-3} kip/in. è raccomandato, (Saouma et al., 1991). Nota che per le dighe dell'arco, questo valore potrebbe probabilmente essere aumento sulla base di test di laboratorio. Inoltre, test di laboratorio potrebbero essere eseguiti su core recuperati per ottenere una migliore indicazione di G_F, (Brühwiler, E., 1988).
5. Forma del diagramma di ammorbidimento ($\sigma - COD$), e in generale un modello bilineare per l'ammorbidimento della tensione deve essere utilizzato. Con riferimento a Fig. O.15, Un argomento di ricerca molto ultimamente è stata la determinazio-

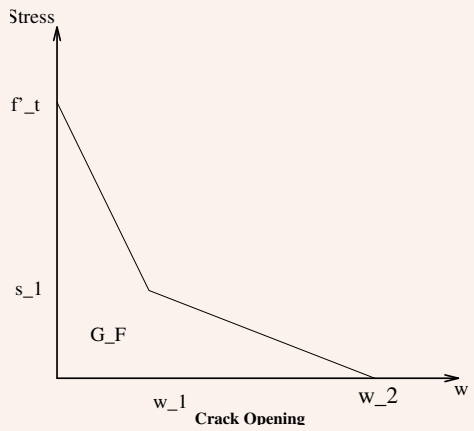


Figura O.15: Modelli di ammorbidimento ceppo in calcestruzzo

ne sperimentale dell'energia frattura G_F, e la forma risultante del diagramma di ammorbidimento (Cedolin, Dei Poli e Iori, 1987; Petersson, 1981; Whitman et al., 1988; Jeang e Hawkins, 1985; Gopalaratnam e Shah, 1985; Duda, 1990; Giuriani e Rosati, 1986). Per valutare l'importanza dell'esatto valore del G_F e la forma curva di ammorbidimento sulle simulazioni numeriche, tre diversi set di esperimenti di

COPIA DI REVISIONE

frattura vengono analizzati utilizzando l'energia di frattura media riportata. La forma della si presume che il diagramma di ammorbidimento sia quello bilineare proposto in (Whitman et al., 1988)Fico. O.15. Questo modello semplice può essere definito in modo unico in termini di resistenza alla trazione f_t', e l'energia di frattura G_F. In (Brühwiler e Whitman, 1990), si è scoperto che i punti ottimali per il cemento con 1" aggregato di dimensione massima sono:

$$s_1 = 0.4 f_t' \tag{O.14}$$

$$w_1 = 0.8 \frac{G_F}{f_t'} \tag{O.15}$$

$$w_2 = 3 \frac{G_F}{f_t'} \tag{O.16}$$

considerando che per il cemento strutturale, (Whitman et al., 1988), i valori corrispondenti sono:

$$s_1 = \frac{f_t'}{4} \tag{O.17}$$

$$w_1 = 0.75 \frac{G_F}{f_t'} \tag{O.18}$$

$$w_2 = 5 \frac{G_F}{f_t'} \tag{O.19}$$

dove f_t' è la forza di trazione non assiale. Nel contesto di un'analisi non lineare della meccanica frattura, questa trazione forza non può essere assunto come zero, altrimenti non ci sarà zona di processo frattura. As f_t' è raramente determinato sperimentalmente, si presume che 9% of f_c', (Mindess e Young, 1981).

6. Al posto di un test diretto della tensione, si può eseguire una prova flessorale controllo della tensione, e l'energia frattura G_F potrebbe ancora essere determinato dalla zona sotto il carico e corrispondente curva di spostamento.
7. Per l'analisi dinamica, le proprietà di frattura del calcestruzzo della diga dipendono sia dal tasso di carico che da quello di carico. precaricamenti. Risultati dei test (Brühwiler e Whitman, 1990) mostra che le proprietà della frattura in generale aumentano con un aumento della velocità di carico. Tuttavia, la compressione dinamica il precarico porta ad una riduzione delle proprietà di frattura sia a quasi-statica che alti tassi di carico.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Tabella O.3: Esempi di condizioni limite nell'analisi strutturale

Problematiche	Membro assiale Carico distribuito	Membro della Flexural Carico distribuito
Equazione differenziale	$AE\frac{d^2u}{dx^2} - q = 0$	$EI\frac{d^4w}{dx^4} - q = 0$
m	1	2
Essential B.C. $[0, m-1]$	u	$w, \frac{dw}{dx}$
Naturale B.C. $[m, 2m-1]$	$\frac{du}{dx}$ or $\sigma_{xx} = Eu_{,x}$	$\frac{d^2w}{dx^2}$ e $\frac{d^3w}{dx^3}$ or $M = EIw_{,xx}$ e $V = EIw_{,xxx}$

O.7 Condizioni di bovino

100 In generale, le condizioni di confine possono essere ottenute dalle equazioni Euler-Lagrange corrispondenti all'equazione differenziale governante (conservazione della quantità di slancio o equilibrio nella meccanica solida).

101 Per le variabili di campo in cui il più alto derivato nell'equazione differenziale governante è d'ordine $2m$Poi abbiamo (§47.2.6):

Essenziale (o forzato, o geometrico) condizioni di confine (perché era essenziale per la derivazione dell'equazione Euler) se $\eta(a)$ or $\eta(b)$ =0. Le condizioni limite essenziali comportano derivati dell'ordine zero (la variabile di campo stessa) attraverso m-1. Matematicamente, questo corrisponde a problemi del valore dei limiti Dirichlet.

Naturale (o statico) se ce ne siamo andati η essere arbitrario, allora sarebbe necessario usare $\frac{\partial F}{\partial u'} = 0$ at $x = a$ or b. Le condizioni di confine naturali comportano derivati dell'ordine m Matematicamente, questo corrisponde a problemi di valore limite Neuman.

Mista Boundary-Value problemi in cui si specificano sia le condizioni essenziali che naturali sui tratti complementari del confine (come ad esempio Γ_u e Γ_t). Matematicamente, corrispondono ai cosiddetti problemi legati al valore limite di Robin.

Tabella O.3 fornisce esempi di analisi strutturale.

O.8 Schema Tonti

102 Per questo problema di campo vettoriale, i corrispondenti diagrammi Tonti (Fig. O.16) è mostrato in figura O.17.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

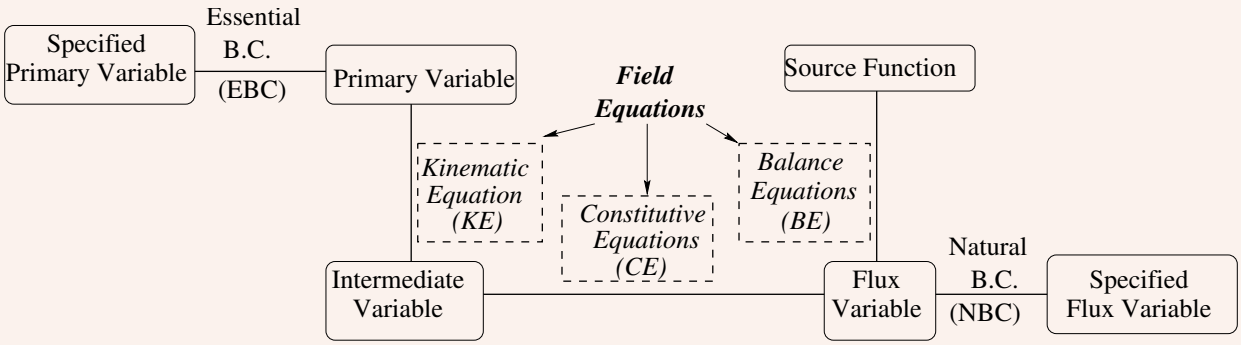


Figura O.16: Componenti del diagramma di Tonti (Felippa, 2000)

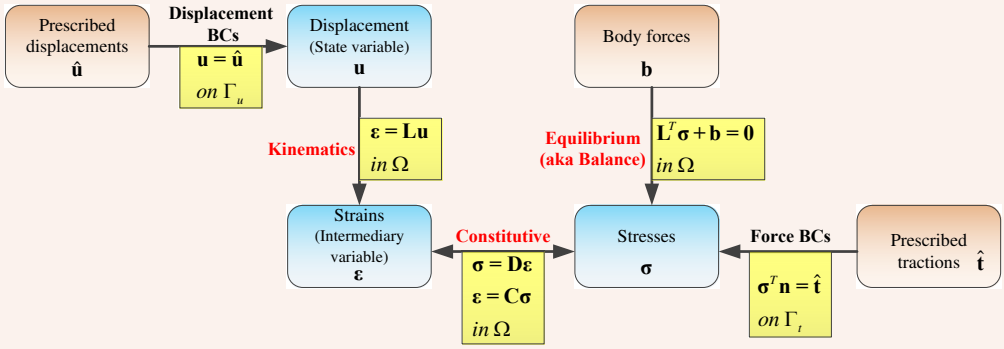


Figura O.17: Schema Tonti per meccanica di corpi deformabili

COPIA DI REVISIONE

O.9 Concetto di forza interna

103 Poiché non è sempre facile eseguire un'analisi in termini di termine fondamentale di stress e tensione, è conveniente sostituirli con i loro valori integrali: *interno* forze e spostamenti.

104 Definiamo *Forze interne* come parte integrante di stress. Per piastre, abbiamo Fig. O.18 e

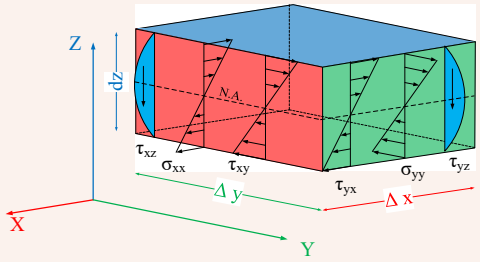


Figura O.18: Forze interne in termini di stress

i risultati per larghezza unitaria sono dati da

$$\text{Membrane (Axial) Forces} \quad \mathbf{N} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma dz \quad \rightarrow N_{xx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} dz \text{ etc.}$$

$$\text{Bending Moments} \quad \mathbf{M} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma z dz \quad \rightarrow M_{yy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} z dz \text{ etc.}$$

$$\text{Transverse Shear Forces} \quad \mathbf{V} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau dz \quad \rightarrow V_{yy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz} dz \text{ etc.}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Appendice P

Omaggio a Westergaard

Abstract

A mio parere, Westergaard si distingue come forse l'ingegnere più eccezionale del XX secolo. Il suo approccio, condiviso da poche figure, in particolare Stephen Timoshenko, era quello di stare con un piede saldamente nell'ingegneria strutturale e l'altro nella meccanica strutturale, utilizzando meccanica avanzata e matematica per risolvere i problemi dell'immediato È proprio questa duplice posizione, esemplificata in precedenza da Rankine (§6.8.2), che ha servito da tempo come il mio ideale professionale.

Che Westergaard ha contribuito a due equazioni fondamentali, una nella frattura meccanica *e l'altro in diga* ingegneria*, entrambi i campi vicini al mio lavoro - non è quindi una semplice coincidenza.*

In omaggio a questo eroe intellettuale, ho dedicato un'appendice di questo libro a due delle sue derivazioni più iconiche.

Il primo presenta una soluzione analitica per il campo di stress alla punta di una crepa, marcando formalmente la nascita di una nuova disciplina: meccanica frattura. Consapevolmente porto questa derivazione attraverso il suo rigore completo, non ho alcun compito per i deboli-cuori, perché anche gli ingegneri devono, a volte, fermarsi a riconoscere la bellezza di una soluzione matematica posta al servizio di un problema profondamente pratico.

Nel secondo, sviluppato durante la sua collaborazione con l'Ufficio di Reclamazione sulla progettazione della diga Hoover, Westergaard ha derivato un'espressione eccezionalmente elegante per le forze idrodinamiche indotte dal moto del terremoto su una faccia da diga.

In entrambi i casi, il comando senza pari di Westergaard della meccanica e matematica è stato posto in modo non ambiguo al servizio dell'ingegneria -trasformando la teoria astratta nelle soluzioni di duratura valore pratico.

P.1 Crack punta campo di stress 3141
P.1.1 Funzione di stringa aerodinamica 3141
P.1.2 Soluzione 3143
P.2 Interazione della struttura fluida . . 3148

COPIA DI REVISIONE

P.1 Crack punta campo di stress

P.1.1 Funzione di stringa aerodinamica

1 Per comprendere pienamente la soluzione di Westergaard (Westergaard, 1933), si devono prima introdurre le funzioni di Airy espresse mediante variabili complesse. Seguire la derivazione completa del fattore d'intensità degli sforzi all'apice della fessura, in tutto il suo rigore e la sua eleganza matematica, significa confrontarsi direttamente con il pensiero di un maestro della meccanica. Lo stesso studioso era anche un ingegnere pratico, capace di tradurre l'analisi astratta in soluzioni concrete per problemi reali: una dualità che emergerà nella sezione seguente.

2 In problemi di elasticità cerchiamo una funzione in termini di coordinate spaziali che può soddisfare sia l'equilibrio e le equazioni di compatibilità. Airy ha dimostrato che possiamo definire una tale funzione $\Phi(\mathbf{x})$ tale che:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \, \partial x_2}. \tag{P.1}$$

Può essere mostrato (con sostituzione diretta di queste equazioni in Eq. O.8) che l'equazione di equilibrio è automaticamente soddisfatta.

3 Per materiali isotropici elastici lineari, la soddisfazione della compatibilità equazione richiede inoltre che Φ deve essere tale

$$\nabla^2 \left(\nabla^2 \Phi \right) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \right) = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} = 0 \tag{P.2}$$

dove ∇^2 è il **Operatore laplacito**. Una soluzione all'equazione di Laplace è indicata come una **funzione armonica**.

4 In coordinate polari

$$\nabla^2 \left(\nabla^2 \Phi \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right)$$

5 Così, la funzione di stress arioso ci permetterà di risolvere l'elasticità i problemi a condizione che possiamo trovare con la giusta scelta per Φ che soddisfa le condizioni di confine naturali (stress).

Variabili complessi

6 Come sarà mostrato nel prossimo capitolo, possiamo usare la funzione di stress Airy con variabili reali per determinare il campo di stress intorno a un foro circolare, tuttavia noi

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

necessità di estendere le funzioni di stress aerodinamico alle variabili complesse al fine di analizzare: 1) stress intorno a un foro ellittico (Inglis), e stressa alla punta di una crepa (Westergaard).

7 Prima definiamo il numero complesso z as:

$$z = x_1 + ix_2 = re^{i\theta}$$

dove $i = \sqrt{-1}$, x_1 e x_2 sono le coordinate cartesiane, e r e θ sono le coordinate polari.

8 Definiamo ulteriormente **funzione analitica**, $f(z)$ uno che deriva dipende solo da z. Applicare la regola della catena

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(z) = \frac{\partial}{\partial z} f(z) \frac{\partial z}{\partial x_1} = f'(z) \frac{\partial z}{\partial x_1} = f'(z) \tag{P.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f(z) = \frac{\partial}{\partial z} f(z) \frac{\partial z}{\partial x_2} = f'(z) \frac{\partial z}{\partial x_2} = if'(z) \tag{P.4}$$

9 If $f(z) = \alpha + i\beta$ dove α e β sono funzioni reali of x_1 e x_2e $f(z)$ è analitico, poi da Eq. P.3 e P.4 abbiamo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f(z)}{\partial x_1} &= \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} + i\frac{\partial \beta}{\partial x_1} = f'(z), \\ \frac{\partial f(z)}{\partial x_2} &= \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} + i\frac{\partial \beta}{\partial x_2} = if'(z) \end{aligned}\right\} \quad \underbrace{i\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} + i\frac{\partial \beta}{\partial x_1}\right)}_{i\ 1^{st}\ \text{Equation}} = \underbrace{\frac{\partial \alpha}{\partial x_2} + i\frac{\partial \beta}{\partial x_2}}_{2^{nd}\ \text{Equation}}$$

10 Equando le parti reali e immaginarie cede i **Cauchy-Riemann** equazioni:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} = \frac{\partial \beta}{\partial x_2}; \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} = -\frac{\partial \beta}{\partial x_1}$$

11 Se differenziamo queste due equazioni, prima rispetto a x_1Allora con rispetto a x_2e poi aggiungerli, otteniamo

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} = 0 \qquad \text{or} \qquad \nabla^2(\alpha) = 0$$

che è l'equazione di Laplace.

12 Allo stesso modo possiamo avere:

$$\nabla^2(\beta) = 0$$

Quindi sia il reale (α) e la parte immaginaria (β) di un analitico funzione fornirà separatamente soluzione all'equazione di Laplace, e α e β sono **coniugare funzioni armoniche**.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Funzioni complesse di resistenza aerodinamica

13 Si può dimostrare che qualsiasi funzione di stress può essere espressa come

$$\Phi = \text{Re}[(x_1 - ix_2)\psi(z) + \chi(z)] \tag{P.5}$$

a condizione che sia $\psi(z)$ (psi) e $\chi(z)$ (chi) sono armoniche (i.e) $\nabla^2(\psi) = \nabla^2(\chi) = 0$) funzioni analitiche di x_1 e x_2. ψ e χ sono spesso indicati come il Kolonov-Muskhelishvili potenziali complessi.

14 If $f(z) = \alpha + i\beta$ e sia α e β sono reali, allora la sua funzione coniugata è definita come:

$$\bar{f}(\bar{z}) = \alpha - i\beta$$

15 Nota che le funzioni coniugate non devono essere confuse con coniugare funzioni armoniche. Quindi possiamo riscrivere Eq. P.5 as:

$$\Phi = \text{Re}[\bar{z}\psi(z) + \chi(z)]$$

16 Sostituire Eq. P.1.1 in Eq. P.1, possiamo determinare gli stress

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 4\text{Re}\psi'(z) \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= 2[\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)] \end{aligned} \tag{P.6}$$

e per separazione di parti reali e immaginarie possiamo quindi risolvere $\sigma_{22} - \sigma_{11}$ & σ_{12}.

17 Gli spostamenti possono essere ottenuti allo stesso modo.

P.1.2 Soluzione

18 Mentre Kirsch, 1898 sviluppò un'espressione per la concentrazione degli sforzi attorno a un foro circolare e, successivamente, Inglis, 1913 ricavò l'analoga soluzione per un foro ellittico, fu Westergaard, 1933 a derivare un'espressione del campo di sforzo all'apice di una fessura affilata.

19 Consideriamo una piastra infinita sottoposta ad uniforme stress biassiale σ_0 con una fesura centrale di lunghezza $2a$, Fig. P.1. Dalla soluzione Inglis sappiamo che ci sarebbe un infinito teoricamente stress alla punta della crepa, tuttavia né la natura della singolarità né il campo di stress può essere derivato da esso.

20 La soluzione di Westergaard (Westergaard, 1933) assume inizialmente $\Phi(z)$ come funzione armonica (così soddisfacendo l'equazione di Laplace $\nabla^2(\Phi) = 0$). Denotare da $\phi'(z)$ e $\phi''(z)$ il primo e il secondo derivati rispettivamente, e $\bar{\phi}(z)$ e $\bar{\bar{\phi}}(z)$ il suo primo e secondo integrale rispettivamente della funzione $\phi(z)$.

21 Westergaard ha postulato che

$$\Phi = \text{Re}\bar{\bar{\phi}}(z) + x_2\text{Im}\bar{\phi}(z)$$

è una soluzione al problema della crepa[1]. $\phi(z)$ si presume essere analitico.

[1] Nota che non dobbiamo confondere la funzione di stress Airy Φ con il funzione complessa $\phi(z)$.

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

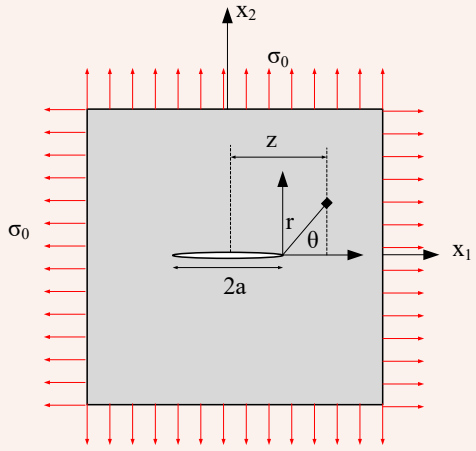


Figura P.1: Crack in un piatto infinito

22 Vediamo di verificare che Φ soddisfa l'equazione biharmonica. Prendere i primi derivati, e ricordare che $\frac{\partial}{\partial x_1} f(z) = f'(z)$, abbiamo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mathrm{Re}\,\bar{\bar{\phi}}\right) + \left[x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{Im}\bar{\phi}(z) + \mathrm{Im}\bar{\phi}(z) \underbrace{\frac{\partial x_2}{\partial x_1}}_{0} \right] \tag{P.7}$$

$$= \mathrm{Re}\bar{\phi}(z) + x_2 \mathrm{Im}\phi(z) \tag{P.8}$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mathrm{Re}\bar{\phi}(z)\right) + \left[x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{Im}\phi(z) + \mathrm{Im}\phi(z)\frac{\partial x_2}{\partial x_1} \right] \tag{P.9}$$

$$= \mathrm{Re}\phi(z) + x_2 \mathrm{Im}\phi'(z) \tag{P.10}$$

Analogamente, differenziare rispetto a x_2, e ricordando da Eq. P.4 che $\frac{\partial}{\partial x_2} f(z) = i f'(z)$, noi otteniamo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}(\mathrm{Re}\bar{\bar{\phi}}(z) + [x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mathrm{Im}\bar{\phi}(z)\right) + \frac{\partial x_2}{\partial x_2}\mathrm{Im}\bar{\phi}(z)] \tag{P.11}$$

$$= -\mathrm{Im}\bar{\phi}(z) + x_2 \mathrm{Re}\phi(z) + \mathrm{Im}\bar{\phi}(z) \tag{P.12}$$

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\mathrm{Re}\phi(z) + \mathrm{Re}\phi(z)\frac{\partial x_2}{\partial x_2} \tag{P.13}$$

$$= -x_2 \mathrm{Im}\phi'(z) + \mathrm{Re}\phi(z) \tag{P.14}$$

Analogamente, si può dimostrare che

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} = -x_2 \mathrm{Re}\phi'(z) \tag{P.15}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Avendo espressioni derivate per le sollecitazioni e i secondi derivati parziali of Φ, sostituendo in Eq. P.2, si può dimostrare che l'equazione biarmonica è soddisfatta, così Φ is una soluzione valida.

23 Se vogliamo convincerci che le sollecitazioni soddisfare sia le equazioni di equilibrio che compatibilità (che fanno in virtù di Φ soddisfare l'equazione bi-armonica), noi hanno da Eq. O.8 in 2D:

1. Equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \tag{P.16}$$

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = 0 \tag{P.17}$$

Consideriamo la prima equazione

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_1}[\mathrm{Re}\phi(z) - x_2 \mathrm{Im}\phi'(z)] \\
&= \mathrm{Re}\phi'(z) - x_2 \mathrm{Im}\phi''(z) \\
\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_2}[-x_2 \mathrm{Re}\phi'(z)] \\
&= -\mathrm{Re}\phi'(z) + x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{Im}\phi'(z) \\
&= -\mathrm{Re}\phi'(z) + x_2 \mathrm{Im}\phi''(z)
\end{aligned}$$

Se sostituiamo queste due equazioni in Eq. P.16 e poi otteniamo zero. Allo stesso modo, può essere mostrato che Eq. P.17 è soddisfatto.

2. Compatibilità: In tensione di volo, gli spostamenti sono dati da

$$\begin{aligned}
2\mu u_1 &= (1-2\nu)\mathrm{Re}\,\bar{\phi}(z) - x_2 \mathrm{Im}\phi(z) \\
2\mu u_2 &= 2(1-\nu)\mathrm{Im}\bar{\phi}(z) - x_2 \mathrm{Re}\,\phi(z)
\end{aligned}$$

e sono ottenuti mediante integrazione dei ceppi, che a loro volta si ottengono come un assegno che computeremo

$$\begin{aligned}
2\mu\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\
&= (1-2\nu)\mathrm{Re}\phi(z) - x_2 \mathrm{Im}\phi'(z) \\
&= (1-\nu)\underbrace{[\mathrm{Re}\phi(z) - x_2 \mathrm{Im}\phi'(z)]}_{\sigma_{11}} - \nu \underbrace{[\mathrm{Re}\phi(z) + x_2 \mathrm{Im}\phi'(z)]}_{\sigma_{22}} \\
&= (1-\nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}
\end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Ricordare che

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

poi

$$E\varepsilon_{11} = (1-\nu^2)\sigma_{11} - \nu(1+\nu)\sigma_{22}$$

questo mostra che $E\varepsilon_{11} = \sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} - \sigma_{33})$, e per la tensione aereo, $\varepsilon_{33} = 0 \Rightarrow \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ e $E\varepsilon_{11} = (1-\nu^2)\sigma_{11} - \nu(1+\nu)\sigma_{22}$

24 Fino a ora Φ è stato definito indipendentemente dal problema, e semplicemente determinato gli stress in termini di esso, e verificato che la bi-armonica l'equazione era soddisfatta.

25 Poi dobbiamo determinare ϕ tale le condizioni di confine sono soddisfatte. Per ragioni che si manifesteranno più tardi, noi generalizzare il nostro problema a uno dei quali abbiamo uno stato biassiale di stress applicato sulla piastra.

1. Lungo la crepa: a $x_2 = 0$ e $-a < x_1 < a$ noi abbiamo $\sigma_{22} = 0$ (cricca libera di trazione).
2. Infinito: a $x_2 = \pm\infty$, $\sigma_{22} = \sigma_0$

Si nota dall'Eq. P.10 che, per $x_2 = 0$, σ_{22} si riduce a

$$(\sigma_{22})_{x_2=0} = \text{Re}\phi(z) \tag{P.18}$$

26 Inoltre, ci aspettiamo $\sigma_{22} \to \sigma_0$ quando $x_1 \to \infty$, e che σ_{22} sia maggiore di σ_0 quando $\mid x_1 - a \mid > \varepsilon$ (a causa della singolarità prevista da Inglis); pertanto, una possibile scelta per σ_{22} è $\sigma_{22} = \frac{\sigma_0}{1-\frac{a}{x_1}}$, che, per simmetria, si estende a $\sigma_{22} = \frac{\sigma_0}{\left(1-\frac{a^2}{x_1^2}\right)}$. Tuttavia, dobbiamo anche avere $\sigma_{22} = 0$ quando $x_2 = 0$ e $-a < x_1 < a$, così la funzione $\phi(z)$ dovrebbe diventare immaginario lungo la crepa, e

$$\sigma_{22} = \text{Re}\left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x_1^2}}}\right)$$

27 Così da Eq. P.18 abbiamo (nota la transizione da x_1 to z).

$$\phi(z) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1-\frac{a^2}{z^2}}}$$

28 Se eseguiamo una modifica della variabile e definiamo $\eta = z - a = re^{i\theta}$ e supponendo

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

$\frac{\eta}{a} \ll 1$, e ricordando che $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, poi il primo termine di Eq. P.10 può essere riscritto come

$$\begin{aligned} \text{Re}\phi(z) &= \text{Re}\frac{\sigma_0}{\sqrt{\frac{\eta^2+2a\eta}{\eta^2+a^2+2a\eta}}} \approx \text{Re}\frac{\sigma_0}{\sqrt{\frac{2a\eta}{a^2}}} \\ &\approx \text{Re}\sigma_0\sqrt{\frac{a}{2\eta}} \approx \text{Re}\sigma_0\sqrt{\frac{a}{2re^{i\theta}}} \approx \text{Re}\sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}e^{-i\frac{\theta}{2}} \approx \sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

29 Ricordare che $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ e che $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$, noi sostituiamo $x_2 = r\sin\theta$ nel secondo termine

$$x_2\text{Im}\phi' = r\sin\theta\text{Im}\frac{\sigma_0}{2}\sqrt{\frac{a}{2(re^{i\theta})^3}} = \sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}$$

30 Combinando le equazioni sopra riportate, con Eq. P.10, P.14, e P.15 noi otteniamo

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= \sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\ \sin\frac{3\theta}{2}\right)+\cdots \\ \sigma_{11} &= \sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\ \sin\frac{3\theta}{2}\right)+\cdots \\ \sigma_{12} &= \sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\ \cos\frac{3\theta}{2}+\cdots \end{aligned}$$

31 Ricordiamo che questo era il caso biassiale, la cassa uniaxial può essere riprodotta da sovrapporre una pressione nella x_1 direzione uguale a $-\sigma_0$, tuttavia questo non dovrebbe influenzare il campo di stress vicino alla punta della crepa.

32 Utilizzando un approccio simile, possiamo trarre le espressioni per il campo di stress intorno a una punta di crack in un piatto sottoposto lontano campo di taglio stress (mode II come definito in seguito) utilizzando la seguente espressione di ϕ

$$\Phi_{II}(z) = -x_2\text{Re}\bar{\phi}_{II}(z) \Rightarrow \phi_{II} = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{a^2}{z^2}}}$$

e per la stessa crepa ma sottoposta a sollecitazioni antiaereo di taglio (mode III)

$$\Phi'_{III}(z) = \frac{\sigma_{13}}{\sqrt{1-\frac{a^2}{z^2}}}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

33 Irwin[2] (Irwin, 1957) ha introdotto il concetto di *fattore di intensità dello stress* definito come:

$$\left\{ \begin{array}{c} K_{\mathrm{I}} \\ K_{\mathrm{II}} \\ K_{\mathrm{III}} \end{array} \right\} = \lim_{r \to 0, \theta = 0} \sqrt{2\pi r} \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \end{array} \right\}$$

dove σ_{ij} sono le sollecitazioni della punta di crack vicino, e K_i sono associati a tre cinematica indipendente movimenti delle superfici di crepa superiore e inferiore rispetto a l'uno dell'altro, come mostrato in Fig. P.2

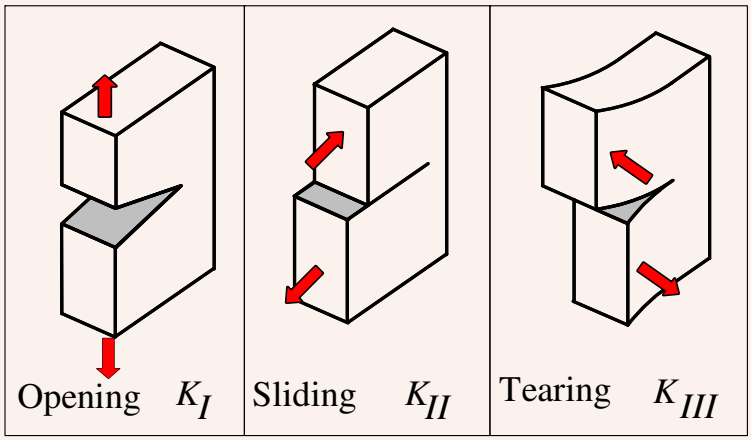


Figura P.2: Modalità indipendenti di spostamenti in cravatta

P.2 Interazione della struttura fluida

Dalla tesi di dottorato «Probabilistic Nonlinear Analysis of Concrete Dams Suffering from AAR» by Mahdavi, 2023.

In una carta di riferimento, Westergaard, 1933 ha sviluppato un modello per quantificare le forze idrodinamiche che agiscono su una diga utilizzando una massa aggiuntiva (o lumped nel contesto dell'elemento finito) e questo modello verrà utilizzato nell'analisi corrente.

[2]Irwin è stato chiesto dall'Ufficio di Ricerca Navale (ONR) indagare sul fallimento delle navi Liberty durante la seconda guerra mondiale, così come Trent'anni prima Inglis stava indagando sul fallimento delle navi britanniche.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Nonostante la sua ampia adozione diffusa, e al meglio della conoscenza dell'autore il modello non è mai stato descritto pienamente; invece le sue equazioni finali sono presentate ed adottate.

Questa indagine di Westergaard è molto interessante su più punti, in primo luogo fornisce una soluzione ad un problema ingegneristico altamente pratico, saldamente radicato nei fondamenti della meccanica. In secondo luogo, nonostante il rigore associato alla meccanica, Westergaard non è dogmatico; piuttosto sa come rilassarsi alcune ipotesi quando necessario per raggiungere una soluzione.

Modello teorico

considerando che il §P.2 per calcolare la massa aggiunta per spiegare le forze idrodinamiche, capire che la loro derivazione è importante in quanto è una fusione più elegante di matematica, meccanica e ingegneria.

Quindi, questa sezione riesaminerà in grandi dettagli il papeer di riferimento (Westergaard, 1933).

Quando si conoscono le pressioni dell'acqua, la loro influenza sugli stress può essere calcolata dai metodi applicati ai carichi statici. Il problema che necessita di particolare attenzione è quindi quello dei cambiamenti delle pressioni dell'acqua durante il terremoto.

Notazione

La seguente notazione è adottata:

x, y, z	Coordinate rettangolari x e y come mostrato in Fig. P.3 ; l'asse di x è lungo la superficie indisturbata dell'acqua, è diretto su ruscello ed è perpendicolare al piano a monte della diga; l'asse del y è verticale verso il basso.
t	tempo.
h	profondità di serbatoio.
g	accelerazione dovuta alla gravità. (Eq. P.26)
w	peso dell'acqua per unità di volume, (Eq. P.26)
k	Modulo Bulk di acqua (pressione divisa per riduzione del volume per unità di volume). (Eq. P.26)
ξ e η	spostamenti di una particella d'acqua nelle direzioni x e y. rispettivamente.
ξ_0	valore del ξ a parete a monte della diga.
σ	stress nell'acqua a causa dell'azione dinamite, tensione positiva sa (da combinare con la pressione idrostatica esistente in anticipo).
α	rapporto misura l'intensità del terremoto = massimo orizzontale componente dell'accelerazione della fondazione divisa da g.
T	periodo di vibrazioni orizzontali della fondazione.
r, v	ampiezza e velocità massima delle vibrazioni orizzontali della fondazione.
v_n	velocità del suono in acqua.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

i	lunghezza delle onde di espansione nell'acqua quando il periodo è T.
c_n	valore definito da Equazioni P.33, e P.37 (con $n = 1, 3, 5 \ldots$).
p	massima pressione dell'acqua sulla diga alla profondità, y, a causa dell'azione dinamica.
p_0	valore del p in fondo ($y = h$).
Q	taglio orizzontale prodotto in una diga a gravità retta alla profondità, y, dalle pressioni, p.
Q_0	valore del Q in fondo ($y = h$).
M	momento di curvatura prodotto in una diga a gravità retta alla profondità, y. dalle pressioni, p
M_s	valore del M in fondo ($y = h$).
o, K	coefficenza nelle formule approssimative (Eq. P.45 to P.51).
b, b'	dimensioni indicate in Fig. P.5

Equazioni sul moto dell'acqua

Poiché i movimenti coinvolti sono piccole equazioni relativamente semplici (suono in liquido) possono essere utilizzate, queste equazione possono essere interpretate in termini di teoria dell'elasticità dei solidi come equatori di elasticità senza striature di taglio. Le forze che agiscono su un elemento di volume, $dxdydz$, sono espressi in termini di stress, σ, che deve essere sovrapposto alla pressione idrostatica esistente prima del disturbo.

Utilizzando il principio di D'Alembert per l'equilibrio dinamico per un fluido newtoniano (cioè incompressibile) (Eq. O.3.4) noi abbiamo

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{w}{g}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{P.19}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} = \frac{w}{g}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \tag{P.20}$$

Questa è l'equazione del movimento nella direzione di x e y. Non consideriamo il moto nel z (verticale) direzione dal momento che il movimento è parallelo al xy-plano. La tensione è data da

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

Per l'acqua

$$p = \frac{1}{2}\sigma_{ii} = k\varepsilon_{ii}$$

Quindi, lo stress può essere riscritto come

$$\sigma = k\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \tag{P.21}$$

La mozione è così regolata dalle Equazioni P.19, P.20 e P.21. Un confronto con le equazioni generali di idrodinamica per i fluidi compressi mostra che tali equazione si applicano solo

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

quando ξ e η sono piccole, e quando, inoltre, i rapporti dei prodotti, $\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \sigma}{\partial x}$ e $\frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial \sigma}{\partial y}$ to $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$Sono trascurabili.

Nelle soluzioni fornite in Equazioni P.31, P.32e P.35, questi rapporti saranno trovati per essere dell'ordine dell'ampiezza dei movimenti diviso dalla profondità del serbatoio.

Studio preliminare, supponendo solo movimento orizzontale

Anche se l'acqua che agisce sulla diga può avere uno spostamento verticale, questo studio preliminare ignorerà questo movimento verticale. Con $\eta = 0$, Eq. P.19 e P.21 darà:

$$k\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{w}{g}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{P.22}$$

Questa è l'equazione d'onda (Eq. 36.16) che la soluzione generale è della forma

$$G(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v_s}\right) + g\left(t + \frac{x}{v_s}\right)$$

Come una semplice ipotesi, consideriamo che durante il terremoto la diga si muove in un semplice movimento armonico con periodo, T, e una massima accelerazione, αg, che si verifica quando $t = 0, T, 2T$, ecc. La mozione sarà così data

$$\xi_0 = -\frac{\alpha g T^2}{4\pi^4}\cos\frac{2\pi t}{T} \tag{P.23}$$

Con $\xi_{x=0} = \xi_0$, Equazione P.22 sarà soddisfatto da

$$\xi = -\frac{\alpha g T^2}{4\pi^2}\left[\beta\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v_2}\right) + (1-\beta)\cos\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{v_s}\right)\right] \tag{P.24}$$

dove β è una costante, e

$$v_s = \sqrt{\frac{gk}{w}} \tag{P.25}$$

v_s, è la velocità d'onda nell'acqua; cioè la velocità del suono (a causa della bassa frequenza, queste onde, naturalmente, non sarebbero udibili come sonoro).

$$\begin{aligned} k &= 300,000 \text{ lbs/in}^2 = 21,600 \text{ton/ft}^2 \\ g &= 32.2 \text{ ft/sec}^2 \\ w &= 0.03125 \text{ ton/ft}^3 \end{aligned} \tag{P.26}$$

dare $v_s = 4,718$ - Si'.

Il termine in Equation P.24 contenente il fattore, β, di fronte al cosino rappresenta onde che si allontanano dalla diga, mentre quella contenente il fattore, $1-\beta$, rappresenta onde che si muovono verso la diga.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Equazioni P.24 e P.21 per dare $x = 0$ (cioè, alla faccia a monte della diga):

$$\sigma = (1 - 2\beta)\frac{\alpha T}{2\pi}\sqrt{gkw}\sin\frac{2\pi t}{T} \tag{P.27}$$

Quando $\beta > 1/2$, le onde che si allontanano (dalla diga) predominano su coloro che si muovono verso di essa.

Equazione P.27 mostra che la pressione massima sulla diga, cioè $(-\sigma)_{max}$ si verifica a volte $t = \frac{T}{4}, \frac{5T}{4}, \frac{9T}{4}, \ldots\ldots$e è uguale a:

$$p = (2\beta - 1)\frac{\alpha T}{2\pi}\sqrt{gkw} \tag{P.28}$$

Va notato che la più grande accelerazione della diga, e, di conseguenza, le forze inerziali maggiori a causa della massa commovente della dighe, si verificano quando $t = 0, T, 2T, \ldots$ Le sollecitazioni nella diga a causa delle pressioni, p, e le forze inerziali, quindi, dovrebbero essere combinate nel modo di due correnti alternanti con una differenza di fase di un quarto del periodo.

Dall'equazione P.23, la velocità massima della diga è:

$$v = \frac{\alpha g T}{2\pi} \tag{P.29}$$

Sostituire l'Equazione P.25 P.29in P.28 otteniamo il valore della pressione

$$p = (2\beta - 1)\frac{v}{v_s}k \tag{P.30}$$

Con $\beta = 1$, cioè quando le onde si allontanano dalla diga solo, Equazione P.28 (o, in alternativa Equazione P.30), con le costanti numeriche date in Equazioni P.26e con $\alpha = 0.1$ e $T = \frac{4}{3}$ sec., dà $p = 3.13$ tonnellate/ft^2. Ma poiché l'acqua può "escape' verticalmente le pressioni sono in realtà molto meno, e non vengono distribuite uniformemente attraverso la profondità del serbatoio. Una soluzione corretta dovrebbe produrre zero pressioni nell'acqua in cima.

Soluzione Considerando i movimenti orizzontali e verticali dell'acqua

Se permettiamo all'acqua di muoversi anche verticalmente, dovremmo ancora soddisfare le Equazioni P.19 P.20 e P.21 ma sottoposti alle seguenti condizioni di confine:

1. $\sigma = 0$, at $y = 0$;
2. $\eta = 0$, at $y = h$;
3. $\xi = -\frac{\alpha g T^2}{4\pi^2}\cos\frac{2\pi t}{T}$, at $x = 0$;
4. σ converge verso 0 quando x diventa grande.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Dalla prima condizione, per piccoli valori di η non fa alcuna differenza apprezzabile se si specifica $\sigma = 0$ alla superficie indisturbata o disturbata.

Una soluzione che soddisfa le tre equazioni e la condizione limite è una basata sulla serie Fourrier

$$\xi = -\frac{\alpha g T^2}{\pi^2} \cos\frac{2\pi t}{T} \sum_{1,3,5,\ldots}^{n} \frac{1}{n} e^{-q_n} \sin\frac{n\pi y}{2h} \tag{P.31}$$

$$\eta = \frac{\alpha q T^2}{\tau^3} \cos\frac{2\pi t}{T} \sum_{1,3,0_n..}^{n} \frac{1}{n c_n} e^{-q_n} \cos\frac{n\pi y}{2h} \tag{P.32}$$

dove

$$c_n = \sqrt{1 - \frac{16 w h^2}{n^2 g k T^2}} \tag{P.33}$$

e

$$q_n = \frac{n\pi c_n x}{2h}$$

Equazione P.33 dà,

$$\frac{1}{c_n} - c_n = \frac{16 w h^2}{n^2 c_n g k T^2} \tag{P.34}$$

Equazioni P.21, P.31, P.32e P.34 darà

$$\sigma = -\frac{8\alpha w h}{\pi^2} \cos\frac{2\pi t}{T} \sum_{1,3,5,\ldots}^{n} \frac{1}{n^2 c_n} e^{-q_n} \sin\frac{n\pi y}{2h} \tag{P.35}$$

Si può facilmente verificare che Equazioni P.31, P.32e P.35 soddisfare le equazioni P.19 e P.20 in tutti i punti differenziando rispetto a t, xe y. Equazione P.21 è soddisfatto perché è stato utilizzato nel derivare Equation P.35 da Equazioni P.31 e P.32. Inoltre, l'ispezione delle espressioni per η e σ mostrare prontamente che le condizioni 1, 2 e 4 sono soddisfatte. $x = 0$, è soddisfatto, si deve confrontare Equazione P.31 per $x = 0$ con l'espressione per $\frac{\pi}{4}$, in termini di una serie Fourier quando $0 < u < \pi$,

$$\frac{\pi}{4} = \sin u + \frac{1}{3}\sin 3u + \frac{1}{5}\sin 5u + \ldots$$

Nella presente applicazione, $u = \frac{\pi y}{2h}$.

Pertanto, tutte le condizioni specificate sono soddisfatte. L'applicabilità delle equazioni dipende tuttavia da una condizione aggiuntiva: gli spostamenti definiti dalla soluzione, così come i loro derivati rispetto a x e y Bisogna quindi considerare le possibilità di grandi spostamenti, identificando una possibilità con risonanza nell'acqua; un altro sarà indagato determinando la forma dell'onda costituita dalla superficie dell'acqua e dai movimenti verticali lungo il volto a monte della diga.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Nel suo giornale, Westergaard, 1933 indirizza la possibilità di risonanza nell'acqua e conclude che, poiché le principali vibrazioni del terremoto non sono suscettibili di avere un periodo meno di 1 sec., questa forma di risonanza può essere ignorata.

Pressione sulla diga

Dall'equazione P.35, la pressione massima dell'acqua ($p = -\sigma$ per $x = 0$), si verifica quando $t = 0, T, 2T, \ldots$. Così,

$$p = \frac{8\alpha w h}{\pi^2} \sum_{1,3,5,\ldots}^{n} \frac{1}{n^2 c_n} \sin \frac{n\pi y}{2h} \tag{P.36}$$

dove, come prima, secondo l'Equazione P.35, e con le costanti numeriche date in Equazioni P.26:

$$c_n = \sqrt{1 - \frac{16 w h^2}{n^2 g k T^2}} = \sqrt{1 - \frac{0.71889}{n^2} \left(\frac{h \text{ sec.}}{1000 \text{ T ft}} \right)^2}. \tag{P.37}$$

Il valore più grande della pressione, p, si verifica nella parte inferiore del serbatoio ($y = h$)e lo è,

$$p_0 = \frac{8\alpha w h}{\pi^2} \sum_{1,3,5,\ldots}^{n} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2 c_n} \tag{P.38}$$

Fig. P.3 mostra la pressione p profilo di distribuzione. Dall'equazione P.38, il derivato, $\frac{dp}{dy}$

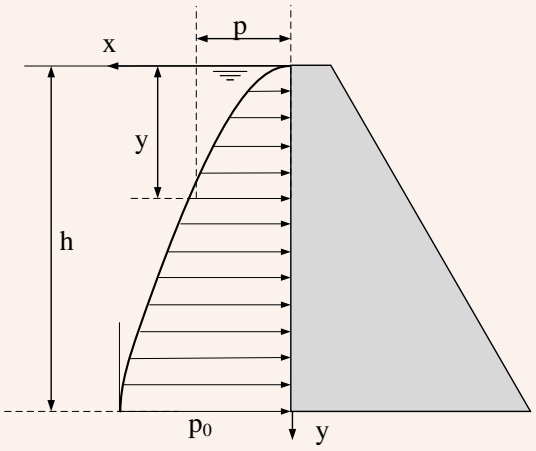


Figura P.3: Pressione sulla diga a causa dell'azione dinamica dell'acqua (Westergaard, 1933)

è infinito quando $y = 0$e zero quando $y = h$; cioè la curva per p ha un tangente orizzontale in alto e un tangenziale verticale sul fondo.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Articoli 1 e 2 della tabella P.1 contengono valori numerici del rapporto, $\frac{p_0}{\alpha h}$, e p_0, calcolato da equazioni P.37 e P.38. Il rapporto, $\frac{p_0}{\alpha h}$, varia solo lentamente con h. $h = 600$ ft, $T = \frac{4}{3}$ sec. (e per $h = 200$ ft, $T = \frac{4}{9}$ sec.), la pressione alla profondità, $y = \frac{h}{2}$, si è trovato $p = 0.814 p_0$.

Tabella P.1: Risultati numerici corrispondenti al periodo, $T = \frac{4}{3}$ secondi

Voce	Profondità del serbatoio, h	ft	Piccolo	200	600	800
1	Coefficiente di pressione, $\frac{p_0}{sh}$	ton/ft^3	0.023202	0.023407	0.025254	0,027257
2	Pressione al fondo, p_0, quando $a = 0,1$	ton/ft^2	⋯	0.468	1.515	2.181
3	Coefficiente di taglio	ton/ft^3	0.016961	0.017094	0.018286	0.019576
4	Taglio al fondo, Q_0, quando $\alpha = 0.1$	ton/ft	...	68.4	658.3	1253
5	Coefficiente di momento, $\frac{M_0}{\alpha h^3}$	ton/ft^3	0.0068089	0.0068576	0.0072947	0.0077666
6	Momento al fondo, M_0, quando $a = 0,1$	ft-ton	...	5486	157600	397600
7	$C = \frac{15 M_0}{4\alpha m^2}$	ton/ft^3	0.025533	0.025716	0.027355	0.029125
8	$K = C\sqrt{1 - 0.72\left(\frac{h \text{ sec.}}{1000 \text{T ft.}}\right)^2}$	ton/ft^3	0.025533	0.025507	0.025282	0.025068
	Coefficienti approssimativi di Eq. P.45, P.46, P.47, P.51e P.53					
9	$\frac{p_0}{a^h}$	$\frac{\text{ton}}{ft^3}$	0.0255	0.0257	0.0276	0.0296
10	$\frac{Q_0}{ah^2}$	$\frac{\text{ton}}{ft^3}$	0.0170	0.0171	0.0184	0.0198
11	$\frac{M_0}{ah^3}$	$\frac{\text{ton}}{f^3}$	0.00680	0.00686	0.00736	0.00790

L'accelerazione orizzontale massima è uguale a αg. Quando T varia, i coefficienti dichiarati rimangono costanti se h cambia nello stesso rapporto; ad esempio, i coefficienti indicati per $h = 800$ft., $T = \frac{4}{3}$ sec., si applicano ai casi $h = 600$ft., $T = 1$ sec., e $h = 200$ft., $T = \frac{1}{3}$ sec.; i coefficienti indicati per $h = 200$ft, $T = \frac{4}{3}$ sec., si applicano al caso $h = 600$ft, $T = 4$sec.

Guarnizione e Momenti

Può essere particolarmente utile esprimere le forze di taglio orizzontali e i momenti di flessione prodotti dai carichi, p, in varie sezioni orizzontali della diga agisce come un cantilever (diga gravità). come forza per unità di larghezza del cantilever, ad esempio, in tonnellate a piedi e i momenti sono indicati come momento per unità della larghezza, per esempio, nei toni dei piedi per piede (o semplicemente in tonnellate). Q, alla profondità, ye Q_0 in fondo, he i momenti, M, alla profondità, ye M_0, a profondità, h, sono ottenuti da p in Eq. P.36 dall'integrazione

$$Q = \int_0^y p\,dy; \quad Q_0 = \int_0^h p\,dy; \quad M = \int_0^y Q\,dy; \quad M_0 = \int_0^h Q\,dy$$

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Definizione

$$q = \sum_{1,3,5,\ldots}^{n} \frac{1}{n^2 c_n} \tag{P.39}$$

otteniamo:

$$Q = \frac{16\alpha w h}{\pi^3}\left(q - \sum_{1,3,5,\ldots}^{n} \frac{1}{n^2 c_n}\cos\frac{n\pi y}{2h}\right) \tag{P.40}$$

$$Q_0 = \frac{16}{\pi^3}\alpha v h^2 q \tag{P.41}$$

$$M = \alpha w h^3\left(\frac{16q}{\pi^2}\frac{y}{h} - \frac{32}{\pi^4}\sum_{1,3,5,\ldots}^{n} \frac{1}{n^4 c_n}\sin\frac{n\pi y}{2h}\right) \tag{P.42}$$

$$M_0 = \alpha w h^3\left(\frac{16q}{\pi^2} - \frac{32}{\pi^4}\sum_{1,3,5,\ldots}^{n} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{3}}}{n^4 c_n}\right) \tag{P.43}$$

(P.44)

Valori numerici dei rapporti, $\frac{Q_0}{\alpha h^2}$ e $\frac{M_0}{\alpha h^3}$, e Q_0 e M_{00} calcolato da Equazioni P.39, P.41e P.43, sono anche dati nella tabella P.1 (Esempi, 3, 4, 5 e 6).

Derivazione delle formule approssimative

Le computazioni possono essere semplificate sostituendo il diagramma delle pressioni in Fig. P.3 di un quadrante di un'ellisse (vedi Equazione P.54 derivato sotto); l'ellisse diventa un cerchio quando disegnato su una certa scala particolare per p. Una rappresentazione approssimativa più soddisfacente è tuttavia ottenuta sostituendo la curva in Fig. P.3 da una parabola con asse verticale, come mostrato in Fig. P.4, anche se questa parabola ha un tangente che scivola in basso. La parabola porta alle seguenti formule semplici, in cui, C è un coefficiente a seconda del rapporto di h to T:

$$p = C\alpha\sqrt{hy}; \qquad p_0 = C\alpha h \tag{P.45}$$

$$Q = \frac{2}{3}C\alpha y\sqrt{hy}; \qquad Q_0 = \frac{2}{3}C\alpha h^2 \tag{P.46}$$

$$M = \frac{4}{15}C_{\alpha y^2}\sqrt{hy}; \qquad M_0 = \frac{4}{15}C_\alpha h^2 \tag{P.47}$$

Il coefficiente, C, potrebbe essere determinato in modo che p_0 avrà il valore calcolato dall'equazione P.38, ma si ottiene una migliore rappresentazione del diagramma delle pressioni nel suo complesso, determinando C che il momento, M_0, avrà il valore calcolato dall'equazione P.43. In termini di un noto M_0, si trova allora,

$$C = \frac{15M_0}{4\alpha h^2}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

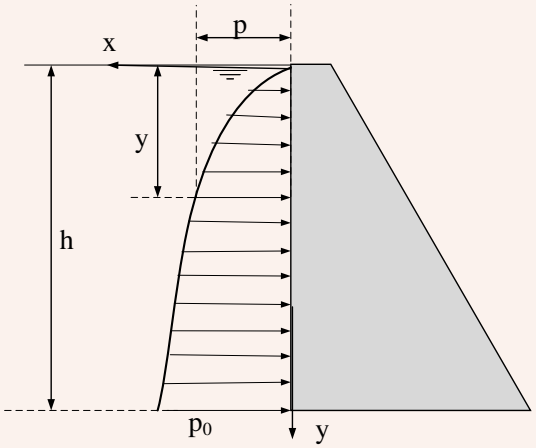


Figura P.4: Distribuzione approssimativa delle pressioni (Westergaard, 1933)

Tabella P.1 (Item 7) mostra alcuni valori numerici di C. Si nota che la dimensione C è forza per unità di volume; C moltiplicato per ah dà la pressione come forza per unità di area.

Il coefficiente, C, varia lentamente all'interno della gamma considerata. Per stime rapide si può benissimo assumere un valore costante di C; per esempio, con $T \geq \frac{4}{3}$ Seguendo:

$$h < 310 \text{ ft} \qquad C = 0.026 \frac{\text{ton}}{\text{ft}^3} \tag{P.48}$$

$$310 \text{ ft} < h < 540 \text{ ft} \qquad C = 0.027 \frac{\text{ton}}{\text{ft}^3} \tag{P.49}$$

$$540 \text{ ft} < h < 680 \text{ ft} \qquad C = 0.028 \frac{\text{ton}}{\text{ft}^3} \tag{P.50}$$

Questi sono valori discreti di C. Sarebbe meglio avere una funzione continua per esprimere C che si applicherà approssimativamente all'interno dell'intera gamma. La principale fonte di variazione C è la costante, c_n, definito dall'Equazione P.37 con $n = 1$; c_1 appare nel denominatore del primo termine di ciascuna delle somme in Equazioni P.39 e P.43. È ragionevole, quindi, provare una formula approssimativa del tipo, $C = \frac{K}{c_1}$, in cui K è una costante. La formula sarebbe

$$C = \frac{K}{\sqrt{1 - 0.72 \left(\frac{h}{1000T}\right)^2}}$$

I valori di K nella tabella 2 (articolo 8) sono stati calcolati da questa formula utilizzando i valori di C Insistere su questi risultati mostra che si può adottare il valore, $K = 0.0255$ -

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Ton-ft^{-3}. Si conclude che il coefficiente, C, in Equazioni P.45, P.46e P.47, è satisfactorily data dalla formula

$$C = \frac{0.0255 \text{ ton-ft}^{-3}}{\sqrt{1 - 0.72\left(\frac{h}{1000\text{T}}\right)^2}} \tag{P.51}$$

Formula approssimativa per le pressioni dell'acqua

La seguente formula approssimativa per le pressioni massime dell'acqua, da aggiungere alle pressioni idrostatio esistenti prima del terremoto, rappresenta la principale conclusione di questo studio; si ottiene direttamente dalle Equazioni P.45 e P.51:

$$p = C\alpha\sqrt{hy} \tag{P.52}$$

$$= \frac{0.0255 \text{ ton-ft}^{-3}}{\sqrt{1 - 0.72\left(\frac{h}{1000T}\right)^2}}\alpha\sqrt{hy} \tag{P.53}$$

Per calcoli rapidi, tuttavia, Equazioni P.45, P.48, P.49e P.50 possono essere utilizzati. Valori dei coefficienti, $\frac{p_0}{\alpha h}$, $\frac{Q_0}{\alpha h^2}$e $\frac{M_0}{\alpha h^2}$, ottenuto mediante l'impiego dell'equazione P.53, sono indicati come articoli 9, 10 e 11 nella tabella 2. Un confronto con gli articoli 1,3 e 5, rispettivamente, mostra che l'approssimazione è soddisfacente.

Utilizzando un quadrante di ellisse (come suggerito sopra) invece della parabola per rappresentare le pressioni, si ottiene la seguente formula approssimativa da un processo simile a quello che porta all'Equazione P.53:

$$p = \frac{0.0204 \text{ ton ft}^{-3}\alpha\sqrt{y(2h - y)}}{\sqrt{1 - 0.72\left(\frac{h}{1000T}\right)^2}} \tag{P.54}$$

Questa formula dà esattamente gli stessi valori di M_0 come l'equazione P.53, ma dà valori troppo piccoli p_0 e della forza totale, Q_0. Equazione P.53 dà valori leggermente troppo grandi p_0 e Q_0, ed è preferibile.

Si nota che le pressioni, p, si verifica quando $t = 0, T, 2T$, ecc., cioè (vedi Condizione (3)), quando la diga (durante le vibrazioni) è in posizione estrema verso il basso flusso. Le sollecitazioni dovute a queste pressioni dell'acqua, quindi, devono essere aggiunte alle tensioni massime dovute alle accelerazioni della massa della diga.

Quando, durante la vibrazione, la diga è nella posizione estrema in alto flusso, le pressioni, p, sono invertite e diventano tensioni; queste tensioni, come le pressioni nella posizione estrema del flusso di discesa, vanno combinate con le pressioni idrostatiche esistenti in anticipo. L'ispezione dei valori numerici nella tabella 2 mostra che quando la pressione dell'atmosfera è inclusa, non c'è alcuna prospettiva di uno stress risultante nell'acqua diventando una tensione o una compressione molto piccola.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Applicabilità delle formule a casi diversi da quelli assunti

Le formule sono state derivate dall'ipotesi che non vi sia alcun trabocco, in caso di sovraflusso su una fuoriuscita si suggerisce che l'Equazione P.53 essere utilizzato con le profondità, h e y, misurato dalla superficie piana del serbatoio ad una certa distanza dietro la diga. Il diagramma parabolico delle pressioni viene quindi utilizzato come prima, solo il piano è tagliato fuori.

Mentre le formule sono state derivate dall'ipotesi che il volto a monte sia un piano verticale, esse forniranno un'indicazione delle pressioni che possono essere previste in altri casi, ad esempio, nella facilità di diga dell'arco.

massa aggiunta

Per visualizzare l'azione dinamica dell'acqua sulla diga, si può pensare a un certo corpo d'acqua come muoversi con la diga mentre il resto del serbatoio rimane inattivo. A questo scopo il corpo dell'acqua che si muove con la diga può essere immaginato come congelato in strati orizzontali di massa aggiunta (ice in (Westergaard, 1933)), mentre il resto del serbatoio è svuotato.

Semplicemente messo, stiamo sostituendo le forze idrodinamiche da forze inerziali causate dalla massa aggiunta.

La forma del corpo dell'acqua o la massa aggiunta così considerata di muoversi con la diga deve essere determinata in modo che le forze inerziali diventino uguali alle pressioni esercitate dall'acqua a causa dell'azione dinamica.

La massa aggiunta può essere applicata in uno dei due modi

Aumentare la larghezza b come originariamente formulato da Westergaard, 1933. b è la dimensione trasversale della massa aggiunta nella direzione di x in fondo, y. Poi, la massa corrispondente per unità di area del volto a monte della diga diventa $\frac{bw}{g}$, e la forza inerzia corrispondente quando l'accelerazione è αg diventa $\frac{bw}{g} \times \alpha g = \alpha w b$, che deve essere uguale a p, or

$$b = \frac{p}{\alpha w}$$

La forma di questa massa aggiunta (o ghiaccio) è la stessa del diagramma per p quando le pressioni sono deposte a una scala corretta.

Sarà sufficiente per determinare la finalità attuale b di una delle espressioni approssimative per p; per esempio (Equazioni di conformità) P.45, P.48, P.49e P.50),

$$p = 0.02734 \text{ ton-ft}^{-3} \alpha \sqrt{hy}$$

che dà, con $w = 0.03125$ - Ton-ft^{-3},

$$b = \frac{7}{8}\sqrt{hy} \tag{P.55}$$

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.
COPIA DI REVISIONE

Fig. P.5 mostra il corpo dell'acqua o del ghiaccio definito dall'Equazione P.55. Invece del corpo dell'acqua, si può preferire considerare un corpo equivalente di cemento, avendo la stessa massa. Se il calcestruzzo pesa 144 lb/ft^3, la dimensione corrispondente b diventa,

$$b' = 0.38\sqrt{hy}$$

La curva tratteggiata in Fig. P.5 indica questo corpo di cemento.

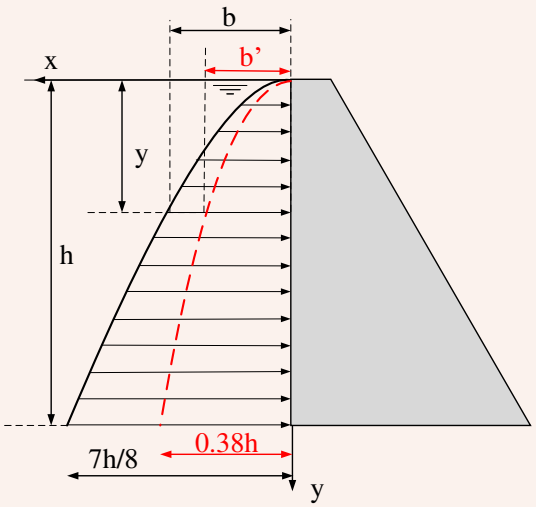


Figura P.5: Corpo di acqua che può essere considerato per muoversi con diga. (Westergaard, 1933)

Messa aggiuntiva è un approccio più conveniente nel contesto di un'analisi degli elementi finiti, che comporterà l'aggiunta di una massa per area unitaria della faccia a monte della diga.

$$\gamma_{lump}(y) = \frac{p(y)}{\alpha g} \tag{P.56}$$

La pressione idrodinamica è di nuovo data dall'Equazione P.53

$$p(y) = C\alpha\sqrt{hy}$$

dove C è stato determinato in Eq. P.51e può essere riscritto (Da Eq. P.37) as

$$C = \frac{K}{\sqrt{1 - \frac{16\rho_w H_w^2}{gkT^2}}} \tag{P.57}$$

COPIA DI REVISIONE

Combinare le equazioni P.56-P.57 la relazione finale per determinare la massa lumped per area unitaria del fronte diga a monte a causa dell'azione dinamica dell'acqua sulla diga sarà

$$\gamma_{lump}(y) = \frac{K\sqrt{hy}}{g\sqrt{1 - \frac{16\rho_w h^2}{gkT^2}}} \tag{P.58}$$

Va notato che nel suo documento originale, Westergaard ha attraversato una semplificazione aggiuntiva dell'equazione precedente (rimuovere la dipendenza da T) cedere:

$$\gamma_{lump}(y) = \frac{7}{8}\rho_w\sqrt{hy}$$

che è più spesso citato nella letteratura, ma è meno esatto dell'Equazione P.58.

Figura P.6 mostra le differenze tra le soluzioni approssimative ed esatte basate sulle equazioni sopra indicate per un modello di diga ipotetica in cui il livello dell'acqua, h, è di 100 m.

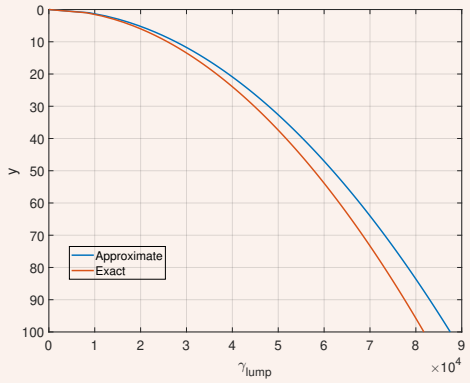


Figura P.6: Massa lussata per area unitaria rispetto all'altezza

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Appendice Q

Regione Fiducia e Metodi Levenberg-Marquardt

Dalla tesi di dottorato «Probabilistic Nonlinear Analysis of Concrete Dams Suffering from AAR» di Mahdavi, 2023.

Abstract

Questa appendice presenta le basi matematiche e gli algoritmi pratici per i metodi di ottimizzazione della regione fiduciaria e Levenberg-Marquardt utilizzati nell'identificazione dei parametri e nei problemi non lineari minimi-quares. A partire da espansioni serie Taylor e condizioni necessarie e sufficienti per l'ottimalità, l'appendice sviluppa la teoria dell'ottimizzazione basata su gradienti, il metodo Gauss-Newton, e la strategia di smorzamento adattivo di Levenberg-Marquardt che bilancia la convergenza veloce con robustezza in terreno difficile. L'appendice fornisce il quadro teorico e computazionale completo, che si riferisce in tutte le sezioni di analisi strutturale e di calibrazione dei parametri, compresi i criteri di convergenza, le strategie di scalamento e le approssimazioni locali per l'incertezza stima dei parametri.

Q.1 Regione della fiducia 3163
Q.2 Algoritmo 3167
Q.3 Formulazione in MATLAB® 3167
Q.4 Visualizzazione in tempo reale . . . 3170

Per risolvere i problemi di minimizzazione in funzioni lisce, il teorema Taylor viene generalmente utilizzato. $f : R^n \to R$ è continuamente differenziabile e che $p \in R^n$ allora abbiamo (Nocedal e Wright, 2006):

$$f(x+p) = f(x) + \nabla f(x+tp)^T p \tag{Q.1}$$

per alcuni $t \in (0,1)$. Inoltre, se f è due volte continuamente differenziabile, abbiamo:

$$\nabla f(x+p) = \nabla f(x) + \int_0^1 \nabla^2 f(x+tp) p dt \tag{Q.2}$$

COPIA DI REVISIONE

e che

$$f(x+p) = f(x) + \nabla f(x)^T p + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(x+tp) p \tag{Q.3}$$

per alcuni $t \in (0,1)$. condizioni necessarie per l'ottimalità sono derivate da presumendo che x^* è un minimizzatore locale e quindi dimostrare i fatti circa $\nabla f(x^*)$ e $\nabla^2 f(x^*)$.

2 Condizioni:

Condizioni necessarie per il primo ordine: If x^* è un minimizzatore locale e f è continuamente differenziabile in e aperto quartiere di x^*Allora $\nabla f(x^*) = 0$.

Condizioni Necessarie di Seconda Ordina: If x^* è un minimizzatore locale di f e $\nabla^2 f$ esiste ed è continuo in un aperto neighbothood di x^*Allora $\nabla f(x^*) = 0$ e $\nabla^2 f(x^*)$ è semi-definito positivo.

Condizioni sufficienti del secondo ordine If $\nabla^2 f$ è continuo in un quartiere aperto x^* e che $\nabla f(x^*) = 0$ e $\nabla^2 f(x^*)$ è positivo. Poi x^* è un rigoroso minimizzatore locale di f.

Q.1 Regione della fiducia

3 Gli algoritmi di ottimizzazione seguono solitamente una procedura tipica di partenza da un primo punto di ipotesi e procedere verso i successivi iterates fino a quando non è raggiunto ad una soluzione con precisione accettabile o non c'è ulteriore progresso. Tuttavia, la differenza di vari algoritmi di ottimizzazione è nella strategia di passare da un iterato al prossimo.(Nocedal e Wright, 2006):

- Robustezza: Dovrebbero svolgere bene una vasta gamma di problemi nella loro classe, per tutti i valori ragionevoli del punto di partenza.
- Efficienza: Non dovrebbero richiedere un tempo eccessivo di computer o archiviazione.
- Precisione: Dovrebbero essere in grado di identificare una soluzione con precisione, senza essere eccessivamente sensibili agli errori nei dati o agli errori arrotondamento aritmetici che si verificano quando l'algoritmo viene implementato su un computer.

Ci sono fondamentalmente due strategia per trovare il prossimo iterate in algoritmi di ottimizzazione: 1. Line Search 2. Trust Region. Nel metodo di ricerca linea fondamentalmente una direzione è determinata dall'algoritmo e il punto successivo si trova in quella direzione tale che la funzione raggiunge un valore inferiore. La strategia della regione di fiducia utilizza una regione intorno al punto attuale in cui accettiamo il ravvicinamento quadratico della funzione.

4 Nella strategia della regione di fiducia, una funzione modello m_k è costruito vicino al punto corrente x_k che approssima il comportamento effettivo della funzione intorno a quel

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

punto. Tuttavia, questa funzione potrebbe non essere in grado di approssimare la funzione principale negli altri punti dalla ricerca di un valore minimo di m_k è limitato a una regione definita intorno x_k. Il passaggio p del candidato è determinato risolvendo la seguente equazione:

$$\min m_k(x_k + p) \quad s.t. \left\|p\right\| \leq \Delta_k \tag{Q.4}$$

5 Se la regione di fiducia è troppo grande, la soluzione non comporterebbe una riduzione sufficiente della funzione e quindi il raggio della regione dovrebbe essere ridotto e il problema deve essere risolto nuovamente. $\left\|p\right\|_2 \leq \Delta$dove $\Delta \geq 0$ è il raggio di fiducia-regione.

6 Il modello m_k è solitamente definito come:

$$m_k(x_k + p) = f_k + p^T \nabla f_k + \frac{1}{2} p^T B_k p \tag{Q.5}$$

Dove? f_k e ∇f_k sono la funzione e i valori di gradiente calcolati al punto x_k. La matrice B_k è o il Hessian$\nabla^2 f_k$ o un po' di approssimazione.

7 se presumiamo che m_k in ogni iterato è quadratico basato sull'espansione della serie taylor di f noi avremo:

$$f(x_k + p) = f_k + g_k^T p + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(x_k + tp) p \tag{Q.6}$$

dove $f_k = f(x_k)$ e $g_k = \nabla f(x_k)$ e t è un po 'di scalare nell'intervallo (0,1). Assumendo B_k essere pari al vero Hessian $\nabla^2 f(x_k)$, avremo la regione fiduciaria metodo Newton in cui stiamo cercando una soluzione per sottoproblema:

$$\min m_k(p) = f_k + g_k^T p + \frac{1}{2} p^T B_k p \quad s.t. \left\|p\right\| \leq \Delta_k \tag{Q.7}$$

8 Un passo importante nel metodo della regione di fiducia è quello di determinare il raggio della regione trust ad ogni iterazione rispetto a questo scopo un rapporto è definito come:

$$\rho_k = \frac{f(x_k) - f(x_k + p_k)}{m_k(0) - m_k(p_k)} \tag{Q.8}$$

9 Se la nuova valutazione della funzione è maggiore del valore attuale, poiché il denominatore è sempre positivo nell'equazione sopra indicata, ρ_k è negativo, e quindi il passo non ha portato all'aumento della funzione piuttosto che diminuirla, la fase non è accettabile. ρ_k è vicino a 1, mostra che il m_k in questo passaggio è sufficientemente vicino $f(x_k)$ Tuttavia, se è vicino a zero o negativo il raggio della regione dovrebbe essere ridotto al successivo iterazione. Figura Q.1 mostra 4 iterazioni di un metodo della regione fiducia con 2 variabili, in questa cifra i punti blu e rossi sono indicativi del punto corrente e la prossima stima

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

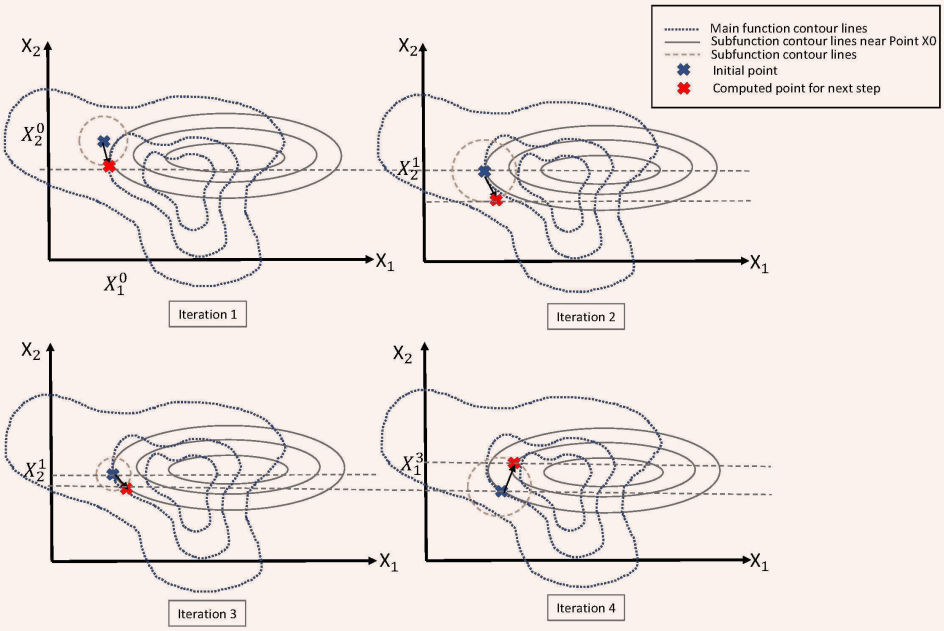


Figura Q.1: Algoritmo della regione di fiducia

prurito, rispettivamente. Come dichiarato la regione di fiducia si espande solo se il punto successivo indovinare fornire una riduzione sufficiente della funzione.

10 Per il problema in questo studio, la funzione oggettiva corrispondente, matrice giacobiana, penitenza e assia (Dennis e Schnabel, 1983) sono poi dati da:

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{u}-\mathbf{u}')^T(\mathbf{u}-\mathbf{u}') = \mathbf{r}^T\cdot\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{m}(u_i-u_i')^2 \tag{Q.9}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T}\left[(\mathbf{u}-\mathbf{u}')\right] = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{x}^T} = -\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{x}^T} = -\mathbf{L} \tag{Q.10}$$

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T}\left[(\mathbf{u}-\mathbf{u}')^T(\mathbf{u}-\mathbf{u}')\right] = 2\mathbf{J}^T\mathbf{r} \tag{Q.11}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^T\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\nabla f\left(\mathbf{x}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left[2\mathbf{J}^T\mathbf{r}\right] = 2\mathbf{J}^T\mathbf{J} + 2\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}^T\partial \mathbf{x}}\mathbf{r} \tag{Q.12}$$

11 Vicino al minimo, $\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}^T\partial \mathbf{x}}\mathbf{r} \to 0$; abbiamo quindi $\mathbf{H}(\mathbf{x}) \simeq 2\mathbf{J}^T\mathbf{J}$. L'utilizzo del metodo Levenberg–Marquardt (Dennis e Schnabel, 1983) consente di ricavare $\mathbf{x}_{k+1}$ da:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \left[\varepsilon_k\mathbf{I} + \mathbf{H}\left(\mathbf{x}_k\right)\right]^{-1}\nabla f\left(\mathbf{x}_k\right) \tag{Q.13}$$

dove ε_k è tale che tutti i valori di $[\varepsilon_k\mathbf{I} + \mathbf{H}(\mathbf{x}_k)]$ Si tratta di un'evoluzione positiva, che può essere introdotta in definitiva uno sviluppo del metodo Levenberg-Marquardt, noto

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

come metodo della regione fiduciaria. $m_k(\mathbf{x})$, all'interno di una regione fiduciaria dove l'approssimazione quadratica (come ottenuta da una serie Taylor) è considerata affidabile:

$$m_k\left(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k\right) = f\left(\mathbf{x}_k\right) + \nabla f\left(\mathbf{x}_k\right)^T \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\right)^T \mathbf{H}\left(\mathbf{x}_k\right)\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\right) \tag{Q.14}$$

12 La regione di fiducia è definita come segue:

$$\mathbf{\Omega}_k = \left\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| \leq \Delta_k\right\}; \Delta_k > 0 \tag{Q.15}$$

Il problema di ottimizzazione diventa:

$$\min_{\mathbf{x}} \left\{m_k\left(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k\right) : \mathbf{x}_k \in \Omega_k\right\} \tag{Q.16}$$

13 La condizione necessaria per aggiornare la regione è data da:

$$\rho_k = \frac{f\left(\mathbf{x}_k\right) - f\left(\mathbf{x}_{k+1}\right)}{f\left(\mathbf{x}_k\right) - m_k\left(\mathbf{x}_{k+1}\right)} \tag{Q.17}$$

14 L'aggiornamento del punto di partenza è lo stesso che illustrato per il metodo Levenberg-Marquardt. Con questo metodo, siamo anche in grado di definire i limiti superiori e inferiori per questi parametri come:

$$\min_{\mathbf{x}} \left\{m_k\left(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k\right) : \mathbf{x}_k \in \Omega_k\right\}; \mathbf{lb} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{ub} \tag{Q.18}$$

15 Il punto di partenza del processo di identificazione dei parametri può essere determinato da test di laboratorio (situazione iniziale della stima $\varepsilon^{\infty}|_{T=T_0}$, $\tau_L(T_0)$ e $\tau_C(T_0)$). In alternativa, il montaggio a curva dello spostamento della cresta diga:

$$u_{irr}^{AAR}(t, \theta) = \frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau_c(\theta)}}}{1 + e^{-\frac{(t-\tau_l(\theta))}{\tau_c(\theta)}}} u_{irr}^{AAR,\infty} \tag{Q.19}$$

(in cui) u_{irr}^{AAR} e $u_{irr}^{AAR,\infty}$ sono l'inversibile, il tempo e la temperatura-dipendente spostamento e lo spostamento finale dovuto AAR rispettivamente) fornisce una stima conservatrice per i tempi ma non per $\varepsilon^{\infty}|_{T=T_0}$. I parametri di destinazione devono essere normalizzati in modo che tutti i valori iniziali abbiano lo stesso ordine di grandezza, cioè: a) la variazione iniziale deve essere abbastanza grande da produrre una variazione dei risultati calcolati (grandi valori normalizzati possono portare ad un arresto immediato del processo di identificazione); e b) la variazione finale dei parametri deve essere abbastanza piccola da consentire una piccola regolazione finale dei valori identificati senza grandi oscillazioni intorno alla soluzione finale (un parametro eccessivamente piccolo normalizzato può portare a un grande risultato finale oscillazione).

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

16 Una funzione di peso può essere introdotta per assegnare importanza all'ultimo campo dati, che contiene tipicamente un valore assoluto importante ed è quindi più rappresentativa dell'effetto irreversibile dell'espansione AAR rispetto all'effetto dei carichi normali. Si noti che questa identificazione del sistema non richiede un'analisi termica e, da un punto di vista pratico, comporta una semplice modifica di tre variabili incluse nel file di input dell'analisi dello stress.

Q.2 Algoritmo

17 Given $\hat{\Delta} > 0$, $\Delta_0 \in (0, \hat{\Delta})$, and $\eta \in [0, \frac{1}{4})$: ((Nocedal e Wright, 2006))
for $k = 0, 1, 2, \ldots$
evaluate ρ_k
if $\rho_k < \frac{1}{4}$
$\Delta_{k+1} = \frac{1}{4}\Delta_k$
else
if $\rho_k > \frac{3}{4}$ and $\|p_k\| = \Delta_k$
$\Delta_{k+1} = \min(2\Delta_k, \hat{\Delta})$
else
$\Delta_{k+1} = \Delta_k$;
if $\rho_k > \eta$
$x_{k+1} = x_k + p_k$
else
$x_{k+1} = x_k$;
end(for)

Q.3 Formulazione in MATLAB®

18 Il processo è implementato in MATLAB®mediante il diagramma di flusso mostrato nella Fig. Q.2. Il codice è costruito essenzialmente attorno alla funzione che minimizza il quadrato della norma euclidea di $\mathbf{f}(\mathbf{x})$

$$\min\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_2^2 = \min\left(f_1(\mathbf{x})^2 + f_2(\mathbf{x})^2 + \cdots + f_n(\mathbf{x})^2\right)$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dove

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_2 = \sqrt{f_1(\mathbf{x})^2 + f_2(\mathbf{x})^2 \cdots f_n(\mathbf{x})^2}$$

$$\text{Residual} \qquad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{fea}}(t) - \mathbf{x}_{\text{meas}}(t)$$

dove $\mathbf{x}_{\text{fea}}(t)$ è il vettore di spostamento (a un punto selezionato) calcolato dall'analisi degli elementi finiti, e $\mathbf{x}_{\text{meas}}(t)$ è il vettore corrispondente dei valori misurati, entrambi sono in termini di tempo.

19 Si tratta di un'operazione piuttosto semplice in MATLAB®[1]

```
[x,resnorm,residual,exitflag,output] = lsqnonlin(fun,x0,lb,ub,options)
```

dove

`fun`	Funzione da minimizzare
`x0`	Valori iniziali vettori
`lb`	Vettore di limite inferiore
`ub`	Vettore di portata superiore
`options`	Struttura che definisce le opzioni di ottimizzazione
`resnorm`	quadrato 2-norm del residuo a x: $\sum(fun(\mathbf{x}).^2)$
`residual`	Valore della funzione oggettiva in soluzione, di solito (divertente(**x**).
`exitflag`	Motivo per fermare il risolutore
`output`	Informazioni finali sul processo di ottimizzazione (una struttura)

20 Mentre la maggior parte dei parametri sono relativamente semplici, il set più critico è l'insieme `options`. Quelli utilizzati in questo progetto includono

`MaxFunEvals`	Numero massimo di valutazione delle funzioni
`MaxIter`	Numero massimo di iterazioni
`TolFun`	Tolleranza per la funzione
`tolx`	Tolleranza per gli sconosciuti
`MaxPCGIter`	Numero massimo delle iterazioni di gradiente coniugate precondizionate
`TolPCG`	Tolleranza di terminazione sull'iterazione PCG
`Typicalx`	Array che specifica la tipica magnitudine di array dei parametri **x** usato per scalare le differenze finite per stima gradiente.
`FiniteDifferenceStepSize`	Fattore di dimensione passo vettoriale per differenze finite; questo vien per assicurarsi che l'esplorazione funzioni correttamente.

[1] Un esempio di codice MATLAB® è riportato nell'Appendice I.6.1.

COPIA DI REVISIONE

21 La dimensione del passo di differenza finita ha avuto un ruolo fondamentale nel progresso della nostra analisi. Se non specificato, il valore predefinito per questo parametro è sqrt(eps) per le differenze finite in avanti. Tuttavia, questo valore predefinito nel nostro caso studio ha portato ad avere troppo piccoli passi di differenza finita per chiamare un cambiamento e quindi, il programma non è stato in grado di catturare qualsiasi differenza modificando le variabili d'ingresso e alla fine si è dato all'iniziale indovinare come la risposta di ottimizzazione. Definindo un vettore delle dimensioni dei gradini finiti (v) il programma calcola la differenza finita δ per ogni variabile x as:

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{v} \cdot \max(abs(\mathbf{x}), \text{Typical}\mathbf{x}); \tag{Q.20}$$

22 Definire valori più elevati ha portato a differenze più tangibili nelle variabili e quindi garantire una ragionevole esplorazione della funzione all'interno del dominio variabile di risposta.

MATLAB®codice

23 Il codice MATLAB®è descritto nella Fig. Q.2 ed è relativamente semplice da seguire.

24 Si noti che in questo caso, l'analisi si concentra su una diga interessata da reazioni aggregate alcali (AAR). L'obiettivo è quello di determinare i parametri del modello AAR in modo che gli spostamenti della cresta dall'analisi degli elementi finiti corrispondano strettamente alle misurazioni sul campo.

1. Le misurazioni sul campo sono lette e regolate.
2. Il file di controllo è letto e diviso in tre parti: una centrale contenente le linee da modificare dal codice (associata alle proprietà AAR), e quelle adiacenti che resteranno immutate. I numeri corrispondenti delle linee di separatore sono registrati per un successivo utilizzo dalla funzione di minimizzazione.
3. Le variabili definite dall'utente vengono lette da un file Excel esterno.
4. I parametri di ottimizzazione sono impostati
5. Il `lsqnonlin` funzione, §Q.3, viene chiamato.

Definizione della funzione

25 Una parte critica dell'algoritmo è la definizione della funzione da minimizzare.

1. Scrivere un nuovo file di input in termini di $\mathbf{x}$ (prima iterazione, utilizzare i valori predefiniti di $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. Questo è facilitato dal precedente partizionamento del file di controllo.
2. Eseguire l'analisi degli elementi finiti (utilizzando Merlin in questo caso).
3. Estrarre dal file di uscita gli spostamenti calcolati, $\mathbf{x}_{\text{fea}}(t)$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

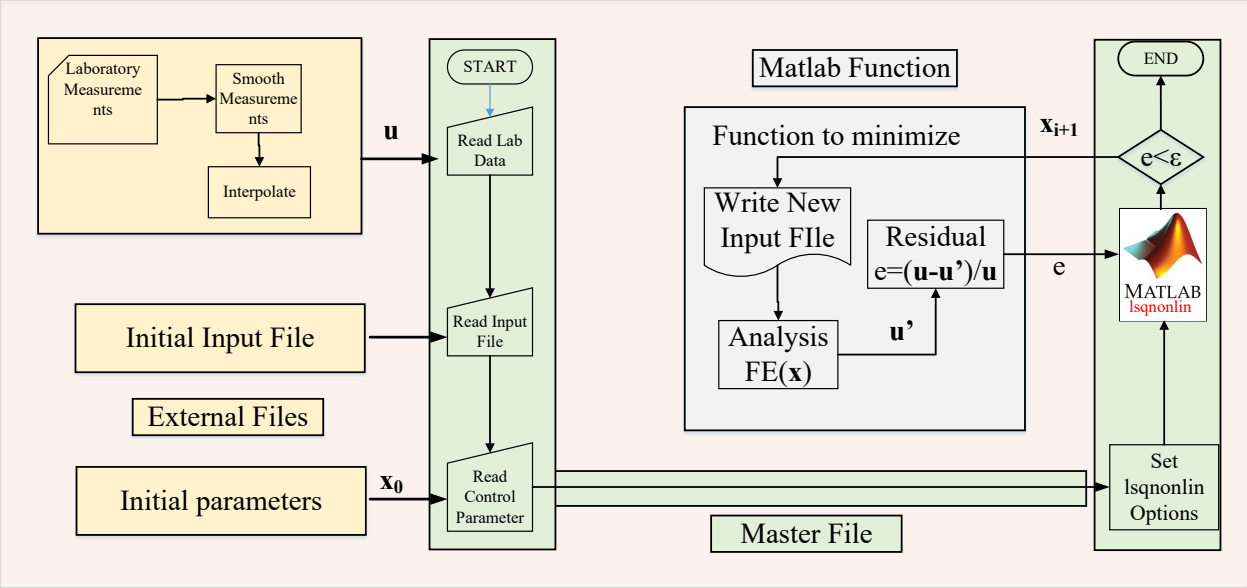


Figura Q.2: Grafico del flusso della procedura di identificazione dei parametri

4. Computare il residuo $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{fea}}(t) - \mathbf{x}_{\text{meas}}(t)$.
5. Computa la norma e dei residui.
6. Restituire la norma nuovo vettore di spostamenti.

26 Completamento del programma è regolato da `lsqnonlin` sulla base della norma e delle opzioni precedentemente selezionate (§Q.3). Perché non c'è una chiamata diretta alla funzione da minimizzare dalla MATLAB®codice, parametri aggiuntivi (come ad esempio $\mathbf{x}_{\text{meas}}(t)$ sono passati attraverso come `global` variabili.

27 A MATLAB®codice per eseguire l'ottimizzazione non lineare meno quadrata è dato in §I.6.1.

Q.4 Visualizzazione in tempo reale

28 Tenendo presente che la simulazione non lineare dell'elemento finito dell'espansione AAR in una diga può richiedere fino a 3 ore ciascuna, e che nel contesto delle procedure identificaiton dei parametri sono necessarie più analisi, questo è un computer molto processo intensivo.

29 Viene quindi utilizzata un'interfaccia grafica, Fig. Q.3. Il primo quadrante mostra gli spostamenti intermedi ($\mathbf{x}_{\text{fea}}(t)$) confrontati con quelli misurati ($\mathbf{x}_{\text{meas}}(t)$). Gli altri tre

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

quadranti mostrano alcune variabili da identificare (ε^{∞}, τ_l e τ_c) in funzione del numero di iterazioni.

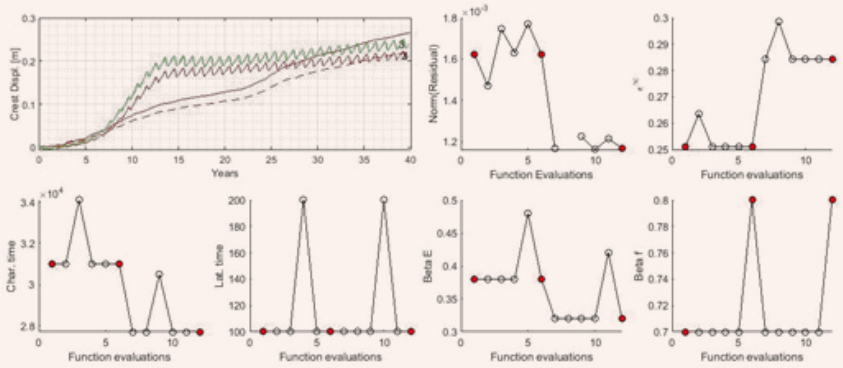


Figura Q.3: Interfaccia utente grafica per l'identificazione dei parametri di reazione aggregati alcali (Saouma e Hariri-Ardebili, 2021)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Appendice R

Calcolo vettoriale: elementi introduttivi

Abstract

Questa appendice presenta gli elementi essenziali del calcolo vettoriale necessari per comprendere alcune delle derivazioni del libro (Schey, 1973). La trattazione non è esaustiva, ma costituisce un richiamo dei concetti fondamentali.

R.1 Definizioni di base 3173
R.1.1 Sfida estranea a una scalare . 3173
R.1.2 Divergenza 3175
R.1.3 Gradiente 3177
R.2 Teoremi integrativi 3181
R.2.1 Integral di un vettore 3181
R.2.2 Linea integrale 3181
R.2.3 Integrazione per parti 3182
R.2.4 Gauss; teorema divergenza . 3182
R.2.5 Teorema di Stoke 3184
R.2.6 Verde; teorema di gradiente 3184

1 A *campo* è una funzione definita su una regione continua. Questo include, *Campo Scalare* $g(\mathbf{x})$, *Campo vettoriale* $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, or *Campo di Tensore* $\mathbf{T}(\mathbf{x})$.

2 Introduciamo per la prima volta *operatore vettoriale differenziale* "Nabla" denotato da ∇

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

3 Si nota anche che ci sono molti modi per differenziare un campo vettoriale in quanto ci sono modi di moltiplicando i vettori, l'analogia che viene data dalla tabella R.1.

COPIA DI REVISIONE

Moltiplicazione		Differenza		Ordine del Tensore
$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$	Non lo so.	$\nabla\cdot\mathbf{v}$	divergenza	$\downarrow$
$\mathbf{u}\times\mathbf{v}$	croce	$\nabla\times\mathbf{v}$	Riccio	$\rightarrow$
$\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}$	tenore	$\nabla\mathbf{v}$	gradiente	$\uparrow$

Tabella R.1: Simultanee tra operatori di moltiplicazione e differenziazione

R.1 Definizioni di base

R.1.1 Sfida estranea a una scalare

4 Il derivato di un vettore $\mathbf{p}(u)$ rispetto a una scalare uFico. R.1 è definito da

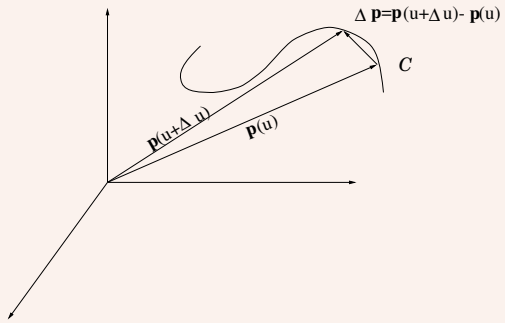


Figura R.1: Differenziazione del vettore di posizione $\mathbf{p}$

$$\frac{d\mathbf{p}}{du} \equiv \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{p}(u+\Delta u) - \mathbf{p}(u)}{\Delta u}$$

5 If $\mathbf{p}(u)$ è un *posizione vettoriale* $\mathbf{p}(u) = x(u)\mathbf{i} + y(u)\mathbf{j} + z(u)\mathbf{k}$Allora

$$\frac{d\mathbf{p}}{du} = \frac{dx}{du}\mathbf{i} + \frac{dy}{du}\mathbf{j} + \frac{dz}{du}\mathbf{k}$$

è un vettore lungo il tangente alla curva.

6 If u è il tempo tAllora $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ è la velocità

7 In *geometria differenziale*, se consideriamo una curva C definito dalla funzione $\mathbf{p}(u)$ poi $\frac{d\mathbf{p}}{du}$ è un vettore tangente ot Ce se u è il curvilinea coordinate s misurato da qualsiasi punto lungo la curva, poi $\frac{d\mathbf{p}}{ds}$ è un'unità tangente a) C **T**Fico. R.2. e abbiamo le seguenti relazioni

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

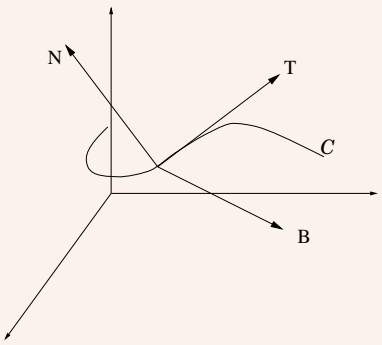


Figura R.2: Curvatura di una curva

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \mathbf{T}$$
$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N}$$
$$\kappa = \text{ curvatura}$$
$$\rho = \frac{1}{\kappa} \text{ raggio di curvatura}$$

si nota anche che $\mathbf{p}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{ds} = 0$ if $\left|\frac{d\mathbf{p}}{ds}\right| \neq 0$.

R.1.1.1 Ex R.1: Tangente a una curva

Determinare il vettore dell'unità tangente alla curva: $x = t^2 + 1$, $y = 4t - 3$, $z = 2t^2 - 6t$ per $t = 2$.

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(t^2+1)\mathbf{i} + (4t-3)\mathbf{j} + (2t^2-6t)\mathbf{k}\right] = 2t\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + (4t-6)\mathbf{k}$$
$$\left|\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right| = \sqrt{(2t)^2 + (4)^2 + (4t-6)^2}$$
$$\mathbf{T} = \frac{2t\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + (4t-6)\mathbf{k}}{\sqrt{(2t)^2 + (4)^2 + (4t-6)^2}}$$
$$= \frac{4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{(4)^2 + (4)^2 + (2)^2}} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k} \text{ for } t = 2$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

R.1.2 Divergenza

R.1.2.1 Vettore

8 Il *divergenza* di un campo vettoriale di un corpo $\mathcal{B}$ con confine Ω, Fig. R.3 è definito considerando che ogni punto della superficie ha una normale **n**e questo il corpo è circondato da un campo vettoriale $\mathbf{v}(\mathbf{x})$. Il volume del corpo è $v(\mathcal{B})$.

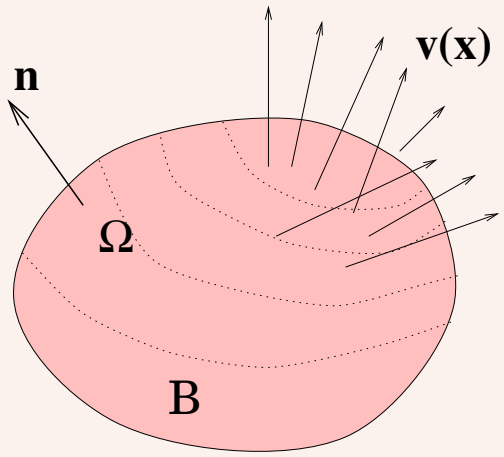


Figura R.3: Campo vettoriale che attraversa una regione solida

9 La divergenza del campo vettoriale è così definita

$$\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) \equiv \lim_{v(\mathcal{B})\to 0} \frac{1}{v(\mathcal{B})} \int_{\Omega} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} dA$$

dove **v**.**n** è spesso indicato come *Flusso* e rappresenta il totale volume di "fluid' che passa attraverso dA in tempo di unità, Fig. R.4 Questo volume è quindi uguale alla base del

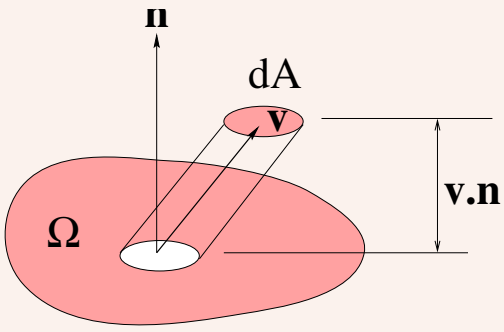


Figura R.4: Flusso attraverso la zona dA

cilindro dA tempi l'altezza del cilindro $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$. Si nota che le linee di ampiezza che sono tangenti al confine non lasciano fuori alcun fluido, mentre quelli normali ad esso Lasciarlo fuori in modo più efficiente.

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

10 La divergenza misura quindi il tasso di cambiamento di un campo vettoriale.

11 La definizione è chiaramente indipendente dalla forma della regione solida, tuttavia possiamo ottenere una panoramica divergenza considerando un parallelepipedo rettangolare con lati Δx_1, Δx_2e Δx_3, e con normali vettori che puntano nel indicazioni degli assi di coordinate, Fig. R.5. Se consideriamo anche l'angolo più vicino all'origine come situato a $\mathbf{x}$,

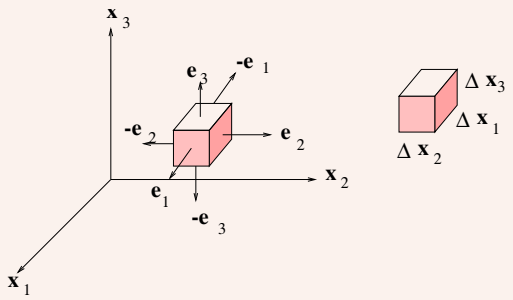


Figura R.5: Elemento infinito per la valutazione della divergenza

poi il contributo (da Eq. R.1.2.1) delle due superfici con vettori normali $\mathbf{e}_1$ e $-\mathbf{e}_1$ is

$$\lim_{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\to 0} \frac{1}{\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3}\int_{\Delta x_2\Delta x_3} [\mathbf{v}(\mathbf{x}+\Delta x_1\mathbf{e}_1)\cdot\mathbf{e}_1 + \mathbf{v}(x)\cdot(-\mathbf{e}_1)]dx_2dx_3$$

or

$$\lim_{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\to 0} \frac{1}{\Delta x_2\Delta x_3}\int_{\Delta x_2\Delta x_3} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}+\Delta x_1\mathbf{e}_1)-\mathbf{v}(\mathbf{x})}{\Delta x_1}\cdot\mathbf{e}_1 dx_2dx_3 = \lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta x_1}\cdot\mathbf{e}_1$$
$$= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1}\cdot\mathbf{e}_1$$

quindi, possiamo generalizzare

$$\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x})}{\partial x_i}\cdot\mathbf{e}_i$$

12 o alternativamente

$$\text{div } \mathbf{v} = \nabla\cdot\mathbf{v} = (\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{e}_3)\cdot(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3)$$
$$= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \partial_i v_i = v_{i,i}$$

13 La divergenza di un vettore è *scalare*.

14 Si noti che *Operatore laplacito* è definito come

$$\nabla^2 F \equiv \nabla\nabla F = F_{,ii}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

R.1.2.1.1 Ex R.2: Divergenza di un vettore

Determinare la divergenza del vettore $\mathbf{A} = x^2z\mathbf{i} - 2y^3z^2\mathbf{j} + xy^2z\mathbf{k}$ at punto $(1, -1, 1)$.

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{v} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(x^2z\mathbf{i} - 2y^3z^2\mathbf{j} + xy^2z\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial x^2z}{\partial x} + \frac{\partial - 2y^3z^2}{\partial y} + \frac{\partial xy^2z}{\partial z} \\ &= 2xz - 6y^2z^2 + xy^2 \\ &= 2(1)(1) - 6(-1)^2(1)^2 + (1)(-1)^2 = -3 \text{ at } (1, -1, 1)\end{aligned}$$

R.1.2.2 Destinazione del secondo ordine

15 Per analogia a Eq. R.1.2.1, la divergenza di un tenore di secondo ordine campo $\mathbf{T}$ is

$$\nabla\cdot\mathbf{T} = \text{div } \mathbf{T}(\mathbf{x}) \equiv \lim_{v(\mathcal{B})\to 0} \frac{1}{v(\mathcal{B})}\int_\Omega \mathbf{T}\cdot\mathbf{n}\, dA$$

che è il *campo vettoriale*

$$\nabla\cdot\mathbf{T} = \frac{\partial T_{pq}}{\partial x_p}\mathbf{e}_q$$

R.1.3 Gradiente

R.1.3.1 Campo Scalare

16 Il *gradiente* di un campo scalare $g(\mathbf{x})$ è un campo vettoriale $\nabla g(\mathbf{x})$ tale che per qualsiasi vettore unitario $\mathbf{v}$, il derivato direzionale dg/ds in direzione di $\mathbf{v}$ è dato da

$$\frac{dg}{ds} = \nabla g\cdot\mathbf{v}$$

dove $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{p}}{ds}$ Si nota che la definizione non ha fatto riferimento a nessun sistema di coordinate. a *vettori invarianti*.

17 Per trovare i componenti in qualsiasi sistema di coordinate Cartesian rettangolari utilizziamo

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{dx_i}{ds}\mathbf{e}_i \\ \frac{dg}{ds} &= \frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds}\end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

che può essere sostituito e cederà

$$\nabla g = \frac{\partial g}{\partial x_i}\mathbf{e}_i$$

or

$$\begin{aligned}\nabla\phi &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\phi \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\end{aligned}$$

e nota che definisce un *campo vettoriale*.

18 Il significato fisico del gradiente di un campo scalare è che indica nel direzione in cui il campo sta cambiando più rapidamente (per una superficie tridimensionale, il gradiente punta lungo normale al piano tangente alla superficie). La lunghezza del vettore $\|\nabla g(\mathbf{x})\|$ è perpendicolare alle linee di contorno.

19 $\nabla g(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}$ dà tasso di cambiamento del campo scalare nella direzione $\mathbf{n}$.

R.1.3.1.1 Ex R.3: Gradiente di un campo scalare I

Determinare il gradiente $\phi = x^2yz + 4xz^2$ a punto $(1, -2, -1)$ lungo il direzione $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

$$\begin{aligned}\nabla\phi = \nabla(x^2yz + 4xz^2) &= (2xyz + 4z^2)\mathbf{i} + (x^2z\mathbf{j} + (x^2y + 8xz)\mathbf{k} \\ &= 8\mathbf{i} - \mathbf{j} - 10\mathbf{k} \text{ at } (1, -2, -1) \\ \mathbf{n} &= \frac{2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k} \\ \nabla\phi\cdot\mathbf{n} = (8\mathbf{i} - \mathbf{j} - 10\mathbf{k})\cdot &\left(\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}\right) = \frac{16}{3} + \frac{1}{3} + \frac{20}{3} = \frac{37}{3}\end{aligned}$$

Poiché questo ultimo valore è positivo, ϕ aumenta lungo quella direzione.

R.1.3.1.2 Ex R.4: Gradiente di un campo scalare ii

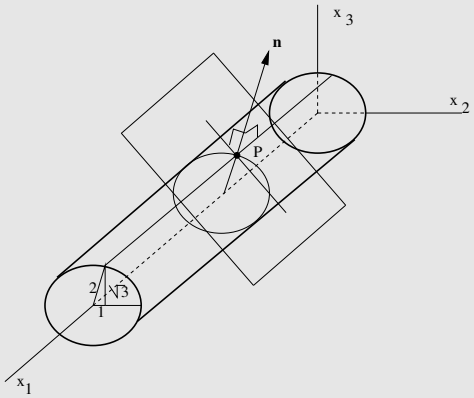
Il tenore di stress in tutto un continuum è dato rispetto a Asce cartesiane come

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 3x_1x_2 & 5x_2^2 & 0 \\ 5x_2^2 & 0 & 2x_3^2 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinare il vettore di stress (o trazione) al punto $P(2, 1, \sqrt{3})$ di piano che è tangente alla superficie cilindrica $x_2^2 + x_3^2 = 4$ at P,

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.



A punto P, il tenore di stress è dato da

$$\sigma = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

L'unità normale alla superficie P è dato da

$$\nabla(x_2^2 + x_3^2 - 4) = 2x_2\mathbf{2_2} + \mathbf{2x_3e_3}$$

A punto P,

$$\nabla(x_2^2 + x_3^2 - 4) = 2\mathbf{2_2} + \mathbf{2\sqrt{3}e_3}$$

e quindi l'unità normale P is

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_3$$

Così il vettore di trazione sarà determinato da

$$\sigma = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 5/2 \\ 3 \\ \sqrt{3} \end{array} \right\}$$

or $\mathbf{t^n} = \frac{5}{2}\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \sqrt{3}\mathbf{e}_3$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

R.1.3.2 Campo vettoriale

20 Possiamo anche definire il gradiente di un campo vettoriale come

$$[\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{v}\nabla_{\mathbf{x}}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

che è $[\nabla\mathbf{v}]_{ij}$ dà il tasso di cambiamento del i) $\mathbf{v}$ con il rispetto del jl'asse coordinato.

21 Notare la differenza tra $\mathbf{v}\nabla_{\mathbf{x}}$ e $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}$. In rappresentazione matrice, uno è il trasposto dell'altro.

22 Il gradiente di un vettore è un tenore dell'ordine 2.

23 Possiamo interpretare il gradiente di un vettore geometricamente, Fig. R.6. Se consideriamo due punti a e b che si avvicinano l'un l'altro (i.e Δs è molto piccolo), e lasciare che il vettore unità $\mathbf{m}$ punti in direzione da a to b. Il valore del campo vettoriale a is $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ e il valore del campo vettoriale at b is $\mathbf{v}(\mathbf{x}+\Delta s\mathbf{m})$. Dal campo vettoriale cambiamenti con posizione nel dominio, quei due vettori sono diversi sia in lunghezza che orientamento.

24 Se ora trasportiamo una copia di $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ e metterla at b, poi confrontiamo le differenze tra quei due vettori. collegare le teste di $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{v}(\mathbf{x}+\Delta s\mathbf{m})$ is $\mathbf{v}(\mathbf{x}+\Delta s\mathbf{m})-\mathbf{v}(\mathbf{x})$, il cambiamento del vettore. dividere questo cambiamento Δs, allora otteniamo il tasso di cambiamento mentre ci muoviamo nella direzione specificata.

25 Prendere il limite come Δs va a zero, otteniamo

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}+\Delta s\mathbf{m})-\mathbf{v}(\mathbf{x})}{\Delta s} \equiv D\mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{m}$$

26 La quantità $D\mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{m}$ è chiamato *derivato direzionale* perché dà il tasso di cambiamento del campo vettoriale mentre ci muoviamo nella direzione $\mathbf{m}$.

R.1.3.2.1 Ex R.5: Gradiente di un campo vettoriale

Cerchiamo di determinare il gradiente di un semplice campo vettoriale in due dimensioni date da

$$\mathbf{F}(x,y) = (x^2, 2xy)$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

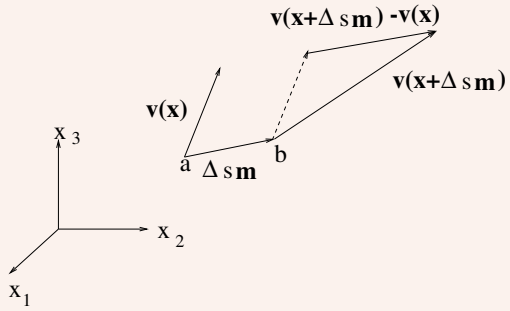


Figura R.6: Gradiente di un vettore

Per determinare il gradiente di questo campo vettoriale $\nabla \mathbf{F}$, computo i derivati parziali di ogni componente del vettore rispetto a x e y, so

$$\nabla \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial y} \right)$$

or

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} x^2 = 2x \tag{R.1}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} 2xy = 2x \tag{R.2}$$

così

$$\nabla \mathbf{F} = (2x, 2x)$$

R.2 Teoremi integrativi

R.2.1 Integral di un vettore

27 L'integrale di un vettore $\mathbf{R}(u) = R_1(u)\mathbf{e}_1 + R_2(u)\mathbf{e}_2 + R_3(u)\mathbf{e}_3$ è definito come

$$\int \mathbf{R}(u)du = \mathbf{e}_1 \int R_1(u)du + \mathbf{e}_2 \int R_2(u)du + \mathbf{e}_3 \int R_3(u)du$$

se un vettore $\mathbf{S}(u)$ esiste tale che $\mathbf{R}(u) = \frac{d}{du}(\mathbf{S}(u))$Allora

$$\int \mathbf{R}(u)du = \int \frac{d}{du}(\mathbf{S}(u))\, du = \mathbf{S}(u) + c$$

R.2.2 Linea integrale

28 Dati $\mathbf{r}(u) = x(u)\mathbf{e}_1 + y(u)\mathbf{e}_2 + z(u)\mathbf{e}_3$ dove $\mathbf{r}(u)$ è un vettore di posizione che definisce una curva C punto di collegamento P_1 to P_2 dove $u = u_1$ e $u = u_2$ rispettivamente, a)

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

$A(x,y,z) = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$ essendo una funzione vettoriale definita e continua lungo C, poi l'integrale della componente tangenziale di $\mathbf{A}$ lungo il sentiero C da P_1 to P_2 è dato da

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

If $\mathbf{A}$ erano una forza, allora questo integrale rappresenterebbe il lavoro corrispondente.

29 Se il contorno è chiuso, allora definiamo *contorno integrale* as

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

30 Si può vedere che se $\mathbf{A} = \nabla\phi$ poi

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} \text{ is independent of the path } C \text{ connecting } P_1 \text{ to } P_2$$
$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 0 \text{ along a closed contour line}$$

R.2.3 Integrazione per parti

31 L'integrazione per formula di parte è

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x &= u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x \\ \int_a^b u dv &= uv|_a^b - \int_a^b v du \end{aligned} \tag{R.3}$$

R.2.4 Gauss; teorema divergenza

32 Nel caso più generale abbiamo

$$\int_\Omega \delta F = \int_{\delta\Omega} F$$

33 Il teorema divergenza (noto anche come Teorema Ostrogradski) viene ripetutamente in meccanica solida e può essere dichiarato come segue:

$$\int_\Omega \nabla\cdot\mathbf{v} d\Omega = \int_\Gamma \mathbf{v}.\mathbf{n} d\Gamma \text{ or } \int_\Omega v_{i,i} d\Omega = \int_\Gamma v_i n_i d\Gamma \tag{R.4}$$

Questo è il vettore divergenza su un volume è uguale al vettore flux sopra una superficie.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

34 Per le trasformazioni 2D-1D, abbiamo

$$\int_A \nabla\cdot\mathbf{q}\,dA = \oint_s \mathbf{q}^T\mathbf{n}\,ds \tag{R.5}$$

35 Questo teorema è un tempo chiamato teoremo di Green nello spazio.

36 *Verde-Gauss* teorema

$$\int_\Omega \Phi\nabla\cdot\mathbf{v}\,d\Omega = \int_\Gamma \Phi\mathbf{v}^T\mathbf{n}\,d\Gamma - \int_\Omega (\nabla\Phi)^T\mathbf{v}\,d\Omega \tag{R.6}$$

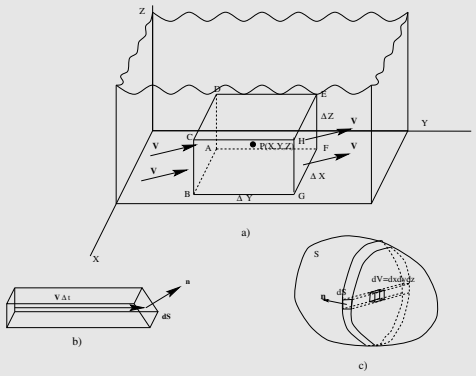
Se si seleziona $\mathbf{v}^T = [\ \Psi \quad 0 \quad 0\ ]$, noi otteniamo

$$\int_\Omega \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial x}d\Omega = \int_\Gamma \Phi\Psi n_x\,d\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial\Phi}{\partial x}\Psi\,d\Omega$$

R.2.4.1 Ex R.6: interpretazione fisica del teorema divergente

Fornire un'interpretazione fisica del Teorema Divergenza.

Un fluido ha un campo di velocità $\mathbf{v}(x,y,z)$ e cerchiamo prima di determinare l'afflusso netto per volta unitaria per volume unitario in parallelo, centrato su $P(x,y,z)$ con dimensioni $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ (a).



$$\begin{aligned}
v_x\big|_{x,y,z} &\approx v_x \\
v_x\big|_{x-\Delta x/2,y,z} &\approx v_x - \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x \quad \text{AFED} \\
v_x\big|_{x+\Delta x/2,y,z} &\approx v_x + \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x \quad \text{GHCB}
\end{aligned}$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

L'afflusso netto per unità di tempo attraverso x aerei è

$$\begin{aligned}\Delta V_x &= \left(v_x + \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta z - \left(v_x - \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta z \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z\end{aligned}$$

Analogamente

$$\Delta V_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z$$
$$\Delta V_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z$$

Pertanto, l'aumento totale per volume unitario e il tempo unitario sarà dato da

$$\frac{\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z}{\Delta x\Delta y\Delta z} = \text{div } \mathbf{v} = \nabla\cdot\mathbf{v}$$

Inoltre, se consideriamo il totale di passaggio fluido dS durante la Δt b), sarà dato da $(\mathbf{v}\Delta t)\cdot\mathbf{n}dS = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS\Delta t$ o il volume di passaggio fluido dS per unità di tempo is $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS$.

Così per un volume arbitrario (c), la quantità totale di fluidi che attraversano una superficie chiusa S per tempo di unità è $\int_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS$Ma questo è uguale a quello $\int_V \nabla\cdot\mathbf{v}dV$ (Eq. R.2.4.1), così

$$\int_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS = \int_V \nabla\cdot\mathbf{v}dV$$

che è il teorema divergenza.

R.2.5 Teorema di Stoke

37 Il teorema di Stoke afferma che

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int\int_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}dS = \int\int_{\mathcal{S}} (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}$$

dove $\mathcal{S}$ è una superficie aperta con due facce delimitate da C

R.2.6 Verde; teorema di gradiente

38 Il teorema di Green in aereo è un caso speciale del teorem di Stoke.

$$\oint (Rdx + Sdy) = \int_\Gamma \left(\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) dxdy$$

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Riferimenti dei Libri II–IV e delle appendici

AASHTO, LRFD (2017). *AASHTO LRFD Bridge Design Specifications*. 8th Edition. AASHTO; Subcommittee on Bridges.

AASHTO, Seismic (2011). *AASHTO Guide Specifications for LRFD Seismic Bridge Design*. AASHTO; Subcommittee on Bridges.

Abramowitz, M. e I. Stegun (1970). *Handbook of Mathematical Functions*. Rapp. tecn. Applied Mathematics Series, No. 55. National Bureau of Standard.

Academie Royale des Sciences (1741). «*Eloge de M. De La Hire*». In: Histoire de l'Academie Royale des Sciences, Annee MDCCXVIII, pp. 76–89.

ACI 318 (2019). *Building code requirements for structural concrete (ACI 318-19) and commentary*. American Concrete Institute.

ACI 318.2-14 (2014). *Building code requirements for Concrete Thin Shells (ACI 318.2-14) and commentary*. Rapp. tecn. American Concrete Institute.

American Institute of Steel Construction (2016). *Specification for structural steel building ANSI/AISC 360-16*. American Institute of Steel Construction.

American Society of Civil Engineers (2017). *Seismic Evaluation and Retrofit of Existing Buildings*. ASCE/SEI 41-17. Reston, VA: American Society of Civil Engineers.

Anthropic (2025). *Claude*. https://www.anthropic.com/claude. AI assistant.

Applied Technology Council (2012a). *Seismic Performance Assessment of Buildings Volume 1 - Methodology*. Rapp. tecn. FEMA P-58-1. Federal Emergency Management Agency.

– (2012b). *Seismic performance assessment of buildings, (Volume 1): Methodology*. Rapp. tecn. ATC-58-1. Redwood City, CA: Federal Emergency Management Agency.

ASCE/SEI 7-16 (2017). *Minimum Design Loads For Buildings and Other Structures*. Rapp. tecn. American Society of Civil Engineers.

ATC-13 (1985). *Earthquake damage evaluation data for California. Report No.ATC-13*. Rapp. tecn. Redwood City, CA: Applied Technology Council.

ATC-40 (1996). *Seismic evaluation and retrofit of concrete buildings. Volume 1*. Rapp. tecn. Redwood City, CA: Applied Technology Council.

Atkinson, G. e D. Boore (1995). «Ground-motion relations for eastern North America». In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 85.1, pp. 17–30.

COPIA DI REVISIONE

Baker, A. e A. Amarakone (1964). «" Inelastic Hyperstatic Frames Analysis"». In: *Proceedings of the International Symposium on the Flexural Mechanics of Reinforced Concrete*, pp. 85–142.
Baker, A. L. L. (1956). *The ultimate-load theory applied to the design of reinforced & prestressed concrete frames*. Concrete Publications.
Baker, E., L Kovalevsky e F. Rish (1972). *Structural Analysis of Shells*. McGraw Hill.
Baker, J. (2015). «Efficient analytical fragility function fitting using dynamic structural analysis». In: *Earthquake Spectra* 31.1, pp. 579–599.
Baker, J. e N. Jayaram (2008). «Correlation of spectral acceleration values from NGA ground motion models». In: *Earthquake Spectra* 24, pp. 299–317.
Baker, W. F. (2023). *William Baker: Structural Engineer and Problem Solver*. The Grainger College of Engineering, University of Illinois Urbana–Champaign.
Bate, S. et al. (1962). «Ultimate Load Design Of Concrete Structures.» In: *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 21.2, pp. 399–442.
Bathe, K. (1996). *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall Inc.
Bažant, Ž. (1984). «Size Effect in Blunt Fracture: Concrete, Rock, Metal». In: *J. of Engineering Mechanics, ASCE* 110.4, pp. 518–535.
Bendixen, A. (1914). *Die Methode der Alpha-Gleichungen zur Berechnung von Rahmenkonstruktionen*. Tedesco. [The Method of Alpha-Equations for the Analysis of Frame Structures]. Germany.
Benjamin, J. e C. Cornell (1970). *Probability, Statistics, and Decision for Civil Engineers*. New York: McGraw Hill.
Berry, M., M. Parrish e M. Eberhard (2004). *Peer Structural Performance database*. Rapp. tecn. Pacific Earthquake Engineering Research Center; University of California, Berkeley.
Bertero, R. e V. Bertero (2002). «Performance-based seismic engineering: the need for a reliable conceptual comprehensive approach». In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 31, pp. 627–652.
Bhatt, P (1986). *Programming the matrix analysis of skeletal structures*. E. Horwood.
Billington, D. (1965). *Thin Shell Concrete Structures*. Princeton University: McGraw-Hill, Inc.
Billington, D. (1983). *Structural Studies*. Rapp. tecn. Department of Civil Engineering, Princeton University.
Bisplinghoff, R. L., J. W. Mar e T. H. Pian (1965). *Statics of deformable solids*. Dover.
Bisshopp, K. e D. C. Drucker (1945). «Large deflection of cantilever beams». In: *Quarterly of applied mathematics* 3.3, pp. 272–275.
Bolt, B. (1973). «Duration of strong ground motion». In: *Proceedings of the 5th World Conference on Earthquake Engineering*. Vol. 1, pp. 1304–1313.
Bommer, J. e A. Martinez-Pereira (1999). «The effective duration of earthquake strong motion». In: *Journal of earthquake engineering* 3.02, pp. 127–172.
Boore, D., W. Joyner e T. Fumal (1997). «Equations for estimating horizontal response spectra and peak acceleration from western North American earthquakes: A summary of recent work». In: *Seismological research letters* 68.1, pp. 128–153.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Bozorgnia, Y. e V. Bertero (2003). «Damage spectra: characteristics and applications to seismic risk reduction». In: *Structural Engineering, ASCE* 129, pp. 1330–1340.
Bradley, B. (2010). «A generalized conditional intensity measure approach and holistic ground-motion selection». In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 39.12, pp. 1321–1342.
Brandonisio, G. e A. De Luca (2020). «Statics of Buttressed Masonry Arches in Light of Traditional Design Rules». In: *Proceedings of XXIV AIMETA Conference 2019 24*. Springer, pp. 2162–2176.
Branson, D. E. et al. (1963). *Instantaneous and time-dependent deflections of simple and continuous reinforced concrete beams*. Rapp. tecn. Alabama. State Highway Department.
Brühwiler, E. e F. Whitman (1990). «Failure of Dam Concrete Subjected to Seismic Loading Conditions». In: *Engineering Fracture Mechanics* 35.3, pp. 565–572.
Brühwiler, E. (1988). *Fracture Mechanics of Dam Concrete Subjected to Quasi-Static and Seismic Loading Conditions*. (in German). Lausanne: Doctoral Thesis No 739, Swiss Federal Institute of Technology.
Bryant, L., J. Brokaw e P. Mlakar (gen. 1993). *Reliability Modeling of Concrete Overstressing*. Rapp. tecn. Report Submitted to U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station. JAYCOR, Vicksburg Mississippi.
Bucher, C. (2009). *Computational analysis of randomness in structural mechanics: Structures and infrastructures book series, Vol. 3*. Crc Press.
CALTRANS, S. (2013). *CALTRANS Seismic Design Criteria*. California Department of Transportation.
Campbell, K. e Y. Bozorgnia (2012). «Cumulative absolute velocity (CAV) and seismic intensity based on the PEER-NGA database». In: *Earthquake Spectra* 28.2, pp. 457–485.
Carol, I e J Murcia (1989). «Nonlinear time-dependent analysis of planar frames using an 'exact'formulation—I. Theory». In: *Computers & structures* 33.1, pp. 79–87.
Castigliano, A. (1879). *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*. Vol. 1. AF Negro.
Cedolin, L., S. Dei Poli e I. Iori (1987). «Tensile Behavior of Concrete». In: *J. of Engineering Mechanics, ASCE* 113.3.
Cella, P. (1999). «Reexamining the catenary». In: *The College Mathematics Journal* 30.5, pp. 391–393.
Center, P. E. E. R. (2010). *Pacific Earthquake Engineering Research (PEER) Performance-Based Earthquake Engineering Framework*.
Chen, W. e H. Zhang (1990). *Structural Plasticity*. Springer-Verlag.
Chopra, A. e R. Goel (1999). «Capacity-Demand-Diagram Methods Based on Inelastic Design Spectrum». In: *Earthquake Spectra* 15, pp. 637–656.
Civil Engineers, A. S. of (2017). *Seismic Evaluation and Retrofit of Existing Buildings*. ASCE/SEI 41-17.
– (2022). *Minimum Design Loads and Associated Criteria for Buildings and Other Structures*. ASCE/SEI 7-22.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Clough, R. W. (1966). «Effect of stiffness degradation on earthquake ductility requirements». In: *Proceedings of Japan earthquake engineering symposium*.
Clough, R. e J. Penzien (1993). *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill Inc., London, UK.
Cohen, I. B. (2002). «Newton's concepts of force and mass, with notes on the Laws of Motion». In: *The Cambridge Companion to Newton*. A cura di I. Cohen e G. Smith.
Cornell, C. A. (1964). *Stochastic process models in structural engineering*. Department of Civil Engineering, Stanford University.
Cornell, C. e F. Jalayer (2002). «Factored nonlinear displacement demand estimation methods for probability-based safety assessment». In: *Annual Meeting Research Digest No. 2002-7, A publication of the Pacific Earthquake Engineering Research Center*.
Coulomb, C. (1773). «*Essai sur une application de maximis & minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture*». In: *mémoires de l'académie Royale des Sciences* 7, pp. 343–382.
Couplet, C. (1729). «*De la poussée des voûtes*». In: *Mémoires de l'académie Royale des Sciences*, pp. 79–117.
– (1730). «*Seconde partie de l'examen des voûtes*». In: *mémoires de l'académie Royale des Sciences*, pp. 117–141.
Courant, R., K. Friedrichs e H. Lewy (1967). «On the partial difference equations of mathematical physics». In: *IBM Journal of Research and Development* 11.2, pp. 215–234.
Cuthill, E. e J. McKee (1969). «Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices». In: *Proceedings of the 1969 24th national conference*, pp. 157–172.
Da Vinci, L. (1490). *Códice de Madrid I*. Biblioteca Nacional de España.
d'Alembert, J. l. R. (1743). *Traite de dynamique*. First edition. Collation: [4], xxvi, [2], 186, [2]. With 4 folding engraved plates. Paris: David l'aine.
D'Ambrisi, A. e M. Mezzi (2015). «An energy-based approach for nonlinear static analysis of structures». In: *Bulletin of Earthquake Engineering* 13.5, pp. 1513–1530.
Danyzy, A. (1732). «Méthode générale pour déterminer la résistance qu'il faut opposer à la poussée des voûtes». In: *Histoire de la Société Royale des Sciences établie à Montpellier* 2.1718-1745, pp. 40–56.
de Belidor, B. F. (1729). *La science des Ingegnieurs*. Chez Nyon.
– (1757). *Nouveau cours de mathématique a l'usage de l'artillerie et du génie...* Chez Nyon.
de la Hire, P. (1712). «*Sur la construction des voûtes dans les édifices*». In: *mémoires de l'académie Royale des Sciences* 69.
de La Hire, Philippe (1695). *Traité de Mécanique, où l'on explique tout ce qui est nécessaire dans la pratique des arts, et les propriétés des corps pesans lesquelles ont un plus grand usage dans la physique*. La Compagnie des libraires.
Den Hartog, J. P. (1961). *Strength of materials*. Dover.
Dennis, J. e R. Schnabel (1983). *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Englewood Cliffs.
Desayi, P (1964). «Equation for the Stress-Strain Curve of Concrete». In: *Journal of the American Concrete Institute* 61.3, pp. 1169–1183.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Desmorat, R. et al. (2008). *Anisotropic damage model for multifibre dynamics and pseudo-dynamics analyses*.
Dolati, S. S. K., A. Matamoros e W. Ghannoum (2023). «Evaluating the effects of loading protocol on the strength and deformation capacity of Flexure-Shear critical concrete columns». In: *Engineering Structures* 279, p. 115592.
Douglas, J (2011). *Ground Motion Estimation Equations 1964–2010*.
Duda, H. (1990). «Stress-Crack-Opening Relation and Size Effect in High-Strength Concrete». In: *Darmastad Concrete* 5, pp. 35–46.
Eddy, H. T. (1878). *Researches in graphical statics*. D. van Nostrand.
Eisenberg, M. A. e L. Malvern (1973). «On Finite Element Integration in Natural Co-ordinates». In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 7, pp. 574–575.
Elnashai, A. e L. Di Sarno (2015). *Fundamentals of earthquake engineering: from source to fragility*. John Wiley & Sons.
Elwood, K. e J. Moehle (2002). *Shake table tests and analytical studies on the gravity load collapse of reinforced concrete frames*. Rapp. tecn. PEER Report 2003/01. Pacific Earthquake Engineering Research Center, University of California.University of California, Berkeley.
Erberik, M. (2015). «Seismic Fragility Analysis». In: *Encyclopedia of Earthquake Engineering*. A cura di M. Beer et al. Springer Berlin Heidelberg, pp. 1–10.
Estekanchi, H., A. Vafai e M. Sadeghazar (2004). «Endurance time method for seismic analysis and design of structures». In: *Scientia Iranica* 11, pp. 361–370.
European Committee for Standardization (CEN) (2010). *Eurocode – Basis of Structural Design (EN 1990:2002+A1:2005+A1:2005/AC:2010)*. European Standard. Brussels, Belgium: CEN.
Felippa, C. (1999). *Finite Element Lecture Notes*. Rapp. tecn. Dept. of Aerospace Engineering, University of Colorado, Boulder.
– (2000). *Lecture Notes in Advanced Finite Element Methods (ASEN 5367)*. Rapp. tecn. Dept. of Aerospace Engineering, University of Colorado, Boulder.
FEMA (1997a). *NEHRP commentary on the guidelines for seismic rehabilitation of buildings*. Rapp. tecn. Washington, DC: Federal Emergency Management Agency.
– (1997b). *NEHRP guidelines for seismic rehabilitation of buildings*. Rapp. tecn. Washington, DC: Federal Emergency Management Agency.
FEMA (2012). *Seismic Performance Assessment of Buildings*. P-58.
FEMA-356 (2000). *Prestandard and Commentary for the Seismic Rehabilitation of Buildings*. Rapp. tecn. Federal Emergency Managemt Agency.
Feodossiev, V. (1977). *Résistance des Materiaux: Problèmes et Questions Choisis*. Traduction Française. Moscou: Editions MIR.
Filiatrault, A. (2013). *Elements of earthquake engineering and structural dynamics*. Presses inter Polytechnique.
Filippou, F., E. Popov e V. Bertero (nov. 1983). «Modeling of Reinfored Concrete Joints under Cyclic Excitations». In: *ASCE, Journal of Structural Engineering* 109.11.
Finsterwalder, U. (1933). «Die querversteiften zylindrischen Schalengewölbe mit kreissegmentförmigem Querschnitt». In: *Ingenieur-Archiv* 4.1, pp. 43–65.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Fischler, M. A. e R. C. Bolles (1981). «Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography». In: *Communications of the ACM* 24.6, pp. 381–395.
Flügge, W. (1973). *Stresses in shells*. Second Edition. Springer Verlag.
Freeman, S. (1978). «Prediction of response of concrete buildings to severe earthquake motion». In: *Proceedings of Douglas McHenry international symposium on concrete and concrete structures*. A cura di A. C. Institute. Detroit, MI, USA.
– (1998). «The capacity spectrum method». In: *Proceedings of the 11th European conference on earthquake engineering*. Paris, France.
Gakuhari, Y. (ago. 2021). «Modeling Considerations Related to Concrete with AAR». Tesi di laurea mag. Boulder, Colorado: University of Colorado.
Gallagher, R. (1975). *Finite Element Analysis Fundamentals*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.
Gavin, H. P. (2012). *Mathematical Properties of Stiffness Matrices*. CEE 421L, Matrix Structural Analysis course notes. Duke University, Department of Civil e Environmental Engineering.
Georg, R. (dic. 2014). «Historical Analysis of Arches and Modern Shells». Saouma, Victor E. advisor. M.S. Thesis. Boulder, CO, U.S.A.: University of Colorado, Dept. Civ. Eng.
Gerstle, K. (1974). *Basic Structural Analysis*. Out of Print. McGraw-Hill.
Ghannoum, W. (2010). Personal communication.
– (2020). *Decision-Oriented Column Simulation Capabilities for Enhancing Disaster Resilience of RC Building*. "Seminar at the University of Colorado, Boulder".
Ghorbani, R. et al. (2022). «Uniaxial model for simulating the cyclic behavior of reinforced concrete members». In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 51.15, pp. 3574–3597.
Gibson, J. E. (1968). *The design of shell roofs*. Spon.
Giuriani, E. e G. P. Rosati (1986). «Behaviour of Concrete Elements under Tension After Cracking». In: *Studi e Ricerche, Corso di Perfezionamento per le Costruzioni in Cemento Armato* 8. (in Italian), pp. 65–82.
Gopalaratnam, V. S. e S. Shah (1985). «Softening Response of Plain Concrete in Direct Tension». In: *ACI Journal* 82, pp. 310–323.
Gunay, S. e K. Mosalam (2013). «PEER performance-based earthquake engineering methodology, revisited». In: *Journal of Earthquake Engineering* 17.6, pp. 829–858.
Gutenberg, B. e C. Richter (1954). «Frequency and energy of earthquakes». In: *Seismicity of the Earth and Associated Phenomena*, pp. 17–19.
Hamburger, R. et al. (2004). «The ATC-58 Project: Development of next-generation reformance-based earthquake engineering design criteria for buildings». In: *Proceeding of the 13th World Conference on Earthquake Engineering*. Vancouver, Canada.
Hariri-Ardebili, M. e H. Mirzabozorg (2014). «Estimation of probable damages in arch dams subjected to strong ground motions using endurance time acceleration functions». In: *KSCE Journal of Civil Engineering* 18, pp. 574–586.
Hariri-Ardebili, M. e V. E. Saouma (2015). «Quantitative failure metric for gravity dams». In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 44, pp. 461–480.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Hariri-Ardebili, M., V. E. Saouma e K. Porter (2016). «Quantification of Seismic Potential Failure Modes in Concrete Dams». In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*.
Hariri-Ardebili, M. et al. (2016). «A new class of seismic damage and performance indices for arch dams via ETA method». In: *Engineering Structures* 110, pp. 145–160.
Haselton, C. et al. (2011). «Accounting for ground-motion spectral shape characteristics in structural collapse assessment through an adjustment for epsilon». In: *Structural Engineering* 137.3, pp. 332–344.
Haselton, C. B. et al. (2008). «An assessment to benchmark the seismic performance of a code-conforming reinforced-concrete moment-frame building». In: *Pacific Earthquake Engineering Research Center* 2007/1.
Haselton, C. B. et al. (2016). «Calibration of model to simulate response of reinforced concrete beam-columns to collapse.» In: *ACI Structural Journal* 113.6.
Heyman, J. (1997). *The Stone Skeleton: Structural Engineering of Masonry Architecture*. Cambridge University Press.
Heyman, J. (1969). «The safety of masonry arches». In: *International Journal of Mechanical Sciences* 11.4, pp. 363–385.
Higham, N. J. (2002). *Accuracy and stability of numerical algorithms*. SIAM.
Hillerborg, A., M. Modéer e P. Petersson (1976). «Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements». In: *Cement and Concrete Research* 6.6, pp. 773–782.
Hinton, E. e D. Owen (1977). *Finite Element Programming*. Academic Press, London.
Hordijk, D., H. Reinhardt e H. Cornelissen (1989). «Fracture Mechanics Parameters of Concrete from Uniaxial Tensile Tests as Influenced by Specimen Length». In: *RILEM-SEM Int. Conference on Fracture Mechanics of Rock and Concrete*. A cura di S. Shah e S. Swartz. New-York: Springer-Verlag.
Hoshiya, M e Z Hasgur (1978). «AR and MA models of nonstationary ground motion». In: *Bull. Int. Inst. Seismol. Earthq. Eng.* 16, pp. 55–68.
Howard, S. (1966). *Structure: An Architect's Approach*. Princeton University: McGraw-Hill, Inc.
Hsu, T. et al. (1963). «Micro cracking of Plain Concrete and the Shape of the Stress-Strain Curve». In: *Journal of the American Concrete Institute* 60, pp. 209–224.
Huerta, S. (2008). «The analysis of masonry architecture: A historical approach: To the memory of professor Henry J. Cowan». In: *Architectural Science Review* 51.4, pp. 297–328.
Ibarra, L. F. (2004). «Global collapse of frame structures under seismic excitations». Tesi di dott. Stanford University.
ICBO (1994). *Uniform Building Code*. Rapp. tecn. International Conference of Building Officials.
Inglis, C. (1913). «Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners». In: *Trans. Inst. Naval Architects* 55, pp. 219–241.
Irwin, G. (1957). «Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate». In: *Transactions ASME, J. Appl. Mech.* 24.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Jalayer, F. (2003). «Direct probabilistic seismic analysis: implementing non-linear dynamic assessments». Tesi di dott. Palo-Alto, CA: Stanford University.
Jankovic, S. e B. Stojadinovic (2004). «Probabilistic performance-based seismic demand model for {R/C} frame buildings». In: *Proceeding of the 13th World Conferance on Earthquake Engineering*. Vancouver, B.C., Canada.
Jeang, F. L. e N. M. Hawkins (1985). *Nonlinear Analysis of Concrete Fracture*. Structures and Mechanics Report. Seattle, WA: Department of Civil Engineering, University of Washington.
Joukowsky, N. Y. (1948). *Sobranie Sochinenii (Collected Works)*. Vol. 2. 25 vols., 1935–1950. The bicycle wheel problem (ring on elastic foundation) appears in the mechanics volume; first solved ca. 1890s at the Moscow Technical School. Moscow: Gostekhizdat.
Kaila, K. e H. Narain (1971). «A new approach for preparation of quantitative seismicity maps as applied to Alpide belt-Sunda arc and adjoining areas». In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 61.5, pp. 1275–1291.
Kang, D. (2010). «An Optimized Computational Environment for Real Time Hybrid Simulation». Tesi di dott. Dept. of Civil Engineering, University of Colorado, Boulder.
Kappos, A. (1997). «Seismic damage indices for RC buildings: evaluation of concepts and procedures». In: *Progress in Structural Engineering and Materials* 1, pp. 78–87.
Kassimali, A. (2021). *Matrix analysis of structures*. Cengage Learning.
Kennedy, M. C. e A. O'Hagan (2001). «Bayesian Calibration of Computer Models». In: *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)* 63.3, pp. 425–464.
Kent, D. e R. Park (1971). «Flexural Members with Confined Concrete». In: *Journal of the Structural Division, ASCE* 97.ST7.
Kinney, J. (1957). *Indeterminate Structural Analysis*. Out of Print. Addison-Wesley.
Kirsch, C (1898). «Die theorie der elastizitat und die bedurfnisse der festigkeitslehre». In: *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure* 42, pp. 797–807.
Kolosova, G. S. e V. V. Kuroyedov (2013). «Application of Krylov's functions for solving structural mechanical problems». In: *Stroitel'stvo Unikal'nyh Zdanij i Sooruzenij* 9, p. 42.
Ladeveze, P. (1983). «Sur une théorie de l'endommagement anisotrope». In: *Rapport Interne LMT* 34, pp. 1–34.
Lee, T.-H. e K. M. Mosalam (2004). «Probabilistic fiber element modeling of reinforced concrete structures». In: *Computers and Structures* 82, pp. 2285–2299.
Li, V. C. e E. Liang (1986). «Fracture Processes in Concrete and Fiber Reinforced Cementitious Composites». In: *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* 112.6, pp. 566–586.
Lignos, D. G. e H. Krawinkler (2013). «Development and utilization of structural component databases for performance-based earthquake engineering». In: *Journal of Structural Engineering* 139.8, pp. 1382–1394.
Lin, T. e J. Baker (2014). «Conditional Spectra». In: *Encyclopedia of Earthquake Engineering*. A cura di M. Beer et al. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pp. 1–13.
Lin, T. e S. Stotesbury (1981). *Structural Concepts and Systems for Architects and Engineers*. John Wiley.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Love, A. E. H. (1927). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. 4ª ed. Contains extensive historical notes. Cambridge: Cambridge University Press.
Mackie, K. e B. Stojadinovic (2005). *Fragility basis for California highway overpass bridge seismic decision making*. Pacific Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley.
Mahdavi, G. (dic. 2023). «Probabilistic Nonlinear Analysis of Concrete Dams Suffering from AAR». Tesi di dott. Boulder, Colorado: University of Colorado.
Mander, J. B., M. J. Priestley e R Park (1988). «Theoretical stress-strain model for confined concrete». In: *Journal of structural engineering* 114.8, pp. 1804–1826.
Maney, G. A. (1915). «Secondary Stresses and Other Problems in Rigid Frames: A New Method of Solution». In: *Studies in Engineering*. University of Minnesota.
Mashayekhi, M. e H. Estekanchi (2013). «Investigation of strong-motion duration consistency in endurance time excitation functions». In: *Scientia Iranica* 20, pp. 1085–1093.
Mashayekhi, M., H. Estekanchi e H. Vafai (2019a). «Simulation of Endurance Time Excitations Using Increasing Sine Functions». In: *Int. J. Optim. Civil Eng* 9.1, pp. 65–77.
– (2019b). «Simulation of endurance time excitations via wavelet transform». In: *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering* 43.3, pp. 429–443.
Mashayekhi, M. et al. (2018a). «Development of hysteretic energy compatible endurance time excitations and its application». In: *Engineering Structures* 177, pp. 753–769.
Mashayekhi, M. et al. (2018b). «Simulation of Cumulative Absolute Velocity Consistent Endurance Time Excitations». In: *Journal of Earthquake Engineering*, pp. 1–26.
Mazars, J. (1986). «A Description of Micro- and Macroscale Damage of Concrete Structures». In: *Engineering Fracture Mechanics* 25.5–6, pp. 729–737.
Mazzoni, S. et al. (2006). *OpenSees Command Language Manual*. Rapp. tecn. University of California, Berkeley: The Open System for Earthquake Engineering Simulation.
McGuire, W e R. Gallagher (1979). *Matrix Structural Analysis*. First Edition.
McGuire, W. e G. Winter (1968). *Steel structures*. Prentice-Hall.
Menegotto, M. e P. Pinto (1973). «Method of Analysis for Cyclically Loaded Reinforced Concrete Plane Frames including Changes in Geometry and Non-Elastic Behavior». In: *IABSE symposium on resistance and ultimate deformability of structure. Acted on by Well-Defined Repeated Loads. Lisbon: ACmPress*. Vol. 15, pp. 15–22.
Milankovitch, M. (1907). «Theorie der druckkurven». In: *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 55, pp. 1–27.
Mindess, S. e F. Young (1981). *Concrete*. Prentice-Hall, Inc.
Morris, M. (1991). «Factorial Sampling Plans for Preliminary Computational Experiments». In: *Technometrics* 33.2, "161–174".
Moseley, H. (1833). «L. On a new principle in statics, called the Principle of least Pressure». In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 3.16, pp. 285–288.
– (1869). *The mechanical principles of engineering and architecture*. J. Wiley & son.
Nobile, L. e V. Bartolomeo (2014). «Methods for the assessment of historical masonry arches». In: *Proc., 5th European Conf. of Civil Engineering (ECCIE'14)*, pp. 160–167.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Nocedal, J. e S. Wright (2006). *Numerical optimization*. Springer Science & Business Media.
Norris, C. H. e J. Wilbur (1960). *Elementary Structural Analysis*. McGraw-Hill.
Nozari, A. e H. Estekanchi (2011). «Optimization of endurance time acceleration functions for seismic assessment of structures». In: *International Journal of Optimization in Civil Engineering* 1, pp. 257–277.
O'Hara, T. e J. Jacobson (1991). *Standardization of the cumulative absolute velocity*. Rapp. tecn. Electric Power Research Inst.
Olsson, A. e G. Sandberg (2002). «Latin hypercube sampling for stochastic finite element analysis». In: *Journal of Engineering Mechanics* 128.1, pp. 121–125.
OpenAI (2025). *ChatGPT: Conversation with AI*. Generated in response to a user's query. Available at `https://chat.openai.com`.
Ottosen, N. e H. Petersson (1992). *Introduction to the Finite Element Method*. Prentice-Hall.
Padgett, J., B. Nielson e R. DesRoches (2008). «Selection of optimal intensity measures in probabilistic seismic demand models of highway bridge portfolios». In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 37, pp. 711–725.
Park, R. e T. Paulay (1991). *Reinforced concrete structures*. John Wiley & Sons.
Park, Y.-J. e A. H.-S. Ang (1985). «Mechanistic seismic damage model for reinforced concrete». In: *Journal of structural engineering* 111.4, pp. 722–739.
PEER (2014). *Ground Motion Database*. Last viewed November 2014. Pacific Earthquake Engineering Research Center.
Petersson, P. (dic. 1981). *Crack Growth and Development of Fracture Zones in Plain Concrete and similar Materials*. Rapp. tecn. TVBM 1006. Lund, Sweden: Lund Institute of Technology.
Pilkey, W. e W. Wunderlich (1994). *Mechanics of Structures, Variational and Computational Methods*. CRC Press.
Pippard, A. J., E. Tranter e L Chitty (1936). «The Mechanics Of The Voussoir Arch.(Includes Appendix).» In: *Journal of the Institution of Civil Engineers* 4.2, pp. 281–306.
Pippard, A. J. S. e J. F. Baker (1943). *The analysis of engineering structures*. Edward Arnold London.
Pitarka, A. et al. (1998). «Three-dimensional simulation of the near-fault ground motion for the 1995 Hyogo-ken Nanbu (Kobe), Japan, earthquake». In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 88.2, pp. 428–440.
Pollalis, S. N. (1999). *What is a bridge? the making of Calatrava's bridge in Seville*. MIT Press.
Porter, K. (2003). «An overview of PEER's performance-based earthquake engineering methodology». In: *Proceedings of the 9th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering (ICASP9)*. San Francisco, CA.
Porter, K., R. Kennedy e R. Bachman (2007). «Creating Fragility Functions for Performance-Based Earthquake Engineering». In: *Earthquake Spectra* 23, pp. 471–489.
Portland Cement Association (1947). *Handbook of frame constants: Beam factors and moment coefficients for members of variable section*. Portland cement association.
– (1954). *Design of Barrel Shell Roofs*. Rapp. tecn. Portland Cement Association.
Powell, G. H. (dic. 2008). «Structural Analysis: Are We Relying Too Much on Computers. Part 2: A Solution». In: *STRUCTURE Magazine*. Structural Forum article.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Priestley, M. B. (1965). «Evolutionary spectra and non-stationary processes». In: *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, pp. 204–237.
Przemieniecki, J. (1968). *Theory of Matrix Structural Analysis*. Reprinted by Courrier (formerly Dover). New York: McGraw-Hill.
Ragueneau, F. et al. (2006). «Anisotropic damage for concrete within multifibre beam finite element theory». In: *First European Conference on Earthquake Engineering and Seismology*.
Ramamoorthy, S., P. Gardoni e J. Bracci (2006). «Probabilistic Demand Models and Fragility Curves for Reinforced Concrete Frames». In: *Journal of Structural Engineering* 132, pp. 1563–1572.
Rankine, W. (1858). *A Manual of Applied Mechanics*. Charles Griffin e Company.
Reddy, J. N. (2017). *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. John Wiley & Sons.
Reich, R. (mag. 1993). «On the Marriage of Mixed Finite Element Methods and Fracture Mechanics: An Application to Concrete Dams». Tesi di dott. University of Colorado, Boulder.
Rezaeian, S. e A. Der Kiureghian (2008). «A stochastic ground motion model with separable temporal and spectral nonstationarities». In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 37.13, pp. 1565–1584.
– (2010). «Simulation of synthetic ground motions for specified earthquake and site characteristics». In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 39.10, pp. 1155–1180.
Rezaeian, S. e X. Sun (2014). «Stochastic ground motion simulation». In: *Encyclopedia of Earthquake Engineering*. A cura di M. Beer et al. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pp. 1–15.
Richart, F. E., A. Brandtzæg e R. L. Brown (1928). *A study of the failure of concrete under combined compressive stresses*. Rapp. tecn. University of Illinois at Urbana Champaign, College of Engineering . . .
Saenz, L. P. (1964). «discussion of" Equation for the Stress-Strain Curve of Concrete" by Desayi and Krishnan». In: *Journal of the American Concrete Institute* 61, pp. 1229–1235.
Saltelli, A. (2002). «Making Best Use of Model Evaluations to Compute Sensitivity Indices». In: *Computer Physics Communications* 145.2, pp. 280–297.
Saouma, V. e M. Sivaselvan (2014). *Hybrid simulation: Theory, implementation and applications*. CRC Press.
Saouma, V. E. e M. Hariri-Ardebili (2021). *Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures*. Springer-Nature.
Saouma, V. E., D. Kang e G. Haussmann (2012). «A computational finite-element program for hybrid simulation». In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 41.3, pp. 375–389.
Saouma, V. E. et al. (ago. 1991). «Effect of aggregate and specimen size on fracture properties of dam concrete». In: *ASCE, Journal of Materials in Civil Engineering* 3.3, pp. 204–218.
Saouma, V. E. et al. (2013). «Real-time hybrid simulation of a nonductile reinforced concrete frame». In: *Journal of Structural Engineering* 140.2.
Schey, H. (1973). *Div Grad Curl and all That; An Informal Text on Vector Calculus*. W.W. Norton.
Schodek, D. e M. Bechthold (2014). *Structures*. Pearson.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Schrama, W. (2021). «A Structural Analysis of Timber Reciprocal Frames». In: *TU Delft, Civil Engineering*. Bachelor Thesis.
Schueller, W. (1996). *The design of Building Structures*. Prentice Hall.
Scott, B., R. Park e M. Priestley (1982). «Stress-Strain Behavior of Concrete Confined by Overlapping Hoops at Low and High Strain Rages». In: *ACI Journal* 79.1, pp. 13–27.
SEAOC (1995). *Performance-based seismic engineerin, SEAOC Vision 2000 Committee*. Rapp. tecn. Sacramento, CA: Structural Engineers Association of California.
Segura, C. (2011). «Implementation Of Lumped Plasticity Models And Developments In An Object Oriented Nonlinear Finite Element Code». Tesi di laurea mag. University of Colorado, Boulder.
Shinozuka, M. e Y Sata (1967). «Simulation of nonstationary random process». In: *Journal of the Engineering Mechanics Division* 93.1, pp. 11–40.
Slate, F. e S. Olsefski (1963). «X-Rays for Study of Internal Structures and Microcracking of Concrete». In: *Journal of the American Concrete Institute* 60, pp. 575–587.
Smars, P. (2000). «Etudes sur la stabilité des arcs et voûtes». Tesi di dott. Katholieke Universiteit Leuven.
– (2022). Personal Communication.
Sobol', I. M. (2001). «Global Sensitivity Indices for Nonlinear Mathematical Models and Their Monte Carlo Estimates». In: *Mathematics and Computers in Simulation* 55.1–3, pp. 271–280.
Sohier, H., H. Piet-Lahanier e J.-L. Farges (2015). «Analysis and optimization of an air-launch-to-orbit separation». In: *Acta Astronautica* 108, "18–29".
Sohier, H., J.-L. Farges e H. Piet-Lahanier (2014). «Improved of the Representativity of the Morris Method for Air-Launch-to-Orbit Separation». In: *Preprints of the 19th World Congress*.
Sokolnikoff, I. (1956). *Mathematical Theory of Elasticity*. New York, NY.: McGraw-Hill.
Somerville, P. et al. (1997). «Modification of empirical strong ground motion attenuation relations to include the amplitude and duration effects of rupture directivity». In: *Seismological Research Letters* 68.1, pp. 199–222.
Sonavane, T. (2014). «Analysis of Arches». Tesi di laurea mag. Boulder, Colorado: University of Colorado.
Southwell, R. V. (1935). «Stress-calculation in frameworks by the method of" systematic relaxation of constraints"—I and II». In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences* 151.872, pp. 56–95.
Spacone, E., V. Ciampi e F. Filippou (ago. 1992). *A BEAM ELEMENT FOR SEISMIC DAMAGE ANALYSIS*. Rapp. tecn. UCB/EERC-92/07. Earthquake Engineering Research Center College of Engineering, University of California, Berkeley.
Stewart, J. (2009). *Verification Methods and NRC Regulations: A Brief Overview*. Rapp. tecn. Sandia National Lab.(SNL-NM), Albuquerque, NM (United States).
Suselo, A. A. (2021). «Simulated Behavior of Rectangular Reinforced Concrete Columns under Seismic Loading». Tesi di dott. The University of Texas at San Antonio.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Taborda, R. e D. Roten (2014). «Physics-based ground-motion simulation». In: *Encyclopedia of Earthquake Engineering*. A cura di M. Beer et al. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pp. 1–33.
Takeda, T., M. A. Sozen e N. N. Nielsen (1970). «Reinforced concrete response to simulated earthquakes». In: *Journal of the structural division* 96.12, pp. 2557–2573.
Taucer, F, E. Spacone e F. Filippou (1991a). «A fiber beam-column element for seismic response analysis of reinforced concrete structures: Earthquake Engineering Research Center». In: *College of Engineering, University of California*.
– (1991b). *A fiber beam-column element for seismic response analysis of reinforced concrete structures: Earthquake Engineering Research Center*. Rapp. tecn. College of Engineering, University of California.
Thacker, B. et al. (2004). *Concepts of Model Verification and Validation*. Rapp. tecn. LA-14167. Los Alamos National Laboratory.
Thandavamoothy, T. (2011). *Structural Analysis*. First Edition. YMCA Library Building, New Delhi, India: OXFORD University Press, pp. 1016–1088.
Timoshenko, S., S. Woinowsky-Krieger et al. (1959). *Theory of plates and shells*. Vol. 2. McGraw-hill New York.
USBR-manual (2011). *Dam safety risk analysis, Best practices training manual, Version 2.2*. Rapp. tecn. Denver, Colorado: U.S. Department of the Interior Bureau of Reclamation in coorporation with the U.S. Army Corps of Engineers.
USGS (2003). *PSHA Interactive Deaggregation Tool, U.S. Geological Survey*.
Vamvatsikos, D. e C. Cornell (2002). «Incremental dynamic analysis». In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 31, pp. 491–514.
– (2004). «Applied incremental dynamic analysis». In: *Earthquake Spectra* 20, pp. 523–553.
Červenka, J. (1994). «Discrete crack modeling in concrete structures». Tesi di dott. Boulder, Colorado: University of Colorado.
Vitruvius (1960). *The Ten Books on Architecture*. Dover.
Vlasov, V. (1961). «Thin walled elastic beams (2nd edn) National Science Foundation». In: *Washington, DC*.
Voldoire, F. e Y. Bamberger (2008). *Mécanique des structures*. Presses Ponts et Chaussées.
Wang, C.-h. et al. (2001). «Hysteretic models for deteriorating inelastic structures». In: *Journal of Engineering Mechanics* 127.11, pp. 1200–1202.
Wang, G. et al. (2016). «A general definition of integrated strong motion duration and its effect on seismic demands of concrete gravity dams». In: *Engineering Structures* 125, pp. 481–493.
Wang, W., C. Gu e T. Bao (2013). «Safety Monitoring Index of High Concrete Gravity Dam Based on Failure Mechanism of Instability». In: *Mathematical Problems in Engineering* 2013, pp. 1–14.
Wen, Y.-K. (1976). «Method for random vibration of hysteretic systems». In: *Journal of the engineering mechanics division* 102.2, pp. 249–263.
Westergaard, H. (1933). «Water Pressures on Dams During Earthquakes». In: *Transactions ASCE* 59.8, pp. 418–433.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

White, R., P. Gergely e R. Sexmith (1976). *Structural Engineering*. Out of Print. John Wiley & Sons.
Whitehead, R. (2020). «Sarinen's Shells: The Evolving Influence of Engineering and Construction». In: *Constructing Building Enclosures*. Routledge, pp. 105–123.
Whitman, F. et al. (1988). «Fracture Energy and Strain Softening of Concrete as Determined by Means of Compact Tension Specimens». In: *Materials and Structures* 21, pp. 21–32.
Whitney, C. et al. (1952). *Manuals of Engineering Practice-31: Design of Cylindrical Concrete Shell Roofs*. Rapp. tecn. New York: American Society of Civil Engineering.
Whittaker03, A., R. Hamburger e A. Mahoney (2003). «Performance-based engineering of buildings for extreme events». In: *Proc., Steel Building Symp. Blast and Progressive Collapse Resistance*, pp. 55–66.
Williams, M. S., I. Villemure e R. G. Sexsmith (1997). «Evaluation of seismic damage indices for concrete elements loaded in combined shear and flexure». In: *Structural Journal* 94.3, pp. 315–322.
Winkler, E. (1879). «*Die Lage der Stützlinie im Gewölbe*». In: *Deutsche Bauzeitung* 13, pp. 117–119, 127–128, 130.
– (1880). «*Die Lage der Stützlinie im Gewölbe*». In: *Deutsche Bauzeitung* 14, pp. 58–60.
Yamamoto, Y. (2011). «Stochastic model for earthquake ground motion using wavelet packets». Tesi di dott. Palo-Alto, CA: Stanford University, Stanford.
Yamamoto, Y. e J. Baker (2013). «Stochastic model for earthquake ground motion using wavelet packets». In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 103.6, pp. 3044–3056.
Yassin, M. H. M. (1994). «Nonlinear analysis of prestressed concrete structures under monotonic and cyclic loads». Tesi di dott. University of California.
Youngs, R. et al. (1997). «Strong ground motion attenuation relationships for subduction zone earthquakes». In: *Seismological Research Letters* 68.1, pp. 58–73.
Zareian, F. e H. Krawinkler (2009). *Simplified performance based earthquake engineering, Report No. 169*. Rapp. tecn. Stanford University.
Zareian, F. et al. (2010). «Basic concepts and performance measures in prediction of collapse of buildings under earthquake ground motions». In: *The Structural Design of Tall and Special Buildings* 19, pp. 167–181.
Zeris, C. e S. Mahin (1988). «Analysis of Reinforced Concrete Beam-Columns under Uniaxial Excitation.» In: *Journal of Structural Engineering, ASCE* 114(ST 4), pp. 804–820.

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Indice tematico — Parti II–IV: Analisi

$p - \delta$, 1866, 1899
- Shear
  V_{2500}, 2210
chap: regione della fiducia
  quantificazione, 2067
chap: regione della fiduciaAnalisi, 2067

AASHTO, 2192
acknowledgments, xxi
airfoil, 759
airplane, 793
aleatory, 2068
alkali aggregate reaction, 2115, 3033
allowable stress design, 1771
alluvial plot, 810
anagram, 2991
analysis
  cloud, 2225, 2229
  damage, 2257
  endurance time, 2229
  loss, 2249
  multiple strip, 2222
  nonlinear, 2257
  response spectrum, 2191
analytical baseline, 1734
annual rate of exceedance, 2170
approximate, 1321
approximate analysis, 1317
  cantilever method, 1341
  frames, 1351
  lateral deflections, 1349
  portal method, 1327
  tube systems, 1344
  vertical load, 1324
  wall subsystems, 1343
arch, 1095
  circular, 1096
  elastic Center, 1126
  generalized solution, 1111
  helicoidal, 1136
  hingeless, 1104
  hingeless circular, 2348
  masonry, 1066
  parabolic, 1395
  temperature, 1392
  three hinged, 1097
  three-hinged circular, 2322
  two hinged, 1103
  two hinged arch design, 1384
  variable i, 1395
arche
  three-hinged circular, 2306
Archimedes' principle, 798
architects
  Jahn, Helmut, 952
  Pei, I.M., 952, 1136
architecture
  Dulles airport, 952
  Louvre staircase, 1136
  Pyramide du Louvre, 952
  Sagrada Familia, 1136
  Sony Center, 952
attenuation models, 2138
author, xli

COPIA DI REVISIONE

I Quattro Libri dell'Analisi Strutturale © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

autocovariance, 2070
axial load
  impact on flexural deformation, 1890
axial vibration
  natural frequencies, 1750
axisymmetry, 2994

backbone, 2018, 2036
barge, 794
base isolation, 1282, 1754
  example, 1282
Bauschinger
  effect, 1784
  effect, 1781
Bayesian parameter identification, 2110
beam
  bimetallic, 866
  conjugate, 878, 879
  curved, 826, 953, 1133, 1520
  elastic foundation, 855
  Euler-Bernoulli, 1412
  flexure & shear deformation, 915
  floating, 854
  Galerkin, 1715
  king post, 952
  large deflections, 1004
  queen post, 950
  rigid offset, 1528
  ring, 923
  semi-rigid, 1530
  thermal, 916
  Timoshenko, 1416
  torsion & flexure, 913
  variable cross section, 1536
beam-column, 1413
  nonlinear formulation, 1907
Belidor, 1068
bicycle wheel, 859
biffurcation, 1884
bifurcation point, 1009
bimoment, 890
body force, 2978
Botero, 2163
boundary conditions, 1408, 1464, 1466, 1468, 1558, 3000
  Dirichlet, 1559
  inclined, 792
  mixed, 1559
  Neuman, 1559
boundary value problem, 1408
box culvert, 983
bridge
  Alamillo, 2422
  Dora Riparia, 1076
  Gard, 1141
  George Washington, 1377
  Goethals, 2191
  loads, 2293
  suspension, 1052
  Viaducte de Chillon, 848
  Walnut Lane, 1311
Broken Obelisk, 803
bubble function, 1657
buckling, 1885
  senza $\mathbf{k}_{geom}$, 1899
  column, 1008, 1885
  constrained, 1020
  eigenvalue, 1011
  elastic, 1012
  frame, 1887
  frames, 1025
  inelastic, 1028
  water tower, 1021
buoyancy
  centre of, 798
Butterworth filter, 2912

cable, 1031
  catenary, 1056
  comparison, 1063
  parabola, 1038
  prestress, 1055
  sag, 1054
  temperature, 1054, 1055
  trolley cable, 1060

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

capacity
Curve, 2179
Diagram, 2179
Function, 2179
curve, 2184, 2186, 2221
function, 2227
capacity design
example, 1278
Carder, 782
Castigliano, 1075, 1121, 1125
theorems, 1609
casualties, 2250
Cauchy strain, 2984
Cauchy stress tensor, 2980
Cauchy tetrahedron, 2978
Cauchy's equation of motion, 2987
center of pressure, 1086
central difference method, 1747
chap: regione della fiducia, 2067
characteristic equation, 2300
Charles Mosca, 1076
chemical bonds, 1782
chord, 1032
circular ring, 923
Clapeyron's theorem, 957
coefficient of variation, 2953
coefficient plot, 2080
collapse, 2264
mechanism, 2219
column
life-safety, 2047
compressive meridian, 1779
computational fuse, 2011
condensation, 1502
condition number, 1494, 1498
condition of incompressibility, 2986
conditional spectra, 2149
confidence interval, 2950
congruent transformation, 1522
consequnce function, 2250
conservation laws, 2985
conservation of energy, 2989
conservation of momentum, 2987
consistency condition, 1788
constitutive
Bauschinger, 1961
bilinear, 1961
Drucker-Prager, 1780
Ghannoum, 2035
heuristic models, 1959
hysteretic, 2015
Ibarra Krawinkler, 2015
Mohr-Coulomb, 1779
peak oriented, 2020
pinching, 2023
shear limit state, 2011
strength degradation, 2027
Tresca, 1778
constitutive equations, 2991
continuity equation, 2986
continuum mechanics, 1958, 2980
control
displacement, 1876
load, 1868
convergence, 1859, 1861, 1873
coordinate system
stiffness method, 1403
triangular, 1634
correlation, 2069
matrix, 2069
correlation coefficient, 2954
costs, 2250
Coulomb, 1073
Couplet, 1071
covariance, 2069, 2954
spatial, 2069
temporal, 2070
cumulative
displacement demand, 2240
inelastic duration, 2237
distribution function, 2950

D'Alembert, 1577
d'Alembert's principle, 1247

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

dam
  pine flat, 2145
damage
  measure, 2258
  multiple, 2264
  assessment, 2187
  Index, 2241
  index, 2237
  metrics, 2240
  probabilistic representation, 2239
damping
  Rayleigh coefficients, 1733
damping ratio, 1250
Danyzy, 1072
data mining, 2042
de la Hire, 1067
de Veubeke, 1574
decision
  variable, 2259
decomposition, 2923
  Cholesky, 2927
  LU, 2925
  QR, 2930
  singular value, 1498, 2928
dedication, iv
deflected shape diagrams, 1318
deflection
  curvature, 857
  curvature area method, 868
  integration, 850
  large, 1895
  virtual work, 900
deformation theory, 1784
degree
  freedom, 1404
  freedom-rotational, 1703
  kinematic indeterminacy, 1407
demand, 2184
  capacity ratio, 2237
  curve, 2187
  loads, 2198
  spectrum, 2186
design codes, 1285, 1292
design vs. analysis, 743, 1285, 2256
determinant, 785
deterministic, 1288, 1771
differential vector operator, 3036
direction cosines, 817, 1452
Dirichlet, 1408
Dirichlet b.c., 3001
discrete Fourier transform, 2914
discretization, 1466
dislocation, 1783
displacement control, 1876
displacement ductility, 1278, 1753
distributed plasticity, 1958
distribution
  bivariate, 2959
  bivariate normal, 2960
  gumbel, 2957
  lognormal, 2956
  noraml (Gauss), 2955
  Poisson, 2172
  uniform, 2955
  univariate, 2955
  weibull, 2956
downtime, 2250
drift, 1317, 2186
drilled shaft, 2194
ductility, 1797
  example, 1278
  ratio, 1811
Duhamel integral, 1259
  rectangular pulse, 1260
  step load, 1259
Dulles airport, 1358
dummy index, 2970
dynamic amplification factor, 1259
dynamic analysis, 1722
  frames, 1724
  when, 1246
dynamic effects, 2185

effective length, 1025

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

effective mass matrix, 1745
Eiffel tower, 1365
eigenvalue, 1492, 1746, 2931
  buckling, 1011
  problem, 1885
  stiffness, 1492
  stiffness matrix, 1489
eigenvalues & eigenvectors, 2932
Einstein's notation, 2970
elastic
  instability, 1884
  solution, 1822
element
  hierarchical, 1657
  isoparametric, 1673
  Lagrangian, 1654
  nodal equivalent loads, 1694
  parasitic shear, 1701
  stress recovery, 1691
elementary effect, 2082
elliptic integral, 1005
elliptic integrals, 2299
endurance
  time analysis, 2226
  time excitation functions, 2157
engineering
  demand parameter, 2233, 2258
  shear strain, 2983
epistemic, 2068
equal displacement rule, 1278
equation of motion, 2987
equations of statics, 1503
equilibrium, 781
  global, 975
equivalent viscous damping, 1276
error
  estimate, 1861
  hidden, 1914
error discovery program, xxiii
Euler, 1553
  equation, 1556
  method, 1735, 1857
Euler-Lagrange, 1566
Eulerian angles, 1457
explicit
  incremental analysis, 1893
  method, 1864

factor of safety, 1765
failure mode, 1765, 2183
fast Fourrier transform, 2912
fault tolerance, 1765
Fermi's solution, 1317
FFT, 2914
filter
  Butterworth, 2912
finite element, 1661
  bilinear rectangle, 1640
  brick, 1641
  compatibility, 1671
  constant strain triangle, 1639
  error, 1669
  lower bound solution, 1670
  mesh verification, 2044
  modelling, 2040
  numerical integration, 1685
  requirements, 1667
flexibility, 929
  method, 1424
  matrix, 936
floating body, 798
flow rule, 1786
flux, 2985
force, 1584, 2978
  in terms of displacement, 965
force-shear-moment
  differential relations, 830
  integral relations, 831
foreword, v
form follows function, 800
Fourier analysis
  periodic forcing, 1263
Fourier transform, 2914
fracture process zone, 2000

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

fragility
curve, 2239
curve vs. surface, 2266
definitions, 2263
vs. vulnerability vs. hazard, 2263
continuous vs. discrete, 2265
curve, 2263
role in PBEE, 2267
free body diagram, 785
free index, 2970
free vibration, 1253
initial conditions, 1734
frequency domain, 2913
frequency response function, 1263
function
consequence, 2250
cumulative distribution, 2950
fundamental laws, 2984
funicular
cable, 1032
polygon, 1032

gable frame, 790
Galerkin, 1705
FE discretization, 1715
weak form, 1712
Galileo, 882, 899
Gauss elimination, 2924
Gauss-Jordan decomposition, 2924
Gauss-Seidel, 990, 2930
geometric
nonlinearity, 1880
stiffness matrix, 1881
geometric nonlinearity, 1032
gondola, 1036
grid, 793
ground motion
intensity, 2138
prediction equation, 2138
Gutenberg Richter law, 2135
guyed tower, 1051

Hamilton, 1566, 1577
hardening
isotropic, 1781, 1786, 1790
kinematic, 1781, 1791
modulus, 1785
work, 1784
hazard
analysis, 1765
curve, 2171
heat transfer, 1718
helicoidal, 1136
Hellinger-Reissner, 1574
hermitian interpolation, 1649
high frequency, 1723
Hilber-Hughes-Taylor, 1741
hinge formation, 2186, 2199
Hooke's law, 2992
hourglas, 1700
Hu-Washizu, 1573
hydrodynamic, 2988
hydrostatic fluid, 2988
hydrostatic pressure
dependent, 1779
independent, 1777
hyperstatic, 783
hypocentral distance, 2140
hysteresis, 1275
energy dissipation, 1276

IDA curve, 2228
identicon, 2427, 2740
identifiability, 2108
ill-condition, 1497
Impetus, 2978
impulse response function
example, 1258
incremental dynamic analysis, 2220
independent mechanisms, 1826
index
performance, 2237
indicial notation, 2970
indirect methods, 2930
influence line, 770, 992

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

inner product, 2972
instability, 784
  geometric, 784
integration
  full, 1698
  reduced, 1699
  selective reduced, 1700
integration methods, 1866
intensity
  measure, 2258
  measure, 2220, 2258
interaction diagram, 1302
internal forces, 824
interpolation
  Hermitian, 1649
  Lagrangian, 1643
interstory drift, 2240
invariants, 2976
isopleth, 1027
isostatic, 783

Jacobian, 1860
Jacobsen formula, 1276
Joyner-Boore distance, 2140

Kiewit, 2191
kinematic
  indeterminacy, 1407
  instability, 1511
  matrix, 1512
kinematically admissible field, 1824
Kuhn-Tucker, 1787, 1984
kurtosis, 2954

laboratory observations, 1781
Lagrange, 1578
Lagrangian
  function, 1567
  interpolation, 1643
Lame's constants, 2992
latin hypercube, 2072, 2085
  etymology, 2073
  example, 2074
law
  large numbers, 2947
layer/fiber section, 1918
least squares
  weighted nonlinear, 2105
Legendre polynomial, 1690
Leonardo da Vinci, 782
Levenberg–Marquardt, 2104
Levenberg-Marquardt, 2727, 3029
limit state, 2234, 2265
  elements, 1998
  calibration&validation, 2236
  multiple, 2236
  shear, 2011
linear equations, 2922
Linear Regression, 2224
linearization, 1857
load
  resistance and factor design, 1771
  bridge, 2293
  combination, 770, 2294
  dead, 2279
  demand, 2209
  earthquakes, 2283
  hydrostatic, 786
  impact, 765
  incremental, 2185
  limit, 1823
  live, 2279
  parabolic, 788
  path, 771
  pattern, 2185
  placement, 2297
  projected, 768
  secondary, 766
  thermal, 767
  unsafe theorem, 1824
  wind, 758, 2279
logarithmic decrement, 1253
logic tree, 2170
lower bound
  lumped plasticity analogy, 1849

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

pushover analogy, 1845
slabs, 1839
theorem, 1830
LRFD, 1289
Limitations, 2253
lsqnonlin, 2115, 3031, 3033
lumped-plasticity, 1759, 1849, 1947, 2009, 2053, 2062, 2568

MüLler-Breslau, 996
Magazini Generali, 1373
Maillart, 1373
margin of safety, 1765
material coordinates, 2981
matrix
augmented stiffness, 1464
condition number, 1494
decomposition, 1464
decomposition vs. inversion, 1498
ill-conditioned, 1495
orthogonal, 1452
structural analysis, 1399
matrix inversion, 2922
maximum likelihood estimation, 2222, 2224
Maxwell-Betti, 904, 937, 996
mean, 2952
mechanics of deformable bodies, 2968
mechanics review, 2968
mechanism, 1823
method of moments, 2221
modal analysis, 1269
example, 1270
mode shapes, 1268
model
complexity, 2042
Rezaeian and Der Kiureghian, 2153
Yamamoto and Baker, 2155
modified Newton-Raphson, 1871
modulus
hardening, 1785
tangent, 1788
tangent elastic, 1785
moment
curvature
generalization, 1809
curvature
$\sigma - \varepsilon \rightarrow m - \phi$, 1801
$m - \phi$, 1798
distribution, 984
envelope, 832
redistribution, 2005
statistics, 2951
Monte Carlo simulation, 2072
Morris method, 2082
Moseley, 1075
motion
Cauchy equations of, 2987
first law of, 2978
fluid, 759
ground, 746
harmonic, 1253
rigid body, 1492, 1511, 1630, 1668
water, 3014
Mozart, 2991

natural frequency, 1249
footbridge, 1274
Nervi
Palazetto dello sport, 800
Neuman, 1408
Neuman b.c., 3001
Newmark, Nathan, 1739
Newmark-beta method, 1748
Newton
method, 1856
Newtonian fluid, 2988
nodal equivalent forces, 967
nodal numbering, 1499
nomograph, 1027
nonlinear
analysis
element formulation, 1903
notation, xxvii
sources, 1759

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

types of, 1762
why, 1761
equations
Runge-Kutta, 1736
Euler method, 1735
norm, 1450
Euclidian, 3031
euclidian, 1860
infinity, 1874
notation, xxiv, xxxii
indicial, 2969
Voigt, 2969
numerical analysis
explicit, 1743
Hilber-Hughes-Taylor, 1741
implicit, 1739
numerical integration, 1685
Gauss-Legendre, 1688
newton-cotes, 1686

occurrence time, 2144
octahedral stress, 2976
opensees, 1965
operator
differential, 1706
incremental, 1893
Jacobian, 1676, 1679
strain $\mathbf{I}$, 2984
tensor, 2971
variation, 1554
optimality, 3027

Pacific Earthquake Engineering Research Center, 2235
parallel systems, 2964
parameter identification, 2097
MATLAB program, 2117
Pascal triangle, 1630
PBEE
example, 2268
first generation, 2254
implementation, 2261
key documents, 2273
Matlab example, 2735
PBA, 2256
PBSD, 2256
SEAOC, 2245
second generation, 2256
peak
ground acceleration, 2174
shear force, 2240
performance
assessments
intensity, 2151
scenario, 2151
time based, 2151
based
assessment, 2244
earthquake engineering, 2243
earthquake engineering (PBEE), 1772, 2252
engineering, 1315, 2242
seismic design, 2243
point, 2186
pieds droits, 1069
pipeline, 917
Pippard, 1076
plane strain, 2993
plane stress, 2994
plastic
displacement, 2209
moment, 2206
hinge, 877, 1823, 2185
hinge length, 2206
length, 2007
modulus, 1785
solution, 1822
zone, 2000
plates, 1153
axisymmetric bending, 1164
circular plates, 1164
Kirchoff, 1158
Reissner-Mindlin, 1153
variational formulation, 1169
point estimate method, 2076

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

Poisson's probability model, 2144
polynomial chaos expansion, 2079
position, 2981
potential
  energy, 1586, 1605
  external work, 1586
potential energy, 1562
precision, 1497
preconditioning, 1497, 1498, 2933
predictor, corrector, 1868
presure
  dynamic, 758
principal values, 2975
principle
  complementary virtual work, 1596, 1830
  Hamilton, 1566
  thermodynamics, 1583
  total complementary potential energy, 1609
  total potential energy, 1562, 1605
  virtual work, 1601, 1824
probabilistic
  risk assessment, 1765
  seismic demand analysis, 2225
probability, 2945
  conditional, 2947
  distribution, 2948
prolegomena, vi
pushover, 2183
  analysis, 1844

QR decomposition, 2930

R/C
  beams, 751
  bond, 1795
  buildings, 772
  columns LRFD, 1302
  moment of inertia, 2003
  plastic strength, 1293
  pushover, 2194
Random Sample Consensus (RANSAC), 2100
random variable, 2947, 2948
random variables, 2089
rank, 1493, 2931
rate theory, 1785
Rayleigh damping, 1269
  calibration, 1733
Rayleigh-Ritz, 1615
reaction, 779
reaction vector, 1869
reciprocal frame
  example, 841
recurrence relationship, 2135
redundancy, 1765
reliability index, 1290, 1765, 2962
repair cost, 2250
residual forces, 1869
resonance, 1255
  pedestrian, 1274
response spectra, 2200, 2227
response spectrum, 1265
  example, 1266
retrofit, 2184, 2187
rigidity factor, 1533
risk assessment, 1765
Robin b.c., 3001
root finding, 1856
rupture distance, 2140

safety, 1765
safety-critical system, 1765
sag, 1031
Saint-Venant, 889
Salieri, 2991
Secant
  method, 1863
  Newton, 1872
seismic
  coefficient, 2185
  hazard analysis
    deterministic, 2141
    probabilisitc, 2142

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

hazard curves, 2145
hazard deaggregation, 2147
hazard map, 2147
load, 761
source model, 2137
Seismic hazard analysis
Matlab example, 2732
seismic record
filtering, 2912
seismogenic
depth, 2140
distance, 2140
sensitivity analysis, 2081
serendipity, 1631
series system, 2964
shape functions, 1632, 1633
shear building, 1270
shear deformation
transverse, 883
shear modulus, 2992
shells, 1172
cylindrical free, 1200
cylindrical on beams, 1227
design barrel roof, 2393
general theory, 1173
membrane, 1198
shallow, 1194
shock spectrum, 1260, 1261
sign convention
analysis, 964
design, 829
stiffness method, 1403
Simpson's rule, 1362
single-degree-of-freedom system (SDOF), 1248
singularity, 2931
skewness, 2953
slenderness ratio, 1025
slope deflection, 974
Smars, 1083
Sobol indices, 2087
soil-structure interaction, 1280, 1753
solid mechanics, 2968
spatial coordinates, 2981
spatial distribution ratio, 2238
spectra
target response, 2148
spring
defelction, 1615
helicoidal, 864, 925
standard deviation, 2952
state determination
beam column
flexibility, 1927
stiffness, 1911
truss, 1906
zero length element, 1947
zero length section, 1953
static
determinacy, 783
indeterminacy, 1407
statics
matrix, 816
statistics, 2945
stiffness
matrix
tangent, 1868
geometric, 1881
assembly, 1469, 1522
augmented, 1463
axial vs. flexural, 1724
coefficients, 1410
computer implementation, 1468
definition, 1410
direct, 1424
eigenvalues, 1489
element, 1410
equation numbers, 1469
flexibility relation, 1516
grid element, 1413
location matrix, 1469
matrix derivation, 1664
nodal numbering, 1499
orthogonal structures, 1422

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

strain energy, 1492
stochastic ground motion, 2152
strain, 2983
large, 1882
linear operator, 2984
strain energy, 1584
stiffness matrix, 1492
virtual, 1586
strains, 2982
Eulerian, 2982
stress
geometric representation, 2981
hydrostatic, 2980
recovery, 1465
Stressor, 2179
structural
design, 1285
ASD, 1288
LRFD, 1289
performance based earthquake engineering, 1315
prestressed concrete, 1311
R/C beam, 1293
R/C column, 1302
safety, 1286
response, 2186
structural dynamics, 1246
structures
idealization, 1401
modeling, xli, 1880
substructuring, 1502
Sum of Squared Error Minimization, 2223
supports, 780

tangent modulus
engineering derivation, 1789
generalized derivation, 1786
tangent stiffness matrix, 1729
Taylor series, 1669, 1736, 1739, 1857, 3026
finite difference estimation, 2077
temperature
beam deflection, 916
curvature relation, 873
frame deflection, 874
tensile meridian, 1779
tension stiffening, 1973, 2002
tensor, 2971
stress, 2978
tensor notation, 2969
tensors, 2971
thermodynamics
potential, 1958
first law, 1583, 2989
first principle, 2989
law, 902
thrust, 1032
thrust line, 1086
time discretization, 1737
Timoshenko, 1416
Tonti diagram
D'Alembert, 1579
deformable body, 3002
Hamilton, 1579
Hu-Washizu, 1576
Lagrange, 1579
Tonti diagrams, 3001
tornado diagram, 2094
torsion
deformation, 888
St Venant, 1421
Vlasov, 1419
torsional
deformation
Vlasov/nonuniform, 890
torsione
deformazione
s^t Venant/Uniform, 889
traction, 1584, 2978
traction vectors, 2979
transformation
Eulerian angles, 1457
matrix, 1448
tensors, 2974
vectors, 2973
transient dynamic analysis, 1723

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.

transverse isotropy, 2993
tri-diagonal matrix, 957
tributatry area, 774
truss
  analysis, 804
  nonlinear formulation, 1904
  stiffness matrix, 1412
trust region, 3027
tuned mass damper, 1280, 1754
  example, 1281

uniform hazard spectra, 2149
upper bound theorem, 1824

variance, 2952
variational formulation, 1728
variational principle
  Hu-Washizu, 1573
Varignon's theorem, 782
vector fields, 2978
verification & validation, 2044
virtual work
  complementary, 901
visualization, 2116, 3034
Voigt notation, 2969, 2980
von Mises, 1778
voussoir, 1066
  generalized solution, 1083
  historical development, 1067
vulnerability, 2263

warping constant, 890, 893
wave equation, 1272, 1750
wave speed
  axial, 1750
weak form, 1555, 1714
weak points, 2184
weakest link, 2042
weight factor, 1715
weighted residual
  Galerkin, 1705
Winkler, 1076
work, 1585
  complementary virtual, 1596
  internal, 1587
  path independence, 1588
  principle virtual, 1601
  virtual, 1596

yield
  condition, 1776
  function, 1776, 1786
  line, 1839, 2000
  strength, 2205
  stress, 1784
  surface, 1776

zero-length
  element, 1947
  section element, 1951

COPIA DI REVISIONE

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Tradotto da IA dalla versione originale inglese,
potrebbero verificarsi errori.